UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

SECRETARÍA ACADÉMICA

COORDINACIÓN DE POSGRADO

DOCTORADO EN EDUCACIÓN

“El razonamiento multiplicativo en jóvenes universitarios del área Económico Administrativa”

Tesis que para obtener el grado de Doctor en Educación Matemática presenta el

Mtro. Francisco Javier Maya Juárez

Director de Tesis:
Dr. José Luis Cortina Morfín

México D.F Mayo 2011

ÍNDICE

Capítulo	Nombre del Capítulo o Sección	Página
3.2.1.2	Prácticas matemáticas	64
3.3	Distinción entre Teoría Instruccional Local y Trayectoria Hipotética de aprendizaje	65
3.4	Principios que orientan las investigaciones de la Educación en Matemáticas Realistas y el Diseño Instruccional	66
3.4.1	Establecimiento de normas sociales	66
3.4.2	Reinvención guiada	67
3.4.3	Fenomenología didáctica	67
3.4.4	Punto de partida "experiencialmente real" para el aprendizaje	68
3.4.5	Puntos de partida justificables en términos de los puntos terminales	69
3.4.6	Evolución de los medios de matematización	70
3.5	El diseño instruccional como una metodología científica de investigación	71
4	**Diseño de la investigación**	77
4.1	Primera fase: el desarrollo de la secuencia conceptual inicial	77
4.2	Segunda fase: Proceso de formulación de la conjetura sobre el punto de partida	79
4.3	Tercera Fase: exploración de la viabilidad de la conjetura inicial	83
4.4	Otros principios del diseño instruccional utilizados en las diferentes fases de la investigación	84
4.4.1	El principio de la fenomenología didáctica	84
4.4.2	Coherencia entre puntos iniciales y finales de la secuencia	85
4.4.3	Evolución de los medios de matematización	85
4.5	Conjunto de registros empíricos	86
4.5.1	Evaluaciones del desempeño grupal	87
4.5.2	Entrevistas individuales semiestructuradas	87
4.5.3	Discusiones informales con el asesor	87
5	**Los números racionales como concepto de aprendizaje y su relación con una secuencia instruccional inicial para las áreas económico administrativas**	**89**
5.1	Revisión de la literatura	90
5.1.1	Estudios empíricos	90
5.1.2	Análisis racional de Conceptos	91
5.1.3	Entrevistas clínicas	93
5.1.4	Diseño Experimental	96
5.2	Los modelos de los números racionales	97
5.2.1	El modelo partitivo de los números racionales	97
5.2.2	El modelo comparativo de los números racionales	100
5.3	Las relaciones multiplicativas como fundamento conceptual de ideas indispensables en las áreas Económico Administrativas	101

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

Introducción

Desde principios del siglo pasado, en nuestro país se ha aspirado a que una fracción significativa de la población pueda contar con una educación a nivel superior. Además, se ha enfatizado que tal tipo de preparación debe servir para que los ciudadanos que la obtienen asimilen o generen más rápidamente nuevas tecnologías o propicien un constante mejoramiento en el desempeño de instituciones públicas y privadas. También, se ha supuesto que dichas condiciones, al favorecer el desarrollo económico de la nación, permitirían un incremento importante en la calidad de vida de la mayoría de las familias mexicanas. (ANUIES, 2000; Luengo, 2003; OCDE, 1997; SEP, 2003)

Podría considerarse entonces que los beneficios de contar con la mayor proporción posible de habitantes con una educación superior son bastante deseables. Sin embargo, en la experiencia personal de alguien que ha trabajado como docente a ese nivel educativo[1] no deja de parecer sorprendente el desfase que existe entre el tipo de preparación que deberían tener los jóvenes para alcanzar las aspiraciones señaladas, y aquella que realmente logran en su paso por la universidad.

Desde el inicio de mi trabajo como profesor de las áreas económico administrativas en una universidad privada, he encontrado muchas veces que los jóvenes tienen tal tipo de rezagos en su formación matemática, y específicamente, en su razonamiento aritmético, que resulta difícil discutir con ellos ideas que son necesarias para sus profesiones y su vida cotidiana. Entre estas ideas se destaca el crecimiento porcentual de los costos o ingresos de una empresa, el cálculo del porcentaje del precio de una mercancía que debe pagarse como impuesto, y el efecto que tienen las tasas de interés compuestas en la evolución del monto que debe pagarse por un crédito bancario.

Pero la situación de mis alumnos no es un caso aislado. Como explico en el capítulo 1 de esta tesis, en los últimos años los estudiantes mexicanos de primaria y secundaria han mostrado serios rezagos en su aprendizaje de las Matemáticas tanto en pruebas internacionales como nacionales (Backhoff, 2006; OCDE 2006;

[1] Desde enero de 2003 he trabajado como docente en una universidad privada al sur de la Ciudad de México en las carreras de Administración de Empresas, Contaduría, Ingeniería en Sistemas Computacionales y Psicología.

PISA, 2003, 2006, 2009). Dentro de los diferentes tipos de problemas en la formación matemática detectados en dichos estudiantes, uno de los más preocupantes tiene que ver con la incapacidad que muestra la mayoría de esos adolescentes para proponer un análisis coherente de la información cuantitativa que se les presenta y que, además, sea de utilidad para entender un fenómeno o tomar una decisión.

Dado que resultaría muy complejo reducir de forma significativa, y en poco tiempo, tal tipo de rezagos a escala nacional, es razonable esperar que la gran mayoría de los estudiantes que ingresarán a la universidad en los próximos años también enfrenten graves dificultades en su aprendizaje de las Matemáticas. De esta forma, es muy probable que tal rezago educativo limite la capacidad de los mexicanos para tomar decisiones y para procurar su bienestar personal y familiar.

En el caso concreto de los estudiantes universitarios de las áreas económico administrativas, la falta de formación matemática adecuada limitaría su capacidad para interpretar información indispensable en la evaluación del desempeño económico de las empresas o instituciones donde laboran. De esta forma, los jóvenes muy probablemente enfrentarían consecuencias negativas en su vida profesional y, además, las instituciones públicas y privadas bajo su responsabilidad difícilmente lograrían alcanzar sus objetivos.

La dificultad para discutir con mis alumnos determinados conceptos matemáticos y la escala de tal tipo de problemáticas educativas, me llevaron a preguntarme de qué manera podría ayudar a mis estudiantes para que lograran comprender tales conceptos, pues resultan cruciales para sus profesiones. Además, mi experiencia era que mis colegas profesores también enfrentaban dificultades similares a las mías, así que también me pregunté cómo podría generarse alguna propuesta que pudiera serles de utilidad. Tales preguntas fueron centrales para orientar mi proceso de investigación.

No obstante, en un inicio estaba conciente de que las propuestas instruccionales que se generen para atender las dificultades educativas ya mencionadas dependen en una medida importante de la postura epistemológica y metodológica que se utilice para enmarcar la problemática de la que se deriva el bajo desempeño matemático de los jóvenes. Por esa razón, en el Capítulo 2 de esta tesis describo la postura epistemológica que adopté para entender la problemática que rodea el rezago que muestran los estudiantes de las áreas económico administrativas, similares a mis estudiantes. Esta postura corresponde a la de la comunidad del Diseño Instruccional. La mayor parte de los investigadores que integran a esta comunidad se formaron en la Universidad de Vanderbilt en Estados Unidos (EU), aunque varios de ellos son académicos miembros del Instituto Freudenthal en Holanda. Las bases epistemológicas y metodológicas de ésta escuela fueron propuestas y discutidas por investigadores como Hans Freudenthal, Paul Cobb, Erns Von Glasersfeld y Koeno Gravemeijer, quienes han ejercido una influencia notable en el rumbo que ha tomado la investigación en educación matemática durante los últimos treinta años. No obstante, la comunidad del Diseño Instruccional también se ha visto enriquecida con las aportaciones de académicos que han orientado sus investigaciones dentro de las corrientes educativas del cognoscitivismo (Leslie Steffe, Patrick Thompson) y del interaccionismo simbólico (Heinrich Bauersfeld), entre otras.

En síntesis, puede decirse que la postura epistemológica de la comunidad del Diseño Instruccional sugiere que para que una persona sea capaz de proponer algún tipo de interpretación matemática coherente sobre una situación cotidiana es necesario que cuente con una simbolización mental (también llamada concepto). De no ser así los individuos no podrán darle un sentido matemático a dicho evento o no sabrán cómo aproximarse al mismo, incluso si son ágiles en la resolución de algoritmos (u operaciones) aritméticos. Sin embargo, para que las personas puedan desarrollar tal tipo de simbolizaciones mentales es necesaria la interacción social. En particular, se considera que las discusiones entre el profesor y los alumnos, y entre los mismos alumnos, son especialmente útiles para propiciar tal desarrollo conceptual; así como el uso de medios de simbolización externos (dibujos o materiales). Además, es necesario señalar que bajo esta postura, se considera que las discusiones en el salón de clases deben estar relacionadas directamente con las experiencias cotidianas de los alumnos (Cobb, Yackel y Wood, 1993).

Parece sensato afirmar que al adoptar tal postura implícitamente se supone que buena parte de las dificultades que enfrentan las personas al momento de intentar matematizar un evento provienen de no contar con un concepto o simbolización mental que les permita plantear tal situación, o bien, se generan al haber desarrollado un concepto que no resulta pertinente para comprenderla. Por ello, para atender las problemáticas en el aprendizaje los profesores deben de discutir colectivamente con los alumnos formas alternativas de conceptualizar una situación. Por supuesto, llegado a este punto un investigador tendría que preguntarse ¿cómo saber cuáles son los conceptos con los que cuentan los alumnos? ¿cómo encontrar conceptos que resulten útiles para matematizar determinadas situaciones?

En consistencia con el interés de la comunidad del Diseño Instruccional por encontrar conceptos útiles que permitan a los alumnos matematizar una situación cotidiana, sus investigadores siguen la siguiente metodología que se lleva a cabo en tres fases y que describo con mayor detalle en el Capítulo 3. La primera fase del proceso de investigación consiste en desarrollar una secuencia *inicial y provisional* de conceptos que interesa investigar. Debe explicarse la relevancia práctica de los conceptos elegidos y, sobretodo, mostrar que hay una idea matemática que engloba a todos ellos. En la segunda fase, los investigadores experimentan con la secuencia y discuten con uno o varios grupos de alumnos cada uno de los conceptos. Para ello se diseñan actividades basadas en situaciones prácticas que son discutidas colectivamente por los alumnos, con la guía de los investigadores. Estas discusiones colectivas son documentadas por los investigadores, y analizadas con la finalidad de identificar la diversidad de argumentos que los alumnos presentan. Cuando los alumnos son capaces de proporcionar colectivamente razonamientos lógicamente coherentes, se avanza al siguiente concepto de la secuencia. Cuando no es así, en cada concepto de la secuencia, los investigadores tratan de entender las razones por las que se dificulta el avance y realizan los ajustes a la secuencia que conjeturan que son necesarios. Como tercera y última fase, se propone una nueva secuencia la cual es conocida como Trayectoria Hipotética de Aprendizaje. (Cobb, Visnovska, Zhao, 2008; Gravemeijer, 2004).

En la descripción anterior puede apreciarse que los investigadores están tratando de reconocer cuáles y cómo son los conceptos que han logrado desarrollar los alumnos. También están interesados en examinar si tales conceptos les son útiles a los estudiantes para argumentar sus respuestas matemáticamente. Así estamos ante una metodología que es tanto de exploración como de diseño. Es una metodología de exploración porque los investigadores están interesados en caracterizar los conceptos matemáticos, o nociones, con los que los alumnos intentan dar sentido a una situación. Pero también se trata de una metodología de diseño porque los investigadores no se detienen en la caracterización de los conceptos, sino que realizan ajustes a los conceptos, actividades y simbolizaciones externas hasta encontrar algunos que permitan proponer una trayectoria con la cual los alumnos puedan plantear matemáticamente una situación con pertinencia y eficacia.

Como explico con más detenimiento en el capítulo 4, en ocasiones es necesario realizar algunos ajustes a esta metodología. Si bien es cierto que inicialmente a los investigadores les interesa la formulación de una secuencia provisional, también llega a suceder que en ocasiones desconocen cuál es el primer concepto que es comprensible a los estudiantes (denominado punto de partida), por lo que los investigadores tampoco saben si las situaciones discutidas en clases, al ser demasiado complejas, carecerán de sentido para los alumnos.

En lugar de suponer que conocen tal punto de partida, e insistir en que los estudiantes entiendan una situación para la cual no cuentan con una simbolización mental (concepto), en estos casos los investigadores llevarán a cabo exploraciones y discusiones con el grupo de estudiantes que “retrocederán” a lo largo de una secuencia de conceptos, hasta encontrar uno que la colectividad de alumnos pueda utilizar para justificar su matematización de una situación concreta. En otras palabras, un punto de partida es un concepto que una colectividad específica de estudiantes puede emplear para plantear situaciones concretas, sin necesidad de revisar otros conceptos más sencillos (los cuales, otras personas si necesitan comprender de forma previa), pero también es un concepto que el grupo todavía no puede utilizar para comprender otras situaciones más complejas.

Una vez expuesta las postura epistemológica y metodológica que decidí adoptar, debe recordarse que mi propósito era generar una propuesta intruccional que contribuyera a atender los rezagos en el razonamiento multiplicativo que muestran los estudiantes de las áreas económico administrativas como aquellos con los que interactúo. Mi diagnóstico inicial de la situación de mis alumnos era muy similar a aquel que se presenta en Backhoff (2006), OCDE (2006) y en PISA (2003). En otras palabras, los jóvenes encontraban dificultades importantes para emplear ideas como los porcentajes y las razones al intentar analizar información cuantitativa propia de sus carreras. Por ese motivo, y en consistencia con el énfasis que da la comunidad del Diseño Instruccional en el desarrollo de simbolizaciones mentales o conceptos, traté de formarme una primera noción sobre el tipo de conceptos que podrían ayudar a los jóvenes a desarrollar una interpretación de los datos económicos o empresariales que se discutían en clase.

Como explico en el capítulo 5 de esta tesis, de acuerdo a Freudenthal (1983) y Thompson y Saldanha (2003), las razones, las tasas de cambio, los porcentajes, las fracciones y la medición, son ideas que guardan un vínculo muy cercano pues cada uno de estos conceptos puede entenderse como una relación multiplicativa. Para dichos autores, tal expresión hace referencia a la relación recíproca o comparativa entre dos magnitudes[2] (Thompson y Saldanha 2003). Por ejemplo, la altura de un árbol puede compararse y guardar una relación recíproca con la de una persona. Si la altura del árbol es tres veces la de la persona entonces la altura de la persona es un tercio de la del árbol.

También el Capítulo 5, explico cómo existen una gran variedad de ideas propias de las profesiones y carreras económico administrativas que pueden plantearse en términos de alguna de las relaciones multiplicativas como las razones, los porcentajes, las fracciones o la medición. Así, tal enfoque conceptual podría resultar útil para que los estudiantes lograran formular una interpretación de los datos cuantitativos vinculados a sus futuras profesiones.

De esta manera, me pareció que desde la perspectiva epistemológica y metodológica que adopté, contribuir a la atención de los rezagos en la formación matemática de los estudiantes de las áreas económico administrativas implicaba plantearse los siguientes dos objetivos:

1) Identificar el punto de partida de los estudiantes universitarios de las áreas económico administrativas en una secuencia de conceptos relacionada con las relaciones multiplicativas.
2) Revisar si el punto de partida de los jóvenes resultaba útil para avanzar a lo largo de una secuencia inicial y provisional que incluyese varios conceptos sobre el pensamiento multiplicativo (desde fracciones, hasta crecimiento porcentual y tasas de cambio) contextualizados dentro de las carreras

[2] Aquí es importante aclarar que en toda la tesis, el término magnitud significará una propiedad de un objeto o fenómeno pero que no ha sido cuantificado, aunque es comparable con el mismo tipo de rasgo en otro objeto o fenómeno.

económico administrativas. De ser así, al final de la investigación podría proponer una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje.

El siguiente paso en mi exploración consistió en tratar de reunir evidencia que me sirviera para formular una conjetura inicial y provisional sobre el punto de partida conceptual de los jóvenes. Así, durante los semestres de agosto-diciembre de 2006 y de 2007, apliqué cuestionarios y realicé entrevistas personales a un total de 13 alumnos pertenecientes dos generaciones de las carreras de Contaduría y Administración (hablaré más extensamente de este proceso en los capítulos 4 y 6). La información recopilada me llevó a conjeturar que los jóvenes partían de la comprensión las relaciones recíprocas entre una unidad y una fracción unitaria. Por ejemplo, sabían que si la longitud de un objeto A era 5 veces la longitud de un objeto B, y la longitud del objeto A se definía como 1, entonces la de B valía 1/5. También sabían que si B se definía como 1, la longitud A valdría 5.

A pesar de la aparente sencillez conceptual del punto de partida de los jóvenes, mi conjetura era que los alumnos podrían aprovecharla para comprender relaciones recíprocas más complejas (Ver Capítulo 7). Así, diseñé una secuencia conceptual provisional que serviría para que los alumnos compararan recíprocamente dos magnitudes (A y B, con A>B) entre sí. Es decir, los alumnos tendrían que encontrar la manera de medir A utilizando B, y de medir B utilizando A. El reto conceptual de tal secuencia estribaba en que las magnitudes A y B serían cuantificadas de formas progresivamente más complejas. Primero serían números enteros, luego una de ellas sería una fracción y la otra un entero y por último, ambas serían fracciones sin denominador común. Por supuesto, contextualicé esta secuencia dentro de las áreas económico administrativas utilizando ideas como la tasa de cambio nominal o tasas de interés bancarias.

Para analizar la viabilidad de la conjetura sobre el punto de partida, realicé ciclos de análisis progresivos a lo largo de la secuencia descrita en el párrafo anterior, de la misma forma que lo propone la metodología del Diseño Instruccional. Durante el semestre enero-junio de 2009 aplique una serie de preguntas, realicé entrevistas individuales y evaluaciones de desempeño grupal a dos grupos, uno de Contaduría y otro de Administración.

Al progresar en la exploración a lo largo de la secuencia, me pareció que la evidencia sugería que los alumnos eran capaces de aprovechar el punto de partida para comprender y simbolizar (dibujar) las relaciones recíprocas entre números enteros.

Además, como muestro con mayor detalle en los capítulos 7 y 8, la información recopilada también parecía apuntar a que los estudiantes eran capaces de generar nuevas conceptualizaciones complejas e importantes, vinculadas a las relaciones multiplicativas. Durante las discusiones grupales los jóvenes se dieron cuenta que había ocasiones en que al comparar dos longitudes no cuantificadas, no era posible iterar la longitud mas pequeña (que denotaré como B) un número entero de veces (k) para obtener la longitud mas grande (A). Debido a ello la relación recíproca entre dos longitudes no podía expresarse con un número entero. Después de buen tiempo de discusión colectiva llegaron a la conclusión que en estos casos era necesario una tercera longitud (C) que pudiera repetirse un número entero de veces tanto en A como en B, para que estas dos longitudes pudieran compararse entre sí. Por ejemplo, C podría repetirse 5 veces en A, y además C podría repetirse 4 veces en B, de esta manera, podría afirmarse que A es 5/4 de B, y B es 4/5 de A.

El reconocimiento de la necesidad de contar con una tercera longitud (C), a la que llamo conmensurador común, que permitiera comparar otras dos, hizo posible que los estudiantes discutieran relaciones multiplicativas progresivamente más elaboradas y que son empleadas dentro de las carreras económico administrativas. Fue gracias al conmensurador común que los estudiantes fueron capaces de comprender y simbolizar las comparaciones entre fracciones (capítulo 8). Aunque ya no muestro evidencia al respecto en esta tesis, posteriormente, los alumnos lograron entender que los porcentajes eran un caso especial de las fracciones, y finalmente fueron capaces de discutir sus aplicaciones en la evolución del pago de intereses compuestos, en el cálculo de los porcentajes de ganancias de una empresa, en el desarrollo de proyecciones de crecimiento porcentual de los ingresos o costos de cierta institución

De esta manera, la evidencia proveniente de las discusiones individuales y colectivas parecía sugerir que el punto de partida propuesto resultaba viable para avanzar a lo largo de la secuencia provisional propuesta. No obstante, para que tal secuencia inicial y provisional pudiera constituirse como una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje era necesario hacer determinadas modificaciones a su versión inicial, las cuales explico cuidadosamente en el capítulo 9. Aquí puedo brevemente mencionar, que el concepto del conmensurador común fue una innovación instruccional inesperada, que provino de la constante discusión con mis alumnos y mi asesor, y que era necesario incorporar a la secuencia conceptual.

Pero con esta innovación instruccional también vino la necesidad de hacer explícitos algunos de los retos que tendrán que enfrentar los estudiantes y profesores interesados en utilizar la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje para orientar sus discusiones sobre las relaciones multiplicativas. Entre otros retos, la evidencia mostró que los alumnos enfrentaban el reto de flexibilizar el valor con el que definían a determinada magnitud que se comparaba. Por ejemplo si A=5B, e inicialmente se definía a A=1, los estudiantes no tenían problemas para decir que B=1/5, sin embargo, si se redefinía a A=35, algunos de ellos enfrentaban serias dificultades para reconocer que B=7

Otro reto para muchos estudiantes consistió en reconocer que una vez que la relación entre tres magnitudes había sido establecida, bastaba dar un valor a una de ellas para que el de las otras dos quedara definida. Por ejemplo si se sabe que A=5C y B=4C entonces A=5/4 B y B=4/5 A. Sabiendo esto, puede establecerse que si C=1 se sigue que A=5 y B=4. El problema era que para algunos alumnos era difícil reconocer que si B=1 entonces A=5/4 y C=1/4. En otras palabras, a varios estudiantes les costaba trabajo comprender que cada una de las tres magnitudes podía ser utilizada como unidad de referencia.

Así, en este trabajo presento un análisis de evidencia que espero ayude a los docentes universitarios de nuestro país a informar sus decisiones instruccionales. Identifico un punto de partida conceptual en las relaciones multiplicativas que parece ser instruccionalmente viable para los estudiantes universitarios como aquellos con los que trabajo. Además, sugiero los posibles retos conceptuales que tendrán que discutir los alumnos y docentes interesados en comprender las relaciones multiplicativas en contextos numéricos diferentes.

Por supuesto, como señalo en el capítulo 10, es necesario profundizar en la investigación de los retos conceptuales e instruccionales que deberán enfrentar los alumnos y profesores interesados en discutir y reflexionar sobre las relaciones multiplicativas. No obstante, mi perspectiva es que el análisis de la evidencia aquí presentada nos sugiere que concebirlas como una relación recíproca entre dos magnitudes puede resultar provechoso para atender el rezago educativo de los jóvenes que estudian las carreras económico administrativas. Incluso, quizá sea posible extender este tipo de indagaciones a otras carreras que exigen una formación matemática detallada como las ingenierías.

Así, parece ser que la investigación en educación matemática tiene la posibilidad de brindar a los estudiantes mexicanos un marco conceptual sólido que les permita incrementar su poder de decisión al llevarlos a comprender la relevancia y utilidad de información cuantitativa que antes no podrían haber aprovechado o considerado. De esta forma podrán contribuir al desarrollo de nuestro país, cuestionar a sus autoridades políticas, tomar decisiones que mejoren su desempeño como profesionistas, y sobretodo mejorar la calidad de vida de sus propias familias.

1. La preocupación internacional por una formación Matemática orientada al desempeño profesional en las áreas Económico administrativas

Desde hace varias décadas en nuestro país se ha reconocido la importancia de brindar una educación superior de calidad y que esté al alcance del mayor número de personas posible. Se ha dado por supuesto que, entre otras ventajas, la educación superior prepara a los profesionistas para identificar y evaluar la información que necesitan para tomar decisiones, proponer formas más eficientes de organización institucional y acelerar la generación y asimilación de nuevas tecnologías. También se ha anticipado que si una fracción mayor de la población contase con este nivel educativo, las empresas nacionales y extranjeras encontrarían más incentivos que les animaran a invertir en un entorno social más productivo y los diferentes niveles de gobierno funcionarían de maneras más eficientes. En consecuencia, se elevaría la calidad de vida de más familias y se disminuiría la pobreza. (ANUIES, 2000; Luengo, 2003; OCDE, 1997; SEP, 2003)

Los beneficios sociales, económicos y laborales que traería la presencia de un mayor número de habitantes con una educación universitaria de calidad parecen bastante deseables. No obstante, para quien ha trabajado como docente en este nivel educativo, no deja de parecer desconcertante la brecha que existe entre la preparación necesaria para alcanzar los potenciales planteados en el párrafo anterior, y la preparación efectiva con la que cuentan los estudiantes universitarios.

Tomando en cuenta la situación anterior, mis objetivos en este capítulo son mostrar el rezago que existe en la formación matemática de la población de diferentes países, en especial del nuestro; y señalar la preocupación que hay a nivel global por generar propuestas educativas que apoyen a los estudiantes para entender, evaluar, cuestionar y generar información cuantitativa propia de sus respectivas profesiones. Para ello, en la primera sección, describo brevemente el tipo de alumnos con los que me toca convivir, así como las problemáticas que encontré al inicio de mi desempeño como profesor universitario. Empleo la técnica de la narrativa personal en esta sección, porque me permite ejemplificar y concretizar el tipo de retos que enfrenta un docente universitario de Matemáticas y los rezagos de aprendizaje que se le pide atender, muchas veces sin contar con otro apoyo que su propia experiencia e intuición (De Freitas, 2004). Además, con esta narrativa espero ayudar al lector a entender las decisiones y situaciones que fueron moldeando mis objetivos, criterios y actividades de investigación.

En la segunda sección, utilizo datos provenientes de investigaciones de instituciones como la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) y el Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE) para mostrar que mi experiencia personal y la situación de mis estudiantes, no es sino un caso particular de una serie de retos en educación de matemáticas que tienen una escala nacional e internacional.

En la última sección, muestro las reflexiones que los investigadores que participaron en los trabajos anteriores han hecho sobre la información obtenida, y presento las consideraciones que han realizado otras instituciones a nivel mundial sobre los rezagos que existen en educación matemática. Posteriormente señalo que estas organizaciones coinciden en que el rasgo central de esta serie de problemáticas es la dificultad que prácticamente la totalidad de los alumnos tiene para emplear sus conocimientos de matemáticas en situaciones prácticas.

1.1 Experiencias iniciales como docente

Al comenzar mi desempeño laboral, encontré que los alumnos que asistían a mis clases frecuentemente eran de clase media, y una pequeña minoría, de clase media alta. Típicamente se trataba hijos de comerciantes o, de manera muy frecuente, de profesionistas que cuentan con una pequeña empresa que presta algún tipo de servicios; por ejemplo, servicios de pediatría, de contaduría, de asesoría aduanal o de programación de software empresarial. En el caso concreto de los estudiantes de administración, no era raro encontrar que sus familias fuesen dueñas de pequeñas y medianas empresas donde se producían y comercializaban determinado tipo de artículos físicos, los cuales podían ser desde chocolates hasta refacciones para la red eléctrica del hogar.

Así, también era común el que varios de los estudiantes tuvieran contemplado hacerse cargo del negocio familiar en el futuro, dar continuidad a la profesión de los padres, desarrollar su propia empresa, o bien, trabajar en una en la que fueran pertinentes las habilidades y conocimientos adquiridos en sus estudios profesionales.

Prácticamente la totalidad de estos estudiantes tenía acceso a recursos para apoyar su formación educativa, tales como libros, computadoras e Internet. Eran jóvenes cuyas familias, en ocasiones, los hacían responsables de ciertas tareas en las empresas o comercios de los que eran dueños. Muchos habían trabajado desde temprana edad para poder pagar sus gastos personales. A algunos, sus familias les pedían que trabajaran para financiar parte o la totalidad de sus estudios. Incluso, había casos de estudiantes cuyas familias los apoyaban para que iniciaran pequeños negocios.

Las dinámicas familiares y económicas de los estudiantes mencionadas en el párrafo anterior probablemente ayudaban a los jóvenes a desarrollar nociones y prácticas cuantitativas básicas, pues estas eran necesarias para entender y resolver las problemáticas propias de un negocio, como por ejemplo, disminuir costos, elegir precios que proporcionen beneficios, diseñar planes de pago, decidir cómo utilizar las ganancias, etc. Además, la administración de sus recursos personales probablemente los llevaba a considerar las maneras en las que podían reorganizar tales gastos de forma que se liberasen recursos para pagar deudas, generar ahorro, o realizar otras compras. En otras palabras, la gestión del presupuesto individual o familiar también requería de poner en práctica ciertas ideas cuantitativas.

No obstante, las dinámicas familiares y económicas descritas no siempre parecían orientar a los jóvenes hacia una formación matemática académica tradicional. De hecho, después de convivir y conversar con ocho generaciones de estudiantes, mi impresión es que su decisión de estudiar en la universidad donde trabajo se debe en parte a que no lograron ser admitidos en la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) o el Instituto Politécnico Nacional (IPN), y en parte, a que para asistir a universidades privadas más prestigiosas tendrían que pagar colegiaturas que casi triplican el monto que pagan en la institución donde trabajo. En algunos casos los jóvenes y sus familias prefieren usar esos recursos de otras formas; en otros, simplemente ese tipo de cantidades monetarias están fuera de su presupuesto. Prácticamente la totalidad de los jóvenes de estas carreras me ha comentado que la última materia de Matemáticas que cursaron en la preparatoria fue Cálculo diferencial e integral.

En mi trabajo como profesor universitario, las primeras materias que tuve la oportunidad de impartir fueron las de Cálculo diferencial y Cálculo integral, así como las de Micro y Macroeconomía. Las primeras dos en la carrera de Ingeniería en Sistemas, y las dos últimas, en las de Administración y Contaduría. El programa de estudios de todas estas materias tiene como ideas centrales, los conceptos de derivada y de integral.

Basado en mi propia experiencia como estudiante, esperaba que estos conceptos les resultaran difíciles a mis alumnos, pero supuse que contaban con las bases para comenzar con el estudio de estas materias. En otras palabras, supuse que la mayoría de ellos conocían y entendían todas las operaciones aritméticas con números racionales incluyendo las fracciones no decimales. Además, supuse que tendrían un buen dominio de los conceptos de razón y proporción, ángulo y pendiente de una recta. También conocerían las leyes de los exponentes y podrían plantear y resolver problemas que involucraran ecuaciones de primer y segundo grado. Finalmente, supuse que conocerían las operaciones con polinomios, las funciones lineales, las funciones trigonométricas y las funciones trascendentales.

Sin embargo, durante los primeros tres años de trabajo, me dí cuenta de que prácticamente la totalidad de los estudiantes no dominaban la mayoría de estos conceptos, y mostraban serias dificultades para interpretar, aplicar y comunicar sus razonamientos y resultados de acuerdo al contexto en el que trabajaban. Es decir, explicaban sus razonamientos describiendo algoritmos, pero sin hacer referencia a las situaciones prácticas que se les planteaban, a las unidades de medida pertinentes o a las decisiones que debían de tomar.

Uno de los eventos que más llamó mi atención en ese entonces fue el descubrir que a la totalidad los jóvenes de estas tres carreras, en el año 2004, les era complicado entender porqué para obtener un incremento de 4% sobre cierta cantidad debía multiplicarse ésta por 1.04. En concreto, los jóvenes de Ingeniería de primer semestre se mostraron asombrados de lo que consideraban un método innovador para obtener incrementos porcentuales, pues según ellos siempre habían obtenido el 104% de una cantidad obteniendo el 4% de la cantidad y luego sumándolo a la misma. También encontré que les llamaba la atención la posibilidad de obtener el interés compuesto de un depósito bancario inicial (por ejemplo, \$10 000), multiplicando ese depósito por una potencia del incremento porcentual (1.04), en el que exponente (5) indicara el número de periodos transcurridos desde el periodo de inicio, es decir: $10\,000 \bullet (1.04)^5$

Esta técnica les había parecido interesante porque, me dijeron, ahora podrían saber cuánto dinero tendrían dentro de algunos meses en el banco, y éste ya no podría "chamaqueárselos".

Aunque tenían dificultades, también lograban entender algunos conceptos que podían ser útiles en sus trabajos. Por ejemplo, tanto administradores como contadores podían encontrar o proponer indicadores de productividad o de eficiencia (como costo por artículo, producción por trabajador, etc.). Sin embargo, mi desconcierto vino al encontrar que consideraban que estas medidas eran constantes, a manera de una función lineal o de una razón.

Esta forma de entender tales indicadores hacía muy difícil presentar a los jóvenes estructuras de costos unitarios más cercanas a la realidad empresarial, en las que el costo por unidad decrece en los primeros intervalos de producción y luego crece. También se dificultaba introducir temas como la productividad de los empleados y la eficiencia en el uso de recursos, los cuales no siempre guardan una relación constante, sino una que más bien puede aproximarse usando una función no lineal creciente pero a tasas decrecientes.

Además, llamó mi atención el desempeño que tenían los Administradores y Contadores en el manejo de números decimales y porcentajes, pues se les dificultaba enormemente la comprensión de temas como el cálculo de interés sobre una cantidad de dinero invertida, el cálculo del pago de impuestos, descuentos a salarios o ingresos familiares y el análisis de series de datos económicos y administrativos que requieren del concepto del crecimiento porcentual de una cantidad como: las ventas, los precios y los costos de una empresa.

Estas problemáticas me parecían importantes porque los porcentajes y los números decimales son utilizados cotidianamente en las profesiones Económico Administrativas, además de que son empleados para reconocer tendencias en el comportamiento de una cantidad a lo largo del tiempo. Por su parte, las funciones no lineales me parecían importantes para presentar a los estudiantes la relevancia del concepto de derivada, pues éste podría ayudarlos a concebir nuevas maneras de medir los costos de manera que pudieran optimizar las ganancias.

A pesar de la complejidad de la situación educativa en la que me reconocí como docente, en ese periodo pensé que era suficiente brindarle a mis alumnos clases especiales sobre los temas básicos, mejorar el material didáctico, el tipo de libro que utilizaban, y esperar que ellos asumieran la responsabilidad de estudiar por su cuenta. A quienes así lo solicitaban, les daba asesorías en las horas que tenían libres. Mi idea era que una vez repasados ciertos temas, la misma presión por aprobar o por conservar sus promedios (en algunos casos para no perder sus becas), les llevaría a estudiar por sí solos los temas en los que se encontraban rezagados.

Aun así, en las pláticas y juntas que tenía con otros colegas que daban clases en los mismos semestres y en otros más avanzados, frecuentemente escuchaba la opinión de que llegaba un punto en el que era imposible seguirles enseñando a los jóvenes pues tenían que retomarse muchos temas básicos que incluso pertenecen a los currícula de secundaria o primaria. Las propuestas que se hacían a los coordinadores de las carreras de Contaduría e Ingeniería no eran muy distintas de las que se me habían ocurrido: dar más asesorías, implementar un semestre propedéutico, desarrollar nuevo material didáctico, dejar más tareas a los estudiantes, reforzar la disciplina en el salón de clase, etc. Varias de estas iniciativas fueron implementadas y financiadas por la universidad.

Aun así, las problemáticas continuaron y, de hecho, en diciembre de 2005 hubo un fuerte descenso en la matrícula de estudiantes de Ingeniería y Contaduría, lo que provocó la preocupación de las autoridades universitarias y, por supuesto, de los maestros que trabajamos en esas áreas. Los estudiantes con los que llegué a platicar comentaban que eran carreras muy difíciles por el tipo de Matemáticas que llevaban y preferían cambiarse de carrera, e incluso de universidad. En particular había cinco materias que les eran especialmente problemáticas: Costos, Microeconomía, Cálculo diferencial, Física y Programación. Las primeras dos se impartían en Contaduría, y las tres últimas sólo en Ingeniería.

Debido al riesgo laboral que enfrentaba, en 2006 decidí iniciar el programa doctoral con la intensión de que éste apoyara mi carrera profesional dentro de la universidad y me fuese útil para generar material didáctico que pudiera ser de utilidad para los estudiantes. Consideraba especialmente importante que se ayudara a los jóvenes a aprender a usar el lenguaje algebraico para plantear y representar problemas.

Sin embargo, las primeras pláticas con mi asesor y con mis compañeros de generación me ayudaron a reflexionar que si quería formular una propuesta que contribuyera a atender las problemáticas anteriores tendría que realizar un ejercicio de honestidad profesional y de curiosidad científica, mucho más cuidadoso y reflexivo que la mera elaboración de material didáctico. Además, en ese periodo tuve acceso a datos provenientes de investigaciones cuyo propósito era medir el desempeño de los estudiantes de Matemáticas a nivel mundial. La lectura de tales trabajos me dejo ver que la escala del problema era una que ni siquiera había podido imaginar.

1.2 La problemática del bajo desempeño en Matemáticas a nivel internacional

Existen investigaciones en las que se muestra que los alcances de las problemáticas que he descrito en la sección anterior no están limitados a una sola universidad, al Distrito Federal (DF) o a México: el problema de la formación matemática de los estudiantes que cursarán el nivel superior de educación es más general. En Estados Unidos (EU), un estudio conducido por el Consejo Nacional para la Educación y las Disciplinas, (National Council on Education and the Disciplines, NCED) comenta que:

> A pesar de los años de estudio y de llevar una vida en un entorno en el que frecuentemente se encuentran datos numéricos, la mayoría de los de los estudiantes dejan la preparatoria con habilidades cuantitativas mucho menores de las necesarias para desenvolverse en la sociedad actual. Las empresas lamentan la falta de habilidades técnicas y cuantitativas de los candidatos a un empleo, y prácticamente todas las universidades encuentran que la mayoría de los estudiantes necesitan cursos de regularización de matemáticas. Incluso los individuos que han estudiado Trigonometría y Cálculo frecuentemente pasan por alto abusos en el manejo de datos numéricos y descubren que son incapaces de comprender, y mucho menos de articular, inferencias cuantitativas. (NCED, 2006, p. 1),

Tal tipo de situaciones se repiten en diferentes países como por ejemplo, Alemania (Timo Ehmke, 2005) y el Reino Unido (Ananiadou, 2003 y 2004).

A nivel mundial se han detectado serios rezagos en la capacidad de los estudiantes para utilizar las matemáticas en los diferentes ámbitos de su vida. Aun así, es poco frecuente encontrar estudios que muestren cuál es el rendimiento de los estudiantes universitarios. La mayoría de los estudios se han centrado más bien en estudiantes en el último año de secundaria o en el primer año de bachillerato. No obstante, revisar los resultados de estos estudios es de mucha utilidad porque nos permiten conjeturar que los estudiantes que llegarán a la universidad también mostrarán rezagos similares. Ello es así porque en general no parece razonable esperar que la mayor parte de una generación de estudiantes cambie significativamente sus niveles de desempeño en tan solo tres años.

Por otra parte, como justifico con mayor detalle en el capítulo cinco, los profesionistas de las disciplinas Económico Administrativas utilizarán de manera preponderante conceptos como los valores relativos, los números decimales, los porcentajes y el crecimiento porcentual, las razones y las tasas de cambio constantes y variables. Así, mostraré los estudios en los que se presenta alguna información sobre el desempeño que tienen los estudiantes en temas usados en las áreas Económico Administrativas.

Para el caso mexicano existen pocas investigaciones que proporcionen estadísticas sobre los niveles de conocimiento de los estudiantes, sin embargo, algunos trabajos realizados a nivel de secundaria nos pueden ayudar a formarnos una perspectiva sobre del tipo de rezagos con el que llegarán los jóvenes a la universidad. Aquí, también me parece sensato suponer que si la enseñanza media superior no ha logrado modificar el desempeño que muestran los adolescentes de secundaria de países que cuentan con mayores recursos didácticos, capacitación docente, y educación pública como EU, el Reino Unido y Alemania, tampoco lo haya hecho en nuestro país, cuyas condiciones son relativamente más modestas.

En 2003, el Programa Internacional para la Evaluación Estudiantil (Programme for International Student Assessment, PISA) condujo un estudio internacional entre estudiantes de 15 a 16 años pertenecientes a los países miembros de la OCDE y otros países invitados. Se definieron siete niveles de desempeño y cuatro áreas de evaluación para las matemáticas: espacio y forma[1], cambio y relaciones[2], pensamiento cuantitativo[3] e incertidumbre y azar[4].

El nivel "Por Debajo del 1" incluía a los estudiantes con una puntuación de menos de 358.3 puntos, el nivel 1 incluía aquellos con una puntuación de 358.3 a 420.4, el segundo nivel a quienes obtuvieran de 420.4 a 482.4, el tercero de 482.4 a 544.4, el cuarto de 544.4 a 606.6, el quinto de 606.6 a 668.7, el sexto de 668.7 en adelante.

El estudio encontró que casi el 75% de los estudiantes mexicanos se encontraban en o por debajo del nivel 1 en las categorías de "Espacio y forma" y de "Cambio y relaciones" el 55% tuvo tal desempeño en la categoría de "pensamiento cuantitativo" y el 70% en la categoría de "incertidumbre y azar" Si se consideran las cuatro categorías de manera conjunta se advierte que el 70% de los estudiantes mexicanos se desempeñaba en el nivel 1 o por debajo, alrededor del 20% en el nivel 2, alrededor de un 7% en el nivel 3 (la media de los países participantes) , y sólo un 3% en los niveles 4 y 5.

---

[1] En este rubro se evalúan fenómenos y relaciones geométricas y espaciales
[2] En esta categoría se incluyen las manifestaciones matemáticas del cambio, relaciones funcionales y dependencia entre variables.
[3] Aquí se examinan fenómenos, relaciones y patrones cuantitativos
[4] En esta sección se presentan fenómenos y relaciones probabilísticas y cuantitativas.

En 2006, PISA realizó un nuevo estudio y esta ocasión los niveles de desempeño global en Matemáticas a nivel nacional quedaron de la siguiente forma, en el Nivel 0, 14.4% de los estudiantes; Nivel 1, 27.1%; Nivel 2, 31.6%; Nivel 3, 19%; Nivel 4, 6.6%; Nivel 5, 1.3%; Nivel 6, 0.1%. Cabe destacar que las escuelas públicas y privadas alcanzaron niveles de desempeño muy similares (INEE, 2007, p. 313).

Aunque en estas investigaciones no se encuentran referencias explícitas al rendimiento de los estudiantes en temas relacionados con el pensamiento multiplicativo (fracciones, razones, porcentajes, etc), la interpretación dada por los autores del estudio PISA, fue que los estudiantes mexicanos eran capaces de resolver problemas con el grado de dificultad más básico en los cuales la información relevante para abordar la situación se presentaba de manera explícita, la situación era muy inmediata y limitada, y la tarea propuesta podía resolverse con una simple operación aritmética (PISA, 2003, p. 79)

Dada esta observación, es posible conjeturar que, en promedio, los universitarios mexicanos, sin importar si provienen de escuelas públicas o privadas, tendrán dificultades al intentar dar sentido a las situaciones que encontrarán dentro de las carreras Económico Administrativas, y quizá dentro de su ejercicio profesional. Ello es así porque generalmente la información utilizada en estas áreas es indirecta e implícita, además requiere de dar sentido a contextos poco conocidos.

En 2006 el Instituto Nacional para la Evaluación Educativa (INEE) realizó un estudio nacional entre alumnos de sexto de primaria y tercero de secundaria[5]. Las puntuaciones de los cuatro tipos de exámenes aplicados a los alumnos (llamados Excale) se presentaron en una escala de 200 a 800, con una media centrada en 500 puntos y una desviación estándar de 100 unidades.

Para facilitar la interpretación de resultados, se definieron cuatro *niveles de logro educativo*, los cuales representan categorías de habilidades y conocimientos que poseen los estudiantes en cada asignatura evaluada, es decir, en Español y Matemáticas. Los resultados se reportaron tanto en promedios de puntuaciones como en niveles de logro, éstos quedaron definidos en cuatro clases: Por debajo del básico (hasta 499.3 puntos), Básico (de 499.31 a 583.2 puntos), Medio (de 583.21 a 734.45 puntos) y Avanzado (mas de 734.46 puntos). Estos niveles de

[5] Para mayores detalles de la muestra y los instrumentos utilizados consúltese directamente el estudio (Backhoff, 2006).

desempeño buscan reflejar los conocimientos y habilidades precisas que tienen los estudiantes en cada uno de los cuatro Excale.

A nivel nacional, se encontró que poco más de la mitad de los estudiantes de tercer año de secundaria (51.1 %) estaban en un nivel por de bajo del básico, tres de cada diez alumnos de los alumnos examinados (29.5 %) se ubicó en el nivel básico, dos de cada diez alumnos (18 %) se encontró en el nivel medio; únicamente poco más de uno de cada cien alumnos (1.4 %) se ubicó en el nivel avanzado.

Sobre los resultados anteriores los autores del estudio comentan que

> De manera alarmante, 51 por ciento de los alumnos de tercero de secundaria no posee las habilidades y conocimientos mínimos que se marcan en el plan y programas de estudio de secundaria, mientras que casi el 30 por ciento lo hace en su nivel más básico. Dichos alumnos son capaces de resolver problemas que implican una sola operación (…) Poco menos de la mitad de los estudiantes son capaces de resolver problemas en que se utilizan dos o más operaciones con números naturales y enteros (…) Se observó un desempeño muy deficiente de los estudiantes (…) en la solución de problemas donde se requieren utilizar equivalencias entre unidades de medida; y, con el uso de fracciones. (Backhoff, 2006, p. 182)

Dado que es poco razonable esperar que el desempeño de los estudiantes mexicanos tanto de primaria como de secundaria cambien en tan sólo tres años, la conjetura que podría hacerse en base a los resultados del INEE es muy similar a la que ya hice para los de PISA: los universitarios mexicanos, en promedio, tendrán dificultades al tratar de dar sentido a contextos prácticos no estructurados o que involucren diversas variables. Pueden apreciarse en la Tabla 1.1 los porcentajes de estudiantes a nivel nacional que tienen una probabilidad del 67% de involucrarse de manera efectiva con temas relacionados con proporcionalidad, fracciones, números decimales y porcentajes. Esta probabilidad hace referencia a que la prueba estaba diseñada para que al momento de responder una pregunta, un alumno tuviera mayores probabilidades de responder correctamente si su habilidad es mayor a la dificultad del reactivo. En otras palabras, las pruebas se diseñaron para minimizar el impacto que pudieran tener las respuestas correctas pero elegidas al “azar” por los estudiantes.

Los datos que proporciona la tabla 1.1 nos sugieren que una parte importante de los estudiantes mexicanos, incluso aquellos que están en escuelas privadas, encontrarán dificultades en caso de que decidieran estudiar alguna carrera de las áreas económico administrativas. Los porcentajes muestran que pocos estudiantes pueden proporcionar respuestas correctas ante temas que en esas disciplinas son indispensables.

Tabla 1.1 Porcentaje de alumnos que puede contestar el reactivo con 67% de probabilidad de acertar: Matemáticas Tercero de Secundaria

No. de Reactivo	Contenidos Curriculares de Matemáticas	Porcentaje Nacional / (Error Estándar)	% Secundarias Privadas (E.E)
5	Identificar gráficas de cantidades que varían proporcionalmente	18.7 (0.4)	41.5 (1.3)
7	Identificar conjuntos de números que tienen relación proporcional entre sí	17.2 (0.4)	39.1 (1.3)
11	Resolver problemas con dos o mas operaciones, adición y sustracción y con decimales hasta centésimos	11.5 (0.3)	30.5 (1.2)
16	Resolución de problemas de proporcionalidad directa	8.9 (0.3)	25.6 (1.1)
18	Resolver problemas que impliquen dos operaciones, de adición y multiplicación	6.6 (0.2)	21.1 (1.0)
19	Resolución de problemas que impliquen la determinación de un por ciento, es decir, qué porcentaje representa una cantidad	6.1 (0.2)	20.1 (1.0)
21	Resolución de problemas que impliquen realizar un reparto proporcional	5.8 (0.2)	19.7 (1.0)
23	Traducir del lenguaje simbólico al verbal números decimales	5.2 (0.2)	18.3 (1.0)
24	Comparar números decimales	3.8 (0.2)	14.5 (0.9)
26	Traducir del lenguaje verbal al simbólico números decimales	3.0 (0.1)	12.2 (0.8)
27	Resolución de problemas de proporcionalidad directa que impliquen usar una fracción del valor unitario	3.0 (0.1)	12.2 (0.8)
29	Identificar el significado de una fracción como parte de un todo	2.5 (0.1)	10.7 (0.7)
30	Ordenar un grupo de números decimales y fraccionarios, positivos y negativos	2.5 (0.1)	10.7 (0.7)
31	Resolver problemas con dos o mas operaciones, adición y sustracción y con decimales hasta milésimos	2.4 (0.1)	10.3 (0.7)
35	Resolución de problemas que impliquen la aplicación o cálculo de un porcentaje	1.6 (0.1)	7.2 (0.6)
37	Resolver problemas que implican multiplicación y división con números decimales	1.4 (0.1)	6.5 (0.5)
39	Ordenar fracciones	0.9 (0.1)	4.5 (0.4)
40	Identificar fracciones equivalentes	0.8 (0.1)	4.2 (0.4)
41	Resolver problemas que impliquen sumar, restar y comparar fracciones	0.6 (0.1)	3.1 (0.3)

Fuente: Backhoff, 2006, pag 305- 306

Consideremos por un momento los porcentajes de estudiantes que tienen 67% de probabilidad de acertar al comparar números decimales (3.8%), de ordenarlos (2.5%) y de ordenar fracciones (0.9%), (reactivos 24, 30 y 39, respectivamente). Si prácticamente la totalidad de los estudiantes no pueden distinguir cuál de dos números de este tipo es mayor y cuál es menor (p. ej. 0.4 y 0.28), quizá sea porque no les asocian una representación, por ejemplo, dentro de la recta numérica, o tal vez crean que el orden de los números decimales esté dado por las cifras involucradas (28 es mayor que 4). Si ese es el caso, los estudiantes muy probablemente tendrán serios problemas al intentar dar significado a esas cifras y a las operaciones que realicen con ellas.

Por supuesto, las implicaciones son preocupantes tanto para el aprendizaje de los estudiantes como para la enseñanza. Simplemente considérese como ejemplo que cuando estos estudiantes multiplicasen un número cualquiera (p. ej. 235) por dos diferentes números decimales (0.4 y 0.28), muy probablemente no podrían establecer cuál resultado será mayor, previo a la realización de la operación, o lo anticiparían de forma incorrecta, (28 es mayor a 4).Lo anterior complicaría la labor instruccional de presentar el concepto de porcentaje a los estudiantes, pues, si los jóvenes desconocen la razón por la que un número decimal es mayor a otro, (lo que los hace pensar que 0.28 es mayor a 0.4), y luego se les dice que los porcentajes correspondientes tienen un orden distinto, (0.28 es 28%, y 0.4 es 40%), probablemente terminen más confundidos.

A su vez, ello dificultaría enormemente discutir ideas importantes para las áreas Económico Administrativas que se apoyan en el concepto de número decimal y de porcentajes, como es el pago de impuestos, o la evolución del crecimiento porcentual de los costos o ingresos de una empresa. Por ejemplo, si existe confusión en los estudiantes sobre la manera en que las unidades porcentuales se relacionan con los números y fracciones decimales, y se les pide que comparen el monto a pagar en un sistema impositivo que exige el 28% de los ingresos de una empresa, con el monto que se pagaría en otro sistema que pide un pago del 40%, muy probablemente los jóvenes no podrían argumentar cuál sistema impositivo es menos costoso utilizando números decimales.

Por otra parte, es curioso observar cómo los datos de la tabla muestran que el 11.5% de los estudiantes podían contestar acertadamente problemas de adición y sustracción que tengan números decimales hasta centésimos (reactivo 11), cuando también se presenta que sólo un porcentaje más bajo de los jóvenes es capaz establecer un orden entre los números decimales. ¿Qué significado tendrán para ellos esas operaciones? Quizá simplemente las realicen de manera algorítmica, es decir, posiblemente sólo sigan de manera mecánica determinados procedimientos de cálculo, sin reflexionar sobre su significado.

Pero no son las fracciones y los decimales las únicas cantidades con las que los estudiantes tienen dificultades. En el caso de las proporciones, la tabla muestra que también solamente un porcentaje bajo de los estudiantes pueden resolver problemas relacionados con proporcionalidad, (reactivos 7, 16 y 21). El caso de las razones y proporciones es de interés porque su comprensión permite entender determinados indicadores de productividad de una empresa (producción/costo, producción/insumo) o de bienestar (población por médico).

De hecho, Silvia Alatorre encuentra en su trabajo de tesis doctoral (Alatorre, 2004, p 284 y 285), resultados muy similares a los anteriores. En este trabajo, dicha investigadora intenta caracterizar y tipificar las estrategias con las que las personas entrevistadas intentaron llegar a una solución de razonamiento proporcional. Además, revisa si la estructura del problema, el contexto, y ciertas características personales, como la edad y la escolaridad influyen en el tipo de estrategias elegidas para solucionar tal tipo de problemáticas.

La autora entrevistó a 22 personas, a las cuales eligió dentro de un rango de edades entre 9 y 65 años, y con un grado de escolaridad que iba desde tres meses de alfabetización hasta el doctorado. Para ella, los adultos de licenciatura examinados pueden describirse en términos muy semejantes a los de los sujetos adultos en secundaria. Casi ninguno de ellos comete errores en las preguntas del nivel más sencillo (representado en su tesis por L1). Sin embargo, en el nivel siguiente (L2), aunque casi no cometen errores al buscar soluciones para relaciones como las exposiciones[6] y las particiones[7], hay dos terceras partes de errores para las composiciones[8]. En el nivel de más dificultad (L3) son incorrectas casi la mitad de las respuestas en exposiciones, más de tres cuartas partes en composiciones y dos terceras partes en particiones. La estrategia más usada de Relaciones Proporcionalidad fue la comparación de razones[9] (Alatorre, 2004, p 284 y 285).

---

[6] Relación entre un conjunto de objetos y sus propiedades internas (tipo de animal, peso promedio)
[7] Resultado de un reparto proveniente de un total
[8] Relación entre un conjunto de clases vinculadas por criterio y las magnitudes correspondientes a cada una de ellas (tipo metal dentro de una aleación, porcentaje correspondiente)
[9] Se refiere a las estrategias que consisten en el cálculo explícito o implícito de la razón de antecedentes a consecuentes a:c (o viceversa, c:a) en cada uno de los dos objetos, y su comparación posterior.

1.3 La preocupación internacional por una enseñanza de las Matemáticas contextualizada a la vida profesional y ciudadana

Los datos anteriores nos ayudan a darnos una idea de la magnitud de los rezagos en educación matemática a nivel nacional. Sin embargo, existen todavía otros rasgos de las problemáticas señaladas que es necesario apuntar, pues su naturaleza tiene que ver con la capacidad de los estudiantes para dar sentido a situaciones prácticas.

Existen dos comentarios presentados en los estudios de PISA y del INEE que hacen referencia a la dificultad que tienen los jóvenes mexicanos en el planteamiento y resolución de problemas vinculados con situaciones cotidianas:

> Para la categoría "Pensamiento Cuantitativo" los estudiantes eran capaces de resolver problemas con el grado de dificultad más básico en los cuales la información relevante para abordar la situación se presentaba de manera explícita, la situación era muy inmediata y limitada, y la tarea propuesta podía resolverse con una simple operación aritmética (PISA, 2003, p. 79)

> Los estudiantes muestran un desempeño aceptable en la resolución de problemas que implican operar con números naturales y, en general, en situaciones que pueden ser resueltas con procedimientos formales de manera directa. Por el contrario, presentan serias deficiencias ante problemas en los que tienen que hacer razonamientos más complejos, que requieren elaborar conjeturas, hacer generalizaciones o inferencias y vincular resultados (Backhoff, 2006, p. 25)

Como comenté más arriba, en estas condiciones es posible conjeturar que los jóvenes universitarios que decidan estudiar alguna de las disciplinas Económico Administrativas, encuentren dificultades al tratar de dar sentido a las situaciones relacionadas con su profesión. Ello se debe a que en estas profesiones muchas veces la información a la que se tiene acceso está implícita dentro de la situación. Incluso en el caso de que se trabaje con información presentada conforme a los criterios y estándares de una profesión (como, por ejemplo, en el caso de la Contaduría) no hay directrices que digan cómo interpretar la información con que se cuenta, cuál es relevante para tomar decisiones y cómo debe aprovecharse. Además en estas áreas también se trabaja con contextos no estructurados, lo que significa que no siempre las variables a utilizar están establecidas de antemano, sino que tienen que crearse, definirse y justificarse ante otros profesionistas.

También se necesita de la habilidad de llevar a cabo diferentes operaciones y de la organización de varios tipos de datos.

De hecho, existen varias instituciones alrededor del mundo que también han manifestado esta preocupación por orientar la formación de la población hacia una Alfabetización Matemática (en inglés mathematical literacy, quantitative literacy, numeracy), es decir, hacía una aproximación contextualizada y especializada a la enseñanza y aprendizaje las matemáticas. Por ejemplo, dentro de los documentos que buscan sustentar al Programa Internacional para la Evaluación Estudiantil (Programme for International Student Assessment, PISA)[10], la OCDE ha definido a la "alfabetización matemática" como:

> La capacidad de un individuo para identificar y comprender el papel que las matemáticas juegan en el mundo, para realizar juicios fundamentados y para usar e involucrarse con las matemáticas de maneras que resulten útiles dentro del contexto de vida de cada individuo y de forma que le ayuden a desenvolverse como un ciudadano reflexivo y comprometido (PISA, 2003, p. 37)

En Estados Unidos el interés por promover e investigar a la alfabetización matemática, ha llevado a la conformación de consejos y equipos de investigación. Tal es el caso del Consejo Nacional para la Educación y las Disciplinas (National Council on Education and the Disciplines, NCED), convocado por la Asociación Estadística Americana (American Statistical Association, ASA) y por el Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas (Nacional Council of Teachers of Mathematics, NCTM). El NCED concibe a la Alfabetización Matemática como:

> un agregado de elementos que incluyen la capacidad de interpretar datos e información cuantitativa, de comprender argumentos, cuestionar supuestos, detectar falacias así como de usar la información y los análisis generados para tomar decisiones apropiadas a un contexto específico (NCED, 2006, p. 7).

En el Reino Unido, surgió el National Research and Development Centre for Adult Literacy and Numeracy, NRDCALN, el cual forma parte del Instituto de Educación de la Universidad de Londres y esta patrocinado por el Fondo Social de la Unión Europea.

---

[10] PISA ha aplicado evaluaciones a nivel internacional a jóvenes entre 15 y 16 años pertenecientes a los países de la OCDE y otros invitados, con el fin de medir y comparar su desempeño en Matemáticas, Ciencias y uso del lenguaje.

Para el NRDCALN la “alfabetización matemática” implica

> La habilidad de entender y usar información matemática, calcular y manipular información matemática, interpretar resultados y comunicar información matemática. Además, se enfatiza el uso de problemas insertos en un contexto realista, así como la relación entre las instrucciones de clase y el ambiente y experiencia cotidiana de los estudiantes (Ananiadou, 2003, p. 7)

Tenemos así que en opinión de diferentes investigadores e instituciones educativas internacionales, los rezagos en educación matemática han llegado a constituirse en un auténtico problema de educación pública y que probablemente podría limitar la capacidad de los estudiantes universitarios para aprovechar sus conocimientos en un entorno práctico.

¿Cómo podría reorientarse la enseñanza de las Matemáticas de manera que apoye el aprendizaje de los estudiantes dentro del contexto profesional en que deben ser formados? Como muestro en el siguiente capítulo, la respuesta a esta pregunta dependerá mucho del enfoque epistemológico que se adopte para interpretar los datos mostrados en este capítulo.

2. Enfoque epistemológico

En el capítulo anterior presenté datos que sugieren la presencia de fuertes rezagos en el aprendizaje de las Matemáticas a nivel nacional e internacional. Comenté que, bajo tal escenario, es razonable esperar que los estudiantes universitarios también tengan problemas al intentar comprender información cuantitativa propia de sus carreras; algo que he detectado innumerables veces en mi trabajo como profesor universitario de Matemáticas.

Por supuesto, esta situación naturalmente nos lleva a cuestionarnos cómo podrían atenderse esos rezagos. La respuesta a esta pregunta depende en gran medida del enfoque que se adopte para interpretar la información sobre el desempeño en Mátemáticas de los alumnos. Ello es así porque de la perspectiva con la que se analicen esos datos dependerá también el tipo de intervención o propuesta educativa con la cual se pretenderá enfrentar las dificultades descritas previamente.

Así, basándome en el análisis realizado por Cobb, Yackel y Wood (1993), en este capítulo examino diferentes propuestas que han sido empleadas para fundamentar ciertas prácticas matemáticas[1]. Dichas prácticas están presentes en la educación matemática mexicana. En primer lugar, describo lo que esos autores llaman el *enfoque representacionista*. Desde éste, se concibe al aprendizaje como un proceso en el cual los estudiantes modifican sus representaciones mentales internas para construir relaciones matemáticas o estructuras que reflejan aquellas que se manifiestan en representaciones instruccionales externas.

Luego explico cómo para Cobb, Yackel y Wood (1993), el enfoque representacionista da lugar a la “paradoja del aprendizaje”. Esta paradoja surge del supuesto de que la mente humana es capaz de reconocer y conceptualizar propiedades matemáticas inherentes en la realidad externa, o en ciertos elementos didácticos. La paradoja radica en que bajo tal perspectiva para que los alumnos puedan dar sentido a un fenómeno, o elemento didáctico matemático, deben de haber desarrollado previamente el concepto que se les pide comprender.

[1] Por prácticas matemáticas me refiero a un conjunto de actividades, procedimientos, materiales, simbolizaciones y normas de interacción social que son utilizados por cierta comunidad y que tienen como objetivo el que los alumnos desarrollen su comprensión de determinados conceptos matemáticos.

Para Cobb, Yackel y Wood, las problemáticas del enfoque representacionista emergen del dualismo que tal postura plantea entre las Matemáticas presentes en la mente o el cerebro de los estudiantes, y las Matemáticas que se manifiestan en su ambiente exterior. Para ellos, ese enfoque, desde una posición antropológica, no considera la naturaleza social y cultural de la actividad matemática; y, desde una postura pedagógica, parece favorecer recomendaciones educativas que son incompatibles con un aprendizaje conceptual de los estudiantes.

En el capítulo también describo un enfoque epistemológico alternativo propuesto por Cobb, Yackel y Wood (1993), en cual se fundamenta el trabajo realizado por la comunidad del Diseño Instruccional; este es, el enfoque epistemológico que utilicé para orientar mis decisiones metodológicas y para interpretar la información recopilada, en la elaboración de esta tesis. Tal enfoque intenta trascender el dualismo ya descrito, concibiendo las Matemáticas como una actividad constructivista individual, pero también como una práctica comunitaria y social. Explico cómo tal manera de entender las Matemáticas puede facilitar la generación de propuestas educativas apropiadas para apoyar el aprendizaje matemático de los estudiantes universitarios de las áreas administrativas.

Decidí adoptar tal perspectiva porque, además de que es utilizada por diferentes investigadores alrededor del mundo, coincide con mis propias consideraciones personales, en el sentido de que reconoce que para que los alumnos logren dar un sentido matemático a su entorno profesional, es necesario que mantengan una estrecha interacción y discusión con sus profesores. Además, mi impresión fue que bajo tal postura se enfatiza que el trabajo docente es uno que requiere una constante y profunda reflexión sobre los procesos de razonamiento, las actividades y las decisiones de los alumnos, pues éstas brindan al profesor información que resulta útil para identificar las ideas que necesitan discutirse con mayor cuidado y para proponer formas alternativas de conceptualizar una situación. Tal análisis del razonamiento estudiantil incluso podría aprovecharse para generar nuevas actividades relacionadas con el contexto en el que los jóvenes ejercerán como profesionistas.

2.1 El enfoque representacionista

Cobb, Yackel y Wood (1993) consideran que, muchas de las teorías contemporáneas en Educación Matemática han intentado adoptar un enfoque según el cual el aprendizaje es un proceso de construcción de representaciones mentales internas. Investigaciones como las de Jean Piaget, así como las de autores más recientes, por ejemplo, Confrey (1990) y Thompson (1989), han estudiado los procesos por los cuales los estudiantes modifican sus representaciones cognitivas y utilizan símbolos para expresar sus razonamientos. Bajo ésta perspectiva cualquier material didáctico, desde barras de colores hasta complejos programas computarizados, únicamente se convierte en una representación matemática cuando los estudiantes los utilizan para expresar una idea o concepto. Tal línea de investigación, se opone a la postura de que existe un significado matemático inherente a las representaciones externas y, en cambio, propone como principio fundamental que los significados matemáticos dados a estas representaciones son el producto de la actividad interpretativa de los estudiantes.

Para Cobb, Yackel y Wood (1993) dicha perspectiva educativa contrasta con el enfoque representacionista (explicado en Putnam, 1988), según el cual conocer y comprender significa poder representar internamente y con exactitud todo aquello que es externo a la mente. Para Cobb, Yackel y Wood dado que la mayoría de los educadores matemáticos conciben el aprendizaje como un proceso constructivista, es dudoso que algún educador matemático adopte de forma literal el enfoque representacionista. No obstante, también es cierto que el término “constructivismo” se utiliza para agrupar una gran diversidad de posturas teóricas. Algunas de ellas parecieran ser perspectivas eclécticas en las que los investigadores intentan combinar la idea del aprendizaje como una construcción activa del individuo con algunos aspectos del enfoque representacionista. Por ejemplo, generalmente se piensa que los diseñadores de los currícula y los profesores, deberían generar materiales didácticos que muestren los significados y estructuras matemáticas de manera tal que sean transparentes a los estudiantes. Se espera que las construcciones de los alumnos sean correctas y útiles. Bajo tal aproximación, se concibe a las matemáticas como una propiedad evidente de las representaciones instruccionales externas (materiales y recursos didácticos). El aprendizaje queda caracterizado como un proceso en el cual los estudiantes gradualmente construyen representaciones mentales que reflejan de manera precisa los elementos matemáticos de las representaciones instruccionales externas:

De acuerdo a Cobb, Yackel y Wood (1993) los diversos enfoques eclécticos, coinciden entonces con la postura representacionista en tres rasgos centrales:

1) Su meta instruccional es ayudar a los estudiantes a construir representaciones mentales que reflejen con precisión las relaciones matemáticas ubicadas en la realidad externa a la mente.

2) El método para lograr tal meta intruccional es elaborar diferentes tipos de representaciones instruccionales externas (materiales didácticos) transparentes, los cuales posibilitarán que los estudiantes construyan representaciones internas correctas.

3) Los materiales didácticos son el factor principal que propiciará que los estudiantes evolucionen en sus conocimientos matemáticos.

Debido a estas coincidencias fundamentales, en adelante, al hablar del enfoque representacionista, también estaré haciendo referencia a todas las posturas que se le asemejan. De esta manera tenemos que desde la perspectiva de ciertas posturas eclécticas se explica el aprendizaje como un proceso de reconocimiento de las estructuras matemáticas inherentes en nuestro entorno físico y social. Además, se considera que los humanos contamos con el mismo tipo de estructuras matemáticas innatas. No obstante, como ya comenté en la introducción de este capítulo, el enfoque representacionista deja de lado ciertas consideraciones cognitivas, antropológicas y pedagógicas, que podrían resultar pertinentes para contar con una perspectiva más completa sobre los procesos educativos y para formular propuestas instruccionales eficaces. A continuación presento tales consideraciones.

2.2 Consideraciones cognitivas sobre el enfoque representacionista

2.2.1 La paradoja del aprendizaje

Cobb, Yackel y Wood (1993) consideran que el enfoque representacionista da lugar a lo que Bereiter (1985) denomina *la paradoja del aprendizaje*. Ello se debe que los conceptos o representaciones internas imponen restricciones a lo que el sistema mental puede reconocer y a las actividades que puede realizar para alcanzar una meta. Si ciertos conceptos no están disponibles, una persona no puede reconocer una situación de la manera en que la reconoce alguien que sí los ha desarrollado. Así, un niño que no tiene un concepto de lo que es la multiplicación no identificará como multiplicativas ciertas situaciones, que otras personas sí reconocen como tales.

El enfoque representacionista parece llevarnos a un círculo vicioso. Para experimentar un nuevo concepto del mundo, una persona debe de tener disponible tal concepto de manera que el significado de las representaciones externas le sea transparente. Pero si uno no puede experimentar un nuevo concepto, ¿cómo es posible que la persona adquiera un concepto que no es todavía parte de sus representaciones internas? En otras palabras, el supuesto de que el simple uso de los materiales didácticos llevará inevitablemente a que los estudiantes construyan la representación interna correcta, implica que el aprendizaje se genera debido a la presencia de relaciones matemáticas que han sido construidas mentalmente antes de haber sido construidas (Cobb, 1987; Gravemeijer, 1991; von Glassersfeld, 1978)

Si los estudiantes sólo pueden dar un significado a su entorno en términos de sus representaciones internas (conceptos) ¿cómo es posible que reconozcan relaciones matemáticas que son más avanzadas que aquellas con las que cuentan? Para Cobb, Yackel y Wood (1993) tal suceso será imposible si se deja que los estudiantes traten por sí mismos de dar un sentido a los nuevos materiales didácticos que se les presentan.

2.2.2 El rol del maestro

En su análisis, Cobb, Yackel y Wood (1993) comentan que el profesor sería entonces quien podría jugar un papel importante al ayudar a los estudiantes a desarrollar constructos internos de las relaciones matemáticas. No obstante, también debe aclararse cuál es el rol del maestro, pues los enfoques en los que se espera que éste haga explícitos los contenidos que los alumnos deben asimilar, frecuentemente llevan a una aproximación educativa centrada en el estudio de los algoritmos.

La interpretación del maestro como alguien que hace explícitas ciertas relaciones matemáticas preexistentes es consistente con los rasgos centrales del enfoque representacionista. Tal concepción de la enseñanza se apoya en el supuesto de que los materiales didácticos son la fuente originaria del conocimiento matemático de los estudiantes. Para Cobb, Yackel y Wood (1993), en tanto que este supuesto se tome por válido, la discusión del papel del profesor se centrará en el grado de explicitud con el que las relaciones matemáticas preexistentes deban presentarse a los estudiantes. Tal idea de la enseñanza es una que parece ser más un proceso de imposición más que de negociación de significados.

Un punto adicional que según Cobb, Yackel y Wood (1993) debe señalarse en la discusión sobre el papel del maestro, es reconocer que la interacción social tiene una influencia importante en el aprendizaje matemático de los alumnos. Este es un tema que desarrollo más adelante en este capítulo. Por ahora, señalaré que para que Cobb, Yackel y Wood, los maestros pueden contribuir a trascender la paradoja del aprendizaje intentando ver más allá de su perspectiva de “expertos” y considerando las diversas maneras en las que los estudiantes interpretan los materiales didácticos al involucrarse en una comunicación matemática genuina, dentro del contexto social del salón de clases. Cuando esto sucede, los materiales dejan de ser utilizados como medios que representan relaciones matemáticas transparentes. En lugar de ello, se les define como aspectos de un contexto educativo en el cual, al involucrarse en actividades matemáticas, el maestro y los estudiantes intentan negociar de manera explícita sus diferentes interpretaciones.

2.2.3 Problemas teóricos

La discusión sobre la paradoja del aprendizaje y sobre el rol del maestro sirve como antecedente para comprender cuatro problemas teóricos que Cobb, Yackel y Wood (1993) reconocen que surgen cuando se asumen ciertos supuestos del constructivismo y se combinan con algunos aspectos del enfoque representacionista.

La primera dificultad involucra una tensión en las caracterizaciones eclécticas del aprendizaje matemático. Por un lado, el aprendizaje es descrito como un proceso en el cual los estudiantes construyen su conocimiento matemático al intentar dar un sentido a su entorno. Por otro, el aprendizaje puede ser entendido como un proceso de reconocimiento de las relaciones matemáticas presentes en representaciones instruccionales externas.

Estas dos caracterizaciones del aprendizaje matemático reflejan diferencias en el énfasis que se da a las interpretaciones que los estudiantes y los maestros dan a los materiales didácticos. La concepción del aprendizaje como una construcción implica que los estudiantes desarrollan y elaboran sus medios de conocimiento matemático. Por ello se vuelve crucial comprender las diversas maneras en las que los estudiantes interpretan una situación, pues tal comprensión ayudará al desarrollo instruccional y educativo. En contraste, la idea de que el aprendizaje es el reconocimiento preciso y correcto de las relaciones matemáticas preexistentes, enfatiza exclusivamente la interpretación experta que los profesores tienen de los materiales didácticos.

Cobb, Yackel y Wood (1993) consideran que, en general, la tensión entre las dos caracterizaciones del aprendizaje matemático presentes en las posturas eclécticas apunta a la dificultad para reconciliar la creencia de que los estudiantes construyen sus conocimientos matemáticos apoyándose en sus conceptos previos, con el hecho de que los educadores tenemos ciertas metas educativas en mente. En otras palabras, en las caracterizaciones eclécticas del aprendizaje matemático, el reconocimiento de que los estudiantes deben dar un sentido a su entorno entra en conflicto con la idea de que no todas las interpretaciones pueden ser correctas.

La segunda dificultad teórica está relacionada con la primera y emerge de la referencia a dos teorías semánticas incompatibles. Según Cobb, Yackel y Wood la idea de que el aprendizaje matemático es un proceso constructivo ubica la actividad interpretativa en las actividades matemáticas de los estudiantes, las cuales están contextualizadas social y culturalmente. En contraste, la caracterización del aprendizaje matemático como una representación precisa de las relaciones matemáticas externas y preexistentes se fundamenta en una teoría objetivista derivada directamente del enfoque representacionista. En tal teoría, el significado se concibe como una correlación fija y precisa entre cierto símbolo y un objeto o fenómeno. (Putnam, 1988). Para Cobb, Yackel y Wood, la tensión entre las semánticas constructuvistas y objetivistas apunta a que la aplicación que se ha hecho del enfoque representacionista, en las caracterizaciones eclécticas del aprendizaje dentro de la educación matemática, requiera de una importante reestructuración teórica.

La tercera dificultad teórica del enfoque representacionista que reconocen Cobb, Yackel y Wood (1993) emerge del dualismo que tal postura plantea entre las Matemáticas presentes en la mente o el cerebro de los estudiantes, y las Matemáticas que se manifiestan en el entorno externo. Es razonable suponer que el maestro (al igual que lo hacen los estudiantes) da un sentido a su entorno construyendo representaciones internas.

El elemento teórico crucial que da lugar al dualismo mencionado es la proyección de las interpretaciones expertas del profesor sobre el entorno de los estudiantes. Además se trata a tales interpretaciones como representaciones externas preexistentes e independientes del sujeto, y de la colectividad, que las proyecta.

Para Cobb, Yackel y Wood (1993) el aprendizaje se convierte entonces en una situación en la que los estudiantes están separados de las relaciones matemáticas preexistentes en el entorno. Esta separación incluso es institucionalizada en el uso dualista que se da al término representación; las representaciones internas están localizadas dentro del cerebro de los estudiantes y las representaciones externas están localizadas en el entorno (von Glasersfeld, 1987; citado por Cobb, Yackel y Wood, 1993). Es esta separación la que da lugar a la paradoja del aprendizaje (Berieter, 1985), pues los conceptos más complejos están localizados en el entorno, y no es claro cómo es que los estudiantes podrían aprehenderlos. Cobb, Yackel y Wood consideran que una forma en la que podría resolverse tal paradoja es cuestionar el dualismo que la origina, y reconsiderar la relación entre el conocimiento matemático y el sujeto que lo conoce.

La cuarta dificultad teórica a que da lugar el supuesto de que ciertos significados matemáticos están intrínsicamente presentes en el entorno es que esta idea entra en conflicto con hallazgos empíricos que sugieren que los significados matemáticos están situados social y culturalmente. En general, investigaciones como las de Bishop (1988), Rogoff (1990) y Saxe (1991) ilustran el vínculo que existe entre las prácticas culturales y el desarrollo de ciertos conceptos y prácticas matemáticas. Para Cobb, Yackel y Wood (1993), tal tipo de evidencia cuestiona de forma directa el supuesto de que existen relaciones matemáticas preexistentes, contenidas en el entorno y que, además, son independientes de la actividad humana individual y colectiva. En contraste, los hallazgos en las investigaciones citadas son compatibles con la concepción de que la construcción del conocimiento matemático en un entorno escolar está sujeto a la influencia de las negociaciones de significado, explícitas o implícitas, en la que los estudiantes y los profesores se involucran dentro del salón de clases. Tal perspectiva reconoce que el proceso del desarrollo del conocimiento es un proceso social y culturalmente situado.

2.3 Consideraciones antropológicas sobre el enfoque representacionista

Como mencioné en la sección anterior, según Cobb, Yackel y Wood (1993), uno de los aspectos centrales de una actividad matemática significativa es el tener la experiencia de un entorno estructurado por relaciones matemáticas. Sin embargo, desde un punto de vista educativo, la cuestión relevante es explicar cómo es que llegamos a tener esa experiencia: ¿cómo es que nuestra mente o cerebro llega a organizar la información empleando ideas matemáticas.?

De acuerdo con Cobb, Yackel y Wood (1993), un primer elemento que podría ser útil para explicar tal proceso es advertir que la aparente transparencia que tienen para algunos profesores y expertos las representaciones instruccionales refleja las concepciones relativamente complejas de ellos. Sin embargo, esta observación no es suficiente para explicar la expectativa de que el significado de las representaciones externas sea autoevidente. Los adultos y profesores no sólo suponen individualmente que un material didáctico tiene una interpretación única y transparente, sino que esperan que tal significado sea evidente para otras personas. En pocas palabras, los expertos formulamos una interpretación personal de las representaciones externas y además tenemos la convicción de que ésta será compatible con la de otras personas. También suponemos que nuestra interpretación será útil al intentar comunicarnos con otros individuos. De esta forma, para Cobb, Yackel y Wood, la aparente transparencia de los materiales didácticos es una consecuencia de nuestro propio proceso de socialización, durante el cual construimos conceptualizaciones relativamente complejas que nos permiten participar en las prácticas matemáticas de nuestra propia cultura y sociedad.

Para Bereiter (1985; citado por Cobb, Yackel y Wood, 1993) tal proceso de socialización es intrigante. En particular, le llamó la atención el hecho de que la gran mayoría de los niños con los que trabajaba desarrollaran estructuras matemáticas bastante similares. Además, este investigador observó que los niños solían generar aquellas ideas que resultaban más sencillas para dar un sentido a su entorno; no sólo eso, los niños tendían a desarrollar las conceptualizaciones que son consideradas como autoevidentes por los individuos que ya habían experimentado un proceso de socialización. Bereiter llegó a considerar a este hecho como un segundo aspecto de la paradoja del aprendizaje.

Cobb, Yackel y Wood (1993) consideran que la observación de Bereiter de que sólo algunas conceptualizaciones similares y comunes se generan a partir de cierta situación, aun cuando una gran cantidad de otras posibles interpretaciones pudieron haber sido construidas, lleva a preguntarnos si la naturalidad con la que se desarrolla cierta idea proviene del contacto directo con estructuras matemáticas preexistentes en el entorno. Tal cuestión resulta un auténtico enigma si uno adopta la postura de que las representaciones externas, y el entorno, muestran de manera transparente un conjunto particular de relaciones. Es frecuente que cuando un maestro presenta una serie de materiales didácticos a los estudiantes, generalmente tenga en mente cierta interpretación del material que presenta. Pero, además, supone que la situación didáctica es única y que será inevitable que los niños la interpreten de la misma manera que él.

Para Cobb, Yackel y Wood (1993), explicar cómo es que los estudiantes desarrollan construcciones compatibles con aquellas que el experto tiene en mente será muy difícil en tanto no analicemos nuestras propias intepretaciones de las representaciones externas. Para estos autores, puede parecer natural reconocer en los materiales didácticos las relaciones matemáticas con las que damos sentido a nuestro entorno precisamente porque suponemos que nuestra interpretación de esos materiales es compartida por otras personas. En otras palabras, la aparente transparencia de las representaciones intruccionales externas es una consecuencia de las interpretaciones comunes, que además nos sirven a los expertos para comunicarnos con otras personas que también saben matemáticas.

No obstante, Cobb, Yackel y Wood (1993) consideran que en tanto sigamos suponiendo que tales interpretaciones son autoevidentes no contemplaremos la posibilidad de que éstas constituyan únicamente una de diversas alternativas, o que los estudiantes no vean lo que nosotros vemos. Además, si suponemos sin cuestionar que las relaciones que tenemos en mente son las mismas que se encuentran en el entorno de los estudiantes, y que simplemente están esperando a ser percibidas, una vez que se agoten nuestras estrategias para evidenciar tales “estructuras transparentes”, nuestro único recurso para lograr su reconocimiento será dictárselas o, peor aún, imponérselas a los alumnos. Una vez llegados a este extremo, se abre la posibilidad de que los estudiantes confundan la forma con el fondo, y de que se comporten de maneras que nos hagan suponer que ven lo que consideramos autoevidente, sin que sea éste el caso.

Para Cobb, Yackel y Wood (1993), este segundo aspecto de la paradoja del aprendizaje deja de parecer inescrutable una vez que ampliamos nuestra perspectiva y consideramos que la naturalidad de ciertas interpretaciones es producto de nuestra propia socialización y adecuación a las prácticas matemáticas de nuestra cultura y sociedad. Estos autores citan a Putnam (1981), quien sostiene que los signos no corresponden de manera intrínseca a los objetos, de forma independiente a la manera en la que son usados y de las personas que los usan. Según Putnam, los objetos y los signos son similares dentro del esquema conceptual de esos usuarios por lo que es posible establecer qué signo corresponde con qué signo. Cobb, Yackel y Wood reconocen que Von Glasersfeld (1984) mantiene una postura semejante a la de Putnam, según la cual las semejanzas entre diferentes objetos particulares llevan a los humanos a formular un concepto o categoría general con la que se agrupa a los objetos particulares. En otros términos, para Von Glasersfeld, las correspondencias supuestamente unívocas y preexistentes entre ciertos símbolos arbitrarios y el entorno, que son el fundamento de la teoría semántica objetivista, en realidad son construidas dentro de un sistema de signos compartidos socialmente que sirve de fundamento a la comunicación entre los integrantes de cierta comunidad.

Desde la perspectiva de autores como Johnson (1987) y Von Glassersfeld (1984) algunos de los enunciados formulados por la comunidad, con cierto objetivo en mente, serán mas apropiados que otros, algunos serán considerados como compatibles con nuestras vivencias, otros no. Pero en cada caso tal correspondencia, estará dada por nuestra experiencia, concepción del mundo y por los signos que utilizamos para describirlo.

Tenemos así que para Cobb, Yackel y Wood (1993), desde la perspectiva antropológica, no hay razón para suponer que las relaciones matemáticas que resultan autoevidentes para los expertos también lo sean para aquellas personas que no han estudiado cierta rama de las Matemáticas. En lugar de ello, estos autores reconocen en diferentes investigaciones que la naturalidad con la que emergen ciertas interpretaciones matemáticas está dada por los esquemas conceptuales comunes que cada experto ha construido en su proceso de socialización matemática. En consecuencia, bajo esta perspectiva no se concibe a la enseñanza como una actividad en la que se intenta dirigir la atención de los estudiantes, de maneras cada vez más obvias, hacia estructuras cuya presencia en su entorno nos parece evidente a los expertos. En lugar de ello, en esta perspectiva, se concibe a la enseñanza como una actividad en la que se apoya el desarrollo matemático de los estudiantiles a través de la negociación de los significados que forman parte de las prácticas matemáticas que se van constituyendo en las aulas, las cuales tienen como base las prácticas y sistemas de símbolos matemáticos compartidos por su sociedad.

De forma paralela, desde la postura de Cobb, Yackel y Wood (1993), el aprendizaje es visto como un proceso activo y constructivo en el cual los estudiantes intentan resolver problemas que emergen en las prácticas matemáticas de su vida cotidiana o profesional. Tal perspectiva subraya que el proceso de enseñanza aprendizaje[2] es de naturaleza interactiva e involucra una continua negociación, tanto implícita como explícita, de los significados matemáticos. En el curso de tales negociaciones, el maestro y los estudiantes elaboran una realidad matemática colectiva que sirve de fundamento a su actividad comunicativa.

Bajo la caracterización de Cobb, Yackel y Wood (1993) del proceso de enseñaza aprendizaje, se enfatiza que tanto los maestros como los estudiantes modifican sus interpretaciones una vez que consideran y reflexionan sobre sus interacciones matemáticas. Este punto no niega que los maestros representen una autoridad y que sólo ellos puedan evaluar el potencial y la utilidad de la actividad

[2] Como explicaré a lo largo de este capítulo, pero más específicamente en la sección 2.8 y en la página 49 Cobb, Yackel y Wood (1993) frecuentemente se refieren al proceso de enseñanza aprendizaje de forma simultánea porque lo conciben como una continua negociación colectiva de significados. En breve, desde la perspectiva de Cobb, Yackel y Wood es necesario analizar el proceso de aprendizaje de los estudiantes incluso si el objetivo es explicar la actividad del profesor (y viceversa), ninguna de tales acciones existiría sin la otra. En consecuencia, bajo esta perspectiva se consideran de poco valor los análisis que se centran exclusivamente en aspectos aislados tanto del comportamiento del profesor o de los estudiantes y que no consideran el contexto colectivamente construido por ambos durante sus interacciones.

colectiva e individual en el aprendizaje futuro. En la caracterización de Cobb, Yackel y Wood, el papel del maestro involucra realizar inferencias sobre los signos o las conceptualizaciones colectivas que él y los estudiantes comparten. Sus supuestos sobre las comprensiones colectivas y las concepciones individuales de los estudiantes son completamente revisables. Además, constituyen el punto de referencia que da origen y orienta las discusiones en el aula. Al hacerlo, el maestro continuamente reformula sus inferencias y por tanto implícitamente legitimiza ciertos aspectos de las contribuciones matemáticas de los estudiantes.

Además, el maestro puede aprovechar, como tema de discusión en clase las diversas interpretaciones de los estudiantes que puedan parecer contradictorias o mutuamente excluyentes. De esta manera logrará estimular a los alumnos a negociar de forma explícita los significados matemáticos, e involucrarlos en una discusión matemática en la cual se propicie el uso de argumentos para justificar sus puntos de vista. De forma más general, al aprovechar la actividad matemática de los estudiantes, el maestro introduce y apoya el desarrollo de ciertas comprensiones matemáticas colectivas y que además son compatibles con las del resto de la sociedad.

En la caracterización que hacen Cobb, Yackel y Wood (1993) del proceso de enseñanza aprendizaje el segundo aspecto de la paradoja de Bereiter desaparece. Sólo es una paradoja si se separa el conocimiento del sujeto que conoce; esto es, si se considera que el aprendizaje es un proceso de apropiación de ciertas relaciones matemáticas preexistentes en el entorno.[3]

2.4 Consideraciones Pedagógicas sobre el enfoque representacionista

En esta sección considero la tercera dificultad inherente al enfoque representacionista identificada por Cobb, Yackel y Wood (1993); a saber, la separación que los estudiantes realizan entre su actividad matemática escolar y aquella que efectúan en otros contextos. Esta problemática se vuelve relevante una

[3] Es importante aclarar aquí que el enfoque propuesto por Cobb, Yackel y Wood no niega la originalidad del pensamiento de investigadores como Piaget o Vigotsky, ni tampoco se ignora su anterioridad cronológica con respecto a la propuesta epistemológica del Diseño Instruccional. (Simon, 2004). Mas bien bajo este enfoque epistemológico se propone entonces una aproximación que integre los aspectos cognitivos individuales del aprendizaje con los aspectos sociales o colectivos (ver sección 2.6 de este capítulo, en especial la página 45)

vez que se advierte que bajo la perspectiva representacionista, los conceptos y procedimientos que se supone deben ser la meta del proceso de aprendizaje resultan ser el punto de partida. Frecuentemente, el análisis formal y estructural de las conceptualizaciones de los expertos es empleado para generar materiales físicos o diagramas que representan dichas estructuras formales de una manera supuestamente transparente. Los materiales elaborados simbolizan los conceptos y algoritmos con los que la comunidad de expertos se encuentran familiarizados. Para Cobb, Yackel y Wood, no es de extrañar que los teóricos representacionistas consideren naturales sus interpretaciones de las representaciones expertas, pues los materiales no son sino la expresión de esas interpretaciones.

Bajo esta perspectiva, las representaciones externas son vistas como el medio con el cual los expertos intentan transmitir sus conceptualizaciones matemáticas a los estudiantes. Sin embargo, para Cobb, Yackel y Wood (1993), en tanto no se considere la relevancia de las interacciones comunicativas con las cuales el profesor incide en las negociaciones de significado llevadas a cabo en el salón de clase, se seguirá suponiendo que el problema central de la enseñanza es el desarrollo de nuevas y mejores formas de expresar y transmitir las relaciones matemáticas que son autoevidentes para el experto. Además, el desarrollo de situaciones educativa se centrará en contextos que no guardan ninguna relación con aquellos con los que interactúan los estudiantes en su vida cotidiana y profesional. Por último, se enseñarán las aplicaciones de los nuevos conceptos sólo cuando las estructuras matemáticas formales hayan sido presentadas.

Cobb, Yackel y Wood (1993) mencionan el trabajo de Saxe (1991), donde se sugiere que estas dificultades podrían atenderse al considerar las soluciones matemáticas de los estudiantes a situaciones no escolares y aprovechar tales propuestas para informar las decisiones instruccionales en el salón de clases. En la perspectiva de Saxe, resulta importante que un contexto escolar se involucre a los alumnos en prácticas matemáticas que tengan las propiedades de una problemática cotidiana que fuese familiar para ellos. Tal tipo de prácticas matemáticas contextualizadas podrían servir como punto de partida al proceso de enseñanza aprendizaje. Para Cobb, Yackel y Wood, el enfoque propuesto por Saxe ayuda a evitar la “inversión antididáctica” (Freudenthal, 1981), en la cual las aplicaciones son posteriores a la enseñanza de las estructuras matemáticas formales. Además, tal postura es compatible con la idea de Freudenthal (1981) y Treffers (1987) de que la primera fase instruccional debería constar de una exploración fenomenológica que incluyese una amplia gama de situaciones que sean experiencialmente reales para los estudiantes.

Para Cobb, Yackel y Wood (1993), estas observaciones implican que los expertos no deben presuponer que son capaces de elaborar contextos artificiales y materiales didácticos que expresan de manera evidente ciertas relaciones matemáticas preexistentes. En lugar de ello, deben intentar desarrollar situaciones instruccionales con las cuales el maestro pueda aprovechar las experiencias previas de los estudiantes, a fin de participar e incidir en la negociación las interpretaciones colectivas, dentro del salón de clases. De acuerdo a estos autores, no debe pensarse que este nuevo enfoque de enseñanza considera a las matemáticas "cotidianas" como un fin en sí mismo, pues las maneras en las que estas actividades instruccionales son interpretadas dentro del salón de clases necesariamente difieren de las interpretaciones comunes que la gente realiza; las cuales tienden a reducir o a eliminar el uso de operaciones. En lugar de ello, Cobb, Yackel y Wood consideran que las interpretaciones iniciales comunes pueden ser aprovechadas dentro del salón de forma que los estudiantes matematicen sus experiencias con el apoyo del maestro.

En términos cognitivos, las situaciones instruccionales descritas en el párrafo anterior tienen valor educativo porque la actividad matemática informal de los estudiantes constituye un fundamento experiencial sobre el cual pueden aprender a matematizar de manera progresiva. Para Cobb, Yackel y Wood (1993), en términos antropológicos, estas situaciones son de valor porque las actividades informales sirven de punto de partida desde el cual el maestro puede apoyar las propuestas y soluciones estudiantiles, facilitando así su socialización matemática. En general, bajo este nuevo enfoque, la primera etapa del proceso de enseñanza aprendizaje consiste en realizar observaciones del tipo de matematizaciones informales que los alumnos realizan de ciertas situaciones cotidianas hipotéticas. Las posibles metas instruccionales son concebidas como las consecuencias de las actividades constructivas de los estudiantes y del apoyo del maestro para desarrollar una experiencia matemática colectiva.

Además, las situaciones instruccionales tradicionales en las que se parte de la expectativa implícita de que los estudiantes serán capaces de aplicar un concepto previamente adquirido son sustituidas por contextos en los cuales se involucra a los alumnos en una actividad matemática constructiva. Para Cobb, Yackel y Wood (1993), la posibilidad de que los estudiantes separen su actividad matemática en la escuela de la que emplean en otros ambientes se reduce al cuestionar la separación tradicional entre adquisición y aplicación.

2.5 Reflexiones sobre el dualismo representacionista

En las secciones anteriores he descrito la explicación que dan Cobb, Yackel y Wood (1993) respecto a cómo diferentes autores han cuestionado, desde diversas perspectivas, el enfoque representacionista del proceso de enseñanza aprendizaje. Tal enfoque enfrenta serias dificultades teóricas y de hecho se contrapone a la preocupación mundial por generar una Educación Matemática contextualizada.

No obstante es importante señalar que esta discusión de ninguna manera constituye una crítica a las intenciones y valores de los educadores matemáticos que de manera implícita o explícita hayan adoptado aspectos de tal perspectiva teórica. En muchos casos, las metas educativas que proponen son compatibles con las de la alfabetización matemática. Debe reconocerse que las representaciones externas son desarrolladas con la motivación de ayudar a los estudiantes a construir determinados significados conceptuales. Parece ser que la posición de Cobb, Yackel y Wood (1993), y de los autores en que se fundamentan, es que una adhesión inflexible al enfoque representacionista se contrapone a muchas de las metas constructivistas, en particular, al desarrollo de conceptualizaciones significativas. Además, tal enfoque suele derivar en un uso excesivo de ciertos algoritmos y en la posibilidad de que los estudiantes divorcien su actividad matemática escolar de aquella que puede efectuarse en otros contextos.

De acuerdo a la perspectiva de Cobb, Yackel y Wood (1993), las dificultades teóricas y prácticas del enfoque representacionista emergen de la naturaleza dualista del mismo. Como punto de partida las Matemáticas presentes en las mentes o cerebros de los estudiantes (representaciones internas) es separado de las matemáticas presentes en su entorno (representaciones externas), pero además, se supone que estas últimas son preexistentes y transparentes. El problema es entonces encontrar maneras en las que los estudiantes puedan apropiarse de las representaciones externas.

Según Cobb, Yackel y Wood (1993), la historia de la filosofía occidental puede entenderse como una serie de intentos infructuosos por proponer una solución a este problema en términos más generales (Von Glasersfeld, 1984). De acuerdo a Cobb, Yackel y Wood, en el siglo XX, Dewey, Mead, Wittgestein, los hermeneuticistas europeos, como Gadamer y Habermas; así como los neopragmáticos estadounidenses, como Bernstein, Putnam y Rorty; se han preguntado si vale la pena plantearse este problema filosófico heredado a nosotros por Descartes. Cada uno de estos pensadores han examinado el supuesto de que la mente puede representarse el mundo de manera independiente a la historia, cultura e intencionalidad humana, y han desarrollado argumentos para demostrar que tal supuesto carece de fundamento.

Sin embargo, de acuerdo a Cobb, Yackel y Wood (1993), es muy importante precisar que su postura no es una escéptica. Según estos autores, el escepticismo epistemológico emerge como consecuencia de las dificultades que plantea la búsqueda de un fundamento trascendente y no cultural del conocimiento y del aprendizaje. Sin embargo, el escepticismo se vuelve irrelevante una vez que se abandonan los supuestos representacionistas que dan lugar a la dicotomía cartesiana. Lo único que se afirma es que debemos cuestionar las aseveraciones que plantean la posibilidad de ignorar la experiencia histórica y cultural, gracias al descubrimiento de una estructura conceptual trascendente y permanente que puede decirnos qué es real y verdadero.

Cobb, Yackel y Wood (1993) también nos advierten que no asumen una postura relativista absoluta. Bajo su perspectiva no se dejan de lado nociones como verdad u objetividad, ni tampoco se ignora la necesidad de contar con estándares para establecer qué tipo de argumentos e interpretaciones son mejores para alcanzar determinados propósitos. Lo único que afirman es que las aseveraciones “verdaderas” están justificadas desde cierta posición cultural e histórica, y desde ciertos métodos de indagación que también reflejan nuestra ideosincracia y momento histórico. En breve, esta postura epistemológica *no* supone que cualquier interpretación es útil, o que cada persona es libre de construir su propia verdad personal sin ningún tipo de restricción.

Bajo este enfoque, la enseñanza de las matemáticas sigue teniendo como meta que, con el apoyo del profesor, los estudiantes eventualmente construyan entendimientos matemáticos verdaderos. Simplemente se cuestiona que los estudiantes desarrollen sus conceptualizaciones y argumentos gracias a un momento de inspiración libre de las influencias culturales e históricas que les permite acceder a ciertas representaciones externas preexistentes. En lugar de ello, los autores que hemos analizado sugieren que, dados nuestros objetivos instruccionales, resulta más fructífero concebir a los estudiantes como constructores activos de sus conceptualizaciones matemáticas de manera que les sea posible participar en las prácticas matemáticas de su comunidad. Desde esta perspectiva la verdad matemática se fundamenta en las interpretaciones matemáticas colectivas y en las prácticas institucionalizadas por la sociedad. La noción de la verdad matemática es discutida desde un enfoque pragmático. Esta postura no intenta establecer si algo es verdadero desde un punto de vista trascendente, no histórico y no cultural. Más bien se concibe a las interpretaciones y soluciones matemáticas como verdaderas para ciertos miembros de una sociedad y en situaciones particulares. Para el caso de la comunidad de un salón de clases, la cuestión central es reconocer las maneras en las que los estudiantes desarrollan sus aprendizajes y nociones de verdad, al participar en la discusión colectiva de conceptos matemáticos.

2.6 Aspectos sociales y cognitivos del aprendizaje

Las reflexiones anteriores nos ayudan a concebir a los expertos y a los estudiantes como interpretes activos que intentan dar un sentido a su entorno. Además, las argumentaciones previas nos llevan a reconsiderar si desde un punto de vista pedagógico resulta razonable suponer que las interpretaciones que los expertos hacen de las representaciones instruccionales evidencian ciertas estructuras matemáticas preexistentes localizadas en el entorno con el que interactúan los alumnos.

Así, la idea de que las acciones de las personas dependen de los significados que asignan a los objetos de su entorno tiene profundas repercusiones metodológicas, pues implica que si un investigador o profesor quiere entender las acciones de los estudiantes, es necesario que entienda la manera en la que interpretan su contexto educativo. Si un maestro no logra entender las interpretaciones de los alumnos, o las sustituye con las propias, únicamente logrará encasillarse en un mundo ficticio poco relevante desde un punto de vista educativo, o científico.

La distinción realizada por Cobb, Yackel y Wood no se fundamenta en las representaciones internas de los estudiantes por un lado, y a las relaciones matemáticas preexistentes, por otro. Más bien considera tanto a las interpretaciones que los estudiantes hacen de los materiales instruccionales como a aquéllas que han sido socializadas por la comunidad de expertos o por la sociedad en general. Esta última distinción no es dualista, pues no tiene que explicar cómo es que los estudiantes logran apropiarse del conocimiento preexistente en el entorno, y que es evidente para el experto.

Bajo dicha perspectiva el reto es explicar la manera en la que los estudiantes construyen sus concepciones al interactuar con otros estudiantes durante su proceso de socialización matemática. Al intentar formular una respuesta para esta cuestión, esta postura no necesita recurrir a supuestas intuiciones trascendentales que llevan a los alumnos a aprehender un orden matemático preexistente, sino que más bien analiza la forma en la que interactúan los estudiantes y los profesores, su mutua influencia, así como el proceso de adaptación a las actividades matemáticas del otro. Tal tipo de análisis enfatiza que las matemáticas son una actividad humana colectiva y una construcción individual. Por un lado, tanto de manera implícita como explícita, el profesor y los estudiantes negocian interpretaciones intersubjetivas de su actividad matemática en situaciones particulares, algunas de las cuales pueden involucrar el uso de representaciones instruccionales. Por otro, cuando nos enfocamos en las interpretaciones individuales del profesor o de los estudiantes, se vuelve claro que ninguno de ellos tiene acceso directo a las experiencias matemáticas del otro, así que no tienen manera de saber si sus interpretaciones guardan alguna correlación.

De esta manera, la propuesta de Cobb, Yackel y Wood concibe al proceso educativo como uno intersubjetivo, en el que el maestro y los estudiantes construyen y socializan sus interpretaciones. Para explicar tal experiencia intersubjetiva, este enfoque sugiere que una comunicación exitosa únicamente requiere que las interpretaciones individuales sean compatibles o que sirvan a los objetivos comunes, de manera que las posibles diferencias conceptuales no incidan en el desarrollo de las interacciones sociales.

Debe advertirse, no obstante, que tal propuesta educativa concibe a la intersubjetividad como un fenómeno reflexivo. Por un lado, los individuos formulan sus actividades comunicativas con el fin de que éstas sean comprendidas por otros, es decir, cada persona parte del supuesto de la intersubjetividad. Por otro, es gracias a este supuesto, y a la intensión de comunicarse, que las posibles discrepancias en las interpretaciones individuales se vuelven evidentes. Los signos o conceptos socialmente aceptados, pero que previamente no se habían cuestionado, se negocian de manera explícita, lo cual lleva a los participantes a modificar sus interpretaciones individuales para lograr acuerdos intersubjetivos.

Un punto adicional que hay que mencionar es que de acuerdo a Cobb, Yackel y Wood (1993) el proceso de socialización de los significados matemáticos es algo más que una mera elucubración filosófica. Por un lado el desarrollo de prácticas y significados matemáticos intersubjetivos resulta crucial para la comunicación que se lleva a cabo en el salón de clases. Por ello, es esencial recurrir a la negociación explícita de convenciones al momento de introducir las representaciones instruccionales. De hecho, esto es lo que algunos profesores de Matemáticas hacen, a pesar del supuesto de que el significado de los materiales didácticos es autoevidente. Por otro lado, las tensiones entre las interpretaciones matemáticas de los diferentes miembros de la comunidad, sean explícitas o implícitas, son una fuente generosa de oportunidades de aprendizaje en prácticamente todas las situaciones instruccionales, incluyendo aquellas que usan de representaciones externas.

En otras palabras, según Cobb, Yackel y Wood (1993), tanto los problemas explícitos como los conflictos que emergen durante la evolución de las interacciones sociales, así como el desarrollo de significados que ocurre en las interacciones comunicativas, son aprovechados para involucrar a los estudiantes en actividades constructivas. Al ser este el caso, una propuesta que intente explicar el aprendizaje matemático de los estudiantes en el salón de clases debe considerar el desarrollo de significados colectivos, del tipo de prácticas que se utilizarán, así como las conceptualizaciones individuales de los estudiantes. De esta manera, debería ser posible explicar cómo es que el aprendizaje tiene lugar en situaciones instruccionales, cuando, generalmente, los estudiantes tienen diferentes interpretaciones y, no obstante, cada uno supone que los otros compartes sus interpretaciones. Tal explicación no partiría del supuesto que cada estudiante es capaz de intuir las representaciones internas de los demás y de vislumbrar ciertas relaciones matemáticas preexistentes en el entorno. Mas bien, se fundamentaría en los procesos con los cuales los estudiantes desarrollan sus conceptualizaciones al tiempo que se adaptan a las interpretaciones y a las actividades matemáticas tanto del profesor como de sus compañeros, estableciendo así significados, símbolos y conceptualizaciones colectivas.

Hasta ahora, hemos visto que las oportunidades de aprendizaje emergen gracias a la participación que los estudiantes tienen en las interacciones sociales del salón. Cobb, Yackel y Wood consideran que este énfasis en la interacción como un catalizador para el desarrollo de las conceptualizaciones matemáticas individuales, no es suficiente para mostrar la relevancia del aspecto social del aprendizaje matemático. Además, puede advertirse que los problemas que los estudiantes intentan resolver, así como las soluciones que construyen durante su desarrollo conceptual, tienen un componente social, pero también uno individualmente cognitivo.

De esta manera, la discusión que Cobb, Yackel y Wood (1993) hacen de los aspectos sociales y cognitivos del aprendizaje matemático, implica un intento por coordinar tres puntos de referencia: (1) las formas individuales de aprendizaje de los estudiantes, (2) las prácticas matemáticas comunes presentes en el salón de clase y (3) las prácticas matemáticas comunes de la sociedad en general. Según estos autores, este es el problema epistemológico fundamental que se plantea una vez que se dejan de lado los supuestos del enfoque representacionista de la mente.

Bajo este nuevo enfoque, las prácticas matemáticas de la sociedad general cobran especial relevancia, en el sentido de que ayudan a formular las posibles metas de aprendizaje matemático a largo plazo. Idealmente, el conocimiento que los maestros tengan de estas prácticas y su comprensión del potencial de desarrollo des sus estudiantes informarán su planificación y su práctica instrucional.

2.7 Sistemas de símbolos pedagógicos

Como sugiere la discusión de la sección anterior, Cobb, Yackel y Wood consideran valiosos los materiales instruccionales que intentan expresar representaciones externas. Sin embargo, desde una perspectiva constructivista, estos materiales juegan un papel que dista mucho de ser aquel propuesto por el enfoque representacionista, según el cual, tales materiales tienen la capacidad de mostrar ciertas relaciones matemáticas preexistentes de forma completamente transparente.

Así, para Cobb, Yackel y Wood (1993) resulta muy importante aclarar que bajo la perspectiva alternativa, las representaciones intruccionales simbolizan las interpretaciones matemáticas colectivas de la sociedad en general, por lo que al discutir su posible valor educativo, se les concibe como medios que los estudiantes podrían utilizar para simbolizar el desarrollo de su actividad matemática. Estos autores les llaman sistemas de símbolos pedagógicos, en lugar de representaciones instruccionales, para enfatizar la función que tienen dentro de las actividades individuales y colectivas que conforman el proceso de enseñanza aprendizaje.

Además, hay que recordar que en la perspectiva de los autores analizados, las actividades instruccionales que constituyen los puntos de partida para las construcciones matemáticas de los estudiantes deben satisfacer dos restricciones. Por un lado, deben apoyar al maestro en su exploración de las experiencias previas de los estudiantes y en la negociación de interpretaciones comunes. Las actividades que tradicionalmente se consideran como meras aplicaciones pueden resultar bastante útiles para estos propósitos. Por otro lado, las interpretaciones de los estudiantes de estas situaciones deben estar contextualizadas de tal manera que puedan apoyarles para construir conceptualizaciones cada vez más complejas.

2.8 La integración de la investigación sobre los procesos de aprendizaje y sobre la enseñanza de las matemáticas

Ahora describiré el análisis que hacen Cobb, Yackel y Wood (1993) sobre la integración de la investigación sobre los procesos de aprendizaje y sobre la enseñanza de las matemáticas. El interés en este asunto puede ser entendido como un intento por plantear una alternativa a lo que Bauersfeld (1988) llamó la triada clásica de: el maestro, el estudiante y las matemáticas. Como este último autor ha observado, las tentativas por reformar la educación matemática se han concentrado en uno u otro de los elementos de esta triada, a expensas de los otros dos. Cobb, Yackel y Wood consideran que tal tendencia, y la triada misma, son consistentes con una perspectiva representacionista, pues separan el conocimiento del sujeto que conoce. De la misma forma, estos autores consideran que únicamente se podrá ir más allá de la triada clásica si se deja a un lado el enfoque representacionista según el cual, la mente o el cerebro humano son capaces de intuir un entorno matemáticamente preexistente que no está influido por la actividad cognitiva humana, sea ésta individual o colectiva.

Como alternativa al supuesto de que el aprendizaje matemático implica la apropiación de ciertas representaciones matemáticas internas y precisas, los autores mencionados sugieren que los estudiantes construyen sus conceptualizaciones al ser introducidos por su maestro a las prácticas matemáticas colectivas de la sociedad en general. De manera más específica, tales autores han contrastado la noción de que los estudiantes aprehenden las relaciones matemáticas contenidas en las representaciones externas con la perspectiva de que los maestros y los estudiantes negocian las formas de interpretar colectivamente los sistemas de símbolos pedagógicos. Bajo esta caracterización, la actividad de la enseñanza y del aprendizaje están intrínsecamente vinculadas debido a la mutua influencia que ejercen entre sí el maestro y los alumnos. Dicho de otra forma, para explicar la actividad matemática de los estudiantes es necesario realizar conjeturas e inferencias sobre las interpretaciones que dan a los sistemas de símbolos y a las acciones de los demás. También sería deseable identificar los significados colectivos y las prácticas que hacen posible la comunicación matemática, además de reconocer las diferentes interpretaciones individuales que originan ciertas negociaciones de significado.

En breve, desde la perspectiva de Cobb, Yackel y Wood es necesario analizar el proceso de aprendizaje de los estudiantes incluso si el objetivo es explicar la actividad del profesor (y viceversa), ninguna de tales acciones existiría sin la otra. En consecuencia, bajo esta nueva perspectiva se consideran de poco valor los análisis que se centran exclusivamente en aspectos aislados tanto del comportamiento del profesor o de los estudiantes y que no consideran el contexto colectivamente construido por ambos durante sus interacciones.

El otro elemento de la triada clásica, las matemáticas, frecuentemente es concebido como un mero contenido descrito y ordenado por el currículum. Como una alternativa que permita concebir de manera unificada a las matemáticas y al sujeto cognoscente, Cobb, Yackel y Wood sugieren que es útil caracterizar a las matemáticas como un actividad humana tanto individual como colectiva. Así en lugar de proyectar, inconscientemente nuestras interpretaciones "expertas" sobre el entorno de los estudiantes, podremos enfocarnos en las maneras en que los estudiantes interpretan y actúan con sistemas de símbolos pedagógicos, es decir con las interpretaciones que hacen de los materiales. Además podremos examinar la manera en que negocian sus significados matemáticos. De esta manera, diferentes investigadores han intentado mostrarnos que el proceso constructivo individual y el proceso de socialización matemática son diferentes caras de la misma moneda.

En consecuencia, lo que tradicionalmente es concebido como el currículum, podría ser replanteado como un desarrollo conceptual que emerge durante las negociaciones de significados entre los profesores y los estudiantes. Tal enfoque, evita el problema de explicar cómo es que los estudiantes se apropian de las relaciones matemáticas preexistentes en el entorno.

2.9 Postura epistemológica que se asume en la tesis

El enfoque epistemológico alternativo que presentan Cobb, Yackel y Wood (1993) es consistente con el que adopta la comunidad del Diseño Instruccional en sus esfuerzos por generar investigación que apoye el diseño de intervenciones educativas. La presente tesis se fundamenta epistemológica y metodológicamente en las investigaciones realizadas por esta comunidad y, por lo tanto, también adopta el enfoque epistemológico alternativo que he detallado.

Coincido personalmente con el supuesto constructivista de que no existe una realidad matemática preexistente en los fenómenos, sino que, somos los humanos quienes para dar un sentido a determinada situación y para poder comunicarnos generamos sistemas de imágenes mentales y de símbolos sobre determinados objetos o fenómenos. No obstante también me parece sensata la propuesta de la escuela del Diseño Instruccional, de que tal tipo de imágenes mentales y la forma en la que las artículamos, esta influida de manera importante por los procesos de comunicación y socialización, como lo han sugerido diferentes autores que han adoptado una postura sociocultural.

Me parece también que los diferentes investigadores pertenecientes a la comunidad del Diseño Instruccional, son concientes de que las construcciones individuales y las influencias sociales frecuentemente impiden que los materiales didácticos tengan la transparencia que muchos profesores suponemos tienen. Sin embargo, coincido con dichos investigadores en que esto no es en sí mismo un problema, pues nos ayuda a reconocer a los profesores la necesidad de discutir y negociar con los estudiantes la manera en que puede matematizarse una situación.

Además creo que para que los profesores realmente podamos contribuir al proceso de aprendizaje de los estudiantes es necesario que conozcamos detalladamente el tipo de conocimiento que los alumnos han desarrollado hasta el momento en que comprendan nuevos conceptos más complejos. De lo contrario comunicar nuevas ideas o negociar significados para los que los alumnos no se encuentran preparados será una labor extremadamente difícil de realizar. Por ello comparto la postura del Diseño Intruccional, de que el papel del profesor es realizar inferencias sobre los conceptos y las interpretaciones de sistemas de símbolos que han desarrollado los alumnos, sobre las actividades que realizan y su sentido, así como sobre los significados desde los cuales inician la construcción de otros nuevos y más sofisticados.

Por otro lado, me parece muy importante la sugerencia que hacen autores como Freudenthal de iniciar el estudio de un concepto matemático con problemas concretos, pues considero que la gran mayoría de los estudiantes sólo generan interés para con aquellas asignaturas o problemáticas que tienen una relación inmediata con su vida cotidiana, su identidad profesional o, incluso, personal. Por supuesto, estoy hablando sólo de mi experiencia como docente, pero bien podrían realizarse estudios al respecto. No obstante, limitada como es, en mi vida profesional he podido constatar que de manera frecuente son pocos los alumnos que, por ejemplo, siendo estudiantes de Ingeniería o de Administración encuentren relevante el estudio de problemas relacionados con Química, aunque las matemáticas implicadas para resolver el problema sean exactamente las mismas que para la resolución de un problema de Ingeniería o de Administración.

Por último, me gustaría decir que a mi entender, el enfoque epistemológico del Diseño Instruccional no necesariamente esta en conflicto con el aprendizaje de tradicional las Matemáticas, aunque sí creo que nos invitaría a reflexionar sobre la manera en la que esta planteado el currículum de Matemáticas en muchos países. Pienso que el lenguaje internacional de la ciencia seguirán siendo las matemáticas formales que conocemos, y como tal, las personas que decidan seguir una carrera de investigación científica a niveles avanzados definitivamente deberán seguir estudiando el currículum tradicional. De cualquier forma me parece que incluso para este tipo de personas, el enfoque del Diseño Instruccional podría brindar algunas prácticas matemáticas que sirvieran de introducción a conceptualizaciones mucho más complejas y formales.

Sin embargo, existe una gran cantidad de personas y profesiones para las que currículum científico y formal tradicional no es relevante, pues para su circunstancia personal no es necesario. Tal es el caso de cierto tipo de profesiones que además tienen cierto perfil de egreso, como es el caso de mis estudiantes. En estos casos particulares, los diseñadores de currículum deberán de ser muy concientes de sus opciones, pues por un lado tienen la oportunidad de indagar detalladamente los conocimientos y conceptos de los que realmente parten sus estudiantes, para luego diseñar una propuesta que les sea de utilidad práctica; o por otro lado pueden seguir un plan de estudios tradicional pero el cual sus alumnos no sólo no están preparados para entender, y al que tampoco ven, ni se les explica, su utilidad práctica.

Comparto la invitación que la comunidad del Diseño Instruccional nos hace a profesores e investigadores, para reflexionar sobre qué tipo de matemáticas son las más apropiadas para cada contexto educativo particular.

3. La metodología del Diseño Instruccional

En el capítulo anterior comenté que la manera en la que se pretenda atender los rezagos de los estudiantes universitarios de las carreras económico administrativas dependerá mucho del tipo de enfoque epistemológico y metodológico que se adopte para interpretarlos.

En este tercer capítulo mi objetivo será describir al lector, en términos generales, los principios metodológicos consistentes con el enfoque epistemológico descrito, desde los cuales se elaboran diseños empíricamente fundamentados para orientar la intervención educativa en Matemáticas. Dejaré para el siguiente capítulo las adaptaciones particulares que tuve que efectuar para realizar la presente tesis. En el presente capítulo describo los antecedentes de la metodología del diseño instruccional y explico la importancia que en ella tiene la evidencia empírica. Describo, el proceso mismo de diseño y explico el modelo de argumentación que se utiliza para analizar los razonamientos de los estudiantes. Luego, realizo una distinción conceptual entre una trayectoria hipotética de aprendizaje y una teoría intruccional local. También describo los principios que se utilizan para el diseño de propuestas educativas.

3.1 Antecedentes de la metodología del diseño instruccional

3.1.1 La importancia de la evidencia empírica

Bajo la metodología del diseño instruccional no se busca conectar directamente los conocimientos previos e intereses de los estudiantes con las ideas de la *tradición y la disciplina matemática*. En lugar de ello, el equipo de investigación debe examinar minuciosamente ciertas metas educativas y tratar de establecer cuáles son las más relevantes y útiles, desde un punto de vista práctico (Gravemeijer y Cobb, 2006). En consecuencia, en la perspectiva de estos autores el diseño instruccional puede considerarse como una metodología de intervención. Por otro lado, tal enfoque busca apoyar el desarrollo del razonamiento matemático de los estudiantes, para que eventualmente puedan participar en *prácticas matemáticas establecidas,* ya sea en las actividades cotidianas, o en su vida ciudadana y laboral (Cobb, Visnovska y Zhao, 2008).

De acuerdo con Gravemeijer (2004), los principios del diseño curricular en matemáticas utilizados durante las décadas de 1960 y 1970, tenían como base el conocimiento sofisticado y las estrategias formuladas por expertos. Se pensaba que para alcanzar cierta meta, un experto tenía que formular una secuencia ordenada y jerarquizada de tareas, de manera que quedara expresado qué etapas eran prerrequisito de otras y en qué orden debían presentarse. El resultado de este tipo de diseño curricular era una serie de objetivos de aprendizaje que podían tener sentido para el experto, pero no necesariamente para el alumno. Es decir, tal forma de generar un currículum partía del supuesto implícito de que la ruta propuesta por el experto resultaba útil para los estudiantes; sin embargo tal supuesto no contaba con evidencia empírica que documentase cuál era el proceso aprendizaje de los estudiantes. Debido a la situación anterior la comunidad del Diseño Instruccional consideró importante contar con una secuencia instruccional sustentada en evidencia empírica. Además, dicha evidencia debía enfocarse en los procesos de reorganización del razonamiento y conceptualización de los alumnos.

3.1.2 Antecedentes de la metodología del Diseño Instruccional

De acuerdo a Gravemeijer y Cobb (2006) la metodología del diseño instruccional tiene sus antecedentes en el análisis socioconstructivista de la enseñanza, y en el enfoque de la Educación en Matemáticas Realistas (Realistic Mathematics Education, RME) que se emplea en el instituto Freudenthal en Holanda. La noción de una metodología de diseño aplicada a la enseñanza ha estado presente en la literatura y en las diferentes comunidades de investigadores durante ya varios años. Diversas metodologías de diseño en la enseñanza profesional pueden considerarse como los antecedentes de la metodología del diseño instruccional. De acuerdo a dichos autores, el reconocimiento de que las metodologías de diseño en la enseñanza eran especialmente innovadoras, aunque también limitadas en su contenido científico como para apoyar el trabajo de diseño, motivó la idea de un tipo de diseño en la enseñanza que integrase el diseño y la investigación. Tal idea fue fortalecida por la experiencia de que el trabajo conciente y cuidadoso de diseño en la enseñanza, generaba un proceso de aprendizaje en el cual los investigadores-diseñadores desarrollaban conocimientos valiosos y bien fundamentados en lo que podría llamarse experimentos de diseño.

En los últimos veinte años diferentes autores han intentado definir la metodología de investigación del diseño intruccional en la educación matemática.

Según Gravemeijer y Cobb (2006), Freudenthal (1976) y sus colegas holandeses fueron los primeros en proponer una metodología de este tipo, bajo el concepto de "investigación de desarrollo", una idea que fue posteriormente desarrollada por Streefland (1990), Brown (1992) y Gravemeijer (1994, 1998). Las ideas de Freudenthal fueron puestas en práctica en el Instituto Holandés para el Desarrollo de la Educación Matemática (ahora llamado Instituto Freudenthal). Este trabajo ha generado un terreno fértil para el desarrollo de la Teoría Instruccional de la Educación en Matemáticas Realistas, la cual se ocupa de investigar el desarrollo de la enseñanza dentro de un dominio específico del conocimiento matemático (Treffers, 1987).

Otro antecedente de la metodología del diseño instruccional es la metodología constructivista del experimento de enseñanza individual (Cobb y Steffe, 1983; Steffe 1983). Graveimeijer y Cobb (2006) comentan que en esta metodología, los experimentos de enseñanza tienen como objetivo entender cómo es que un alumno individual aprende en lugar de buscar un cambio educativo colectivo. Estos experimentos de enseñanza individuales fueron extendidos a más personas para generar experimentos de enseñanza colectivos dentro del salón de clases. La necesidad de los experimentos de enseñanza en el salón de clases emergió cuando el análisis de la tradición instruccional dentro del mismo programa de investigación sociocontructivista comenzó a generar únicamente orientaciones negativas para los profesores, es decir, orientaciones del tipo "no haga esto, no haga aquello". Para generar entornos de clase más productivos, los investigadores debían tomar la responsabilidad de generar diseños para la enseñanza en clase y para un periodo más largo de tiempo. De esta forma, la metodología del experimento de enseñanza individual fue extendido a experimentos de enseñanza colectivos y dentro del salón de clases.

Quizá la característica principal del diseño instruccional es su interés por comprender las condiciones que propician el aprendizaje matemático de una colectividad (Gravemeijer y Cobb, 2006) En este respecto, es importante tener en mente la distinción que hace Bruner (1994) entre la investigación cuyo objetivo es dar una explicación estadística y la investigación que busca una comprensión del entorno de aprendizaje. Puede utilizarse esta distinción para enfatizar que la meta del diseño instruccional es muy distinta de la investigación experimental o cuasi-experimental.

Así, diferentes metas de investigación implican diferentes métodos y diferentes formas de justificación. En relación a este comentario, puede citarse al Comité de Asesoría en Investigación del Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas de Estados Unidos (National Council of Teachers of Mathematics, NCTM, 1996) el cual ha venido observando un “profundo cambio en los criterios de justificación en la investigación en Educación Matemática”. Tal comité ha declarado que este es un cambio de un tipo de investigación que intenta probar que el tratamiento A funciona mejor que el tratamiento B, a un tipo de investigación que tiene como meta proveer una teoría empíricamente fundamentada sobre la manera en la que una intervención instruccional funciona.

Así, puede advertirse que el resultado de este tipo de investigación es la generación de una teoría (Gravemeijer y Cobb, 2006). El propósito del diseño de experimentos es desarrollar teorías tanto del proceso de aprendizaje colectivo en un salón de clases como de los medios diseñados para apoyarlo. Una comunidad de investigadores puede orientarse hacia esta meta de dos maneras, sea desarrollando teorías instruccionales que se enfoquen a un dominio específico y concreto de las matemáticas (teorías instruccionales locales), o desarrollando marcos teóricos que aborden conceptos más generales. También pueden tratarse de combinarse ambas.

Aquí, vale la pena recordar que los enfoques interpretativos y metodológicos funcionan como lentes con los cuales se da sentido a lo que sucede en un entorno de enseñanza real, y como guías para el diseño instruccional. Así, de acuerdo a Gravemeijer y Cobb (2006), por una parte, puede decirse que aunque esta metodología fue desarrollada para interpretar el discurso y la comunicación que se presentaban en el salón de clases, también ofrece orientaciones para indagar las características culturales del salón de manera que pueda aprovecharse el entorno de aprendizaje. Así, la metodología del Diseño Instruccional no sólo ofrece procedimientos de diseño, sino que también puede servir como un marco para interpretar la actividad de los estudiantes en términos de su aprendizaje matemático.

El comentario anterior puede explicarse aún más detenidamente si se toma en cuenta la manera en la que Freudenthal (1991, pag. 17), concibe la realidad: “Prefiero aplicar el término realidad a aquello que el sentido común experimenta como real en cierto momento”. Freudenthal agrega que la realidad puede ser entendida como una mezcla de interpretación y de experiencia sensorial, lo que implica, que las matemáticas también pueden convertirse en parte de la una realidad personal. La realidad y la percepción personal no son estáticas, sino que se desarrollan y son afectadas por el proceso de aprendizaje individual. Así, de acuerdo a Gravemeijer y Cobb (2006), la meta del diseño instruccional es apoyar a los estudiantes para crear una nueva realidad matemática. Esto se lleva acabo por medio de una reinvención guiada, o por una matematización progresiva, si adoptamos la perspectiva del estudiante. La matematización progresiva se refiere a una mezcla de dos tipos de matematización, horizontal y vertical, términos que se refieren, respectivamente a la matematización que realizan los estudiantes de la realidad, o la matematización de sus propias actividades (Treffers, 1987). Esta última actividad es esencial en la constitución de una nueva realidad matemática, pues “ la actividad en cierto nivel es sujeta al análisis en el siguiente, en otras palabras, un problema operacional de cierto nivel se convierte en un problema conceptual en el siguiente” (Freudenthal, 1971, pag. 417) Este cambio de un problema de “actividad” a uno “conceptual”, se relaciona con las transiciones de ciertos procedimientos a conceptos que Sfard (1991) observó en la historia de las matemáticas.

Si se reflexiona sobre la historia de las Matemáticas, podrá apreciarse que éstas emergieron al intentar resolver problemas, o de acuerdo a Freudenthal (1983), al tratar de estructurar y dar sentido a cierto fenómeno. Según Freudenthal (1983), los “objetos del pensamiento” tales como los conceptos, herramientas y procedimientos, fueron inventados para organizar los fenómenos. Los procesos de reinvención sugieren que un diseñador instruccional debería intentar de encontrar situaciones que creen la necesidad para que los estudiantes inventen los “objetos del pensamiento” matematicos, que deben construir. Según Gravemeijer y Cobb (2006), para encontrar dichas situaciones, el diseñador instruccional debe analizar la relación entre esos “objetos del pensamiento” y los fenómenos que organizan. Tal análisis sienta las bases de una fenomenología didáctica (Freudenthal, 1983), la cual también incorpora una discusión de lo que un análisis fenomenológico significa desde una perspectiva educativa. Así, para construir determinado concepto matemático, los estudiantes deberán ser expuestos a situaciones donde sea razonable y sensato organizar cierto fenómeno en términos de dicho concepto.

La teoría de los Niveles de Freudenthal también ayudó a dar forma a la perspectiva desde la cual el diseño instruccional interpreta a los modelos educativos.

En lugar de considerarlos como modelos prediseñados, la metodología del diseño instruccional, busca modelos que emerjan como modelos de una actividad situada, que gradualmente evolucionen hacia entidades que apoyen un razonamiento matemático mas complejo (Gravemeijer, 1999; Gravemeijer y Cobb, 2006). De acuerdo a este proceso de "modelo autoemergente", el modelo está relacionado con el desarrollo de una nueva realidad matemática. El profesor puede contribuir a este proceso propiciando un cambio en la atención de los estudiantes del contexto al que el modelo se refiere, hacia las relaciones matemáticas que en él están involucradas. Es entonces cuando el modelo puede comenzar funcionar como uno que apoye un razonamiento matemático más complejo, pues el modelo habrá derivado su significado de su red de relaciones matemáticas. Al mismo tiempo, las relaciones en esta red pueden convertirse en objetos matemáticos que constituyan una nueva realidad matemática. Debe aclararse que aquí, el término modelo no debe ser tomado de forma muy literal, pues en este caso puede referirse a una situación modelo, o a un procedimiento modelo. Lo que es más, lo que se considera como modelo desde una perspectiva mas general de diseño, se deberá descomponer una serie de submodelos en las actividades instruccionales.

Así, el diseño instruccional provee de medios para desarrollar teorías instruccionales sobre un dominio específico de las matemáticas, que pueden servir de apoyo para los maestros quienes adaptarán tales secuencias como parte de su práctica de enseñanza. Además, las teorías instruccionales, son generadas dentro de un proceso iterativo y acumulativo que está vinculado con una serie de diferentes proyectos de diseño. Así, puede hablarse de teorías del desarrollo en diferentes niveles:

1) Microteorías sobre las actividades instruccionales
2) Teorías locales sobre una secuencia instruccional
3) Teorías instruccionales sobre un dominio específico

De acuerdo con Kessels y Korthagen (1996) los maestros frecuentemente deben apoyarse en su propia experiencia la cual comparten entre ellos en forma de narrativas. Los profesores suelen considerar al conocimiento científico como muy abstracto y general para ser llevado a su práctica cotidiana. A este respecto, Gravemeijer y Cobb (2006) comentan que el diseño instruccional tiene el potencial de cerrar la brecha entre la teoría y la práctica, pues bajo este enfoque el conocimiento científico esta apoyado en la sabiduría práctica pero, al mismo tiempo, el conocimiento científico puede proveer de procedimientos y de nuevas conceptualizaciones que fortalezcan la sabiduría práctica.

3.2 El proceso de generación de una secuencia instruccional

Un primer paso en la generación de una secuencia instruccional consiste en realizar una selección inicial de los conceptos matemáticos que el investigador considera indispensables que los estudiantes desarrollen de manera que los jóvenes sean capaces de interpretar determinadas situaciones de su vida cotidiana, profesional o ciudadana. En otras palabras se define una secuencia de conceptos inicial y provisional. También es necesario documentar el tipo de situaciones prácticas que se van a utilizar en las discusiones colectivas del salón de clases, y establecer su relación con determinadas ideas matemáticas.

Posteriormente, apoyándose en tal secuencia de conceptos y situaciones, el profesor o investigador formula una conjetura, provisional y revisable, sobre la secuencia de temas que considera necesario discutir con sus alumnos para que estos desarrollen conceptualizaciones matemáticas progresivamente más complejas.

Por supuesto, resulta crucial que el profesor o investigador indague cuál es el tipo de conceptualizaciones iniciales de las que parten sus estudiantes, pues de otra forma su conjetura inicial carecerá de fundamento empírico y tendrá como resultado que el punto de partida esperado por el profesor, o investigador, sea completamente diferente de las conceptualizaciones iniciales de sus estudiantes.

Para indagar el tipo de conceptualizaciones iniciales de las que parten los estudiantes se utilizan entrevistas individuales o evaluaciones del desempeño grupal. Este tipo de técnicas resultan útiles para reconocer el tipo de concepciones que los alumnos tienen. Además durante la clase maestros, e investigadores, caminan por el salón para obtener una idea sobre la diversidad de maneras en las que los estudiantes organizan y razonan los datos. Así en lugar de contar con un currículum previamente diseñado, se intenta anticipar con los maestros e investigadores el rango de argumentos que un grupo de estudiantes podría generar al realizar determinadas actividades instruccionales (Cobb, Visnovska y Zhao, 2008).

3.2.1 Método de análisis

Para analizar la evidencia recolectada se utiliza el método de la comparación constante. Según Cobb y Whitenack (1996) éste método, como otros en la tradición cualitativa, utiliza como referente los datos recolectados y busca desarrollar una explicación coherente y confiable de sus posibles significados. El método puede ser organizado en dos diferentes ciclos que se retroalimentan uno a otro: las conjeturas iniciales y las prácticas matemáticas. Las conjeturas iniciales del investigador sobre los conocimientos de los alumnos son examinadas y contrastadas con las prácticas matemáticas que éstos realizan, y éstas prácticas, a su vez, permiten revisar las conjeturas y formular unas nuevas, que también serán contrastadas.

3.2.1.1 Conjeturas iniciales

Esta fase implica el análisis cronológico de los datos, episodio por episodio. Al hacerlo, se van elaborando conjeturas sobre los tipos de razonamiento y de comunicación de ideas que pueden ser normativos en un grupo o sobre la naturaleza del razonamiento matemático de los estudiantes que han sido seleccionados para realizar análisis individuales en una fase específica de la investigación.

Para desarrollar conjeturas sobre las prácticas matemáticas, tanto colectivas como individuales, con que cuentan los estudiantes resulta útil analizar sus argumentaciones (Bowers, Cobb, y McClain, 1999; Cobb, 1999; Gravemeijer, Cobb, Bowers, y Whitenack, 2000).

3.2.1.1.1 Origen del modelo de Toulmin

Uno de los modelos que han sido empleados por la escuela del Diseño Instruccional para analizar las prácticas matemáticas de los alumnos y su evolución ha sido el modelo de argumentación de Toulmin (1959). En dicho trabajo este autor presentó una serie de ensayos en los que propone una forma de lógica distinta de la tradicional. En tales documentos, cuestionaba el potencial práctico de la lógica tradicional, pues la consideraba como un estudio sobre las reglas de los diferentes tipos de razonamientos válidos, pero sin preocuparse si tal tipo de razonamientos válidos eran consistentes con evidencia proveniente de los objetos o eventos a los que hacían referencia. Para clarificar su postura, Toulmin (1959) adoptó la metáfora de la jurisprudencia, en la que las diferentes partes involucradas en un conflicto legal realizan afirmaciones que deben de estar respaldadas por evidencia y en diferentes tipos de argumentaciones. Por ello Toulmin precisaba que un argumento es una justificación que se hace de forma posterior a una aseveración para mostrar que tal afirmación es aceptable.

3.2.1.1.2 La estructura de un argumento bajo el modelo de Toulmin

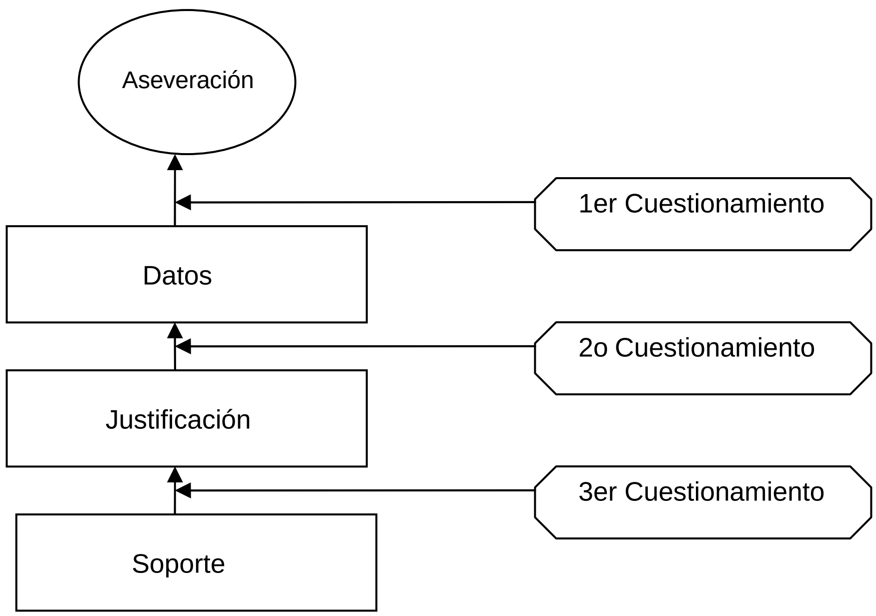
Para Toulmin (1959), un argumento consiste de al menos cinco partes: aseveración, datos, justificación y soporte. En una discusión en la que las partes involucradas deban de contar con cierto grado de credibilidad, una persona puede realizar una aseveración (aseverante). Si tal aseveración es cuestionada por otra persona (cuestionante), es responsabilidad del aseverante mostrar hechos o evidencia (datos) y presentarlos como el fundamento en el que se basa la aseveración. Estos datos o información pueden ser de utilidad para responder al cuestionante, sin embargo, incluso después de haber mostrado ciertos datos, el cuestionante podría pedir que se explicase la relación entre la aseveración y los datos. En este caso, el papel del aseverante ya no es fortalecer el fundamento empírico sobre el cual esta intentando construir su argumento, sino mostrar que es legítimo y apropiado tomar los datos como un punto de referencia que lleve a la aseveración.

Así, en tal punto de la discusión, es necesario que el aseverante utilice expresiones hipotéticas que puedan actuar como un vínculo entre los datos y la aseveración. A ese tipo de expresiones Toulmin (1959) las llama justificaciones (Ver figura 3.1). Debe clarificarse que para Toulmin la justificación es, en cierto sentido, incidental y explicativa. Su función es simplemente hacer explícita la legitimidad del vínculo entre aseveración y datos.

El cuestionante también puede preguntar por qué, *en general, es decir, bajo prácticamente la totalidad de las condiciones*, la justificación debe aceptarse como una con autoridad. Por esta razón, detrás de las justificaciones, generalmente habrá otras expresiones sin las cuales, las garantía carecerían de autoridad. A tales expresiones, Toulmin (1959) las denomina soportes (Ver figura 3.1). La diferencia entre la justificación y el soporte, está en que la justificación es hipotética y explicativa, mientras que el soporte puede ser expresado en forma de enunciados, o conjuntos de enunciados, categóricos que se apoyan en hechos que pueden ser reconocidos como confiables o verificables por ambas partes de la discusión.

Toulmin (1959) también distingue entre el soporte y los datos. Aunque los datos a los que el aseverante toma como referencia en un argumento y el soporte que brinda autoridad a sus garantías puedan parecer semejantes, sus papeles son muy diferentes. De acuerdo a la intención renovadora de la lógica de Toulmin, en un argumento cierto tipo de evidencia debe ser proporcionada para que el argumento mismo pueda existir, una aseveración que no se apoya en evidencia no puede ser considerada como parte de un argumento. Sin embargo, el soporte que el aseverante utiliza no necesariamente debe hacerse explícito. Ello se debe a que las justificaciones pueden no ser cuestionadas y su soporte quedar sobreentendido.

Figura 3.1 El Modelo de Toulmin



Toulmin también advierte que en cualquier campo del conocimiento en el que se utilicen argumentos, las personas involucradas en una discusión deben estar preparadas para trabajar *con algún tipo* de justificaciones *provisionales*, pues de lo contrario será imposible que los argumentos sean sometidos a una evaluación racional. La credibilidad de los datos que el aseverante cita, si su aseveración es cuestionada, depende de las justificaciones que esté preparado para dar, y las justificaciones están implícitas en la forma en que se establezca la relación entre los datos y los aseveraciones que las personas que discuten están dispuestas a dar y aceptar. Pero si se supone que cierta persona rechaza todas las justificaciones provisionales posibles, que provengan de datos pasados, o presentes, para anticipar el futuro, entonces para tal persona la predicción racional se volverá imposible. Lo que es más, al rechazar cualquier justificación o soporte, se estaría eliminando la posibilidad de establecer un intercambio de argumentos.

3.2.1.1.3 Uso del modelo de Toulmin en el análisis de los razonamientos de los alumnos

Yackel (1997) y Cobb (2001) han mostrado la utilidad del modelo de Toulmin (1959) para analizar ciertas conceptualizaciones matemáticas al relacionarlo con la documentación de las prácticas matemáticas de los alumnos.

Como parte de las normas que se acuerdan con el grupo se espera que tanto el profesor como los estudiantes cuestionen las soluciones propuestas a determinada situación y que expresen sus dudas cuando no entienden algún argumento o procedimiento. Cuando surgen cuestionamientos, el profesor (o investigador) pide a los estudiantes que provean justificaciones y soportes que muestren por qué sus interpretaciones matemáticas deben ser aceptadas como válidas.

Aquí es muy importante recordar que dado que bajo la perspectiva del Diseño Instruccional, los criterios de validez de un argumento son distintos de la idea matemática de veracidad, previa al siglo XX, y que consideraba que un argumento matemático era verdadero si era comprobable en un sistema axiomático formal (Chaitin, 1997). En lugar de ello, hay que tomar en cuanta que la investigación en Diseño Instruccional hasta ahora se concentrado casi por completo en temas como la medición, las fracciones, la proporcionalidad y la estadística elemental. Por ello, en general, no se han utilizado propiedades generales y algebraicas de los números reales, sino que más bien se ha trabajado con números reales particulares. Así bajo este enfoque de investigación, un argumento se considera válido cuando se pueden presentar justificaciones y soportes, que hagan verificables la presencia de cierta relación (aditiva o multiplicativa) entre dos o más cantidades.

También resulta crucial advertir que dado que el interés de la comunidad del Diseño Instruccional es contar con evidencia sobre el desarrollo de las concepciones de los estudiantes, las justificaciones y soportes que se piden de un grupo de alumnos o de un estudiante entrevistado tienen características particulares. El hecho de que un estudiante resuelva, por ejemplo, una multiplicación de fracciones utilizando los algoritmos conocidos popularmente puede dar un resultado verdadero, pero que no brinda evidencia sobre el tipo de razonamientos y de imágenes mentales que los alumnos han desarrollado. El alumno podría brindar una justificación expresando razonamientos que podrían servir para mostrar por qué su algoritmo tiene sentido. Sin embargo, como la comunidad del Diseño Instruccional entiende por desarrollo conceptual la evolución de los razonamientos como de las imágenes mentales de los estudiantes, los razonamientos por sí solos no serían suficientes. Entonces, también se pediría que los estudiantes acompañaran sus razonamientos con un soporte gráfico o material. Es cierto que las simbolizaciones externas (gráficas y materiales) no nos dicen con completa certeza el contenido de la mente de los estudiantes, sin embargo, bajo la perspectiva de la comunidad del Diseño Instruccional se considera que las simbolizaciones son la mejor aproximación que se tiene sobre tal contenido.

En breve, bajo este enfoque se supone que una idea matemática detrás de cierto razonamiento ha sido socializada cuando:

1) Un grupo de estudiantes comprende un razonamiento sin necesidad de presentar un soporte gráfico, (pero sí es necesario presentar la justificación o razonamientos).
2) Cierto estudiante pide un soporte gráfico y el grupo cuestiona la necesidad de presentarlo por considerarlo redundante.

En las entrevistas individuales, se supone que una idea matemática ha sido asimilada individualmente cuando:

1) El alumno puede presentar una justificación (en forma de razonamientos).
2) El alumno puede presentar un soporte (en forma gráfica).

Así, las conjeturas de que grupalmente un soporte no es necesario se prueban al analizar determinados episodios grupales videograbados para buscar casos en los que la actividad de un estudiante no sea compatible con una idea supuestamente ya socializada; además, se examina cómo es que los miembros del salón consideran la propuesta de dicho estudiante. Si la comunidad no acepta la contribución, entonces se hace más evidente que una idea ha sido socializada. Pero si la propuesta es tratada como posible o legítima, se revisa la conjetura de que tal idea matemática ya había sido socializada. A nivel individual se revisan las conjeturas de que una idea matemática ha sido asimilada cuando el entrevistador cuestiona la actividad y las argumentaciones matemáticas del entrevistado, y éste último no es capaz de presentar una justificación y un soporte.

3.2.1.2 Prácticas matemáticas

El resultado de la primera fase del análisis es un grupo de conjeturas, refutaciones y revisiones que está fundamentada en los detalles de cada episodio grupal o entrevista. En la segunda fase del análisis, las conjeturas desarrolladas durante la primera fase sobre las prácticas matemáticas ejecutadas por los estudiantes son examinadas (Bowers, Cobb, y McClain, 1999; Gravemeijer, Cobb, Bowers, y Whitenack, 2000)

En resumen, para documentar las prácticas matemáticas del salón se realizan sesiones posteriores a la clase en las que los investigadores examinan detalladamente las contribuciones que fueron realizadas por los alumnos empleando el modelo de argumentación de Toulmin (1959; 1969). Luego, se desarrollan conjeturas sobre las prácticas matemáticas que emergieron y que los alumnos estaban intentando socializar. Una vez que estas ideas han sido registradas, son organizadas para generar nuevas actividades que permitan continuar con el ciclo de conjeturas y análisis. Así, bajo este tipo de documentación de prácticas matemáticas se analiza la interacción entre el docente y los estudiantes y las decisiones que el grupo de alumnos hacen sobre qué es lo que se considera un razonamiento matemático válido.

Para analizar las prácticas grupales y ubicar el tipo de conceptualizaciones de los alumnos se utilizan grandes cantidades de información. El conjunto de registros para un análisis de este tipo consiste de grabaciones de video de todas las sesiones grupales, así como de notas de campo y el trabajo elaborado por los estudiantes.

3.3 Distinción entre Teoría Instruccional Local y Trayectoria Hipotética de aprendizaje

Ahora bien, cuando se habla de la fases del diseño instruccional es importante distinguir entre las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje y las Teorías Instruccionales Locales. De acuerdo con Cobb, Visnovska y Zhao (2008), una trayectoria hipotéticas de aprendizaje se compone de conjeturas sobre las maneras en que los alumnos reorganizarán colectivamente sus razonamientos en diferentes puntos de la secuencia, pero también incluye los medios con los cuales se habrá de apoyar cada reorganización. Por su parte las teorías instruccionales locales se refieren al resultado final del proceso de experimentar con una trayectoria hipotética de aprendizaje y mejorarla (Gravemeijer, 2004).

La idea de la comunidad del Diseño Instruccional es que los maestros pueden usar sus experiencias en las Teorías Instruccionales Locales para elegir actividades y desarrollar Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje para sus propios estudiantes. (Cobb, Visnovska y Zhao, 2008)

Como ya he explicado, durante la experimentación de una trayectoria hipotética de aprendizaje, la realización de las actividades instruccionales en el salón permite que los investigadores reconozcan si las actividades mentales del grupo se corresponden con las que ellos habían anticipado. *Los propios estilos de razonamiento de los estudiantes formarán la base del diseño de las actividades instruccionales siguientes, de la modificación de las anteriores y ayudarán a establecer nuevas conjeturas sobre la actividad mental esperada.* De esta manera, las actividades instruccionales son experimentadas, revisadas y diseñadas diariamente (Gravemeijer,2004)

3.4 Principios que orientan las investigaciones de la Educación en Matemáticas Realistas y el Diseño Instruccional

Conviene señalar que aunque la generación de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje y de las teorías instruccionales locales es un proceso dinámico y flexible, existen seis principios que orientan los proceso de diseño instruccional los cuales describo a continuación.

3.4.1 Establecimiento de normas sociales

Según Gravemeijer (2004) las normas sociales, incluyen la expectativa y la obligación por parte de los alumnos de explicar y justificar sus soluciones, tratar de entender el sentido de las explicaciones brindadas por otros, expresar acuerdo o desacuerdo, y cuestionar las alternativas en situaciones en las que un conflicto de interpretaciones o soluciones se ha hecho presente.

Las normas sociales, se refieren entonces a aquellos principios que propician una comunicación y participación efectiva dentro de una comunidad, además incluyen las expectativas que la comunidad tiene del maestro y de los estudiantes, las ideas sobre lo que significan las matemáticas y las maneras en las que una validez matemática es establecida.

3.4.2. Reinvención Guiada

De acuerdo con Freudenthal (1983) este principio resulta esencial, pues afirma que la enseñanza debe dar a los estudiantes la oportunidad de experimentar un proceso similar al que fue necesario para que una parte de las matemáticas fuera inventada. Según Gravemeijer (2004), para el investigador, esto implica esbozar una secuencia o ruta instruccional, que permita a los estudiantes reinventar las matemáticas que necesitan. Para hacerlo, el investigador inicia imaginando una ruta con la cual el podría haber llegado a este resultado. En esta labor, el diseñador se apoya principalmente en los procedimientos informales de solución utilizados por los estudiantes.

Es muy importante mencionar que para esta tesis, el principio de la reinvención guiada implica que las situaciones de las disciplinas económico administrativas que se utilizan no corresponden a problemas típicos en los que los estudiantes tratan de identificar las variables, conceptos o los algoritmos que han estudiado previamente en algún libro de texto, para después resolver un problema práctico. Especialmente en el caso de los problemas que se presentan al inicio de cada tema, el docente simplemente plantea una situación sin un aparato conceptual previo y se discute con los estudiantes cómo podría enfocarse el problema. Poco a poco, si el docente aprovecha las intervenciones de los estudiantes, éstos generarán propuestas que eventualmente llevan a la "reinvención" de conceptos y de representaciones para dar sentido a situaciones que inicialmente parecían no tener estructura.

Así, Freudenthal (1983) afirma que el reto sería proponer una secuencia de situaciones no escolarizadas, no estructuradas y típicas de las profesiones económico administrativas, pero que bajo la orientación del profesor llevaran a una génesis colectiva de conceptos. Luego, ya con esos conceptos se podrían generar otras situaciones más complejas en las que tendrían que ser utilizados para darles sentido.

3.4.3. Fenomenología didáctica

De acuerdo con Gravemeijer (2004) la fenomenología didáctica se apoya en una fenomenología de las Matemáticas dentro de la cual se enfatiza, bajo la terminología de Freudenthal, la relación entre un "objeto mental" matemático (noúmeno) y el fenómeno que describe, analiza u organiza. Se trata así de indicar qué noúmeno ha sido creado para organizar un fenómeno. Según Gravemeijer, esto implica en términos didácticos prácticos que en lugar de buscar materiales didácticos que concreticen un concepto dado, la fenomenología didáctica trata de buscar fenómenos que puedan crear oportunidades para que el estudiante pueda construir el objeto mental (noúmeno) en cuestión.

Bajo el enfoque metodológico del Diseño Instruccional, esto implica asegurarse de que los estudiantes ven los datos como medidas de un aspecto de un fenómeno y no simplemente como números o algoritmos. Por ello, el profesor introduce cada actividad conversando con los estudiantes sobre el contexto práctico de donde provienen los datos, se describe al fenómeno en cuestión, se clarifica su importancia, se delinean aspectos relevantes de la situación examinada, y se considera cómo puede ser medida.

Para mi tesis este principio implicó explicar la relación entre ciertos temas vinculados con las relaciones multiplicativas y las situaciones económico administrativas que se usaron para apoyar el aprendizaje de los jóvenes. Tal análisis se lleva a cabo de manera más extensa en el capítulo 4. Sin embargo, de manera breve puede decirse que muchas de los conceptos propias de estas carreras y profesiones involucran una comparación o relación multiplicativa entre dos variables: costos e ingresos, activos y pasivos, precios nacionales y extranjeros. Existen casos en los que tal comparación implica el contrastar el valor presente de una variable con un valor anterior: tasas de interés, inflación, crecimiento en ventas, acumulación de capital. En otras ocasiones, se necesita comparar dos cantidades de distinta naturaleza para obtener medidas de intensidad que permitan cuantificar determinados fenómenos económicos: productividad, eficiencia, PIB per cápita, ingesta de calorías por habitante.

3.4.4. Punto de partida “experiencialmente real” para el aprendizaje

Este principio está muy vinculado al anterior, pues desde un inicio los estudiantes deben poder involucrarse en actividades que les sean significativas. Para el diseñador la meta es que las interpretaciones y soluciones de los estudiantes logren llevarlos al desarrollo de modos informales de expresión, simbolización y razonamiento en las actividades instruccionales iniciales. De acuerdo a Cobb, Visnovska y Zhao (2008) este principio es importante desde un punto de vista constructivista pues de esta manera se puede establecer un vínculo inmediato entre los razonamientos matemáticos de los estudiantes con su experiencia cotidiana. Sin embargo, según Cobb, Visnovska y Zhao (2008) también resulta crucial que inicialmente los investigadores realicen una serie de entrevistas individuales así como evaluaciones de desempeño que incluyan a todo un grupo de estudiantes, pues sólo de esa manera podrán reconocer el tipo de situaciones a las que los estudiantes podrían darles sentido al momento de efectuar una discusión orientada.

En los capítulos 6, 7 y 8, presento el punto de partida de los estudiantes de las carreras económico administrativas con los que trabajé. Brevemente puedo decir que para la mayoría de ellos el análisis de datos implicaba hacer algunas operaciones con números, manipulándolos por medio de procesos algorítmicos. Muchas veces, los alumnos no veían a los datos como medidas o aspectos de una situación que habían sido generados para entender un fenómeno o tomar una decisión.

3.4.5. Puntos de partida justificables en términos de los puntos terminales.

Cobb, Visnovska y Zhao (2008) comentan que un quinto aspecto de la metodología se relaciona con la coherencia entre los puntos de partida y los puntos terminales de una trayectoria hipotética de aprendizaje. Según dichos autores esto implica que los modos informales de expresión, simbolización y razonamiento establecidos durante la fase inicial de una secuencia instruccional deben representar una base para un proceso progresivo de matematización vertical (acumulativo). Cobb, Visnovska y Zhao nos aclaran que este proceso progresivo no se refiere a un proceso de abstracción que eventualmente deja de lado las situaciones concretas que fueron utilizadas como punto de partida, sino que éstas siguen sirviendo como punto de referencia para los estudiantes.

Antes de establecer cuál es el concepto que da coherencia y unidad a mi investigación resulta crucial aclarar que a lo largo de la tesis el término magnitud significará una propiedad de un objeto o fenómeno pero que no ha sido cuantificado, aunque es comparable con el mismo tipo de rasgo en otro objeto o fenómeno. Por ejemplo, aunque la altura de una montaña no se haya cuantificado, es una longitud no cuantificada, y además puede compararse con la altura de, digamos, una persona.

Una vez aclarado lo anterior, puede decir que el concepto de relación recíproca entre dos magnitudes fue idea común a los diferentes temas vinculados con las relaciones multiplicativas. En la sección 5.3 justifico con mayor detalle la razón de tal afirmación. Por ahora puede decirse que las fracciones unitarias guardan una relación recíproca con la unidad, que las fracciones comunes menores a la unidad tienen como recíproco una fracción común mayor a la unidad, que las unidades intensivas también tienen un recíproco. Así, cabe pensar en la posibilidad de diseñar un modelo instruccional general que englobe a las diferentes relaciones multiplicativas, y que pueda ser utilizado tanto para las relaciones iniciales como para las finales.

3.4.6. Evolución de los Medios de matematización

Según Gravemeijer (2004) este principio se relaciona con los medios usados para apoyar el proceso de matematización vertical, y es la consecuencia práctica de la reinvención guiada. De acuerdo a Gravemeijer y a Cobb, Visnovska y Zhao (2008) en las discusiones con el grupo de docentes y de investigadores se analizan los modelos simbólicos informales de los estudiantes, los cuales incluyen dibujos, diagramas, tablas y notaciones. Una vez efectuado tal análisis, se plantea el tipo de discusiones que podrían propiciar la negociación de nuevos modos de simbolización más apropiados para un razonamiento matemático general.

La evolución de los medios de apoyo de este trabajo se presentará con más detalle en el capítulo 9, cuando describa las modificaciones a la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje y el proceso por el cual fue ajustándose a las conceptualizaciones que encontré en los alumnos. Por ahora, puede anticiparse que el análisis de las discusiones mantenidas con los jóvenes y el desarrollo de nuevos medios de matematización, pareció propiciar que algunos de los estudiantes dejaran plantear las situaciones únicamente en términos de algoritmos y que cambiaran el modelo con el cual daban sentido a las fracciones y porcentajes.

3.5 El diseño instruccional como una metodología científica de investigación

A lo largo de este capítulo he descrito el proceso que se sigue bajo la metodología del diseño instruccional para generar trayectorias hipotéticas de aprendizaje o teorías instruccionales locales. También he intentado hacer explícitas algunos de los principios que orientan tal proceso. Además mencioné diferentes rasgos y acciones que caracterizan a tal metodología y que permiten considerarla como una científica y de investigación. Sin embargo, no hice énfasis en tales rasgos y acciones, por esta razón en esta sección me propongo explicar varios de esos rasgos científicos.

De acuerdo a Cobb (2004) la metodología del diseño instruccional coincide con algunos de los rasgos que el Consejo Nacional de Investigación de Estados Unidos (National Reseach Council; NRC, 2002) considera que son propios de una metodología científica.

El primero de esos rasgos, es plantear preguntas significativas que puedan ser investigadas de manera empírica. Aquí, puede decirse que una de las preocupaciones de la comunidad del Diseño Instruccional es la generación de Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje, e incluso de Teorías Instruccionales Locales, que apoyen la labor de los profesores y el desarrollo de nuevos conceptos en los alumnos, de manera que puedan emplearlos para matematizar situaciones prácticas de su vida cotidiana. Pero la comunidad del Diseño Instruccional, no se preocupa por generar secuencias instruccionales de cualquier concepto matemático, en general, se enfoca en aquellos que resultan más necesarios en la vida práctica y que son problemáticos para un porcentaje importante de cierta población. Esto hace que sus preguntas sean significativas.

También debe recordase aquí que, a diferencia de los diseños curriculares de las décadas de 1960 y 1970, en los cuales se suponía implícitamente que determinada secuencia de conceptos era útil para desarrollar aprendizajes en los alumnos si estaba generada por un experto, bajo la perspectiva de la metodología del diseño instruccional la generación de una secuencia instruccional debe estar sustentada en la recolección de evidencia sobre los puntos de partida de los estudiantes, así como sobre el tipo de conceptos que desarrollan y socializan.

El segundo rasgo mencionado por Cobb (2004) y el NRC (2002) es el vínculo que debe tener la investigación a una teoría específica. Las investigaciones realizadas desde de la metodología del diseño instruccional tienen un vinculo con teorías del aprendizaje y con las llamadas Teorías Instruccionales Locales.

Como expliqué en el capítulo 2 y al inicio de éste, la metodología del diseño instruccional está sustentada en un marco epistemológico que retoma las contribuciones de diferentes autores constructivistas. Así, esta metodología parte del supuesto de que para que una persona pueda dar sentido a un fenómeno, situación u objeto, es necesario que desarrolle una serie de imágenes mentales y razonamientos (conceptos). Sin embargo también se retoman los principios del enfoque sociocultural, según los cuales los conceptos sólo se desarrollan y cobran sentido en un contexto colectivo. En otras palabras, la metodología del diseño instruccional como cualquier otra, orienta concientemente sus investigaciones dentro de un marco epistemológico definido.

No es casual la preocupación de la comunidad que sigue esta metodología por identificar las concepciones de las que parten los estudiantes, pues desde su marco epistemológico, realizar suposiciones sobre los conocimientos de los alumnos, sin respaldarlas con evidencia empírica puede tener como consecuencia que exista un desfase entre lo que los alumnos saben y los conceptos que se pide desarrollen. Por otra parte, las evaluaciones del desempeño grupal y las discusiones son consistentes con la postura sociocultural.

Por supuesto, la ventaja de que una metodología oriente sus investigaciones tomando en cuenta cierto marco epistemológico es que se facilita la generación de propuestas para explicar determinados problemáticas educativos así como el desarrollo de posibles soluciones, pero siempre tomando en cuenta los procesos de aprendizaje individual y colectivo. Esto es muy diferente de estudios que no cuentan con un marco epistemológico, y que intentan explicar el desarrollo educativo de una población por medio de los niveles de gasto en educación.

Por otra parte puede decirse que las investigaciones realizadas bajo la metodología del diseño instruccional buscan generar Teorías Instruccionales Locales, o Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje. En otras palabras, conforme se realizan varios ciclos exhaustivos de recopilación y análisis de evidencia, poco a poco se desarrollan secuencias que puedan ayudar a organizar tal información y presentarla de manera que pueda apoyar las prácticas docentes y el aprendizaje de los alumnos.

Un tercer principio comentado por Cobb (2004) y el NRC (2002) se refiere al uso de métodos que resulten pertinentes para la indagación de las preguntas de investigación. Como mencioné anteriormente, bajo la aproximación del diseño instruccional se procura generar secuencias que favorezcan la discusión en el salón de clase y la socialización de determinadas ideas matemáticas. Sin embargo, también existe interés por explorar los conceptos individuales típicos de los estudiantes. En congruencia, bajo este enfoque se utilizan las técnicas de la evaluación del desempeño grupal y de la entrevista individual.

Habría que agregar también que dado que bajo esta perspectiva se subraya la importancia de las normas sociomatemáticas de justificación, así como la identidad de los alumnos, es natural que se preste atención a la forma en que los estudiantes presentan sus argumentos, así como a su identidad de grupo.

El cuarto principio señalado por Cobb (2004) y el NRC (2002) es el que la investigación esté sustentada en una cadena de razonamientos, coherente y explícita. Como he descrito de manera muy detallada más arriba, la generación o la modificación de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje o de una Teoría Instruccional Local, involucra un análisis cuidadoso de la información empírica recopilada. Una vez que el grupo de investigadores han discutido sus entendimientos sobre la evidencia que existe del razonamiento de los alumnos, podrán tratar de justificar sus adaptaciones o ajustes a la secuencia con la que trabajan.

El quinto principio científico al que Cobb (2004) y el NRC (2002) apuntan es la posibilidad de replicar y generalizar las investigaciones realizadas. Aquí, puede comentarse que bajo esta perspectiva se hace un esfuerzo por replicar cada investigación realizada, pero siempre intentando adaptarse a cada circunstancia particular. Las trayectorias hipotéticas quedan entonces como un registro de experiencias valioso porque puede servir de orientación a otros profesores. No obstante, también habría que reconocer el potencial de esta metodología pues una vez que se define el tipo de población con el que se trabaja, y el tipo de dominio de conocimiento matemático con el que tiene problemas, parece sensato suponer que los diseños instruccionales generados en cierto contexto poblacional puedan aprovecharse y adaptarse fácilmente también en otros contextos similares. Un ejemplo, es precisamente la investigación realizada en esta tesis, pues si el 98% de los jóvenes universitarios de las áreas económico administrativas que estudian en escuelas particulares tiene problemas similares a los de mis alumnos, quizá este tipo de investigaciones podría serles de utilidad.

El último principio científico al que hacen referencia Cobb (2004) y el NRC (2002) es la publicidad de las investigaciones de manera que se propicie un escrutinio científico. Las investigaciones realizadas por medio de la metodología del diseño instruccional son publicadas en revistas internacionales de manera que son revisables por otros expertos. Pero el espíritu científico y escéptico de esta comunidad de investigadores no sólo se advierte en sus publicaciones sino en sus propios métodos de investigación. Como ya he mencionado bajo la metodología del diseño instruccional se propone que la generación de secuencias instruccionales esté apoyada en una investigación y evidencia empírica. De forma más precisa, bajo la metodología del diseño instruccional, la generación de secuencias instruccionales involucra un proceso complejo de verificación de evidencia, pues en primer lugar se formulan secuencias iniciales provisionales las cuales deberán ser contrastadas con la evidencia de la evolución de las conceptualizaciones de los alumnos. Si los experimentos de aprendizaje revelan que las secuencias iniciales deben modificarse, entonces se realizarán ajustes a dichas secuencias. Así, existe un largo proceso que incluye varios ciclos de análisis de información y de revisión de conjeturas sobre las secuencias instruccionales. *De esta manera, bajo la metodología del diseño instruccional se hace un esfuerzo por respetar el principio científico de verificación de conjeturas o hipótesis, aunque por supuesto, no en términos cuantitativos.*

Habría que agregar que la evidencia sobre la evolución de los tipos de conceptualizaciones de los alumnos es examinada de manera muy astringente, antes de que se decida agregar, quitar, modificar o inalterar determinado fragmento de la secuencia. Así en este capítulo he comentado cómo durante el proceso de diseño instruccional los investigadores reúnen evidencia, que involucra evaluaciones del desempeño grupal, entrevistas individuales, pruebas escritas, bitácoras personales. *Es decir se hace una revisión exhaustiva de la evidencia, y se realizan contrastes entre diferentes tipos de evidencia antes de formular nuevas conjeturas sobre la manera las conceptualizaciones de los estudiantes evolucionan.*

Además de lo anterior, un equipo de investigadores y profesores suelen discutir entre ellos para intercambiar impresiones sobre las conceptualizaciones de los alumnos. *De esta forma no sólo se toman en cuenta diferentes fuentes de evidencia, sino que se toman en cuenta las interpretaciones de todo un equipo de investigación, antes de formular una caracterización de las conceptualizaciones de los alumnos así como de los posibles ajustes a las trayectorias instruccionales que convendría realizar.*

Por si fuera poco, al pedir alumnos que argumenten sus respuestas presentando una justificación (verbal o escrita) y un soporte (gráfico), siguiendo así el modelo de análisis de argumentación propuesto por Toulmin, inhibe el que los alumnos sólo proporcionen respuestas algorítmicas (mostrando sólo operaciones) o que respondan sin siquiera justificar. *Tal forma de argumentación obliga a los estudiantes a hacer explícitos cuáles son sus razonamientos y las imágenes mentales que emplean para proponer soluciones a determinada situación. Puede apreciarse así, que la metodología del Diseño Instruccional, como cualquier otra metodología científica es una muy astringente al momento de evaluar, considerar e incorporar evidencia.*

Vale la pena recordar aquí que la metodología del diseño instruccional es una que se ocupa apoyar los procesos colectivos de enseñanza/aprendizaje en las aulas, por eso no sólo incorpora elementos propios de una metodología de investigación, sino también algunos rasgos pedagógicos. Por ejemplo, se señala la importancia de la coherencia que debe existir entre el punto inicial y el punto terminal de una secuencia instruccional, pero nuevamente hay que insistir en que éstos deben estar fundamentados en evidencia empírica. Como hemos visto en la sección 3.4, bajo la metodología del diseño instruccional también se enfatiza la necesidad de que los investigadores y profesores discutan y lleguen a acuerdos sobre las características de la identidad de los alumnos pues sólo de esa manera podrán decidir qué tipos de situaciones prácticas les resultan relevantes e interesantes. También es indispensable que el equipo de trabajo (profesores e investigadores) reconozcan el tipo de conocimientos con el que realmente cuentan los estudiantes, pues de otra forma no podrán desarrollar conceptualizaciones más complejas.

Parece ser así, que la metodología de investigación del diseño instruccional tiene ciertos rasgos que la identifican como una metodología científica pero dentro de un contexto educativo. En síntesis, en sus investigaciones:

1) Se plantean preguntas significativas que puedan ser investigadas de manera empírica

2) Se guarda un vínculo con una teoría específica, tanto epistemológica como instruccional

3) Se refiere al uso de métodos que resulten pertinentes para la indagación de las preguntas de investigación.

4) Se hace un esfuerzo por presentar una serie de razonamientos y justificaciones, que presenten de manera explícita y coherente, las observaciones y decisiones que orientaron el diseño de determinada secuencia

5) Se replican los estudios y se generalizan

6) Se propicia el escrutinio y la discusión científica

Tomando en cuenta las ideas anteriores, Graveimeijer y Cobb (2006) establecen ciertas diferencias entre un método de enseñanza y el método del diseño instruccional. Estos investigadores comentan que los métodos de enseñanza frecuentemente pueden tener cierta utilidad práctica pero están generados en base a las narrativas personales de los profesores que comparten un entorno educativo, y no tienen el fundamento empírico sistemático que tiene un método de investigación.

En mi opinión, también podría decirse que los métodos de enseñanza parten del supuesto epistemológico representacionista bajo el cual se asume que servirán para transmitir información de manera transparente a todos los alumnos, por lo que no se investiga la manera en que los estudiantes están interpretando la información. Se atribuye así al método de enseñanza una fuerza didáctica que le es supuestamente inherente, en lugar de considerar diferentes elementos de un entorno educativo pueden apoyar a los estudiantes a comprender determinado concepto

Por otra parte, pienso que los métodos de enseñanza frecuentemente surgen de la idea de un experto, para enseñar determinado concepto, pero no se realizan recolecciones de evidencia sistemáticas, que ayuden a comprender qué hace posible que las personas entiendan, o no, tal concepto. Tampoco considero que, en general, los métodos de enseñanza recurran a triagulaciones astrigentes de la evidencia para decidir si son adecuados para determinado contexto educativo.

4. Diseño de la investigación

En el capítulo anterior expliqué los fundamentos metodológicos generales consistentes con la perspectiva epistemológica del Diseño Instruccional. No obstante ahora es necesario clarificar la forma particular en la que adapté tales principios y procesos metodológicos para diseñar mi trabajo de investigación.

En este capítulo explico cómo la reflexión sobre tales principios metodológicos me llevó, en primer lugar, a formular un marco conceptual que me ayudara a mostrar la relevancia de las relaciones multiplicativas dentro de las profesiones y carreras económico administrativas. Además describo el tipo de adaptaciones que hice al proceso de investigación propuesto por el Diseño Instruccional de forma que resultara útil para planificar y organizar el tipo de indagaciones necesarias para identificar las conceptualizaciones individuales y colectivas de los alumnos. Así mismo, refiero el tipo de controles que tuve al interpretar la evidencia empírica. Entre ellos se encuentran las reglas para aceptar un razonamiento como válido, la triangulación de la información proporcionada por los alumnos, las discusiones con mi asesor, el análisis de información individual y grupal. Por último, describo el conjunto de registros empíricos que utilicé en mis indagaciones.

4.1 Primera fase: el desarrollo de la secuencia conceptual inicial

En el tercer capítulo comenté la tarea inicial de una investigación en diseño instruccional es la selección de una secuencia de conceptos matemáticos. Además ha de especificarse la relevancia práctica de esos conceptos y aclarar el tipo de vínculo que guardan entre sí.

Así la primera actividad que consideré necesario realizar fue identificar el tipo de conceptos que resultaban indispensables para la formación matemática de mis estudiantes. Aunque el análisis detallado de la secuencia inicial de conceptos matemáticas y la descripción de su relación con las profesiones económico administrativas la llevo a cabo con mucho detalle en el capítulo 5 por ahora puedo decir que la idea del cambio resulta fundamental para analizar la información cuantitativa propia de las áreas económico administrativas.

Por un lado, en estas profesiones es frecuente encontrar que dos diferentes tipos de cantidades estén relacionadas. Por ejemplo, los costos de una empresa dependen del nivel de producción de un artículo. Además tal relación no siempre se mantiene constante, pues en ocasiones al producir una misma cantidad de artículos los costos pueden diferir. Ello se debe a que cuando la maquinaria se satura la eficiencia con la que aprovecha las materias primas disminuye (Parkin, 2007). Así, mis estudiantes necesitaban comprender que los cambios en determinada cantidad podrían producir una variación en otra cantidad, y que además esos cambios no siempre eran constantes. Debido a ello me pareció necesario analizar los conceptos de tasas de cambio y de cantidades intensivas.

Por otro lado, dentro de estas áreas también es frecuente que una sola cantidad cambie a lo largo del tiempo, por ejemplo, las ventas de un producto pueden cambiar a lo largo de un año y es necesario proponer una medida del crecimiento. Por supuesto, una alternativa es comparar la última cantidad vendida contra aquélla del periodo inmediatamente anterior. En el mundo actual, es muy frecuente que tal comparación se exprese por medio de porcentajes. Por esta razón decidí que éste era otro concepto indispensable en estas profesiones. Además, me pareció que era posible mostrar que tal concepto estaba apoyado en el de las fracciones comunes y en el de la medición. Así que consideré necesario analizar tales ideas matemáticas.

El análisis del uso de los números racionales en las profesiones económico administrativas me ayudó a reconocer que tanto en los cambios que involucran tasas y cantidades intensivas como en aquéllos expresados por medio de un porcentaje estaban involucradas las comparaciones entre dos magnitudes. Tal apreciación me llevó analizar el vínculo entre estos conceptos y las relaciones multiplicativas.

En breve, en la primera fase de la investigación anticipé que la secuencia inicial y provisional debía estar integrada por los siguientes conceptos

6a Tasas de cambio

5a. Razones   5b. Porcentajes

4. Números decimales

3. Fracciones decimales

2. Fracciones comunes

1. Medición

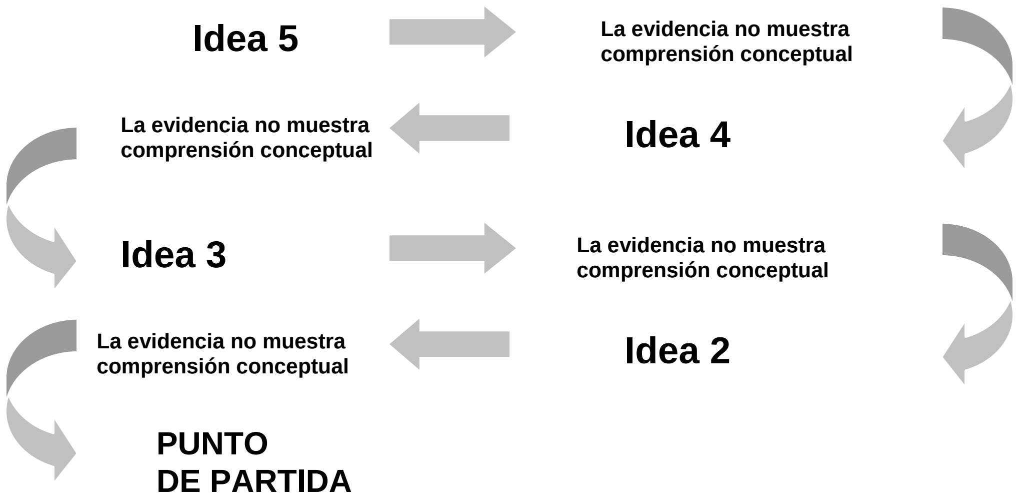
Puede observarse que la secuencia de conceptos ennumerados van del punto final al inicial. Los enlisté de esta manera para enfatizar que cada concepto depende del anterior. También vale la pena aclarar que las razones emplean cantidades intensivas que relacionan dos de magnitudes de diferente naturaleza (p. ej. tiempo y distancia) mientras que los porcentajes sólo implican la comparación entre dos cantidades pero del mismo tipo de magnitud. Por eso, uno no puede ser el antecedente del otro y los ubique en el mismo nivel.

4.2 Segunda fase: Proceso de formulación de la conjetura sobre el punto de partida

Como se recordará en el capítulo anterior comenté que, en el Diseño Instruccional, una vez que se han seleccionado los temas que conformarán la secuencia conceptual inicial es necesario explorar y reunir evidencia que sirva al investigador para formarse una idea sobre cuál es el punto de partida de los estudiantes. De otra forma al comenzar las indagaciones se estará partiendo de un supuesto que no estará sustentado en algún tipo de evidencia sobre las conceptualizaciones iniciales de los estudiantes.

Este fue entonces el siguiente paso en mi trabajo de investigación, tratar de reunir evidencia que me sirviera para formular una conjetura inicial y provisional sobre el punto de partida conceptual de los jóvenes. Para ello realicé tres ciclos de análisis de la información. Sin embargo a diferencia de las investigaciones que analizan la evidencia en ciclos progresivos a lo largo de una trayectoria hipotética (Bowers, Cobb, y McClain, 1999; Gravemeijer, Cobb, Bowers, y Whitenack, 2000), en mis exploraciones iniciales los ciclos de análisis "retrocedían". Es decir, como mi objetivo era formular una conjetura sobre el tipo de relaciones multiplicativas iniciales con que contaban los estudiantes de las carreras económico administrativas, más bien los ciclos analizados "retrocedían" (ver figura 4.1) para detectar las diferentes conceptualizaciones multiplicativas de los estudiantes y, sobre todo, la idea que podría servir de punto de partida.

Figura 4.1 Proceso de investigación



En total realicé tres ciclos de análisis antes de considerar que contaba con suficiente evidencia para formular una conjetura sobre el punto partida conceptual de los de los estudiantes. Aunque en la sección 4.4 describiré con más detalle la evidencia qué reuní, aquí mencionaré que durante los semestres de agosto-diciembre de 2006 y de 2007, apliqué cuestionarios y realicé entrevistas individuales semiestructuradas a varios alumnos de las carreras de Administración y Contaduría. Luego, a inicios del semestre de enero-junio de 2009 realicé todavía una nueva recolección de datos que incluyó una prueba escrita, varias entrevistas individuales semiestructuradas y evaluaciones del desempeño grupal también con alumnos de Administración y Contaduría.

De esta manera, puede apreciarse que antes de formular la conjetura sobre el punto de partida se hizo un esfuerzo por examinar y triangular la información proveniente de tres generaciones de estudiantes que cursaban dos carreras distintas. Además se compararon diferentes tipos de evidencia: la grupal, individual y escrita.

Es muy importante recalcar que además del proceso de triangulación de evidencia adopte criterios un poco más astringentes que los que describí en la sección 3.2.1.1.3, para decidir si un alumno o un grupo había comprendido conceptualmente un tema.

Supuse que una idea matemática detrás de cierto razonamiento había sido socializada si:

1) Un grupo de estudiantes presentaba una justificación (en forma de razonamientos).
2) Además, el grupo de estudiantes presentaba un soporte (en forma gráfica).

En las entrevistas individuales, consideré que una idea matemática ha sido asimilada individualmente cuando:

1) El alumno puede presentar una justificación (en forma de razonamientos).
2) El alumno pude presentar un soporte (en forma gráfica).

En breve, si me parecía que un alumno, o un grupo no daba señales de cumplir los criterios de comprensión conceptual, procedía a explorar la idea anterior. Consideré que había detectado el punto de partida únicamente cuando me pareció que los diferentes tipos de evidencia sugerían que los alumnos eran capaces de argumentar conceptualmente (Ver figura 4.1, en la página anterior)

El uso único de algoritmos aritméticos (reglas mecánicas para realizar las operaciones de suma, resta, multiplicación y división) no indicaba por sí solo la presencia o ausencia de un modelo conceptual que sirviera de referencia a mis estudiantes para plantear las situaciones que se les presentaban. Así, el uso de algoritmos al momento de discutir sus respuestas brindaba poca o ninguna información sobre su punto de partida conceptual.

Aquí, también debo de mencionar que dado que no contaba con un equipo de trabajo a parte de mi asesor, con el cual discutir e intercambiar interpretaciones sobre la evidencia empírica, tuve que adoptar el papel tanto de un investigador como de un profesor, aunque no siempre de manera simultánea. Por ejemplo, al considerar la evidencia que ofrecían las pruebas escritas y al realizar las entrevistas semiestructuradas, adopté el rol de un investigador. Sin embargo, al realizar las evaluaciones del desempeño grupal, adopté el rol de un profesor, aunque hice un esfuerzo por simplemente plantear situaciones y problemáticas concretas a los estudiantes y dejar que, colectivamente, presentaran argumentos que explicaran cómo habían comprendido determinada situación. Evité, tanto como pude, guiar a los alumnos para que brindaran una respuesta determinada, y mas bien intenté recordarles sus propias observaciones así como señalarles sus contradicciones. Posteriormente, al observar los videos, nuevamente adopte el rol de un investigador, y procuré discutir con mi asesor cada uno de los desarrollos y de las problemáticas conceptuales que mostraban los alumnos. De esta forma, puede advertirse un intento más por incorporar otro tipo de triangulación de la evidencia.

Aunque en los capítulos 6, 7 y 8 describiré detalladamente los resultados de éstas exploraciones, por ahora puedo comentar que un manejo correcto y eficiente de los algoritmos aritméticos no necesariamente implicaba una evolución en las conceptualizaciones de los alumnos. Fue muy frecuente observar que existían estudiantes que si bien tenían un manejo sofisticado de los algoritmos, no eran capaces de generar una simbolización externa tan compleja, y más bien compartían el punto de partida conceptual de otros de sus compañeros que no tenían un manejo tan hábil de los algoritmos. Por estas razones, no consideré válido el uso de algoritmos aritméticos como una justificación

Encontré también que otros alumnos tenían dificultades importantes en el manejo de algorítmos y de la nomenclatura matemática. En ocasiones, me fue necesario reexplorar varias veces un mismo concepto, y reformular las conjeturas sobre el tipo de relaciones multiplicativas iniciales con que contaban los estudiantes. Ello se debió a que consideré que las simbolizaciones y argumentaciones que daban los estudiantes no eran suficientes para poder analizar con mayor claridad el tipo de prácticas que efectuaban.

No obstante, después de examinar y comparar la evidencia de las tres generaciones de estudiantes, me pareció que los jóvenes reconocían la relación recíproca entre una unidad predefinida y una fracción unitaria. La razón para tomar esta decisión, fue que ninguno de los jóvenes mostró problemas relacionados con la medición (no era necesario ir más atrás en la secuencia inicial) y en cambio, podían aprovechar las relaciones recíprocas mencionadas para desarrollar otras mas complejas (el punto de partida les servía para avanzar en la secuencia)

4.3 Tercera Fase: exploración de la viabilidad de la conjetura inicial

Como se recordará, en el capítulo anterior mencioné que una vez que el investigador cuenta con una conjetura sobre la idea de la que parten los estudiantes, entonces ya es posible formular una trayectoria hipotética de aprendizaje (Cobb, Visnovska y Zhao, 2008). Así que ésta fue mi siguiente actividad. Para formularla me apoyé en la evidencia que había analizado pero también en la secuencia inicial de conceptos. Resultó especialmente útil el modelo general de las relaciones multiplicativas que presento más detalladamente en la sección 5.3. Tal modelo englobaba a una gran diversidad de conceptos en apariencia diferentes. De acuerdo con este modelo, las relaciones multiplicativas pueden entenderse como una comparación o una relación recíproca entre dos magnitudes (Thomson y Saldanha, 2003; Steffe, 2002). Este marco general será descrito con detalle en el siguiente capítulo.

Para analizar la viabilidad de la conjetura inicial, realicé ciclos de análisis progresivos a lo largo de una trayectoria hipotética de aprendizaje, de la misma forma que lo propone la metodología del Diseño Instruccional. Durante el semestre enero-junio de 2009 realicé entrevistas individuales y evaluaciones de desempeño grupal a dos grupos, uno de Contaduría y otro de Administración. Los criterios para decidir si un alumno o un grupo estaban “avanzando” conceptualmente involucraron nuevamente el uso de justificaciones y soportes tanto conceptuales como simbólicos para justificar sus respuestas (Toulmin, 1969).

Es muy importante aclarar que al formular tal trayectoria hipotética de aprendizaje mi intensión simplemente fue explorar y caracterizar la manera en la que los alumnos utilizaban su punto de partida para negociar el significado de los nuevos conceptos y simbolizaciones. Mi propósito no fue, en el estudio que se analiza en esta tesis, el generar la trayectoria hipotética con miras a establecer una teoría instruccional local.

No obstante, como podrá apreciarse en el capítulo 9, la exploración de la viabilidad de la conjetura inicial a lo largo de una trayectoria hipotética dio lugar a una serie de ajustes a la misma, lo cual podría ser de utilidad en futuras investigaciones que sí busquen generar una teoría instruccional. Además, tal indagación sirvió para proponer un modelo de las relaciones multiplicativas que es instruccionalmente más específico, que el de Thomson y Saldanha (2003) y el de Freudenthal (1983) y Thompson y Saldanha (2003).

4.4 Otros principios del diseño instruccional utilizados en las diferentes fases de la investigación

4.4.1 El principio de la fenomenología didáctica

El análisis de la relación entre los conceptos y sus aplicaciones también está relacionado con varios de los principios metodológicos del Diseño Instruccional. Como se recordará, bajo tal enfoque se enfatiza el desarrollo de una fenomenología didáctica, es decir, que los investigadores busquen fenómenos que puedan aprovecharse para que los alumnos puedan construir un concepto matemático pero de manera que les sea experiencialmente real (Gravemeijer, 2004). Siguiendo dicho principio, el análisis de la secuencia inicial que realizo en el capítulo 5 resulta útil para mostrar el vínculo que existe entre ciertas situaciones prácticas de las profesiones económico administrativas y las relaciones multiplicativas. En estas áreas es frecuente encontrar comparaciones entre dos cantidades para generar medidas de certidumbre o para tomar decisiones. Por ejemplo, las empresas comparan activos contra pasivos para medir la estabilidad de una empresa, o en ocasiones comparan precios para decidir dónde comprar. Las comparaciones también se realizan entre dos mediciones de un mismo fenómeno en dos diferentes momentos del tiempo, para de esa manera determinar si tal fenómeno ha incrementado o disminuido su valor. Tal es el caso de la inflación, de la evolución de la producción, de las ventas o de los costos. Otro caso en el que se realizan comparaciones dentro de las áreas económico administrativas, es en la formulación de unidades de intensidad que sirven para medir la eficiencia de una empresa o para generar medidas de bienestar, como el ingreso per cápita.

4.4.2 Coherencia entre puntos iniciales y finales de la secuencia

Un principio más de la metodología del Diseño Instruccional es el de la coherencia de los puntos iniciales de una secuencia en términos de los puntos terminales. De acuerdo con Cobb, Visnovska y Zhao (2008) tal principio implica que los modos informales de expresión, simbolización y razonamiento establecidos durante la fase inicial de una secuencia instruccional deben representar una base para un proceso progresivo de matematización vertical (acumulativo). Como podrá advertirse en el capítulo 5, el examen de la secuencia inicial de conceptos nos ayuda a apreciar la manera en que un punto determinado de la secuencia está apoyado en uno anterior y, además, presento una argumentación con la que justifico porqué el concepto de medición, entendido como la relación recíproca entre dos magnitudes (Fredenthal, 1983; Thomson y Saldanha, 2003) es fundamental para comprender todos los tipos de relaciones multiplicativas, incluso las tasas de cambio variable.

4.4.3 Evolución de los medios de matematización

Un último principio metodológico que puede advertirse en el análisis conceptual que llevo a cabo en el capítulo 5 es el de la evolución de los medios de matematización. En el tercer capítulo expliqué que este principio implicaba que en las discusiones posteriores a las actividades de clase los investigadores examinaran los modelos simbólicos de los estudiantes, para proponer actividades que propiciaran la negociación de nuevos modelos simbólicos más apropiados para un razonamiento matemático general (Cobb, Visnovska, Zhao 2003; Gravemeijer, 2004). En el capítulo 5, podrá advertirse cómo la secuencia conceptual inicial se apoya en el modelo de relación recíproca de Freudenthal (1983) y Thompson y Saldanha (2003). Tal modelo, al englobar la totalidad de las relaciones multiplicativas que muestro, podría constituirse como un elemento que enriqueciera la discusión sobre los medios de simbolización de tal concepto matemático. Por otro lado, en los capítulos 6, 7 y 8 podrá advertirse cómo los medios de simbolización fueron evolucionando. Algunos jóvenes pasaron, del uso de un modelo fraccionario de figuras bidimensionales no lineales (fracciones de un circulo), a un modelo fraccionario de figuras bidimensionales pero con un sentido lineal (fracciones de un rectángulo), a un modelo unidimensional continuo (fracciones dentro de una recta numérica)

4.5 Conjunto de registros empíricos

Como ya he mencionado, las conjeturas que fui formulando para intentar ubicar el tipo de conceptualizaciones con el que contaban los estudiantes fueron evolucionando a lo largo de seis semestres, por lo que recopilé diferentes tipos de registros y de datos.

Debo comentar que aunque bajo el enfoque del Diseño Instruccional se enfatiza la recolección de datos utilizando tanto evaluaciones grupales del desempeño como entrevistas individuales, decidí no trabajar a nivel grupal en las dos primeras fases de recolección de datos, porque como he mencionado mi propósito simplemente era formular una conjetura inicial y provisional sobre el tipo de conceptualizaciones iniciales de los jóvenes. No obstante, esta información resultó útil para plantear y refinar las primeras conjeturas sobre el tipo de conceptualizaciones que consideré necesario explorar.

En el mes de octubre 2006, diseñé y apliqué una serie de preguntas relacionadas con el tema de fracciones a un grupo de 30 estudiantes pertenecientes al tercer semestre de las carreras de Contaduría y Administración de Empresas en la universidad privada donde trabajo. Además, realicé entrevistas individuales y semiestructuradas a dos hombres y una mujer (ver anexo B.1, pág. 317)

Posteriormente, en octubre de 2007 llevé a cabo diez entrevistas individuales semiestructuradas a alumnos de las carreras de Contaduría y Administración de la misma universidad y se exploraron sus concepciones sobre fracciones, fracciones decimales, números decimales y porcentaje (ver anexo B.2, pág. 319)

No fue sino hasta el semestre de enero a junio de 2009, durante la tercera fase de recopilación de datos y refinación de conjeturas, que utilicé tres diferentes herramientas para registrar las conceptualizaciones iniciales de los jóvenes. Así, en primer lugar, apliqué un instrumento de evaluación inicial a un grupo de Contaduría y uno de Administración, ambos pertenecientes al segundo semestre de licenciatura (ver anexo B.3, pág 321) El primero de ellos estaba formado por seis mujeres y nueve hombres. El segundo por siete mujeres y catorce hombres. Como a cada grupo lo dividí en dos secciones, videograbé 13 sesiones con cada sección, es decir, un total de 52 sesiones. Por último realicé catorce entrevistas individuales semiestructuradas, a siete mujeres y siete hombres. Una vez más los temas discutidos fueron, fracciones, fracciones decimales, números decimales y porcentajes (ver anexo B.5, pág. 324) . Sin embargo, a diferencia de los semestres anteriores, al realizar el trabajo grupal y las entrevistas puse énfasis en el tipo de razonamientos multiplicativos que los estudiantes eran capaces de realizar. Los datos recolectados de estas fuentes fueron usados para documentar las conceptualizaciones individuales de los estudiantes, las conceptualizaciones grupales y su relación con instrumentos de simbolización

4.5.1 Evaluaciones del desempeño grupal

Los datos obtenidos de las evaluaciones del desempeño grupal fueron recolectados principalmente por medio de videograbaciones (ver anexo B.4, pág 323) . Por razones de presupuesto, todas las sesiones fueron grabadas utilizando una única cámara, la cual generalmente era encargada a un estudiante quien grababa toda la interacción entre el profesor (que también era yo) y los estudiantes, la cual incluía preguntas, dudas, discusiones entre los alumnos, información que era plasmada en el pizarrón.

4.5.2 Entrevistas Individuales semiestructuradas

El propósito de las entrevistas fue obtener información que ayudara a triangular los datos obtenidos en las sesiones grupales sobre la diversidad de conceptualizaciones multiplicativas y medios de simbolización iniciales de los estudiantes. Las entrevistas fuero de tipo semiestructuradas porque si bien es cierto que era necesario graduar su dificultad para identificar el punto de partida, también era indispensable mantener cierta flexibilidad en la cantidad y el tipo de preguntas que se realizaban. La flexibilidad también sirvió para recordar a los alumnos sus observaciones y señalar las contradicciones en que caían.

4.5.3 Discusiones Informales con el Asesor

Al finalizar cada una de las recopilaciones de datos anteriores, preparé reportes informales sobre las observaciones y conjeturas que había formulado sobre las conceptualizaciones multiplicativas con que contaban los estudiantes. Estos reportes fueron discutidos con mi asesor y otras tres compañeras que cursaban la

Maestría en Desarrollo Educativo[1]. Estas sesiones se realizaron quincenalmente y tenían una duración aproximada de dos horas. En estas reuniones informales, se hacían observaciones sobre los razonamientos de los estudiantes y se formulaban conjeturas sobre la actividad matemática tanto individual como colectiva.

En dichas sesiones con el asesor:

1. Se cuestionaron y discutieron las argumentaciones, estrategias, discusiones y medios de simbolización que utilizaban los estudiantes para resolver situaciones vinculadas con las fracciones, números decimales y porcentajes
2. Se discutió qué tipo de relaciones multiplicativas los estudiantes eran capaces de identificar y de emplear para matematizar situaciones comunes dentro de sus profesiones.
3. Se reflexionó si las situaciones que implicaban las relaciones multiplicativas entre dos cantidades contaban con elementos comunes de manera que pudiera proponerse un marco conceptual que permitiese englobarlas bajo una conceptualización general (idea central).
4. La reflexión anterior culminó con la formulación de la caracterización general del razonamiento multiplicativo y la identificación de lo que más adelante llamaré "conmensurador común"
5. Se discutió la manera en la que tal caracterización general del razonamiento multiplicativo podría servir para fundamentar cada una de las etapas de la trayectoria hipotética de aprendizaje, así como para proponer los medios instruccionales pertinentes para apoyar la socialización de las conceptualizaciones multiplicativas en cada etapa

De esta manera, las actividades instruccionales eran discutidas a la luz del desempeño de los estudiantes. En estas reuniones quincenales se compartían observaciones sobre las actividades realizadas por los estudiantes y se formulaban conjeturas sobre las conceptualizaciones matemáticas comunes en el grupo.

Como he mencionado en la sección 4.2, a falta de un equipo de investigación más grande, las entrevistas informales con mi asesor sirvieron para contrastar mis interpretaciones sobre el punto de partida de mis estudiantes, y sobre su desarrollo conceptual. Así, se convirtieron en otra forma de triangular la evidencia recopilada.

[1] Quiero aprovechar para agradecer aquí los comentarios y sugerencias de mis compañeras Renata Cardoso, Luz Pérez y Claudia Zúñiga

5. Los números racionales como concepto de aprendizaje y su relación con una secuencia instruccional inicial para las áreas económico administrativas

En los capítulos 3 y 4 mencioné que para este tipo de investigaciones resulta importante establecer una secuencia inicial de conceptos que resulten relevantes para que los estudiantes puedan comprender y proponer soluciones a las problemáticas de su entorno profesional. También comenté que todos los conceptos pertenecientes a la secuencia inicial de esta tesis se encuentran estrechamente vinculados con los números racionales.

Aunque en el capítulo anterior mencioné brevemente que el modelo de los números racionales a utilizar en esta tesis es uno comparativo, este capítulo describo de manera un poco más extensa los antecedentes de investigación sobre los números racionales como concepto de aprendizaje. Para ello, en la primera sección de éste capítulo presento una breve revisión de la literatura sobre el tema.

En la segunda sección, explico cómo de entre la vasta literatura sobre el aprendizaje de los números racionales han emergido dos modelos principales: el equipartitivo y el comparativo. Expongo algunas de las razones por las que ciertos autores consideraron provechoso el uso de cada una de dichos modelos. Sin embargo también apunto a algunas de las dificultades a las que dieron lugar.

Luego, en la tercera sección del capítulo hago explicitas las cuatro formas algebraicas de las relaciones multiplicativas y vinculando tal versión formal con el modelo comparativo de los números racionales. Además, muestro cómo es que las relaciones multiplicativas guardan relación con las fracciones y las razones.

Por último, en la cuarta sección de éste capítulo mi objetivo es presentar, de manera argumentada, la secuencia inicial de conceptos matemáticos que reconocí como centrales para el análisis de la información que se emplea en las disciplinas económico administrativas. En el capítulo justifico la selección de conceptos, mostrando su pertinencia para analizar cuantitativamente determinadas situaciones propias del área. Además, muestro que cada uno de esos conceptos está apoyado en el inmediatamente anterior, por lo que la comprensión de cada uno resulta indispensable para entender el concepto siguiente. De hecho, explico que todos ellos pueden concebirse como una relación multiplicativa, entendida como la comparación de dos magnitudes (Steffe, 2002; Thompson, 2003), y que cada vez se hace más compleja.

Los conceptos que analizo a lo largo del capítulo son: las tasas de cambio variable, las razones (y su relación con las medidas de intensidad) las fracciones, las expresiones decimales, los porcentajes, el crecimiento porcentual, el concepto de elasticidad y, finalmente, los aspectos contractual e iterativo de la medición. El orden de los conceptos sigue su nivel de complejidad, de mayor a menor, de acuerdo con lo que representaría apoyar a un grupo de estudiantes a comprenderlos. En la última sección del capítulo muestro que todas estas ideas encuentran su fundamento en lo que se conoce como *relaciones multiplicativas*, por lo que propuestas de autores como Freudenthal (1983), Thompson y Saldanha (2003), Thompson (1995) y Freudenthal (1983) y Thompson y Saldanha (2003), resultan útiles para enmarcarlas conceptualmente, con fines pedagógicos.

5.1 Revisión de la literatura

Para desarrollar esta revisión de la literatura sobre los números racionales como concepto de aprendizaje durante los últimos cuarenta años, me apoyaré principalmente en cuatro categorías principales: estudios empíricos, el análisis racional de concepto, entrevistas clínicas y diseño experimental

5.1.1 Estudios empíricos

De acuerdo a autores como Lamon (2007), las pruebas estandarizadas, especialmente aquellas que comparan el rendimiento de diferentes estudiantes a nivel nacional, e internacional, pueden resultar un estímulo a la investigación y al cambio educativo. Según dicho autor, aunque tal tipo de pruebas pueden ser cuestionadas en su validez y confiabilidad, frecuentemente identifican áreas en las que el desempeño de los estudiantes se encuentra rezagado. Las investigaciones de este tipo pueden examinar el tipo de desempeño de los estudiantes para entender mejor la naturaleza y profundidad de los rezagos de los estudiantes, aunque dentro de una amplia variedad de contextos y de grupos de edad. En general, el foco inicial de la investigación está en el tipo de rezagos que los alumnos tienen, es decir, en lo que no pueden hacer. Este tipo de investigación frecuentemente no ofrece explicaciones, pero sus resultados dan lugar a conjeturas sobre las variables que dificultan el aprendizaje.

De acuerdo a Lamon (2007) muchos años después de que Piaget y sus colaboradores propusieran la importancia central que tenía el razonamiento proporcional en su teoría del desarrollo, un estudio a gran escala en educación de la ciencia en 19 países (Comber y Keeves, 1973) mostró una tasa muy baja de éxito en las respuestas que los estudiantes presentaron al resolver preguntas que involucraban el razonamiento proporcional, y muchos investigadores comenzaron a estudiar tal fenómeno (por ejemplo, Karplus et. al., 1979; Karplus, Karplus y Wollman, 1974; Karplus et. al. 1983a, 1983b; Noelting, 1980a, 1980b; Wollman, 1974). En 1979, el Proyecto del Número Racional (Rational Number Project) (Beher, Lesh y Post, 1984; Behr, Lesh, Post y Silver, 1979), comenzó a investigar las fracciones, razones y proporciones desde la perspectiva de la educación matemática.

Lamon (2007) comenta que de 1970 a 1985, se realizó una muy extensa variedad de investigaciones que buscaban realizar un inventario de los factores que influyen en las dificultades para llevar a cabo problemas de proporcionalidad. Dentro de éstas se encontraban el tipo de contexto (Tourniaire, 1983, 1986); que tan familiarizados están los estudiantes con el uso de las proporciones en un contexto dado (Tourniaire, 1983); la ubicación del elemento faltante en una proporción con respecto a los otros tres números (Bezuk; 1986; Rupley, 1981); si un problema involucra cantidades continuas o discretas (Behr et. al. 1983; Pulos, Karplus y Stage, 1981); si el número a encontrar es el más grande de cuatro términos (Abramowits, 1974; Rupley, 1981); la presencia de razones unitarias (Hart,1981; 1988; Noelting, 1980a, 1980b); si las pistas perceptuales son consistentes o inconsistentes (Behr, et. al., 1983; Cramer, Post y Behr, 1989; Lesh, Landau y Hamilton, 1983; Novillis, 1976); si los niños utilizan estrategias aditivas en problemas en que sería pertinente utilizar estrategias multiplicativas (Hart, 1981, 1988; Karplus et.al. 1983b)

5.1.2 Análisis racional de conceptos

De acuerdo a Lamon (2007) los investigadores, utilizan el análisis racional de conceptos para examinar determinado contenido desde una perspectiva matemática madura, realizando supuestos sobre las maneras de pensar que serán necesarias para resolver ciertos problemas. En un nivel teórico, el análisis racional de conceptos identifica los componentes matemáticos esenciales de un área del conocimiento, los objetivos cognitivos de la enseñanza, e intenta determinar los futuros usos de esas ideas en cursos de matemáticas avanzadas. De manera frecuente, durante los análisis, procesos implícitos se vuelven explícitos por vez primera, y se desarrolla un nuevo vocabulario con el cual los investigadores pueden discutir los diferentes fenómenos que están estudiando. En un área donde las matemáticas se vuelven complejas, este tipo de análisis resulta crucial para proporcionar un marco que oriente las diferentes investigaciones.

Según Lamon (2007) para finales de la década de 1970, los investigadores ya habían advertido la complejidad de las conexiones entre los números racionales, el razonamiento proporcional, y muchos otros conceptos matemáticos de naturaleza multiplicativa. Se realizaron un gran número de análisis racionales que examinaron tal diversidad de conexiones desde muchos diferentes ángulos lo que amplió nuestra comprensión de las matemáticas y sus demandas cognitivas.

Lamon (2007) comenta que Kieren (1976, 1980) propuso que para entender los números racionales uno debe tener experiencia sus diferentes interpretaciones. Dicho autor analizó el tipo de comprensión matemática específica a cada una de las cinco personalidades o interpretaciones de los números racionales (fracciones como parte de un entero, razones, operadores, cocientes y medidas). Kieren sostenía que mecanismos como la equivalencia de medidas y la partición eran base para que los estudiantes desarrollaran la comprensión de las otras interpretaciones. Otros análisis (por ejemplo, Behr et. al. 1983; Ohlsson, 1987, 1988) dieron lugar a otros constructos, pero sea que uno admita cinco, seis, o más interpretaciones de los racionales, el asunto central era que el currículum de las matemáticas no había provisto de un fundamento adecuado para la comprensión de los números racionales.

La fenomenología didáctica de Freudenthal (1983) ayudó a los investigadores a relacionar ideas matemáticas muy complejas (entre ellas las diferentes personalidades de los números racionales) con objetos mentales, actividades humanas y fenómenos reales que pueden ser apropiadamente organizados por esas ideas matemáticas (Lamon, 2007). Dicho autor propuso muchos ejemplos cotidianos, accesibles a la comprensión de los niños a través de los cuales pudieran adentrarse dentro del mundo de los números racionales.

Otra contribución importante fue el capítulo introductorio a una monografía que resumía las presentaciones de la Conferencia sobre la Agenda de Investigación del Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas (Estados Unidos), sobre los conceptos y operacionales de los grados medios de primaria. La síntesis de Hiebert y Behr (1988) de los temas de la conferencia y del estado del aprendizaje de las matemáticas en los grados medios era, por sí misma, un tratado experto sobre las dimensiones matemáticas y psicológicas del desarrollo conceptual desde los enteros hasta los racionales (Lamon, 2007)

Por su parte Schwartz (1976, 1987, 1988) y Kaput (1985) enfatizaron el rol de las matemáticas en las operacionales multiplicativas, y ampliaron nuestra comprensión de la complejidad cognitiva de dichas operacionales. Su análisis semántico que retomaba la distinción entre cantidades extensivas e intensivas, enfatizaba la necesidad de que se vinculara a los números con sus referentes, y además, consideraba cuidadosamente la relación entre los referentes de un problema. Para ellos, una cantidad intensiva es una abstracción que resulta de la comparación entre otras dos cantidades. No es fácil desarrollar tal constructo, pues su referente difiere de las entidades que lo componen, no tiene una representación adecuada, y las operacionales con tal tipo de cantidades no encajan del todo con los modelos cognitivos de la multiplicación entendida como suma repetida o de la división entendida como equipartición. (Lamon, 2007)

Vergnaud (1983, 1988), introdujo el constructo de campo conceptual. El campo conceptual multiplicativo se refiere a un complejo sistema interrelacionado de conceptos, ideas estudiantiles (que incluyen sus competencias pero también sus rezagos), procedimientos, problemas, representaciones, objetos, propiedades y relaciones, los cuales no pueden ser estudiados de forma aislada. El contenido del campo conceptual multiplicativo es extenso e incluye temas como la multiplicación, división, fracciones, razones, proporciones, números racionales, análisis dimensional y espacios vectoriales. Este constructo sugiere que el aprendizaje no es lineal, que se apoya en contenidos y que una investigación que aborde cada concepto de forma aislada resultará inadecuada dado que el desarrollo de las ideas multiplicativas se forma a manera de una red. Tal perspectiva es consistente con la postura de otros autores (por ejemplo, Bereiter, 1990; Lesh y Lamon, 1992) quienes han argumentado para que una investigación que sea capaz de impactar favorablemente el aprendizaje y enseñanza dentro de las escuelas deberá tomar en cuenta la complejidad de los contenidos, del salón de clases y de los mundos personales de los estudiantes (Lamon, 2007).

5.1.3 Entrevistas clínicas

Lamon (2007) comenta que mientras los análisis racionales de conceptos, como aquéllos que hemos discutido, comienzan con las matemáticas y contemplan su contenido como un preludio hacia conceptos matemáticos más avanzados, el enfoque de las entrevistas clínicas comienza con el conocimiento que los estudiantes tienen de los números racionales. Las entrevistas clínicas no sólo ayudan a revelar la comprensión actual que un estudiante tiene de cierto tema, sino que además, cómo es que el investigador puede incidir en dicha comprensión. Apoyándose en preguntas basadas en un análisis conceptual, el investigador genera preguntas que revelan las concepciones correctas y los rezagos del estudiante, y por tanto puede estudiar los constructos del alumno a la luz de tales cuestiones. Suponiendo que el pequeño número de alumnos que son entrevistados ejemplifiquen el pensamiento que es característico de una población más grande, las entrevistas clínicas sirven para poyar teorías acerca de cómo ciertas ideas se desarrollan y cómo es que los contenidos pueden ser psicologizados para la instrucción. Dos tipos de investigación que usan la entrevista clínica han resultado influyentes en la investigación sobre los números racionales: aquellos que estudian la construcción del conocimiento de los niños, y los estudios que buscan identificar las competencias de los niños, su conocimiento intuitivo, y sus estrategias informales.

Siguiendo a Lamon (2007) Steffe y sus colegas estudian los esquemas funcionales (es decir, acciones repetibles y generalizables) que los niños traen a cierta tarea específica y cómo los niños adaptan su esquema en respuesta a la tarea con la que interactúan. En base a un cuidadoso estudio sobre conteo y secuencias numéricas, Steffe desarrolló una teoría relacionada con la manera en que la formación de los niños y su comprensión de las unidades es progresivamente elaborada a partir del conteo temprano hasta llegar a la multiplicación (Steffe, 1988, 1992; Steffe y Cobb, 1988; Steffe, von Glasersfeld, Richards y Cobb, 1983). El carácter central de la unidad dentro de la enseñanza de las fracciones, especialmente el papel de las unidades compuestas (es decir, unidades de referencia mayores a uno) y el hecho de las razones y tasas puedan ser vistas como tipos complejos de unidad (Lamon, 1993a, 1994) sugiere que la construcción de unidades es un importante mecanismo para explicar el desarrollo de ideas matemáticas progresivamente más complejas. La investigación en el desarrollo natural de jerarquías del lenguaje (Callanan y Markman, 1982; Markman, 1979) apoya esta perspectiva y sugiere que una comprensión compleja se desarrolla cuando una situación se reexpresa en términos de una unidad colectivamente aceptada. Cuando esto sucede, el esquema parte todo entra en juego y el individuo es capaz de pensar sobre las partes agregadas e individuales que lo componen. A su vez, la habilidad para componer y para descomponer una unidad en sus partes constitutivas añade flexibilidad al razonamiento de un individuo, la cual es necesaria en el tema de los números racionales.

Olive y Steffe (1994) utilizaron procedimientos con los cuales los niños construían unidades cada vez más complejas, lo que les permitía experimentar con operacionales sobre objetos continuos y discretos que podían ayudarles a entender los números racionales, pues lograban componer, descomponer, iterar, partir, y medir. Esas unidades complejas también sirvieron como medio por el cual los maestros e investigadores podían observar el itinerario con el que los niños construían el significado de los números racionales (Lamon, 2007).

Según Lamon (2007) a pesar del hecho de que muchas estrategias propias de los números enteros no son pertinentes al momento de trabajar con fracciones, la investigación de la década de 1990 probó que tal división conceptual no es insuperable. En particular, Mack (1990, 1995) demostró en sus experimentos de enseñanza que el conocimiento informal y de los números enteros de los estudiantes podía ser extendido y relacionado con los símbolos y procedimientos de los números racionales. Otros han encontrado competencias que podrían ser aprovechadas para la enseñanza, incluso en estudiantes muy jóvenes. Las representaciones estudiantiles de los números racionales y de las proporciones ocurren sobre una base informal y cualitativa, mucho antes de que estos estudiantes sean capaces de tratar estos temas de forma cuantitativa (Tourniaire, 1986; Treffers y Goffree, 1985). Los niños naturalmente emplean una forma de intuición matemática y un sistema informal de conocimiento (Kieren, 1983; Streefland, 1984, 1985; Treffer y Goffree, 1985). Este conocimiento informal incluye una comprensión visual de las razones y proporciones (Steffe y Parr, 1968), y especialmente de la congruencia y similaridad (van den Brink y Streffland, 1979). Algunas estrategias son más primitivas y dependen del conteo y la suma (Hart, 1984, 1988). Sin embargo, muchas estrategias y procesos complejos se desarrollan de manera independiente a la instrucción (Lo y Watanabe, 1997; Post, Behr, Lesh y Wachsmuth, 1985; Rupley, 1981; Saenz-Ludlow, 1994).

Lamon (2007) comenta que la equipartición, ha sido reconocida como un importante mecanismo para construir una comprensión de los números racionales (Kieren, 1976, 1980; Piaget, Inhelder y Szeminska, 1960; Pothier y Sawada, 1983; Streefland, 1991) y como parte del conocimiento informal de los estudiantes. Debido a que los números racionales son un campo de cocientes, la equipartición juega un papel importante en la generación de subconstructos de los números racionales (Lamon, 1996), así como en la construcción de significado para las operacionales con los números racionales (Lamon, 2006; Mack, 2001).

En general puede decirse que, los estudios en los que niños fueron entrevistados antes de que fuesen expuestos a algún tipo de enseñanza sobre fracciones mostraron estrategias intuitivas poderosas. Por otro lado, la investigación con niños mas grandes que habían tenido cinco o más años de instrucción matemática tradicional sugiere que las reglas y algoritmos habían reemplazado al razonamiento (Karplus et. al. 1983b)

5.1.4 Diseño experimental

Lamon (2007) comenta que la principal característica del diseño experimental (Brown, 1992) es que el producto de la investigación esta siendo diseñado en una serie de pruebas y adaptaciones sistemáticas. La colección de datos, análisis y refinamientos del producto que esta siendo desarrollado atraviesan por un extenso ciclo de pruebas y revisiones. El punto de partida es cierto marco conceptual, pero las actividades cotidianas son diseñadas y modificadas en respuesta a las observaciones ocurridas en el salón de clases, pues de esa manera se ajustan mejor a las necesidades de los estudiantes. En otras palabras, apoyada en evidencia (por ejemplo, observaciones, el trabajo escrito de los estudiantes, discusiones grupales), la clase del día siguiente refleja lo que los maestros aprenden de dicha evidencia. Más que probar que cierta teoría “funciona”, un diseño experimental estudia la sinergia, la ecología de un salón en toda su complejidad. Más que “controlar” variables, permite al investigador y maestro regular lo que hacen en respuesta a la diversidad que se encuentran. Puesto de forma sencilla, los maestros participan en la investigación. Se detectan nuevas formas de aprender y enseñar que sean tan efectivas y para tantos alumnos como se pueda.

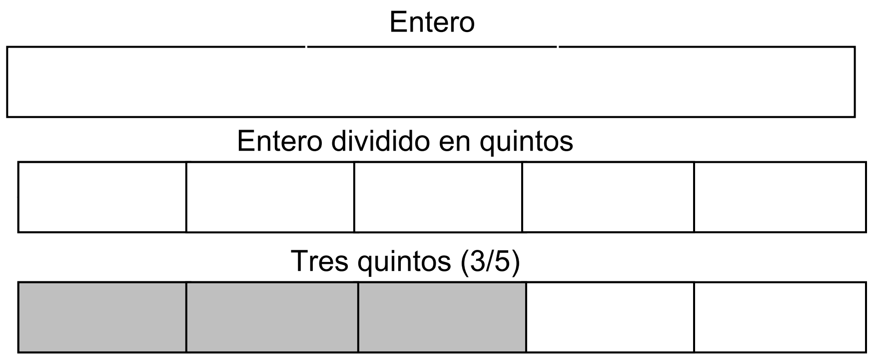
Dentro de los diversos estudios que han tratado de aprovechar el diseño experimental está el estudio longitudinal de Lamon (2007) en el cual se genera un diseño en el cual se hace interactuar siete diferentes personalidades de los números racionales y se observa el tipo de razonamientos de los estudiantes durante un periodo de 4 años.

5.2 Los modelos de los números racionales

5.2.1 El modelo partitivo de los números racionales

Como he mencionado en la sección 5.1 durante segunda mitad de la década de 1970 surgieron una multitud de estudios que proponían un modelo de fracciones equipartitivas para introducir el concepto de los números racionales (p. ej. Behr, et. al., 1983; Kieren, 1976,1980; Lamon; 2007). En dichos artículos, se argumentaba que un primer paso para que los estudiantes lograran comprender las diferentes facetas de los números racionales era que comenzaran por dividir determinados objetos en partes iguales, y reconocieran la relación que guardaba cada parte con el todo. En otras palabras los alumnos debían aprender a relacionar el denominador con el tamaño de una unidad fraccionaria generada a través de la equipartición de un objeto en un número específico de partes y el numerador con cierta cantidad de esas partes iguales. De esta forma, los estudiantes podrían entender una fracción como 3/5 como tres partes de un objeto que ha sido divido en 5 (ver figura 5.1).

Figura 5.1 Modelo equipartitivo de las fracciones

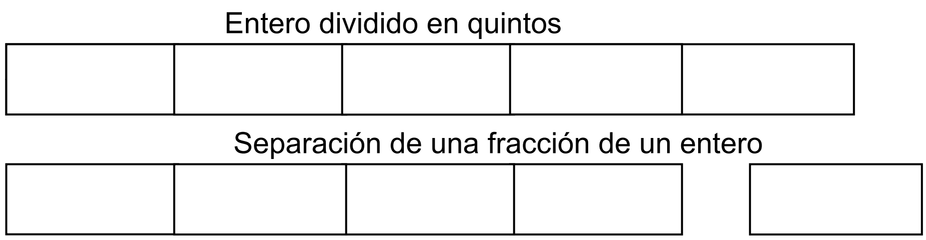


De manera más específica, Kieren (1976, 1980) propuso que el modelo equipartitivo podría servir de fundamento a cinco interpretaciones de los números racionales, a las que consideraba constructos derivados de dicho modelo. Esas cinco interpretaciones eran parte/todo, cociente, razón, medida y operador. Vale la pena mencionar, que la perspectiva de Kieren sobre los constructos anteriormente mencionados ha resultado particularmente influyente. Su propuesta ha influido en el desarrollo curricular de varios países y es considerada por varios expertos como una que ha "soportado la prueba del tiempo" (Behr, Harel, Post, & Lesh, 1992, p. 289)

Por otra parte, muchos investigadores han expresado sus reservas sobre la pertinencia de la equipartición como un punto de partida adequado para desarrollar una comprensión progresivamente más compleja de las fracciones y los números racionales. Davis (2003) ha comentado que aún no se sabe cómo es que el desarrollo del concepto parte/todo en los niños contribuye a su comprensión de las fracciones. Freudenthal (1983) y Thompson y Saldanha (2003) han incluso cuestionado al modelo de la equipartición como uno apropiado para apoyar el desarrollo de una comprensión cada vez más compleja de las fracciones.

Cortina, Zuñiga y Visnovska (2011) señalan que Freudenthal (1983), en su fenomenología didáctica sobre las fracciones, distinguió entre dos diferentes tipos de unidades/enteros con los cuales las fracciones pueden estar asociadas: objetos y valores de una magnitud. Freudenthal relacionó cada una de estas entidades a dos diferentes formas de aproximarse a la noción de fracción—como fracturador y como comparador. Para Freudenthal, la fracción como fracturador involucra la construcción del significado de una fracción unitaria como parte de un todo, y que es obtenida por la división de un objeto en partes iguales (por ejemplo, de una barra de chocolate). Bajo esta aproximación, la unidad original es entendida como un objeto, es decir como una entidad completa. Una fracción por ejemplo (ej. 1/5) es entendida, literalmente como parte de la unidad, es decir como algo que esta incluido en el objeto. Bajo esta interpretación, separar una fracción de la unidad implicaría dejar incompleta dicha unidad (ver figura 5.2)

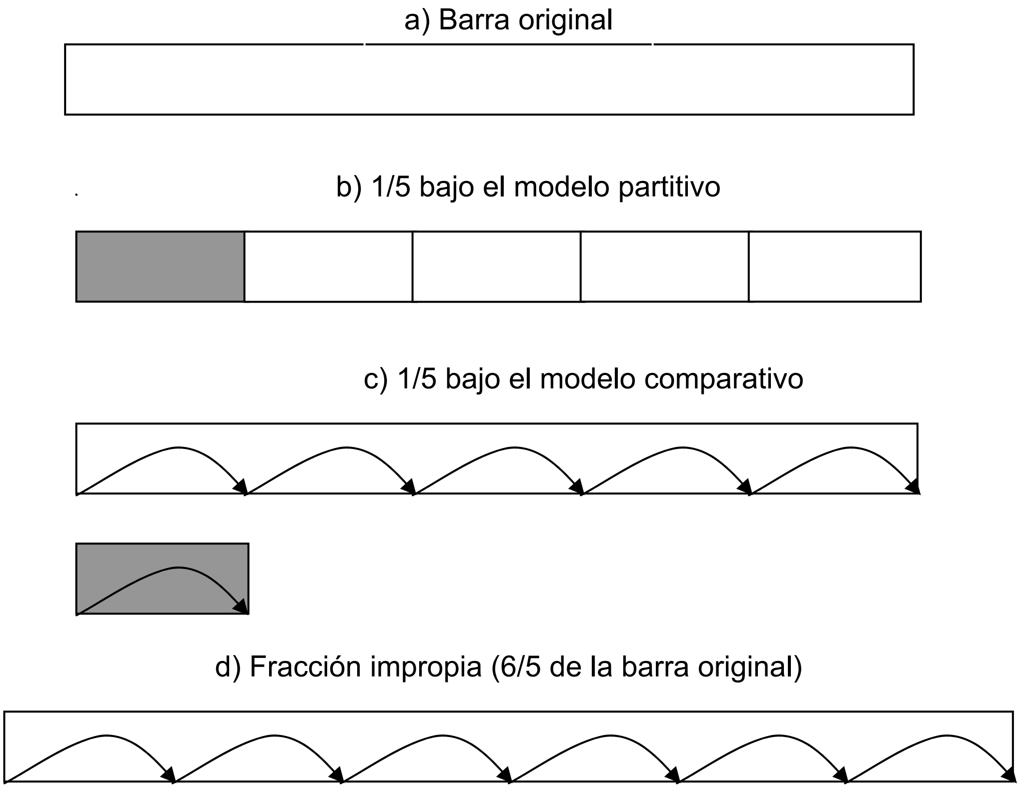
Figura 5.2. Separación de una fracción del entero



En el caso de las fracciones como comparadores (Freudenthal, 1983), una fracción unitaria es construida como una magnitud que satisface cierto criterio iterativo, en relación a otra magnitud. En este caso, la unidad no es construida sólo como un objeto. Más bien, es construida como una magnitud presente en un objeto, por ejemplo la longitud concreta de determinado objeto.

La siguiente figura ilustra la diferencia entre las dos formas de construir unidades. Siguiendo a Freudenthal (1983), la barra que se muestra en la figura 5.3a puede ser interpretada como un entero, o como cierta magnitud presente en un objeto. En el primer caso una fracción de la barra se referiría a algo que literalmente es una parte de la barra (ver figura 5.3b). En el segundo caso, una fracción de la barra se referiría a una magnitud que está en una relación cuantitativa específica respecto del la barra original. En consecuencia, se puede considerar que cierto objeto esta en una relación fraccional con la barra incluso si la barra no lo contiene (ver la figura 5.3c). Lo que es más, se vuelve natural considerar que ciertos objetos que son más grandes que la barra original guardan una relación fraccional con la misma (ver en la figura 5.3d una nueva barra que es 6/5 de la barra original).

5.3 Contraste entre el modelo partitivo y el comparativo



Cortina, Zuñiga y Visnovska (2011) comentan que Freudenthal (1983) consideró que la fracción como fracturador es “muy restringida no sólo fenomenológicamente sino también matemáticamente” (p. 144) pues involucra manipular objetos, en lugar de magnitudes. Para este autor, la fracción como fracturador implica adoptar una perspectiva donde las fracciones son “vistas o imaginadas dentro del todo” (p. 147) esto es, una perspectiva donde se restringe a las fracciones a ser “fracciones propias únicamente” (p. 147)

Thompson y Saldanha (2003) expresaron también sus dudas sobre la pertinencia de que la enseñanza de las fracciones estuviese basada en el modelo partitivo. Estos autores comentaron que tal enfoque lleva a los estudiantes a pensar que las fracciones deben estar incluidas dentro de un entero y, por ello, se hace difícil que los estudiantes conciban a las fracciones impropias como números que simbolizan cierta cantidad.

> A los estudiantes generalmente se les instruye, y por lo tanto aprenden, que cierta fracción esta contenida dentro del todo, así "A es cierta fracción de B" denota un sentido de inclusión entre ellas, el que A es un subconjunto de B. Como resultado enunciados como "A es 6/5 de B" no guardan ningún significado para ellos (p. 107)

La enseñanza que está basada en la metáfora de la partición también lleva a los estudiantes a desarrollar una imagen de las fracciones como una en la que se pide "encontrar tantos de tantos". Thompson y Saldanha (2003) sostienen que tal imagen…

> … posee un sentido de inclusión—que los primeros "tantos" deben ser incluidos en los otros "tantos". Como resultado, los estudiantes no aceptarán la idea de que puede hablarse de una cantidad como siendo la fracción de otra cuando no tienen nada físicamente en común. Por ejemplo, los alumnos entenderán preguntas como "¿A qué fracción del total de alumnos equivale el número de niños?", pero se verán extrañados ante preguntas como "¿A qué fracción del numero de niñas equivale el número de niños? (p. 104)"

5.2.2 El modelo comparativo de los números racionales

Freudenthal (1983) y Thompson y Saldanha (2003) propusieron una alternativa al uso de la equipartición –una alternativa en que la comparación fuese el centro de la instrucción. En esta alternativa, las fracciones no representan el tamaño de una pieza en relación con un todo. Más bien, se les usa para cuantificar magnitudes por medio de la comparación con otra magnitud de referencia (la cual tiene un valor de 1), en términos multiplicativos.

Si tomamos en cuenta el análisis de Freudenthal (1983) y de Thompson y Saldanha (2003), por un lado es posible entender a las fracciones unitarias ($1/n$), de manera distinta a ser un número que cuantifica el tamaño de una pieza que es obtenida dividiendo cierto entero en un número de partes iguales. Puede entenderse a la fracción unitaria como una magnitud que satisface cierta condición iterativa, con respecto a la magnitud de referencia, es decir: B es $1/n$ tan largo como A cuando A es n veces tan largo como B.

Cortina, Zuñiga y Visnovska (2011) agregan que la diferencia entre el modelo equipartitivo y el comparativo puede ser explicado en términos algebraicos. En el modelo equipartitivo $1/n$ se construye como el cociente (partitivo) de dividir un entero en n partes iguales, es decir $1 \div n = 1/n$. En contraste, en el modelo comparativo $1/n$ es visto como un multiplicando de magnitud tal que cuando es multiplicado por *n* el producto es tan grande como la unidad de referencia, es decir $1/n \bullet n = 1$. Desde un punto de vista matemático, los dos enfoques son equivalentes. Sin embargo, desde una perspectiva instruccional, tanto el análisis de Freudenthal (1983) como el de Thompson y Saldanha (2003) sostienen que la interpretación comparativa es significativamente diferente.

5.3 Las relaciones multiplicativas como fundamento conceptual de ideas indispensables en las áreas Económico Administrativas

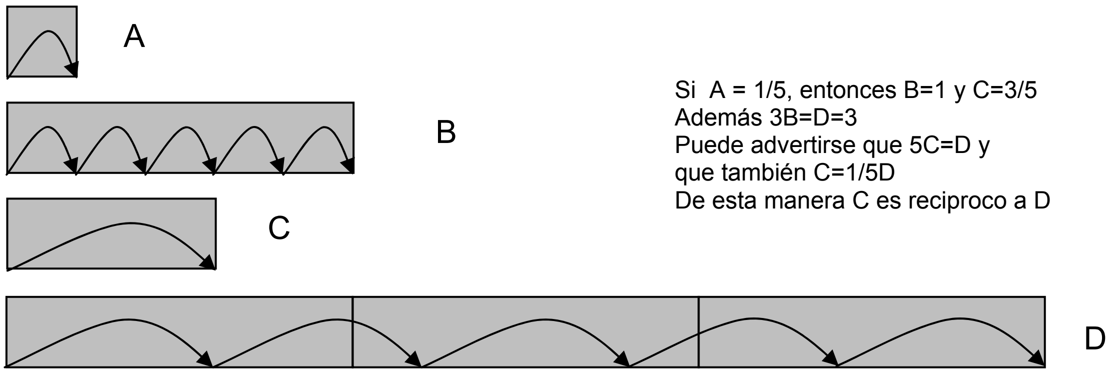
Al considerar y reflexionar sobre los trabajos de Freudenthal (1983) y Thompson y Saldanha (2003), puede apreciarse que para ellos una comprensión cabal de las fracciones unitarias implica reconocer su relación recíproca con la magnitud que ha sido definida como unidad. Apoyándome en dicha idea, en este trabajo entenderé que razonar multiplicativamente implica reconocer la relación recíproca que existe entre dos magnitudes o cantidades que se comparan.

Para formalizar la conceptualización de las relaciones multiplicativas utilizaré terminología distinta de la que tradicionalmente se ha usado para describir la multiplicación. A una cantidad a la llamaré *comparando* (el objeto a medir), a otra cantidad b la llamaré *comparador* (el objeto con el que se mide), y a un factor k lo llamaré *escalar* (el número de veces que se repite el comparador en el comparando o la "escala" entre ambos, para incluir casos no enteros) Entonces, una relación multiplicativa es una relación recíproca entre un comparador (b), un comparando (a) y un escalar (k) de la forma

1) $k=\frac{a}{b}$, o bien, $a=k \bullet b$ 2) $\frac{1}{k}=\frac{b}{a}$, o bien, $b=\frac{1}{k} \bullet a$

Quizá un ejemplo numérico y una figura podrían ser de ayuda para expresar mejor el punto anterior. En la figura 5.4 se comparan las cantidades 3 y 3/5.

Figura 5.4 La relación recíproca entre dos cantidades referentes



La caracterización anterior del pensamiento multiplicativo en términos de comparador, comparando y escalar, sirve para indicar la relación recíproca entre ambos y nos ayuda a apreciar que hay otras ideas matemáticas (fracciones decimales, porcentajes, razones), que sólo son casos particulares de esa caracterización general.

Así, entre una unidad fraccionaria (*b*) y la unidad existe una relación reciproca

Caso general

$k=\frac{1}{b}$, o bien, $k \bullet b=1$

$\frac{1}{k}=b$, o bien $\frac{1}{k}=\frac{b}{1}$

Ejemplo

$15=\frac{1}{\frac{1}{15}}$, o bien, $\frac{1}{15}\bullet 15=1$

$\frac{1}{15}=\frac{\frac{1}{15}}{1}$, o bien $\frac{1}{15}\bullet 1=\frac{1}{15}$

En una razón, existe todo un conjunto de parejas de cantidades cualesquiera (x,y) que guardan tal relación recíproca expresada por un iterador (k)

Caso general

$k=\frac{y}{x}$, o bien, $k\bullet x=y$

$\frac{1}{k}=\frac{x}{y}$, o bien $\frac{1}{k}\bullet y=x$

Ejemplo

$65.2\frac{m}{seg}=\frac{4525m}{141seg}=\frac{21186m}{330s}$

$0.0156\frac{seg}{m}=\frac{141seg}{4525m}=\frac{330seg}{21186m}$

Esta caracterización general de las relaciones multiplicativas permitirá advertir al lector que existe coherencia entre los diferentes puntos de la secuencia conceptual inicial en relaciones multiplicativas, lo cual es consistente con la metodología del Diseño Instruccional.

5.4 Secuencia instruccional inicial

5.4.1 Tasas de cambio definidas para un intervalo

Existen determinadas situaciones económicas o administrativas en las que puede esperarse que la relación entre dos cantidades cualquiera sea relativamente constante, por lo que nociones como las razones son suficientes para darles un sentido cuantitativo. En términos un poco más formales, dadas una variable independiente[1] "x" y una variable dependiente[2] "y", esta última siendo una función[3] de "x" , $y=f(x)$, existen situaciones en las que

$$\frac{y}{x}=k, \text{ donde } k \text{ es constante y es número real}$$

Esta relación se mantiene incluso cuando se analizan intervalos específicos de cada cantidad, por ejemplo, si la variable independiente crece en 100 unidades (Δx=100, donde Δx denota crecimiento en x) la variable dependiente crecerá en 220 unidades (Δy=220), y esa relación se mantendrá para cualquier magnitud de cada cantidad y para cualquier tamaño de intervalo. Expresado en términos algebraicos el razonamiento anterior quedaría

$$\frac{y}{x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{220}{100}=2.2$$

Diferentes autores han explorado a las razones a nivel conceptual, psicológico e instruccional (Cortina, 2006; Freudenthal, 1983; Thompson, 1994; Schwartz, 1988; Steffe 2000). Un ejemplo de su utilización en las áreas económico administrativas se presenta en los negocios en los que, bajo ciertos incentivos económicos y condiciones de monitoreo, la relación entre el número de empleados y la producción sea prácticamente constante, sin importar la cantidad de empleados contratados (ej. 2.2 productos por empleado).

Sin embargo, en la muchas de las situaciones relacionadas con las disciplinas y profesiones económico administrativas, la relación entre los incrementos de dos variables $\Delta y/\Delta x$ no se mantiene constante para todos los valores de la variable independiente. Un ejemplo importante de ello se encuentra en algunos procesos de fabricación de productos en los que las condiciones

[1] Una variable es un rasgo de un fenómeno susceptible de ser cuantificado. Variable independiente es aquella en términos de la cual se definen otras variables conocidas como dependientes.

[2] De aquí en adelante conservaremos en la notación el hecho de que *x* es la variable independiente y *y* la dependiente

[3] Una función es una regla que permite relacionar los elementos de dos conjuntos, en este caso los valores de la variable independiente con los de los valores de la variable dependiente

tecnológicas permiten que inicialmente la producción crezca en intervalos "más grandes en términos relativos"[4],[5] de lo que lo hace el gasto en materias primás y trabajadores, así que el *costo por cada unidad de producción debe ser cada vez más bajo: cada nueva unidad resulta más barata que la anterior*.

No obstante, posteriormente la producción crece en "intervalos relativamente muy similares" al gasto en materias primás y producción, *por lo que el costo por unidad aquí es prácticamente constante: cada nueva unidad tiene un costo muy similar a la anterior.* Finalmente, la producción crece "relativamente menos" que los costos, *por lo que el costo por unidad empieza a crecer: cada nueva unidad tiene un costo mayor que el de la anterior.*

Como puede verse, en este ejemplo tanto la producción como los costos crecen, sin embargo crecen a ritmos que van variando y que tienen implicaciones en el costo por unidad de producción (Varian, 2007, Parkin 2007). Este comportamiento en los intervalos de costos de una empresa puede apreciarse mejor en las figuras 5.4 y 5.5

En la figura 5.4 se advierte que en el intervalo que va de 0 a A, el incremento porcentual en costos (y) es mayor al de producción (x), sin embargo, en los intervalos que van de A a E, Δy es "menor" que Δx; por último de E a G, Δy es "mayor" que Δx.[6]

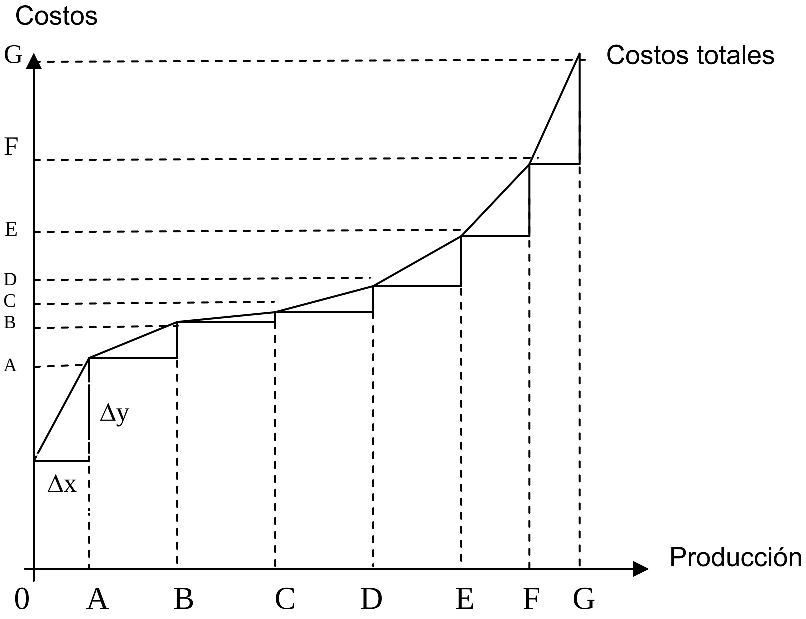
---

[4] Por supuesto no tiene sentido comparar directamente el tamaño de un intervalo de producción con un intervalo de costos porque están medidos en diferentes unidades, en este párrafo me estoy refiriendo a una comparación entre el crecimiento porcentual en producción contra el crecimiento porcentual en costos, para de esta manera poder establecer cuál de ellos es "mayor"

[5] La definición del cambio porcentual de una variable "Z" es $\Delta\%Z= (Z_{final}—Z_{inicial}) / Z_{inicial}$

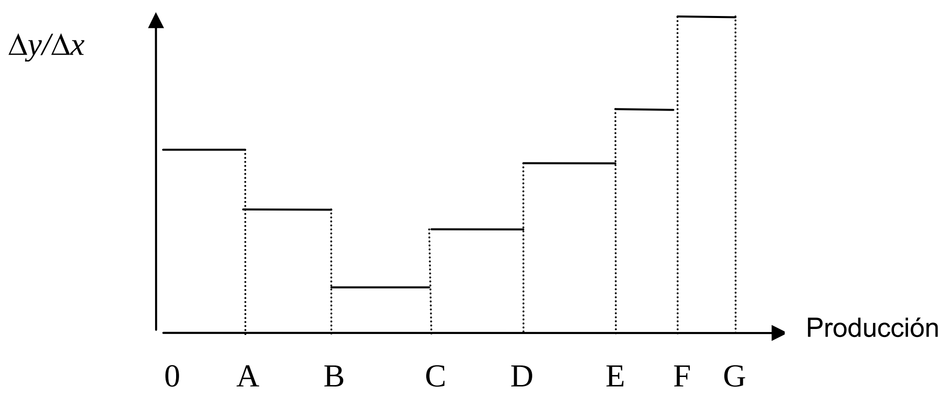
[6] Una vez más es necesario enfatizar que la producción no está en las mismás unidades que los costos totales. Así que en el párrafo anterior se ha explicado que, por ejemplo, en el intervalo de C a D el incremento absoluto en producción (Δx) comparado con el total de producción a x=D, es mayor que el incremento absoluto en costos (Δy) comparado con el total de costos acumulado hasta y=D. En términos sencillos, en el intervalo CD sucede que $\Delta x>\Delta y$

Figura 5.5 Costos Totales de una Empresa



La evolución anterior se ve reflejada en la figura 5.2, puede notarse que la relación entre los incrementos en costos y producción[7], $\Delta y/\Delta x$, cambia en diferentes intervalos de la producción. Como en los intervalos de producción que van 0 a *C*, Δy es cada vez "menor" con respecto a Δx, la relación $\Delta y/\Delta x$ decrece, mientras que en los intervalos que van de C a G, Δy es cada vez "mayor" con respecto a Δx, así que la relación $\Delta y/\Delta x$ crece. Es muy importante advertir que dentro de un mismo intervalo de producción, digamos el que va de *B* a *C*, todas las unidades tienen un mismo costo, pero al pasar a otro intervalo ese costo cambiaría. A continuación explico por qué..

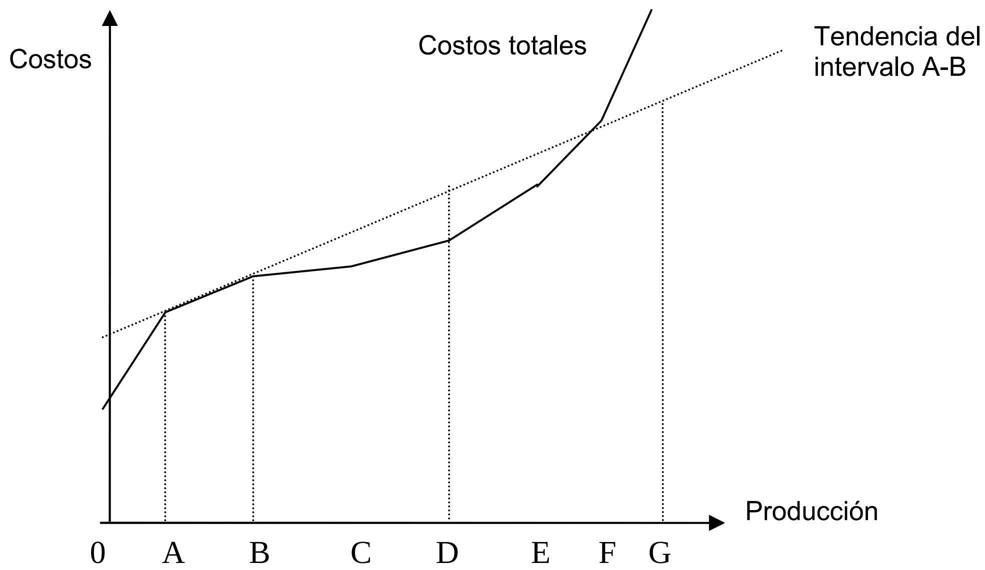
Figura 5.6 Costos Marginales de una empresa



[7] Esta relación entre el incremento en costos comparada con el incremento en producción se conoce en la literatura económica como costos marginales (Varian 2007; Parkin, 2007)

Si una empresa asumiera que el costo marginal de un intervalo de producción se mantendrá para cualquier nivel de producción sucederían casos como el que se muestra en la figura 5.6. En este ejemplo la empresa tiene una estructura de costos que varía en cada intervalo de producción, pero si por alguna razón la empresa decidiera utilizar el costo marginal que se presenta en el intervalo *A*-*B* para calcular sus costos totales en cualquier nivel de producción entonces al calcular el costo total del nivel de producción *D*, la empresa estaría sobreestimando sus costos, lo que la induciría a querer reducir su producción. Más grave es el caso en el que quisiera estimar el costo total del nivel de producción *G*, pues en este caso estaría subestimando sus costos y posiblemente querría aumentar su producción cuando en realidad sus costos ya son muy altos.

Figura 5.7 Uso del costo marginal de un intervalo para calcular costos totales



El ejemplo anterior muestra la importancia de que los profesionistas y estudiantes de las áreas económico administrativas cuenten con conceptos que les ayuden a dar sentido a situaciones en las que la relación entre dos variables no se mantiene constante sino que está definida en cada intervalo.

La literatura revisada en educación matemática prácticamente no ha abordado casos en los que se analice la complejidad conceptual implícita en la comparación multiplicativa entre los incrementos de dos variables ($\Delta y/\Delta x$) en los que la razón de crecimiento no es constante para todos los valores de la variable independiente (x); esto es, casos en los que conceptos como las razones o las funciones lineales resultan insuficientes para darles sentido.

Tampoco se han considerado en la literatura revisada casos en los que debido a las condiciones tecnológicas, la magnitud de las cantidades involucradas o al tamaño de los pedidos de cada cliente, los incrementos en cada una de las variables son mayores que la unidad; por ejemplo, casos como los de una empresa productora de televisores que cuando incrementa su producción no lo hace de una en una, sino en grupos de varias decenas o centenas. Al tratarse de incrementos mayores que la unidad, la comparación entre los incrementos de dos variables ($\Delta y/\Delta x$) tampoco corresponde al concepto de derivada que utiliza cambios infinitesimales en la variable independiente.

Entonces, como la comparación entre los incrementos de dos variables sólo se mantiene constante en cierto intervalo de la variable independiente, cuyo tamaño es mayor a la unidad, en este trabajo, a la comparación de incrementos de dos variables ($\Delta y/\Delta x$) la he denominado *tasa de cambio definida para un intervalo* (de la variable independiente), o simplemente, *tasa de cambio variable* (en el sentido de que no es constante pues "varía" de intervalo a intervalo).

Un elemento que hace a este concepto muy poderoso para dar sentido a una gran diversidad de situaciones cuantitativas dentro de las áreas económico administrativas, es que permite reconocer las tendencias o evolución que seguirá la variable dependiente al incrementar el valor de la variable independiente, lo cual permite anticipar el comportamiento de la variable dependiente y también compararlo aditivamente con las tendencias que sigan otras variables dependientes. Por ejemplo, para una empresa es muy importante examinar si sus ingresos por unidad son mayores que sus costos por unidad, pues sólo de esa forma podrá reconocer si esta obteniendo ganancias. Otro caso importante, podría presentarse cuando una empresa quiere decidir si producir más de un artículo A y menos de un artículo B. Si los beneficios por unidad de producir un artículo A superan a la pérdida por dejar producir el artículo B, la empresa cambiará su producción al articulo A.

Los medios instruccionales necesarios para apoyar la comprensión de las tasas de cambio definidas para un intervalo, podrían incluir el análisis de tablas de datos en las que se mostrara el comportamiento de la variable dependiente (costos) en distintas etapas de la variable independiente (producción). Además se podrían formular determinadas preguntas que orientaran las discusiones grupales de tal manera que los alumnos propusieran diferentes alternativas para medir los costos unitarios de la empresa. Mi conjetura es que, de manera paulatina, la discusión grupal y las tablas llevarían a los alumnos a proponer medidas unitarias que utilizaran promedios, y posteriormente a sugerir medidas que utilizan las tasas de cambio definidas para un intervalo. Otro tipo de tablas de datos se podrían emplear en la discusión grupal incluirían unas en las que se discutiera y comparara la magnitud de los cambios de las variables independientes y dependientes. La conjetura es que estas discusiones llevarían a los alumnos a proponer la idea del crecimiento porcentual y a explicar cómo las diferencias en el crecimiento porcentual de las variables independiente y dependiente ayudan a explicar el comportamiento de las tasas de cambio definidas para un intervalo

El ejemplo de la evolución de costos ejemplificó la manera en que las tasas de cambio definidas para un intervalo pueden entenderse como tasas de cambio que se mantienen constantes pero exclusivamente dentro de cierto intervalo de la variable independiente. Así, puede conjeturarse que, para que un estudiante pueda comprender el concepto de las tasas de cambio definidas para un intervalo, es necesario que previamente haya desarrollado una comprensión de la idea de *razón*. A su vez, esto implica que el alumno haya desarrollado una comprensión de las fracciones entendidas como comparadores y de la de medición (Cortina, 2006; Thompson, 1995).

Además, para poder comprender el comportamiento de una tasas de cambio definidas para un intervalo, como el caso del costo marginal, es necesario entender el *crecimiento porcentual* de cada uno de sus componentes. Así pues, también tiene sentido conjeturar que la comprensión del concepto de *tasas de cambio definidas para un intervalo* implicaría la comprensión de las expresiones decimales, de las fracciones decimales, de las fracciones entendidas como comparadores y de la medición (Cortina, 2006; Thompson, 1995).

Del análisis anterior se desprende que las tasas de cambio definidas para un intervalo constituyen un concepto para cuya comprensión se requeriría de que los estudiantes hubieran desarrollado previamente una comprensión relativamente compleja de los conceptos que típicamente se enmarcan dentro del campo del razonamiento multiplicativo; conceptos como: razón, tasa, fracción, porcentaje y número decimal. Así pues, el concepto de *tasa de cambio variable* debe entenderse como un objetivo de aprendizaje que, para los maestros que buscamos apoyar a nuestros estudiantes a que lo su comprendan, requiere de que los alumnos logren antes comprender los conceptos multiplicativos arriba mencionados.

A continuación explicaré cómo la serie de ideas cuya comprensión es necesaria para aprender conceptualmente sobre las tasas de cambio definidas para un intervalo, también son de gran importancia en situaciones relevantes para las carreras y profesiones económico administrativas. De esta manera, en consistencia con lo descrito en los capítulos dos y tres de esta tesis, puede aprovecharse el contexto de esas profesiones para apoyar la alfabetización numérica de los estudiantes –simbolizando, analizando, discutiendo y negociando en el aúla– en su trayectoria hacia comprender el concepto de *tasas de cambio variable*

5.4.2 Razones y medidas de intensidad

Schwartz (1988) retoma la caracterización de las cantidades en dos tipos principales, extensivas e intensivas. Las cantidades extensivas están relacionadas con el proceso de contar apoyándose en unidades discretas (número de autos) o bien en conceptos continuos (longitud). Las cantidades intensivas establecen el grado de intensidad con la cual dos cantidades de naturaliza distinta, y expresadas en distintas unidades , se relacionan entre sí. Algunos autores como Cortina (2006), Freudenthal (1983) y Thompson (1994a) han señalado incluso que una interpretación adecuada del cociente que expresa una relación intensiva (68 pantalones/ empleado), involucraría concebir la existencia de al menos otro cociente equivalente (272 pantalones/4 empleados), pues de otra forma no se estaría utilizando una proporción, la cual, según Freudenthal (1983) involucra *al menos* cuatro datos ($a:b = c:d$)

Un ejemplo de la relevancia de las medidas de intensidad, cuando son utilizadas en las empresas, se encuentra en los casos en los que diferentes tipos de maquinarias se aprovechan de manera distinta para producir diferentes insumos. Quizá una maquinaria al producir determinada cantidad de pantalones de mezclilla aprovecha mejor que otras la electricidad (kilowatts/unidad), pero no la tela (m^2/unidad), y tenga un desempeño similar en el uso de la pintura (ml/unidad). Entonces, con estas medidas se puede evaluar qué maquinaria genera la combinación de insumos menos costosa.

Incluso, existen situaciones en las áreas económico administrativas en las que la relación entre la variable independiente y la dependiente se mantiene relativamente constante, de manera que se comportan como una razón. También debe considerarse que cada variable tiene una unidad de medida distinta, por lo que es necesario recurrir a unidades intensivas para establecer el grado de "concentración" de una variable en otra. Como comenté en la sección anterior, este tipo de razones se presentan en algunos productos o establecimientos, en los que cada trabajador aporta cantidades similares a la producción o ventas totales. Ejemplos parecidos se presentan cuando la eficiencia de una maquinaria se mantiene prácticamente constante, de manera que al utilizar determinada cantidad de un insumo la cantidad de producción generada es constante.

Aunque es frecuente que en las situaciones cotidianas se presente una relación constante entre las variables independiente y dependiente, las razones también pueden ser utilizadas como promedios. Muchas veces se ha interpretado a los promedios como una "repartición equitativa", o como un "punto de balance". Sin embargo, este tipo de enfoques dejan de lado la relación proporcional entre los totales acumulados de dos cantidades, así como la posibilidad de utilizar las razones para comparar propiedades agregadas entre grupos de tamaño desigual (Cortina, Saldanha y Thompson, 1999).

De esta manera, los promedios entendidos como razones pueden ser usados como medidas que sirven como indicadores de bienestar. Como ejemplo tenemos medidas per cápita entre las que se incluyen, consumo de calorías, gasto médico, gasto educativo, ingresos, etc. En ocasiones estas medidas se aplican utilizando la población y el valor total de una variable a nivel nacional; sin embargo, en otras se selecciona a determinado sector de la población, tomando en cuenta sus niveles de ingreso, su grupo étnico, la región en que viven, etc. En cualquier caso, entendidas como una característica poblacional, y no como un reparto equitativo, estos promedios también son útiles para evaluar en qué rubros determinado país tiene un rendimiento similar o diferente a otros países (Ray, 1998).

Los ejemplos anteriores muestran que las razones y las medidas de intensidad resultan útiles en las áreas económico administrativas porque permiten contar con un criterio para evaluar el desempeño de una institución o de un país. Además tal desempeño puede compararse con el de otras entidades, o bien, con los que se han dado en el pasado.

Puede advertirse que tanto en el caso de las razones como de los promedios se asume que la relación entre dos variables se mantiene constante. En el caso de las razones internas (Freudenthal, 1983), esa relación expresa que existe cierto factor que si se multiplica por una de las cantidades permite obtener la segunda (ej. 272 pantalones es el doble de 136). Así, en este tipo de razones la relación entre la variable independiente y la dependiente se mantiene constante, sin importar la magnitud de la variable independiente, es decir,

$$\frac{y}{x}=k, \text{ para toda } x, \text{ donde } k \text{ es constante, } y \text{ es número real}$$

Así, otra definición general de razón podría ser la de un conjunto de parejas de números tales que existe un factor real constante que multiplicado por uno de los números, permite obtener el segundo (si $y/x=k$, entonces $y=kx$ para toda x). Quizá la principal fortaleza de esta definición de razón es que permite concebirla como una relación multiplicativa que puede presentarse entre parejas de números, e incluso lleva implícita la relación recíproca entre esas parejas (si $y/x=k$, entonces $x/y=1/k$ y además $x=(1/k) \bullet y$, para toda x).

La diversidad de fenómenos y situaciones que tal definición ayuda a conceptualizar es muy amplia, pues definir al factor *k* como un número real permite que la relación entre ambos números pueda expresarse por medio de números naturales, enteros, racionales.

Streefland (1984,1985) ha reconocido a “la tabla de razones” y la “línea numérica con escala doble” como medios instruccionales útiles para apoyar la conceptualización de las relaciones proporcionales entre los alumnos así como sus contribuciones a las discusiones colectiva. En la figura 5.7 se utilizan los medios propuestos por Streefland para mostrar una relación proporcional entre la producción de pantalones de una empresa y el número de empleados que contrata. Como puede observarse, las parejas de números pertenecientes a sistemas diferentes mantienen una relación constante entre sí.[8]

Figura 5.8 Tabla de razones y línea numérica con escala doble

Producción	204	476	612	816	1020	1156
Trabajadores	3	7	9	12	15	17

Producción	204	476	612	816	1020	1156
Trabajadores	3	7	9	12	15	17

[8] . Para conocer más sobre investigaciones que muestran el tipo de razonamientos con los que ciertos grupos de estudiantes se aproximaron a las razones, consúltese Cortina (2006).

Otra de las ideas que ha sido propuesta para apoyar la discusión colectiva del concepto de razón ha sido la de las fracciones equivalentes (Cortina, 2008). Ello es así porque por medio de este tipo de fracciones se puede mostrar el carácter constante de la relación multiplicativa entre parejas sucesivas de cantidades, de una manera muy similar a lo que sucede con las razones que pueden expresarse como números racionales. Resulta entonces relevante explorar el carácter comparativo de las fracciones, pues sirven de apoyo para establecer la relación multiplicativa entre dos cantidades y para posteriormente reconocer otras parejas que guardan la misma relación multiplicativa, lo cual puede ser utilizado para identificar relaciones proporcionales en las que incluso se utilizan sistemas de medición diferentes (razones externas; Freudenthal, 1983).

5.4.3 Fracciones como comparadores

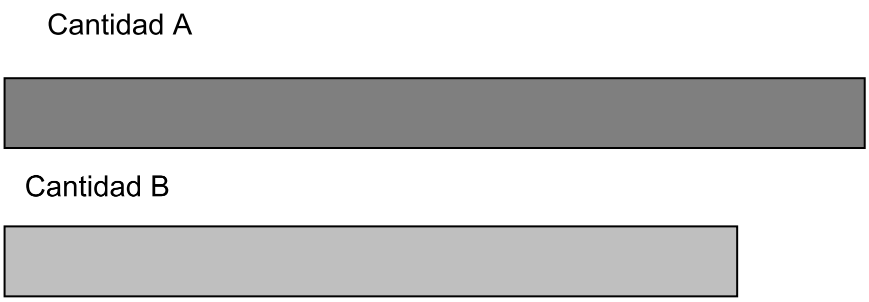
Como mencioné en la sección 5.2 para Freudental (1983, p. 149) la "noción de fracción como comparador" se fundamenta en "el poner magnitudes en razón, una contra la otra". O bien, siguiendo a Thompson y Saldanha (2003, pag. 107) "el sistema de operacionales conceptuales que compone el esquema de fracción se basa en concebir dos cantidades como estando en una relación recíproca de tamaño relativo: *El que la cantidad A sea $1/n$ del tamaño de la cantidad B significa que B es n veces del tamaño de la cantidad A. El que la cantidad A sea n veces del tamaño de la cantidad B significa que B es $1/n$ del tamaño de A*"

Este modelo de fracción como comparador de Freudenthal (1983) y Thompson y Saldanha (2003), resulta importante porque como veremos en las siguientes secciones de este capítulo puede resultar de gran utilidad para comprender las fracciones decimales y los porcentajes, e incluso otro tipo de relaciones multiplicativas. *En los capítulos 8 y 10, podrá apreciarse cómo las relaciones multiplicativas entre fracciones pueden hacerse bastante complejas, pero también podrá advertirse que cuando los alumnos logran poco a poco desarrollar flexibilidad en su comprensión de dichas relaciones podrán emplear esa habilidad para entender otras relaciones multiplicativas.*

Ahora bien, dentro de las áreas económico administrativas no es fácil encontrar situaciones en las que se usen fracciones comunes para apoyar el razonamiento de los estudiantes. Casi siempre las fracciones que se usan en dichas áreas son decimales; no obstante, podrían realizarse discusiones grupales en las que se utilicen materiales unidimensionales (popotes, varillas) para introducir la noción de fracción como comparador y a las unidades fraccionarias como unidades de medida independientes del entero.

Posteriormente se podrían generar discusiones en las que se compararan multiplicativamente los datos de los costos de diferentes estrategias de ventas o mercadotecnia, las alternativas tecnológicas o de capacitación de personal, los costos de los diferentes insumos. De esa manera, se podría establecer cuántas veces equivale una cantidad a la otra, y así se podría elegir entre las opciones que ofrecen un mayor ingreso[9] o un menor costo. En este tipo de situaciones no se compararía un “entero” con una unidad fraccionaria, sino una cantidad cualquiera *A* con otra cantidad cualquiera *B* (ver figura 5.8).

Figura 5.9 Comparación de cantidades no fraccionarias



Al comparar A y B se tienen dos casos que no corresponden a fracciones exactas: A/B>1 y B/A<1

Dentro de los conceptos prácticos en los que podría utilizarse tal tipo de actividades instruccionales y que, además, resultan muy importantes para la economía internacional está el tipo de cambio real, el cual representa el valor de una canasta de bienes nacionales en términos de una canasta bienes extranjeros. Ambas canastas deben estar expresadas en la misma moneda (Bernanke, 2007). En otras palabras, el tipo de cambio real toma como unidad de medida el valor de la canasta de bienes extranjeros y lo compara multiplicativamente con el valor de la canasta de bienes nacionales. En consecuencia, el tipo de cambio real expresa el factor por el cual es necesario multiplicar la canasta extranjera para que equivalga a la canasta nacional. Cuando los bienes que componen la canasta son similares, el tipo de cambio real puede arrojar información que ayude a las

[9] Se refiere a las entradas netas que recibe una empresa sin considerar los costos en los que ha incurrido (Parkin, 2006)

empresas a decidir, por ejemplo, dónde es conveniente comprar o vender ese conjunto de bienes o insumos.

Para clarificar la utilidad y la interpretación del tipo de cambio real analicemos un ejemplo. Supóngase que un dólar estadounidense equivale a trece pesos mexicanos[10]. Además se quiere decidir dónde comprar una canasta de bienes muy similares producidos tanto en México como EU. Digamos que la canasta en EU cuesta US$137 y que en México cuesta Mex$356.2, ¿Dónde se compraría la canasta?

La comparación sólo puede realizarse si los precios de ambas canastas están expresados en la misma moneda así que:

US$137 • 13 Mex$/US$=Mex$ 1781

Y luego al calcular el tipo de cambio real comparamos el valor de la canasta nacional en términos de la extranjera:

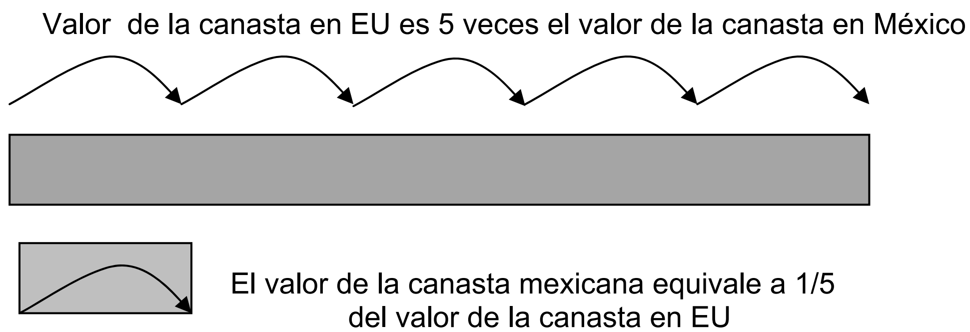
Mex$356.2/Mex$1781= 0.2=1/5

También puede calcularse el tipo de cambio real desde la perspectiva extranjera:

Mex$1718/Mex$356.2= 5

Quizá fue evidente desde la presentación de los datos que era preferible adquirir la canasta en México, sin embargo, aquí nos importa dar una interpretación al tipo de cambio real, para lo cual hay dos alternativas. Si se toma como referencia el valor extranjero de la canasta entonces, el tipo de cambio real expresa que el valor de la canasta mexicana es la quinta parte del valor de la canasta en EU, o bien, que es suficiente la quinta parte de una canasta de EU para comprar una canasta en México. Y si se toma como referencia el valor nacional de la canasta, se expresa que el valor de la canasta en EU es cinco veces el valor de la de México.

Figura 5.10 Tipo de cambio real



[10] El tipo de cambio nominal es el numero de unidades de una moneda extranjera que pueden ser comprados con una unidad de la moneda nacional (Bernanke, 2007)

Como puede apreciarse, incluso cuando se ha elegido una canasta como unidad de referencia, es posible dar dos interpretaciones del tipo de cambio real, pues una interpretación se da desde el punto de vista de la que tiene mayor valor y otra desde la que tiene menor valor. Dada la comparación del valor de una canasta de bienes en dos diferentes países, la discusión grupal de la información sobre el tipo de cambio real podría ser una actividad provechosa para introducir instruccionalmente las fracciones como comparadores a alumnos de las áreas económico administrativas

Otro concepto en el que interesa saber cuántas veces es más grande una variable que otra, y que puede resultar útil para discutir colectivamente la noción de fracción como comparador es la medida de riesgo de diferentes activos[11]. Adquirir un activo que tenga un rendimiento, valor o precio esperado[12] muy alto podría parecer muy atractivo pero, también hay que tomar en cuenta que en diferentes periodos el valor de tal activo va a tener variaciones, a veces su valor será bajo y a veces alto, de manera que también es importante conocer qué tanto se aleja el valor del activo en un periodo del valor esperado, en otras palabras, es importante conocer su desviación estándar[13]. Si se espera que el valor del activo se aleje mucho del valor esperado, generalmente se le considera un activo muy riesgoso, de lo contrario se le considera poco riesgoso.

Cuando se compara el valor esperado del activo contra la desviación estándar, se puede establecer un criterio para decidir si el valor esperado es lo suficientemente más grande que el riesgo como para que un inversionista decida si adquirir ese activo o no (Bernanke, 2007).

La relación entre activos y pasivos[14] con los que cuenta una empresa, es otra comparación entre dos variables que puede resultar relevante para presentar la noción de fracción como comparador. Esta relación es importante pues ayuda a establecer las posibilidades que tiene una institución para administrar sus deudas u otro tipo de responsabilidades financieras. Es claro que entre mayores sean los

[11] Se refiere a las diferentes posesiones de una persona o empresa, dentro de los cuales está el dinero, los bienes inmubles, las acciones, bonos, etc., y cualquier otro medio en el cual se deposita valor. (Bernanke, 2007)

[12] La tasa de rendimiento de un activo es la tasa de incremento en su valor por unidad de tiempo. Por supuesto el retorno de un activo no siempre es conocido con anticipación, así que los dueños de los activos deben de tomar decisiones sobre la compra y venta de estos activos basados en sus rendimientos esperados (Bernanke, 2007)

[13] El valor que se espera que la variable se desvíe de su tasa de rendimiento esperado (Bernanke, 2007)

[14] En general se refiere al conjunto de deudas de un individuo o empresa (Bernanke, 2007)

activos con respecto a los pasivos la empresa tendrá mayor flexibilidad para hacer frente a sus compromisos.

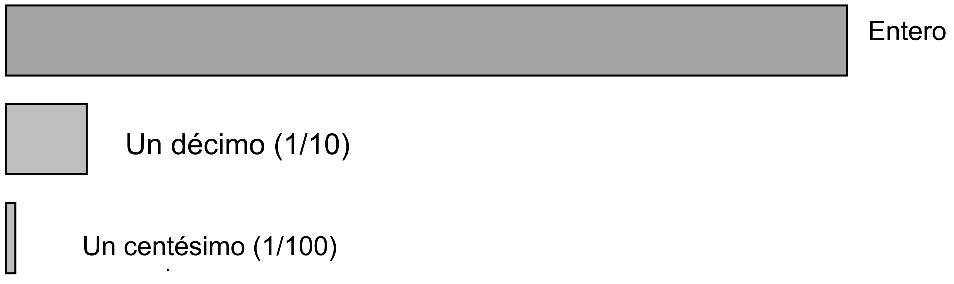
Como puede apreciarse en los tres tipos de conceptos que hemos mencionado anteriormente es indispensable que los profesionistas puedan entender a las comparacionales que involucran a un cociente, no como una división o como una partición de otra cantidad sino, más bien, como la comparación de dos magnitudes. Esta idea, aparentemente sencilla, es importante porque cuando una persona concibe un cociente exclusivamente como una división o partición, y deja de comparar cantidades en términos de "mayor" o "menor", puede aprovechar tal cociente para comparar dos cantidades en términos relativos, de esa manera gana la posibilidad de saber si una variable es un número de veces suficientemente veces más grande que otra como para mantener o cambiar su elección.

5.4.4 Fracciones, expresiones decimales, porcentajes y elasticidades

5.4.4.1 Fracciones y expresiones decimales

Las fracciones decimales también se apoyan en el concepto de fracción como comparador, pues se sigue concibiendo a dos magnitudes en una relación relativa, en este caso decimal. Es decir, si una magnitud A es un décimo de una magnitud B, la magnitud B es diez veces la magnitud A. Esta relación puede darse en términos de otras potencias de diez (i.e. $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$, etc). Dada esta relación relativa, para presentar este concepto también pueden aprovecharse recursos instruccionales similares a los que se usaron para presentar otro tipo de fracciones, como las unidades fraccionarias externas al entero propuestas por Freudenthal (1983) y Thompson y Saldanha (2003)

Figura 5.11 Fracciones decimales



Otra característica importante de las fracciones decimales es que se les puede representar usando el sistema de posición decimal para generar las llamadas expresiones decimales, en los que cada posición a la derecha tiene el valor de un décimo de la posición precedente. ($\frac{1}{10}$=0.1, $\frac{1}{100}$=0.01, $\frac{1}{1000}$=0.001).

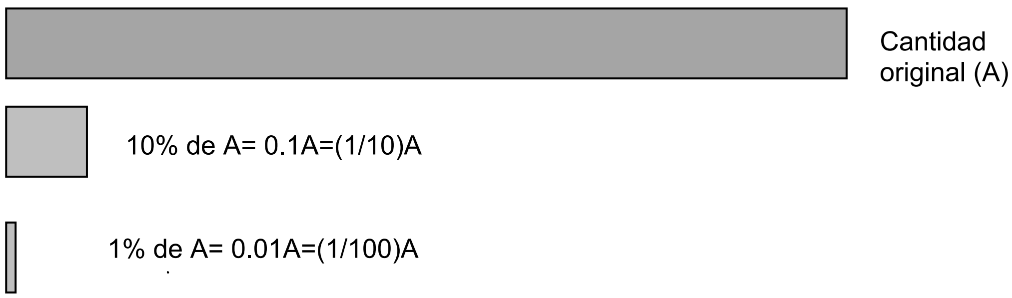
La relevancia de las fracciones y las expresiones decimales dentro de las áreas económico administrativas se puede apreciar cuando se piensa que la totalidad de las expresiones monetarias, cantidades intensivas y las diversas unidades de medida continuas utilizan la base y la nomenclatura decimal tanto en México como en la mayor parte del mundo. Además, muchos de los cálculos relacionados con operacionales mercantiles utilizan las expresiones decimales (Bernanke, 2007; Parkin, 2007; Mankiw, 2007).

5.4.4.2 Porcentajes

Aunque en los cálculos mercantiles y administrativos se utilicen expresiones decimales, las situaciones y resultados suelen expresarse en términos de "porcentajes", es decir en términos de un sistema de medición que toma una cantidad cualquiera (A) y establece a su centésima parte (0.01A) como unidad de medida. A ésta unidad se le llama "uno por ciento" (1%, uno de cien). Así, la cantidad original corresponde al cien por ciento (100%), y otro tipo de cantidades serán medidas comparándose con el uno por ciento. Si estas cantidades son menores que la cantidad original, corresponderán a un porcentaje menor al 100%, pero si son mayores que la cantidad original corresponderán a un porcentaje mayor al 100%.

La necesidad de definir al 1% como la centésima parte de una cantidad original (0.01A), hace que exista un vínculo estrecho entre porcentajes, números y fracciones decimales, y sugiere nuevamente la pertinencia del modelo de fracciones externas al entero propuesto por Freudenthal (1983) y Thompson y Saldanha (2003) como una herramienta instruccional útil para introducir los porcentajes, con la diferencia de que en este caso la cantidad equivaldría al entero, y el 1% equivaldría a la centésima.

Figura 5.12 Porcentajes



Una vez que se concibe a los porcentajes como fracciones comparativas, también es posible concebirlos como razones en las que al menos dos parejas de números guardan la misma relación multiplicativa entre sí, por lo que parece que también podrían aprovecharse instruccionalmente los recursos de la tabla numérica y la línea de escala doble propuestos por Streffland (1984,1985) y Cortina (2006) para apoyar el que los estudiantes razonen sobre el tema de las razones.

Considérese como ejemplo la razón representada por: $\frac{98}{280} = \frac{35}{100}$. La expresión anterior indica que la relación multiplicativa que guardan los componentes de estas dos parejas de cantidades es la misma, es decir, que la relación que hay entre 35 y 100 unidades es la misma que hay entre 98 y 280 unidades. ¿Cómo podría comprobarse? De las diferentes alternativas posibles[15], la que es relevante para el tema de porcentajes apuntaría que en 35 unidades la centésima parte (1%) de 100 se puede iterar 35 veces, así que la centésima parte de 280 tendría que poder iterarse 35 veces en 98, al realizar las operacionales necesarias se puede verificar que esto es efectivamente cierto.

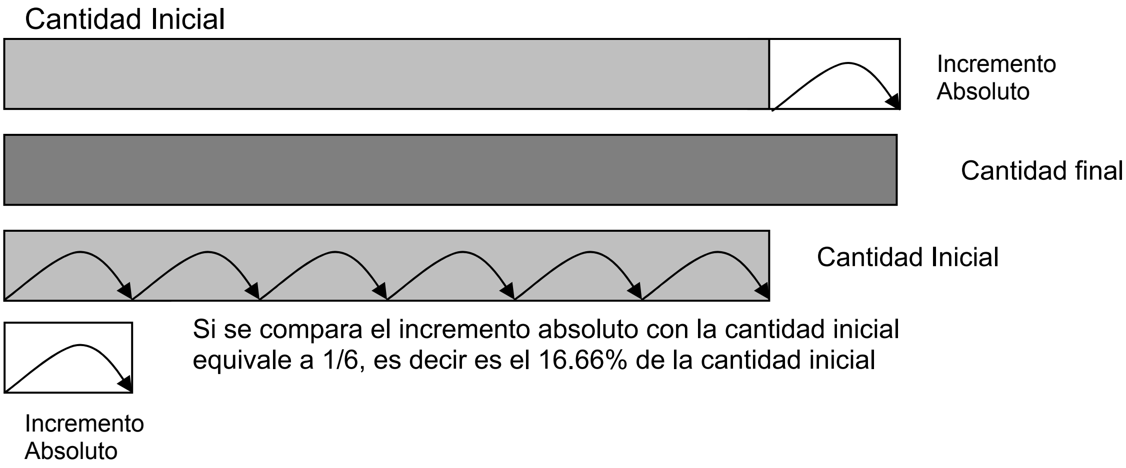
Las aplicaciones de los porcentajes dentro las áreas económico administrativas también son muy diversas pues son utilizados para expresar las fracciones que corresponden a los costos de los diferentes componentes de un producto, las tasas de interés, comisiones y créditos. En estos casos los porcentajes simplemente implican una relación relativa directa entre dos cantidades; por ejemplo, el costo del plástico en la elaboración de una computadora podría corresponder al 15% del costo total. Tal variedad de situaciones pueden servir para negociar con los alumnos el concepto de porcentajes. Se podrían presentar a los jóvenes series de datos sobre costos, impuestos o ingresos en los que se analizara qué cantidad se emplea como unidad (100%) y el porcentaje de esa unidad que representa otra cantidad distinta.

También hay casos en los que interesa analizar el crecimiento de una variable y expresarlo en términos porcentuales; por ejemplo, a una empresa le interesará comparar las tasas de crecimiento de los precios de sus productos contra el crecimiento de los precios de sus insumos a lo largo de varios periodos de tiempo, pues estos precios no son estáticos y pueden influir sobre sus ganancias. Sin embargo, a la empresa no le interesará comparar el cambio

[15] Comparar multiplicativamente numeradores con numeradores y denominadores con denominadores; obtener el número decimal que es el resultado de dividir numeradores entre denominadores; comparar los recíprocos en los que se dividiría denominador entre numerador.

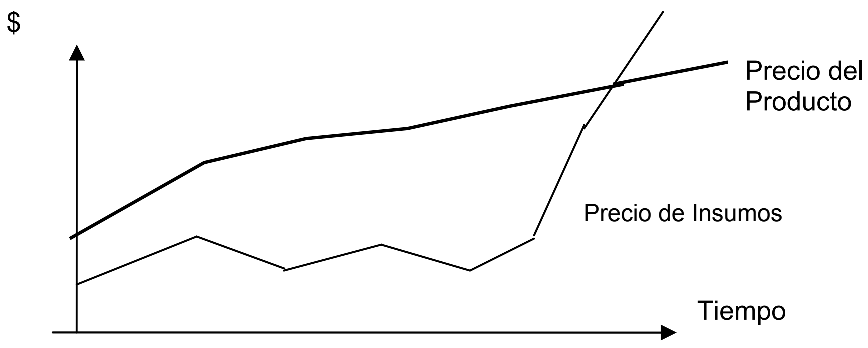
absoluto (valor final menos inicial, $\Delta x=x_1-x_0$) en cada variable pues el valor inicial del producto y los insumos naturalmente tienen un punto de partida diferente. Más bien, a la empresa le interesará establecer si la magnitud de esta variación fue importante o no, es decir, le interesará conocer el cambio relativo (porcentual), que equivale a la comparación del cambio absoluto con el valor inicial de una cantidad ($\underset{\cdot}{\Delta}x=\Delta x/x_0$) (ver Figura 5.12)

Figura 5.13 Incremento porcentual



Usando el crecimiento porcentual se podrá identificar la magnitud relativa de un cambio en cada unidad de tiempo, si los costos crecen de forma "más acelerada", es decir, si crecen en un porcentaje mayor en cada periodo de tiempo, se puede anticipar que eventualmente alcanzarán a los precios del producto, así que la empresa puede tomar las medidas necesarias para reducir esta tendencia, a fin de evitar pérdidas. Pero si los precios crecen a un ritmo más acelerado, la empresa tendrá que decidir cómo usará los recursos que genera esa oportunidad. De esta manera, dependiendo de cuál ritmo de crecimiento porcentual sea más acelerado, los beneficios de la empresa podrían afectarse (Ver figura 5.13)

Figura 5.14 Evolución de precios en el tiempo



Otro ejemplo que puede apoyar la discusión colectiva del análisis de tendencias de crecimiento porcentua es el del tipo de moneda en el cual se encuentran la deuda y los ingresos de una empresa. Considérese un caso en el que una moneda A se está devaluando rápidamente con respecto a otro tipo de moneda B, la cual es usada mundialmente, como el dólar. Si hay una moneda C que se aprecie con respecto a la moneda B, resultaría beneficioso para la empresa que su deuda estuviera localizada en términos de la moneda A, la cual esta perdiendo valor. Sin embargo, sería recomendable que los activos o los ingresos se acumularan usando a la moneda C, que es la que está ganando valor frente a otras. De esta manera, la empresa podría lograr que el ritmo de crecimiento de su deuda se viera disminuido mientras que el ritmo crecimiento de sus activos se apreciara. (Bernanke, 2007)

A nivel de política macroeconómica, el análisis de ritmos de crecimiento porcentual es clave para determinar cómo evolucionan ciertas variable, como el poder adquisitivo de los trabajadores, los costos de las empresas o el empleo. Si los salarios crecen porcentualmente más rápido que el crecimiento porcentual esperado de los precios, el poder adquisitivo de los trabajadores crece, pero entonces los costos estarían creciendo más de lo esperado por lo que las empresas reaccionarán despidiendo gente o diminuyendo el número de horas en que contratan a cada trabajador. Por otro lado, cuando los salarios crecen menos que los precios, el poder adquisitivo de los salarios caerá, pero entonces los costos disminuyen y las empresas están en posibilidad de contratar más personas. Así, lo deseable es que salarios y precios crezcan a un ritmo muy similar para que de esa manera se minimicen las consecuencias en el poder adquisitivo de los trabajadores, los costos de las empresas o el empleo (Bernanke, 2007).

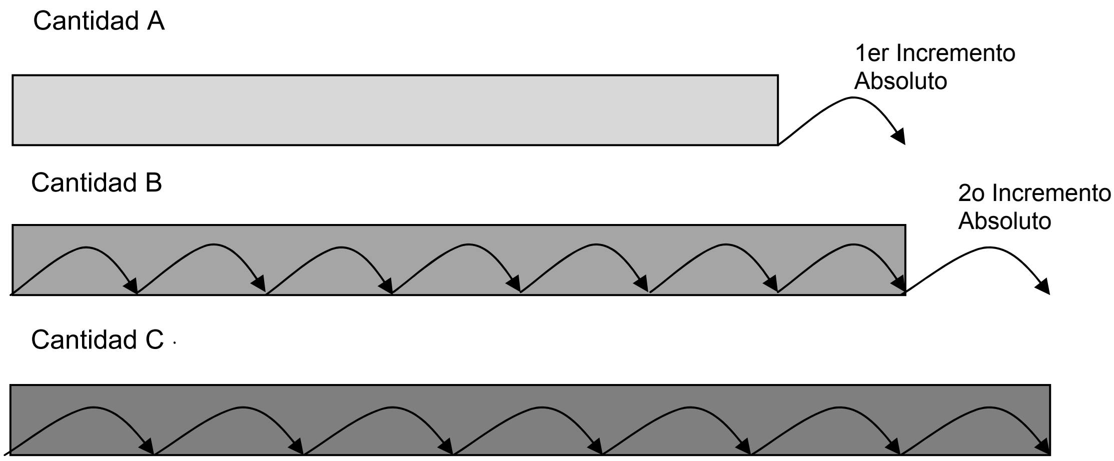
Uno de los usos más relevantes y extendidos de los porcentajes y las expresiones decimales es el cálculo del interés compuesto. El concepto anterior significa que cuando una persona hace un depósito bancario o contrae una deuda, el valor de dicha cantidad se incrementará en un porcentaje constante en cada periodo de tiempo. De esta manera, aunque la cantidad total de dinero acumulada crezca, la relación multiplicativa que hay entre las cantidades correspondientes a dos periodos sucesivos se mantiene constante a lo largo del tiempo. Por ejemplo, si una persona hace un depósito bancario de $110 000, y se le ofrece el 4% de interés, el primer mes contará con $114 400, y el segundo con $118 976.

Si se comparan sucesivamente estas cantidades se apreciará que ambas guardan la misma relación multiplicativa:

$$\frac{114400}{110000}=\frac{118976}{114400}=1.04$$

Como veremos en el capítulo 6, el caso del interés compuesto puede representar un reto para una fracción importante de estudiantes que están acostumbrados a establecer relaciones multiplicativas únicamente entre dos cantidades. Por esa razón, amerita una mención y un tratamiento instruccional específico. Quizá podría resultar provecho extender el modelo de Freudenthal (1983) y Thompson y Saldanha (2003) para discutir con los alumnos la comparación multiplicativa entre más de dos cantidades.

Figura 5.15 Tasas de interés compuestas



Si se deposita una cantidad inicial A y se acuerda con el banco una tasa del 16.66% mensual, el segundo mes se añadirá un incremento absoluto equivalente al 16.66% de A, por lo que en total se tendrá una cantidad B equivalente al 116.66% de A (7/6 de A).
Luego, en el tercer mes se añadirá un incremento absoluto equivalente al 16.66% de B, por lo que en total se tendrá una cantidad C equivalente al 116.66% de B (7/6 de B).

5.4.4.3 Elasticidad

Un último concepto que muestra el alcance de las relaciones multiplicativas dentro de las disciplinas económico administrativas es la medición de la sensibilidad de una variable a cambios en otra. Este concepto se conoce en la terminología económica como *elasticidad* (Parkin, 2007; Mankiw, 2007). Una de las aplicaciones más importantes de la elasticidad se encuentra en la definición de las estrategias de precios de una empresa: si baja el precio del artículo, ganará clientes, pero el ingreso que le proporciona cada unidad caerá. Si aumentan los precios, perderá clientela pero obtendrá más ingresos en cada unidad vendida. La empresa tiene que encontrar una forma de medir qué tanto cambiará la clientela cuando hay una variación en sus precios.

No tiene sentido comparar directamente el *tamaño* de un incremento en precio con el *tamaño* de un incremento en cantidades, porque están expresados en unidades diferentes. Si se comparan dos incrementos en unidades diferentes ocurriría lo mismo que con las unidades intensivas, razones o las tasas de cambio variable, en las que únicamente se expresa un movimiento simultáneo y proporcional de dos cantidades. Además, como mencionamos anteriormente, los cambios absolutos dicen poco sobre la magnitud de la variación de una cantidad. Únicamente cuando se comparan con el valor original de esa cantidad se puede saber si tal variación fue considerable o no. Debido a estas razones, si la empresa se encuentra interesada en comparar el tamaño las variaciones en la clientela ante cambios en precios, no sería pertinente el uso de cambios absolutos. En lugar de ellos, convendría utilizar los cambios relativos, tanto de los precios como de las cantidades (incrementos porcentuales).

La elasticidad de precio de la demanda es entonces el cociente del cambio porcentual en la cantidad vendida de un producto ante un cambio porcentual en el precio (Parkin, 2007; Mankiw, 2007). En otras palabras, la elasticidad nos proporciona una manera de cuantificar qué tan grande es el cambio porcentual en cantidades, comparado con el cambio porcentual en precios:

$$\eta = \frac{\Delta\% \text{ cantidad}}{\Delta\% \text{precio}}$$

En la literatura económica se han caracterizado tres tipos de elasticidad:

1) Si $\eta > 1$, se conoce como el caso elástico y tiene como implicación que $\Delta\%cantidad > \Delta\%precio$. Esta situación implica que si la empresa incrementa sus precios en cierto porcentaje, la cantidad vendida del producto se reducirá en un porcentaje mayor. O bien que si disminuye sus precios en cierto porcentaje, la cantidad vendida del producto incrementará en un porcentaje mayor. Este tipo de situaciones se da cuando el público percibe que dos o más productos en competencia son fácilmente sustituibles entre sí, por lo que un pequeño incremento porcentual en el precio del producto de la empresa tendrá como consecuencia un descenso en la cantidad vendida del producto en un porcentaje mayor, pues los clientes comprarían otros productos. Por otro lado, un pequeño decremento porcentual en el precio del producto de la empresa llevaría a un

incremento porcentual mayor en las ventas, pues más personas adquirirían el producto debido a la reducción de precio.

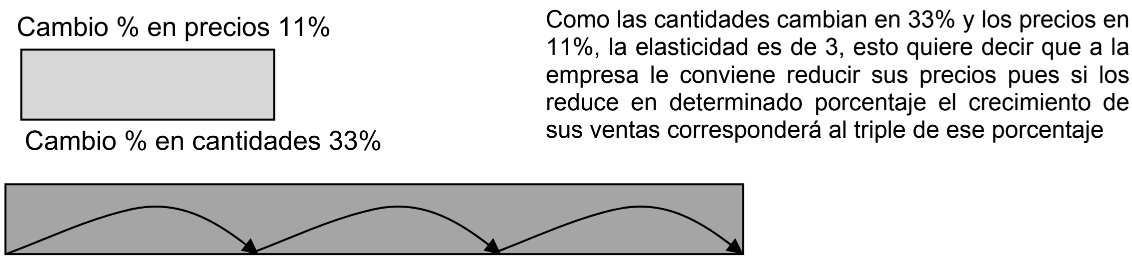
2) Si $\eta < 1$, se conoce como el caso inelástico y tiene como implicación que Δ*%cantidad<*Δ*%precio*. Esta situación implica que si la empresa incrementa sus precios en cierto porcentaje, la cantidad vendida del producto se reducirá en un porcentaje menor. Por otro lado, si la empresa reduce sus precios en cierto porcentaje la cantidad vendida del producto se incrementara en un porcentaje menor. Este tipo de situaciones se da cuando el público percibe que el producto no es fácilmente sustituible por otro así que, aunque el precio aumente de forma considerable, la cantidad vendida se verá reducida en un porcentaje menor. Por otro lado, como no hay mucha competencia para la empresa, la mayor parte de sus clientes le compran sin importar si el precio baja o se incrementa, así que si la empresa decide bajar sus precios en cierto porcentaje, el incremento porcentual de su clientela será pequeño.

3) Si $\eta = 1$, se conoce como el caso de elasticidad unitaria y tiene como implicación que Δ*%cantidad=*Δ*%precio.* Esta situación implica que si la empresa incrementa sus precios en cierto porcentaje, la cantidad vendida del producto se reducirá en el mismo porcentaje. Este tipo de situaciones son raras, pero se dan cuando ante un cambio porcentual en precios el público responde con un descenso en la cantidades vendida del producto en el mismo porcentaje.

Entonces, la estrategia de precios que le conviene seguir a la empresa para aumentar sus ingreso depende de la elasticidad de precio de la demanda de su producto. Si encuentra que está en una situación en la que la elasticidad es mayor a uno, le convendrá bajar sus precios, pues ante una disminución en precios porcentualmente “pequeña” tendrá una gran incremento porcentual en clientela, por lo que sus ingresos crecerán. En contraste, en esta situación no resulta conveniente subir precios, pues la empresa perdería un gran porcentaje de clientes y sus ingresos caerían.

Si la empresa está en una situación en que la elasticidad es menor a uno, le convendrá subir sus precios, pues aunque éstos tengan un “gran” crecimiento porcentual, la disminución de clientela será porcentualmente “pequeña”; de manera que aunque venda las más caro, sus clientes seguirán comprando y sus ingresos crecerán. Cuando se tiene un producto con este tipo de elasticidad, a la empresa no le conviene bajar precios pues perdería un gran porcentaje del valor monetario para ganar sólo un porcentaje pequeño de clientes. Como he mencionado anteriormente valdría la pena explorar la utilidad del modelo de Freudenthal (1983) y Thompson y Saldanha (2003) para introducir instruccionalmente y discutir de manera colectiva los cambios porcentuales.

Figura 5.16 Elasticidad precio de la demanda



A pesar de que la elasticidad puede parecer muy compleja en un primer momento (es una comparación entre dos comparacionales), el análisis anterior muestra que en realidad se asemeja al resto de las relaciones relativas entre dos cantidades: En cada una de ellas se define una magnitud que será medida, y otra que será utilizada como unidad de medición. Cuando se multiplica (o se itera) la unidad de medida por cierto factor, se puede encontrar cuántas de estas unidades y de sus fracciones son necesarias para ser equivalentes al objeto a medir. Parece así que la comprensión de la medición es fundamental para poder asimilar conceptualmente el resto de las relaciones multiplicativas.

Nuevamente la introducción instruccional de este tipo de conceptos en el salón de clases podría apoyarse utilizando el modelo de Stephe (2002) y además empleando series de datos empresariales que llevaran a los alumnos a considerar el tipo de elasticidad que tienen los clientes de la empresa que se analiza.

5.4.5 Medición

Medir se ha definido en ocasiones como la “acumulación de ciertas unidades” (Thompson, 1996; Thompson y Saldanha, 2003). Esta definición *quizá* sea apropiada los casos en los que la unidad es “discreta” (muebles, libros, frutas, animales, etc). No obstante, en otras situaciones medir implica:

1) Que un grupo de personas se ponga de acuerdo sobre la magnitud[16] que se utilizará como unidad referencia

2)Iterar esa unidad para que pueda compararse con cierta propiedad de otro objeto

[16] Aquí es muy importante aclarar que una magnitud es una propiedad de un fenómeno u objeto que no ha sido cuantificado pero que puede ser comparado con el mismo tipo de propiedad de otro objeto. Por ejemplo, la altura de una montaña es una longitud que puede ser comparada con la altura de una persona. Es claro que la magnitud de la montaña es “grande” en relación a la de la persona.

Un ejemplo de medición en un caso continuo es el de la longitud, propiedad para la cual desde épocas muy antiguas se han tenido que definir colectivamente unidades de medida que después puedan iterarse para compararse con telas, terrenos, etc. (Collette, 1998).

Sin embargo, generalmente se pasa por alto que la unidad de medida está definida socialmente. En lugar de ello, muchas veces se le concibe *como si fuera "discreta" y existente por sí misma*, y no se toma en cuenta que la intensión original de definir una unidad de medida fue tener una magnitud estandarizada con la cual cuantificar el tamaño de otras magnitudes. Cuando se olvida que medir es comparar (Freudenthal, 1983), queda la sensación de que medir es contar: es simplemente acumular unidades de medida, lo cual es incompleto. Si la unidad de medida es definida de manera colectiva, esto le confiere un carácter contractual y relativo. En otras palabras, aunque parezca extraño, es válido examinar cuantas varas mide un rollo de tela, pero también podría compararse el rollo de tela con las varas. Medir es poner en relación una característica común a dos objetos, definiendo a uno como la unidad de medida (la que tendrá el valor de uno).

Si se lo piensa, incluso en los casos en los que hay unidades "discretas" se puede decir que medir es comparar, pues al medir tomamos la unidad "discreta" y la comparamos con el tamaño del resto del conjunto, para cuantificar qué tan grande es (al medir un conjunto de vasos comparamos el tamaño total del conjunto con el de *un vaso*.

Para las personas que cursan las carreras Económico Administrativas es muy importante ser consciente y discutir acerca del carácter contractual de la medición. Ello es así porque a diferencia de la gente que trabaja con unidades discretas y fenómenos físicos, las personas que estudian o se desempeñan laboralmente en áreas Económico Administrativas frecuentemente tendrán que proponer y justificar ante otros profesionistas los criterios elegidos para establecer las unidades que servirán para medir determinados fenómenos, que pueden considerarse *subjetivos* (ej. *la satisfacción de la clientela*). De no ser conscientes del carácter contractual de una unidad de medida, las personas la tomarán por dada y no estarán preparadas para justificar su elección. Incluso, dicho sea de paso, perderán la oportunidad de advertir el carácter contractual de la medición en la definición "arbitraria" de la unidad. No desarrollarán la capacidad de cuestionar estándares propuestos para la medición de ciertos fenómenos y de proponer alternativas.

Considérese, por ejemplo, el tipo criterios que se necesitarán para justificar la generación de unidades que se utilizarán para medir fenómenos como el valor, la satisfacción, la calidad, el bienestar, la productividad de un servicio, la sensibilidad de una audiencia a cambios en programación, el riesgo de un activo, etc. En varios de estos casos se pueden idear maneras de generar unidades, de forma que cuando se iteren proporcionen una medida del fenómeno. Tal el caso de la productividad (cantidades intensivas) o del riesgo de un activo financiero (amplitud de la desviación estándar del activo).

Instruccionalmente, a la hora de negociar con los alumnos los significados de estas unidades —socializados en el campo profesional de las areas economómico administrativas— se podrían presentar a los alumnos series de datos para los que tuvieran que crear una unidad de medida apropiada y justificaran su elección discutiendo las ventajas y desventajas de cada propuesta. Por ejemplo, en el caso de la productividad, si se elige la productividad promedio de los trabajadores como unidad de medida, tiene la desventaja de que iguala la productividad de todos los trabajadores, no brinda información que sirva para establecer ningún esquema de incentivos personalizados, y tampoco se puede detectar a los trabajadores rezagados. En cambio, un examen personal de la productividad (productividad marginal) brindaría la oportunidad de identificar qué trabajadores resultan más productivos y cuáles menos, por lo que una empresa podría identificar qué trabajadores ameritan incentivos y cuáles una capacitación especial.

Existen otro tipo de situaciones en las que un grupo de personas puede definir ciertos criterios, por ejemplo para crear un índice de calidad de un determinado tipo de productos o servicios. Una vez que se cuenta con tales criterios, se puede otorgar determinado puntaje que defina un orden o jerarquía, aunque no necesariamente un tamaño relativo.

Instruccionalmente, podrían presentarse casos a los alumnos en los que fuese necesario proponer criterios de medición para conceptos abstractos como “calidad” y generar discusiones en las que se justifique la elección de esos criterios y se explique cómo ayudan a establecer un orden entre los diferentes objetos a medir. Piénsese por ejemplo en un índice de calidad de servicio al cliente generado por un grupo de restaurantes. Sus criterios serán subjetivos y difícilmente podrá considerarse que los puntajes obtenidos serán resultado de la iteración de determinadas unidades de calidad, o que un restaurante tiene dos veces y media más calidad que otro. No obstante, tales mediciones resultarán útiles para diferenciar la calidad de servicio entre varios establecimientos.

También existen casos en los que aunque no se emplean unidades muy complejas, como por ejemplo el valor de un producto o servicio. Encontramos que el carácter contractual de la medición cobra un énfasis especial, pues difícilmente puede decirse que el valor es la iteración de la unidad de medida acordada. Por ejemplo, el valor de un corte de pelo no es la iteración de un pedazo de metal.
Para "medir" el valor se requiere de un "doble contrato" pues es necesario que:

1) Las personas involucradas lleguen a acuerdos sobre cuál es la unidad de medida que utilizarán
2) También se pongan de acuerdo sobre la medida que cada uno percibe.

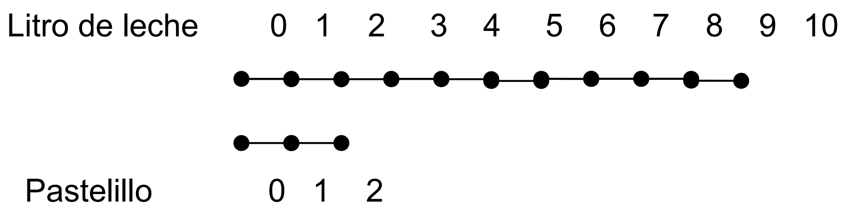
Por supuesto, nos estamos refiriendo a que al realizar un intercambio, las personas involucradas deben definir el objeto usado como medio de pago (pueden ser otros productos o monedas) y además negociar para llegar a un acuerdo sobre el precio que convenga a ambas partes (Parkin, 2007)

Instruccionalmente podrían proponerse actividades a los alumnos en los que no sólo tuvieran que ponerse de acuerdo sobre la unidad de medida del valor sino en los que también tuvieran que negociar sobre el valor de un objeto o servicio a intercambiar.

A pesar del carácter contractual y subjetivo de las unidades con las cuales se miden muchos los fenómenos, y de los atributos que se miden en las áreas económico administrativas, una vez que han sido definidas, su representación bien puede hacerse de manera unidimensional (Freudenthal, 1983), como si se tratase de atributos más simples, como la longitud o el peso. Este rasgo hace posible que una vez más el modelo de comparación entre dos magnitudes unidimensionales de Freudenthal (1983) y Thompson y Saldanha (2003) se vuelva relevante para negociar con un grupo de estudiantes el significado de *la medición*.

Incluso, en el caso de fenómenos que involucran un "doble contrato", como el precio de un producto o servicio, una vez que han sido establecidas las unidades de medida, y además el comprador y vendedor han establecido el valor de dos productos, se puede conocer el precio relativo de un bien con respecto a otro.

Figura 5.17 Comparación del valor de dos productos



Como puede apreciarse, la figura 5.16 establece los valores de un litro de leche y de un pastelillo definidos en términos de una unidad de medida monetaria. Sin embargo, también podría establecerse que para adquirir un litro de leche sería necesario intercambiarlo por 5 pastelillos o bien, que para adquirir un pastelillo tendría que intercambiarse por 1/5 de litro de leche.

En síntesis muchas de las unidades utilizadas en las áreas económico administrativas tienen un carácter iterativo, lo cual ayuda a que las medidas que con ellas se obtengan puedan representarse unidimensionalmente y además se puedan establecer comparacionales multiplicativas entre sí. Pero también es muy importante recordar el carácter contractual de las unidades empleadas, pues los estudiantes y profesionistas de estas disciplinas tendrán que estar preparados para justificar los criterios con los cuales definieron esas unidades, e incluso la posición que asumieron en una negociación que buscaba definir con otras personas la medida de determinado atributo o fenómeno.

6. Evolución de las conjeturas sobre las conceptualizaciones multiplicativas de los estudiantes (primera parte)

En el capítulo anterior presenté una discusión sobre los modelos de aprendizaje de los números racionales, y señalé que es el modelo comparativo el que empleo en esta tesis. Además mostré que tal modelo esta estrechamente vinculado con las relaciones multiplicativas. Por último, expliqué cuál es la relación que determinados conceptos matemáticos guardan con las profesiones y carreras económico administrativas. Además, identifiqué las relaciones matemáticas que existen entre ellas, en particular aquellas en las que ciertas nociones implican a otras menos complejas. En este sexto capítulo presentaré las primeras dos fases del ciclo de análisis "regresivos". Comenzaré explicando la manera en la que aproveché el modelo general de las relaciones multiplicativas propuesto por Freudenthal (1983) y Thomson y Saldanha (2003) para reconocer el tipo de exploraciones que podría resultar pertinente realizar. Luego presentaré las dos primeras fases de recolección de datos que realicé y mostraré cómo esa información me ayudó a formular las primeras conjeturas sobre los conocimientos iniciales de los alumnos.

6.1 Relevancia del modelo general de relaciones multiplicativas para orientar el proceso de investigación

En el capítulo cinco comenté que para autores como Freudenthal (1983) y Thompson y Saldanha (2003) razonar multiplicativamente implica reconocer la relación recíproca que existe entre dos cantidades que se comparan. Es decir, razonar multiplicativamente implica comprender las siguientes relaciones

$$1)\ a = k \bullet b \qquad 2)\ k = \frac{a}{b},$$

$$3)\ \frac{1}{k} = \frac{b}{a}, \qquad 4)\ b = \frac{1}{k} \bullet a$$

Como se recordará la magnitud b es la que sirve de referencia y se le ha llamado *comparador* , la magnitud a es la que se mide y se le ha llamado *comparando*, finalmente el número *k,* llamado *escalar,* es el número de veces que puede repetirse el comparador en el comparando.

Tal forma de entender las relaciones multiplicativas resultó útil para esta investigación porque permitió identificar el tipo de exploraciones que podrían realizarse para ubicar las conceptualizaciones iniciales que han desarrollado los estudiantes. En concreto, dicho modelo fue útil para definir las siguientes categorías de investigación:

1) El tipo de comparaciones que realizan los estudiantes: aditivas o multiplicativas.

2) El tipo de conceptos (fracciones, porcentajes, razones) que los jóvenes logran reconocer como relaciones multiplicativas.

3) El tipo de números (enteros, fracciones propias, impropias, reales) que los estudiantes pueden utilizar como comparador, comparando y escalar.

4) La capacidad de los jóvenes para identificar la relación recíproca entre comparando y comparador (es decir, advertir que el comparando puede tomar el papel de comparador y viceversa) .

5) La manera en la que utilizan esa relación recíproca para encontrar el valor del comparador, tomando el cuenta el escalar y el comparando.

Como se verá en las siguientes secciones, durante las dos primeras fases del ciclo de análisis "regresivo" procuré enfocarme en estas cinco categorías de investigación, pues consideré que identificar el punto de partida de mis estudiantes implicaba indagar si conocían las relaciones multiplicativas, y de ser ese el caso, ubicar el tipo de contextos numéricos en los que eran capaces de reconocerlas y de emplear sus cuatro expresiones.

Esta forma de entender las relaciones multiplicativas también sirvió para dar consistencia a la investigación, pues como se recordará, el modelo de Freudenthal (1983) y Thomson y Saldanha (2003) engloba a varios conceptos (fracciones, porcentajes, razones), lo que permite que exista coherencia entre los diferentes puntos de exploración. Además, tal consistencia entre los diferentes puntos a explorar hace posible que en caso de generar una trayectoria hipotética se utilice el punto de partida de los estudiantes para vislumbrar un punto final.

Hay que agregar que, como se advertirá con mucho mayor claridad en los dos capítulos siguientes, las cinco líneas de investigación que he mencionado, el modelo de simbolización de Freudenthal (1983) y el modelo de las cuatro expresiones multiplicativas resultaron fundamentales para generar herramientas de análisis mucho más detalladas y precisas, lo cual permitió refinar las conjeturas sobre el punto de partida conceptual de los estudiantes. Sin embargo, no he mostrado en este capítulo tales herramientas, porque de hacerlo, darían la impresión de haber sido desarrolladas sin estar sustentadas en un análisis empírico. En los capítulos 6, 7 y 8 intentaré mostrar al lector que los ciclos de exploración, tanto “regresivos” como progresivos, dieron lugar a nuevos modelos de análisis de información. A su vez éstos fueron cruciales para refinar y precisar la conjetura sobre el punto de partida de los estudiantes.

En este capítulo es importante recordar que el objetivo de la investigación no fue generar una trayectoria hipotética, y mucho menos una teoría instruccional. El objetivo fue formular una conjetura empíricamente, sustentada sobre el tipo de relaciones multiplicativas que ya dominan los estudiantes universitarios de los primeros semestres y que puede servir de base para apoyar la comprensión, dentro del salón de clases, de conceptos matemáticos cada vez más complejos; en particular, de aquellos conceptos que juegan un papel muy importante en las prácticas profesionales del campo Económico Administrativo, como el de las *tasas de cambio variables*, los cuales, a su vez están fundamentados otras relaciones multiplicativas

El modelo de análisis usado para sistematizar las primeras dos fases de la investigación fue el de las cuatro relaciones multiplicativas de Freudenthal (1983) y Thomson y Saldanha (2003), además de las cinco líneas de investigación mencionadas.

6.2 Exploración inicial sobre la conceptualización de las fracciones unitarias, los porcentajes y las cantidades recíprocas

Una vez definidas las cinco líneas de investigación, en octubre de 2006, inicié el ciclo de exploraciones “regresivas” para identificar el punto de partida conceptual de los estudiantes. Como se recordará mis experiencias docentes, previas al doctorado, eran consistentes con los datos proporcionados por el INEE para los alumnos mexicanos de tercero de secundaria (Backhoff, 2006).

En mi apreciación, la gran mayoría de los alumnos de primero a cuarto semestre, e incluso algunos de los estudiantes de semestres más avanzados de las carreras de Administración, Contaduría, Ingeniería presentaban dificultades importantes para:

1) Ordenar expresiones fraccionarias y decimales
2) Establecer correspondencias entre las expresiones decimales y las fracciones decimales
3) Establecer correspondencias entre porcentajes y expresiones decimales
4) Establecer correspondencias entre los porcentajes y las fracciones decimales

Es importante señalar, que dada esta situación, mi conjetura inicial fue que si los estudiantes no habían desarrollado una conceptualización de los porcentajes y de las expresiones decimales, probablemente tampoco contaran con una conceptualización de las fracciones.

Para explorar esta posibilidad, apliqué un instrumento que contenía preguntas relacionadas con el tema de fracciones a un grupo de 30 estudiantes pertenecientes al tercer semestre de las carreras de Contaduría y Administración de Empresas. Esta serie de preguntas puede encontrarse en el Anexo B.1. Además, entrevisté a tres de ellos, dos hombres y una mujer, pertenecientes al tercer semestre de Contaduría. Los resultados obtenidos en las preguntas y en las entrevistas los analicé tratando de seguir las categorías de investigación que he mencionado en la sección 6.1. Además, me interesaba indagar sobre los cuatro rezagos típicos que he mencionado en la página anterior, pues aunque no se relacionaban con la conceptualización de las relaciones multiplicativas me parecieron temas que eran importantes de manejo de nomenclatura de los racionales.

Hubo tres preguntas cuyas justificaciones fueron de utilidad para formular conjeturas sobre el tipo de razonamientos multiplicativos que los jóvenes habían desarrollado. Para cada una de las preguntas presento los resultados obtenidos a nivel grupal, luego aquellos generados en las entrevistas y, por último, un breve análisis relacionado con las categorías de investigación.

6.2.1 Primera Pregunta

1. Juan Carlos tiene $90 000 en su cuenta de banco ¿qué cantidad de dinero equivale a

a) la mitad (1/2)? b) la tercera parte (1/3)? c) las tres quintas partes (3/5)?

d) cinco tercios (5/3)? e) Representa las cantidades anteriores en la línea siguiente

Resultados obtenidos en el instrumento

Ninguno de los estudiantes en las pruebas escritas tuvo dificultades para establecer la mitad de la cantidad y ubicarla dentro de la línea. Seis de los treinta estudiantes en las pruebas escritas no pudo establecer cuál es la tercera parte ni cuantitativamente ni en la línea. Dieciocho de los treinta estudiantes pudieron establecer la cantidad que equivalía a 3/5 del monto y ubicarla en la línea, catorce de los treinta pudieron establecer la cantidad que equivalía a 5/3 de $90 000, pero sólo once comentaron que sería necesaria una línea más grande para representar tal cantidad y de hecho la dibujaron (Ver tabla 6.1)

Tabla 6.1 Desempeño de los estudiantes en la primera pregunta de la prueba escrita

Fracciones del total de 30 estudiantes	Identificación del medio	Identificación del tercio	Identificación de 3/5	Identificación de 5/3
Cuantitativa	30/30	24/30	18/30	14/30
Dibujo	30/30	24/30	18/30	11/30

Casi ninguno de los estudiantes dio una justificación conceptual del procedimiento que siguieron para resolver el problema. Aun así, las respuestas de doce estudiantes parecía que para encontrar las 3/5 y las 5/3 del monto, habían dividió los $90 000 entre la cantidad mostrada en el denominador y habían multiplicado ese cociente por el numerador.

Cuatro de los estudiantes mencionaron que no tenía sentido obtener las 5/3 partes del monto de dinero.

Otros seis estudiantes multiplicaron directamente los $90 000 por 3/5 y 5/3 para encontrar las cantidades correspondientes a tales fracciones del monto ahorrado, pero sus respuestas no incluían una justificación lo suficientemente detallada para saber cómo concebían las fracciones al resolver este tipo de problemas.

Resultados de las entrevistas

En las entrevistas, los tres estudiantes, pudieron establecer cuantitativamente y en la línea la cantidad que correspondía a la mitad del monto ahorrado.

Dos de ellos (estudiantes I y II) pudieron resolver sin dificultades las siguientes preguntas, y de hecho para encontrar las 3/5 y las 5/3 partes multiplicaron directamente en su calculadora dichas fracciones por $90 000, en lugar de dividir primero este monto por el denominador y posteriormente multiplicarlo por el numerador. Les pregunté si tenía sentido para ellos obtener 5/3 partes del monto ahorrado y comentaron que si, pues se estaba pidiendo encontrar una cantidad mayor a $90 000.

El caso del tercer estudiante entrevistado (III) llamó mi atención porque antes de calcular la tercera parte de $90 000, intentó localizar esa fracción en la línea y primero sugirió varias posiciones mayores a la mitad del recorrido, sólo hasta que dividió $90 000 entre 3 se dio cuenta que la tercera parte del monto en realidad era menor a la mitad.

Posteriormente, para encontrar las 3/5 partes del monto ahorrado dividió $90 000 en cinco partes y luego multiplicó por tres.

Por último, antes de intentar calcular las 5/3 de la distancia del monto ahorrado, el estudiante me preguntó si se podía obtener esa cantidad pues, según él, en una unidad únicamente hay tres tercios. Le sugerí que intentara resolver el problema de todas formas, y tras aplicar los algoritmos ya mencionados, obtuvo $150 000, le pedí me explicara que significaba esa cantidad para él, y comentó que la tercera parte de $90 000 era $30 000 así que si repetía esa cantidad cinco veces se obtenían $150 000.

Información relevante para las categorías de investigación

El hecho de que doce de los estudiantes que contestaron la serie de preguntas y que intentaron obtener los 3/5 y los 5/3 de los $90 000 primero dividiera dicho monto por el denominador y luego lo multiplicara por el numerador me sugirió que tenían dificultad para utilizar como escalares a las fracciones mayores a la unidad. Probablemente, más bien las entendían como un operador algorítmico. Desafortunadamente, la mayoría de estos estudiantes no brindaron ningún tipo de simbolización externa que me ayudara a reconocer la manera en que habían conceptualizado su respuesta.

Por otra parte, el hecho de que los alumnos I y II multiplicaran directamente los $90 000 por 3/5 o 5/3, me sugirió que quizá sí entendían a estas fracciones como escalares. Además, conjeturé que para ambos estudiantes tenía sentido la posibilidad de que existiesen fracciones mayores que la unidad, y que una cantidad ($150 000) pudiera equivaler a una fracción mayor (5/3) que la cantidad original ($90 000). No obstante, en ese momento tampoco me detuve a examinar si eran capaces de simbolizar al comparador ($150 000) y al comparando ($90 000).

En el caso del alumno III, su justificación parecía apoyarse en la idea de fracción como un operador algorítmico, y no de un escalar, pues el alumno procedió primero dividiendo por el denominador y luego multiplicando por el numerador. Además, no proporcionó ninguna simbolización externa.

Además, el hecho de que el alumno III preguntase si era posible obtener los 5/3 de $90 000 hacía parecer que consideraba como fracción únicamente aquellas cantidades que fuesen menores a otra cantidad original, por lo que en el caso de este estudiante le dificultaba concebir que una cantidad ($150 000) fuese una fracción mayor (5/3) que una cantidad original ($90 000)

En breve, retomando la categoría 3 de investigación (ver sección 6.1) , es decir el tipo de números que los alumnos usan como comparador, comparando y escalar, puede decirse que tanto las entrevistas como los resultados de las preguntas aplicadas al grupo de estudiantes, sugerían que la mayoría de los jóvenes que contestaron interpretaban a las fracciones como un operador algorítmico más que como un escalar, o un número en sí mismo. Habría que agregar que el hecho de que casi ninguno brindara una justificación conceptual, proporcionaba poca información sobre la manera en que interpretaban la cantidad inicial y la final.

6.2.2 Segunda Pregunta

Durango tiene 20% de analfabetismo mientras que el DF tiene únicamente el 8% de analfabetos ¿qué entidad tiene mayor número de analfabetos?

Resultados obtenidos en el instrumento

Esta pregunta fue respondida correctamente por doce de los treinta estudiantes que resolvieron la prueba escrita. Estos doce estudiantes comentaron que la pregunta no podía responderse porque no se proporcionaba un dato sobre el tamaño de las poblaciones de ambas entidades. Sin embargo, en la gran mayoría de los casos sus respuestas se limitaron al comentario anterior, y no incluyeron ninguna justificación ni simbólica ni argumentativa. Así que, no pude formular una conjetura sobre el tipo de concepto de porcentaje con el que contaban.

El resto de los estudiantes respondieron que Durango tenía un mayor número de analfabetos porque 20% es mayor que 8%, pero no proporcionaron una justificación más detallada en su respuesta

Resultados obtenidos en entrevistas

Dos de los alumnos entrevistados (I y II) pudieron responder la pregunta correctamente además, cuando les pregunté si podían dar una justificación usando fracciones comentaron que no se podía saber si 20/100 de una cantidad desconocida eran más grandes o más pequeños que 8/100 de otra cantidad desconocida.

El alumno III también pudo contestar la pregunta correctamente, pero en su justificación utilizó la notación decimal. El alumno comentó que con la información que se brindaba no se podía establecer si 0.2 de una cantidad desconocida era mayor que el 0.08 de otra cantidad desconocida. Sin embargo, cuando se le preguntó si podía dar una justificación usando fracciones, contestó que no sabía muy bien a qué fracción correspondía cada uno de estas expresiones decimales

Información relevante para las categorías de investigación

El hecho de que dieciocho de los treinta estudiantes no pudieran contestar esta pregunta sugería que incluso suponiendo que estos jóvenes emplearan algún tipo de conceptualización de las fracciones, no estaban lo suficientemente familiarizados con ella de manera que les resultara una conceptualización útil para reconocer que cuando se realiza una partición centesimal de dos cantidades diferentes, la centésima parte de la cantidad más grande es mayor que la centésima parte de la cantidad más pequeña, y que por ese motivo al desconocer qué entidad tenía la mayor población, no podía establecerse si el 8% de la población del DF es mayor que el 20% de la población de Durango.

Por otro lado, aunque los alumnos I y II daban muestras de conocer la relación entre fracciones decimales y sus expresiones decimales, el alumno III, únicamente parecía utilizar cierta noción de orden entre las expresiones decimales. En ese momento quedó pendiente revisar si el alumno desconocía las equivalencias entre las fracciones comunes, las fracciones decimales, las expresiones decimales y los porcentajes

En síntesis, esta pregunta parecía brindar evidencia sobre la dificultad que una parte importante de los alumnos tenía para relacionar los porcentajes con las expresiones decimales y éstas con las fracciones decimales. Además, las respuestas de los alumnos también sugerían que sólo algunos reconocían que la magnitud de cierto porcentaje esta dada sólo en relación a la cantidad que se toma como referencia (o 100%). Así, no quedaba del todo claro que los alumnos reconocieran a los porcentajes como relaciones multiplicativas (Categoría 2 de investigación, ver sección 6.1)

6.2.3 Tercera pregunta

La cantidad neta que un trabajador lleva a su casa es de US$492 a la quincena, después de haberle reducido un 40% del pago bruto. ¿cuál es su sueldo bruto?

Resultados obtenidos en el instrumento

Ninguno de los treinta estudiantes a los que se aplicó la prueba escrita pudo resolver esta pregunta .

Resultados obtenidos en las entrevistas.

Únicamente uno de los tres estudiantes entrevistados pudo contestarla[1] (Alumno I). La justificación del alumno A estuvo formulada en términos algebraicos. Su manera de plantear el problema fue: $0.6x=492$

[1] Una vez terminadas todas las etapas de la recolección de datos resultó que en cuatro generaciones de estudiantes de Contaduría y Administración, con un total de 166 alumnos, únicamente dos estudiantes (1.02% del total) pudieron plantear este tipo de problemas en términos algebraicos. Este resultado es muy similar al del estudio del INEE, en donde se encontró que el porcentaje de estudiantes de tercero de secundaria en educación privada que eran capaces de resolver problemas que implicaran el planteo de una ecuación lineal fue 0.9%

Al preguntársele por qué planteaba el problema de esta manera comentó que el había definido la cantidad original como "x" pero como se le había reducido el 40%, sólo quedaba el 60% del salario original, y eso era igual a US$ 492. Al despejar la variable "x" el alumno escribió:

$$x = \frac{492}{0.6} = 820$$

Información relevante para las categorías de investigación

Con esta pregunta esperaba obtener información que me permitiera analizar la manera en que los estudiantes concebían la relación reciproca entre comparador y comparando, y si eran capaces de utilizarla para deducir uno a partir del otro (Categorías 4 y 5 de investigación, ver sección 6.1).

Sin embargo, como ya mencioné prácticamente la totalidad de los estudiantes no respondieron a esta pregunta lo que sugiere que carecían de medios conceptuales, e incluso algorítmicos, para plantear este tipo de situaciones.

En el caso del alumno I, el hecho de que su respuesta estuviese únicamente planteada en términos de algorítmicos aritméticos (en este caso la división) no permitía saber con claridad si reconocía que x era el comparador, 492 el comparando y 0.6 el escalar. Tampoco podía saberse si había aprovechado la relación recíproca entre el comparador y el comparando para obtener la respuesta. En otras palabras, no podía conocerse el tipo de conceptualizaciones multiplicativas con las que contaba.

6.2.4 Conjeturas formuladas en esta fase

1. La mayoría de los estudiantes parecía poder identificar las fracciones unitarias de una cantidad determinada, e incluso ser capaz de encontrar los múltiplos enteros de esas fracciones unitarias. Esta conjetura provenía de las respuestas que dieron los alumnos al intentar encontrar las fracciones de un monto de dinero en la pregunta 1. Sin embargo, el que los jóvenes utilizaran como justificación procedimientos algorítmicos no indicaba por sí solo el uso de ningún modelo de conceptualización de las fracciones.

2. Los jóvenes parecían no estar lo suficientemente familiarizados con algún tipo de modelo conceptual sobre los porcentajes como para utilizarlo en situaciones en las que era oportuno. Esta primera conjetura fue formulada al observar las justificacións algorítmicas con las que respondieron la pregunta sobre la tasa de analfabetismo en Durango y el DF.

3. La mayoría de los alumnos parecía jerarquizar porcentajes apoyándose en una noción de orden entre las expresiones decimales (0.20 es mayor a 0.08, 20% es mayor a 8%), más que en una conceptualización que relacionara a los decimales y porcentajes con las fracciones decimales de una cantidad determinada. Esta conjetura también provenía de las justificacións que brindaron los estudiantes en la pregunta sobre el analfabetismo.

4. Los jóvenes parecían entender una relación multiplicativa como el producto de dos factores, sin embargo, el concepto del recíproco no fue utilizado en situaciones en las que era pertinente. Esta conjetura fue formulada tomando en cuenta la observación de que los jóvenes no propusieron ningún tipo de estrategia para tratar de dar una solución a una situación en la que el comparador es mayor al comparando. Incluso el único estudiante que fue capaz de encontrar la solución a este problema, parecía haberla obtenido de forma algorítmica, pues no brindó ninguna justificación ni simbólica ni argumentativa que le ayudase a justificar sus procedimientos en términos conceptuales.

En síntesis, al terminar esta primera fase del ciclo "regresivo" de análisis mis conjeturas eran:

1) Que la gran mayoría de los jóvenes parecía carecer de un modelo conceptual (simbólico) de las relaciones multiplicativas, (Conjetura para Categoría 2, ver sección 6.1)

2) Que los números que podían utilizar como escalares eran enteros o fracciones unitarias. (Conjetura para la categoría 3, ver sección 6.1)

3) Que la única expresión multiplicativa que reconocían (de las cuatro posibles) era la multiplicación de dos factores ($a=k \bullet b$) (Conjetura para las categorías 4 y 5, ver sección 6.1)

6.3 Segunda fase sobre la conceptualización de las fracciones unitarias, los porcentajes y las cantidades recíprocas

Después del primer ciclo “regresivo” de análisis, una de mis conjeturas era que los jóvenes podían utilizar las fracciones unitarias como factores de una multiplicación. Sin embargo, no era del todo claro si reconocían su relación recíproca con una unidad predefinida.

Por otra parte, la gran mayoría de los estudiantes parecían jerarquizar porcentajes de manera ordinal (8%<20%), pero no era fácil establecer si reconocían que un porcentaje puede ser entendido como una fracción de un total. Tampoco contaba con evidencia de que los alumnos comprendieran que los porcentajes, como toda fracción, guardan una relación recíproca con el total.

De esta manera consideré necesario explorar tales ideas en el siguiente ciclo de análisis “regresivo”. Esta exploración era importante para clarificar si los jóvenes podían proporcionar justificacións que mostrasen que conceptualizaban las fracciones unitarias y los porcentajes como relaciones multiplicativas (Steffe, 2002; Thompson y Saldanha 2003)

Así en octubre de 2007, realicé entrevistas individuales a cuatro alumnos de las carreras de Contaduría (dos mujeres y dos hombres) y a seis de la de Administración (tres mujeres y tres hombres) en la universidad privada donde trabajo. Todos ellos pertenecían al tercer semestre. En esta ocasión, decidí realizar únicamente entrevistas pues mi percepción era que en las pruebas escritas los alumnos generalmente no detallaban sus respuestas de manera suficiente como para poder identificar sus conceptualizaciones o sus nociones. En el Anexo B.2 se pueden encontrar las preguntas que realicé a los estudiantes durante ese periodo

Por otro lado, en el trabajo de grupo me parecía que los estudiantes esperaban llegar a determinadas conclusiones o conceptos sobre un tema dentro del tiempo de clase, así que eran pocas las posibilidades de detenerme a explorar con detenimiento sus nociones o ideas sobre las fracciones y porcentajes.

Hubo dos preguntas en las que las respuestas que brindaron los alumnos resultaron provechosas para explorar cuidadosamente sus nociones de fracción unitaria y de porcentaje

6.3.1 Primera pregunta

En enero de 2006 los ciudadanos estadounidenses tenían que pagar US$15 000 para adquirir un Bora de VW ensamblado en su país. Por otro lado, este mismo auto ensamblado en México costaba Mex$ 150 000.

a) Si el tipo de cambio pasara a Mex$13=US$1, ¿Dónde compraría el auto el estadounidense?

Ocho de los diez alumnos pudieron contestar esta pregunta. Para ello realizaron la siguiente operación:

Mex$ 150 000/13 = US$ 11 538.46

Luego comentaron que esto implicaría que para un estadounidense sería más barato comprar en México. Para tratar de entender qué significado tenía para ellos la división entre 13, les pregunté:

b) ¿Por qué al dividir Mex$ 150 000 entre Mex$ 13, se obtienen dólares? O sea, ¿por qué al dividir pesos entre pesos se obtienen dólares?

Todos ellos dieron respuestas como “es el tipo de cambio” o bien “por que si para pasar de dólares tuve que multiplicar, para pasar de dólares a pesos tengo que dividir”

Dada la brevedad de su respuesta traté de realizar preguntas que hicieran aún más explícito si comprendían la relación recíproca entre ambas cantidades.

c) ¿Cuántas veces es un dólar un peso?

Ninguno de los alumnos tuvo problema en contestar que un dólar es 13 veces un peso.

d) ¿Cuántas veces es un peso un dólar?

Dos alumnos pudieron contestar rápidamente que un peso era un treceavo de dólar, los otros seis alumnos que resolvieron este problema necesitaron un poco más de tiempo para comentar que sabían que el peso era trece veces más chico que el dólar. Cuatro de ellos dijeron que no se acordaban cómo se llamaba esa fracción y dos llegaron a decir que esa cantidad se llamaba un tercio.

e) ¿Por qué si el dólar es más "grande" que el peso se necesitan más pesos (Mex$45000) para obtener pocos dólares (US$ 3 461.53)?

Esta pregunta resultó una auténtica paradoja para los ocho estudiantes que resolvieron el problema. Los dos estudiantes que pudieron identificar al peso como un treceavo de dólar también comentaron que, al fin y al cabo, ambas cantidades representaban el mismo valor. No obstante ninguno de los estudiantes pudo ofrecer una explicación vinculada al tamaño relativo de los pesos respecto a los dólares. Todos ellos terminaron comentando que seguramente había una propiedad del tipo de cambio que hacía que muchos pesos fueran igual a pocos dólares.

Información relevante para las categorías de investigación

Esta pregunta tenía la intención de explorar la manera en que la manera en que los alumnos conceptualizaban las fracciones unitarias dentro de problemas de comercio internacional (Categoría 3 de investigación, ver sección 6.1). Además, pretendía indagar si los alumnos podían identificar el tipo de cambio como una relación reciproca entre dos monedas (Categoría 4 de investigación, ver sección 6.2).

Los estudiantes sí parecían estar conscientes de la relación recíproca (multiplicativa) entre una unidad fraccionaria y una unidad de referencia. Esta conjetura partía de la observación de que los estudiantes pudieron reconocer que si un dólar era trece veces un peso, entonces un peso era un treceavo de dólar.

Sin embargo, la información recopilada también sugería que los alumnos tenían dificultades con el concepto del recíproco de una relación multiplicativa como:

$$\frac{1}{k} = \frac{b}{a}$$

con a, b, k enteros y mayores a 1

Esta conjetura se apoyaba en el hecho de que los jóvenes no podían explicar muy bien porqué dada cierta cantidad de pesos, al transformarla a dólares, se tendría una cantidad de dólares que equivalía a 1/13 de la cantidad original

6.3.2 Segunda pregunta

Este año tus familiares han decidido iniciar un nuevo negocio y han adoptado un préstamo de $110 000, el cual acumula intereses. Después del primer mes la deuda acumulada era de $114 400. ¿En qué porcentaje creció la deuda?

El análisis de esta situación se realizó usando las respuestas de los mismos diez alumnos de la anterior. Para contestar esta pregunta seis de los diez alumnos entrevistados (A, B, C, D, E, F) obtuvieron en primer lugar el crecimiento absoluto de la deuda y luego lo dividieron entre la cantidad inicial que se había proporcionado es decir, realizaron los siguientes cálculos:

1. Crecimiento absoluto del Préstamo $114 400 — $110 000 = $4 400
2. Fracción que el crecimiento del préstamo representa del la cantidad inicial

   $4 400 / $110 00 = 0.04
3. Porcentaje 0.04 • 100= 4%

Dos de los alumnos (G, H), primero obtuvieron el crecimiento absoluto de la deuda ($4400) y luego comenzaron a jugar con sus calculadoras multiplicando el préstamo original

($110 000) por cifras decimales hasta obtener $4400 es decir

1. Crecimiento absoluto del Préstamo $114 000 — $110 000 = $4 400
2. $110 000 • 0.4 = $44 000 $110 000 • 0.1= $11 000

   $110 000 • 0.02= $2 200 $110 000 • 0.04= $ 4 400
3. Luego estos estudiantes decían que el 0.04 equivalía al 4% de la deuda

Otro de los alumnos (I) comentó que el valor del porcentaje dependía de cómo se calculara. Según este estudiante si se quería saber qué porcentaje representaba $4 400 se tenía que dividir entre 100, pues para obtener un porcentaje siempre se tiene que dividir entre esa cifra. De manera que para este estudiante $4 400 era 44%.

Como puede apreciarse en referencia al concepto de cantidad entendida como la relación recíproca o comparativa entre dos magnitudes, ninguno de los estudiantes dividió $114 000/$110 000, para verificar a cuántas veces era la cantidad final respecto la cantidad base o inicial, y utilizar después ese resultado para ver en qué porcentaje superaba una a la otra. Esta primera apreciación, me llevó a conjeturar que los estudiantes no concebían al porcentaje como una relación multiplicativa entre dos magnitudes.

Tomando en cuenta esta última conjetura, y las cinco las líneas de investigación que me había propuesto (ver sección 6.1), decidí explorar si los alumnos contaban con algún concepto de porcentaje, y de ser así si éste era multiplicativo. Por ello, les pregunté qué pasaría en el periodo siguiente.

b) De mantenerse esta tasa de crecimiento porcentual ¿cuál sería la deuda total en el 3er mes?

Tres de los alumnos (A, B, C) comentaron que dado que ahora la deuda ascendía a \$114 000 y se estaban generando intereses de 4% mensuales, ahora se tenía que sacar este porcentaje tomando en cuenta la deuda total del segundo mes y luego añadir el resultado a la deuda total también del segundo mes, es decir

\$114 400 • 0.04 = \$4576 Intereses acumulados en el segundo mes

\$114 400 + \$4576= \$118 576 Deuda total acumulada al tercer mes

Al parecer, estos tres estudiantes lograron identificar que debido a la acumulación de intereses la “base” (la cantidad inicial) de la cual se obtenía el porcentaje cambiaba de un mes al siguiente. También sabían que tal monto tenía que añadirse a la base.

No obstante, puede advertirse que primero necesitaron obtener “una fracción” de una cantidad original, y luego añadírsela, para saber el resultado final. No recurrieron al uso de escalares mayores que uno y menores que dos para obtener las cantidades finales, es decir ninguno de ellos realizó una operación como \$114 400 • 1.04=\$118 576. Las entrevistas sugerían que estos estudiantes no podían utilizar multiplicativamente tal tipo de números.

Cuatro de los alumnos (D, E, F, G) comentaron que para obtener la cantidad total de deuda al tercer mes, se tenían que volver a añadir \$4 400 a los \$114 400 del segundo mes (\$4 400 + \$114 400 = 118,800). Al preguntárseles si \$4 400 equivalían al 4% de \$114 400, todos estos alumnos contestaron que sí. Entonces, para ellos, en este tipo de situaciones, un porcentaje no era concebido como una cantidad que expresaba una relación comparativa entre crecimiento absoluto y monto de la deuda del mes previo, si no una cantidad que se mantendría fija una vez obtenida. Los otros dos alumnos (H, I), comentaron que no les era posible calcular a cuánto ascendía la deuda en el tercer mes.

Información relevante para las categorías de investigación

Mi propósito era que esta situación sirviera para explorar las ideas de porcentajes y crecimiento porcentual que los alumnos tenían. Ello es así porque muy pocos conceptos matemáticos son tan importantes como éstos dos para las ciencias económico administrativas, ya que con ellos se pueden detectar tendencias y ritmos de crecimiento. Además, el concepto de porcentaje se apoya en el de decimales y en el de fracciones, así que la pregunta también resultaba una buena excusa para explorar el concepto de relación recíproca entre dos cantidades (Categoría 4 de investigación, ver sección 6.1).

De esta manera las indagaciones anteriores sugerían que la relación recíproca entre una unidad predefinida y las fracciones unitarias era la única relación multiplicativa que los estudiantes asimilaban conceptualmente (Categoría de investigación 4, ver sección 6.1). Esta primera conjetura partía de la observación de que incluso los alumnos que estimaron el crecimiento porcentual de la deuda usaron el crecimiento absoluto para después dividirlo por la cantidad del mes anterior.

Me parecía que sin el uso de medios de simbolización no era del todo claro si los alumnos estaban usando el modelo de fracturador o si simplemente estaban siguiendo el algoritmo estándar para calcular el porcentaje al que equivale una cantidad con respecto a otra. En cualquier caso, lo que es un hecho es que ninguno de ellos utilizó una comparación multiplicativa (Categoría 2 de investigación , ver sección 6.1), lo que sugería que, al menos en el caso de los porcentajes, estaban poco familiarizados con una relación multiplicativa del tipo

$$k=\frac{a}{b} \text{ con } a, b, k \text{ racionales mayores a } 1$$

Por otro lado, nuevamente parecía que los estudiantes no conocían el modelo conceptual de las relaciones multiplicativas (Categoría 1 de investigación, ver sección 6.1). Esta segunda conjetura se apoyaba en las explicaciones que brindaron para calcular el monto de la deuda del segundo mes, pues varios de ellos no reconocieron que tenían que utilizar como base la cantidad acumulada después del primer mes ($114 400), y no la cantidad que correspondía al préstamo inicial ($110 000). Dicho de otra forma, no reconocieron que, en general, el monto de un mes jugaba el papel de comparador; el mes siguiente, el de comparando, y que la relación escalar entre ambos es constante.

6.3.3 Conjeturas formuladas en esta fase

Puede decirse en síntesis que en este segundo ciclo de análisis “regresivo” mis conjeturas fueron:

1) Que la mayoría estudiantes entendían los porcentajes de manera aditiva (Categorías 1 y 2, ver sección 6.1)

2) Además, parecía que el tipo de números que parecían utilizar multiplicativamente eran únicamente las fracciones unitarias y los enteros (Categoría 3, ver sección 6.1)

3) Que los estudiantes podían entender la relación recíproca entre las fracciones unitarias y una unidad predefinida (Categoría 4, ver sección 6.1)

4) que la única expresión multiplicativa que reconocían era la multiplicación de dos factores ($a=k \bullet b$). (Categoría 4 y 5, ver sección 6.1)

No obstante, es necesario mencionar que la información analizada hasta ese momento se limitaba a las fracciones decimales y números enteros. Para contar con evidencia que sustentara dicha conjeturas era necesario explorar otros contextos numéricos, pues de esa forma podría saberse si los alumnos eran capaces, o no, de utilizar los cuatro tipos de relaciones multiplicativas (ver sección 6.1) en contextos diferentes. En el siguiente capítulo presentaré dicha fase del ciclo de análisis regresivo.

7. Evolución de las conjeturas sobre las conceptualizaciones multiplicativas de los estudiantes (segunda parte)

Como mencioné en el capítulo anterior, aunque los datos parecían mostrar que los estudiantes comprendían las relaciones multiplicativas “directas” y la relación recíproca entre las unidades fraccionarias y una unidad, mi conjetura inicial fue que otros tipos de relaciones multiplicativas les eran menos claras. Por ello, en el siguiente ciclo “regresivo” de exploración creí necesario examinar con mayor precisión el tipo de antecedentes que serían útiles para comprender dichas relaciones. De esta manera, me pareció que no podía limitar mi exploración sobre los conocimientos iniciales de los estudiantes utilizando únicamente las dos diferentes formas de relaciones multiplicativas propuestas por Thompson y Saldanha (2003), expresadas como:

$$1)\quad k=\frac{a}{b}, \qquad\qquad 2)\quad \frac{1}{k}=\frac{b}{a},$$

Pensé que tenía que replantear las categorías 4 y 5 de investigación que mencioné en la sección 6.1 y que se referían al carácter recíproco del comparador y del comparando. Por ello pensé que era necesario extender mi indagación hacia cuatro nuevas categorías directamente vinculadas con las cuatro formas de expresar las relaciones multiplicativas :

$$1)\quad k=\frac{a}{b}, \qquad\qquad 2)\ k \bullet b=a$$

$$2)\quad \frac{1}{k}=\frac{b}{a} \qquad\qquad 4)\ \frac{1}{k} \bullet a=b$$

Es claro que las relaciones 1 y 2, así como la 3 y 4, son matemáticamente las mismas. Sin embargo, no lo son en un contexto instruccional y de investigación en educación. Ello se debe a que como hemos podido ver en las respuestas de los estudiantes, éstos parecían comprender bien la relación 2, pero no la 1, lo que sugiere que cada caso tendría que introducirse con medios instruccionales apropiados (Cobb, Vishnovska, Shao 2008). De esta manera se podría apoyar el aprendizaje de los estudiantes, es decir, podrían desarrollar conceptualmente cada uno de los cuatro tipos de relaciones multiplicativas.

También pensé que no sólo era necesario indagar estos cuatro casos, sino que si quería identificar con mayor precisión el tipo de conceptualizaciones iniciales de los estudiantes, debía retomar la categoría 3 de investigación que mencioné en la sección 6.1. En otras palabras, consideré que una categoría de investigación que debía mantenerse era el tipo de números (fracciones, enteros, decimales, etc.) que los estudiantes podían utilizar para razonar multiplicativamente. Nuevamente, desde un punto de vista meramente matemático, la generalización de los cuatro casos anteriores podría parecer suficiente para abarcar la totalidad de las relaciones multiplicativas, sin importar el tipo de número utilizado. Sin embargo, como hemos visto en la pregunta del tipo de cambio, los estudiantes parecían comprender la relación recíproca que existe entre las unidades fraccionarias y una unidad, pero no sucedía lo mismo con la relación recíproca entre dos cantidades racionales mayores a 1. Es por ello que me pareció necesario explorar qué tipo de números podían emplear los estudiantes para establecer las cuatro diferentes relaciones multiplicativas, así como el tipo de procedimientos, simbolizaciones y razonamientos que seguían los estudiantes para darles sentido conceptual.

En este capitulo, continuaré describiendo la evolución de mis conjeturas sobre las conceptualizaciones iniciales de los estudiantes. En una primera sección describiré la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje que diseñé para orientar mis exploraciones, también justificaré la manera en la que ordené tal trayectoria. Posteriormente describiré y analizaré la tercera etapa de la recolección de información en la que utilicé, en primer lugar, una prueba escrita y, posteriormente, evaluaciones de desempeño grupales y entrevistas.

7.1 Versión preliminar de la Trayectoria Hipotética

Las reflexiones anteriores me llevaron a reconocer la utilidad de formular una versión preeliminar de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje, pues aunque el objetivo de la investigación no era formular una Teoría Instruccional Local, la Trayectoria Hipotética podría servir para contar con una secuencia de temas con los cuales podría ubicar el tipo de conceptualizaciones multiplicativas con las que contaban los estudiantes. Además, la Trayectoria podría ayudar a entender cómo es que los conceptos básicos, como las fracciones, apoyaban al entendimiento y la socialización de otros posteriores como los números decimales o los porcentajes. La Trayectoria Hipotética (ver Tabla 7.1) quedó organizada, para el caso de las fracciones, en tres etapas. Cada etapa implicaría trabajar con cuatro relaciones multiplicativas (identificada cada una con una letra en la Tabla 7.1), las cuales fueron organizadas de acuerdo con lo que se anticipó que sería su nivel de complejidad, de menor a mayor. Conjeturé que, en un segundo momento, una secuencia similar podría funcionar para orientar la instrucción orientada a apoyar la comprensión de los números decimales (Tabla 7.2).

Tabla 7.1 Trayectoria Hipotética de Aprendizaje, Sección de Fracciones

				Etapa por Tipos de Número		
				1	2	3
Relaciones multiplicativas	A	$k \bullet b = a$	*a desconocido* *b conocido* *k conocido*	a unidad b unidad fraccionaria k entero	a entero b entero k fracción	a fracción b fracción k fracción
	B	$\frac{a}{b} = k$	*a conocido* *b conocido* *k desconocido*	a unidad b unidad fraccionaria k entero	a entero b entero k fracción	a fracción b fracción k fracción
	C	$\frac{b}{a} = \frac{1}{k}$	*a conocido* *b conocido* *1/ k desconocido*	a unidad b unidad fraccionaria k entero	a entero b entero k fracción	a fracción b fracción k fracción
	D	$\frac{1}{k} \bullet a = b$	*a conocido* *b desconocido* *1/k conocido*	a unidad b unidad fraccionaria k entero	a entero b entero k fracción	a fracción b fracción k fracción

Tabla 7.2 Trayectoria Hipotética, Sección de Números Decimales

				Etapa por Tipos de Número		
				4	5	6
Relaciones multiplicativas	A	$k \bullet b = a$	*a desconocido* *b conocido* *k conocido*	a unidad b unidad decimal k entero	a entero b entero k decimal	A decimal b decimal k fraccion
	B	$\frac{a}{b} = k$	*a conocido* *b conocido* *k desconocido*	a unidad b unidad decimal k entero	a entero b entero k decimal	A decimal b decimal k fraccion
	C	$\frac{b}{a} = \frac{1}{k}$	*a conocido* *b conocido* *1/ k desconocido*	a unidad b unidad decimal k entero	a entero b entero k decimal	A decimal b decimal k fraccion
	D	$\frac{1}{k} \bullet a = b$	*a conocido* *b desconocido* *1/k conocido*	a unidad b unidad decimal k entero	a entero b entero k decimal	A decimal b decimal k fraccion

De esta manera, conjeturé que la trayectoria consistiría de tres etapas iniciales, cada una de las cuales implicaría la comprensión por parte de los estudiantes de relaciones multiplicativas que involucrarían el uso de números fraccionarios cada vez menos familiares para ellos. Posteriormente, la trayectoria continuaría con otras tres etapas (4, 5 y 6), las cuales implicarían la comprensión por parte de los estudiantes de relaciones multiplicativas que involucrarían el uso de fracciones decimales y sus equivalencias en números decimales y porcentajes. Puede advertirse que cada una de estas etapas implicaba las cuatro formas de expresar una relación multiplicativa, las cuales fueron ordenadas de acuerdo al nivel de complejidad esperado, de menor a mayor. De esta manera, se anticipó que cada etapa de la trayectoria estaría ordenada en cuatro *subetapas,* cada una de las cuales implicaría una relación multiplicativa diferente y cada vez más difícil de comprender. El orden a seguir en la trayectoria sería entonces: Etapa 1, Subetapas 1A, 1B, 1C y 1D; y Etapa 2, Subetapas 2A, 2B, 2C y 2D; para terminar con la Etapa 3, Subetapas 3A, 3B,3C y 3D.

Es necesario aclarar que, aunque formulé esta Trayectoria Hipotética, estaba conciente de que al iniciar esta nueva etapa de mi recolección de datos, probablemente me encontraría con que no podría explorar "hacia adelante", pues tenía que revisar si los alumnos eran capaces de presentar justificaciones y soportes que confirmaran su compresión conceptual y colectiva de la primera etapa de la Trayectoria Hipotética, en la que se abordaban las relaciones multiplicativas entre unidades y unidades fraccionarias. De lo contrario, sería necesario seguir explorando "hacia atrás" y formular una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje con un punto de partida más básico que el de las relaciones multiplicativas especificadas en el Etapa 1 de la Tabla 7.1.

La decisión de jerarquizar tanto las relaciones multiplicativas, como el tipo de números que se iban a explorar también amerita una explicación un poco más detallada, aclarando primero que ambas decisiones se apoyaban en las observaciones hechas en las dos recolecciones de datos previas.

7.1.1 Justificación de la jerarquización del tipo de números

Respecto a la jerarquización del tipo de números, en el capítulo anterior expliqué cómo la mayoría de los alumnos no parecían tener dificultades para comprender que un peso era un treceavo de dólar, así que si se repetía trece veces el valor de un peso se obtendría el valor de un dólar. Sin embargo, ninguno de los jóvenes utilizó una estrategia multiplicativa para tratar de encontrar a cuánto ascendería el monto de la deuda familiar en el segundo mes, si en el mes uno era de un total de $114 400, aun cuando ya sabían que la tasa de interés era del 4%.

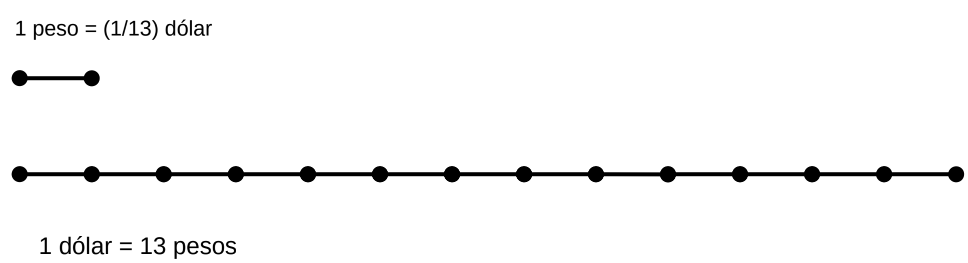
De esta manera, me pareció razonable conjeturar que los estudiantes entendían conceptualmente las relaciones recíprocas del tipo:

$$k \bullet b = a$$

siempre y cuando las cantidades involucradas implicaran que b fuese una fracción unitaria, a una unidad, y k un entero.

¿A qué se debía esto? Mi conjetura era que, como una unidad y una fracción unitaria se relacionan de manera discreta entre sí, los jóvenes podían imaginar que al repetir trece de veces un peso obtendrían el dólar

Figura 7.1 Peso vs Dólar

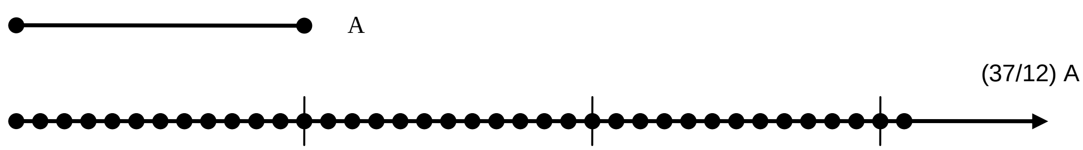


En cambio, la mayoría los estudiantes no sólo desconocían que un incremento del 4% mensual en un monto equivale a multiplicarlo por 104/100 o por 1.04. Además estaban acostumbrados a considerar como válidas únicamente las multiplicaciones por números enteros: Un monto puede equivaler al doble o el triple de otro, pero ¿tenía sentido para ellos el “repetir” un monto 1.04 “veces”?

¿Qué significado tendría el multiplicar una cantidad por 37/12? Así, mi conjetura era que aunque los jóvenes comprendían cuantitativamente la multiplicación por un entero, para que pudieran utilizar a las fracciones como un escalar válido tenían que conceptualizar ese tipo de factores. De otra forma se les dificultaría la interpretación cuantitativa de las fracciones decimales, la notación decimal y la porcentual, particularmente cuando este tipo de números representaran escalares o productos.

Figura 7.2 Multiplicación por una fracción

Representar la multiplicación de una cantidad A por 37/12 sólo puede realizarse si se establece como unidad de referencia a (1/12)A



7.1.2 Justificación de la jerarquía de las relaciones multiplicativas

En lo que se refiere a la progresión de las relaciones multiplicativas también realicé un análisis similar al anterior. Tomando en cuenta los datos recopilados hasta ese momento, mi conjetura era que los estudiantes entendían conceptualmente las relaciones recíprocas del tipo:

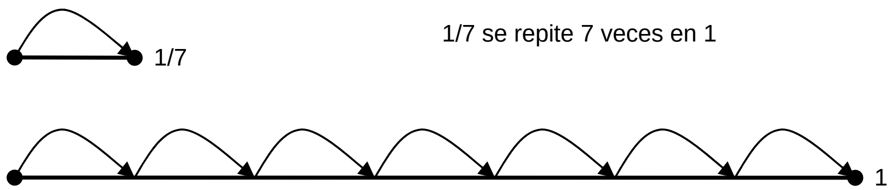
$$k = \frac{a}{b}$$

siempre y cuando b fuese una fracción unitaria, a una unidad, y k un entero, e incluso si b, a, k eran enteros

De esta manera, los jóvenes podían reconocer que un dólar era trece veces el valor un peso, y en otros casos parecían comprender que el precio de una mercancía era el quíntuple o lo cuádruple de otra.

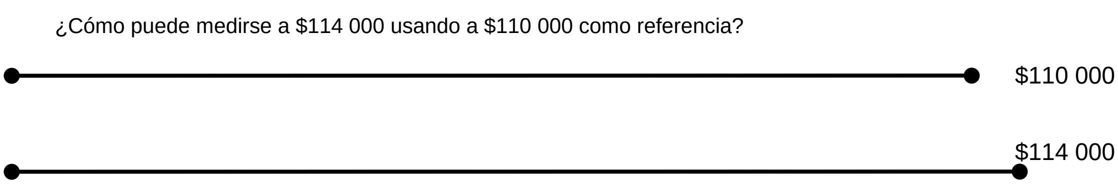
Me parecía que la gran mayoría de los estudiantes comprendían que una unidad y una fracción unitaria se relacionan de manera discreta entre sí, por lo que podían imaginar a la fracción unitaria, establecer cuántas veces se repetía en la unidad y así reconocer fácilmente el escalar *k* entero que vinculaba a ambas

Figura 7.3 Relación recíproca entre la unidad y una fracción unitaria



En cambio, ninguno de los estudiantes utilizó una estrategia multiplicativa cuando se les pidió que establecieran qué porcentaje de intereses que le estaba cobrando el banco a la familia, si en el mes inicial tenían una deuda de 110 000 y en el segundo de 114 400. Mi conjetura era que no sólo carecían de un modelo conceptual que les permitiera reconocer que dos enteros pueden relacionarse de forma multiplicativa, sino que, además, el monto de la deuda del mes uno y el monto del mes dos no guardaban una relación discreta entre sí, por lo que se les dificultaba concebir al mes uno como referencia de medida para medir al mes dos. Esto es, para los estudiantes era problemático reconocer la deuda del el mes dos como conmensurable con la deuda del mes uno, a través de la operación de la multiplicación. Les era difícil reconocer que cierto escalar fraccionario *k*, relaciona multiplicativamente a ambas cantidades (Ver figura 7.4)

Figura 7.4 Cantidades que no guardan una relación discreta entre sí



Los estudiantes parecían no haber desarrollado las concepciones que les permitieran entender cómo un número entero a puede medirse en términos de otro número entero b y que existe un factor fraccionario que los hace conmensurables ($k = a/b$), por ello me pareció razonable conjeturar que la tarea de medir a b en términos de a (es decir, $1/k = b/a$), así como la de encontrar un número entero desconocido b sabiendo que se relaciona de forma recíproca y fraccionaria con otro entero a (o sea, $(1/k) \bullet a = b$), les resultarían muy difíciles de comprender. Además, como ya he explicado, la relación $k \bullet b = a$, era la que parecían dominar los estudiantes. Debido a lo anterior, conjeturé que debía jerarquizar las relaciones multiplicativas como en la tabla 7.1

7.2 Tercera etapa de recopilación de datos: Exploración sobre la diversidad de relaciones multiplicativas

Una vez formulada la versión preliminar de la Trayectoria Hipotética, inicié el tercer ciclo regresivo de recolección de datos, el cual se realizó en el semestre enero-junio de 2009. En esta ocasión la exploración se realizó con ayuda de un grupo de Contaduría y uno de Administración, ambos pertenecientes al tercer semestre de sus carreras. El grupo de los contadores estaba integrado por 15 estudiantes y el grupo de los administradores por 21. En el grupo de Contaduría había 6 mujeres y 9 hombres; en el de Administración, 7 mujeres y 14 hombres. Todos los estudiantes tenían entre 17 y 20 años, y alrededor de las tres cuartas partes de cada grupo contaban con una beca que iba del 30% al 50% de la colegiatura mensual. De acuerdo con su propio testimonio, el último curso de Matemáticas que la totalidad de los jóvenes había estudiado en la preparatoria era Cálculo diferencial e integral, así que anteriormente habían estudiado Algebra básica y Geometría Analítica.

En esta ocasión comencé el semestre aplicando una prueba inicial de 11 preguntas sobre situaciones relacionadas con el razonamiento multiplicativo. De hecho, las preguntas estaban ordenadas por grado de dificultad dentro de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje que ya he presentado. Esta prueba se encuentra en el anexo B.3

La razón por la que apliqué esta prueba fue que consideré que me serviría para indagar si los estudiantes se aproximaban a este tipo de preguntas empleando algún tipo de estrategia conceptual y multiplicativa, o si usaban estrategias algorítmicas, es decir, estrategias que se limitaran al uso de operaciones aritméticas o de reglas para calcular cierto resultado. La prueba también me fue útil para identificar a los estudiantes que no habían podido contestar las preguntas, o cuya justificación daba lugar a una respuesta incorrecta.

Al momento de aplicar la prueba le comenté a los jóvenes que me interesaba que incluyeran un algoritmo, que dibujaran el significado de la operación, y que además incluyeran una breve explicación en la que justificaran por qué habían decidido plantear la pregunta con determinado algoritmo y por qué habían dibujado en la forma en la que lo habían hecho. Así, al momento de analizar la información me apegue a las reglas de argumentación válida que expuse en los capítulos 3 y 4. Como se recordará tales reglas de argumentación estaban fundamentadas en el modelo de Toulmin (1969), y tenían el propósito de brindar certeza sobre el tipo de razonamientos que los estudiantes eran capaces de hacer.

En lo que se refiere a las discusiones en clase, decidí trabajar con grupos muy pequeños. Por esa razón dividí al grupo de Contaduría en dos secciones:

a) La sección I de Contaduría constaba de 9 personas (Por supuesto los nombres no son reales)

2 Mujeres: Fabiola, Adriana

7 hombres: Emilio, Enrique, Carlos, Martín, Omar, Alejandro, Ariel

b) La sección II de Contaduría constaba de otra de 7 integrantes .

4 mujeres: Laura, Karla, Eugenia, Elena

3 hombres: Genaro, Juan José, José Román

Al grupo de Administración también lo dividí en dos secciones

a) La sección I de Administración constaba de 10 personas

3 mujeres: Carolina, Marcela, Sofía

7 hombres: Marcos, Jorge, Erick, Antonio, Héctor, René, Isaac

b) La sección II de Administración constaba de 11 estudiantes (7 hombres y 4 mujeres)

4 mujeres: Jazmín, Gabriela, Nayeli, Rocío

7 hombres: Ricardo, Fernando, Rodrigo, Jaime, Joel, Alfonso, Jethnael

Los estudiantes que integraban cada una de las secciones habían mostrado diferentes rendimientos al momento de resolver la prueba escrita. Los alumnos pertenecientes a las Secciones I de cada carrera habían respondido al menos ocho de las once preguntas de la prueba. Los jóvenes pertenecientes a las Secciones II de cada carrera habían respondido a lo más tres preguntas de la prueba.

Además de la prueba, videograbé trece sesiones con cada una de estas secciones; es decir, un total de 52 sesiones. Por último, realicé catorce entrevistas individuales, a siete mujeres y siete hombres. Cinco de esos estudiantes (Carolina, Fabiola y Marcela, Marcos y Enrique) habían podido resolver al menos ocho de las once preguntas de la prueba inicial, e incluso en algunas de ellas habían sido capaces de incorporar un dibujo y un argumento a sus respuestas.

Los otros nueve estudiantes habían contestado a lo más tres de las once preguntas (Karla, Jazmín, Elena, Nayeli, Jaime, Genaro, Rodrigo, Omar, Jethnael) y sus respuestas sólo incluían el resultado o bien algún algoritmo. Es importante aclarar que el número de estos alumnos tiene una función meramente nominal.

De esta forma en esta etapa utilicé tres tipos de evidencia (la prueba, las sesiones grupales y las entrevistas). Con esta forma de proceder, esperaba contar con varias fuentes de información sobre el punto de partida de los estudiantes, que pudieran contrastarse entre sí para de esa manera apoyar, o en su caso, invalidar la conjetura formulada en los ciclos anteriores de recolección de datos.

Mi expectativa al realizar estas entrevistas era darme una idea del espectro de los tipos de razonamientos que encontraría entre los diferentes estudiantes. Una vez más, las categorías de investigación que busqué fueron aquellos mostrados por la Trayectoria Hipotética.

7.2.1 Elementos encontrados en las respuestas a la prueba

Nuevamente, hubo algunas preguntas que consideré especialmente útiles para hacerme una idea sobre el tipo de nociones y conceptos con los que contaban los estudiantes y que estaban ubicadas dentro de la Trayectoria Hipotética.

Pregunta 1

Durango tiene 20% de analfabetismo mientras que el DF tiene únicamente el 5% de analfabetos. ¿Qué entidad tiene el mayor número de analfabetos?

Repetí esta pregunta porque me pareció que podía brindarme información diferente a la que la que había obtenido durante la primera recolección de datos de octubre de 2006. Sin embargo, los datos fueron muy similares. De los 36 alumnos a los que les apliqué la prueba, 18 de ellos contestó que como 20% es mayor a 5%, entonces Durango tenía mayor número de analfabetos. Otros 8 estudiantes comentaron que el DF tenía mayor número de analfabetos, pero no dieron ningún tipo de justificación, (no proporcionaron algún argumento, dibujo o algoritmo) y únicamente 10 personas contestaron que no se podía saber qué entidad tenía mayor número de analfabetos, pues no se especificaba qué entidad tenía mayor número de habitantes.

Así, un número significativo de los jóvenes jerarquizaba dos porcentajes apoyándose en cierta noción de orden entre los números enteros, pero no tomaba en cuenta que un porcentaje siempre equivale a una fracción decimal de una cantidad “base”. Si se desconocen las cantidades “base” en una comparación entre dos porcentajes es imposible establecer cuál de ellos representa una cantidad mayor.

Conjeturé que una parte importante de los jóvenes universitarios carecían de la suficiente familiaridad con un modelo conceptual que les permitiera reconocer que si una primera cantidad es mayor que una segunda, entonces la centésima parte de la primera debe ser mayor a la centésima parte de la segunda

Pregunta 2

Carlos tiene hoy $47 600 en el banco; él sabe que dentro de un año el tendrá 9/7 partes de lo que hoy tiene ¿Cuánto dinero tendrá?

Como he comentado en los apartados anteriores, los jóvenes parecían dar señales de comprender conceptualmente las relaciones recíprocas entre una unidad predefinida y las unidades fraccionarias, las cuales correspondían a la Etapa 1 de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje. Así, mi propósito al realizar esta pregunta era revisar si los jóvenes podían "avanzar" a una nueva etapa de la ruta. Es decir, mi objetivo era investigar si estaban familiarizados con relaciones multiplicativas un poco más complejas que las anteriores, por ejemplo:

$k \bullet b = a$, con b entero, k fracción, a entero (desconocido)

Me interesaba entonces conocer si los estudiantes podían plantear conceptualmente relaciones pertenecientes a la etapa 2A de la Trayectoria Hipotética (Ver tabla 7.1).

De los 36 estudiantes a los que apliqué esta pregunta, 18 lo hicieron correctamente y 18 de forma incorrecta. Sin embargo, debe mencionarse que de los 18 alumnos que respondieron acertadamente, 6 estudiantes no presentaron ningún tipo de justificación. Únicamente escribieron su respuesta. Otros 5 sólo presentaron un algoritmo. Los 7 restantes incluyeron los tres elementos que se les habían pedido.

Los siete jóvenes que formularon una respuesta correcta y completa, comentaron que como la séptima parte de $47 600 equivalía a $6 800, se tendría que agregar el doble de esta cantidad al monto original, para así tener 9/7 del total inicial. Así, estos estudiantes resolvieron algorítmicamente esta pregunta en tres pasos:

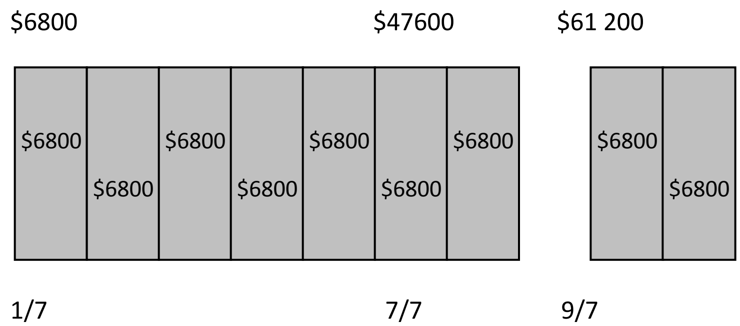
$47 600 / 7 = $6 800

2 • $6 800 = $13 600

$47 600 + $13 600 = $61 200

Además, representaron los algoritmos anteriores usando un modelo de fracturador (ver figura 7.5)

Figura 7.5 Procedimiento estudiantil para encontrar 9/7 de una cantidad



El tipo de procedimiento utilizado por estos estudiantes me sugirió que estaban utilizando un modelo de fracción como fracturador y, además, un algoritmo aditivo y no un modelo de fracción comparativo. Así, estos estudiantes necesitaban primero fraccionar a $47 600 en siete partes iguales, para después iterarlo nueve veces. En otras palabras, no veían 9/7 como 9 • 1/7 (nueve veces la séptima parte), sino como 1 + 2/7 (el entero más dos de siete partes iguales). La estrategia era correcta pero, parecía que posteriormente, podría generar problemas al plantear situaciones que se conceptualizan como multiplicaciones reiteradas de fracciones: por ejemplo, $(9/7)^5$. No obstante, esta información parecía indicar que este procedimiento fraccionario y aditivo simplemente se debía a que no conocían el modelo comparativo, y más bien estaban acostumbrados a trabajar con el otro modelo.

Los 5 estudiantes que únicamente resolvieron la pregunta por medio de algoritmos recurrieron a dos diferentes tipos de procedimientos:

($47 600 • 9) / 7 = $61 200 y ($47 600 / 7) • 9 = $61 200

Este tipo de respuestas dificultaban la tarea de establecer una conjetura sobre el tipo de modelo conceptual que podrían estar utilizando. Es posible que al dividir $47 600 entre 7 quizá estuvieran interpretando la división como una fracturación de esa cantidad. Sin embargo, no se puede saber con seguridad. Por otro lado, habría que preguntarse qué pudo haber significado para ellos el multiplicar $47 600 por 9. Tampoco se puede decir nada con certeza. Más bien, me pareció que este tipo de jóvenes, tal y como lo hicieron aquéllos a los que entrevisté, y a los que apliqué una prueba en octubre de 2006, simplemente vieron a la fracción 9/7 como un operador algorítmico (se hace una operación con el 9 y otra con 7), y no como un número que transformaba escalarmente a los $47 600.

Poco puedo decir de los estudiantes que respondieron correctamente pero que únicamente escribieron sus respuestas finales. En cuanto a los estudiantes que contestaron de manera incorrecta, varios de ellos no presentaron ninguna respuesta. Algunos intentaron multiplicar $47 600 por 7/9 aunque no dieron ninguna justificación, y unos más, al parecer, intentaron resolver usando una regla de tres, pero establecieron que $47 600 equivalía a 7/9.

Pregunta 3

¿Por qué factor debe multiplicarse 5 para obtener 7?

¿Por qué factor debe multiplicarse 7 para obtener 5?

Al realizar esta pregunta mi objetivo era revisar si los jóvenes podían identificar y aprovechar dos tipos relaciones multiplicativas:

$\frac{a}{b} = k$ y $\frac{b}{a} = \frac{1}{k}$ Con a entero, b entero, k fracción (desconocido)

En otras palabras, me interesaba saber si los jóvenes estaban familiarizados con las relaciones multiplicativas implicadas en las Subetapas 2B y 2C de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (Ver tabla 7.1).

Nuevamente les pedí que incluyeran un algoritmo, un dibujo y un argumento que justificara el uso de ambos.

De los 36 alumnos a los que apliqué la prueba, 19 no contestaron y 17 respondieron de forma correcta. No obstante, en esta ocasión, todos los estudiantes que respondieron correctamente lo hicieron por medio de uno de los dos siguientes tipos de algoritmos:

$5 \bullet (7/5) = 7$ $5 \bullet 1.4 = 7$ $7 \bullet (5/7) = 5$ $7 \bullet 0.7143 = 5$

De los 17 alumnos que contestaron correctamente, únicamente 7 estudiantes utilizaron las fracciones y los otros 10 utilizaron números decimales.

Nuevamente es difícil saber si los estudiantes estaban usando algún tipo de modelo de fracción para resolver este problema, pues ninguno argumentó su respuesta ni presentó su dibujo. Personalmente, me pareció que una respuesta meramente algorítmica no debía descartarse, pues quizá algunos de estos alumnos lograron darse cuenta que la respuesta correcta del problema se podía obtener al dividir 5 entre 5 y luego multiplicar por 7.

Pregunta 4

¿Qué cantidad es cuatro veces cinco sextos?

La intensión de esta pregunta era revisar si los estudiantes podían reconocer y emplear relaciones multiplicativas del tipo

$b \bullet k=a$, con b fracción, k entero, a fracción (desconocido)

Este caso de relación multiplicativa no estaba incluido en la trayectoria, pero pensé que era una extensión de la etapa 2A, sólo que en lugar de manejar enteros como unidades se usaban fracciones. Como en los casos anteriores, les pedí que incluyeran en su respuesta un algoritmo, un dibujo y un argumento que justificara el uso de ambos.

Únicamente 15 de los 36 alumnos dieron una respuesta correcta y la acompañaron del algoritmo, el dibujo y la explicación; 6 alumnos dieron una respuesta correcta pero sin ningún tipo de justificación; otros 15 alumnos dieron una respuesta incorrecta aunque todos ellos intentaron dibujar o dar el algoritmo.

Los alumnos que proporcionaron una respuesta correcta y completa plantearon la pregunta utilizando el siguiente algoritmo:

$$5/6 \bullet 4 = 20/6 = 10/3$$

Todos ellos recurrieron al modelo de fracción como fracturador para representar su respuesta. Iluminaron cinco partes de un rectángulo, o de un círculo, dividido en seis partes iguales y repitieron el mismo dibujo cuatro veces. Su explicación era la descripción del dibujo, pues comentaban que la pregunta decía que había que repetir cuatro veces 5/6, así que tenían que hacer el mismo dibujo hasta completar lo que se les pedía. En cuanto al algoritmo, comentaban que podían haber recurrido a la suma, pero que era más fácil multiplicar por 4, pues esto indicaba cierto número de repeticiones. De hecho algunos de ellos escribieron tanto la multiplicación como la suma repetida.

Los alumnos que dieron una respuesta correcta pero no proporcionaron ningún tipo de justificación, tampoco presentaron ningún dibujo ni algoritmo, así que no me fue posible saber cómo habían planteado este problema.

Por último, entre los alumnos que respondieron esta pregunta de manera incorrecta algunos simplemente no respondían, otros, no emplearon adecuadamente el algoritmo de la suma o de la multiplicación. Por ejemplo, hubo casos como:

$5/6 \bullet 4 = 625/1296$, o bien, $5/6 + 5/6 + 5/6 + 5/6 = 25/36$

Sólo uno de estos estudiantes intentó dibujar su respuesta, pero ésta consistió en dibujar cuatro rectángulos y escribir sobre de ellos el número 5/6. Este alumno no dio ninguna explicación o respuesta final.

Pregunta 5

En 2007 Mónica tenía $54 468 depositados en el banco, en 2008 tenía $57 191.4, este año tiene $60 050.97. ¿En qué porcentaje ha estado creciendo el monto de sus depósitos? ¿Cuánto dinero tendrá en 2010? ¿cuánto en 2011?

El propósito de esta pregunta era revisar si los jóvenes podían identificar y aprovechar las relaciones multiplicativas del tipo:

$\frac{a}{b} = k$ Con a entero, b entero, k fracción decimal (desconocido)

Es decir, me interesaba explorar la familiaridad que tenían los estudiantes con las relaciones multiplicativas incluidas en la subetapa 6B de la Trayectoria Hipotética, las cuales guardan una estrecha relación con las relaciones de la subetapa 2B, pues es el mismo tipo de relación multiplicativa y lo único que cambia es el tipo de número utilizado en el escalar k.

Una vez, más les pedí a los jóvenes que incluyesen un algoritmo, un dibujo y un argumento que justificara el uso de ambos. En esta ocasión, de los 36 estudiantes a los que apliqué la prueba, 22 respondieron de manera incorrecta y 14 de forma correcta. No obstante, de los 14 que respondieron de forma acertada sólo 5 proporcionaron un algoritmo, los otros 9 sólo escribieron sus respuestas.

Los 5 estudiantes que presentaron un algoritmo para resolver el problema recurrieron al uso de la “regla de tres”, para encontrar el porcentaje en que estaba creciendo el monto ahorrado. Todos ellos recurrieron a los siguientes planteamientos:

$54 468 es al 100% como
$57 191.4 es al ????

Y también,

$57 191.4 es al 100% como
$60 050.97 es al ????

Al resolver, encontraron que la cantidad final correspondía al 105% de la inicial.

En los siguientes problemas estos mismos jóvenes plantearon la problemática como

$60 050.97 es al 100% como
???? es al 105%

Y también,

$63 053.52 es al 100% como

???? es al 105%

El primer rasgo de sus respuestas que llamó mi atención es que ninguno de estos estudiantes planteó el problema utilizando números decimales (1 en vez de 100 y 1.05 en lugar de 105). La forma en que procedieron parecía sugerir que simplemente estaban aplicando la “regla de tres” porque era una técnica algorítmica que con la que tenían familiaridad

Sin embargo, la utilización de dicha técnica dejaba varias preguntas: ¿Sabían los estudiantes que al igualar una cantidad depositada inicial con el 100% en realidad estaban declarando que la centésima parte de la cantidad inicial se convertía en la unidad de medida del problema? ¿Habían definido la cantidad inicial depositada como el 100% porque sabían que la cantidad final representaba un porcentaje mayor? ¿O simplemente habían seguido la técnica popularizada en la que la cantidad inicial es el 100%? ¿Qué significaba para ellos ese 100%?

Poco puede decirse de los estudiantes que sólo presentaron sus respuestas. En lo que se refiere a aquellos jóvenes que presentaron una respuesta incorrecta, la mayoría de ellos no respondió y, los que lo intentaron, comúnmente aplicaron la regla de tres pero se equivocaron el orden en el que debían realizarse las operaciones.

7.2.2 Conjeturas y reflexiones formuladas al analizar desempeño de los estudiantes en la prueba

Después de analizar las respuestas que habían dado los estudiantes en esta prueba escrita, mi impresión era que había encontrado aún más evidencia que apoyaba mi conjetura de que las relaciones multiplicativas que debían emplearse como puntos de partida en la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje para apoyar el desarrollo de nociones multiplicativas cada vez más complejas, en este tipo de estudiantes, eran:

1. Aquella entre una unidad predefinida y las fracciones unitarias,
2. Aquella en las que dos enteros se relacionaban a través de un escalar entero (es decir, $k \bullet b=a$, con a, b, k enteros, a desconocido).

7.2.2.1 Justificación de la primera característica del punto de partida

Para justificar la primera característica del punto de partida, es decir, el tipo de números por los que convenía empezar, me apoyé en la información proporcionada por tres tipos de los alumnos: los que habían respondido correctamente y habían justificado sus respuestas, los que habían respondido correctamente y no habían justificado y los que respondieron de forma incorrecta.

Así, los estudiantes que habían respondido correctamente y habían justificado sus respuestas, habían recurrido a la "regla de tres", y al uso de fracciones como operadores algorítmicos, quizá porque, simplemente, eran las únicas herramientas de la que podían echar mano para resolver las preguntas y tratar de darles sentido. Pero incluso estos estudiantes habían justificado sus respuestas de manera simbólica sólo en ciertos casos. Por esta razón consideré que era necesario que su punto de partida fuese la relación recíproca entre una unidad predefinida y una fracción unitaria, de tal manera que desarrollaran un mayor grado de familiaridad con el modelo comparativo. Esto no quiere decir que dichos estudiantes no tuvieran ciertas nociones multiplicativas con números más complejos pues, por ejemplo, podían utilizar el modelo de fracturador para representar situaciones en las que se les pedía iterar una fracción un número discreto de veces. La información recopilada también hacía parecer que eran capaces de reconocer que si una cantidad inicial es menor que una final, ésta última representaba un porcentaje mayor al 100% de la cantidad inicial.

En lo referente a los alumnos que contestaban correctamente pero no presentaban ningún tipo de justificación, y que eran alrededor de la tercera parte de los estudiantes, mi impresión era que o bien no tenían interés, o que podían haber copiado, o que no estaban acostumbrados a que se les requiriera una respuesta conceptual, es decir, que incluyese un algoritmo pero también un dibujo y un argumento que mostraran que se comprendía el significado de los procedimientos utilizados. Debido a ello consideré que su punto de partida también tendría que ser la relación recíproca entre una unidad predefinida y una fracción unitaria.

En el caso de los alumnos que brindaron una respuesta incorrecta en todas las preguntas, mi conjetura era que no sólo no tenían familiaridad con algún modelo conceptual de fracciones, sino que además simplemente no dominaban los algoritmos. Por esta razón, también consideré que su punto de partida tendría que ser la relación recíproca entre una unidad predefinida y una fracción unitaria.

7.2.2.2 Justificación de la segunda característica del punto de partida

Para justificar la elección de la segunda característica del punto de partida, es decir, la forma de las relaciones multiplicativas con la que debía iniciarse, debe considerarse un rasgo en las respuestas de los alumnos que pudieron contestar de manera completa y acertada, que parecía apoyar la conjetura que había hecho sobre la jerarquización de relaciones y tipos de número. Tal rasgo era que dichos estudiantes habían podido proporcionar un algoritmo, un dibujo y un argumento para las preguntas 2 y 4, en las cuales se emplea la relación multiplicativa del tipo:

$b \bullet k = a,$ con b entero, k fracción, a entero (desconocido)

$b \bullet k = a$ con b fracción, k entero, a fracción (desconocido)

En cambio, esos mismos los estudiantes que habían respondido correctamente las preguntas 3 y 5 sólo habían recurrido al uso de algoritmos para contestar. Estas preguntas estaban vinculadas con la relación multiplicativa:

$\frac{a}{b} = k$ Con a entero, b entero, k fracción y fracción decimal (desconocido)

Y también con la relación:

$\frac{b}{a} = \frac{1}{k}$ Con a entero, b entero, k fracción (desconocido)

Así, los nuevos datos parecían apoyar la conjetura inicial sobre el tipo de relación multiplicativa con el que debía iniciarse ($b \bullet k=a$). Esto probablemente se debía a que los estudiantes mostraban, al menos en ese momento, mayor familiaridad conceptual con este tipo de relaciones que con las otras, pues probablemente se ajustaba a la noción popularizada que se tiene de multiplicación como repetición de un número y no como relación recíproca entre dos magnitudes.

7.3 Elementos encontrados en las evaluaciones del desempeño grupal y en las entrevistas: Introducción al pensamiento multiplicativo

Después de aplicar la prueba y de analizar las respuestas de los estudiantes, realicé algunas evaluaciones del desempeño grupal para contar con otro tipo de evidencia que brindara información sobre el punto de partida de los estudiantes, y que apoyara, o en su caso, invalidara la conjetura formulada en los ciclos anteriores de recolección de datos.

La técnica de la evaluación del desempeño grupal consiste en discutir con un pequeño grupo de alumnos la manera en la que podía matematizarse cierta situación. En esta etapa realicé un total de 12 evaluaciones grupales, pues realicé 3 evaluaciones con cada una de las dos secciones, tanto de Administración como de Contaduría.

De esta manera, aunque alrededor una sexta parte de los estudiantes podía utilizar algoritmos de manera correcta y justificar sus respuestas usando el modelo de “fracturador”, la totalidad de los estudiantes desconocían el modelo “comparativo”. Por esa razón me pareció apropiado introducir éste último modelo, comenzando desde la relación recíproca entre unidad predefinida y fracción unitaria., pues de esa manera los alumnos podrían contar con algún referente conceptual para discutir grupalmente e intercambiar ideas. También me pareció apropiado utilizar este punto de partida tanto en las entrevistas como en las evaluaciones de desempeño grupal

Nuevamente, parecía que lo indicado era trabajar con ellos desde la Etapa 1A con el fin de explorar si la Trayectoria diseñada sería de utilidad para indagar sobre las nociones que tenían estos alumnos y que podrían ser la base para apoyar su comprensión de relaciones multiplicativas cada vez más complejas. Fue esta la razón por la que dividí a los grupos en dos secciones, pues pensé que probablemente con algunos jóvenes podría explorar “hacia adelante”, pero con otros tendría volver a mis exploraciones “hacia atrás”.

Dado que me parecía que a ninguno de los estudiantes se le había presentado de manera explícita ningún tipo modelo multiplicativo de fracciones y de unidades de medición, me pareció conveniente que los estudiantes realizaran algunos ejercicios de razonamiento multiplicativo utilizando medios de representación unidimensionales con el fin de de que se familiarizaran con este tipo de pensamiento, antes de pasar a los problemas aplicados. Siguiendo a Steffe (2002), busqué objetos que los alumnos entendieran como unidimensionales y que pudieran dividirse fácilmente en distintos tamaños para después compararse entre sí.

Así, en la primera sesión le proporcioné a cada alumno un total de 11 popotes de 24cm cada uno (sin decirles que eso medían). Le pedí a los estudiantes conservar intacto el primer popote, pero que cortaran los siguientes para obtener mitades, tercios, etc.; hasta llegar a los décimos.

Posteriormente les pedí que los forraran de los siguientes colores:

1	Blanco	1/6	Morado
1/2	Rojo	1/7	Naranja
1/3	Azul	1/8	Rosa
1/4	Amarillo	1/9	Café
1/5	Verde	1/10	Negro

Aunque a cada tipo de popote se le había llamado por su nombre fraccionario, posteriormente simplemente se les llamó por su color

Además de presentar explícitamente el modelo multiplicativo, mi expectativa era que cuando los alumnos comenzaran a realizar ejercicios de comparación entre popotes de diferentes tamaños, podrían emerger problemas relacionados con qué implicaba la medición de longitudes. De ser así, sería una indicación de que los estudiantes contaban con nociones relativamente precarias de la medición de magnitudes continuas, como la longitud. Habría entonces que identificar esas insuficiencias y seguir explorando “hacia atrás”. En contraste, si la medición de longitudes resultaba ser poco problemática para la gran mayoría de los estudiantes, contaría con evidencia que apoyaría mi conjetura sobre el punto de partida desde el cual apoyar el aprendizaje de los estudiantes. En breve, uno de los soportes a la propuesta sobre el punto de partida fue la evidencia que mostraba que no era necesario ir más “atrás”. Como se verá en el capítulo 8, el otro soporte fue la evidencia de que ese punto de partida ayudaba a los jóvenes a avanzar a lo largo de la trayectoria hipotética.

7.3.1 Elementos encontrados en las evaluaciones del desempeño grupal

7.3.1.1 Conceptualización colectiva de la medición y las unidades fraccionarias

Una vez que los grupos identificaron a cada tipo de unidades fraccionarias por su color, les pedí a los alumnos de todas las secciones, que justificaran el valor de determinado popote de color.

Un ejemplo de este tipo de conversación es el que mantuve con los alumnos de la primera sección de Administración.

Investigador: Si tuvieran que demostrarle a alguien que los azules son tercios ¿cómo lo harían?

Varios: Juntas los azules

Investigador: Ajá y ¿qué mas?

Carolina: Pues pones junto al blanco y ves que son tres

Investigador: Y si sólo tengo un azul ¿cómo le demostrarían a alguien que ese azul es un tercio del blanco?

Antonio: Lo pones tres veces junto al blanco

El hecho de que todos los alumnos pudieran obtener unidades fraccionarias recortando una unidad, y que luego fuesen capaces agrupar dichas fracciones para volver a formarla, sugiere que reconocían que cada fracción unitaria era parte de un entero original. En otras palabras, al parecer podían entender a las unidades fraccionarias como fracturadores.

Por otro lado el que comentaran que el popote azul podía repetirse tres veces para igualar la magnitud del blanco sugería que también entendían que el popote blanco y el azul guardaban una relación comparativa. Los estudiantes hicieron razonamientos similares para otras unidades fraccionarias. Pueden encontrarse más ejemplos de este tipo de razonamientos en el anexo A.1.1

Es importante advertir aquí que el hecho de que los estudiantes recurrieron a la comparación entre una alineación del mismo tipo de unidades fraccionarias y la unidad original (5/5=1) para garantizar colectivamente su equivalencia, o que iteraron varias veces una fracción unitaria hasta igualar a la unidad (5•1/5=1), sugiere que los jóvenes no sólo estaban buscando que cinco popotes verdes (quintos) o cinco iteraciones e un popote verde fuesen igual al blanco. Da la impresión de que al alinear un mismo tipo de fracciones unitarias o de iterar una de ellas, el grupo de alumnos estaba buscando respaldar que cierta longitud era igual a la del popote blanco.

En otras palabras, a los estudiantes no parecían importarles los popotes en sí mismos, sino más bien sus longitudes, y la posibilidad de establecer equivalencias entre una longitud determinada (popote blanco) y una alineación (o iteración) de longitudes más pequeñas (popotes de colores). De acuerdo con autores como Stephan et. al. (2004), esta distinción entre un objeto y su longitud es instruccionalmente relevante porque permite generar actividades en las que se definen colectivamente unidades e instrumentos de medición, aprovecharlos para medir objetos y posteriormente establecer relaciones de equivalencia (o ausencia de equivalencia) entre las longitudes de dos o más objetos.

Aunque en las discusiones de clase no se abordó de manera explícita el tema de la medición, los argumentos de los jóvenes parecían mostrar que utilizaban la longitud de los popotes de colores como unidades de medida, sin mayor problema, y que podían aprovecharlas para establecer comparaciones entre dos longitudes (la del popote blanco contra la alineación de unidades fraccionarias).

Los estudiantes no sólo daban la impresión de ser capaces de presentar justificaciones colectivas para explicar sus comparaciones entre las unidades fraccionarias y la unidad, sino incluso entre dos diferentes tipos de unidades fraccionarias. Un ejemplo es la siguiente conversación que mantuve con la primera sección de Contaduría.

Investigador: Si tuvieran el popote blanco, y se les perdiera uno de los rojos, ¿Cómo harían para comprobar que el popote rojo que les queda es la mitad del blanco?

Varios: Con dos amarillos…(cuartos)

Investigador: A ver ¿como? ¿pueden explicar mas?

Rene: … los pones junto al rojo

Investigador: ¿Y hay otra manera de comprobar que el rojo es una mitad del blanco?

Sofía: Pueden ser cuatro rosas…(octavos) o también tres morados (sextos)

Antonio: Con cinco negros…(décimos)

Investigador: Muy bien, pero les falta la mas sencilla..

Isaac: Ocupas dos veces el rojo (medio) con el blanco…

Las justificaciones colectivas anteriores sugieren que los estudiantes reconocían la transitividad de sus mediciones, pues si tres morados equivalían a la mitad de un blanco y también equivalían a un rojo, entonces el rojo tenía que equivaler a la mitad de un blanco.

Parece entonces que prácticamente la totalidad de los alumnos contaban con una comprensión de la medición que les podía servir de base para concebir la longitud de un popote como una fracción unitaria (comparador) de la longitud de otro (comparando) De esta manera, los razonamientos de los jóvenes sugerían que era viable trabajar con un grupo de alumnos, como aquellos que asisten a mis clases, suponiendo que no les sería problemático concebir una longitud dada como una fracción unitaria. Incluso parecía que podían establecer a dos longitudes diferentes, definidas como fracciones unitarias de una misma longitud mayor (el popote blanco), para que desempeñaran el papel de comparador y de comparando. Ello era consistente con la conjetura ya descrita referente al punto de partida de los alumnos.

7.3.1.2 Concepción colectiva de las relaciones recíprocas utilizando una unidad predefinida arbitraria.

Pero las diferentes secciones de estudiantes no sólo dieron justificaciones colectivas que mostraban la relación recíproca entre una unidad predefinida y una fracción unitaria. También parecían ser capaces de presentar evidencia que mostrara la relación reciproca entre la longitud de dos popotes de color diferente. Veamos como ejemplo la siguiente interacción con los alumnos de la segunda sección de Contaduría:

Investigador: ¿Cuánto valdría el popote azul si los cafés valen uno?

Genaro: Tres

Investigador: Mmmm a ver, explica un poco más tu respuesta, o sea ¿qué harías para demostrarlo?

Genaro: Pues es que otra vez juntas tres cafés y ves que es el azul.

Investigador: Ok, o sea si el azul vale uno el café ¿cuánto valdría?

Varios: Un tercio

Investigador: Ajá, bien, y si el café vale uno ¿cuánto vale el azul?

Varios: Tres

Los alumnos realizaron afirmaciones similares para con otras relaciones recíprocas entre popotes de diferentes colores. En general, responder a este tipo de preguntas no parecía dificultársele a la gran mayoría de los estudiantes. Para ver más ejemplos de este tipo de conversaciones grupales puede verse el Anexo A.1.2

7.3.1.3 Concepción colectiva de las relaciones recíprocas entre una combinación de unidades fraccionarias iguales y otra fracción unitaria distinta

La respuesta colectiva que habían brindado los estudiantes sugería que ya comprendían conceptualmente las relaciones recíprocas previas, así que decidí aprovechar explorar las relaciones recíprocas de una combinación entre unidades fraccionarias iguales y otra fracción unitaria distinta. Sin darme cuenta estaba saltándome las relaciones multiplicativas que se habían ubicado en la Etapa 2 de la Trayectoria, y había pasado directamente a las relaciones de la Etapa 3.

El resultado de esta distracción no se hizo esperar al trabajar con el primer grupo de estudiantes, la Sección II de Contaduría. Al preguntar cuánto valdría el popote rosa (originalmente 1/8), si tres popotes amarillos (originalmente 1/4) valieran uno, sólo uno de los seis estudiantes de la sección pudo, después de varios minutos, presentar una justificación que consistía en que el popote rosa tenía que iterarse seis veces para alcanzar la longitud de los tres popotes amarillos, así que el popote rosa tenía que corresponder a un sexto de la nueva unidad predefinida. La misma dificultad para asimilar la pregunta y responder se presentó cuando realicé otras preguntas similares.

Sin embargo, el incidente anterior proporcionó evidencia que sugería que si deseaba explorar las relaciones recíprocas con números diferentes a una unidad predefinida y a las fracciones unitarias, quizá sería necesario el examen de las relaciones recíprocas utilizando números que les fueran más familiares a los estudiantes pertenecientes a las segundas secciones. Esta exploración la presento en la siguiente sección.

También examiné estas mismas cuestiones con la Sección I de Contaduría, pues quería cerciorarme de que ambas secciones estaban analizando los mismos temas. A diferencia de los alumnos de la Sección II, los de la sección I casi no mostraron dificultad para contestar el nuevo tipo de preguntas. Veamos entonces la conversación que mantuve con la primera sección de Contaduría.

Investigador: Si dos azules valieran uno, ¿cuánto valdría el café?

Fabiola: Un cuarto… ¡ah no!...Un sexto

Investigador: Bien, ¿por qué?

Carlos: Pues porque los dos azules son seis veces mas grandes que el café…

Investigador: Ok, muy bien… Y si dos amarillos valen uno ¿cuánto valdría el rosa?

Adriana: Ahora sí un cuarto

Esta sección siguió contestando rápida y conceptualmente preguntas similares a las anteriores, utilizando los popotes para justificar sus respuestas. Parecía como si una vez que se había hecho explícito que se trabajaría con relaciones recíprocas unidimensionales, esta sección podía avanzar muy rápidamente a través de las relaciones multiplicativas asignadas a las diferentes etapas de la trayectoria, razonando de manera conceptual, y siempre presentando justificaciones válidas a sus respuestas. Nuevamente parecía que los alumnos reconocían fácilmente la relación recíproca entre dos magnitudes cuando esta podía expresarse por medio de un escalar entero. Para ver más ejemplos sobre este tipo de conversaciones puede verse el Anexo A.1.3

7.3.1.4 Concepción colectiva de las relaciones recíprocas entre las longitudes de dos objetos cualquiera

Aunque había realizado diferentes actividades con las secciones de estudiantes, en todas ellas la relación recíproca entre un comparador y un comparando podía expresarse a través de un escalar entero mayor a uno, o bien a través de su fracción unitaria recíproca.

Por ejemplo, inicialmente los alumnos habían reconocido que si el popote blanco valía uno el popote azul valía 1/3; pero que si el azul valía uno, el blanco valía 3. De forma similar, si el popote blanco valía 100, el popote amarillo (que cabía cuatro veces en el popote blanco) valía 25; pero si éste valía 10 el popote blanco valía 40. Así que, sin importar el valor de cada uno, el blanco era cuatro veces el amarillo, y éste era la cuarta parte del blanco. Por último, si la unión de tres amarillos valía uno, el rosa (que cabía ocho veces en el blanco) valía 1/6; pero si el rosa valía 1, la unión de tres amarillos valía 6. Algunos de los estudiantes habían sido capaces de extender estos razonamientos al uso de materiales bidimensionales.

Investigaciones como las de Thompson (1994), Thompson y Saldanha (2003) y Steffe (2002) abordaron conceptos y actividades como las anteriores. Sin embargo, éstas dejaban de lado las relaciones recíprocas entre magnitudes previamente no cuantificadas y que no necesariamente podían expresarse por medio un escalar entero o su fracción unitaria recíproca.

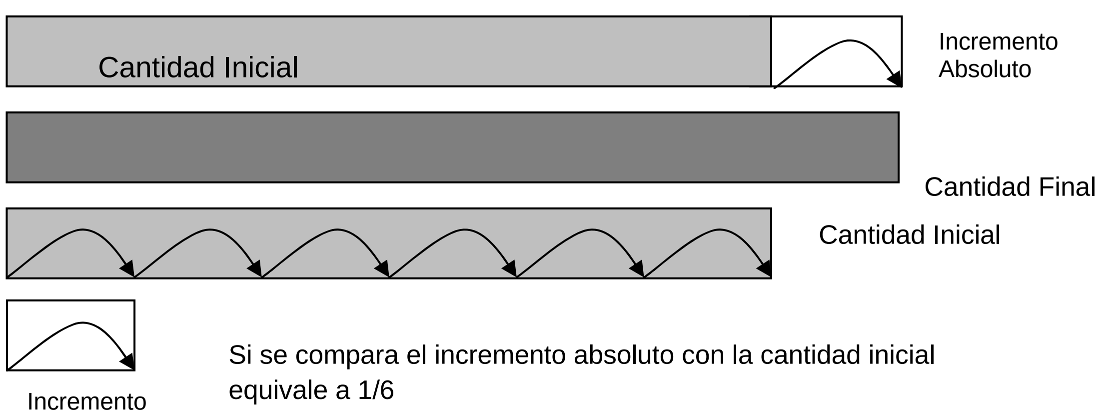
Por ejemplo, considérense las magnitudes no cuantificadas A y B de la figura 7.6, es claro que no existe ningún escalar entero, y tampoco ninguna fracción unitaria, que permita expresar la relación recíproca entre ambas.

Figura 7.6 Magnitudes que no pueden compararse usando un escalar entero

Si se lo piensa, el problema es importante, porque la gran mayoría de la vastedad de los números racionales, empleados por la mayor parte de la población y de las profesiones económico administrativas, no expresan relaciones recíprocas exactamente enteras. Más bien, los números racionales nos auxilian a expresar relaciones recíprocas en términos de una fracción cualquiera.

Un ejemplo muy importante de la afirmación anterior lo encontramos en el análisis del crecimiento relativo de cierta cantidad. Como puede apreciarse en la figura 7.7. La relación recíproca entre cierta cantidad final de dinero y la cantidad inicial de dinero no puede expresarse por medio de un escalar entero; sin embargo, al comparar el incremento absoluto con la cantidad inicial, puede observarse que dicho incremento corresponde a 1/6 de la cantidad inicial, de manera que la cantidad final correspondería a 7/6 de la cantidad inicial. Por otro lado, el incremento absoluto corresponde a 1/7 de la cantidad final, así que la cantidad inicial equivale a 6/7 de la cantidad final. Es imposible expresar la relación recíproca entre ambas cantidades de dinero usando escalares o fracciones unitarias. Tal relación sólo puede expresarse usando fracciones con numeradores mayores a uno.

7.7 Relación recíproca entre dos cantidades expresada por medio de fracciones



Instruccionalmente, la cuestión también es muy importante porque requiere proponer medios con los cuales se pueda discutir colectivamente cómo hacer conmensurables dos magnitudes no cuantificadas previamente y que no pueden ser conmensuradas una en términos de la otra utilizando factores enteros (o, recíprocamente, fracciones unitarias).

Por esta razón me interesaba explorar si los estudiantes podían identificar las relaciones recíprocas entre dos longitudes que no pudieran expresarse como una fracción unitaria, sino como una fracción cualquiera. Además quería indagar las estrategias conceptuales que seguían los estudiantes para establecer este tipo de relaciones.

Con esto en mente, la siguiente actividad colectiva que propuse fue que los alumnos midieran diferentes objetos del salón utilizando los popotes de colores y asumiendo que el popote blanco valía uno. Luego, les pedí que comentaran a qué fracción del objeto medido correspondía el popote blanco.

Como ejemplo de la manera en que razonaron los estudiantes que obtuvieron mejores resultados en la prueba, consideraré los argumentos de la Sección I del grupo de Administración. Esta sección había medido la base de una ventana y encontró que ésta tenía una longitud de 55/10 de popote blanco. Para indagar el tipo de argumentos que los alumnos usaban para medir el popote blanco en términos de la base de la ventana, les pedí que comentaran a qué fracción de la base correspondía el popote blanco. Rápidamente Marcos contestó que el popote blanco equivalía a 10/55 de la ventana. Sin embargo, no presentó ninguna justificación. Por esta razón les pedí que argumentaran su respuesta.

Lo que hicieron los alumnos fue colocar los popotes negros (que cabían 10 veces en el popote blanco) de todo el grupo en la base de la ventana, y presentaron su justificación :

Carolina: (La base tiene) 55 partes de…

(silencio general)

Marcos: Porque el entero (la base) mide 55, y 10 hacen el entero de… un popote (blanco)..

Investigador: A ver, usa el popote blanco….. Ahora la unidad de referencia ya no es el popote blanco… es la base de la ventana… ¿en cuantas partes se puede dividir la ventana?

Varios alumnos: En 55 partes…

Investigador: Y de esas ¿cuantas corresponden al blanco?

Varios alumnos: 10 partes

Investigador: Entonces ¿A qué fracción equivale el popote blanco de la base?

Marcela : Pues tomas 10 de los 55…. Son 10/55

Investigador: Vamos a tomar por ejemplo el ancho del corcho, dicen que mide 2 blancos y 1/3…Si lo expresamos en una sola fracción, utilizando sólo los tercios… ¿Cómo queda?

Carolina: 7/3

Investigador: Me gustaría que me dijeran ¿a qué fracción del ancho del corcho equivale el popote blanco?

Carolina: 3/7

Investigador: ¿Cómo lo demuestran?

Marcos: Porque el ancho del corcho es la medida total, es el entero, entonces el popote blanco son los 3/7 del ancho

Investigador: A ver, pasen entre todos y háganlo…

(Varios alumnos pasan y sostienen los popotes azules para medir el ancho del corcho)

Investigador: ¿Cuál es entonces el ancho del corcho?

Varios: 7/3

Investigador: Y si lo tomo como unidad (el ancho del corcho) ¿Cuánto mide el popote blanco?

Varios: 3/7

Investigador: Expliquen un poco más…

Marcela: El corcho mide 7 azules, pero el blanco sólo mide 3, así que son 3/7

Al parecer, para saber cuánto medía un objeto chico en términos de uno grande, los jóvenes dejaban de considerar al popote de color como una fracción unitaria del popote blanco y advertían que ahora era una fracción unitaria del objeto del salón. Luego simplemente contaban el número de popotes de colores (unidades fraccionarias del objeto) que se necesitaban para igualar la longitud del popote blanco.

Sin embargo, no todos los alumnos estaban participando en la argumentación, me parecía que no les había pedido que sus justificaciones fueran más claras, y ningún estudiante pedía soporte a las justificaciones provenientes principalmente de

Marcos y Marcela, por lo que sólo se estaba cumpliendo el primer criterio de socialización. Como se recordará en el capítulo cuatro comenté que para suponer que los estudiantes habían socializado un concepto debían presentar una justificación, y además el grupo debía considerar redundante el uso de soportes. No obstante me parecía que los estudiantes no habían comprendido las afirmaciones de sus compañeros, así que las consideraban correctas pero sin cuestionarlas.

Por ello, no estaba del todo seguro que esta discusión sobre el recíproco de una fracción cualquiera hubiese sido comprendida por todos. Debido a esta situación decidí revisar si otras secciones presentaban justificaciones similares

Como ya he ejemplificado el razonamiento colectivo de la Sección I, ahora presentaré el tipo de justificaciones que documenté en la Sección II del grupo de Contaduría. En esta sección comencé con objetos más pequeños y unidades fraccionarias más “grandes”.

Elena había medido uno de sus lápices:

Investigador: Dices que tu lápiz mide dos azules…

Elena: Si…

Investigador: Si el lápiz vale 1, ¿Cuánto valdría el azul?

Varios: 1/2

Investigador: Si el azul vale 1, ¿Cuánto valdría el lápiz?

Varios: Dos…

Investigador: Si se acuerdan, 1 azul es igual a 1/3 de blanco…eso quiere decir que ¿Cuánto mide el lápiz en términos del popote blanco?

Elena: 2/3

Investigador: Entonces el lápiz es igual a 2/3 de popote blanco… Ahora... ¿a qué fracción del lápiz equivale el popote blanco?.....

Karla: A uno y medio

Investigador: Ajá, uno y medio… ¿por qué?

Elena: ¿Cómo que uno y medio?

Karla: Porque para completar el popote blanco necesitaría un lápiz y otra mitad de lápiz

Alumno 04: Sí, así es, de hecho…

Varios: Sí estás bien… no te pongas nerviosa…(risas)

Investigador: Sí, muy bien, un popote blanco es uno y medio lápices… entonces ¿a cuántos medios de lápiz equivale un blanco?

Elena: 3/2

Investigador: Bien… Un popote blanco son 3/2 de lápiz… y un lápiz son 2/3 de popote… Bueno ahora vamos a medir el ancho del escritorio ¿cuánto midió?

Varios: Dos blancos y un azul..

Investigador: Si quisiéramos ponerlo todo en tercios ¿Cuántos tercios necesitaríamos? ¿Cuántos azules?

Varios: 7 azules

Karla: son 7/3

Investigador: Bien, hasta ahora hemos medido los objetos del salón con el popote blanco y sus fracciones… pero qué pasaría si yo utilizara el ancho del escritorio para medir el popote blanco… ¿a qué fracción del ancho del escritorio equivale el popote blanco? Recuerden que antes mediamos algo grande con algo pequeño, pero ahora medimos algo pequeño con algo grande…

Eugenia: El popote blanco son 3/7

Investigador: Bien, pero ahora explícanos…

Eugenia: Porque… mmm… a ver …. En uno blanco caben 3 (azules) y aquí (en el ancho del escritorio) tienes 7 (azules)… entonces son 3/7

Investigador: Bien… Aunque hay una parte que no estás verbalizando… Tu (dirigiéndome a Laura) decías algo de unos cachitos…

Laura: Es que son siete cachitos (azules) del…mmm... escritorio…

Investigador: Y esos siete cachitos… ¿a qué son iguales?

Eugenia y Laura: A un entero… al ancho…

Investigador: Bien, los cachitos ya no son cachitos de popote…

Eugenia: Son cachitos de escritorio…

Investigador: ¿Y cuántos cachitos de escritorio son necesarios para completar un popote?

Varios: Tres

Investigador: Se fijan, los cachitos, los azules, son dos cosas a la vez… un azul ¿es qué fracción de popote?

Laura: Un tercio de popote

Investigador: Bien, pero al mismo tiempo un azul ¿es qué fracción de escritorio?

Elena y Eugenia: Un séptimo de escritorio

Nuevamente la información sugería que para poder establecer cuánto medía un objeto pequeño en términos de uno grande, los estudiantes garantizaban su respuesta utilizando los popotes de color como unidades. Pero, aunque les costaba trabajo verbalizarlo, también eran concientes de que utilizaban los popotes de color ya no como unidades fraccionarias del popote blanco, sino del escritorio. Después simplemente medían otra vez el popote blanco con los azules, pero teniendo en mente que ahora se les consideraba séptimos de escritorio. También es importante mencionar que en esta sección me pareció notar una mayor participación y confirmación colectiva de las justificaciones que los alumnos estaban presentando. Por esta razón decidí tomar este ejemplo como uno en el que se cumplía uno de los dos criterios de socialización.

No sé si fue instruccionalmente adecuado que yo les hiciera verbalmente explícito que el popote azul podía ser dos medidas a la vez. Pero el hecho de que primero los hubiesen utilizado como mitades de lápiz, o tercios de popote blanco, y que después los reconocieran como una fracción del ancho de escritorio, daba la impresión de que los estudiantes ya podían redefinir el valor de los diferentes popotes; a veces los usaban apropiadamente como unidades y a veces como fracciones unitarias. La concepción del valor de los popotes en relación al objeto que medían les sirvió a los jóvenes para hacer conmensurable el escritorio en términos del popote y el popote en términos del escritorio. Así, yo simplemente les hice explícita una estrategia que ellos ya estaban utilizando.

La Sección I de Contaduría y la Sección II de Administración mostraron justificaciones similares, los cuales se muestran en el anexo A.1.4. Sin embargo, me pareció que las segundas secciones, en la negociación de significados, eran útiles ejercicios introductorios con objetos pequeños (como el lápiz), y popotes de colores grandes (como los rojos o medios, y los azules o tercios), pues de esta forma les era más fácil a los estudiantes darse cuenta de la relación recíproca entre el objeto y el popote blanco. Nuevamente, mi conjetura era que el tipo de número era instruccionalmente importante para discutir este tipo de actividad con determinado tipo de grupo de alumnos. En la discusión anterior con la segunda sección de Contaduría, el hecho de que el lápiz, el popote azul y el popote blanco fueran de un tamaño relativamente similar parecía haberles ayudado a comprender sus relaciones recíprocas, y a prepararlos a trabajar con objetos relativamente más grandes, y popotes de colores más pequeños.

Debo mencionar que también formulé la conjetura de que los estudiantes abordaron el problema de la cuantificación de relaciones recíprocas entre dos magnitudes previamente no cuantificadas y no conmensurables entre sí, aprovechando una tercera magnitud que sí era conmensurable con las dos previas. Esta nueva magnitud, a la que de ahora en adelante llamaré *conmensurador común,* les fue útil en primer lugar para expresar cada magnitud términos de un entero, y para luego simplemente se comparar ambas cantidades entre sí, cambiando la unidad de referencia. En el capítulo 10 presento la formalización de las relaciones entre un comparador, un comparando y un conmensurador común.

Cabe mencionar que después de revisar y analizar este tipo de diálogos, me pareció que hubiese valido la pena investigar las estrategias que los alumnos utilizarían para encontrar el conmensurador común en un caso en el que éste no estuviera previamente diseñado. Amplío más este comentario en el capítulo 9, cuando discuto la Trayectoria Hipotética Modificada.

7.3.2 Elementos encontrados en las entrevistas individuales

7.3.2.1 Conceptualización individual de la medición y las unidades fraccionarias

En las entrevistas individuales la totalidad de los 14 estudiantes emplearon justificaciones y soportes muy similares a los descritos en la sección 7.3.1.1, por ejemplo tenemos la siguiente entrevista con Marcos.

Investigador: Ok este es el blanco, ¿podrías reconocer que fracción es el azul?

Marcos: Este sería un tercio

Investigador: ¿Cómo lo sabes?

Marcos: Porque es más chico que el rojo… y suponiendo que lo muevo así (lo itera) se repite tres veces en el blanco, entonces tres juntos hacen el blanco, así quesería un tercio

Investigador: ¿Y el amarillo?

Marcos: Pues yo creo que es un cuarto porque es más pequeño que el azul, aparte que se repite cuatro veces en el blanco

Nuevamente, la evidencia parecía indicar que los alumnos eran capaces de advertir la relación recíproca entre dos tipos de popotes. Además, también parecían entender que lo que se pedía comparar era la magnitud del popote blanco contra la magnitud de cierto número de iteraciones de popotes. En otras palabras, su interés no estaba centrado en los objetos, sino en la magnitud (Para ver mas ejemplos ver anexo A.2.1)

Este tipo de razonamientos parecía confirmar que no era necesario seguir explorando hacia “atrás”. En cambio, una vez más parecía razonable la conjetura de que el punto de partida conceptual de los estudiantes en las relaciones multiplicativas era la relación recíproca entre las unidades fraccionarias y una unidad arbitraria predefinida.

7.3.2.2 Concepción individual de relaciones recíprocas entre enteros mayores a uno

Decidí tomar un tiempo de las entrevistas individuales con los alumnos que habían respondido a lo más a tres preguntas de la prueba, con el fin de examinar cómo concebían las relaciones recíprocas entre enteros mayores a uno. La razón de esto es que pensé que los estudiantes de las segundas secciones necesitarían realizar varios ejercicios en los que la relación recíproca entre dos enteros estuviera expresada por un escalar entero (p. ej 125 es cinco veces 25). Algunos de los estudiantes que no habían tenido dificultades en la prueba inicial tampoco parecieron tener problemas al establecer relaciones recíprocas entre números como 50 y 10, 45 y 5, 180 y 45, y otros ejemplos similares (Rodrigo, Omar, Nayeli, Jethnael)

No obstante, otros alumnos (Jaime, Genaro, Karla, Jazmín, Elena) sí mostraron algunas dificultades importantes. En particular, el valor que daban al comparador y al comparando parecía ser poco flexible, por lo que les costaba mucho trabajo redefinir el valor de cada magnitud. A continuación muestro una descripción de la entrevista que mantuve con Jazmín (de la segunda sección de Administración) con el propósito de ejemplificar el tipo de dificultades que encontraron estos alumnos para flexibilizar el valor que le asignaban a la longitud de los popotes.

Investigador: Ok, quedamos que si el blanco valía uno entonces el verde valía 1/5, pero ahora supón que el blanco vale 50, ¿cuánto vale el verde?

Jazmín: ¿25? ¿Si? ¿no?

Investigador: ¿Quieres decir que si repites dos ves el verde obtienes el blanco?

Jazmín: Ah, no

Investigador: Ahora todo el popote blanco vale 50, ¿Cuánto vale el verde?

Jazmín: (Piensa durante varios segundos) Vale 1/4… ah, no,… vale 1/5

Investigador: Bueno, cuando el popote blanco vale uno, el verde vale 1/5 pero si el popote blanco vale 50 ¿cuánto vale el verde?

Jazmín: (Piensa varios segundos) mmm… un diezavo… un décimo..

Investigador: ¿O sea que el verde cabe 10 veces en el popote blanco?

Jazmín: mmm, no, puede caber 10 veces por que el blanco vale cincuenta (piensa unos segundos) no, mas bien vale un cincuentavo

Investigador: ¿O sea que el verde cabría cincuenta veces en el blanco?

Jazmín: No, pues no

Investigador: Recuerda, el blanco vale 50 ¿cuánto valdría el blanco?

Jazmín: 5/50

Investigador: Mmm, ¿a qué fracción puedes reducir cinco cincuentavos?

Jazmín: A 2/25 que es la mitad

Investigador: Ok, la mitad de 50 es 25, ¿pero la mitad de 5? ¿cuál es?

Jazmín: ¡Ah! No, no puede ser dos

Investigador: ¿Se te ocurre que puede reducirse de otra forma?

Jazmín: Pues creo que tiene quinta, o sea… (lo piensa unos momentos) 5/50 es 1/10

Investigador: ¿Entonces estas diciendo que el verde se repite 10 veces en el blanco?

Jazmín: Si, ¿no?.... ¿Cuántas había dicho que cabía? (Itera el popote verde en el blanco) Ah, no el verde es 1/5

Investigador: Ok, ahora supón que el blanco vale 50

Jazmín: mmmm.. no la verdad es que no entiendo…

Investigador: Vamos a cambiar, tomemos el azul. Si el blanco vale uno, ¿cuánto vale el azul?

Jazmín: Vale 1/3

Investigador: Bien, ahora si el blanco vale 30 ¿cuánto vale el azul?

Jazmín: 1/30.

Investigador: ¿o sea que el azul cabe 30 veces en el blanco?

Jazmín: No, debe de caber tres veces en el blanco

Investigador: ¿Hay algún número que se repita tres veces para que te de 30?

Jazmín: Si, 10

Investigador: Entonces, si el blanco vale 30 ¿cuánto vale el azul?

Jazmín: 10

Investigador: Bien… ahora si el blanco vale 50 ¿cuánto vale el verde?

Jazmín: (Piensa durante varios segundos) Creo que 10

Investigador: ¿por qué?

Jazmín: (Piensa unos momentos) Porque tiene haber un número que multiplicado por 5 da 50

Investigador: Bien ahora supón que el blanco vale 180, ¿cuánto vale el amarillo?

Jazmín: A ver el amarillo vale… (itera el amarillo en el blanco) vale un 1/4

Investigador: Ok, y si el blanco vale 180, ¿Cuánto vale el amarillo?

Jazmín: A ver 180 entre cuatro son…(realiza operaciones)… son 45

Investigador: ¿qué hiciste?

Jazmín: Dividí 180 entre 4

Investigador: Ok entonces a ver explícame ¿por qué 45 es la cuarta parte de 180?

Jazmín: Porque… mmm… si se repiten cuatro veces 45 da 180

Investigador: A ver… y ¿es cierto?

Jazmín: Si, serían… (realiza operaciones) 45 por 4 es 180

Como puede verse, inicialmente a Jazmín le resultó difícil el establecer un nuevo valor para los popotes de colores, cuando el popote blanco cambiaba de valor de la unidad a otro valor. De hecho, Jazmín intentaba seguir respondiendo utilizando fracciones en lugar de aprovechar la relación recíproca entre el tamaño del blanco y el popote de color. *No obstante, parece ser que una vez que Jazmín se dio cuenta del vínculo entre los algoritmos que conocía y la relación recíproca entre los popotes, pudo aprovechar este conocimiento para justificar las preguntas siguientes.*

7.3.2.3 Concepción individual de las relaciones recíprocas entre una combinación de unidades fraccionarias iguales y otra fracción unitaria distinta

Una vez que hube examinado individualmente las relaciones recíprocas entre enteros mayores a uno, decidí realizar una primera exploración de mi conjetura que planteaba que éstas ayudaban a los estudiantes a identificar las relaciones recíprocas entre combinaciones de fracciones unitarias iguales y otra fracción unitaria distinta. Es decir, mi conjetura era que una vez que los alumnos reconocían la relación recíproca entre enteros como 90 y 18, se facilitaría que identificaran tal tipo de relación entre fracciones como 7/4 y 1/8.

Los estudiantes que habían contestado correctamente más de ocho preguntas de la prueba no tuvieron problemas en darse cuenta que había combinaciones fraccionarias que eran recíprocas de ciertas unidades fraccionarias; por ejemplo, entre 1/8 y 3/4; 1/6 y 2/3; 1/10 y 4/5 (Puede encontrarse más evidencia en el Anexo A.2.3) Así, en el caso de estos estudiantes la evidencia sugería que comprendían las relaciones recíprocas entre enteros y entre una fracción unitaria y una que no lo era.

Tomemos por ejemplo la siguiente discusión con el Enrique.

Investigador: Ahora si tres amarillos valen uno, ¿cuánto vale el rosa?

Enrique: 1/6

Investigador: ¿Puedes decir un poco más?

Enrique: Pues es que en cada amarillo hay dos rosas, así que en total se repite seis veces.

Investigador: Ok, ahora si definimos un negro como uno y con ese medimos siete verdes juntos, ¿cuánto valdrían?

Enrique: Valdrían 14 porque en cada verde hay dos negros.

Sin embargo, algunos alumnos (Jaime, Genaro, Karla, Jazmín, Elena) nuevamente encontraron problemas para identificar las relaciones recíprocas entre estos tipos de números. Y una vez más, me pareció que estos problemas se debían a que les costaba trabajo asignar un valor diferente al comparador y al comparando. Tomemos por ejemplo la discusión con Karla, perteneciente a la sección II de Contaduría:

Investigador: Muy bien, ahora vamos a suponer que el blanco vale 1/2 ¿Cuánto vale el azul?

Karla: ¿3/2?

Investigador: Pero tres medios serían tres popotes blancos ¿a poco el azul es tan grandote?

Karla: No,

Investigador: Entonces supón que el blanco vale 1/2 ¿cuánto vale el azul?

Karla: (Reflexiona durante casi dos minutos)…. No sé no recuerdo… ¿es un 1/3?

Investigador: Ok, el azul es un tercio del blanco, pero si supones que el blanco vale 1/2 entonces ¿cuánto valdría el azul?

Karla: (Reflexiona durante unos cuatro minutos) Pues 3/2

Investigador: Pero 3/2 serían tres blancos ¿no?, y el azul no mide eso… Te voy a dar una pista, si un rojo vale uno, ¿cuánto vale el morado?

Karla: (itera tres veces el morado en el rojo) Vale 1/3

Investigador: Ok, y si juntas dos rojos y los comparas con el morado ¿cuánto vale el morado?

Karla: mmm… un sexto...

Investigador: Ajá…¿por qué?

Karla: Porque en cada rojo hay tres morados

Investigador: Bien ahora, regresemos con el popote blanco y el azul. Si suponemos que el blanco vale 1/2, ¿cuánto vale el azul?

Karla: Un tercio

Investigador: Ajá el azul es un tercio del blanco, pero el blanco vale un medio

Karla: Pues puede ser un sexto

Investigador: ¡Bien!, y ¿por qué? ¿Podrías explicar como llegaste a esa conclusión?

Karla: Porque 1/2 por 1/3 es un 1/6

Investigador: Mmmm… Ok, pero a ver, si el azul es 1/6 y el blanco es 1/2 ¿Cómo sería la unidad?¿Cuánto mediría?

Karla: Serían dos popotes blancos

Investigador: ¡Muy bien! Ahora digamos que el blanco es 1/2 ¿cuánto sería un amarillo?

Karla: mmm…. 1/8

Investigador: Ajá, ¿por qué?

Karla: Porque hay cuatro amarillos en un blanco pero ahora el entero son dos blancos

Investigador: Muy bien, ahora ¿cuánto valdría el café?

Karla: Se repite 9 en uno blanco, en dos son 18… sería un dieciochoavo

Investigador: Bien, bien, ahora si el blanco valiera un 1/3 ¿Cuánto valdría el azul?

Karla: pues serían 9 azules … (el azul) sería un noveno

Investigador: Así es, 1/9, ahora, si el blanco es un tercio ¿cuánto valdría el amarillo?

Karla: Habría 12 amarillos, (el amarillo) es un doceavo

Investigador: Ok, y si el blanco es un 1/3 ¿cuánto valdría el café?

Karla: Serían 27… es un veintisieteavo

De esta manera parecía que la dificultad central de estos estudiantes era que una vez que asignaban un valor al popote blanco, o a alguno de otro color, les costaba trabajo alterarlo, y parecía que necesitaban volver a los valores iniciales para que la pregunta tuviera sentido. Quizá estaban muy acostumbrados a pensar que el valor de una magnitud no cambia, lo que les impedía reconocer que la relación entre dos longitudes depende de la longitud a la que se le defina con el valor de uno. *Sin embargo, una vez más parece también que cuando los estudiantes se daban cuenta del vínculo entre los algoritmos de la multiplicación y la relación recíproca entre determinados tipos de popotes, podían plantearse situaciones cada vez más complejas.*

7.3.2.4 Concepción individual de las relaciones recíprocas entre las longitudes de dos objetos cualquiera

Como había ocasiones en las que en las que ciertos alumnos no participaban en la discusión colectivas, pensé que quizá podría estar ignorando algunas otras estrategias o procedimientos. Así que dediqué un tiempo en las entrevistas individuales a indagar cómo las abordaban.

Desafortunadamente, no pude profundizar en mis discusiones con los alumnos (Jaime, Genaro, Karla, Jazmín, Elena) pues el tiempo de la entrevista no fue suficiente para realizarlas. No obstante, sí pude realizar esta pregunta a algunos de los estudiantes que habían respondido a lo más a tres preguntas de la prueba inicial (Rodrigo, Omar, Nayeli, Jethnael), y a todos los que habían contestado ocho o más preguntas (Carolina, Marcos, Fabiola, Enrique, Marcela)

A todos ellos les preguntaba cuánto medía el ancho del escritorio en el que trabajamos en la entrevista y les pedía que explicaran a qué fracción del mismo equivalía un popote blanco. Veamos la conversación con el Jethnael, perteneciente a la segunda sección de Administración:

Investigador: Muy bien, entonces el ancho del escritorio mide 18 rosas, si cada rosa vale 1,¿Cuánto vale el escritorio?

Jethnael: Pues 18,

Investigador: y ¿cuánto valdría el blanco?

Jethnael: (Piensa unos segundos) Valdría 8

Investigador: Muy bien, entonces ¿a qué fracción del ancho del escritorio equivale el blanco?

Jethnael: A un tercio

Investigador: A ver ¿podrías comprobarlo?

Jethnael: (Mide el ancho del escritorio iterando el popote blanco) mmm… Es menos de dos veces y media del blanco

Investigador: Entonces ¿el blanco puede ser un tercio del ancho del escritorio?

Jethnael: No pues no

Investigador: ¿Te sirve de algo saber cuántos rosas mide el escritorio?

Jethnael: El escritorio vale 18 rosas

Investigador: Así es, y ¿Cuánto medía el popote blanco?

Jethnael: A ver (vuelve a medirlos) 8 rosas

Investigador: Ok, a ver te hago otra pregunta ¿qué fracción del blanco es el ancho del escritorio?

Jethnael: 18/8

Investigador: ¿Puede explicar un poco más?

Jethnael: Pues porque cada rosa es 1/8 de blanco y el escritorio tiene 18 de esos

Investigador: Muy bien, pero ahora regresamos a lo que te estaba preguntando, ¿A qué fracción del ancho del escritorio equivale el popote blanco?

Jethnael: Pues es que tienes 18 rosas en el escritorio y 8 en el popote

Investigador. Ajá y entonces ¿a qué parte del escritorio equivale el blanco?

Jethnael: 8/18

Investigador: Bien, ok, y ¿puedes decir más?

Jethnael: Lo que pasa es que tienes 18 partes del escritorio pero sólo necesitas 8 para el blanco

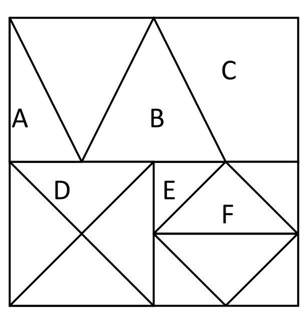
En general, puede decirse que los alumnos entrevistados no siguieron una estrategia muy diferente a la de Jethnael, y a la que se presentó en las discusiones colectivas. Es decir, los jóvenes simplemente encontraban entre los popotes de colores uno que les permitiera medir tanto el ancho del escritorio como el popote y expresar cada uno como un número entero; así el popote rosa se convertía en un *conmensurador común*. Luego recordaban cuál de las dos magnitudes operaba como unidad de referencia (en este caso el escritorio), y por último simplemente contaban cuántos conmensuradores comunes eran necesarios para medir el popote blanco. Para ver mas evidencia con respecto al conmensurador común y la comparación entre la longitud de dos objetos cualesquiera puede verse el Anexo A.2.4

7.3.2.5 Concepción individual de las relaciones multiplicativas utilizando magnitudes bidimensionales.

Como todos los estudiantes a los que había entrevistado parecían comprender las relaciones multiplicativas entre las unidades fraccionarias y una unidad predefinida, y me daba la impresión de que la mayoría de ellos podían establecer relaciones recíprocas entre diferentes combinaciones de unidades fraccionarias, decidí explorar si podían aprovechar estos conceptos para establecer relaciones multiplicativas entre magnitudes bidimensionales.

Desafortunadamente no pude realizar estas indagaciones con todos los estudiantes entrevistados, pues como hemos visto, algunos de ellos (Jaime, Genaro, Karla, Jazmín, Elena, Rodrigo) les resultó difícil trabajar con las relaciones recíprocas entre magnitudes unidimensionales, por lo que no fue suficiente el tiempo de la entrevista para examinar su compresión de las relaciones multiplicativas entre magnitudes bidimensionales. No obstante, me pareció que el resto de los estudiantes entrevistados podían extender el razonamiento multiplicativo a las magnitudes bidimensionales con relativa facilidad. En la sección de la entrevista dedicada a las relaciones multiplicativas utilizando magnitudes bidimensionales, comencé dándoles un cuadro de 15•15 cm, como el de la figura 7.8.

Figura 7.8 Rompecabezas empleado en las entrevistas



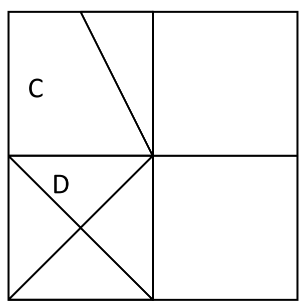
Además del cuadro les proporcionaba piezas independientes que tenían la forma y los nombres de aquellas dibujadas en el cuadro. Los alumnos podían armar un segundo cuadro con las piezas independientes.

Inicialmente les pedí que supusieran que todo el cuadrado valía uno, y que identificaran el valor de cada figura que tenía una letra. Para tener una idea de los tipos de razonamientos que los alumnos desarrollaron veamos la siguiente conversación con Nayeli perteneciente a la segunda sección de administración:

Investigador: Ok, ahora vamos con los cuadros entonces aquí están los triángulos (independientes) y aquí esta un cuadro completo. Suponiendo que todo el cuadro vale uno, ¿a qué fracción equivale C?

Nayeli: Pues es que para empezar tenemos medios (señala una línea imaginaria de arriba abajo que pasa por la mitad) y luego cuartos (señala otra línea imaginaria de izquierda a derecha que pasa por la mitad) así que C vale menos de un cuarto (intenta acomodar la figura C independiente en uno de los cuartos imaginarios, ver la figura 7.9)

Figura 7.9 Entrevista con Nayeli I



Investigador: Ok,… acuérdate que puedes utilizar las otras piezas…

Nayeli: (Juega durante unos tres minutos poniendo figuras más pequeñas dentro del cuadro) No sé bien, pero a ver, D es 1/8

Investigador: ¿O sea que D se repite 8 veces en todo el cuadro?

Nayeli: No, es que aquí hay cuatro D’s (señala al cuarto izquierdo inferior,en fig.7.9), pero en la mitad de abajo hay ocho, y con la de arriba hay dieciséis en total, D es 1/16

Investigador: Ok, pero no queríamos saber D, sino C…

Nayeli: Es que lo que pasa es que yo quería medir C con D, pero no embona…

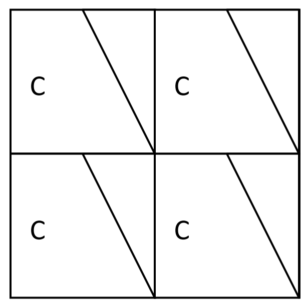
Investigador: Entonces ¿Qué podríamos hacer para saber a qué fracción equivale C?

Nayeli: Pues es que equivale a menos de 1/4, equivale a 1/3…

Investigador: ¿Cómo sabes?

Nayeli: (Intenta acomodar C en cada cuarto del cuadro, ver la figura 7.8) Porque entra una, dos, tres, cuatro veces ¡Ah! no, pero sí es menos de 1/4, de eso estamos seguros, (ver figura 7.10)

Figura 7.10 Entrevista con Nayeli II



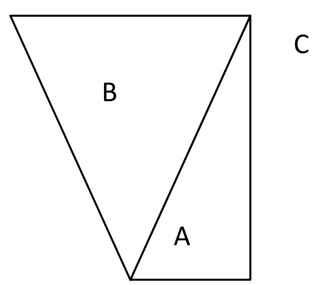
Investigador: Si, de eso estamos seguros

Nayeli: Es que tampoco E se acomoda en D, mmmm no, no embonan las figuras

Investigador: ¿Crees que otras figuras te podrían ayudar a saber cuanto vale C?

Nayeli: mmm. a ver…. Oh sí, B (coloca la figura con su base en el lado superior de C) y también A (coloca la figura con su base en el lado inferior de C, ver figura 7.11)

Figura 7.11 Entrevista con Nayeli III



Investigador: Ok, entonces C es igual a B y A… entonces ¿cuánto vale C? Ahora ya sabemos que tenemos que ayudarnos de esas dos

Nayeli: Pues entonces tenemos que saber cuánto vale B y cuanto vale A

Investigador: ¿Y cuanto valen?

Nayeli: (Coloca B y A en el cuarto inferior izquierdo) Necesitamos de dos A y un B para tener 1/4

Investigador: Ok, pero necesitamos saber cuanto valen para saber cuanto vale C

Nayeli: (Juega unos momentos con la figura A) Pues A cabe cuatro veces en el cuarto…entonces A vale 1/8

Investigador: ¿De todo el cuadro A vale 1/8? ¿o sea que necesitas ocho A's para completar el cuadro?

Nayeli: Pues sí, ¿no? A ver, si en este cuarto hay cuatro A's, por dos 8, por tres 12 cuatro 16. Entonces a es un sexto

Investigador: ¿o sea que se repite seis veces en todo el cuadro?

Nayeli: No, entonces es un doceavo..

Investigador: ¿entonces hay doce A's en el cuadro?

Nayeli: No, hay dieciséis A's en el cuadro (piensa unos momentos) A es 1/16

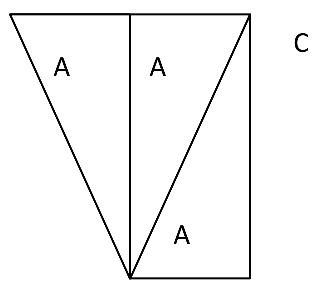
Investigador: Ok, entonces volvemos a la pregunta ¿a qué fracción equivale C? Ya sabes que A vale 1/16, y que D también vale 1/16

Nayeli: pues entonces A vale 3/16

Investigador: ¿por qué?

Nayeli: (Acomoda A de forma que muestra que se repite tres veces en C, ver figura 7.12) Porque A puede repetirse tres veces en C

Figura 7.12 Entrevista con Nayeli IV



Investigador: Muy bien ¿Y cuánto vale B?

Nayeli: Vale 2/16

Investigador: A ver muéstrame que A se repite dos veces en B

Nayeli: Pues es que A es exactamente la mitad de B

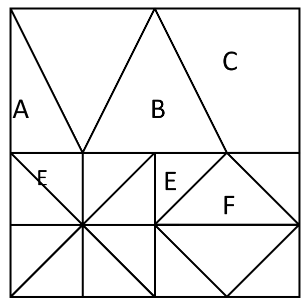
Investigador: Bien entonces B equivale también ¿a qué fracción?

Nayeli: A 1/8

Investigador: Muy bien. Entonces A es 1/16, B es 1/8, C es 3/16, D es 1/16. ¿Cuánto vale E?

Nayeli: (juega unos momentos con D y E) E es la mitad de D, o sea que en este cuarto (el cuarto inferior izquierdo) E cabe ocho veces, o sea que es 1/8 del entero (Ver figura 7.13)

Figura 7.13 Entrevista con Nayeli V



Investigador: ¿o sea que si repites E ocho veces llenas todo el cuadro?

Nayeli: No, E es un dieciseisavo también

Investigador: ¿O sea que es igual que D?

Alumno12: Sí,

Investigador: mmmm … A ver, muéstrame.

Alumno12: Ah, no… es que son lo mismo en tamaño pero en área sí,… no, a ver no son lo mismo en área pero en tamaño si

Investigador: ¿O sea que E es un dieciséisavo?

Nayeli: (cuenta el número de veces que cabe E en el cuarto inferior izquierdo) No, E es 1/8

Investigador: Entonces con ocho E's deberías poder cubrir todo el cuadro ¿no?

Nayeli: (multiplica ocho por cada cuarto del cuadro) 8 por 2, 16; 8 por 3, 24; 8 por 4, 32; No, E es un 1/32

Investigador: Bien, y ¿Cuánto vale F?

Nayeli: Pues F es igual que D, entonces F es también es 1/16

Investigador: Ok, muy bien, ahora ya tienes los valores de las figuras respecto al cuadro, Pero ahora si el cuadro vale 64 ¿Cuánto vale B?

Nayeli: Un 1/16… ¡Ah, no! Un 1/8

Investigador: Si, pero eso era cuando el cuadro valía uno, ahora vale 64

Nayeli: Pues B se repite 8 veces en el cuadro

Investigador: Así es, entonces ¿eso qué te dice de su valor?

Nayeli: (Utiliza su calculadora) pues entonces B vale 8

Investigador: Muy bien, ¿por qué?

Nayeli: Porque si repites 8 veces 8 te da 64

Investigador: ¿Si el cuadro mide 64 cuánto mide A?

Nayeli: Mediría 64 entre 16, o sea A valdría 4

Investigador: ¿puedes explicar un poco mas?

Nayeli: Ajá si repite 16 veces 4 te da 64

Investigador: Ok muy bien, y ¿cuánto valdría C?

Nayeli: Pues C vale tres A's, entonces, C vale 16

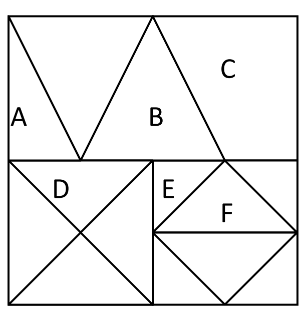
Investigador: Entonces ¿3 por 4 te da 16?

Nayeli: mmm, no,… digo, son 12, entonces C valdría 12.

Este tipo de entrevistas parecía sugerir que los estudiantes que comprendían conceptualmente las relaciones recíprocas utilizando materiales unidimensionales, como los popotes, eran capaces de extender con relativa facilidad sus razonamientos a materiales bidimensionales, como este rompecabezas. La única diferencia en sus razonamientos quizá se debía a que había un grupo de estudiantes que, al parecer, necesitaba redefinir el valor de cada figura cuando el valor del cuadrado completo cambiaba. Para ver mas evidencia al respecto puede consultarse el anexo A.2.5

7.3.2.6 Concepción individual de las relaciones recíprocas entre las áreas de dos superficies cualquiera

También quise confirmar si los estudiantes entrevistados podían emplear áreas para justificar la relación recíproca entre dos superficies no cuantificadas y que no era expresable en términos de un escalar entero o su fracción unitaria recíproca.. En esta actividad, utilicé nuevamente el cuadro de la figura 7.8



Como se recordará, el cuadro medía 15•15 cm y que tenía dibujadas dentro de sí las divisiones mostradas en la figura anterior. Además del cuadro les proporcionaba piezas independientes que tenían la forma y los nombres de aquellas dibujadas en el cuadro. Los alumnos podían armar un segundo cuadro con las piezas independientes.

Los valores de las figuras, cuando el cuadro completo valía uno, eran A=1/16, B=1/8, C=3/16, D=1/16, F=1/16 y E=1/32.

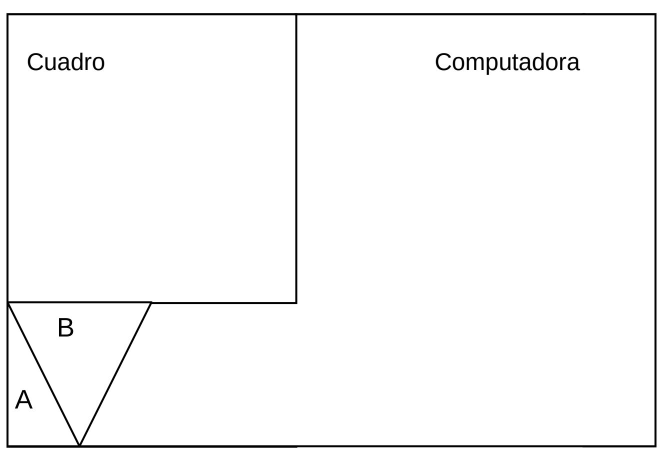
Les pedí a los alumnos que utilizando las figuras y el cuadro completo midieran la tapa de mi Lap Top. Luego, les preguntaba a qué fracción de la tapa equivalía un cuadro. Nuevamente, no pude realizar esta pregunta algunos alumnos (Jaime, Genaro, Karla, Jazmín, Elena), pues el tiempo de la entrevista no fue suficiente para realizarlas. No obstante, sí pude realizar esta pregunta a algunos de los estudiantes que habían respondido a lo más a tres preguntas de la prueba inicial (Omar, Nayeli, Jethnael), y a todos los que habían contestado ocho o más preguntas (Carolina, Marcos, Fabiola, Enrique, Marcela).

Para ejemplificar los razonamientos que desarrollaron los jóvenes veamos la siguiente conversación con el Jethnael perteneciente a la segunda sección de Administración

Investigador: Ok, ahora si el cuadro vale 1, ¿cuánto vale la tapa de la computadora?

Jethnael: (Juega unos dos minutos con las figuras y con los cuadros, y los acomoda como en la figura 7.14, donde el rectángulo más grande es la tapa de la computadora y el cuadro pequeño es el cuadro que le proporcioné al alumno) Pues yo creo que caben tres cuadros en toda la computadora

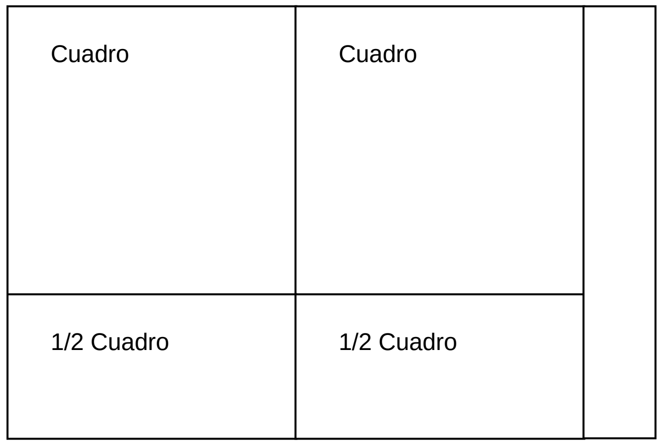
Figura 7.14 Entrevista con Jethnael I



Investigador: ¿Y cómo podrías comprobarlo?

Jethnael: Pues porque en el espacio donde cabe el triangulo no hay problema porque ya sé que ahí cabe medio cuadrado, y del otro lado todavía cabe otro cuadro (el alumno arregló los cuadros como en la figura 7.15)

Figura 7.15 Entrevista con Jethnael II



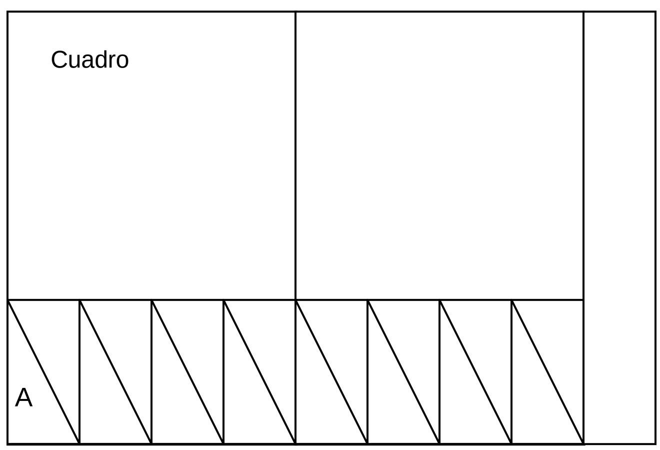
Investigador: ¿Ok y entonces en ese espacio cuantas mitades tienes?

Jethnael: Pues dos… ¡Ah! (toma el triangulo A y comienza contar) ahí también tengo 16 figuras de A

Investigador: A ver explícame

Jethnael: Lo que pasa es que A entra 8 veces en cada mitad y son dos mitades en ese espacio mira 1,2,3,4,5,6,7,8,….. y son dos pues son 16 (ver figura 7.16)

Figura 7.16 Entrevista con Jethnael III



Investigador: Pero todavía te queda un espacio que no sabes cuanto vale (el espacio largo en el extremo derecho de la figura anterior)

Jethnael: Si pero esta muy chico el espacio y no me alcanzan las piezas

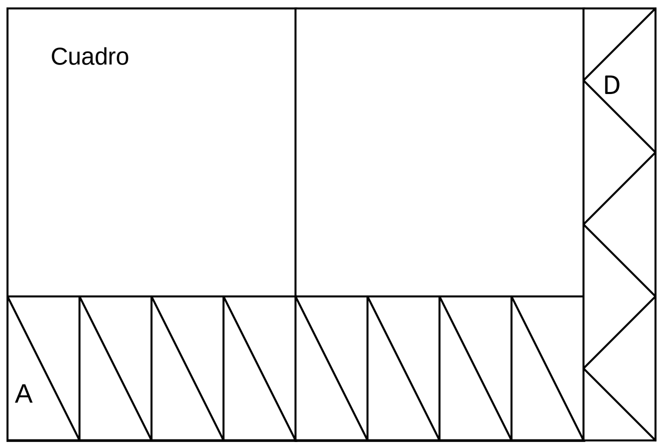
Investigador: ¿Seguro? A ver, checa si es que alguna pieza entra en ese espacio

Jethnael: (Juega unos dos minutos con varias piezas pero al final aprovechando el triangulo D llega a un arreglo como en la figura 7.17 de la página TAL)
En el espacio hay seis D's

Investigador: Yo sólo veo cinco

Jethnael: Lo que pasa es que en hay dos mitades de D, una al principio y otra al final (ver la Figura 7.17)

Figura 7.17 Entrevista con Jethnael IV



Investigador: Ok, muy bien… entonces al final, si el cuadro mide uno ¿Cuánto mide la tapa de la computadora?

Jethnael.: (realiza operaciones) Tengo dos cuadros, y 16 A's, ¿cuánto valía A?

Investigador: No sé, intenta recordar…

Jethnael: (Compara el triángulo A con el cuadro) Es 1/16 del cuadro

Investigador: Ok, entonces ¿cuánto mide la tapa?

Jethnael: Son dos cuadros, no, son tres por los 16 A's, y D valía también 1/16, o sea de total son tres cuadros y 6/16

Investigador: Ok, entonces si tienes 3 cuadros y 6/16 ¿puedes decir a qué fracción del cuadro equivale la tapa de la computadora?

Jethnael: Serían tres cuadros y 3/8, porque es lo mismo que 6/16

Investigador. Ok, y podrías decir cuánto ya sólo en fracciones, o sea ¿puedes expresar los enteros como fracciones?

Jethnael: A ver, serían 8 por 3, 24 … La computadora mide 24/8

Investigador: ¿Y el espacio derecho?

Jethnael: Ah, sí…entonces serían otros 3/8, o sea en total 27/8

Investigador: ese 27/8 ¿qué significa?

Jethnael: Es la fracción de cuadro que mide la computadora

Investigador: ok, muy bien… Y si ahora te pregunto ¿a qué fracción de la tapa equivale el cuadro?¿cuánto sería?

Jethnael: 8/27

Investigador: Mmmm… ok pero no sólo voltees los números… trata de explicar

Jethnael: (piensa unos dos minutos) Es que no sé cuál sería ahora con qué mediría…

Investigador: Pero ya mediste ¿no? Ahora lo que te digo es que tomes a la computadora como unidad, ok, a ver, quedamos que si el cuadro vale uno ¿cuánto vale la tapa?

Jethnael: 27/8

Investigador: Ok, 27/8 pero ¿de qué?

Jethnael: De cuadro

Investigador. ¿Te acuerdas que figura era 1/8 de cuadro?

Jethnael: No

Investigador: Ok, ¿te acuerdas de cuál era 1/16 de cuadro?

Jethnael: si, era A o D

Investigador: Ok, a ver busca si hay algún triángulo que mida 1/8 de cuadro

Jethnael: (Mide varios de los triángulos) Ya, es B

Investigador: Ok, ahora entonces ¿cuántos B’s hay en la tapa?

Jethnael: 27 para que sean los 27/8

Investigador: Si ahora te pregunto ¿a qué fracción de la tapa equivale el cuadro? ¿Qué dices?

Alumno12: Pues hay 27 B’s en la computadora pero hay 8 B’s en el cuadro.

Investigador: Ok, entonces ¿qué fracción es B de la tapa?

Jethnael: Ya, es 1/27

Investigador: Ok ¿entonces que fracción es el cuadro de la computadora?

Jethnael: Pues 8/27 porque en el cuadro necesitas 8 B’s

Como puede verse, los alumnos nuevamente utilizaban de un conmensurador común para cuantificar la relación reciproca entre dos áreas cuya relación no era conmensurable usando un escalar entero. Mas evidencia al respecto puede encontrarse en el Anexo A.2.6

8. Evolución de las conjeturas sobre las conceptualizaciones multiplicativas de los estudiantes (tercera parte)

En los capítulos 6 y 7 hemos visto que los datos y los análisis presentados parecían confirmar que no era necesario realizar ciclos regresivos de análisis que incluyeran la medición, ya que los estudiantes parecían ser capaces de establecer, con relativa facilidad, las equivalencias o diferencias entre la longitud de dos objetos, de proponer relaciones de orden entre tres o más longitudes e incluso de definir cierta longitud como unidad de medida para cuantificar otra longitud. Además, en los dos capítulos anteriores también se mostró evidencia que sugiere que los estudiantes podían reconocer relaciones recíprocas entre una unidad y una fracción unitaria. Sin embargo, a muchos de los jóvenes les resultaba difícil extender este tipo de relaciones recíprocas a otros contextos numéricos. Todo esto correspondía con las conjeturas que había formulado sobre el punto de partida conceptual de los alumnos. De esta manera, la información analizada hasta ese momento sugería que había que apoyarlos para entender las relaciones multiplicativas porque, aunque no las dominaban, estaban listos para aprenderlas.

Además, a nivel colectivo, estudiantes tanto de las primeras como de las segundas secciones mostraron que podían entender, con relativamente poco apoyo, cómo medir dos magnitudes aparentemente inconmensurables entre sí. Ello implicaba aprovechar la relación recíproca que una tercera magnitud guardaba con las dos iniciales. Es decir, el entendimiento de la relación recíproca entre una magnitud y otra sirvió como el fundamento conceptual para entender otro tipo de relaciones recíprocas que ya no podían entenderse únicamente usando un comparador y un comparando, sino que necesitaban de un conmensurador común

En síntesis, la evidencia recolectada sugería que alumnos universitarios, como aquellos que acuden a las aulas en las que trabajo, ya han desarrollado concepciones relativamente complejas de la medición, por lo que no sería necesario apoyarles en este aspecto del pensamiento multiplicativo. La evidencia también sugería que contaban con una comprensión suficiente de las relaciones recíprocas más sencillas, para que fuera un recurso que sirviera para enfrentar situaciones problemáticas en el contexto de la medición de longitudes.

En este punto de la investigación, a lo largo de tres años se habían recolectado datos de diferentes tipos que sustentaban la conjetura de que podía apoyarse el desarrollo del razonamiento multiplicativo de un grupo de estudiantes universitarios como los que yo atiendo, partiendo de que la gran mayoría de ellos tendría una comprensión suficientemente robusta de la relación recíproca entre una unidad predefinida y las fracciones unitarias.No obstante, decidí examinar cómo era que los estudiantes aprovechaban estas bases conceptuales para entender el resto de las relaciones multiplicativas implícitas en las etapas de la Trayectoria Hipotética que presenté en el capítulo anterior y que reproduzco a continuación (ver Tabla 8.1)

Tabla 8.1 Trayectoria Hipotética Inicial

			Etapa por Tipos de Número		
			1	2	3
Relaciones multiplicativas	A	$k \bullet b = a$ *a desconocido* *b conocido* *k conocido*	a unidad b unidad fraccionaria k entero	a entero b entero k fracción	a fracción b fracción k fracción
	B	$a/b = k$ *a conocido* *b conocido* *k desconocido*	a unidad b unidad fraccionaria k entero	a entero b entero k fracción	a fracción b fracción k fracción
	C	$b/a = 1/k$ *a conocido* *b conocido* *1/k desconocido*	a unidad b unidad fraccionaria k entero	a entero b entero k fracción	a fracción b fracción k fracción
	D	$(1/k) \bullet a = b$ *a conocido* *b desconocido* *1/k conocido*	a unidad b unidad fraccionaria k entero	a entero b entero k fracción	a fracción b fracción k fracción

Es importante recordar que en esta investigación las categorías que sirvieron para organizar la información, así como las situaciones que se discutían con los alumnos fueron por un lado, los cuatro tipos de relación multiplicativa (que son los renglones de la tabla anterior) y, por otro, el tipo de números involucrados (que se aprecian en las columnas de dicha tabla).

Consideré que si no era posible examinar todas las relaciones multiplicativas hasta las razones y las tasas de cambio variable, al menos podría explorarse las de las tres etapas iniciales (relacionadas con las fracciones comunes). Vale la pena recordar que estas etapas serían la base para apoyar la comprensión del resto de los conceptos de la ruta, incluyendo: las fracciones decimales y las razones o las tasas de cambio definidas para un intervalo. También es importante tener en mente la estrecha relación que guardan los conceptos anteriores con las profesiones económico administrativas.

En otras palabras, la razón por la que decidí centrarme en el análisis del razonamiento de los jóvenes vinculado con las fracciones comunes se debía a que, como hemos visto en el capítulo cinco, éstas constituyen la base conceptual que permitirá un empleo eficaz y pertinente de conceptos como los porcentajes o las tasas de cambio variables, dentro de un contexto profesional. *Hablaré más al respecto en el capitulo 10, cuando comenté las posibles líneas de investigación futura relacionadas con el razonamiento multiplicativo.*

Puede apreciarse que mi intensión era volver a explorar “hacia delante”. Es importante mencionar, que al realizar este ejercicio mi intención no era la de llegar hasta la formulación una Teoría Instruccional Local, pues aunque

1) Buscaba que mis estudiantes argumentaran su respuesta,

2) Tenía formulada una conjetura sobre la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje

3) Me daba cuenta de las posibles modificaciones que debía realizar a la ruta,

Lo cierto es que no me dí a la tarea de

1) Reiterar varias veces una misma actividad en un mismo grupo para revisar las conjeturas iniciales sobre la evolución del razonamiento de los alumnos o sobre la pertinencia de los medios de representación o las actividades grupales (lo cual contrasta con mis exploraciones “hacia atrás”, que incluyen ajustes reiterados en mis conjeturas sobre el punto de partida usando evidencia de tres años)

2) Guardar coherencia entre los medios de representación empleados por los alumnos y el razonamiento multiplicativo, por lo que a veces usaban modelos discretos para razonar en términos relativos, lo cual confundió bastante a las segundas secciones (esto podrá apreciarse más claramente al examinar los datos)

3) Respetar el orden estricto planteado la Trayectoria Hipotética, pues en ocasiones, introduje temas similares a los correspondientes a una etapa o aplicaciones de las fracciones al tipo de cambio, pero que no había planteado en la trayectoria original.

¿Por qué entonces he decidido mostrar al lector esta información? Porque que el examen de este material sirvió, como se verá más adelante, para fortalecer la evidencia respecto de la viabilidad del punto de partida para apoyar a los estudiantes en el desarrollo de su pensamiento multiplicativo. En breve, puede decirse que mientras la información recopilada en las exploraciones “hacia atrás” sugería un punto a partir del cual ya no era necesario explorar otros antecedentes, la evidencia que muestro en este capítulo sirvió como una primera evidencia de que la relación recíproca entre las unidades fraccionarias y una unidad predefinida podía servir para apoyar la comprensión de otros conceptos multiplicativos. En otras palabras tal relación recíproca parecía ser el punto de partida de los jóvenes porque ya no necesitaban ir “más atrás” y en cambio apoyaba su comprensión de conceptos mas elaborados.

Además, este material ayudó a revisar la Trayectoria Hipotética y a mejorarla. Esta trayectoria se muestra en el capítulo 9. La exploración formal de la Trayectoria Hipotética planteada, y la formulación de la Teoría Instrucciónal Local, es una tarea que queda pendiente para futuras investigaciones. Éstas implicarían el análisis cíclico de los tipos de razonamiento mostrados por los estudiantes, de los medios de representación empleados y de las actividades grupales, así como de los criterios que guíen la adaptación de la secuencia de enseñaza, conforme se trabaje con diferentes grupos de estudiantes.

Quizá pueda entenderse el examen de la información que a continuación presento, simplemente como un primer paso hacia la formulación de una Teoría Instruccional Local. Aun así, la riqueza de los razonamientos que hicieron los alumnos, de los medios de representación que se discutieron en clase, e incluso las confusiones que surgieron debido a medios de representación poco favorables para el razonamiento multiplicativo, fueron de gran utilidad, pues como se verá, ayudan a ilustrar la profundidad y los alcances de las relaciones recíprocas.

Antes de comenzar con el análisis es necesario comentar que debido a la gran cantidad de información que recopilé únicamente presento algunos ejemplos del razonamiento multiplicativo de los estudiantes, pues su único propósito es ilustrar el tipo de argumentaciones y simbolizaciones que utilizaron. Sin embargo estos ejemplos abarcan todas y cada una de las etapas relaciones multiplicativas de la trayectoria que había diseñado. Además, solían encontrarse importantes coincidencias entre los razonamientos de las diferentes secciones, incluso entre los argumentos de los jóvenes pertenecientes a las primeras y segundas secciones, lo único que cambiaba, una vez más, era el ritmo de aprendizaje de cada sección.

8.1 Análisis de las discusiones colectivas correspondientes a la segunda etapa la Trayectoria Hipotética

Como se recordará, antes de iniciar la recolección de datos que llevé a cabo en el primer semestre de 2009, decidí formular una primera versión de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje con el fin de tener una primera idea del tipo de situaciones que discutiría con los estudiantes tanto a nivel colectivo como en las entrevistas. Las primeras tres etapas de esta trayectoria eran las que he mostrado en la Tabla 8.1. Vale la pena recordar que en esta Trayectoria Hipotética poco a poco se introducían números y relaciones multiplicativas cada vez menos familiares para los estudiantes.

En un inicio simplemente exploré si los jóvenes reconocían una relación entre una fracción unitaria y una unidad. Luego indagué si podían establecer una relación recíproca entre dos números enteros. Posteriormente encontré que para lograr relacionar dos magnitudes inconmensurables entre sí habían empleado una tercera longitud, el conmensurador común.

El proceso paulatino con el que ocurrieron estos eventos sugería que previamente los estudiantes carecían de un medio de representación y de medios conceptuales que les ayudaran a expresar la relación entre dos magnitudes aparentemente inconmensurables por medio de un escalar racional.

En cuanto a las progresión de las relaciones multiplicativas, los estudiantes habían mostrado ser capaces de reconocerlas siempre y cuando se tratara de aquellas “directas”, es decir de la forma $k \bullet b = a$, pues de alguna manera correspondían al concepto popularizado de multiplicación. No obstante, parecía que los estudiantes desconocían que un número entero *a* puede medirse en términos de otro *b* y que existen formas en las que pueden hacerse conmensurables a través de una fracción ($k=a/b$), por ello me pareció razonable conjeturar que la tarea de medir a b en términos de *a* ($1/k=b/a$), así como la de encontrar un número entero desconocido b sabiendo que se relaciona de forma recíproca y fraccionaria con otro entero a ($[1/k] \bullet a=b$) eran más complejas

Mi interés entonces era ver si los estudiantes podían aprovechar los conceptos y estrategias discutidos en la introducción al pensamiento multiplicativo, al interactuar con situaciones progresivamente más complejas, e incluso si podían generar otros nuevos o refinar los anteriores.

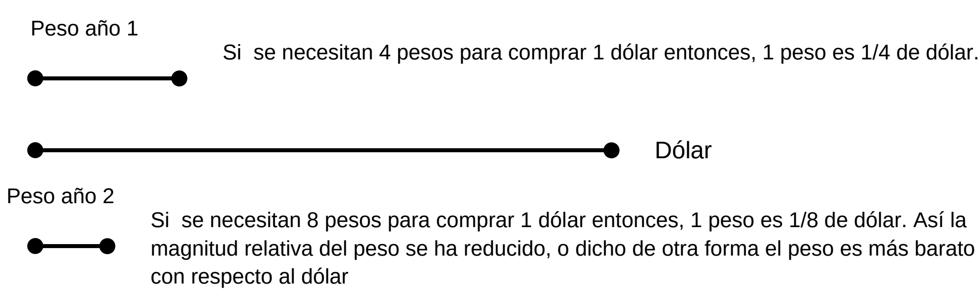
Me parecía que en esa etapa introductoria los estudiantes habían ido conceptualmente más allá de la primera etapa de la trayectoria al conceptualizar el conmensurador común. Además, mi impresión era que algunos deseaban ver cuál era la aplicación práctica de las actividades que habían estado realizando hasta ese momento. Por esa razón decidí continuar las discusiones colectivas primeramente con una aplicación del conmensurador común, el tipo de cambio entre dos monedas de diferentes países, y sólo después inicié la discusión con temas propios de la ruta.

8.1.1 Aplicación del conmensurador común, el tipo de cambio

Quizá una de las aplicaciones más importantes de las propiedades recíprocas de las fracciones comunes, las fracciones decimales y los números decimales, dentro de las áreas económico administrativas, es el tipo de cambio nominal entre dos monedas de dos diferentes países o regiones económicas.

El tipo de cambio nominal se define como la cantidad de unidades monetarias de un país que son necesarias para comprar una moneda de otro país (Parkin, 2007). Naturalmente, el tipo de cambio nominal entre dos monedas guarda una relación recíproca, pues si se necesitan n unidades monetarias del país A para comprar una unidad monetaria del país B, entonces se necesitarán $1/n$ unidades monetarias del país B para comprar una unidad monetaria del país A. Por tanto, también se sigue que si el precio de B, en términos de A, se encarece (la magnitud de B con respecto a A es más grande), entonces el precio de A, en términos de B, se abarata (la magnitud de A con respecto a B es más pequeña; ver figura 8.1). Dicho todavía en otros términos, si la moneda del país B se encarece con respecto a la del país A, se necesitan más unidades de A para adquirir una de B. Al mismo tiempo, A se está abaratando con respecto a B; es decir, se necesita una fracción menor de B para adquirir una moneda de A.

Figura 8.1 Movimientos del tipo de cambio



Dominar conceptualmente estas ideas es muy importante para un profesionista de las áreas económico administrativas, pues le permite aprovechar los movimientos del tipo de cambio para aumentar sus ingresos, vender las mercancías de una empresa en el país donde sea más provechoso, adquirir activos financieros extranjeros a precios bajos, etc.

Como nos muestra la figura anterior, el entender el concepto del tipo de cambio nominal es sencillo, si se lo concibe como la relación recíproca entre dos magnitudes: si la magnitud A es relativamente más pequeña que B, entonces B tiene que ser relativamente más grande que A. Sin embargo, a los estudiantes universitarios de las áreas económico administrativas, este tema les puede resultar muy difícil debido a los recursos algorítmicos que utilizan y a la manera en que los interpretan. Así que mi interés era explorar si los conceptos de las relaciones recíprocas entre fracción unitaria y unidad predefinida podían convertirse para los estudiantes en recurso con el cual aproximarse a las relaciones recíprocas, en la modificación del tipo de cambio. Comencé por presentarle a las cuatro secciones situaciones relativamente sencillas como la siguiente:

Si son necesarias 7 rupías para comprar un marevedís ¿a cuántos marevedís equivale una rupía? ¿A cuántas rupias equivale un marevedís? Dibuja tus resultados

Ninguna de las secciones tuvo dificultades para establecer que una rupía era 1/7 de maravedí, y que un marevedí equivalía a 7 rupías. Tampoco tuvieron dificultades para realizar un dibujo. Para contar con un ejemplo veamos la siguiente conversación con los alumnos de la primera sección de Contaduría:

Investigador: ¿A cuántas rupías equivale un maravedí?

Varios: A siete

Investigador: ¿A cuántos maravedís equivale una rupía?

Carlos: A 1/7

Investigador. ¿Pueden explicar un poco mas?

Adriana: Porque 7 rupías hacen un marevedí

Luego continué con situaciones sencillas que involucraban el uso de enteros.

Si son necesarios 270 yenes para comprar 3 dólares ¿a cuantos yenes equivale un dólar? ¿A cuantos dólares equivale un yen? Dibuja tus resultados

Los jóvenes tampoco mostraron dificultades para comentar que un dólar equivalía a 90 yenes y que un yen equivalía a 1/90 de dólar, también realizaron el dibujo correspondiente.

Veamos la siguiente conversación también con los alumnos de la primera sección de Contaduría:

Investigador: Entonces ¿si 3 dólares valen 270 yenes, cuántos yenes vale un dólar?

Fabiola: Pues 90

Investigador: ¿Y cómo saben?

Carlos: Porque si divides 270 entre 3 te da 90

Investigador: ¿Y un yen a cuántos dólares equivale?

Emilio: A 1/90

Investigador: ¿por qué?

Emilio: Porque si el yen es 90 veces mas chico que el dólar es 1/90

Aunque en ese momento, debido a la sencillez de las situaciones, parecía los estudiantes no enfrentaban problemáticas importantes para establecer la relación recíproca del tipo de cambio entre dos monedas, al momento de realizar estas reflexiones me da la impresión de haber cometido entonces una falla instruccional importante, y que hubiese tenido que corregir de estar generando una Teoría Instruccional Local. En lugar de insistir en el uso de un modelo de representación unidimensional, continúo y comparativo (el modelo de Freudenthal, 1983; y de Thompson y Saldanha, 2003), dejé que los alumnos utilizaran el modelo bidimensional, discreto y fraccionario al que estaban acostumbrados.

Mis intervenciones con los diferentes grupos continuaron con situaciones que involucraban magnitudes expresadas en números enteros que no eran exactamente divisibles entre sí:

Si son necesarios 5 euros para comprar 6 dólares, ¿a cuantos dólares equivale un euro? ¿A cuantos euros equivale un dólar? Dibuja tus resultados

Resolver este ejercicio no fue nada sencillo, incluso para los estudiantes de las primeras secciones. Justificar su respuesta usando un dibujo fue especialmente confuso para ellos. Veamos, como ejemplo, la siguiente discusión con los alumnos de la primera sección de Administración.

Marcela: Serían 6/5 de dólar equivale a un euro ¿no?

Investigador: Ok, ¿qué hiciste?

Marcela: No sé, todavía no he podido explicarlo

Carolina: No, un euro equivale a 5/6 de dólar ¿no?

Marcela. ¿Un euro sería un sexto de dólar?

Investigador: Ok, piensen todavía unos minutos más. Recuerden lo que se pregunta no es que dibujen los 5 euros y los 6 dólares, sino cuánto vale un euro y cuánto vale un dólar

Alumnos: (Trabajan otros tres minutos)

Carolina: El dólar es más grande que el euro

Investigador: Ok su compañera dice que el dólar es más grande que el euro, entonces les tengo una pregunta, ¿porqué necesito más dólares para igualar los euros?

Varios: No, el dólar es más pequeño

Investigador: ¿Qué tanto mas pequeño?

Héctor: 1/6… mmm … no 1/5 perdón

Investigador: ¿Cómo saben a cuántos euros equivale un dólar? Recuerden lo importante es saber cómo es un euro comparado con un dólar

Marcos: Un dólar equivale a 6/5 de un euro

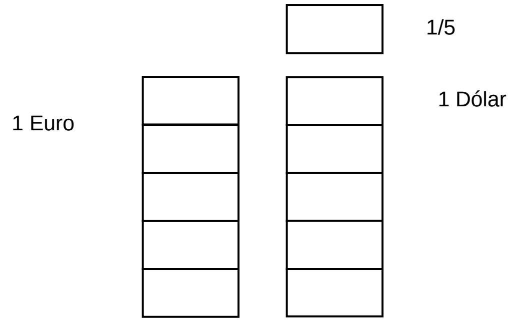
Investigador: ¿O sea que el dólar es mas grande que el euro?

Sofía: ¡Noooooo! Un dólar equivale a 5/6 de euro

Investigador: Estoy escuchando varias propuestas que parecen correctas pero también quiero que expliquen usando un dibujo

Marcela: Es que tenemos 5 euros iguales a 6 dólares (pasa al pizarrón y comienza a dibujar la siguiente figura, ver figura 8.2)

Figura 8.2 Primera comparación entre dólar y euro



Investigador: ¿Este es un euro? (señala figura 8.2 de la izquierda)

Marcela: Sí, y lo dividí en 5

Investigador: ¿Entonces uno de estos cuadritos es 1/5 de euro?

Marcela: Sí, y el dólar tiene todavía otro 1/5 de euro

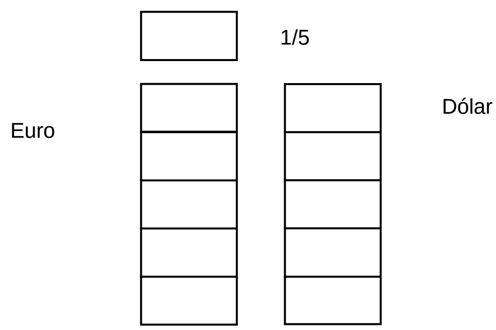
Investigador: ¿Entonces estas diciendo que el dólar es más grande que el euro?

Carolina: Sí, el dólar es más grande

Héctor: No, no es cierto

Marcela: A ver creo que ya (Borra y dibuja las siguiente figura, figura 8.3)

Figura 8.3 Segunda comparación entre dólar y euro



Investigador: ¿Entonces están seguros de que el euro es más grande que el dólar?

Marcela: Si porque si necesitas 5 euros para comprar 6 dólares es obvio que es más grande el euro

Investigador: ¿Por qué es obvio?

Marcela: Porque necesito menos euros para comprar más dólares

Investigador: Ok, muy bien, ahora díganme ¿Cuánto vale uno los cuadritos? ¿1/5 de que?

Sofía: No, vale 1/6

Investigador: A ver, 1/5 o 1/6 ¿de qué?

Varios: Es un 1/6 de euro

Sofía: Es que en el dibujo (figura 8.3) estamos diciendo que 5/6 de euro equivalen a 5/5 de dólar (señala cómo coinciden los dibujos en el quinto cuadro)

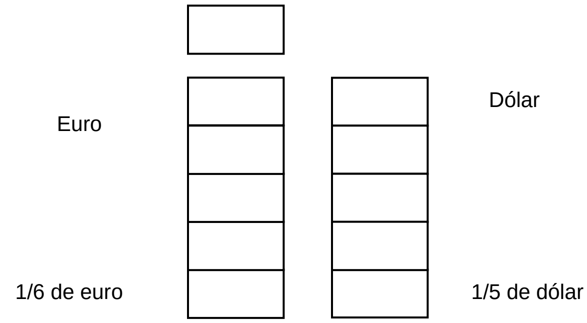
Investigador: Ok, entonces 1/6 de euro ¿a qué fracción del dólar es igual?

Sofía: Entonces 1/5 de dólar es igual a un euro

Investigador: ¿1/5 de dólar es igual a todo un euro?

Héctor: No, 1/6 de euro es igual a 1/5 de dólar (ver figura 8.4)

Figura 8.4 Tercera comparación entre dólar y euro



Investigador: Ok, bien, ahora también me gustaría que me dijeran ¿Qué hicieron para llegar a la conclusión de que un euro son 6/5 de dólar? ¿o que un dólar son 5/6 de euro?

Carolina: Es que se parece a cuando dividíamos pesos para tener dólares…

Investigador: ¿En qué se parece?

Carolina: En que tenemos que dividir

Investigador: ¿Pueden explicar un poco más?

Carolina: Que 5 entre 6 es 5/6 y 6/6 es 1

Investigador: ¿Y entonces cual es la conclusión?

Héctor: Pues lo que ya dijimos 5/6 de euro es un dólar

Investigador: ¿Y que harían en el caso de los euros'

Marcela: Pues ahora divides entre 5

Investigador: ¿Y qué les queda?

Marcela: que 6/5 de dólar es un euro

De esta manera parece que los estudiantes pudieron reconocer el conmensurador común entre las dos monedas, y que éste podía expresarse como 1/5 de dólar o 1/6 de euro. Además pudieron justificar su respuesta por medio de un dibujo y también detectaron que para hallar el valor de una moneda términos de la otra podían aprovechar la operación de la división.

Sin embargo creo que el ejercicio pudo haberse aprovechado mucho más. Si mi objetivo hubiese sido generar una Teoría Instruccional, hubiese tenido que corregir algunas situaciones que dejé pasar. En primer lugar, puede apreciarse que los alumnos llegaron a la respuesta correcta utilizando sea una regla de tres o una división, pero en ningún momento justificaron conceptualmente por qué habían utilizado esa división. Así, dejé que usaran una justificación algorítmica, lo cual no estaba de acuerdo con los criterios de socialización conceptual que había fijado al inicio de mi recolección de datos. Más importante fue el hecho de que dejé que los estudiantes sólo tratasen de dibujar una respuesta sin vincularla de forma explícita con los temas anteriores.

Al momento de escribir estas reflexiones, me da la impresión de que para resolver este problema pude haber proporcionado a los estudiantes materiales unidimensionales para que trataran de llegar a su respuesta y examinar sus estrategias conceptuales. Por ejemplo, pude haberles proporcionado dos tiras de estambre del mismo tamaño pero de diferente color, digamos azul y rojo, decirles que la tira azul valía 5 euros y que la tira roja valía 6 dólares, pedirles que encontraran a cuantos dólares equivalía un euro, y a cuantos euros equivalía un dólar. Después, tendría que observar qué estrategias seguían.

8.1.2 Segunda Etapa, Etapa A, Relaciones del tipo k • *b*=*a* con *b,a* enteros *k* fracción

Una vez que abordé la aplicación anterior inicié propiamente las discusiones grupales de temas relacionados con la ruta. Mi conjetura era que al familiarizar a los estudiantes con el uso de las fracciones al realizar razonamientos multiplicativos, después también podrían usar a los números y fracciones decimales, al efectuar este tipo de razonamientos.

Sin embargo, una vez más debido a una distracción, las primeras conversaciones grupales no fueron precisamente sobre las relaciones correspondientes a la etapa 2A de la trayectoria, es decir, del tipo:

$k \bullet b = a$, con b y a enteros y k fracción

Si no más bien de un tipo que no había considerado en la trayectoria, el cual era

$k \bullet b = a,$ con b entero y a y k fracciones

Como se verá un poco más adelante, a pesar del desvío anterior, posteriormente sí regresé al orden que me había propuesto en la trayectoria. Sólo al momento de analizar los datos me di cuenta de este salto, pues mi intensión original era trabajar con números enteros. No obstante, este error involuntario sirvió para identificar la necesidad de añadir dos nuevas relaciones multiplicativas a la trayectoria hipotética, una en la que a, b y k fuesen enteros (previo a la etapa 2) y la que acabo de mencionar, en la que b es entero y a, k fracciones (posterior a la etapa 2). Retomaré estas modificaciones a la Trayectoria Hipotética en la sección 9.1.

La primera pregunta que discutí grupalmente fue *¿Cuál es la mitad de tres?* Para tener un ejemplo de los argumentos que solían dar los alumnos a continuación presento la conversación que mantuve con la primera sección de Contaduría.

Investigador: ¿Cuál es la mitad de tres?

Alejandro: 1.5

Investigador: Ok, pero denme la respuesta usando fracciones

Carlos: uno y un medio

Investigador: Bien, ¿hay otra forma de decirlo?

Martín: 1/6

Investigador: A ver ¿están de acuerdo que la mitad de tres es 1/6?

Enrique: No, 1/6 es la mitad de 1/3 y 1/3 es menos de uno

Alejandro: 9/6 es la mitad de 3

Investigador: Ok, ¿otra forma?

Juan José: 6/18

Investigador: ¿6/18 a qué equivale?

Enrique: A 1/3

Investigador: ¿y 1/3 es la mitad de 3?

Varios: ¡Noooooooooo!

Carlos: 4/2

Investigador: ¿Qué opinan 4/2 es una alternativa para expresar la mitad de 3?

Adriana: No, porque 4/2 es 2

Alejandro: Entonces la mitad de 3 es 5/2

Investigador: Pero 5/2 es mas que 4/2 ¿no?

Enrique: Entonces 3/2

Investigador: Ok bien, pero ahora ¿cómo demuestran que la mitad de 3 es 3/2?

Enrique: Porque 6/2 es 3

Investigador: Ok, ¿les convence la explicación de su compañero?

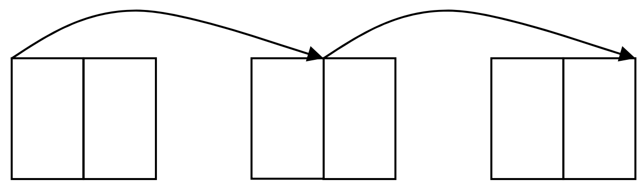
Alumnos: (silencio)

Investigador: Pasa al pizarrón y dibuja tu explicación

Enrique: (pasa al pizarrón y dibuja la figura 8.4) En 3 enteros hay 6/2, y la mitad de eso son 3/2 (ver figura 8.5)

El grupo pareció aceptar esta justificación

Figura 8.5 Justificación conceptual de la mitad de 3



En la siguiente pregunta *¿Cuál es la cuarta parte de 7?,* ya no les fue tan sencillo presentar una justificación, incluso a las primeras secciones. Revisemos la conversación realizada con los alumnos de la primera sección de Administración.

Investigador: ¿Cuál es la cuarta parte de 7?

Sofía: 4/7

Investigador: ¿Por qué piensas que es eso?

Sofía: Porque divides 7 entre cuatro

Investigador: ¿Y te parece que te da ese resultado cuando haces esa división?

Sofía: ¡Ah, no!, Serían 7/4

Investigador: Muy bien, y ahora, utilizando un dibujo ¿Cómo le harían para demostrarle a alguien que la cuarta parte de 7 es 7/4? Piensen un poco

Antonio: ¿Cómo? ¿Tenemos que dibujar el entero y los cuartos?

Investigador: No, tienen que demostrar que la cuarta parte de 7 es 7/4

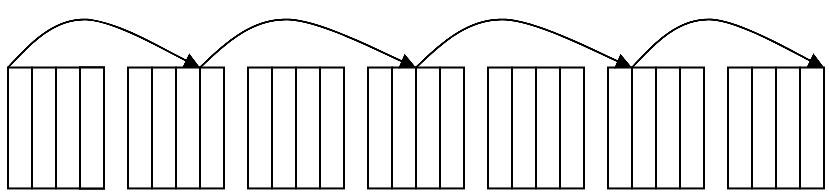
Alumnos: (Piensan durante algunos momentos, pasan 3 alumnos al pizarrón a dibujar su respuesta)

Rene: (Dibuja 7/4 y los ilumina) Ya aquí están los 7/4

Investigador: Bien, pero ¿cómo nos convences de que eso que dibujaste es la cuarta parte de 7? Porque tu estas dibujando 7/4 pero no nos estas explicando

Marcos: Pues es que en 7 tenemos 28 cachitos, y aquí sólo estamos iluminando 7 de esos, y 7 nos da la cuarta parte de 28 (Ver figura 8.6).

Figura 8.6 Justificación conceptual de la cuarta parte de 7



De esta manera, los razonamientos de los alumnos sugieren que incluso este tipo de situaciones ya implicaban cierto reto conceptual para ellos. Así, para comprender por qué una fracción podía relacionarse recíprocamente con otra a través de un escalar entero parecía que los jóvenes necesitaban coordinar tres aspectos:

1) El comparando (ej. 7) necesitaba ser expresado en nuevas unidades (ej. 28/4) para que fuese posible encontrar su fracción unitaria

2) El comparador (7/4) también tenía estar expresado en las nuevas unidades (1/4)

3) El comparador (7/4) y el comparando (28/4) guardaban una relación recíproca entre sí que era independiente de las unidades empleadas para cuantificarlos (ej. el comparador es 1/4 del comparando, y el comparando es 4 veces el comparador)

Los alumnos continuaron utilizando este tipo de estrategias para resolver ejercicios cada vez más complejos. Uno de ellos fue *¿Qué cantidad equivale a 13/7 de 3?*

Veamos la siguiente discusión con los alumnos de la primera sección de Administración.

Investigador: ¿qué cantidad equivale a 13/7 de 3?

Antonio: 39/7

Investigador: Ok, la operación fue fácil, pero ya saben lo importante es hacer el dibujo.

Carolina: Yo quiero pasar (pasa al pizarrón, dibuja 21/7 e ilumina 13/7). Ya está

Investigador: Ten cuidado porque les estoy preguntado por 13/7 pero de 3 enteros y además al final quedó 39/7

Marcela: Tienes que dibujar más séptimos ahí nada más tienes 21/7 (Dibuja 42/7)

Investigador: A ver, esa es una buena observación ¿por qué si originalmente nada más tiene 3 enteros ahora su compañera tiene que dibujar 6 barras?

Antonio: Por que 13/7 es casi 2 enteros

Investigador: ¿y eso como se relaciona con las 6 barras?

Héctor: Porque 39/13 son 3

Investigador: Ajá, y otra ¿cuál es la relación con las 6 barras?

Antonio: Porque 13/7 es más de uno

Investigador: Creo que ya te entendí, pero a ver déjame replantear la pregunta al grupo ¿por qué cuando multiplicábamos 7 por 1/4 sólo dibujábamos 7 barras? Y ahora, ¿ por que cuando multiplicamos 3 por 13/7 dibujamos 6 barras?

René: Porque las fracciones anteriores no rebasaban el entero

Antonio: Es que si multiplicaras el 3 por 14/7 sería como multiplicarlo por 2, entonces necesitarías el doble de barras

Investigador: ¿Siguieron lo que dijo?

Alumnos: (señales de aprobación pero también silencios)

René: Lo que pasa es que estas multiplicando el 3 por algo mayor a 1 entonces salen más de 3 barras

Investigador: Así es, muy bien. Ok, ahora ¿y como le demostrarían a alguien que 39/7 son las 13/7 de 3? Digo usando el dibujo

Alumnos: (Piensan algunos momentos)

Investigador: Ok, ¿cuál es la séptima parte de 3?

Marcela: Pues 7/3, mmm, no espere 3/7

Investigador: Ok de acuerdo, entonces eso cuánto abarca del dibujo que ya hicieron

Marcela: Pues sólo tres cuadros (pasa al pizarrón e ilumina los tres cuadros)

Investigador: Bien, y ¿cómo saben que 3/7 es la séptima parte de 3?

Erick: Porque si dibujas 3 enteros son 21/7 y entonces 3/7 se repite 7 veces

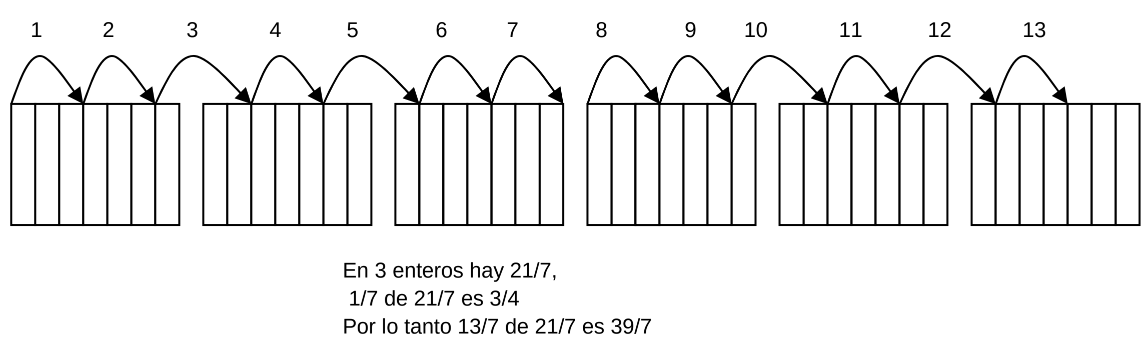
Investigador: Ok, ahora ya saben que 1/7 de 3 es 3/7 ¿cuánto es 13/7 de 3?

Alumnos: (piensan durante algunos momentos) 39/7

Investigador: Ok y ¿por qué?

Erick: Porque 3/7 se repite 13 veces en 39/7 (ver figura 8.7)

Figura 8.7 Justificación conceptual de 13/7 de 3



Así, los estudiantes de la primera sección de Administración prepararon colectivamente una justificación en forma de argumento en tres pasos

En 3 enteros hay 21/7,

1/7 de 21/7 es 3/7,

por lo tanto 13/7 de 21/7 es 39/7

Después de realizar los ejercicios anteriores, discutí con los alumnos algunos ejercicios que sí correspondían a las relaciones multiplicativas de la Etapa 2A. En general me pareció que ninguna sección ni de Administración, ni de Contaduría tuvo dificultades con este tipo de situaciones. Por ejemplo, se discutió el siguiente problema con la segunda sección de Administración, la más rezagada de las cuatro secciones:

Carlos tiene hoy $47 600 en el banco, el sabe que dentro de un año el tendrá 9/7 partes de lo que hoy tiene, ¿Cuánto dinero tendrá?

Investigador: Recuerden que deben contestar utilizando fracciones, no usen números decimales, por ahora

Alumnos: (Trabajan por unos tres minutos)

Rocío: Son $6 800

Ricardo: No eso es lo que sumas a la cantidad original

Fernando: No, porque eso es un 1/7 de lo original y tienes que sumar 2/7 a la cantidad original

Gabriela: Puede ser eso o puedes multiplicar la cantidad original por 9/7 porque ya Incluirías la cantidad original más los 2/7 que dicen

Investigador: Muy bien todos, ok, entonces ¿qué operaciones hicieron?

Gabriela: Dividir $47 600 entre 7 y luego multiplicar por 9 y eso te da $61 200

Investigador: Bien, entonces cómo dibujaría este ejercicio

Fernando: Pues 7/7 y todavía otros 2/7

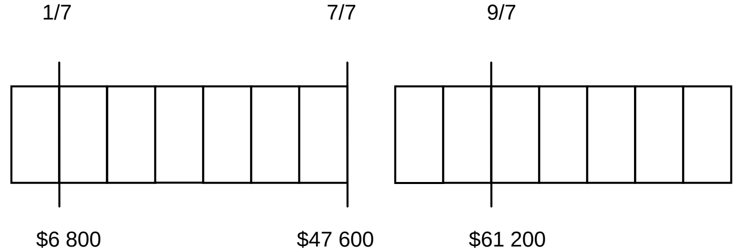
Gabriela: O también todos los 14/7 y sólo necesitarías 9/7

Investigador: Los dos están bien, ¿y cuánto valdría cada séptimo?

Rocío: $6800

Investigador: Muy bien, muy bien, ok, ¿puedes pasar a dibujar? (dirigiéndose a Rocío) (Ver Figura 8.8)

Figura 8.8 Fracción de una cantidad monetaria



Juzgué que aunque los jóvenes no emplearon un modelo unidimensional y aunque tampoco era continuo, sino discreto y fraccionario, su argumento era válido y de hecho estaban razonando multiplicativamente bajo el criterio de esta Etapa 2A. Así que tomé esta etapa como socializada.

Parecía así que la razón por la que éste tipo de problemáticas no habían representado un reto conceptual importante para los jóvenes es porque involucraba las ideas de fracción como fracturador y los algoritmos de la división y la multiplicación. Además, las problemáticas usaban cantidades expresadas en unidades predefinidas y no en fracciones unitarias. Todas estas nociones que les eran familiares a los alumnos. Así, por ejemplo si les pedían encontrar 9/7 de $61 200, sabían que tenían que dividir tal cantidad entre 7, y luego multiplicar el resultado por 9. En síntesis, como el contexto numérico les era familiar, los jóvenes podían aplicar los algoritmos que les eran conocidos. Dadas estas condiciones, este tipo de situaciones no fueron difíciles de comprender para los alumnos.

8.1.3 Segunda Etapa, Etapas B y C, Relaciones del tipo $\frac{a}{b}=k$, $\frac{b}{a}=\frac{1}{k}$ con *b,a* enteros *k* fracción

Mi propósito al realizar las actividades en esta etapa era explorar las estrategias conceptuales que los alumnos desarrollarían para advertir y explicar la relación recíproca existente entre dos números enteros que no eran directamente conmesurables entre sí; es decir, que se relacionaban por un escalar que no era ni un entero ni una fracción unitaria.

La relevancia de estas actividades, aparentemente sencillas, radicaba en el hecho de que eran el antecedente conceptual para que posteriormente los estudiantes pudieran establecer la relación entre dos montos de dinero a través de la acumulación de intereses. Aquí estoy haciendo referencia a casos como el que describí en la sección 6.3 en el que una familia deposita $110 000 en un mes inicial y al siguiente cuenta con $114 400, pero desconoce la tasa de interés a la que estaba creciendo su dinero.

Poder relacionar las dos cantidades de forma multiplicativa requería de que se reconociera que la cantidad final pudiera interpretarse como el producto de multiplicar el depósito inicial por cierto factor. De los datos que hemos revisado con anterioridad en la sección 6.3, hemos podido ver que esta labor no era trivial para los estudiantes.

Así que, era necesario que descubrieran y discutieran un antecedente conceptual más sencillo que los preparara para realizar ese tipo de razonamientos.

Esta etapa también es importante, porque podría servir para preparar a los jóvenes a generar estrategias para resolver situaciones aún más complejas como aquellas propias de la Etapa 2D. Este tipo de relaciones se examinan con mayor detalle en la siguiente sección.

Comencé entonces mi exploración con situaciones sencillas…

¿Por qué factor multiplico 3 para obtener 4?

¿Por qué factor multiplico 4 para obtener 3?

Para ver un ejemplo del desarrollo de los razonamientos de los alumnos revisemos la siguiente discusión con los alumnos de la primera sección de Administración:

Investigador: Ok, primero ¿Por qué factor multiplico 3 para obtener 4? Recuerden que para contestar tienen que usar fracciones

Antonio: Pues por 4/3

Investigador: Ok, muy bien, pero ya saben ahora ¿cómo sería el dibujo? Y fíjense no les estoy pidiendo un dibujo en el que repitan 3 veces 4/3, sino que hagan un dibujo en el que muestren que 4/3 de 3 es 4

Alumnos: (piensan unos dos minutos)

Isaac: Pues se tienen que dibujar los 4 enteros

Héctor: Se tiene que dibujar 3 veces 1.3

Investigador: Recuerden, que por ahora no trabajaremos con decimales y también que no tienen que repetir 3 veces 4/3, sino explicar por qué 4/3 es 4

Antonio: Cada entero puede dividirse en tres y tomar 4/3 y luego ya lo repites

Investigador: Es un poco lo que han planteado tus compañeros, pero aquí estamos tratando de explicar por qué 4/3 de 3 es 4

Alumnos: (Piensan unos tres minutos)

Marcos: Pues 1/3 de 3 es 1

Investigador: Ok, ¿qué mas puedes decir?

Marcos: Si 1/3 de 3 es uno y luego por 4 te da 4

Marcela: ¡Ah, ya!, 1/3 de 3 es 1, entonces 4/3 de 3 es 4. (ver figura 8.9)

Investigador: Muy bien. Ahora, ¿por qué factor multiplico 4 para obtener 3?

Antonio: Por 3/4

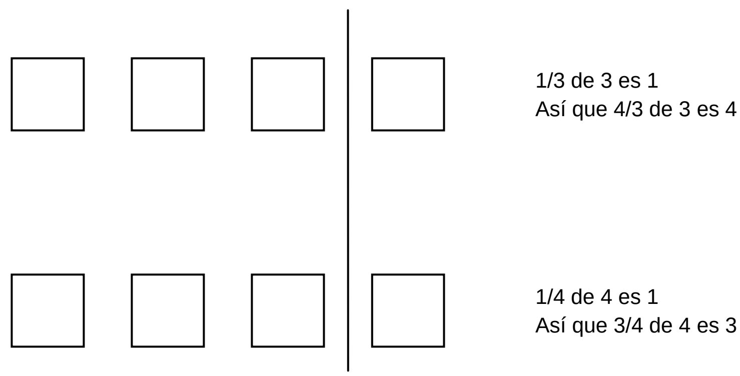
Investigador: Ok ahora, ¿pueden explicar?

Carolina: Porque 1/4 de 3 es 1,

Varios: ¡Nooooo!

Carolina: ¡No! Más bien 1/4 de 4 es 1, y 3/4 de 4 es 3 (ver figura 8.9)

Figura 8.9 Justificación conceptual de la fracción de un entero



De esta forma para ser capaces de establecer la relación recíproca entre los dos números enteros anteriores los alumnos tenían que:

1) Identificar un conmensurador común, en este caso la unidad predefinida.

2) El conmensurador equivalía a dos distintas fracciones unitarias dependiendo de cuál entero sirviera de comparador y cual de comparando.

Una vez que pudieron reconocer el doble papel que jugaba la unidad predefinida en este tipo de ejercicios, aprovecharon su dominio de los algoritmos de la división y de la multiplicación para expresar cada entero en términos del otro.

Posteriormente, Los alumnos pudieron extender este tipo de justificaciones y soportes, a situaciones aparentemente más complejas. Por ejemplo, pudieron extenderlas para responder a las siguientes situaciones:

¿Por qué factor multiplico 63 para obtener 81? ¿Por qué factor multiplico 81 para obtener 63?

Los jóvenes de todas las secciones justificaron rápidamente diciendo que 1/63 de 63 era 1, así que 81/63 de 63 era 81, y por otro lado, que 1/81 de 81 era 1 así que 63/81 de 81 era 83. Nuevamente estas situaciones ya no resultaron un reto para los estudiantes de ninguna sección porque retomaban el uso de los algoritmos de la división y de la multiplicación así como las unidades predefinidas, en lugar de las fracciones unitarias.

8.1.4 Segunda Etapa, Etapa D, Relaciones del tipo $\frac{1}{k}$ • *a=b* con *b,a* enteros *k* fracción

Me pareció especialmente importante explorar las relaciones de este tipo con los estudiantes porque tendrían que establecer la relación recíproca entre dos números enteros, pero conociendo únicamente uno de ellos (a) y sabiendo que guardaba una relación recíproca ($1/k$) con otro número desconocido (b).

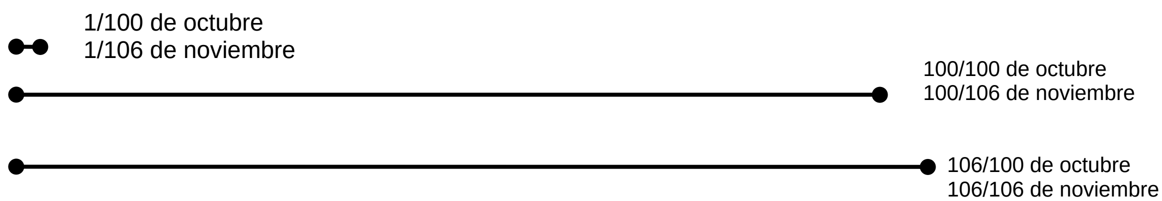
Permítaseme discutir detalladamente un ejemplo para advertir la importancia conceptual y práctica de entender este tipo de relaciones. Cuando en un periodo de tiempo una persona cuenta con la posibilidad de depositar su dinero en el banco, éste le otorga un rendimiento como premio por permitirle utilizar sus recursos en otras actividades, y por esperar a la devolución de su dinero. La magnitud del rendimiento se expresa a través de la tasa de interés. Es posible conocer el monto final que tendrá la persona en el siguiente periodo conociendo simplemente el monto inicial y la tasa de interés. Por ejemplo, si una persona deposita $75 000 en el banco en un año determinado y se le ofrece una tasa de interés anual del 5%, entonces, al siguiente año la persona tendrá $75 000 • 1.05 = $78 750.

Sin embargo, existen ocasiones en las que las personas necesitan transformar cierta cantidad de dinero que recibirán en un periodo futuro a su “valor presente”, para poder compararlo con otras opciones que tienen en la actualidad. Este podría ser el caso de una persona que está tratando de vender su automóvil y a la que un cliente potencial le ofrece comprárselo a $45 000 el mes siguiente (noviembre), pero a la que un amigo le ofrece hacer un depósito hoy (octubre) con tal de disponer del auto de manera inmediata. La persona que vende su auto sabe que el banco le está ofreciendo una tasa de interés mensual del 6% ¿De cuanto tendría que ser el depósito mínimo que tendría que aceptar la persona para quedar indiferente entre el depósito actual de su amigo y el pago futuro ofrecido por el otro cliente?

Si se lo piensa, este problema puede resolverse fácilmente utilizando fracciones. Para que el vendedor permaneciera indiferente entre vender el coche en noviembre o recibir el depósito en octubre, se necesitaría que el crecimiento porcentual del depósito bancario, sumado a los intereses fuese igual a los $45 000 que el vendedor recibirá en noviembre. En otras palabras los 106/100 del depósito de octubre tendrían que ser iguales a $45 000 de noviembre.

Pero, si $45 000 fuesen iguales a 106/100 del depósito de octubre, eso querría decir que dicho depósito tendría que ser igual a 100/106 de $45 000. Es decir el depósito necesario para dejar indiferente al vendedor tendría que ser de $42 452.83 (Ver figura 8.10)

Figura 8.10 Razonamiento para encontrar el monto del depósito necesario para dejar indiferente al vendedor



Suponiendo que se hiciera un depósito bancario, en octubre habría 100/100 del depósito de octubre
Debido a los intereses, en noviembre habría 106/100 del depósito de octubre
Visto de otra forma, en noviembre habría 106/106 del monto de noviembre
Pero eso implica que en octubre habría 100/106 del monto de noviembre
Como el monto que habría en noviembre es $45 000, en octubre habría (100/106) • $45 000 = $42 452.83

Puede advertirse entonces, que este tipo de razonamientos resultan muy útiles si se deseara encontrar la equivalencia de un monto futuro en términos de un monto presente. Debido a las dificultades que este tipo de razonamientos planteó para los alumnos de las segundas secciones ejemplificaré los argumentos presentados en clase apoyándome en las discusiones sostenidas con los jóvenes de las primeras secciones, cuyos razonamientos eran por lo general más organizados. No obstante, hay que mencionar que los estudiantes de las segundas secciones también lograron garantizar sus argumentos aunque, una vez más, requirieron de más tiempo y de discutir más ejemplos. Entre el tipo de situaciones que utilicé para explorar las estrategias de los estudiantes en esta etapa se encuentra el siguiente:

Rodrigo tiene actualmente $331 968. Él sabe que esta cantidad corresponde a 13/9 de lo que tenía hace un año. ¿Qué cantidad tenía en aquel entonces?

Para resolver este tipo de situaciones los estudiantes de la primera sección de Administración nuevamente recurrieron a un modelo bidimensional, discreto y fraccionario. Veamos a continuación la discusión que sostuve con ellos:

Antonio: (Pasa al pizarrón y dibuja dos barras, las divide en novenos, e ilumina sólo trece de ellos, luego se dirige al grupo) (Ver figura 8.11) ¿Cuánto es $331 968 entre 13?

Marcos: $25 536

Rene: ¿Por qué divides entre 13?

Carolina: Si, ¿por qué entre 13?

Antonio: Porque quiero obtener 1/13 de lo que tenemos en este año que es lo mismo que tener 1/9 del año pasado

Investigador: Un 1/13 de este año o 1/9 del año pasado ¿cómo se representan en el dibujo?

Marcos: Ahí es uno de los cuadros que están iluminados

Investigador: ¿Y luego qué harían?

Antonio: Pues hay que multiplicar los $25 536 por 9 para que tengas lo del año pasado

Marcos: O sea son $229 824

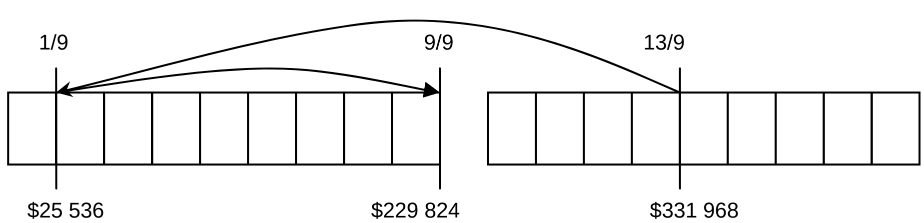
Investigador: Ok, bien, y ¿por qué queremos multiplicar por 9?

Marcos: Es que cuando dividiste te dio 1/9 de hace un año y si lo multiplicas tienes el entero

Investigador: Me parece muy bien. Una última reflexión ¿por qué número tendrían que haber multiplicado los $331 968 para que les diera directamente la cantidad que esta persona tenía el año pasado?

Antonio: Pues multiplicar por 9/13

Figura 8.11 Procedimiento para encontrar el monto de un año previo



Aunque todavía de forma no completamente organizada y en ocasiones algorítmica, la discusión sugería que a estos alumnos se les había facilitado avanzar conceptualmente porque habían logrado coordinar varios elementos:

1) Podían entender que el comparador y el comparando eran magnitudes cuantificables tanto en unidades monetarias, como en fracciones unitarias
2) Podían reconocer que las dos cantidades a comparar eran la cantidad final con respecto a la cantidad original.
3) Podían reconocer un conmensurador común que les ayudase a medir la magnitud final en términos de la magnitud inicial, y viceversa

Mi interpretación fue que esta última innovación se había logrado gracias a que reconocieron que 1/9 del monto inicial podía ser al mismo tiempo 1/13 del monto final, y encontraron que si multiplicaban por 9 esa magnitud, el monto original medía ya sea 9/9 de la cantidad original o 9/13 de la cantidad final. La magnitud representada por esas fracciones unitarias (1/9 del monto inicial y 1/13 del monto final) estaba siendo empleada como conmensurador común del monto inicial y del final.

Una vez más puede apreciarse la utilidad que pudo haber tenido el uso de un sistema unidimensional, continuo y relativo. Este modelo habría ayudado a hacer explícita la interrelación que existía entre el conmensurador común, la cantidad inicial y la final. Retomaré esta discusión en el capítulo 9 donde comentaré con más detalle y de forma general cómo cada una de las magnitudes del sistema compuesto por el comparador, comparando y conmensurador común ayuda a cuantificar a los otros dos, y haré algunas recomendaciones sobre el tipo de medios instruccionales con los que se podrían orientar las discusiones colectivas sobre este tema.

8.2 Análisis de las discusiones colectivas correspondientes a la tercera etapa la Trayectoria Hipotética

8.2.1 Tercera Etapa, Etapa A, Relaciones del tipo k•*b*=a con *b,a*, *k* fracciones

En la Etapa 2A y en los ejercicios en los que me desvié de la Trayectoria Hipotética, me había parecido que los estudiantes podían obtener la fracción unitaria de un entero divisible entre el denominador. Por ejemplo, podían reconocer y explicar fácilmente que $12 683 era la novena parte de $114 147 pues ésta última cantidad era nueve veces la primera. Incluso habían podido explicar cómo una fracción podía corresponder a la fracción unitaria de un entero. Por ejemplo, podían explicar que 7/4 era la cuarta parte de 7, porque 7/4 se repetía 4 veces en 28/4. En este último ejemplo puede apreciarse además, cómo los jóvenes eran capaces ya de replantear una pregunta en la que se utilizaban dos unidades de medida distintas reexpresándolas por medio en una unidad común. En el ejemplo anterior, sólo se puede respaldar el hecho de que 7/4 es la cuarta parte de siete si se tienen medios físicos para comprobarlo, o bien si se reexpresa 7 como 28/4, en cuyo caso es fácil mostrar que estas 28 "nuevas unidades" (cuartos) equivalen a cuatro veces 7 "nuevas unidades".

Las observaciones anteriores me llevaron a pensar que quizá los alumnos ya estaban listos para a demostrar la relación recíproca entre una fracción original y las fracciones unitarias de esa fracción original (ej. mostrar que 3/28 es 1/4 de 3/7). Esto les serviría posteriormente para demostrar que una fracción final equivalía a cierta cantidad de fracciones unitarias de otra fracción inicial (ej. comprobar que 4/45 es 2/9 de 2/5).

Hay que mencionar aquí que mi propósito al discutir este tipo de ejercicios era que los alumnos generaran estrategias que les ayudasen a extender su capacidad para reconocer las relaciones multiplicativas a números que utilizaban fracciones unitarias como unidad de medida. Mi conjetura era que al trabajar con fracciones unitarias y no con una unidad predefinida, después podrían extender sus razonamientos multiplicativos a los números y fracciones decimales menores que uno y entre porcentajes (por ej. obtener el 117% de 0.55).

Como en la sección anterior, ejemplificaré el tipo de razonamientos que llevaron a cabo los jóvenes utilizando los argumentos presentados en las primeras secciones. Sin embargo, los estudiantes pertenecientes a las segundas secciones también presentaron justificaciones similares pero una vez más la diferencia fue el tiempo que les llevó desarrollarlos y el número de discusiones que necesitaron para comprender las relaciones multiplicativas en un nuevo contexto numérico. Comencé realizando situaciones sencillas, por ejemplo, la siguiente discusión que mantuve con la primera sección de Contaduría:

¿Qué cantidad es 1/5 de 3/2?

Investigador: ¿qué cantidad equivale a la quinta parte de 3/2?

Enrique: Son 3/20

Emilio: No, son 3/10

Investigador: Muy bien, como siempre la operación es fácil, ¿pero ahora cómo es el dibujo?

Carlos: Yo quiero hacerlo (pasa al pizarrón y dos barras, las divide a la mitad) Aquí hay 4/2, pero sólo necesito 3/2 (Borra las dos barras y vuelve a dibujar otras dos barras, esta vez las divide en décimos) En un medio hay 5/10

Investigador: Ok muy bien

Carlos. (ilumina 3/10 en la primera barra) Así está

Investigador: Ok, ya dibujaste los 3/10 pero te falta demostrar que son 1/5 de 3/2

Carlos: (Dibuja un salto en los primeros 3/10 y luego dibuja otros cuatro saltos de la misma magnitud, ver figura 12) Pues 3/2 es 5 veces 3/10

Investigador: Ok, muy bien, pero los demás ¿están de acuerdo?

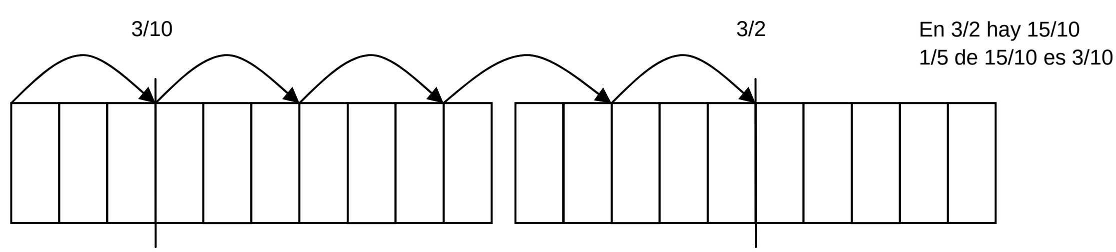
Adriana: Yo no sé muy bien qué hizo

Investigador: ¿Alguien quiere explicarle a su compañera?

Enrique: Pues es que en 3/2 hay 15/10 entonces 3/10 es la quinta parte de eso

Adriana: Ah, ya

Figura 8.12 La quinta parte de 3/2



Aunque había ejercicios que eran explicados por un solo alumno, procuré preguntarles a los demás alumnos de la primera sección de Contaduría si estaban de acuerdo con lo que había hecho su compañero. También les pedí a otros alumnos que resolvieran algunos ejercicios diferentes para ver si habían comprendido lo que habían explicado sus compañeros.

Aunque me pareció que primero habían resuelto mentalmente el ejercicio usando el algoritmo de la multiplicación, en general no parecían haber tenido problema para respaldar conceptualmente este tipo de situaciones. Otro ejemplo de este tipo de ejercicios lo podemos encontrar en la siguiente conversación con los alumnos de la primera sección de Administración

Investigador: ¿Cuál es la tercera parte de 4/7?

Isaac: Son 4/21

Investigador: Bien, ahora ¿puedes hacer el dibujo?

Isaac: Es que no sé como explicar

Investigador: No te preocupes, ahorita te ayudamos entre todos

Isaac: (pasa al pizarrón y se toma unos momentos para pensar)

Carolina: Estamos trabajando con veintiunavos

Héctor: 4/7 es igual a 12/21

Isaac: (Dibuja 21/21) Ahora elijo 4/21 (Ilumina 4/21)

Investigador: Ahora ¿Cómo muestras que 4/21 es la tercera parte de 4/7?

Isaac: Aquí hay 7/21, aquí hay 14/21, y aquí 21/21

Investigador: (Dirigiéndose al grupo) ¿Qué número tienen que ubicar para demostrar que 4/21 es 1/3 de 4/7

Marcos: Pues hay que encontrar los 4/7

Héctor: Aja pero hace rato ya les dije que eran 12/21

Isaac: Pues ya iluminé los 4/7 (señala 4/21)

Héctor: No, esos son 4/21

Investigador: (Dirigiéndose a Isaac) ¿Puedes ubicar 4/7 en el dibujo que hiciste?

Marcela: O sea en ese entero tenemos 7/7 pero cada 1/7 es 3/21

Héctor: Es que por eso desde hace rato ya les dije que 4/7 son 12/21

Investigador: Muy bien, pero es que no sé si él tiene claro que 4/7 son 12/21

Héctor: (Dirigiéndose a Isaac) Tienes que encontrar 1/7 de los 21

Isaac: Sólo tengo que escoger tres cuadros, y luego se repite 7 veces

Investigador: A ver compruébalo

Isaac: (Cuenta de 3 en 3 cuadros hasta completar los 21/21)

Investigador: Ahora tus compañeros te están pidiendo que localices 4/7

Marcos: Ya los tienes dibujados sólo tienes poner la raya en el cuadro 12

Investigador: ¿Cuántos veintiunavos tienes ahí?

Isaac: 12/21

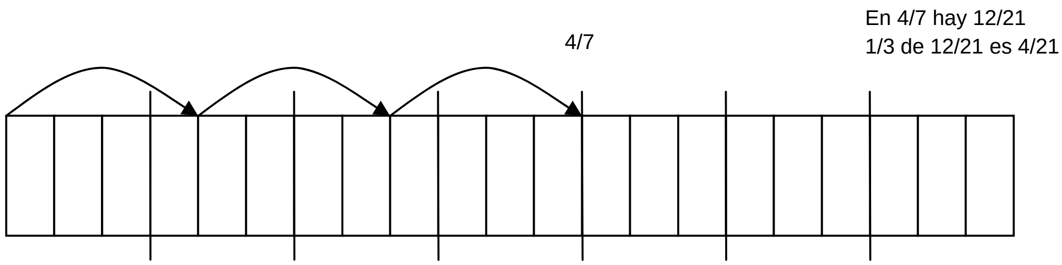
Investigador: Bien, ahora, ¿puedes demostrar que 4/21 es la tercera parte de 12/21?

Isaac: (Dibuja saltos de 4 en 4)

Investigador: ¿Cómo explicas lo que acabas de hacer?

Isaac: Son tres saltos de 4 para llegar a 12

Figura 8.13 La tercera parte de 4/7



A pesar de los problemas que tuvo Isaac en este ejercicio puede advertirse que varios de sus compañeros trataron de orientarlo para que reconociese a 4/21 como el comparador y a 4/7 como el comparando y que el segundo es el triple del primero.

El tipo de justificaciones y soportes que proporcionaron los estudiantes en los siguientes ejercicios se asemejó mucho a los presentados en los dos anteriores. Con las segundas secciones hubo que discutir un mayor número de ejemplos para que pudieran socializarse los argumentos previos, pero otras, como la primera sección de Contaduría, comprendieron este tipo de problemáticas con sólo un ejemplo. Me pareció que algunos de los jóvenes habían logrado entender fácilmente la relación recíproca entre una fracción unitaria de una fracción y la fracción original porque coordinaban ciertos elementos:

1) El comparando (ej. 4/7) necesitaba ser expresado en nuevas unidades (ej. 12/21) para que fuese posible encontrar su fracción unitaria

2) El comparador (4/21) también tenía estar expresado en las nuevas unidades (1/21)

3) El comparador (4/21) y el comparando (12/21) guardaban una relación recíproca entre sí que era independiente de las unidades empleadas para cuantificarlos (ej. el comparador es 1/3 del comparando, y el comparando es 3 veces el comparador)

Una vez que me pareció que los estudiantes eran capaces de garantizar que una fracción era la fracción unitaria de otra, decidí realizar situaciones un poco más complejas como la siguiente que discuto con la primera sección de Contaduría.

¿Qué cantidad equivale a 5/4 de 3/2?

Investigador: ¿Qué cantidad equivale a 5/4 de 3/2?

Fabiola: Son 15/8, yo lo dibujo (pasa al pizarrón, dibuja dos barras que divide en octavos, y luego dibuja saltos de tres en tres hasta completar 15/8)

Fabiola: (Escribe en el pizarrón 1/4 de 3/2 es 3/8

Así que 5/4 de 372 es 15/8)

Investigador: Ok, ya dibujaste y escribiste la explicación ¿nos puedes decir qué hiciste?

Fabiola: Pues primero dibuje 16/8, pero sólo necesito 15. Y entonces necesito primero 1/4 de 3/2 que es 3/8, pero luego das 5 saltos para que sean 5/4 de 3/2 para sacar los 15/8

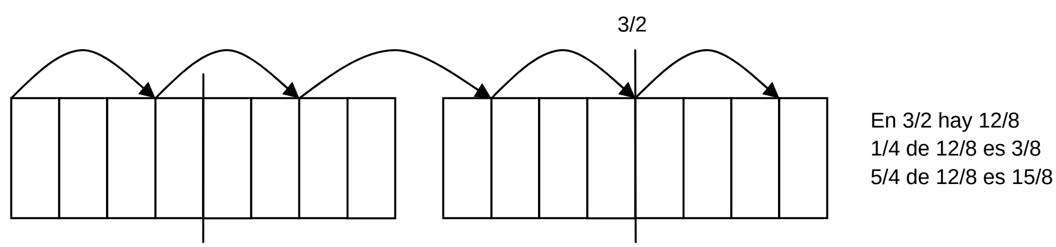
Investigador: ¿Cómo le explicarías a tus compañeros que 1/4 de 3/2 es 3/8?

Fabiola: Pues con los saltitos, aquí hay 1, 2, 3, 4, saltos

Investigador: Y ¿por qué te detuviste en el 4 salto?

Fabiola: Porque en el cuarto saltito tienes 12/8 que es igual a 3/2 (ver figura 8.14)

Figura 8.14 5/4 de 3/2



Podemos apreciar Fabiola organizó sus razonamientos en dos pasos:

1/4 de 3/2 es 3/8

Así que 5/4 de 3/2 es 15/8

Como puede apreciarse, una vez que éstos estudiantes coordinaban tan bien la fracción unitaria (1/4) de una fracción (3/2) que podían emplearla para generar una fracción no unitaria de la fracción original (5/4 de 3/2). Además, esto parecía sugerir de que los jóvenes comprendían que la fracción unitaria de una fracción, también era una cantidad expresada en unidades diferentes (3/8)

Aunque a diferentes ritmos y con un mayor número de discusiones, las otras secciones mostraron razonamientos similares, y de hecho incorporaron también el argumento anterior a sus justificaciones. De esta forma al terminar esta etapa, las secciones resolvían situaciones como las anteriores presentando un algoritmo, y luego las garantizaban usando un argumento y las respaldaban con un dibujo.

8.2.2 Tercera Etapa, Etapas B y C, Relaciones del tipo $\frac{a}{b}=k$, $\frac{b}{a}=\frac{1}{k}$ con *b, a, k* fracciones

De nueva vez mi intensión al realizar este tipo de situaciones era que los jóvenes preparasen estrategias que les sirvieran para extender su capacidad para identificar las relaciones multiplicativas a números que utilizaban fracciones unitarias como unidad de medida. De la misma forma que en las secciones anteriores, utilizo como ejemplo a los argumentos de las primeras secciones pues estaban más estructurados. Como ya he mencionado, mi apreciación era que al familiarizarse con este tipo de unidades, después les sería a los alumnos más fácil trabajar con números decimales y porcentajes. Inicié la exploración con las siguientes situaciones, las cuales ejemplifico con la discusión que llevé a cabo con los estudiantes de la primera sección de Administración.

¿Por qué factor multiplico 4/7 para obtener 9/7?

¿Por qué factor multiplico 9/7 para obtener 4/7?

Investigador: Muy bien, ¿por qué factor multiplico 4/7 para obtener 9/7?

Isaac: Por 28/7

Investigador: ¿28/7 es igual a otro número?

Marcos: Si a 4

Investigador: Ok, y ¿Cuánto es 4/7 por 4?

Héctor: 16/7

Investigador: Entonces no es igual a 9/7

Isaac: Entonces hay que multiplicar por 21/7

Investigador: Tengan cuidado, ¿cuánto es 21/7?

Marcela: Son 3 enteros

Investigador: Y ¿cuánto es 3 por 4/7?

Marcela: 12/7

Investigador: Y eso tampoco es igual a 9/7

Marcela: Hay que multiplicar por 9/4

Marcos: Si, por eso

Investigador: Ok, sólo haciendo operaciones cómo quedaría

Marcos: Te quedarías con 4/7 por 9/4 que te da 36/28

Marcela: Si pero le sacas cuarta a cada número y te dan los 9/7

Investigador: Muy bien, el resultado con operaciones ya quedó pero como siempre falta el dibujo. Recuerden tienen que explicar cómo es que 9/4 transforman a 4/7 en 9/7

Alumnos: (Piensan durante unos 3 minutos)

Investigador: Ok, les voy a cambiar un poco la pregunta ¿por qué número multiplico 4 para obtener 9?

Varios: Por 9/4

Investigador: ¿Se acuerdan por qué?

Alumnos: (Piensan unos momentos)

Isaac: Porque 1/4 de 4 es 1

Investigador: Ajá, y ¿hay algo más?

Isaac: Entonces 9/4 de 4 son 9

Investigador: Ok, muy bien ahora, ¿cómo les ayuda el razonamiento de su compañero a pensar la pregunta original?

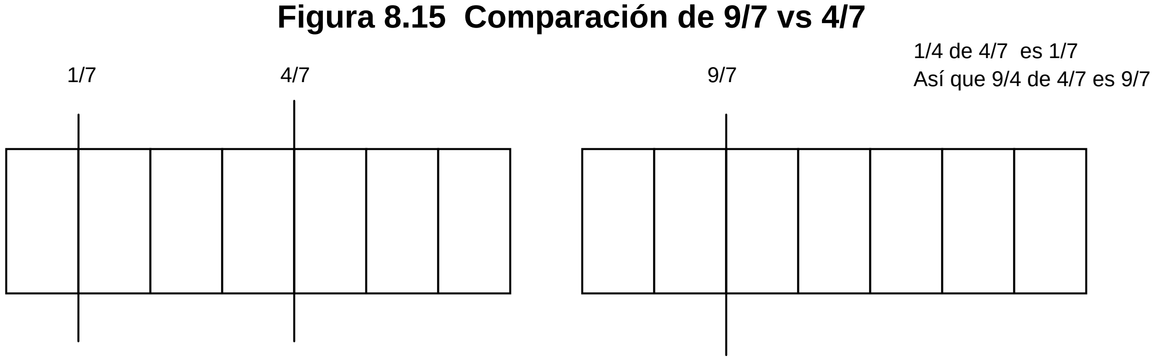
Rene: ¿Hay que sacar 1/4 de 9/7?

Erick: No, 1/7 de 4/7

Investigador: Tengan cuidado recuerden que lo que estamos tratando de aclarar es por qué al multiplicar 4/7 por 9/4 les da 9/7 ¿cómo aprovechan el razonamiento de su compañero (de Isaac)?

Rene: ¡Ah, ya!, La cuarta parte de 4/7 es 1/7 y entonces 9/4 de 4/7 es 9/7 (ver figura 8.15)

Figura 8.15 Comparación de 9/7 vs 4/7



Investigador: Bien, entonces ¿hay algo de diferente entre la pregunta original y el ejercicio que comentó su compañero (Isaac)?

Marcos: Si, que en el original trabajas con séptimos y en el otro con unos

Investigador: Bien. Ahora vamos a una pregunta similar ¿Por qué factor multiplicas 9/7 para obtener 4/7?

Carolina: 1/9 de 9/7 es 1/7,

Varios: Entonces 4/9 de 9/7 es 4/7

De esta forma para ser capaces de establecer la relación recíproca entre las dos fracciones anteriores los alumnos tenían que:

1) Identificar un conmensurador común, en este caso una unidad fraccionaria (1/7)

2) El conmensurador jugaba dos papeles dependiendo de cuál fracción sirviera de comparador y cual de comparando.

Una vez que pudieron reconocer este hecho, aprovecharon su dominio de los algoritmos de la división y de la multiplicación para expresar cada entero en términos del otro.

Al momento de analizar los datos, me he dado cuenta que quizá hubiese sido conveniente incorporar y discutir un tipo mas de ejercicios en esta etapa de la Trayectoria Hipotética, aquellos en los que no hay un denominador común. Por ejemplo,

¿Por qué factor multiplico 11/3 para obtener 14/4?

De haberlo hecho, los jóvenes hubiesen tenido que profundizar en su manejo de los conmensuradores comunes y del común denominador, y volver a utilizar los razonamienntos que mostraron en esta sección. De cualquier forma me pareció que al terminar esta etapa, ya tenían flexibilidad en el uso de diferentes unidades de medición y destreza para encontrar el un factor racional que vinculase multiplicativamente a otros dos números racionales

8.2.3 Tercera Etapa, Etapa D, relaciones del tipo $\frac{1}{k} \bullet a=b$ con *b, a, k* fracciones

Como comenté en la sección 8.1.4, al explorar las relaciones multiplicativas en las que se aprovechan las propiedades del recíproco para encontrar una cantidad a partir de otra, mi interés se centraba en encontrar las estrategias que los estudiantes utilizarían para garantizar conceptualmente el uso de tal recíproco. También he comentado que la justificación conceptual de este tipo de relaciones multiplicativas es relevante para las áreas económico administrativas debido a las aplicaciones que tiene dentro de ellas. Así, al explorar esta última etapa de la Trayectoria Hipotética inicial, deseaba analizar cómo es que los estudiantes aprovechaban sus conocimientos previos.

El reto era por supuesto importante, porque ya no sólo se trataba de aprovechar las relaciones recíprocas entre dos cantidades expresadas en términos de una unidad predefinida, sino de emplear las relaciones multiplicativas entre dos cantidades que estuvieran expresadas en fracciones unitarias. Sin embargo, me pareció que de lograr conceptualizar este tipo de relaciones los jóvenes ganarían facilidad al interpretar problemáticas similares que involucraran el uso de números decimales y de porcentajes.

Como notará más adelante el lector, algunas de las discusiones carecían de orden en los argumentos pues los alumnos no estaban acostumbrados a presentar justificaciones bien organizadas y verbalizadas para sus afirmaciones. Probablemente también estaban muy acostumbrados a justificar sus respuestas de manera algorítmica. En otras ocasiones yo mismo no sabía cómo replantear inmediatamente el problema para orientarlos. Así, tuvimos que ir trabajando juntos hasta que después de cuatro o cinco clases pudimos formular justificaciones bien articuladas y concisas, así como dibujos que presentaran de forma condensada el resultado de algunas horas de discusión.

En esta ocasión, nuevamente ilustraré los razonamientos que llevaron a cabo los estudiantes de la primera sección de Contaduría, pues fueron los alumnos que organizaban mejor sus argumentos. Los alumnos de la primera sección de Administración también lograron desarrollar este tipo de justificaciones y soportes. Sin embargo, los estudiantes de las segundas secciones no llegaron a éste punto de la trayectoria, pues el tiempo del curso no fue suficiente debido a que, como ya he comentado, el tiempo se había empleado para discutir con detalle los temas previos.

Primera pregunta

La primera pregunta que discutí con los estudiantes de la primera sección de Contaduría fue:

Actualmente (2009), Javier tiene 33/4 de libras esterlinas. Él sabe que esta cantidad equivale a 11/3 de la cantidad que tenía en 2008 ¿Qué cantidad tenía originalmente?

Al principio pensé que debía dejar a los alumnos expresar sus ideas, pero esto los desvió un poco de las justificaciones conceptuales habíamos venido utilizando en situaciones anteriores. En lugar de ello hicieron uso de las justificaciones algorítmicas o algebraicas con las que probablemente estaban mucho mas acostumbrados. De cualquier forma he incorporado la entrevista al texto, pues nos ayuda a darnos una idea del reto que implicó para los jóvenes el justificar sus respuestas de forma conceptual (por medio de dibujos y argumentos.

Enrique (uno de los dos únicos alumnos en cuatro generaciones que pudo usar el álgebra para plantear situaciones de este tipo) comenzó la discusión:

Enrique: Tu tienes 11/3 de algo que te da 33/4

Investigador: ¿Qué es ese algo?

Enrique: La incógnita o sea x

Investigador: Y qué significa esa x

Enrique: Son las libras del año pasado

Investigador: Entonces ¿cómo te queda planteada la ecuación? Si quieres pasa…

Enrique: (Pasa al pizarrón y escribe $(11/3)x=33/4$

$x = (33/4)/(11/3) = 99/44 = 9/4$ de libra)

Investigador: Ok, esta técnica para resolver el problema esta bien pero me gustaría que ahora intentaran hacer el dibujo

Fabiola: O sea sería mejor dibujar 33/4 y también con 9/4

Investigador: A ver, si quieren antes de hacer el dibujo ¿cómo lo resolverían sólo con fracciones?

Enrique: Puedes hacerlo con común denominador

Alumnos: (Piensan durante unos momentos)

Enrique: Sí, ya lo hice con común denominador

Investigador: ¿Y qué hiciste?

Enrique: Pasé las dos fracciones a doceavos, o sea 33/4 equivale a 99/12 y 11/3 equivalea 44/12, entonces me queda como las preguntas que hacíamos el otro día, de que debe haber un número que multiplicado por 44/12 me de 99/12 (Pasa al pizarrón y escribe 44/12 • ? = 99/12)

Investigador: Son 44/12 ¿de qué?

Enrique: De libra del año pasado, es que hoy tenemos 99/12 de libra esterlina

Investigador: Ok, estoy de acuerdo con tu segunda cantidad, hoy tenemos 99/12 de libra pero esos 44/12 ¿qué son?

Enrique: Ah, de la cantidad del año pasado, entonces lo hacemos como los otros días 1/44 de 44/12 es 1/12, pero 99/44 de 44/12 es 99/12

Investigador: Entonces ¿cuál es la cantidad que desconoces?

Enrique: son 99/44 de libra o sea en realidad 9/4 de libra

Una vez que los estudiantes presentaron estas dos justificaciones decidí reorientar la conversación para recordarles que para considerar un argumento como válido era necesario contar con una justificación conceptual (usando dibujos y argumentos)

Investigador: Muy bien, van muy bien porque llevan dos estrategias para resolver un problema que no es nada sencillo. Pero ahora ¿cómo sería el dibujo?

Enrique: Tienes que dibujar los 33/4 de libra (pasa al pizarrón y dibuja 9 barras con 36/4 de libra y señala el lugar donde había 33/4 de libra)

Fabiola: Pero también tienes que señalar donde están los 9/4 de libra

Emilio: Pues es que ahí puedes seleccionar saltos que midan 3 cuadros para tener 3/4 de libra que también es 1/3

Investigador: Ok, pero ¿1/3 de qué?

Emilio: 1/3 de 9/4 de libra

Investigador: ¿Y entonces cuántos saltos se tendrían que dibujar para tener la cantidad original?

Emilio: Once saltos

Enrique: Sí, once para tener los 11/3

Investigador: Serían 11/3 ¿de qué?

Emilio: Serían 11/3 de 9/4 de libra

Investigador: ¿Y cómo pueden asegurarme que 9/4 de libra es lo que tenía hace un año?

Alumnos: (Piensan durante unos tres minutos)

Enrique: Porque 9/4 de libra viene siendo como tu entero o sea para tener un entero necesitas 3/3

Investigador: ¿3/3 de qué?

Enrique: 3/3 de lo que tenías hace un año, y luego si te dicen 11/3 también son de lo que tenías hace un año

Fabiola: ¡Ah! Es cierto, tienes 3/3 de lo que tenías hace un año que son 9/4 de libra

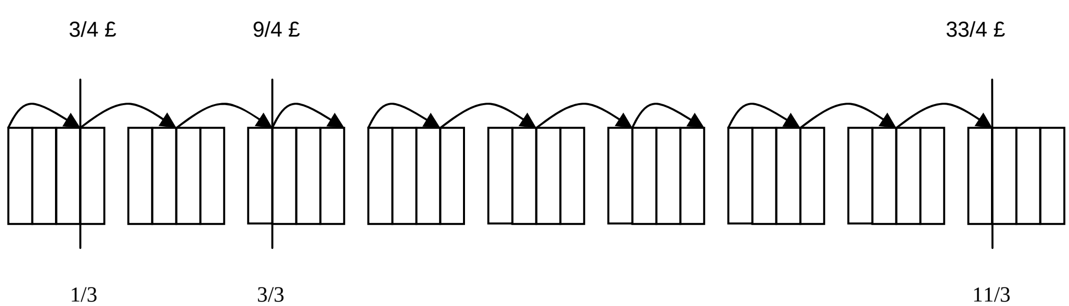
Investigador: Muy bien, y ¿por qué me interesa buscar 3/3?

Varios: Por que es lo original

Fabiola: Pues sí, es que son 3/3 de lo que tenías hace un año o sea originalmente

Emilio: Lo que tienes hoy son 11/3 de lo que tenías hace un año pero lo que tenías hace un año es 3/3

Figura 8.16 Justificación estudiantil para encontrar una cantidad original



33/4 de libra es 11/3 de lo que tenía en 2008

3/4 de libra es 1/3 de lo de que tenía en 2008

9/4 de libra es 3/3 de lo que tenía en 2008

Como puede apreciarse en esta primera parte de la conversación, poco a poco los estudiantes fueron madurando el lenguaje para expresar apropiadamente sus ideas así como los medios de simbolización necesarios para comprender y resolver el problema. Se puede advertir que desde la primera parte de la discusión reconocieron que la cantidad original era 9/4 de libra. Sin embargo, les costó un poco de trabajo organizar el argumento anterior, el cual vincula los montos de dinero con las fracciones que expresan relación recíproca que existía entre el monto del 2008 y el del 2009, así como la presencia de un conmensurador común.

Al momento de organizar el argumento, me dí cuenta de que aunque el razonamiento era correcto aún no era del todo explícito el uso del recíproco del escalar y, como no sabía muy bien cómo orientarlos para que lo aprovecharan, decidí plantearles la pregunta de forma directa.

Así, les pregunté…

¿Qué número multiplicado por 11/3 de la cantidad original me da la cantidad original?

Enrique: Por 3/11

Investigador: ¿Puedes explicar más?

Enrique: Por que te da 33/33

Investigador: Ok, pero explica usando el dibujo

Enrique: Si multiplicas 11/3 de la cantidad original por 3/11 te da el entero original es como los popotes.

Investigador: Así es, entonces ¿y cómo podrían dibujarlo?

Enrique: Podría ser como los popotes como cuando comparábamos el popote blanco con la ventana y con los negros medíamos los dos

Investigador: Esa es la idea

Emilio: Divides tus enteros en onceavos y también los divides en tercios

Fabiola: No, divides tus enteros en onceavos y coloreas 3, y a esos los divides en 11

Alejandro: Los multiplicas por 11 para que llegues al entero

Carlos: No, yo dibujaría puros tercios

Investigador: ¿cuántos dibujarías?

Carlos: 11/3 y de ahí tomaría cada 11 tres veces

Fabiola: Y entonces ¿cada 11 sería uno?

Carlos: No, debajo de los 11/3 dibujarías 3 cuadritos de 11 cada uno

Fabiola: No, sería dibujar así primero 11/3 y luego dibujar 3/11 y que los dos sean lo mismo

Emilio: No es que 11/3 no es igual a 3/11

Alejandro:¿Por qué no primero dibujamos los 11/3? (Pasa al pizarrón dibuja 4 barras con tercios y señala 11/3)

Enrique: Ajá y entonces donde están 3/3 ya es nuestro entero original

Investigador: Entonces ¿por qué al multiplicar 11/3 por 3/11 me da 1?

Enrique: por que 3/11 de 11/3 es uno

Investigador: Si, te entiendo pero explícales a tus compañeros

Carlos: Es que 3 enteros cabe 3 veces en once tercios

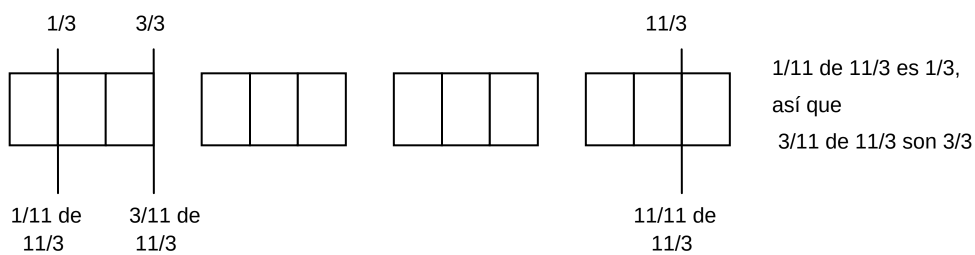
Fabiola: No, es que 1/3 de 11/11 es 1

Carlos: No, Un tercio de 11/3 es 1/11

Emilio: ¡Ah, ya sé!, Es que 1/11 de 11/3 es 1/3

Alejandro: Ya, sí, y entonces 3/11 de 11/3 son 3/3 (Ver figura 8.17)

Figura 8.17 Justificación alternativa para encontrar cantidad original



En la discusión anterior puede advertirse que los estudiantes intentaban establecer al monto del año 2008 como punto de referencia, de manera que al compararlo con el monto del 2009, éste último midiera 11/3. Al reconocer que el monto del año 2008 era el punto de referencia también advirtieron que era la unidad de medida. Por ello reconocieron que era necesario multiplicar los 11/3 del 2008 por su recíproco de forma que se obtuviera la unidad original (el monto del 2008). Con el fin de que reconocieran que las propiedades del recíproco podían aprovecharse para obtener la cantidad original de libras, partiendo de la de 2009, les pregunté:

Si mi cantidad final es 33/4 de libra y ésta equivale a 11/3 de mi cantidad original ¿por qué número multiplico mi cantidad final para encontrar la original?

Investigador: Muy bien, entonces ¿qué número hace posible que la cantidad de dinero que tenemos hoy se transforme en la cantidad original?

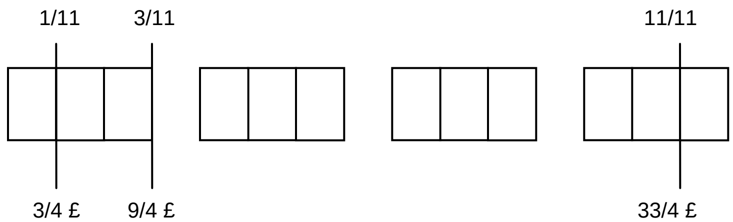
Alumnos: (Piensan durante unos momentos)

Alejandro: 3/11

Fabiola: Pero entonces ¿cuánto es 33/4 de libra por 3/11?

Enrique: Si está bien porque son los 99/44 de libra de hace rato, que son los 9/4 de libra en realidad (Ver figura 8.18)

Figura 8.18 La cantidad original es 3/11 de la cantidad final



Nuevamente, a pesar de la desorganización inicial, y de la costumbre de los estudiantes a intentar justificar sus repuestas de forma algorítmica, la conversación parecía revelar que los jóvenes de la primera sección de Contaduría habían podido desarrollar poco a poco una justificación conceptual (por medio de dibujos y argumentos) debido a que:

1) Habían establecido un vínculo entre el monto de libras de cada año y las fracciones que expresaban las relaciones recíprocas entre dichos montos
2) Habían reconocido que la cantidad a encontrar era el comparandor (monto del 2008), pues el comparando estaba expresado en sus términos (11/3 de 2008)
3) Habían reconocido que 1/3 del monto del 2008 podía servir como conmensurador común entre el comparador y el comparando
4) Habían aprovechado su facilidad para manejar los algoritmos de la multiplicación y la división para encontrar la relación entre conmensurador común, y el comparandor

Segunda Pregunta

Los jóvenes de la primera sección de Contaduría realizaron una serie de aprendizajes y descubrimientos algorítmicos importantes durante la resolución de la siguiente pregunta

Actualmente Silvia tiene este año (2009) 81/4 de dólar. Ella sabe que esta cantidad equivale a 27/8 de la cantidad que tenía en 2008 ¿Qué cantidad tenía originalmente(2008)?

Alumnos: (Piensan durante unos tres minutos)

Fabiola: Pues sería hacer lo mismo multiplicar 81/4 por 4/81

Emilio: No, ya ví cómo, multiplicas 81 por 8, y te sale 648 y luego 4 por 27 te sale 108 y los divides, o sea sale 648/108 y los divides y te da 6

Investigador: ¿Y puedes explicar tu razonamiento apoyándote en las tres estrategias de la clase pasada?

Emilio: Pues es que lo que tienes en 2008 y 2009 es lo mismo

Investigador: ¿Estas seguro? Recuerda 81/4 de dólar son 27/8 de lo que tenía en 2008

Alumnos: (Piensan durante unos tres minutos)

Fabiola: Hay que multiplicar 81/4 por 8/27, entonces 1/27 de lo que tenía el año pasado es 3/4 y entonces 8/27 de lo que tenía el año pasado son 648/108 que es igual a 6 enteros

Investigador: Bien, van por buen camino pero todavía están usando únicamente operaciones. Me gustaría que usaran las estrategias de la clase pasada

Emilio: Podríamos primero sacar el común denominador

Investigador: ¿Y cuál sería?

Emilio: Sería 8, y pues ya con eso lo podemos dibujar ¿no?

Enrique: Es que a ver, una forma sería la que ya dijeron multiplicar 81/4 de dólar por 8/27 que te da 6 dólares

Investigador: Ok ese procedimiento esta bien pero no lo han explicado con dibujos y tampoco han dado una justificación. ¿Qué otra forma han dicho para resolver el problema?

Fabiola: Pues la que estaba diciendo primero divides 81/4 de dólar entre 27, te da 3/4 de dólar y eso luego lo multiplicas por 8

Enrique: ¿Qué no son lo mismo?

Investigador: Así es, es lo mismo

Fabiola: ¿Qué no sería lo mejor decir que 81/4 son 8/27 de lo que tenía el año pasado?

Investigador: No, porque no es eso lo que están planteando en la situación. Si quieren piensen un poco más

Alumnos: (Vuelven a reflexionar unos momentos)

Investigador: En esta estrategia que están siguiendo tienen que explicar por qué están multiplicando los 81/4 de dólar por 8/27, o sea, ¿cuál es la razón?

Alejandro: Pues porque es como una división

Emilio: Es que si tenemos 27/8 y queremos saber por qué tenemos 81/4, igual lo pasamos a octavos que son 162/8 de dólar, entonces 27/8 por 6 dólares te da 162/8

Alejandro: ¿Por qué?

Enrique: Ajá, es que en 2008 tenías 6 dólares si lo multiplicas por 27/8 te da lo de hoy que son 162/8

Alejandro: Y que también son 81/4 de dólar

Investigador: Ok, bien pero el problema es que con este procedimiento empezaste con la respuesta, o sea los 6 dólares, que es lo que estas buscando

Emilio: Pero también lo puedes cambiar (pasa al pizarrón y escribe 27/8 • ? =162/8)

Y el número que necesitamos para que sean iguales es 162/27 que es igual a 6

Investigador: Pero a ver, son 27/8 ¿de qué?

Emilio: Son 27/8 de lo que tenías el año pasado

Investigador: Muy bien

Enrique: Pero todas las tres formas son la misma

Investigador: Así es, ¿qué es lo que es diferente?

Enrique: Los números pero son lo mismo

Investigador: Así es, ¿entonces la pregunta importante sería cómo se dieron cuenta que si multiplicaban los 81/4 de dólar por 8/27 obtendrían la cantidad de hace un año?

Enrique: Porque es el recíproco de 27/8, y si lo multiplicas entre ellos da uno, que es tu cantidad original. Por eso.

Investigador: Muy, muy bien.

Enrique: Y ese procedimiento que dije es el mismo que el algebraico

Alejandro: También sale con una simple división ¿no?

Enrique: Es que esa división es esa multiplicación

Investigador: Así es, muy bien, son lo mismo

Alejandro: Ajá, porque dividir 81/4 entre 27/8, es lo mismo que multiplicar 81/4 por 8/27

Investigador: Excelente, si se fijan el problema puede plantearse con álgebra (Escribe en el pizarrón (27/8)x = 81/4)

Alejandro: Pero eso sería lo mismo que pasar el 27/8 dividiendo

Enrique: Ajá, y eso es lo mismo que multiplicarlo por 8/27

Investigador: ¿Por qué serán lo mismo?

Enrique: Porque la división y la multiplicación son recíprocas

Investigador: ¿Por qué entonces la ley del sándwich, los productos cruzados de la división de fracciones y la multiplicación del recíproco son lo mismo?

Emilio: ¡Porque siempre vas con los mismos números!

Alejandro: Y por que la ley del sándwich no es más que la división cruzada

Es claro que esta última discusión se relación con la equivalencia entre diferentes técnicas algorítmicas para resolver el problema más que con las relación recíproca entre dos magnitudes. Sin embargo, la he dejado en el texto porque nos da una idea del tipo de descubrimientos que realizaron los jóvenes. Además, nuevamente refleja lo acostumbrados que estaban los estudiantes a plantear sus soluciones en términos algorítmicos. Dicho esto, desconozco si era la primera vez que los jóvenes se habían dado cuenta de la equivalencia de estos tres algoritmos, pero su asombro me lo sugirió. Posteriormente, pedí a los estudiantes que volvieran a fundamentar sus justificaciones de forma conceptual y no únicamente con algoritmos.

Investigador: Muy bien excelente… Pero ahora, aunque las operaciones ya las han hecho y bastante bien, ¿cómo se haría el dibujo?

Varios: ¡No ese no hay que hacerlo!

Fabiola: Lo que pasa es que ahora vamos a tener que hacer 81/4

Investigador: Bueno, pero a ver ¿cómo podríamos evitarnos dibujar 81/4?

Fabiola: Pues así como yo lo había dicho, o sea que 1/27 son 3/4 , y entonces hay que dibujar 8 veces 3/4

Investigador: ¿Pero estamos trabajando con veintisieteavos?

Fabiola: Pero no importa porque puedes hacer los veintisieteavos y sólo iluminar 8.

Investigador: Ok, bien, pero tú estas pensando en el 2009 como año original, y de ahí podemos obtener veitisieteavos, pero por ahora recuerden que estamos considerando al 2008 como año original

Alejandro: Pero podemos hacer 2/4 y sólo dibujar 6 dólares

Carlos: Ah, no, más bien si trabajas con el 2008 tendrías que dibujar 27/8

Investigador: ¿puedes dibujarlos?

Carlos: (pasa al pizarrón y dibuja cuatro barras a las que divide en octavos, y con una línea señala hasta el octavo 27)

Investigador: ¿Cuánto vale uno de esos octavos? O sea los cuadritos…

Carlos: Vale 3/4

Investigador: ¿Cómo saben que vale 3/4?

Carlos: Porque es la diferencia entre 2008 y 2009

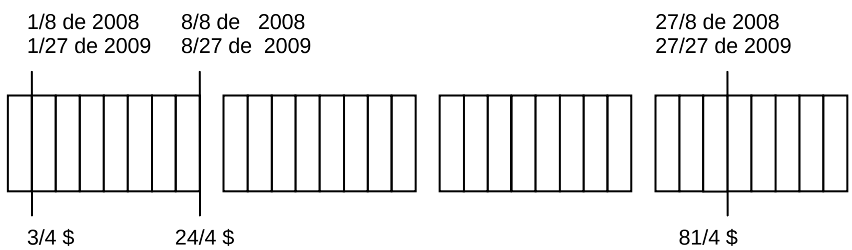
Alejandro: No, porque 3/4 es 1/27 de 81/4

Investigador: Entonces ¿cuánto dinero hay en 27/8?

Alejandro: 81/4 de dólar

Fabiola: Entonces 1/8 vale 3/4 de dólar (ver figura 8.19)

Figura 8.19 Justificación para encontrar una cantidad original usando su recíproco I



Investigador: Ajá muy bien ¿y en 2008 cuántos octavos de 2008 teníamos?

Emilio: En 2008 tenemos 27/8

Fabiola: No, tenemos 8/8 que es tu cantidad original

Investigador: ¿En dinero cuánto es?

Fabiola: 24/4 de dólar

Investigador: Muy bien, ahora ¿cómo puedo ver el recíproco en el dibujo?

Carlos: Porque tuvimos 8/27 de 81/4 de dólar

Fabiola: Ajá, 8/27 de 2009

En esta discusión puede apreciarse que todavía existía cierta confusión sobre si los problemas debían resolverse en términos de 2008 o de 2009, lo cual hacía difícil reconocer el tipo de fracciones unitarias que se utilizarían para expresar la relación recíproca entre las dos magnitudes. También puede apreciarse que los jóvenes solían olvidar mencionar la magnitud a la que hacían referencia sea la cantidad de dinero o el año en que existía cierto monto. Esto causaba también confusión con las operaciones que se realizaban, pues también involucraban el uso de fracciones. Sin embargo, poco a poco los estudiantes seguían desarrollando su capacidad de:

1) Relacionar los montos de dinero con las fracciones que expresaban la relación recíproca entre las cantidades de cada año.
2) Aprovechar la medida del comparando en términos del comparador, para pode encontrar éste ultimo.

Tercera Pregunta

La tercera pregunta que exploré con el grupo fue la siguiente:

Actualmente Tania tiene 27/4 de libras esterlinas. Ella sabe que esta cantidad equivale a 9/5 de la cantidad que tenía hace un año ¿Qué cantidad tenía originalmente?

Alumnos: (Piensan cómo abordar el problema durante unos 6 minutos)

Fabiola: Pues yo lo pensé como siempre 1/9 de 27/4 es 3/4

Investigador: ¿27/4 y 3/4 de qué?

Fabiola: De libra

Investigador: Ok, bien, y ¿luego? ¿qué hiciste?

Fabiola: Pues entonces 5/9 de 27/4 de libra son 15/4 de libra

Investigador: Bien, pero me gustaría que se dieran cuenta de un detalle importante, entonces díganme ¿Por qué obtuvieron novenos en vez de quintos?

Enrique: Porque te piden nueve partes de 27/4

Fabiola: ¿Por qué 9/5 es igual a 5/9?

Emilio: Porque tenemos que invertir los 9/5 para que en lugar de estar dividiendo este multiplicando

Investigador: Ok, estas bien en tus operaciones pero mi pregunta es ¿porqué trabajaron con novenos y no con quintos?

Alejandro: Porque es el recíproco

Investigador: ¿Te refieres a que 1/9 es el recíproco de 1/5?

Alejandro: No, que 5/9 es el recíproco de 9/5

Investigador: Ok, pero tengan cuidado, acuerdénse que la pregunta es ¿porqué obtuvieron los novenos de 27/4 de libra, cuando estábamos trabajando con quintos del año 2008?

Alejandro: Porque 9/5 es del 2009 y 5/9 es de 2008

Carlos: Porque si multiplicas por 5/9 lo que obtienes es el recíproco

Investigador: Ok, pero eso es un método con operaciones . Esta bien que usen esos métodos pero insisto en que mi pregunta es porqué obtuvieron 1/9 de 27/4 de libra cuando estábamos trabajando con quintos

Emilio: Porque es lo que equivale a lo que tenía en el 2009 y queremos saber lo que tiene en 2008

Investigador: Ok, entonces si estamos trabajando con 2008, ¿por qué multiplicamos 27/4 de libra por 1/9? Si la cantidad de 2008 la estamos expresando con quintos

Enrique: ¿Queremos saber porqué se transforma de quintos a novenos?

Investigador: Ajá

Alejandro: Porque en 2008 tenías 5/5, y quieres saber cuánto equivalía 9/5 de 2008 y entonces lo tienes que cambiar a novenos para saber cuánto tenías en 2008

Fabiola: Porque lo que tenías originalmente lo medías en quintos

Investigador: Muy bien, esta bien la justificación de su compañero (Alejandro) pero ahora ¿lo pueden sintetizar en una sola frase?

Emilio: Dijimos que 5/5 de libra

Investigador: ¿De libra?

Emilio: No, que 5/5 de 27/4 es lo que tenías en 2008

Investigador: No, 27/4 es lo que tienes en 2009

Fabiola: 5/5 es lo que tienes en 2008

Emilio: Y ahora 9/5 es lo que tienes en 2009

Alejandro: Entonces 1/9 de 27/4 de libra es 3/4 de libra

Fabiola: Porque si multiplicas 9/5 por 5/9 te da uno

Investigador: Ese es un método de operaciones, no, recuerden la pregunta ¿por qué multiplicaron 27/4 de libra por 1/9 si la cantidad del 2008 esta expresada en quintos?

Alejandro: Porque queremos saber a cuánto equivale 27/4 de 2008 y 9/5 son de 2009

Investigador. Tengan cuidado tienen 27/4 de libra en 2009 y quieren conocer la cantidad del 2008

Emilio: Porque queremos saber cuanto vale cada noveno para saber cuanto vale un noveno de un quinto

Investigador: ¿Un noveno de un quinto?

Fabiola: Queremos saber cuánto es 1/9 de 2009

Enrique: Es que tu tienes 9/5 y de esos 9 tu tienes que tomar cada uno para dividirlo entre 9.

Emilio: Aja, tu tienes que tomar cada 9 para saber cuanto vale

Enrique: Es que tienes que saber cuánto vale cada quinto

Investigador: ¿Cada quinto de qué año?

Alejandro: Cada quinto de 2008

Enrique: No, cada quinto de 2009

Fabiola: Ajá del 2009

Investigador: ¿Del 2009? ¿Pero no estábamos buscando la cantidad del 2008?

Fabiola: ¿Es que por que con operaciones no se puede?

Emilio: No, es que 5/5 es lo que tenías en 2008 y tienes que saber a cuánto equivale cada quinto del 2008 para saber cuanto tienes en el 2009. Entonces como tienes 9 pedazos en el 2009, necesitas dividir entre 9 para tener 1/5 de 2008

Enrique: Con esos 9 pedazos te puedes olvidar de los quintos

Investigador: Pero al final son importantes ¿no?

Enrique: Si al final pero ahorita no

Investigador: A ver, ¿para qué me sirven esos quintos?

Enrique: Para poder sacar el recíproco

Investigador: No, eso es un método con operaciones,

Emilio: Es que los quintos sí importan por con esos das la cantidad que tenías en el 2008

Enrique: Ajá, 1/5 de 27/4 es lo mismo que 1/9 de 27/4

Emilio: No más bien 1/9 de 27/4 es un 1/5 de 2008

Enrique: Ajá, entonces 1/9 de 2009 es 1/5 de 2008

Investigador: Bien, muy bien (escribe la equivalencia en el pizarrón)

Alejandro: Eso es lo que yo quería explicar hace rato

Investigador: Aja, y sí te entendí pero por eso les pedí que lo resumieran en una sola frase. Entonces cuánto quedamos que vale 1/5 de 2008

Alejandro: 3/4 de libra

Investigador: Bien, y 5/5 de 2008 ¿cuánto es?

Alejandro: Son 15/4 de libra

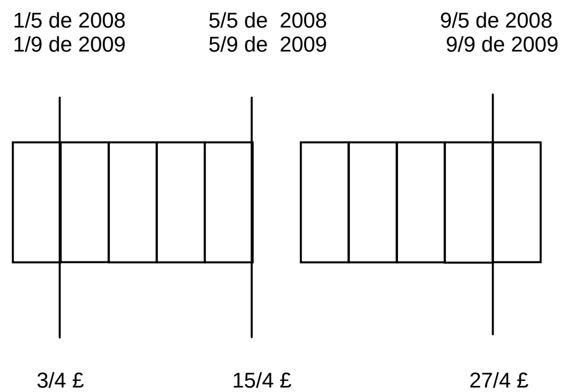
Investigador: Ajá, y ¿cuántas libras es 1/9 de 2009?

Fabiola: son 3/4 libra

Investigador: Bien, y ¿cuánto es 5/9 de 2009?

Alumna 08: Serían también 15/4 de libra (ver figura 8.20)

Figura 8.20 Justificación para encontrar una cantidad original usando su recíproco II



El diálogo de este tercer ejercicio, nuevamente sugiere que los estudiantes intentaron resolverlo inicialmente apoyándose en una estrategia algorítmica, pues como puede apreciarse intentaron primero dividir entre 9. Quizá también pueda decirse que tenían claro que debían llegar al comparador (cantidad del 2008), pero el hecho de que olvidaran hacer referencia al año del que hablaban, así como a la cantidad de libras, hacía que confundieran el divisor necesario para obtener el conmensurador común (el 9) con la fracción que ese conmesurador común representaba de la cantidad del 2008 (1/5). No obstante poco a poco hicieron explícito que cierta fracción se refería a las libras, y otra al tamaño del conmensurado común con respecto al monto del 2008.

La cuarta pregunta que trabajé junto al grupo fue:

Actualmente Ana tiene 63/4 de libra esterlina. Ella sabe que esta cantidad equivale a 7/5 de la cantidad que tenía hace un año ¿Qué cantidad tenía originalmente?

Investigador: Para resolver este problema vamos empezar con el dibujo

Fabiola: Otra vez son muchos cachitos

Enrique: Pero puedes sólo dibujar 7/5

Investigador: ¿Puedes hacerlo?

Enrique: Sí (Pasa al pizarrón y dibuja dos barras con 5/5 cada una, señala los 7/5)
Aquí están los 7/5 de 2008, si marco 5/5 es lo que tenía en 2008…

Fabiola: Ajá, y en los 7/5 van los 63/4

Enrique: Luego también necesitamos 1/5 de 2008

Alejandro: Eso también es un 1/7 de 2009

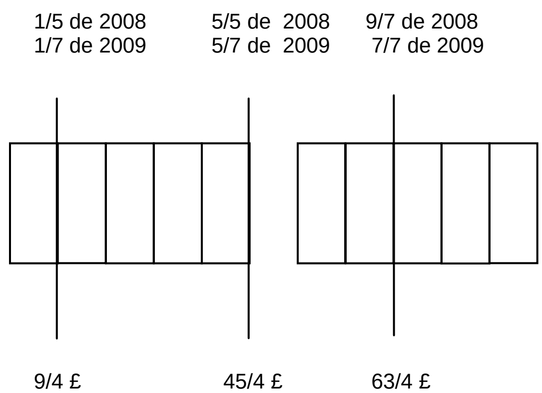
Fabiola: Por eso 5/7 de 2009 son iguales a 5/5 de 2008

Investigador: Antes de seguir recuerden que tienen que decir cuántas libras vale 1/5 de 2008

Fabiola: Vale 9/4 de libra

Enrique: Y si lo multiplicas por 5 para llegar a los 5/5 te da 45/4 de libra (figura 8.21)

Figura 8.21 Justificación para encontrar una cantidad original usando su recíproco III



En la discusión anterior puede apreciarse que las justificaciones que daban los estudiantes ya se estaban organizando y mostraban que si se planteaba el problema en términos del año del 2008 se obtenía la misma solución que si se planteaba en términos del 2009. Sin embargo, el hecho de que presentaran sus argumentos referidos al 2008 y al 2009 de forma simultánea dificultaba un poco la organización de su justificación.

Por ese motivo, en la siguiente sesión les pedí que separaran el planteamiento en términos del 2008 del que estaba en términos del 2009. El problema usado fue: *Actualmente Román tiene 868/4 de libra esterlina. Él sabe que esta cantidad equivale a 31/11 de la cantidad que tenía hace un año. ¿Qué cantidad tenía originalmente?*

Enrique: Pero es el mismo tipo de problema

Investigador: Así es, pero quisiera que separáramos el argumento del 2008 del argumento del 2009 para así ser más claros

Emilio: ¿Y por cual empezamos?

Investigador: Vamos a empezar planteándolo en términos del 2009

Enrique: ¿O sea que en 2008 tiene 868/4 de libra?

Investigador: No, en 2009 tienes 868/4 de libra

Emilio: Entonces ahora los 868 /4 son el entero

Investigador: Ajá así es.

Fabiola: Pues la verdad no entiendo la pregunta

Investigador: Vamos a ver. Si el problema estuviera planteado en términos del 2008 ¿Qué fracción unitaria estaríamos utilizando?

Enrique: Pues de onceavos

Investigador: Pero como estamos planteando el problema en términos del 2009 ¿Qué fracción unitaria tenemos que utilizar?

Emilio: Treitaiunavos

Investigador: ¿Puedes pasar a hacerlo?

Emilio: (Pasa al pizarrón y dibuja una barra con 31 cuadritos, señala los 31/31)

Investigador: Bien ahí tienen ya los 31/31 pero en términos de qué año

Emilio: Son 31/31 del 2009

Investigador: Y ahora ¿cómo encuentro la cantidad original?

Enrique: Tienes que encontrar 1/31

Emilio: 1/31 es igual a 1/11

Carlos: No, tienes que dividir los 868 entre 31 que te da 28/4 de libra

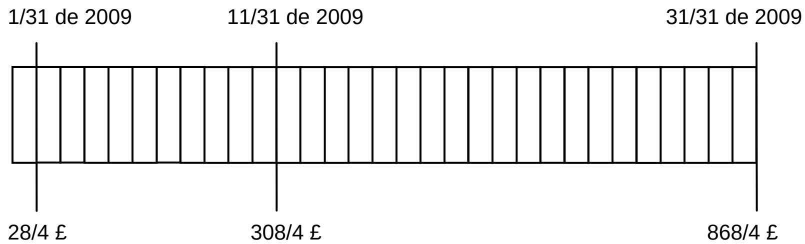
Investigador: ¿Y como hacemos para llegar a la cantidad original?

Alejandro: Porque sabemos que 1/31 de 2009 es 1/11 de 2008 entonces necesitas 11/31 de 2009 para llegar al original

Investigador: Ok, y ¿Cuántas libras serían?

Fabiola: 308/4 de libra (Ver figura 8.22)

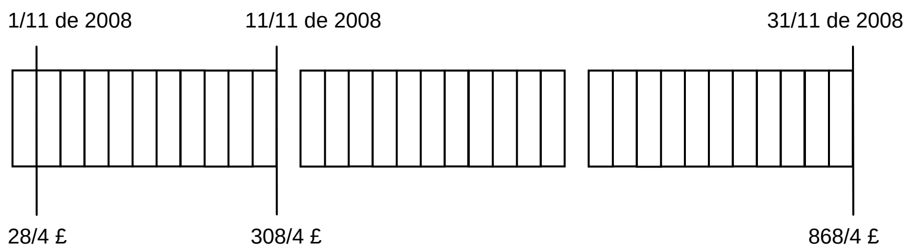
Figura 8.22 Justificación de un problema de recíproco en términos de 2009



Alejandro: Pero entonces los 11/31 de 2009 pueden ser 11/11 de 2008, y 1/31 de 2009 sería 1/11 del 2008

Investigador : Ajá, así es, y los 31/11 de 2008 serían los 31/31 de 2009 (ver figura 8.23)

Figura 8.23 Justificación de un problema de recíproco en términos de 2008



Para vincular los dibujos con los métodos algorítmicos que los jóvenes utilizaban les pregunté

Investigador: ¿A qué método de resolución numérico de los tres que ustedes han propuesto corresponde este dibujo?

Enrique: Es el método del recíproco

Investigador: Ajá, así es, ¿puedes explicar por qué?

Enrique: Pues por que (868/4) de libra • 11/31 = (308/4) de libra

El análisis de este tercer ciclo me dejó varias reflexiones. En primer lugar puede advertirse que a diferencia de otras fases anteriores, a los alumnos no les fue trivial conceptualizar este tipo de problemas. Ello a pesar de que había trabajado con la primera sección de Contaduría, la cual había mostrado más facilidad que todas las demás para razonar multiplicativamente.

Es fácil de notar que Enrique contribuía frecuentemente a plantear los problemas de manera algorítmica y algebraica, y de hecho sus participaciones fueron muy útiles para organizar y presentar la información de manera que varios alumnos pudieran establecer la equivalencia de varias estrategias algorítmicas, quizá por vez primera en su vida escolar.

No obstante, construir colectivamente una justificación conceptual concisa y un dibujo que sirviera de soporte resultó ser todo un reto. Así, este hecho dio lugar a la conjetura de que había encontrado evidencia que mostraba que incluso si un alumno, o una colectividad, era capaz de tratar a los números de manera algorítmica, e incluso algebraica, a un nivel bastante complejo, eso no necesariamente implicaba que tuviera un entendimiento conceptual con el cual pudiera respaldar sus razonamientos. Ejemplo de ello fue la mezcla de unidades de medición y de conceptos que Enrique realizó al plantear y resolver “correctamente” los problemas anteriores de manera algebraica. Y eso cuando ya habían enfrentado situaciones multiplicativas un poco más simples. ¿Qué significarían para él todos esos números y operaciones antes de la exploración? Hemos visto que llegó a proponer en dos ocasiones que “la división era recíproca de la multiplicación” ¿Lo decía desde un punto de vista algorítmico o conceptual?

El hecho de que los alumnos resolvieran el problema mezclando la expresión del problema en términos de la cantidad de 2008 con la expresión en términos del 2009 sugería que confundiendo algoritmos con conceptos

Sólo de manera paulatina se dieron cuenta que el problema podía plantearse de manera separada en términos del 2008 o en términos del 2009. Aunque finalmente los jóvenes llegaron a utilizar el recíproco de un escalar, el hecho de que siguieran recurriendo a argumentaciones rebuscadas no me dejó del todo convencido de que comprendieran el origen del recíproco. Más bien, parecía que se habían dado cuenta de la utilidad algorítmica que tenía usar las unidades fraccionarias para plantear el problema en términos de un año en específico, para después iterarlas y obtener una cantidad objetivo.

No obstante, en el siguiente periodo, cuando tomamos el tema del recíproco de porcentajes y números decimales, al parecer los estudiantes pudieron aprovechar sus conocimientos previos pues comenzaron a plantear sus problemas de manera más sintética. Veamos como ejemplo la siguiente conversación con los alumnos de la primera sección de Administración.

Actualmente Javier tiene $234 765. Él sabe que esta cantidad equivale a 105/100 de la cantidad que tenía hace un año. ¿Qué cantidad tenía originalmente?

Investigador: ¿Notan algún punto en común entre los dos métodos? O sea, entre resolver para el año 2008 y resolver para el año 2009

Isaac: Si, que 1/100 de 2008 es igual a 1/105 de 2009

Investigador: Ajá, muy bien y si sabemos que ambas magnitudes son equivalentes ¿qué tipo de igualdad se presenta en cuanto a las cantidades originales?

Marcos: Sabemos que 100/105 de 2009 son $223 585

Investigador: Muy bien, pero me refería mas bien a que pensaran sólo en términos de fracciones, no tanto de dinero

Isaac: Pues entonces 100/100 de 2008 son 100/105 de 2009 (ver figura 8.24)

Puede verse que esta es una justificación concisa, además como no querían dibujar 105/100 comenzaron a usar un modelo lineal y continuo (ver Figura 8.24)

Figura.8.24 Justificación de un problema de fracciones centesimales

En síntesis, las relaciones multiplicativas de la Etapa 3D de la ruta parecieron ser un reto instruccional importante para los estudiantes porque implicaban coordinar los siguientes elementos:

1) Entender que el comparador y el comparando eran magnitudes cuantificables en fracciones unitarias monetarias (p. ej. cuartos de libra)

2) Entender que el comparador y el comparando eran magnitudes cuantificables en fracciones unitarias no monetarias. (p. ej quintos del monto de 2008)

3) Reconocer que las dos cantidades a comparar eran la cantidad final con respecto a la cantidad original. (se tenía que comparar el monto del 2008 con el del 2009)

4) Encontrar la equivalencia entre cierta fracción unitaria del año original y otra fracción unitaria del año final (p. ej. 1/5 del monto del 2008 podría equivaler a 1/11 del monto del 2009). En otras palabras, era necesario establecer un conmensurador común entre las cantidades que se comparaban.

He decidido detener el análisis de las discusiones colectivas en este punto porque, como he explicado, la intensión de esta tesis no es generar una Teoría Instruccional Local, sino simplemente identificar un punto de partida viable para apoyar el desarrollo del razonamiento multiplicativo de estudiantes universitarios del área económico administrativa. El análisis de estas discusiones sirve para ilustrar el tipo de progreso en el razonamiento de los estudiantes que fue posible apoyar, al comenzar a trabajar con ellos a partir del punto de partida identificado y siguiendo la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje propuesta. De esta manera, el análisis de estas discusiones debe considerarse únicamente como un primer paso hacia la construcción de una Teoría Instruccional, en tanto que proporciona información valiosa para proponer cambios en la Trayectoria Hipotética formulada, tanto de las fases de desarrollo, como en los medios de representación, y de soporte y justificación de los argumentos. De hecho las modificaciones propuestas se presentan en el siguiente capítulo.

Una razón más para terminar aquí el análisis de datos es que las fases siguientes de la Trayectoria Hipotética involucran el uso de fracciones decimales, números decimales y porcentajes, pero el tipo de problemas que se resolvieron fueron muy similares a los que he analizado en este capítulo, pues de hecho tales conceptos se apoyan en el uso de las fracciones. Además, aunque videograbé también esas sesiones, los estudiantes utilizaron justificaciones, soportes y medios de representación muy similares a los que ya se habían empleado.

9. Modificaciones a la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje

La información analizada en el octavo capítulo, sugería que los jóvenes pueden aprovechar el punto de partida conceptual para coordinar las cuatro diferentes expresiones de las relaciones multiplicativas en contextos numéricos progresivamente más complejos.

No obstante, también en el capítulo 8 mencioné que es necesario que futuras investigaciones sobre las relaciones multiplicativas estén apoyadas en una Trayectoria Hipotética de aprendizaje que haga explícitos los retos conceptuales que enfrentarán los alumnos en cada una de las etapas de su desarrollo conceptual. Por eso, en este capítulo presento dicha trayectoria y explico los posibles elementos que los alumnos tendrán que coordinar para desarrollar una mayor comprensión de las relaciones multiplicativas.

9.1 Modificaciones a la versión inicial de la Trayectoria Hipotética

En el capítulo 7 presenté una propuesta sobre la Trayectoria Hipotética relacionada con el razonamiento multiplicativo. La organicé de forma en que aparece en la tabla 9.1. El orden era 1A, 1B, 1C, 1D, 2A, 2B, 2C, 2D, 3A, 3B, 3C, 3D.

Tabla 9.1 Trayectoria Hipotética de Aprendizaje original

			Etapa por Tipos de Número		
			1	2	3
Relaciones multiplicativas	A	$b \bullet k = a$ *a desconocido* *b conocido* *k conocido*	a unidad b unidad fraccionaria k entero	a entero b entero k fracción	a fracción b fracción k fracción
	B	$\frac{a}{b} = k$ *a conocido* *b conocido* *k desconocido*	a unidad b unidad fraccionaria k entero	a entero b entero k fracción	a fracción b fracción k fracción
	C	$\frac{b}{a} = \frac{1}{k}$ *a conocido* *b conocido* *1/ k desconocido*	a unidad b unidad fraccionaria k entero	a entero b entero k fracción	a fracción b fracción k fracción
	D	$a \bullet \frac{1}{k} = b$ *a conocido* *b desconocido* *1/k conocido*	a unidad b unidad fraccionaria k entero	a entero b entero k fracción	a fracción b fracción k fracción

Con base en el análisis de datos, presentado en los tres capítulos anteriores realicé una nueva versión de la Trayectoria Hipotética la cual muestro en la tabla 9.2. El orden de cada una de las etapas y subetapas es similar al que señalé para la tabla anterior. Los posibles retos instruccionales y de aprendizaje que podrían enfrentarse los explico en las siguientes secciones.

Tabla 9.2 Trayectoria Hipotética de Aprendizaje modificada

			Etapa por Tipos de Número					
			1	2	3	4	5	6
Relaciones multiplicativas	A	$b \bullet k=a$ *a desconocido* *b conocido* *k conocido*		a entero b entero k entero		a entero b entero k fracción	a fracción b fracción k entero	a fracción b fracción k fracción
	B	$\frac{a}{b}=k$ *a conocido* *b conocido* *k desconocido*	a unidad b unidad fraccionaria k entero	a entero b entero k entero	a fracción b unidad k fracción	a entero b entero k fracción	a fracción b fracción k entero	a fracción b fracción k fracción
	C	$\frac{b}{a}=\frac{1}{k}$ *a conocido* *b conocido* *1/ k desconocido*	a unidad b unidad fraccionaria k entero	a entero b entero k entero	a fracción b unidad k fracción	a entero b entero k fracción	a fracción b fracción k entero	a fracción b fracción k fracción
	D	$a \bullet \frac{1}{k}=b$ *a conocido* *b desconocido* *1/k conocido*		a entero b entero k entero		a entero b entero k fracción	a fracción b fracción k entero	a fracción b fracción k fracción
	E	*Verificación de la relación recíproca entre a y b*				a entero b entero k fracción	a fracción b fracción k entero	a fracción b fracción k fracción

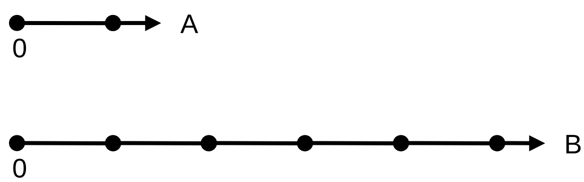
9.1.1 Primera Etapa de la Trayectoria Hipotética

Como he sugerido en los Capítulos 6 y 7, el punto de partida conceptual de mis estudiantes parecía ser la relación recíproca entre una unidad y una fracción unitaria. Por ejemplo, una vez que los estudiantes reconocían que un popote verde podía repetirse cinco veces en un popote blanco sabían que, si se definía el verde como unidad, el blanco equivalía a cinco (Etapa 1B). Por otro lado, si el blanco se definía como unidad, todos los jóvenes eran capaces de establecer que entonces el valor del popote verde sería un quinto (Etapa 1C).

Puede apreciarse aquí que la comprensión de las etapas 1B y 1C, hace triviales a las etapas 1A y 1D, ello es así porque, si se define el popote blanco como unidad, el popote verde valdrá 1/5, y es evidente que al repetirlo 5 veces se obtendrá la longitud del popote blanco (Etapa 1A). Por otro lado, si se sabe que el popote verde es 1/5 del blanco, es evidente que 1/5 de blanco es un verde (Etapa 1D).

La relación recíproca entre una unidad y una fracción unitaria puede observarse en la figura 9.1

Figura 9.1 Relación recíproca entre una unidad y una fracción unitaria



A=(1/5) B   B=5A
Si A=1 entonces B=5
Si B=1 entonces A=1/5

Así los jóvenes podían establecer, de principio y sin gran dificultad, relaciones recíprocas entre popotes de diferentes colores, entre la longitud de ciertos objetos del salón y los popotes de colores, e incluso entre combinaciones de popotes de diferentes colores. Tal información sugiere que los jóvenes eran capaces de establecer, sin gran dificultad, esas relaciones recíprocas debido a que podían:

1) Reconocer que la propiedad específica que se les pedía comparar era la longitud de los objetos.

2) Establecer relaciones de equivalencia entre la longitud de un objeto o popote y la iteración de un popote de otro color.

3) Establecer relaciones de transitividad. Es decir, por un lado sabían que si cada una de dos longitudes equivalían a una tercera, entonces esas dos longitudes tenían que ser iguales entre sí. Por otro lado, sabían que si la longitud de un objeto era mayor a la de un segundo objeto, y ésta era mayor a la de un tercero, entonces la longitud del primero necesariamente sería mayor a la del tercero.

La evidencia parecía apoyar así la propuesta de que el punto de partida de mis estudiantes era la relación recíproca entre una unidad y una fracción unitaria, pues los jóvenes no necesitaban socializar o desarrollar el concepto de medición, es decir, no les era necesario ir “más atrás” conceptualmente. Además, las diferentes pruebas y entrevistas, mostradas en los capítulos 6 y 7, también sugerían que *inicialmente* los jóvenes no conocían otros aspectos más complejos de las relaciones multiplicativas; es decir, no podían ir “más adelante”. Por supuesto, ya dentro de las discusiones grupales, la relación recíproca entre una unidad y una fracción unitaria, pareció ser de utilidad para fundamentar las justificaciones y soportes de los jóvenes ante situaciones de aprendizaje que involucraban el uso de contextos numéricos progresivamente más complejos.

En síntesis podía proponerse a la relación recíproca entre unidad y fracción unitaria como el punto de partida de los estudiantes, pues no era necesario “ir mas atrás”, e *inicialmente* no se podía ir “más adelante”. Además, dicha relación recíproca parecía poder ser la base de un desarrollo conceptual gradual de concepciones multiplicativas.

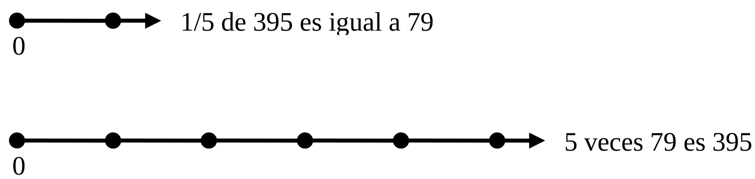
9.1.2 Segunda Etapa de la Trayectoria Hipotética

Como puede apreciarse en la tabla 9.2 esta etapa involucra la relación recíproca entre dos números enteros por medio de un escalar entero. Por ejemplo, 140 es siete veces 20, y 20 es la séptima parte de 140. La importancia de esta etapa radica en que se busca desarrollar las concepciones multiplicativas de los jóvenes, aprovechando un contexto numérico que les es familiar, el de los números enteros.

Aunque, por regla general, los alumnos de las primeras secciones no tuvieron mayor problema para comprender conceptualmente esta etapa, para varios alumnos de las segundas secciones resultó un auténtico reto. En el Capítulo 8 he mostrado cómo, a ciertos alumnos de las segundas secciones, les costaba trabajo redefinir el valor tanto del comparando como del comparador. Por ejemplo, inicialmente podían haber identificado que el popote azul se repetía tres veces en el blanco y que, si el popote blanco valía uno entonces el popote azul valía un tercio. Sin embargo, si se redefinía el valor del blanco a 30, les costaba trabajo identificar el nuevo valor del azul. Parecía que sólo cuando estos estudiantes reconocían que existía un vínculo entre la relación recíproca de los popotes y los algoritmos de la multiplicación y la división eran capaces de redefinir los valores del comparador y el comparando. En el ejemplo que he descrito en este párrafo, sólo cuando los alumnos notaban que tenían que encontrar un número que multiplicado por 3 diera 30, eran capaces de redefinir el valor de popote azul.

La relación recíproca entre dos enteros, expresable a través de un escalar también entero puede simbolizarse en una figura como la 9.2.

Figura 9.2 Relación recíproca entre dos enteros, expresable con un escalar entero



Parece entonces que el reto instruccional que enfrentan ciertos estudiantes al intentar pasar de la primera a la segunda etapa de la Trayectoría Hipotética consistiría la coordinación de los siguientes elementos:

1) Flexibilidad en la manera en que se cuantifica una magnitud. Es decir, es necesario reconocer que tanto el comparador como el comparando pueden adoptar un valor de varias unidades (y dejar de ser fracciones unitarias o una sola unidad).

2) Reconocer que el escalar entero que relaciona al comparador y al comparando no cambia (aunque el valor de dichas magnitudes sea redefinido en términos de varias unidades).

3) Reconocer que la división y la multiplicación son la expresión algorítmica de las relaciones recíprocas.

La detección de estos elementos podría ayudar al docente para informar sus decisiones pedagógicas al momento de apoyar a los estudiantes en su transición de la primera a la segunda etapa. Por ejemplo, dada la escasa familiaridad que los jóvenes tendrán con las relaciones multiplicativas en este punto, sería recomendable aprovechar lo más posible los algoritmos de la multiplicación y la división para ayudarles a advertir la relación recíproca entre comparador y comparando. No obstante, el docente deberá tener cuidado de no dejar de lado la simbolización externa, usando los popotes, u otro medio.

9.1.3 Tercera Etapa de la Trayectoria Hipotética

Las dos fases anteriores tienen como característica común que el comparador puede iterarse un número entero de veces hasta igualar al comparando o, dicho de otra forma, la relación entre el comparador y el comparando puede expresarse a través de un escalar entero, o del recíproco de ese escalar. Sin embargo, la relación entre dos magnitudes no siempre puede expresarse a través de un escalar entero (o de su recíproco). En ocasiones se deben comparar dos magnitudes que no son conmensurables directamente entre sí. En esas circunstancias se vuelva relevante preguntar cómo podríamos comparar esas dos magnitudes.

Como se recordará, en el Capítulo 8 mostré la manera en que, a diferentes ritmos, estudiantes pertenecientes a todas las secciones lograron comparar las longitudes de dos objetos que no eran directamente conmensurables entre sí. A todas las secciones les pedía que midieran el ancho de un escritorio en términos del popote blanco. Sin embargo, los jóvenes rápidamente notaban que las longitudes de estos objetos no podían compararse directamente, por ello alineaban popotes de colores que eran más pequeños que el blanco. Encontraban que el escritorio medía 15 popotes morados (sextos), así que concluían que el ancho de escritorio media 15/6 de popote blanco (Etapa 3B)

Sin embargo, también les pedía que midieran el popote blanco en términos del ancho del escritorio. En este caso ya no resultaba trivial pero lograban darse cuenta de que el ancho de escritorio estaba compuesto de 15 popotes morados, así que cada morado equivalía a 1/15 de ancho de escritorio. Como sólo eran necesarios 6 morados para formar un popote blanco, los alumnos razonaban que éste debía medir 6/15 de escritorio (Etapa 3C)

Los razonamientos anteriores muestran porqué las etapas 3A y 3D son triviales. Si los alumnos ya descubrieron que un ancho de escritorio es 15/6 de un popote, resulta trivial preguntarles porqué número tienen que multiplicar la longitud del popote para obtener la del escritorio (Etapa 3A). Por otro lado, si los alumnos ya saben que un popote es 6/15 de un ancho de escritorio, resulta trivial preguntar porqué número tienen que multiplicar la longitud de un ancho de escritorio para obtener la del popote.

Por otra parte, en la evidencia puede advertirse que los alumnos también eran capaces de reconocer que el popote morado podía jugar tres papeles:

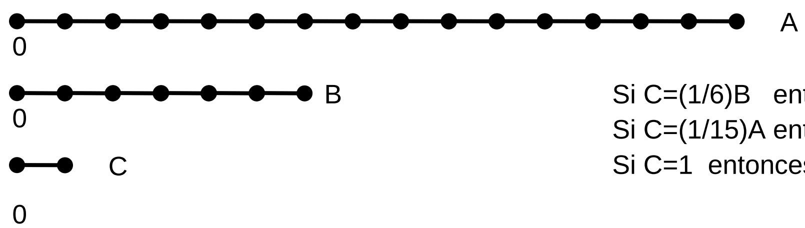
1) Equivalía a 1/6 de popote blanco

2) Equivalía a 1/15 de ancho de escritorio

3) Podía definirse como unidad, y aprovecharlo para comparar al popote blanco y al ancho del escritorio.

El uso del conmensurador común para establecer la relación recíproca entre dos magnitudes se ilustra en la figura 9.3

Figura 9.3 Establecimiento de una relación recíproca entre dos magnitudes aprovechando el conmensurador común



Si C=(1/6)B entonces A=(15/6)B
Si C=(1/15)A entonces B=(6/15)A
Si C=1 entonces A=15, B=6

Parece entonces que los estudiantes que están intentando comprender la relación reciproca entre dos magnitudes no directamente conmensurables entre sí, tendrán que coordinar los siguientes elementos:

1) Identificar una magnitud que sirva de conmensurador común; es decir, cuya relación recíproca tanto con el comparador como con el comparando sea expresable con un entero

2) Reconocer que el valor del conmensurador queda definido dependiendo de la magnitud que se establezca como comparador (y en esta etapa como unidad)

3) Una vez que el valor del comensurador ha sido definido, es indispensable recordar cuál es el comparando para poder cuantificarlo utilizando el conmensurador

4) Puede reconocerse que el conmensurador puede adoptar al menos tres valores diferentes pues puede ser una fracción unitaria de cada una de las dos magnitudes que se busca comparar, pero también, puede definirse como una unidad.

5) Es necesario recordar que aunque cambie la definición del valor del conmensurador, el escalar fraccionario, que relaciona recíprocamente las dos magnitudes que se comparan, no se modifica.

Como puede apreciarse, esta etapa requiere de una gran flexibilidad y de un importante ejercicio de coordinación por parte de los alumnos. Ello es así debido a que resulta indispensable que los jóvenes reconozcan que en cuanto una se define, el valor de una de las magnitudes, automáticamente las otras dos también quedan redefinidas.

Esta etapa es especialmente difícil porque implica la coordinar la relación entre tres magnitudes. Además tal relación ya no puede expresarse por medio de un escalar entero. Sin embargo, los beneficios de desarrollarla conceptualmente son muy grandes para alguien que estudia las carreras económico administrativas. Ello es así porque la comprensión de las relaciones multiplicativas de esta etapa, posteriormente les permitirá a los estudiantes reconocer que dos cantidades pueden compararse si se encuentra una tercera que sea conmensurable a ambas. Una vez más, es importante recordar que en estas áreas tal herramienta conceptual es muy útil pues existen una gran diversidad de situaciones de las profesiones económico administrativas que implican el uso de comparaciones, como el cálculo de los impuestos, las tasas de interés, el crecimiento de ventas de una empresa o la medición del riesgo de un activo.

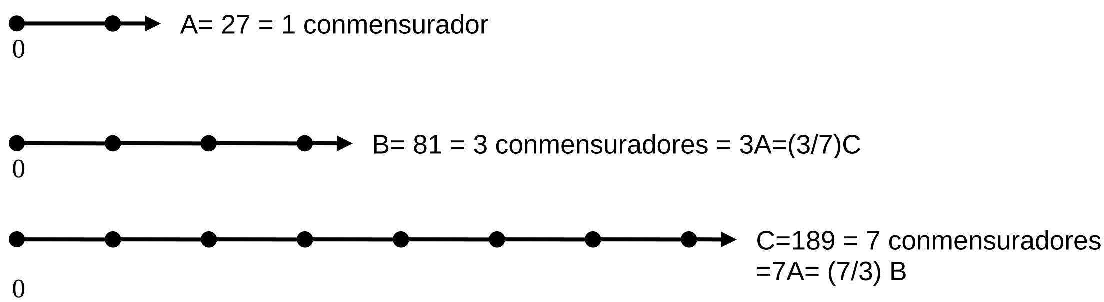
9.1.4 Cuarta Etapa de la Trayectoria Hipotética

En la cuarta etapa de la trayectoria hipotética se comparan dos números enteros cuya relación recíproca únicamente puede expresarse por medio de una fracción. De esta manera, sin importar cuál de los dos enteros se elija como comparador o como comparando, no será posible encontrar un número entero que exprese su relación recíproca.

Como se recordará en los capítulos 6, 7 y 8 mostré información que sugería que los estudiantes eran capaces de comprender conceptualmente la multiplicación de una cantidad de dinero por un factor fraccionario (Etapa 4A). En el capítulo 7 señalé que probablemente la poca familiaridad de los alumnos con un modelo comparativo de las relaciones multiplicativas impedía que emplearan dicho modelo para matematizar situaciones en las que era necesario comparar dos cantidades para obtener la tasa de crecimiento porcentual del valor monetario de un activo (Etapas 4B y 4C). No obstante, la evidencia presentada en el en el Capítulo 8 parece mostrar que una vez que los estudiantes socializan las primeras tres etapas de la Trayectoria Hipotética, son incluso capaces de aprovechar el escalar fraccionario que relaciona a dos números enteros para encontrar un conmensurador común, y aprovecharlo para comparar dichas cantidades (Etapas 4B a 4D).

La relación recíproca entre dos enteros, expresada por medio de un escalar fraccionario, puede simbolizarse y visualizarse en la figura 9.4

Figura 9.4 Relación recíproca entre dos enteros (B y C)



Parece entonces que un estudiante que está desarrollando las conceptualizaciones de esta etapa, tendrá que coordinar los siguientes elementos:

1) Reconocer que es posible comparar dos enteros aunque no haya un escalar entero que los relacione multiplicativamente.

2) Reconocer que la manera en la que pueden compararse tal tipo de enteros es a través de un conmensurador común.

3) Reconocer que el conmensurador común adopta al menos tres valores diferentes: es una fracción unitaria con respecto a los otros dos enteros que se comparan, y es un número entero en sí mismo.

4) Reconocer que cada uno de los dos enteros que se comparan también adoptan al menos tres valores diferentes: son una fracción con respecto al otro entero, son un número entero mayor a uno con respecto al conmensurador y son una cantidad en sí mismos.

Una vez más parece que esta etapa requiere de una gran flexibilidad por parte de los alumnos pues implica tener en mente que el comparador, el comparando y el conmensurador adoptan diferentes valores dependiendo de si se quiere enfatizar la relación recíproca entre las magnitudes o su valor cuantitativo. También se requiere de una importante habilidad para identificar a qué tipo de cuantificación se le está dando énfasis, para de esa manera coordinar los valores del comparador, comparando y conmensurador.

Como he comentado en los Capítulos 5 y 7, las relaciones multiplicativas propias de esta cuarta etapa son especialmente útiles en las profesiones y áreas económico administrativas, pues la comparación entre enteros no relacionados por un escalar entero, es muy utilizada para calcular el crecimiento porcentual de ventas y costos de una empresa, tasas de interés, e impuestos, entre otras situaciones.

Aquí es muy importante mencionar que en la tabla 9.1 señalo la presencia de las etapas 4E, 5E, 6E. Ello se debe a que una de las acciones que pasé por alto al momento de realizar las evaluaciones de desempeño grupal y en las clases que las siguieron fue discutir con los alumnos el hecho de que las cuatro diferentes relaciones multiplicativas en realidad eran la misma.

En términos algebraicos, cada una de las cuatros siguientes expresiones:

1) $a = k \bullet b$ 2) $k = \frac{a}{b}$, 3) $\frac{1}{k} = \frac{b}{a}$, 4) $b = \frac{1}{k} \bullet a$ con a, b, k racionales

En realidad equivalen a la relación:

$a = k \bullet b$, con a, b, k racionales

Si lo que se desea es resaltar el carácter recíproco de dos cantidades entonces las relaciones multiplicativas se sintetizan en las expresiones:

1) $k = \frac{a}{b}$,

2) $\frac{1}{k} = \frac{b}{a}$,

con a, b, k racionales

No obstante, aquí es muy importante señalar que de introducir en la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje cuestionamientos o situaciones que lleven a los alumnos a reconocer el carácter único de las cuatro expresiones multiplicativas, no resultará necesario expresarlo en términos algebraicos formales. Como se recordará, aunque las expresiones algebraicas anteriores fueron de ayuda para generar categorías de análisis de investigación y diferentes situaciones, bajo el enfoque del Diseño Instruccional lo que importa es reunir evidencia que permita reconocer si hay un desarrollo y una socialización de los conceptos de los alumnos. Tales conceptos posteriormente les serán útiles a los estudiantes para conceptualizar, simbolizar y justificar la manera en que matematizan diferentes situaciones de su vida cotidiana.

Por estas razones, bajo la perspectiva del diseño Instruccional, lo importante es que en las discusiones colectivas, los profesores estén atentos para discutir con los jóvenes el carácter recíproco que hay entre dos magnitudes, o dicho en otras palabras, que el comparador puede tomar el papel de comparando y viceversa.

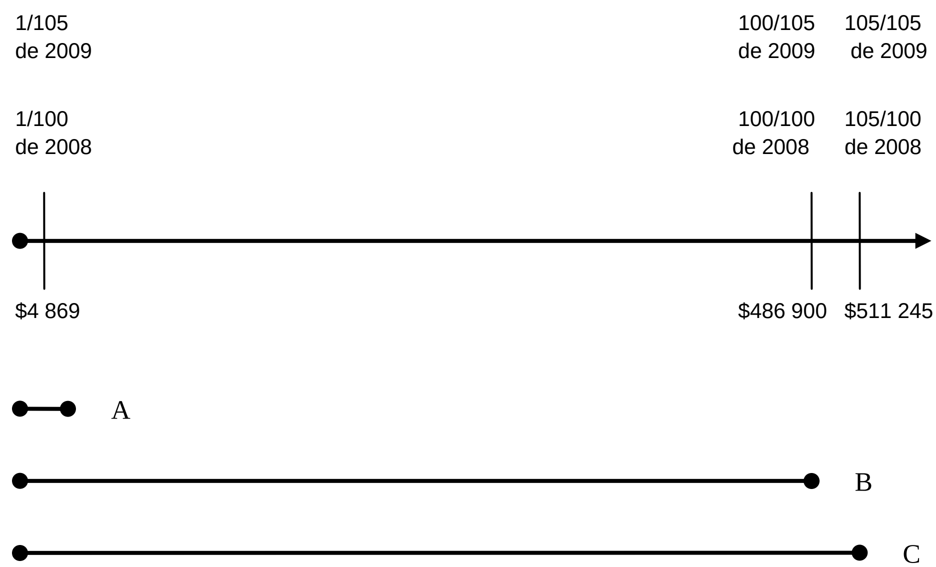
Un ejemplo de cómo podrían los profesores cerciorarse de que los alumnos han comprendido la relación recíproca entre dos magnitudes en esta etapa 4 puede darse usando la siguiente

Actualmente Alan tiene $511 245. Él sabe que esta cantidad equivale a 105/100 de la cantidad que tenía hace un año. ¿Qué cantidad tenía originalmente?

1/105 de la cantidad de 2009 es 1/100 de la cantidad de 2008

100/105 de la cantidad de 2009 son 100/100 de la cantidad de 2008

Figura 9.5 Justificación de un problema de fracciones centesimales



En el argumento anterior puede apreciarse que se está buscando encontrar la cantidad del 2008, lo cual es el objetivo de la situación. No obstante, no queda clara la relación recíproca entre la cantidad del 2009 y del 2008, y de cómo hay un conmensurador común que les ayuda a establecer tal relación recíproca. Para verificarlo quizá podrían utilizarse tres líneas como las que se ven en la figura 9.9 (A, B, C).

Como puede observarse las líneas A, B, y C coinciden con el tamaño del conmensurador común (línea A) y con las cantidades de los años 2008 (línea B) y 2009 (línea C). Posteriormente, para comprobar si los jóvenes han comprendido la relación recíproca entre las magnitudes B y C, podrían discutirse con preguntas como:

Si la barra A vale 1 ¿Cuánto vale la barra B? ¿Cuánto vale la barra C?

Si la barra B vale 1 ¿Cuánto vale la barra A? ¿Cuánto vale la barra C?

Si la barra C vale 1 ¿Cuánto vale la barra A? ¿Cuánto vale la barra B?

Por supuesto si A=1, entonces B =100 y C=105

Si B=1, entonces A= 1/100 y C=105/100

Si C=1, entonces A= 1/105 y C=100/105

Como puede apreciarse el dibujar las tres barras podría ayudar a hacer explícita la relación recíproca entre B y C, y a apuntar la importancia que tiene el conmensurador común A para determinar dicha relación recíproca.

Discusiones similares podrían realizarse en las etapas 5E y 6E, No sería necesario realizarlas en las etapas 1, 2 y 3 porque en esos casos la relación recíproca entre comparador y comparando no involucra un conmensurador común.

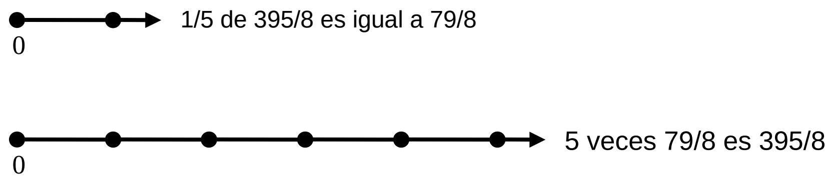
9.1.5 Quinta Etapa de la Trayectoria Hipotética

En la quinta etapa se comparan dos fracciones que están relacionadas recíprocamente a través de un escalar entero.

Como se recordará, en el capítulo 8 comenté que los alumnos de todas las secciones no tuvieron ningún problema en comparar dos fracciones que estaban expresadas en la misma fracción unitaria (común denominador). Probablemente habían comprendido que, aunque las unidades de medida habían cambiado, se trataba de una relación recíproca entre dos cantidades. De esta manera no se les dificultaría entender que 80/9 es 8 veces 10/9, y que 10/9 es 1/8 de 80/9.

La relación recíproca entre dos fracciones, expresable a través de un escalar entero puede simbolizarse en una figura como la 9.5

Figura 9.6 Relación recíproca entre dos fracciones, expresable con un escalar entero



Parece entonces que el reto conceptual que enfrentarían algunos estudiantes al transitar de la cuarta a la quinta etapa implicaría poder coordinar de los siguientes elementos:

1) Flexibilidad en su definición de unidad de medida, pues tendrán que dejar de usar unidades para usar fracciones unitarias.

2) Flexibilidad en la manera en que se cuantifica una magnitud. Es decir es necesario reconocer que tanto el comparador como el comparando pueden adoptar un valor de varias fracciones unitarias.

3) Reconocer que el escalar entero que relaciona al comparador y al comparando no cambia (aunque el valor de dichas magnitudes sea redefinido en términos de varias fracciones unitarias)

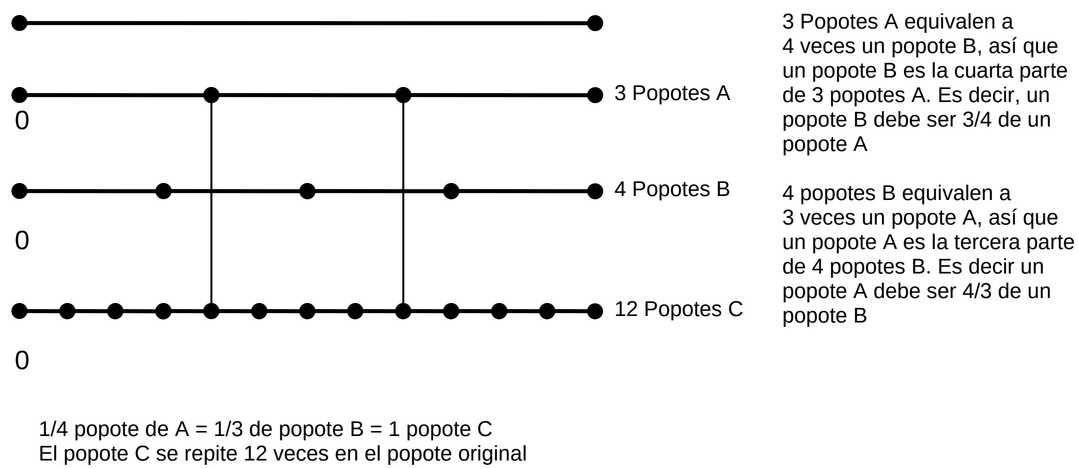
Desafortunadamente, como también mencioné en el Capítulo 8, no exploré detenidamente la manera en que los alumnos podrían encontrar denominadores comunes. Así que también quedo pendiente indagar la manera en que los jóvenes podrían comparar dos fracciones pero expresadas con una fracción unitaria diferente.

Encontrar una fracción común entre dos fracciones unitarias es todo un reto desde una perspectiva simbólica pues implica encontrar un conmensurador común entre dos fracciones unitarias.

Una conjetura y ejemplo de cómo podría abordarse este problema de simbolización en el salón de clases es el siguiente. Se podría comenzar por cuestionar al grupo a qué fracción de 1/3 equivale 1/4, considerando que sabemos que 4/4 equivale a 3/3.

Quizá primero convendría volver a utilizar los popotes de colores para evitar que las denominaciones en unidades fraccionarias generen confusiones, y después de un tiempo de discusión los alumnos probablemente lleguen a establecer un comensurador común para estas fracciones (ver figura 9.6). Posteriormente se podría establecer cuál es la relación que guarda el comensurador común encontrado con la unidad predefinida.

Figura 9.7 Obtención de un denominador común

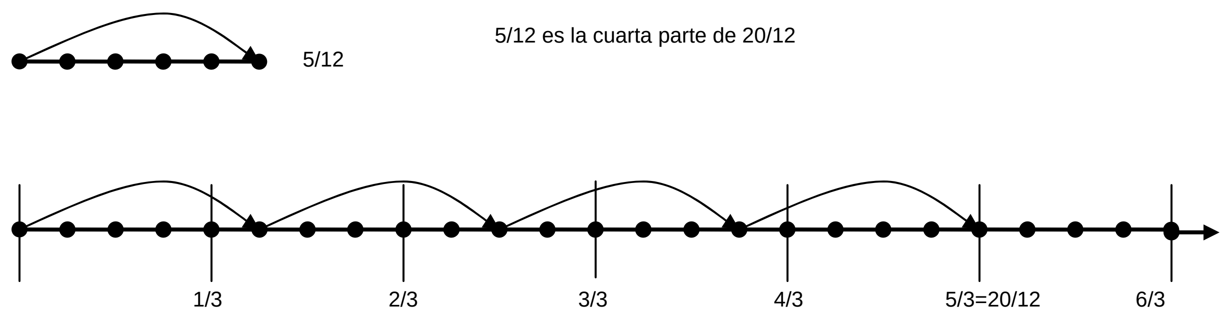


Una vez que se hubiesen discutido varias situaciones en las que fuese necesario encontrar denominadores comunes, podría pedirse a los alumnos que observaran qué propiedad algorítmica tiene ese denominador común. La conjetura es que, después de algunas discusiones, los alumnos advertirían que este denominador común puede obtenerse al multiplicar los denominadores de las dos fracciones unitarias que se comparan. Posteriormente, podría discutirse en clase si tal denominador común es el único posible, y pedir a los estudiantes que justifique su respuesta tanto simbólicamente como algorítmicamente. Quizá algunos se den cuenta que todos los múltiplos enteros del denominador común podrían también ser útiles para reexpresar las dos fracciones originales que se buscaba comparar.

9.1.6 Sexta Etapa de la Trayectoria Hipotética

En esta etapa se comparan dos fracciones que guardan entre sí una relación recíproca que se expresa a través de un escalar también fraccionario. Como se recordará, en el Capítulo 8 mostré que las primeras tres subetapas (6A, 6B y 6C) eran relativamente fáciles de comprender para los estudiantes. Sin embargo, para que los jóvenes fuesen capaces de simbolizar una fracción de una fracción, había sido necesario que primero reconocieran cuál era la fracción unitaria de una fracción. Para lograrlo, habían recurrido al uso del algoritmo de la multiplicación de fracciones (p. ej. 1/4 • 5/3 = 5/12). No obstante también habían sido capaces de simbolizar y justificar la relación recíproca entre el comparador y el comparando (p. ej. cuatro veces 5/12 es 20/12, lo que equivale a 5/3), esto sugería que habían comprendido tal tipo de relaciones de manera algorítmica y conceptual (Figura 9.7)

Figura 9.8. Fracción unitaria de una fracción



Sin embargo la etapa 6D había resultado complicada incluso para los estudiantes de la primera sección en Contaduría, quienes en otras etapas anteriores de la Trayectoria hipotética habían mostrado mayor facilidad para razonar multiplicativamente. Como se recordará los puntos que ocasionaban confusión eran dos principalmente:

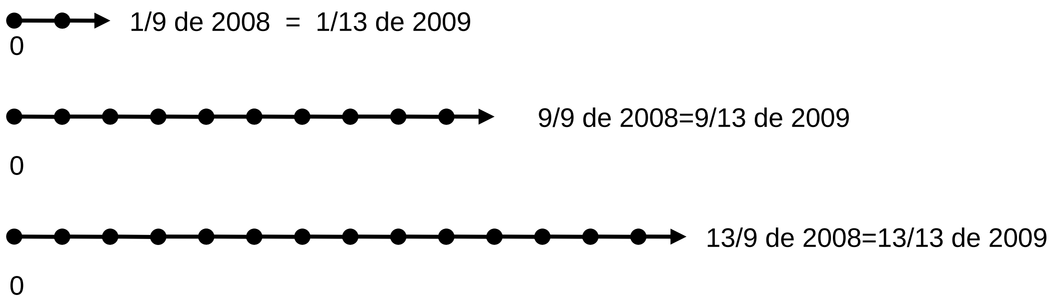
1) Se confundía el uso de fracciones como cantidades monetarias (p. ej. en 2009 una persona tiene 117/4 de libra) con el uso de fracciones como el escalar que indicaba la relación multiplicativa entre las cantidades que se comparaban (p. ej. el monto que se tiene en 2009 equivale a 13/9 del monto que se tenía en 2008)

2) Se confundía cuál era el comparador y cuál era el comparando (p. ej. no se sabía si el problema se debía plantear en términos del 2009 o del 2008)

3) Como consecuencia del punto anterior, existían dudas sobre la manera en que debía expresarse el conmensurador común (p. ej. si el problema se planteaba en términos del 2008, el conmensurador debía expresarse en novenos, pero si se expresaba en términos del 2009, el conmensurador debía expresarse en treceavos)

En la figura 9.8 puede verse un ejemplo de un planteamiento símbólico de la relación recíproca entre los montos de dos años consecutivos. Adviértase que la relación recíproca entre ambos montos no depende de la cantidad monetaria que se maneje, ni de las unidades de medida en la que está expresada. También puede apreciarse que el valor del conmensurador común depende del año que se tome como referencia

Figura 9.8 Relación recíproca entre los montos de dos años consecutivos



No fue sino después de discutir cuatro preguntas colectivamente, que los alumnos apenas comenzaron a desarrollar cierta flexibilidad en la manera en que definían el valor de las magnitudes que se comparaban. Poco a poco lograron elaborar argumentos sencillos y sintéticos, en los que se identificaba claramente cuál era el comparador y el comparando.

Parece entonces que para comprende conceptualmente esta etapa los estudiantes tendrán que coordinar los siguientes elementos:

1) Identificar la fracción unitaria de una fracción

2) Diferenciar el uso de fracciones como cantidades de su uso como escalar que indica la relación multiplicativa entre las cantidades que se comparan

3) Definir claramente cuál es el comparador y cual el comparando

4) Definir si el conmensurador común estará expresado como fracción unitaria del comparador o del comparando

5) Reconocer a qué cantidad de unidades fraccionarias equivale el conmensurador común

Nuevamente se puede notar que estamos en una etapa que exige de los alumnos una gran flexibilidad y una capacidad importante para coordinar diferentes elementos. A pesar de las posibles dificultades que pueda implicar esta etapa, su utilidad es muy grande dentro de las áreas económico administrativas, pues se emplea en todas las aplicaciones en las que se requiere comp.arar porcentualmente dos magnitudes (impuestos, intereses, crecimiento, etc).

9.1.7 Séptima Etapa de la Trayectoria Hipotética

Quizá una última etapa que convendría agregar a esta Trayectoria hipotética sería una relacionada con la introducción de nuevas notaciones fraccionarias. Con este término estoy haciendo referencia a la notación de los números decimales y a la notación porcentual. Una vez que los estudiantes ya hayan desarrollado y socializado cada una de las seis etapas anteriores, les será mas fácil dar un nuevo sentido a las notaciones fraccionarias.

Como he mostrado en los capítulos 1 y 6, muchos alumnos piensan que las relaciones de orden entre dos números decimales están dadas de una forma similar a las relaciones de orden de los números enteros. Es decir, piensan que como 20 es mayor a 8, también 0.20 es mayor a 0.8. Entonces, lo que aquí comento es que en esta séptima etapa sería necesario introducir la notación decimal y explicar a los alumnos su equivalencia con la notación fraccionaria normal. Además sería necesario discutir el tipo de relaciones relativas que hay entre diferentes posiciones decimales. Por ejemplo, 1 es diez veces 1/10, 1/10 es diez veces 1/100, y así. De esta manera, quizá los estudiantes puedan entender que las relaciones de orden entre los decimales no están basado en las cifras que se utilizan sino en los tamaños relativos de cada una de las posiciones decimales.

Por otro lado, también sería importante discutir con los jóvenes la notación porcentual, su relación con la notación decimal. Además, es necesario discutir con ellos que bajo un sistema de medición porcentual se toma una cantidad cualquiera (A) y establece a su centésima parte (0.01A) como unidad de medida. A ésta unidad se le llama “uno por ciento” (1%, uno de cien). De manera que, la cantidad original corresponde al cien por ciento (100%), y otro tipo de cantidades serán medidas *comparándose* con el uno por ciento. Si estas cantidades son menores que la cantidad original, corresponderán a un porcentaje menor al 100%, pero si son mayores que la cantidad original corresponderán a un porcentaje mayor al 100%. Tal tipo de comprensión quizá ayudaría a los jóvenes a entender que los porcentajes no son meramente procedimientos algorítmicos, sino una forma de redefinir una relación recíproca entre dos magnitudes en términos de fracciones decimales.

10. Generalización del Modelo Comparativo y su potencial en la investigación

La revisión de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje que llevé a cabo en el capítulo anterior sirvió para presentar una nueva conjetura sobre la organización de los temas, los medios de representación y las formas de argumentación que se considerarían válidas. Al examinarla, puede apreciarse que uno de los rasgos más importantes es la introducción del concepto de conmensurador común, el cual, como su nombre sugiere, es una magnitud que ayuda a hacer conmensurables, en términos racionales, a otras dos magnitudes que previamente no lo son en términos de un escalar entero o una fracción unitaria. Además, la introducción del conmensurador común en la Trayectoria Hipotética parecía importante porque el análisis de datos sugería que los estudiantes lo empleaban como una herramienta para poder comprender el concepto de recíproco.

De esta manera, un modelo que generalice el concepto de conmensurador común podría emplearse para examinar con detalle los casos en los que dos magnitudes no se relacionan a través de un escalar entero o su recíproco.

Una vez más, es necesario insistir en que, aunque quizá matemáticamente tal ejercicio sea redundante, instruccionalmente es necesario hacer explícitas las conjeturas que tiene el investigador sobre la manera en que puede organizarse la información que se discutirá con los estudiantes.

A manera de ejemplo, puede decirse que los cuatro tipos de relaciones multiplicativas que hemos manejado hasta ahora pueden sintetizarse en la expresión:

$$k \bullet b = a$$

No obstante, los estudiantes necesitan de situaciones en las que se hagan explícitas las cuatro formas de relaciones multiplicativas, que utilizamos en cada fase de la trayectoria, para finalmente advertir que la comprensión de una relación multiplicativa entre dos magnitudes requiere de entender tanto su forma directa (la multiplicación común), como la relación recíproca entre esas dos magnitudes. Si no se presentan y discuten situaciones explícitas donde los estudiantes puedan emplear cada una las cuatro formas de relaciones multiplicativas, difícilmente podrán aprovecharlas en casos concretos de su vida profesional en los que sean útiles.

De manera similar, la evidencia que hemos analizado en los capítulos anteriores sugiere que el hecho de que una persona sepa que dos cantidades son recíprocas, no garantiza que pueda argumentar conceptualmente tal relación. Ejemplo de ello son los estudiantes que saben que 5 • (7/5) = 7, y que también saben que 7 • (5/7) = 5, pero les cuesta trabajo presentar una justificación escrita o figura de tales operaciones.

Así, el uso de un modelo de las relaciones multiplicativas en el que se haga explícito el empleo del conmensurador común, será importante para fundamentar instruccionalmente tanto la Trayectoria Hipotética como los medios de representación que en ella se utilizarán. En este capítulo propongo tal modelo y muestro su potencial en la investigación.

10.1 Generalización del Modelo Comparativo

Como se recordará la propuesta original de autores como Freudenthal (1983), Thompson y Saldanha (2003), Steffe (2002) y Cortina (2008), era que las relaciones multiplicativas podrían caracterizarse como una relación recíproca entre dos cantidades referentes (a,b) y un factor iterador (k) como:

$$1)\quad k=\frac{a}{b}\text{, o bien,}\quad a=k\bullet b$$

$$2)\quad \frac{1}{k}=\frac{b}{a}\text{, o bien,}\quad b=\frac{1}{k}\bullet a$$

Puede advertirse aquí que en este modelo original los autores señalan el uso de cantidades. Sin embargo, no se aclara si tales magnitudes están expresadas en las mismas unidades, y de no ser así, la manera en la que pueden compararse.

En el nuevo modelo que presento, no trabajaré con cantidades sino con magnitudes. Recuérdese que una magnitud es simplemente una propiedad de un objeto que es susceptible de compararse con el mismo tipo de propiedad de otro, por ejemplo la longitud del ancho de una mesa puede compararse con la longitud de un lápiz. Además, la magnitud no implica la cuantificación la cual, como su nombre lo indica, es la comparación de dos magnitudes en términos numéricos tomando a una de las magnitudes como unidad de medida.

Así, los casos más sencillos de las relaciones multiplicativas podrían representarse por dos magnitudes no cuantificadas A y B, y un escalar *k* entero, tales que:

$$1)\ k=\frac{A}{B}\text{, o bien,}\qquad A=k\bullet B$$

$$2)\ \frac{1}{k}=\frac{B}{A}\text{, o bien,}\qquad B=\frac{1}{k}\bullet A$$

Como A es exactamente k veces B, o bien B es exactamente $1/k$ de A, no es necesaria una tercera magnitud que ayude a comparar B con A. Sin embargo existen casos en que la comparación entre B y A no es expresable utilizando un escalar k entero. En ese tipo de situaciones, si existe una magnitud C, que tenga como propiedades:

$$1)\ k_A=\frac{A}{C}\text{, con } k_A \text{ entero}$$

$$2)\ k_B=\frac{B}{C}\text{, con } k_B \text{ entero}$$

$$3)\ C=\frac{1}{k_A}A=\frac{1}{k_B}B$$

tal magnitud C será denominada conmensurador común.

De existir C, pueden cuantificarse A y B como enteros, y las relaciones multiplicativa entre estas dos magnitudes escribirse como:

$$1)\ \frac{k_A}{k_B}=\frac{A}{B}\text{, o bien,}\qquad A=\frac{k_A}{k_B}\bullet B\qquad \text{con } \frac{k_A}{k_B} \text{ racional}$$

$$2)\ \frac{k_B}{k_A}=\frac{B}{A}\text{, o bien,}\qquad B=\frac{k_B}{k_A}\bullet A\qquad \text{con } \frac{k_B}{k_A} \text{ racional}$$

Ésta es la formulación general de las relaciones multiplicativas empleando una magnitud C que cumple con las características del conmensurador común.

Hay que mencionar que si no existe una magnitud C, entonces la comparación recíproca entre A y B no podrá expresarse en términos racionales, y su comparación será expresada empleando números irracionales.

10.2 Potencial del modelo en la investigación

En el capítulo 5 de esta tesis intenté mostrar el vínculo que existe entre diferentes ideas pertenecientes a una secuencia conceptual relacionada con las relaciones multiplicativas. También argumenté que para lograr entender cada uno de esos conceptos era necesario comprender uno previamente. Luego en los capítulos 6 y 7, mostré que la evidencia sugería el concepto que servía de punto de partida a mis alumnos era la relación recíproca entre una unidad y una fracción unitaria. En el capítulo 8, pudo observarse la gran diversidad de situaciones que discutí con ellos para revisar si el punto de partida encontrado les era útil para refinar y flexibilizar su entendimiento de las relaciones recíprocas en contextos numéricos cada vez más complejos y relacionados con las fracciones.

Como mencioné en ese mismo capítulo, la razón por la que decidí centrarme en el análisis del razonamiento multiplicativo de los jóvenes vinculado con las fracciones comunes se debía a que, como hemos visto en el capítulo del marco conceptual, éstas constituyen la base conceptual que permitirá un empleo eficaz y pertinente de conceptos como los porcentajes o las tasas de cambio variables, dentro de un contexto profesional

Aunque por razones de tiempo, ya no extendí la investigación a las otras ideas de la secuencia conceptual mostrada en el capítulo 5, en esta sección muestro cómo para aplicar tales ideas es necesario recurrir a las relaciones multiplicativas. En algunos casos, como las tasas de cambio variables, no es necesaria la complejidad de las relaciones recíprocas entre fracciones. Sin embargo, en otras aplicaciones, como el cálculo de los flujos de valores presentes acumulados para un periodo de tiempo o el estudio de las relaciones trigonométricas, la compresión de las relaciones recíprocas resulta crucial.

Así, a continuación intento mostrar cómo las relaciones recíprocas podrían resultar importantes para enmarcar conceptualmente futuras investigaciones instruccionales vinculadas a temas tanto de las áreas económico administrativas como de otras profesiones.

10.2.1 Las relaciones multiplicativas y su vínculo con las tasas de cambio variables

El modelo de fracción como comparador permite una gran flexibilidad al momento de elegir cómo cuantificar tres magnitudes que se contrastan entre sí, pues el comparador, el comparando o el conmensurador común pueden asumir un valor unitario, o cualquier otro, y entonces el valor de las otras dos magnitudes queda automáticamente definido debido a la relación comparativa que guardan entre sí. Esta propiedad hace que el modelo pueda ser utilizado no únicamente para el tema de las fracciones, sino en general en cualquier temática en la que exista una relación comparativa entre dos magnitudes.

Dada su flexibilidad, parece haber un gran potencial para la generación de Teorías Instruccionales vinculadas con el uso que este modelo puede tener en diversos temas de las disciplinas económicas y de las ciencias naturales.

Por ejemplo, como señalé en el capítulo cinco, aunque las tasas y razones proporcionan una medida de intensidad, también son un caso de las relaciones multiplicativas, pues la relación entre dos tipos de magnitudes de naturaleza diferente (como la distancia y el tiempo), puede ser de los cuatro tipos que hemos examinado en cada una de las siete etapas de la trayectoria hipotética, es decir:

1) $k \bullet a=b$,   2) $k=b/a$,

3) $1/k=a/b$,   4) $(1/k) \bullet b=a$.

Así, el modelo comparativo puede ayudar a los estudiantes a reconocer estos tipos de relación, y a saber cuándo es pertinente utilizarlos. Por supuesto, estas medidas de concentración también existen en las áreas económico administrativas y son utilizadas en indicadores de bienestar como el ingreso per cápita, o bien, en la comparación de pasivos y activos de una empresa.

A su vez, como también ya he mencionado, la comprensión de las tasas y razones constituye un antecedente que puede ayudar a los estudiantes a reconocer que en ocasiones estas tasas y razones no son constantes, sino que la relación entre dos tipos de magnitudes va cambiando de intensidad. El ejemplo que mencionaba en el capítulo 5 era el de los costos marginales. En general, la maquinaria de una empresa pequeña no mantiene un ritmo constante, así que primero es muy productiva en el sentido de que el costo de producir las primeras unidades cada vez es menor, pero después de cierto nivel de producción, el costo por unidad comienza a aumentar. En este tipo de situaciones se requiere que los estudiantes reconozcan que las relaciones multiplicativas entre dos magnitudes distintas pueden irse modificando.

De hecho, mis estudiantes pudieron aprovechar sus conceptualizaciones relacionadas con las relaciones multiplicativas para analizar la siguiente situación en la que se intenta establecer cuál es el costo de individual de cada artículo producido por una empresa. Tal situación, es un ejemplo del tipo de casos que podrían discutirse en investigaciones futuras y que requieren de la comprensión de las relaciones multiplicativas.

Véase la Tabla 10.1 en la que se presentan tanto la evolución de sus costos como la de su producción, además pueden observarse otras dos columnas en las que se muestran los montos en los que se incrementan cada una de estas variables.

Tabla 10.1 Producción, costos y costo marginal

	Producción	**Incremento Producción**	**Costos Totales**	**Incremento Costo**	**Costo Marginal (Cmg)**
A	0		500000.00		
B	4415.	4415	1341513.49	841513.49	190.60
C	18466	14051	3146655.88	1805142.39	128.47
D	39129	20662	5612926.93	2466271.05	119.36
E	**61206**	**22077**	**8220656.00**	**2607729.07**	**118.12**
F	80000	18793	10500000.00	2279344.00	121.28
G	92562	12562	12156248.04	1656248.04	131.84
H	97896	5333	13089641.96	933393.92	174.99

Puede observarse que tanto la producción como los costos son crecientes. De hecho incluso cuando la producción es cero los costos ya son de $500 000, lo cual corresponde a cierta inversión inicial que la empresa debe pagar para iniciar sus actividades, como la compra de maquinaria y la renta de un local o terreno.

Ahora bien, ¿cuál es el costo específico de cada pantalón? Aquí ya no es tan fácil dar una respuesta. Analicemos el caso en el que la producción y los costos pasan del renglón A al B. Los costos pasan de $500 000 a $1 341 513 incrementando en $841 513.49 y la producción pasa de 0 a 4415 incrementando en 4415 unidades. Si se distribuye el incremento en costo entre el incremento en la producción, tendremos que en este intervalo de producción que va de 0 a 4415 unidades, el costo de cada pantalón es de \$190. Aquí hay que hacer notar que el incremento en los costos totales de la empresa proviene únicamente de los insumos necesarios para incrementar su producción, pues para un volumen todavía pequeño de pantalones no es necesario invertir más en una nueva maquinaria o local.

Además puede advertirse que cuando la producción y los costos vuelven a crecer, para el nuevo intervalo de producción que va de 4415 a 18 466 unidades, el costo de cada pantalón es \$128. Dado que cada intervalo de producción tiene su propio costo por pantalón, los economistas le denominan costo marginal (Cmg), pues es el costo de cada nuevo pantalón (Varian, 2005, Parkin 2006). De esta manera el Cmg hace una distribución de los costos particulares de un intervalo de producción entre las unidades de ese intervalo. Entre mas pequeño sea el intervalo de producción al que se hace referencia, se tendrá información mas específica sobre el costo unitario de cada artículo

Puede apreciarse aquí que el costo marginal corresponde a una tasa de cambio variable pues la comparación entre el incremento en costos y el incremento en producción se mantiene constante, pero únicamente dentro de cada uno de los intervalos de producción. Dicho en otras palabras, *dentro de cada uno de los intervalos de producción la relación entre costo del intervalo y la producción generada, se comporta como una tasa de cambio o una razón.* ($\Delta CT/\Delta Prod=Cmg$ sólo para el intervalo que da lugar a $\Delta Prod$, y con Cmg definida como un número real).

De esta manera las tasas de cambio y las razones resultarán pertinentes si se quiere entender las relaciones multiplicativas de los costos dentro de un intervalo producción, es decir, una vez que se sabe en qué intervalo de producción se trabaja, también se conoce el costo marginal que le corresponde, *por lo que es posible estimar la cantidad de costos variables acumulados dentro del intervalo conociendo el número de pantalones que se han producido*. Por ejemplo, si se conoce que se esta trabajando en el segundo intervalo de producción que va de 4415 a 18 466 unidades, también se sabe que el costo marginal es \$128.47, así que si se han producido 300 pantalones dentro de ese intervalo, se habrán acumulado unos costos variables equivalentes a \$38 541 pesos ($\Delta CT=\Delta Prod\bullet Cmg$). Si se sabe que se han gastado \$123 716.61, se sabe que se han producido 963 pantalones dentro de ese intervalo

(∆CT/Cmg=∆Prod). *En otras palabras, los cuatro diferentes tipos de relaciones multiplicativas podrían resultar útiles para conceptualizar la evolución de los costos totales de la empresa pero recordando siempre que estamos dentro de cierto intervalo de producción.* Tal tipo de investigaciones futuras quedan para los profesores interesados en este tipo de temas y áreas.

10.2.2 Las relaciones multiplicativas y su vínculo con los flujos intertemporales de ingresos

La obtención de los flujos intertemporales de ingresos fue otra de las situaciones complejas que tuve la oportunidad de discutir con mis alumnos empleando las relaciones multiplicativas, y que definitivamente podría investigarse con mucho mayor detenimiento en el futuro.

Antes de comentar el tema del flujo intertemporal de ingresos necesitaré mostrar cómo su discusión esta estrechamente relacionada con los conceptos de relación recíproca y de porcentajes. Como se recordará, en la sección 8.2.3 mencioné que mis alumnos podían aprovechar sus conocimientos previos sobre las relaciones recíprocas entre fracciones para plantear problemas como el que sigue:

Actualmente Javier tiene $234 765. Él sabe que esta cantidad equivale a 105/100 de la cantidad que tenía hace un año. ¿Qué cantidad tenía originalmente?

Su argumento para responder fue:

1/100 de la cantidad de 2008 es igual a 1/105 de la cantidad de 2009

Así que, 100/100 de la cantidad de 2008 es igual a 100/105 de la cantidad de 2009

También comentaban que la respuesta entonces se podía obtener multiplicando

$$234\,765 \bullet (100/105) = \$223\,585.7$$

Por último la figura que realizaron fue la siguiente (ver figura 10.1)

Figura 10.1 Justificación de un problema de fracciones centesimales

Durante algunas semanas discutí varios de estos problemas con las primeras secciones de Contaduría y Administración. Después de familiarizarse con estas situaciones algunos estudiantes, comentaron la multiplicación también podría expresarse como:

$$\$234\ 765 \bullet (1/1.05) = \$223\ 585.7$$

Pues podría obtenerse la centésima parte del numerador y denominador de la fracción que funcionaba como escalar (100/105).

Tal forma de plantear el problema podría servir de base para posteriormente resolver el problema algebraicamente. Los argumentos podrían similares al que sigue:

Definamos a x como la cantidad de dinero que tenía la persona en 2008

En 2009 tiene 1.05 x pues sabemos que en 2009 tiene 105 % de lo que tenía en 2008

También sabemos que en 2009 tiene $23 765

Así que podemos plantear la ecuación:

$$1.05\,x = \$234\ 765$$

Así que:

$$x = \$234\ 765/1.05$$

lo que podía reexpresarse como:

$$x = (1/1.05) \bullet \$234\ 765$$

Quizá de esta manera algunos alumnos podrían explicar la relación entre este procedimiento algebraico y la serie de argumentaciones y dibujos vinculados con las relaciones recíprocas. *Puede conjeturarse aquí, que quizá entonces las relaciones multiplicativas podrían resultar útiles para comprender y discutir conceptualmente las ecuaciones de primer grado*

En las siguientes sesiones podrían discutirse, situaciones como la siguiente:

El banco en el que Karen ha guardado su dinero le ofrece una tasa de interés anual del 7%, la cual se mantiene constante a lo largo del tiempo. Actualmente Karen tiene $123 548

¿Qué cantidad de dinero tenía Karen …

a) Hace un año
b) Hace dos años
c) Hace siete años
d) Hace treinta años

Puede verse que la solución y la justificación para el primer inciso es:

1/100 de la cantidad de 2008 era igual a 1/100 la cantidad de 2009

Así que 100/100 de la cantidad de 2008 eran iguales a 100/107 la cantidad de 2009

En forma de operaciones el problema se resuelve:

$$\$123\,548 \bullet (100/107) = \$115\,465.4$$

Para el segundo inciso los alumnos necesitarán realizar el mismo procedimiento pero tomando en cuenta que los años de referencia serían 2008 y 2007. La operación a realizar sería:

$$\$115\,465.4 \bullet (1/1.07) = \$107\,911.6$$

Para el tercer inciso podría preguntarse a los alumnos si hay alguna forma de pasar directamente de la cantidad de 2009 a la de 2007. Aquí es posible apreciar que una posible respuesta sería multiplicar dos veces a la cantidad de 2009 por el escalar. Es decir realizar la siguiente operación:

$$\$123\,548 \bullet (1/1.07) \bullet (1/1.07) = \$107\,911.6$$

Lo cual puede reexpresarse como:

$$\$123\,548 \bullet (1/1.07)^{2} = \$107\,911.6$$

De esta manera sería fácil resolver el tercer y cuarto inciso de la siguiente forma:

$$\$123\,548 \bullet (1/1.07)^{7} = \$76\,939.4$$

$$\$123\,548 \bullet (1/1.07)^{30} = \$16\,230.1$$

El hecho de que hace 30 años una persona haya tenido $16 230.1, quiere decir que cada año sus depósitos han acumulado intereses. Así que esta persona empezó ahorrando una cantidad pequeña y luego por los intereses había ido acumuló dinero. Es fácil comprobar que:

$$\$16\,230.1 \bullet (1.07)^{30} = \$123\,548$$

En las siguientes sesiones se podrían realizar algunos ejercicios similares para posteriormente introducir el concepto de valor presente.

El banco en el que Cristina ha guardado su dinero le ofrece una tasa de interés anual del 6%, la cual se mantiene constante a lo largo del tiempo. ¿Cuánto dinero tiene Cristina en 2009 si se supone que en 2025 tendrá $253 348?

En este tipo de problemas se busca la cantidad que se necesita depositar en 2009 para llegar a $253 348 en 2025. Por ello es era necesario recurrir al siguiente planteamiento:

$$\$253\,348 \bullet (1/1.06)^{16} = \$99\,729.4$$

Este tipo de situaciones ayudarían a explicar el concepto conocido como "valor presente" en las áreas económico administrativas (Varian, 2005, Parkin 2006). En esencia, tal concepto quiere decir que para lograr tener cierta cantidad de dinero en el futuro, se requeriría invertir determinada cantidad en el presente y dejar que esta acumule intereses. En cierto sentido puede decirse que si la tasa de interés es del 6%, $99 729.4 de 2009 equivale a tener $253 348 en 2025.

Puede advertirse entonces que la idea de valor presente puede encontrar un fundamento sólido en la conceptualización de las relaciones recíprocas. A su vez, el concepto de valor presente es indispensable para comprender otro tipo de situaciones más complejas, como el cálculo de flujos de valores presentes.

Una vez que los estudiantes comprendan la idea de valor presente podrían introducirse situaciones más complejas como la siguiente:

Carlos posee una casa por la que recibe un ingreso anual. Actualmente esta evaluando si venderla o no. El tiene las siguientes estimaciones

Año	*Ingreso anual por renta*	*Tasa de interés esperada*
2009	*$112 315*	
2010	*$120 245*	*7%*
2011	*$129 289*	*9%*
2012	*$138 345*	*8%*
2013	*$147 234*	*7%*
2014	*$156 211*	*6%*

¿Cuál es el precio mínimo al que tiene que vender la casa esta persona?

En este problema los estudiantes de Administración y Contaduría enfrentarán el reto de analizar datos que corresponden a distintos años. Además deberán reconocer que no es correcto sumar esas cifras directamente porque "los pesos del futuro no son iguales a los pesos del presente". Tendrán que expresar las cantidades en las mismas unidades y luego decidir a qué precio conviene vender la casa.

Año	*Ingreso anual por renta*	*Tasa de interés esperada*	*Factor de descuento*	*Valor presente*
2009	*$112 315*			
2010	*$120 245*	*7%*	**1/1.07**	**$ 112 378.5**
2011	*$129 289*	*9%*	**$(1/1.09)^2$**	**$ 108 819.9**
2012	*$138 345*	*8%*	**$(1/1.08)^3$**	**$ 109 822.7**
2013	*$147 234*	*7%*	**$(1/1.07)^4$**	**$ 112 324.1**
2014	*$156 211*	*6%*	**$(1/1.06)^5$**	**$ 116 729.9**
			Flujo total (en $ de 2009)	**$560 075.2**

De esta forma puede verse que los jóvenes necesitarán expresar las rentas de cada año en el valor presente que tenían en 2009, y luego sumarlas para ver cuál era el total de rentas que recibiría la persona.

Como puede apreciarse gracias al concepto de valor presente, el cual parece poder fundamentarse en el de las relaciones recíprocas, los alumnos podrían realizar razonamientos bastante complejos. Por supuesto, hace falta que investigaciones futuras analicen con más detalle y proporciones mayor evidencia de los retos conceptuales que se requieren para asimilar conceptos como el calculo de flujos de valores presentes.

Quizá la investigación futura incluso podría examinar si la idea del recíproco entre dos cantidades podría proporcionar una base conceptual para que generar diseños instruccionales sobre temas como la suma de series infinitas, como las que se estudian en programas de Cálculo Diferencial.

10.2.3 Las relaciones multiplicativas y su vínculo con la Trigonometría

Quizá una de las áreas de las matemáticas con mayor potencial de investigación en la generación de Teorías Instruccionales vinculadas con este modelo comparativo, es el de la Trigonometría. En mi experiencia docente he podido apreciar que éste es uno de los temas más descuidados a nivel medio, aún cuando tiene gran importancia dentro de las diferentes ingenierías, y también en las Ciencias Naturales.

Coincido con autores como Thompson (1994a) en que en los raros casos en los que en las secundarias y preparatorias se llegan a abordar los temas de Trigonometría, se estudian las funciones trigonométricas como funciones de un ángulo, pero es extremadamente raro encontrar ejemplos en los que haya se justificado el origen de las unidades de medida del ángulo, los radianes, y aún más, la relación que existe entre ángulo, triangulo recto y funciones trigonométricas. Así, probablemente resultaría útil generar investigaciones en las que se aprovechara el modelo comparativo para discutir con los alumnos las relaciones trigonométricas como relaciones multiplicativas entre cada uno de los lados de un triángulo rectángulo.

Conclusiones

En la introducción de este trabajo comenté que dadas las dificultades que enfrentaba para comunicar ciertas ideas matemáticas a mis alumnos, me pregunté cómo podría ayudar a los jóvenes a entender dichos conceptos pues resultaban cruciales para sus profesiones. También me cuestioné, cómo podrían generarse medios instruccionales que fuesen de utilidad a mis colegas.

La presente investigación ha intentado dar los primeros pasos hacia la generación de una propuesta que podría resultar útil para atender los rezagos en la formación matemática de los estudiantes universitarios de las áreas Económico Administrativas. Como he comentado a lo largo de la tesis, este tipo de indagaciones pueden ser de mucha utilidad porque están directamente relacionadas con la capacitación y formación de recursos humanos. Tal preparación permitiría a la población de nuestro país mejorar su capacidad para asimilar nuevas tecnologías, interpretar información cuantitativa, evaluar y considerar nuevas opciones durante los procesos de toma de decisiones, mejorar el desempeño de sus instituciones públicas y privadas, y sobretodo, elevar su calidad de vida.

De forma más específica, la contribución central de esta tesis está en sugerir que prácticamente la totalidad de los estudiantes de Administración y Contaduría de la universidad donde trabajo emplean:

1) La relación recíproca entre una unidad predefinida y una fracción unitaria, y
2) Las relaciones multiplicativas del tipo $a=k \bullet b,$ con a, b, k enteros,

como los dos únicos conceptos multiplicativos en los cuales fundamentan sus esfuerzos por comprender y matematizar situaciones prácticas de sus carreras en las que serían pertinentes conceptos multiplicativos más complejos. El hecho de que la evidencia que he mostrado en los capítulos 6 y 7 sea consistente con la de los resultados obtenidos en pruebas nacionales e internacionales (Backhoff, 2006; OCDE 2006; PISA, 2003), para estudiantes de secundaria mexicanos, sugiere que quizá tal punto de partida sea compartido por prácticamente la totalidad de los estudiantes universitarios de nuestro país.

Tomando en cuenta la conjetura mencionada sobre el punto partida, considero que para poder generar diseños instruccionales que apoyen tanto a docentes como a estudiantes, es necesario reconocer primero los conceptos iniciales de los que parten los estudiantes, de lo contrario, se estará exigiendo que los alumnos comprendan ideas y situaciones a los que no pueden darles sentido, por lo que no sólo no entenderán esas nuevas ideas, sino que tampoco desarrollarán aquéllas que supuestamente deberían ya conocer. Por supuesto, otro problema adicional será que al egresar de sus carreras los estudiantes no habrán desarrollado determinados conceptos que les resulten útiles para interpretar la información cuantitativa propia de sus profesiones.

La segunda contribución de este trabajo está en que sugiere que cuando se toma en cuenta el punto de partida de los estudiantes para generar una primera versión de una Trayectoria Hipotética, éstos son capaces de desarrollar conceptos multiplicativos cada vez más complejos y útiles para sus profesiones (capítulo 8). De esta manera, la evidencia presentada en esta tesis nos sugiere que quizá sí sea posible generar Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje o Teorías Instruccionales Locales que se adapten a las necesidades de diferentes tipos de perfiles y carreras universitarias.

Una particularidad muy importante de esta tesis está en el hecho de que para analizar la evidencia recabada se utiliza el modelo comparativo y unidimensional de las relaciones multiplicativas propuesto por Freudenthal (1983) y por Thompson y Saldanha (2003), en lugar del modelo fraccionario tan empleado en este tipo de investigaciones durante los últimos 35 años. La evidencia mostrada en el capítulo 7 y en el Anexo 1, sugiere que el modelo comparativo ayudó a los jóvenes a desarrollar el concepto de conmensurador común pues, a diferentes ritmos, reconocieron que para poder comparar dos longitudes que aparentemente eran inconmensurables entre sí, necesitaban introducir una tercera longitud, que al compararse con las otras dos pudiera iterarse un número entero de veces en cada una.

Personalmente, considero que la generalización del modelo comparativo presentada en el capítulo 10, es la tercera contribución importante de la tesis, pues no sólo extiende el modelo comparativo de Freudenthal (1983) y Thompson y Saldanha (2003), sino que desde un punto de vista instruccional, introduce un medio de simbolización (el conmensurador común) que permite comparar dos magnitudes cuya relación recíproca no es expresable por medio de un escalar entero (o fracción unitaria). La evidencia mostrada en los capítulos 7 y 8, así como en el Anexo 1, sugiere que tal medio de simbolización propicia un desarrollo en los conceptos multiplicativos de los alumnos. La afirmación anterior tiene en cuenta la manera en que, en tiempos diferentes, los jóvenes lograban intercambiar los papeles de un comparador y un comparando en situaciones propias de las áreas Económico Administrativas. Así, los alumnos entendían que si en el año 2009, la cantidad de dinero que cierta familia tenía en un banco equivalía a 109/100 de lo que tenía en 2008, ello quería decir que la cantidad del 2008 equivalía 100/109 de la cantidad del 2009.

Como mostré en el capítulo 5, el modelo comparativo de Freudenthal (1983) y de Thompson y Saldanha (2003), así como su extensión en el conmensurador común, puede usarse como medio para simbolizar una gran diversidad de conceptos propios de las áreas Económico Administrativas. Dentro de esos conceptos están: el tipo de cambio nominal, el tipo de cambio real, la comparación de valor esperado contra riesgo de un activo, la comparación de pasivos y activos de una empresa, el cálculo del monto que se debe pagar por intereses, el cálculo de la tasa porcentual de impuestos, los descuentos o incentivos al salario, el cálculo del crecimiento porcentual de los costos y ventas en un periodo de tiempo, el valor presente de una cantidad de dinero futura, el cálculo de la elasticidad precio de la demanda de un producto, la productividad de un factor de producción, la medidas de eficiencia en el uso de un insumo, entre muchos otros más. Así, en esta tesis se propone que dado que el modelo comparativo es un medio de simbolización que guarda relación con una amplia variedad de conceptos de las áreas Económico Administrativas, puede servir para enmarcar y apoyar las discusiones entre docentes y alumnos, y permitirles cuantificar una gran diversidad de situaciones.

Por supuesto, queda mucho por investigar. Como mencioné en el capítulo 10, en esta tesis apenas mostré una primera versión de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (capítulo 8) la cual todavía podría refinarse y ajustarse. Además, también queda pendiente la formulación de una Teoría Instruccional Local, lo que implicaría llevar la Trayectoria Hipotética a diferentes contextos.

Como también mencioné en la sección 9.1.4, faltó recopilar evidencia que mostrara algunas de las maneras en las que procuré que los alumnos reconocieran que los cuatro tipos de relaciones multiplicativas que utilicé como categorías de investigación expresaban la relación recíproca entre dos magnitudes.

Por otro lado, estoy conciente de que la investigación actual sólo se ocupo de las fracciones, cuando la secuencia inicial abarcaba hasta las tasas de cambio definidas para un intervalo. Queda pues pendiente, generar Trayectorias Hipotéticas y ciclos de recopilación de evidencia que se ocupen cada uno de los dominios de tal secuencia vinculada a las relaciones multiplicativas. No obstante, vale la pena aclarar, que el planteamiento de una secuencia inicial tan ambiciosa sirvió, por un lado, para que el lector tuviera una perspectiva de la progresiva complejidad y utilidad de las relaciones multiplicativas dentro del las áreas Económico Administrativas, y de la estrecha relación que guardan entre sí tales conceptos. Además tal secuencia sirvió para generar una agenda para futuras investigaciones.

En último término, futuras investigaciones, como la presentada en esta tesis, podrían dotar a los estudiantes universitarios mexicanos de un marco conceptual poderoso con el cual serían capaces de advertir los beneficios (y los riesgos) de usar el pensamiento cuantitativo para ocuparse de asuntos tanto profesionales como personales, así como de aproximarse a problemas mas complejos con confianza y con una forma de razonar más cuidadosa. Tal tipo de formación matemática otorgaría a las personas el poder de usar herramientas con las cuales logren administrar eficientemente su patrimonio, mejorar sus decisiones profesionales, hacer preguntas inteligentes a los expertos y confrontar a la autoridad con confianza. Esto redundaría en una mejor calidad de vida para ellos y sus familias.

Síntesis final

En el Capítulo 1 de esta tesis he mostrado datos que sugieren un fuerte rezago en la formación matemática de los estudiantes mexicanos de entre 15 y 16 años. Esta situación puede tener serias consecuencias desde un punto de vista académico, pues probablemente la gran mayoría de los estudiantes serán incapaces de comprender los conceptos matemáticos que se estudiarán en cursos posteriores. Pero hay una problemática mucho mas grave aún. Los datos que instituciones como el INEE (Backhoff, 2006) o la OCDE (PISA, 2003) proporcionan, nos muestran que los estudiantes mexicanos son incapaces de aprovechar sus conocimientos para analizar y dar sentido a la información cuantitativa necesaria para tomar decisiones relacionadas con su vida cotidiana y ciudadana, e incluso con la administración de su patrimonio personal y familiar. De esta manera, tal rezago educativo impide a los mexicanos contar con un marco de análisis que les permita mejorar su bienestar.

En el caso concreto de las carreras económico administrativas, uno de los puntos más problemáticos del rezago educativo, es la falta de comprensión de las relaciones multiplicativas. Prácticamente la totalidad de los jóvenes que podrían estudiar estas carreras enfrenta problemas importantes para comprender conceptos como los porcentajes o las tasas de cambio. A su vez, el desconocimiento de estas dos ideas fundamentales muy probablemente dificultará la discusión de ciertas ideas resultan cruciales para comprender la información económica.

Existen diferentes maneras en las que puede atenderse la problemática educativa descrita. Sin embargo, cada una de ellas se fundamenta en cierta perspectiva epistemológica y metodológica. En esta tesis adopté la postura de la comunidad del Diseño Instruccional (Cobb, Yackel y Wood, 1993). Como expliqué en el Capítulo 2, epistemológicamente esta comunidad sugiere que para que una persona sea capaz de proponer algún tipo de interpretación matemática coherente sobre una situación cotidiana es necesario que cuente con un concepto. De no ser así, los individuos no podrán interpretar matemáticamente dicho evento. Además, la propuesta del Diseño Instruccional sostiene que los conceptos matemáticos evolucionan y se desarrollan gracias a la continua interacción social; especialmente, en la escuela, a través de las discusiones entre el profesor y los alumnos, y entre los alumnos mismos. Además, en esa discusión debe ser apoyada por medios de simbolización que evolucionen junto con los conceptos y que hagan posible la comunicación entre los participantes. También es muy importante señalar que bajo esta perspectiva, resulta crucial que las discusiones en el salón de clases se relacionen con situaciones directamente vinculadas con las experiencias de los alumnos. Se supone que es bajo tal tipo de contextos que las discusiones se volverán experiencialmente relevantes para los estudiantes, y podrán relacionarlas con otras situaciones que les sean familiares y que puedan apoyar su aprendizaje.

En consistencia con el énfasis que pone esta comunidad en el desarrollo colectivo de conceptos que permitan matemátizar una situación concreta, sus investigadores han desarrollado una metodología, de exploración y diseño, que consiste de varias fases la cual expliqué en el capítulo 3. (Cobb y Whitenack. 1996; Cobb y Confrey, 2002; Cobb y McClain, 2003; Cobb, Visnovska, Zhao, 2008; Gravemeijer et. al. 2000, Gravemeijer, 2004).

En primer lugar se elige la secuencia de conceptos que interesa investigar. Inicialmente, tal secuencia es provisional y únicamente sirve como una orientación para la investigación. Aun así, debe mostrarse la relevancia práctica de los conceptos elegidos, y sobre todo debe dejarse claro que existe consistencia en cada uno de sus puntos; es decir, que hay una idea matemática que engloba a todos ellos.

Posteriormente, los investigadores discuten con los alumnos cada uno de los conceptos de la secuencia. Para ello se comentan colectivamente situaciones prácticas y los investigadores analizan la diversidad de argumentos que los alumnos presentan. Además, determinan si dichos argumentos colectivos representan una propuesta lógicamente coherente para matematizar una situación (Toulmin, 1969). Si los alumnos son capaces de proporcionar colectivamente razonamientos lógicamente coherentes, se avanzará al siguiente concepto de la secuencia. Durante este proceso, los investigadores están muy atentos para cerciorarse si los medios intruccionales que apoyaron la discusión y la evolución conceptual del grupo correspondieron a los que habían conjeturado inicialmente. De no ser así, en cada concepto de la secuencia, los investigadores realizan los ajustes que consideran necesarios.

Como resultado final proponen una nueva secuencia la cual será conocida como Trayectoria Hipotética de Aprendizaje. Si este proceso se realiza varias veces y se refina, se da lugar a una Teoría Instruccional Local. Aquí la palabra local quiere decir que la secuencia de temas cubre un vecindario de conceptos, pero también que aplica a un contexto escolar determinado.

De esta manera, al final de la investigación, se podrá proporcionar a otros investigadores evidencia que les ayude a informar sus propias decisiones pedagógicas y apoyar el aprendizaje de sus estudiantes.

Por supuesto la metodología descrita puede adaptarse a los objetivos de cada investigación. Así, en el capítulo 4 comenté que el objetivo central de esta tesis ha sido tratar de encontrar el punto de partida conceptual a partir del cual apoyar la comprensión de relaciones multiplicativas en estudiantes universitarios como con los que trabajo. Por esta razón, la metodología tuvo una modificación importante, en lugar de realizar ciclos de análisis progresivos, se realizaron ciclos regresivos.

A pesar de la modificación anterior, el proceso de mi investigación fue consistente con la metodología del Diseño Instruccional. Así, en primer lugar, en el Capítulo 5, mostré la relevancia que las relaciones multiplicativas tienen dentro de las carreras y profesiones económico administrativas. Expliqué cómo las tasas de cambio variables están estrechamente vinculadas con las diferentes estructuras de costos de las empresas (Bernanke 2007, Parkin 2007). Además mostré que para poder establecer una medida del cambio relativo en la evolución de cierta variable económica es necesario recurrir al uso de porcentajes. Como ambas ideas están relacionadas con la comparación entre dos cantidades parecía que también ambas se fundamentaban en una comprensión conceptual de las fracciones y de la medición, entendidas como una comparación de magnitudes (Steffe 2002, Thompson y Saldanha 2003).

Además, comenté que tal conceptualización de las fracciones y la medición podría servir para entender gran diversidad de eventos económicos que son medidos por medio de la comparación de dos o más variables, entre ellos se encuentran: el tipo de cambio nominal, las medidas de productividad y bienestar, las medidas de riesgo de un activo, las medidas de rendimiento de una empresa, el establecimiento de estándares de calidad o bienestar (Bernanke 2007, Parkin 2007).

Dado que en cada uno de estos sucesos existe una comparación entre dos magnitudes, mostré que el modelo de las relaciones recíprocas de Steffe (2002) y Thomson y Saldanha (2003) podría resultar útil para englobar los conceptos de tasas de cambio variables, de tasas de cambio fijas, de porcentajes, de fracciones decimales, de fracciones comunes y el de medición.

Una vez establecida la postura epistemológica y metodológica, la secuencia de temas que interesaba investigar, la relevancia práctica de tal secuencia y su consistencia conceptual, en los Capítulos 6 y 7 mostré los resultados empíricos de los ciclos de análisis regresivos.

En general, puede decirse que el punto de partida de los estudiantes parecía ser la relación recíproca entre las fracciones unitarias y una unidad predefinida. Hubo tres eventos que parecían confirmar tal conjetura.

1) Ninguno de los estudiantes parecía mostrar problemas para comparar magnitudes no cuantificadas: podían señalar qué magnitudes eran iguales y cuáles diferentes. Además, utilizando las longitudes de popotes pequeños, podían demostrar su igualdad o diferencia con la longitud de un popote más grande. En otras palabras, los alumnos no parecían tener dificultades para medir. Así, no era necesario que los ciclos de análisis siguieran "retrocediendo" conceptualmente.

2) La totalidad de los alumnos fue capaz de presentar justificaciones y soportes conceptuales para mostrar la relación recíproca entre una unidad predefinida y una fracción unitaria. Por ejemplo, sabían que si un popote blanco era cinco veces un popote verde, entonces, éste último era la quinta parte del blanco

3) Únicamente cuando los jóvenes aprovecharon tal fundamento conceptual fueron capaces de detectar las relaciones recíprocas entre dos cantidades pertenecientes a contextos numéricos más complejos.

En síntesis, la conjetura sobre el punto de partida se confirmó porque los jóvenes no parecieron necesitar ir más "atrás" y les fue muy difícil ir más "adelante" sin ese fundamento conceptual.

En los capítulos 7 y 8, presenté evidencia que mostraba que una vez que los jóvenes discutieron varias situaciones básicas en las que se presentaba la relación recíproca entre una fracción unitaria y una unidad predefinida, fueron capaces de aprovechar de forma paulatina tal concepto para desarrollar una comprensión de las relaciones recíprocas en contextos numéricos más complejos. Por ejemplo, pudieron relacionar recíprocamente cantidades enteras y cantidades fraccionarias. Pero además, pudieron desarrollar el concepto de conmensurador común, el cual es necesario para identificar el escalar que expresa la relación recíproca entre dos magnitudes que no están vinculadas por medio de un escalar entero. Como expliqué en la tesis, esta idea resulta crucial para poder comparar dos cantidades monetarias que son inconmensurables entre sí, por lo que también es el fundamento para comprender comparaciones cada vez más complejas, tales como el crecimiento porcentual o los posibles cambios en la clientela ante variaciones del precio de un producto.

Por otra parte, en el Capítulo 9 se discutió el hecho de que al progresar por las diferentes etapas de una secuencia de temas, y al trabajar con contextos numéricos cada vez más elaborados, los estudiantes enfrentaban el reto de flexibilizar el valor con el que definían a determinada magnitud. Otro reto adicional, era desarrollar la capacidad de coordinar los diferentes papeles que podía asumir una magnitud, los cuales podían ser:

1) Una cantidad en términos de una unidad de medida
2) Comparador, comparando o incluso conmensurador común
3) Valor con respecto al conmensurador común
4) Valor fraccionario con respecto al comparador o comparando

Así, en este trabajo he presentado a los docentes e investigadores un análisis de evidencia que espero ayude a informar sus decisiones instruccionales. He identificado un punto de partida conceptual en las relaciones multiplicativas que parece ser instruccionalmente viable para los estudiantes universitarios como aquellos con los que trabajo. Además, he sugerido los posibles retos conceptuales que tendrán que discutir los alumnos y docentes interesados en comprender las relaciones multiplicativas en contextos numéricos diferentes.

Pero la labor aún no ha terminado. Aunque en este trabajo he propuesto un punto de partida y una trayectoria hipotética, queda pendiente la conducción de nuevos ciclos progresivos de experimentación y análisis que conduzcan a la formulación de una Teoría Instruccional Local. Además, como he mencionado en el Capítulo 10, es necesario aprovechar las relaciones multiplicativas para explorar conceptos como las tasas de cambio variables y los flujos de valor presente. Las relaciones recíprocas también podrían emplearse en la investigación de otras áreas de las Matemáticas; por ejemplo, la Trigonometría. De esta forma, la investigación sobre las relaciones recíprocas serviría no sólo para apoyar el aprendizaje de ciertos conceptos indispensables en las áreas económico administrativas, sino incluso de algunas ideas relacionadas con las ciencias y las ingenierías.

Anexo A. Evidencia adicional sobre el punto partida conceptual de los estudiantes

En el capítulo 7 proporcioné evidencia que sugería que el punto de partida de los estudiantes constaba de dos elementos principales:

1) Los estudiantes comprendían la relación recíproca entre una unidad predefinida y una fracción unitaria.
2) Los estudiantes comprendían las relaciones multiplicativas del tipo $k \bullet b=a$, con a,b,k enteros

En este anexo proporcionaré evidencia la evidencia adicional que encontré para proponer tal punto de partida. Aquí, los análisis de la evidencia serán más reducidos, pues ya he realizado otros más extensos en el capítulo 7. Sin embargo, es muy importante mencionar que nuevamente muestro dos tipos de datos, los recolectados en las entrevistas semiestructuradas e individuales, y aquéllos generados en las evaluaciones del desempeño grupal. Estas dos fuentes de información, al sumarse a los resultados del instrumento escrito, ayudaron a triangular la evidencia recopilada, fortaleciendo así la conjetura sobre el punto de partida de los estudiantes. En la primera sección se hará el análisis grupal y en la segunda el individual.

A.1 Elementos encontrados en las evaluaciones del desempeño grupal

A.1.1 Conceptualización colectiva de la medición y las unidades fraccionarias

A.1.1.1 Conversación con la primera sección de Administración

Mostrada en la sección 7.3.1.1, página 167

A.1.1.2 Conversación con la segunda sección de Administración

Investigador: ¿Qué fracción son popotes amarillos del blanco?

Alfonso: Un cuarto

Investigador: ¿Puedes explicar más?

Alfonso: Porque puedes poner los cuatro junto al blanco y es lo mismo

Rodrigo: También si junto dos amarillos hacen un rojo y el rojo se repite dos veces en el blanco

Jaime: En pocas palabras busco la equivalencia

Investigador: Ahora supongan que se les pierden dos popotes azules, ¿Podrían decir cuanto vale el popote azul que les queda?

Rodrigo: Pues junto dos verdes

Investigador: A ver explica un poco mas

Rodrigo: (Junta los seis popotes verdes junto al blanco) Porque seis verdes son igual al blanco, y el azul sólo son dos verdes, el azul es un tercio.

Joel: También se puede hacer lo mismo con los cafés (novenos), porque juntas los nueve popotitos, y pones el azul junto a los cafés, y ya lo ves

A.1.1.3 Conversación con la primera sección de Contaduría

Mostrada en la sección 7.3.1.1, página 168

A.1.1.4 Conversación con la segunda sección de Contaduría

Investigador: Supongamos que se les pierde un popote rojo, ¿cómo podríamos saber cuánto vale el rojo que les queda?

Karla: Pues repito dos veces el rojo que me queda en el blanco

Juan José: También juntas los cuatro amarillos y vez que son un blanco y el rojo sólo es la mitad de eso

Karla: O puedo juntar los seis morados y el rojo sólo vale tres

Investigador: Bien ahora, si se les pierden dos azules ¿cómo puedo saber cuánto vale el azul que les queda'

Eugenia: Pues también lo repites tres veces en el blanco

Investigador: ¿Y entonces cuanto vale?

Eugenia: Un tercio

A.1.1.5 Comentarios y Conjeturas

En estas entrevistas puede apreciarse que para encontrar el valor de determinado popote los estudiantes solían establecer el número de veces que se repetía cierto popote de color en el blanco y para luego establecer la relación recíproca con el mismo. También recurrían a popotes de otros colores para mostrar a qué fracción del número de popotes de otros colores equivalía aquél por el que se preguntaba.

También puede apreciarse que el interés de los estudiantes estaba en la equivalencia entre longitudes. Por eso, para establecer la relación recíproca entre el popote blanco y uno de color, iteraban este último, y no les era necesario contar con todos los popotes de ese mismo color para establecer la relación recíproca.

Una vez mas parece que los estudiantes no necesitaban revisar el concepto de medición y en cambio podían establecer eficientemente la relación entre una unidad predefinida y una fracción unitaria.

A.1.2 Concepción colectiva de las relaciones recíprocas utilizando una unidad predefinida arbitraria

A.1.2.1 Conversación con la primera sección de Administración

Investigador: Ok, muy bien ahora supongamos que el rojo ya no vale 1/2, vale 1, ¿cuánto vale el blanco?

Héctor: Dos enteros

Investigador: ¿Y por qué?

Héctor: Pues porque son dos rojos en un blanco

Investigador: Y si ahora un verde vale 1, ¿cuánto vale el blanco?

Carolina: Cinco enteros

Investigador: Ok, y como siempre ¿por qué?

Carolina: Porque ya vimos que el blanco es 5 veces más grande que el verde

Investigador: Si los rosas (octavos) valen 1, ¿cuánto vale un rojo?

Marcos: El rojo vale cuatro

Investigador: ¿Cuánto vale el blanco?

Varios: Ocho

Investigador: Si los rosas valen 1 ¿Cuánto valdrían los amarillos (cuartos)?

Marcela: Dos

A.1.2.2 Conversación con la segunda sección de Administración

Investigador: Supongamos que los cafés valen 1, ¿Cuánto valen los azules?

Varios: Tres

Investigador: ¿Por qué?

Alfonso: Porque es evidente que hay tres cafés en el azul

Investigador: ¿Y cuánto valdría el popote blanco?

Jaime: Nueve

Investigador: Y una vez mas ¿por qué?

Jaime: Porque el azul se repite tres veces en el blanco y cada azul tiene tres cafés

A.1.2.3 Conversación con la primera sección de Contaduría

Investigador: Si ahora el popote rojo valiera uno ¿cuánto valdría el popote blanco?

Martín: Dos

Investigador: Como siempre ¿cómo lo demuestras?

Martín: Porque el blanco es dos veces el rojo

Investigador: Si el popote amarillo (cuarto) valiera 1 ¿cuánto valdría el blanco?

Varios: Cuatro

Investigador: Si el popote amarillo vale 1, ¿cuánto vale el rojo?

Varios Dos

Investigador: Si el morado vale 1, ¿cuánto vale el rojo?

Juan José: Tres

Investigador: A ver, muéstranos

Juan José: (junta tres morados junto al rojo) ahí esta son iguales

Investigador: Ahora si el morado vale 1 ¿cuánto vale el azul?

Eugenia: Dos

Investigador: A ver, y si el azul vale 1 ¿Cuánto vale el morado?

Laura: Pues la mitad

A.1.2.4 Conversación con la segunda sección de Contaduría

Mostrada en la sección 7.3.1.2 página 169

A.1.2.5 Comentarios y Conjeturas

En estas entrevistas se observa que para encontrar el valor de determinado popote de cierto color encontraba el número de veces que se repetía en otro popote de color y que generalmente era más grande. También se puede advertir que los jóvenes establecían equivalencia entre longitudes. En ocasiones ya ni siquiera iteraban, pues sabían la relación recíproca que existía entre determinados tipos de popotes

Nuevamente parece que los estudiantes podían establecer eficientemente la relación entre una longitud y otra.

A.1.3 Concepción colectiva de las relaciones recíprocas entre una combinación de unidades fraccionarias iguales y otra fracción unitaria distinta

A.1.3.1 Conversación con la primera sección de Administración

Investigador: Bien ahora, digamos que juntamos dos azules y los dos juntos valen uno, ¿cuánto valdría el morado?

Antonio: Pues cuatro

Investigador: ¿Puedes decir un poco mas?

Antonio: Porque en cada azul hay dos morados

Investigador: ¿Y cuanto valdría el morado?

Marcos: Pues un cuarto

Investigador: Ok bien, y sólo para checar, digamos ahora que tres verdes juntos valen uno ¿Cuánto valdría el negro?

Marcela: Un sexto

Investigador: Muy bien, y ¿cómo lo sé?

Marcela: Porque se repetiría seis veces en los verdes

A.1.3.2 Conversación con la segunda sección de Administración

Investigador: Supongan, que se juntan tres rojos y que esos tres juntos valen uno ¿cuánto valdría un amarillo?

Jethnael: Un quinto

Joel: No, un sexto, porque en cada rojo hay dos amarillos

Investigador: Bien y si ahora decimos que dos azules juntos valen uno ¿cuánto valdrían los cafés?

Alfonso: Pues otra vez un sexto

Investigador: ¿Puedes decir un poco más?

Alfonso: Porque en cada azul hay tres cafés

A.1.3.3 Conversación con la primera sección de Contaduría

Mostrada en la sección 7.3.1.3 en la página 170

A.1.3.4 Conversación con la segunda sección de Contaduría

Comentada en la sección 7.3.1.3 en la página 170

A.1.3.5 Comentarios y Conjeturas

Puede apreciarse en estas entrevistas que los alumnos podían redefinir el valor de un grupo de popotes de colores para establecerlo como la unidad predefinida, para luego establecer su relación recíproca con un popote de otro color, generalmente más pequeño. Como comenté en la sección 7.3.1.3, la única excepción fue la segunda sección de Contaduría.

En general, también puede apreciarse que los alumnos no tenían problemas con la medición y comparación entre dos longitudes.

A.1.4 Concepción colectiva de las relaciones recíprocas entre las longitudes de dos objetos cualquiera

A.1.4.1 Conversación con la primera sección de Administración

Mostrada en la sección 7.3.1.4, en la página 173

A.1.4.2 Conversación con la segunda sección de Administración

Investigador: Ok, de acuerdo a sus mediciones el largo del escritorio es 35 morados (sextos) entonces ahora me gustaría preguntarles ¿cuántos largos de escritorio mide el popote blanco?

Alfonso: 35/6

Investigador: No, ten cuidado, porque no les estoy pidiendo que midan el escritorio con el popote blanco, sino el popote blanco con el escritorio. Traigan todos sus popotes morados

Alumnos: (Llevan sus popotes morados al escritorio y comienzan a alinearlos en el argo del escritorio, al final confirman que hay 35 morados en el largo del escritorio)

Joel: Ahí está, son 35 morados,

Investigador: Ok muy bien medido, ahora recuerden que la pregunta es ¿cuántos largos de escritorio mide el popote blanco?

Joel: Son 5 enteros 5 sextos

Investigador: ¿Cuál es su nueva medida de referencia?

Rocío: El popote blanco

Jethnael: El popote morado

Investigador: No, a lo mejor los confundí, ahora la referencia es el largo de escritorio. Entonces, lo que les estoy preguntando es que con el largo de escritorio midan el popote blanco

Joel: Pues 35/6

Investigador: Ok, ya sabemos que si tomo como referencia el morado el largo del escritorio mide 35, pero ahora lo que les estoy diciendo es que la unidad es el largo de escritorio entonces ¿cuánto mide el popote blanco? O sea, les estoy diciendo que con algo grande midan algo pequeño

Rocío: Entonces mide 1/6

Investigador: ¿Por qué?

Alfonso: Porque cabe seis veces en el largo del escritorio

Investigador: A ver, vamos a revisar si el popote blanco se repite 6 veces en el largo del escritorio

Alfonso: (Itera el popote blanco en el largo del escritorio y comprueba que la sexta iteración se pasa del borde final del escritorio)

Investigador: Entonces ¿el popote blanco es un sexto del largo del escritorio?

Joel: No pues no

Investigador: Entonces midan el popote blanco usando como unidad el largo del escritorio pueden auxiliarse con los morados

Alumnos: (Piensan unos momentos)

Investigador: Ok, si quieren les cambio la pregunta ¿a qué fracción del largo de escritorio equivale el popote blanco?

Alfonso: A 5/6

Joel: No, porque entonces quedaría casi del tamaño del escritorio

Investigador: Entonces mide menos de 5/6

Alfonso: ¿Podemos usar los morados, verdad?

Investigador: Si, y si te fijas no necesitas moverlos. Recuerden la pregunta se cambió a ¿a qué fracción del largo de escritorio equivale el popote blanco?

Alfonso: Es que no puede ser 1/6 porque no es exacto

Investigador: De acuerdo, no puede ser 1/6

Alumnos: (Piensan durante unos 2 minutos)

Alfonso: Creo que son 5/36

Investigador: ¿Y puedes explicar por qué?

Alfonso: Porque el popote mide 6/6 entonces seis popotes blancos nos da 36/36 pero en realidad nos falta uno para los 36. O sea, yo lo estoy midiendo con estos morados chiquitos

Joel: Pero esos valen mas bien 1/35

Rocío. Entonces el popote blanco vale 6/35

Investigador: A ver de nuevo entonces ¿cuáles son los treintaicincoavos?

Jethnael: Los morados

Investigador: ¿y cuantos necesito para forma el blanco?

Varios: Seis

Alfonso: Entonces nada más son 6 de 35

A.1.4.3 Conversación con la primera sección de Contaduría

Investigador: Ya sabemos que el ancho del escritorio mide 19 rosas (octavos), entonces ahora me gustaría preguntarles ¿a qué fracción del ancho del escritorio equivale el popote blanco?

Enrique: A poco más de un medio

Carlos: No, yo digo que un cuarto

Emilio: Dos enteros y 3/8 ¿no?

Fabiola: Si, dos enteros 3/8

Investigador: Esa sería la respuesta si les hubiera preguntado cuántos popotes caben en el ancho del escritorio, pero yo lo que les estoy preguntando es que usen el ancho del escritorio para medir el popote. O sea, les estoy diciendo que midan algo pequeño con algo grande.

Omar: Yo digo que el popote es 1/3 del escritorio

Carlos: No, yo digo que 1/4

Investigador: ¿O sea que el popote blanco se repite exactamente 4 veces en el ancho?

Carlos: Si

Investigador: A ver hazlo

Carlos: (Toma el popote blanco y ve que sólo se repite 2 veces y que la tercera vez se pasa del borde del escritorio por una longitud considerable) Ah, no entonces no

Enrique: Entonces equivale a 7/9

Investigador: ¿Por qué lo dices?

Enrique: A ver deje pienso

Alejandro: Equivale a 8/19

Investigador: A ver ahora expliquen

Enrique: Sí porque ahora los rosas son los enteros

Investigador: Si quieren traigan sus rosas a la mesa y midan el ancho del escritorio

Alumnos: (Llevan sus popotes rosas a la mesa y comienzan a alinearlos junto al ancho del escritorio)

Investigador: Ok, ahora ¿pueden explicar porqué dijeron que el popote blanco equivale a 8/19 del ancho del escritorio?

Carlos: Es que un rosa es 1/19 del ancho del escritorio

Enrique: Ajá, y necesitas 8 rosas para hacer un popote entonces son 8/19 del escritorio

A.1.4.4 Conversación con la primera sección de Contaduría

Mostrada en la sección 7.3.1.4, en la página 175

A.1.4.5 Comentarios y Conjeturas

Las entrevistas anteriores sugieren que a los estudiantes de todas las secciones no les era fácil cuantificar la comparación entre dos magnitudes que no eran conmensurables entre sí por medio de un escalar entero. Parece ser que en un inicio, cuando se pedía que midieran el popote blanco con el largo (o ancho) del escritorio no entendían la pregunta pues quizá no habían advertido que se les pedía que midieran la longitud pequeña (popote blanco) con la grande (ancho o largo del escritorio). Sin embargo, después de unos momentos de reflexión advertían la utilidad de los popotes de colores mas pequeños para poder medir tanto el popote blanco como el largo (o ancho) del escritorio y de esta manera poder comparar ambas longitudes.

Las discusiones anteriores sugieren que varios alumnos pudieron darse cuenta que los popotes de colores más pequeños guardaban una relación recíproca tanto con el popote blanco como con el largo (o ancho) del escritorio, es decir lograron establecer un conmensurador común entre ambas longitudes.

De esta forma las evaluación del desempeño grupal parecían apoyar la conjetura de que el punto de partida de los estudiantes era la relación recíproca entre una unidad predefinida y una fracción unitaria. Esto es así porque, por un lado, no fue necesario discutir con ellos otros antecedentes relacionados con la medición, es decir no fue necesario explorar "más atrás". Por otro lado, el punto de partida conjeturado, sirvió para que los estudiantes pudieran desarrollar un concepto más complejo, el conmensurador común, de tal manera que les fuera útil para comparar dos longitudes que no eran conmensurables por medio de un escalar entero. En otras palabras, el punto de partida parecía apoyar el "avance" conceptual de los jóvenes.

A.2 Elementos encontrados en las entrevistas individuales

A.2.1 Conceptualización individual de la medición y las fracciones unitarias

A.2.1.1 Entrevistas con los alumnos de la primera sección de Administración

Entrevista con Carolina

Investigador: ¿Puedes decir a qué fracción del popote blanco equivalen los popotes que tienes aquí? (Le proporciona un único popote azul, verde, amarillo, morado y rosa)

Carolina: Este (el azul) es 1/3

Investigador: ¿Cómo lo compruebas?

Carolina: Porque se repite tres veces en el blanco (itera el popote azul hasta igualar la longitud del blanco, luego toma el verde) Este sería 1/6

Investigador: ¿Estas segura?

Carolina: (Lo compara con el azul) No es mas de la mitad del azul… es un 1/5

Investigador: ¿Y cómo sabes que no es 1/4?

Carolina : (Compara el verde con el blanco pero no itera) No, yo creo que sí es 1/4

Investigador: ¿Y cuánto valdría el amarillo?

Carolina: (Lo toma y lo compara con el verde) No el amarillo es1/4 y el verde es 1/5 el morado es 1/6

Investigador: ¿Cómo sabes que el morado es 1/6?

Carolina: Porque es la mitad del 1/3

Investigador: Ok, y ¿cómo supiste que el amarillo era 1/4? ¿Cómo te decidiste al final?

Carolina: Comparándolo con el 1/5, el amarillo es mas grande

Investigador: ¿O sea que simplemente viendo el amarillo supiste que era 1/4?

Carolina: Aja, bueno, si junto el amarillo y el verde no llegan a la mitad del blanco

Investigador: ¿Y cómo sabes que el amarillo sí lo hace?

Carolina: Si dos amarillos si llegan a la mitad del blanco

Investigador. Ok, y ¿el verde? ¿Cómo supiste que era un quinto?

Carolina: Porque ya tengo el sexto (morado) y el cuarto (amarillo)

Investigador: Bien, ibas a decirme sobre el rosa

Carolina: Es un octavo

Investigador: ¿Y por qué?

Carolina: Porque se repite cuatro veces en la mitad de un blanco

Entrevista con Marcela

Investigador: ¿Puedes decir a qué fracción del popote blanco equivale el popote azul?

Marcela: El azul es 1/3

Investigador: Ajá ¿ y cómo lo sabes?

Marcela: Porque si lo repito 3 veces se completa el entero

Investigador: ¿Y el morado?

Marcela: Debe ser un 1/6

Investigador: ¿Y como sabes?

Marcela: (Pone el morado junto al azul) Porque es la mitad del 1/3

Investigador: ¿Cuánto valdría éste (el verde)?

Marcela: (Lo itera en el blanco) Vale 1/5

Investigador: ¿Puedes decir un poco más?

Marcela: Es que se repite 5 veces

Entrevista con Marcos

Mostrada en la sección 7.3.2.1, en la página 178

A.2.1.2 Entrevistas con los alumnos de la segunda sección de Administración

Entrevista con Jaime

Investigador: Si el popote blanco vale 1¿Puedes decir cuánto valen los popotes que tienes aquí? (Le proporciona un único popote azul, verde, amarillo, morado y rosa)

Jaime: El azul vale 1/3

Investigador: ¿Cómo lo compruebas? ¿Cómo puedes estar seguro de que vale un tercio?

Jaime: Porque el popote azul se repite tres veces en el blanco

Investigador: ¿Y sí lo hace?

Jaime: (Itera el popote azul en el blanco) Ahí está

Investigador: Bien, y el amarillo ¿qué es?

Jaime: (Lo itera en el blanco) Parece que es 1/4

Investigador: ¿Cómo lo sabes?

Jaime: Porque casi cabe exactamente 4 veces (algunos popotes estaban mal cortados)

Investigador: Bien, ¿cuánto vale el verde?

Jaime: (Itera 5 veces en el blanco) Vale 1/5

Investigador: ¿El morado?

Jaime: (Itera 6 veces en el blanco) Es también 1/5

Investigador: ¿También?

Jaime: Es 1/6

Investigador. ¿Por qué?

Jaime: Es mas chico que el amarillo

Investigador: Ok ¿Pero como puedes estar seguro de que no es 1/7 por ejemplo?

Jaime: Pues midiendo

Investigador: ¿Tienes otra forma de comprobar que el morado es 1/6?

Jaime: Con la sumatoria de 1/3 (Toma el rosa)

Investigador: ¿Ese (el rosa) es 1/3?

Jaime: No lo sé, voy a medir (Itera pero no de forma exacta) Este es una sumatoria de 1/7

Investigador: Espera, vamos a regresar con el morado. Si quieres pon tu cuaderno debajo del blanco y haz una marca con tu pluma cada vez que repitas el morado

Jaime: (Itera el morado 6 veces) Sería 1/6

Investigador: Bien regresemos al rosa

Jaime: (Compara sobre su cuaderno el blanco con el rosa, e itera este último 8 veces) Es 1/8

Entrevista con Jazmín

Investigador: Si se supone que el blanco vale 1¿Puedes decir cuánto valen los popotes que tienes aquí? (Le proporciona un único popote azul, verde, amarillo, morado y rosa)

Jazmín: Supongo yo que éste (el azul) sería 1/3

Investigador: ¿Y como lo compruebas?

Jazmín: (Itera el azul junto al blanco) Porque cabe una, dos, tres, tres veces en el blanco entonces sería 1/3 Si el azul es 1/3 entonces éste (el amarillo) sería 1/4

Investigador: A ver explica

Jazmín: (Itera el amarillo junto al blanco) Pues también se repite una, dos, tres, cuatro… hay cuatro en el blanco. Este (el verde) debe de ser 1/5

Investigador: ¿Cómo lo compruebas?

Jazmín: (Itera el verde junto al blanco) A ver una, van dos, van tres, van cuatro, y cinco, entonces valdría 1/5 Y este (el morado) debe de ser 1/6

Investigador: A ver comprueba

Jazmín: (Itera el morado junto al blanco) Una, dos, tres, cuatro, cinco, y ya, sería 1/6. Éste (el rosa) debe de ser 1/7

Investigador: A ver, ¿cómo puedes estar segura?

Jazmín: (Itera el rosa junto al blanco) Una, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, mmmm, ahora falta un poco

Investigador: ¿puedes iterarlo una vez mas?

Jazmín: Si cabe uno mas ¿qué dije que era?

Investigador: Dijiste que era 1/7

Jazmín: Ah, no, entonces es 1/8

Entrevista con Jethnael

Investigador: Supón que el popote blanco vale 1 ¿cuánto valdrían estos otros de colores? (Le proporciona un único popote azul, verde, amarillo, morado y rosa)

Jethnael: El blanco es el entero, y el azul es 1/3 (lo itera tres veces en el blanco)

Investigador: Ok, ¿y los demás?

Jethnael: Los verdes son 1/5 por que éste (el verde) se repite 5 veces
Los morados son 1/6

Investigador: ¿y como lo sabes?

Jethnael: Porque necesito repetirlo 6 veces para poder completar el entero

Investigador: Ok, sigue con los que te faltan pero trata de ir explicándome

Jethnael: Pues es igual, el rosa vale 1/8 porque si lo repito puedo ver que cabe 8 veces

Investigador: Bien ¿cuál te falta?

Jethnael: El amarillo que a ver, vale, dos, cuatro, (itera en el blanco) vale 1/4

Entrevista con Nayeli

Investigador: Si decimos que el popote blanco vale 1 ¿cuánto valdrían estos otros? (Le proporciona un único popote azul, verde, amarillo, morado y rosa)

Nayeli: El azul vale 1/3

Investigador: ¿Por qué?

Nayeli: Porque si lo repito tres veces (lo itera junto al blanco) me da lo mismo que el blanco y pues con los demás ya es lo mismo

Investigador: ¿O sea que todos valen 1/3?

Nayeli: No, todos se repiten, el amarillo es (lo itera 4 veces junto al blanco) es 1/4

Investigador: ¿Y el verde?

Nayeli: (lo itera 5 veces junto al blanco) es 1/5

Investigador: Ok, a ver el morado

Nayeli: Es la mitad del azul

Investigador: Entonces, ¿cuánto vale?

Nayeli: pues 1/6, mmm, el rosa debe ser 1/7

Investigador: A ver chécalo

Nayeli: (lo itera 8 veces en el blanco) Ah, no, es 1/8

Entrevista con Rodrigo

Investigador: Si te digo que el popote blanco vale 1 ¿podrías decir cuánto valen estos otros? (Le proporciona un único popote azul, verde, amarillo, morado y rosa)

Rodrigo: Si, éste (el azul) vale 1/3 (lo itera tres veces en el blanco)
Éste (el amarillo) vale 1/4 (lo itera cuatro veces en el blanco)
Éste (el verde) vale 1/5 (lo itera cinco veces en el blanco)
Éste (el morado) es 1/6 (lo itera seis veces en el blanco)
Y me imagino que este (el rosa) es el 1/8 (lo itera ocho veces en el blanco)

A.2.1.3 Entrevistas con los alumnos de la primera sección de Contaduría

Entrevista con Enrique

Investigador: Digamos que este popote blanco lo vamos a considerar como la unidad entonces ¿a qué fracción corresponden estos otros popotes? (Le proporciona un único popote azul, verde, amarillo, morado y rosa)

Enrique: (Toma el azul) Supongo que este es 1/2 (lo compara con el blanco) ¿Esta mal cortado? ¿o si es 1/2?

Investigador: Si, si es un medio ¿Cómo lo comprobarías?

Enrique: (Lo itera 3 veces en el blanco) No, es 1/3
Este (el amarillo) es 1/4 (lo itera 4 veces en el blanco)
Este (el verde) debe ser 1/5 (lo itera 5 veces en el blanco)
Este (el morado) es 1/6, y este (el rosa) es 1/7

Investigador: ¿Cómo compruebas el morado es un 1/6?

Enrique: Pues porque se repite 6 veces en el blanco (lo comprueba)

Investigador: ¿Tienes otra manera de comprobar que el morado vale 1/6?

Enrique: Lo repites 2 veces en el azul

Investigador: Bien ¿y el rosa?

Enrique: Dije que era 1/7 ¿no?

Investigador: ¿Será?

Enrique:(Toma el amarillo) No, vale un 1/8 porque se repite dos veces en el amarillo

Entrevista con Fabiola

Investigador: Vamos a suponer que el popote blanco es la unidad ¿podrías decir cuánto valen estos popotes? (Le proporciona un único popote azul, verde, amarillo, morado y rosa)

Fabiola: El azul es 1/3

Investigador: ¿cómo lo demostrarías?

Fabiola: Poniéndolo 3 veces junto al blanco. Este (el amarillo) creo que como 1/4

Investigador: Ajá ¿por qué?

Fabiola: Pues porque si lo pones 4 veces te da el entero

Investigador: ¿Hay otra forma de comprobar que es 1/4?

Fabiola: Poniendo 2/8 junto al 1/4

Investigador: ¿Cómo sabes que ese (el rosa) es 1/8?

Fabiola: Porque es la mitad del 1/4, entonces podría poner ocho rosas junto al blanco y sería el entero. El verde es ¿1/5?

Investigador: No lo sé, ¿será?

Fabiola: (Itera el verde 5 veces junto al blanco) Si éste es 1/5. Y éste (el morado) es 1/6

Investigador: A ver…

Fabiola (Lo itera 6 veces junto al blanco) Si es 1/6

Investigador: ¿Hay otra forma de demostrar que el morado es 1/6?

Fabiola: Con el azul, porque es la mitad

Entrevista con Omar

Investigador: Digamos que el blanco es la unidad, entonces ¿cuánto valdrían los popotes que tienes aquí? (Le proporciona un único popote azul, verde, amarillo, morado y rosa)

Omar: Este 1/3, los azules

Investigador: Ajá, ¿Cómo lo sabes?

Omar: (Lo itera 3 veces junto al blanco) Porque hasta acá llega el primer tercio, hasta acá el segundo y ya este poquito espacio también tiene otro tercio

Investigador: Ok, ¿y el amarillo?

Omar: Pues con este también puedo empezar a medir y calculo que son 1/4 (comienza a iterar junto al blanco) aquí esta el primer, aquí el segundo, aquí el tercero y aquí esta el cuarto

Investigador: Ok, ahora los demás

Omar: Éste (el verde) no sé que sea, entonces tenemos que medir, (lo itera junto al blanco) aquí va uno, dos, tres, cuatro, cinco, estos son 1/5

Investigador: Ajá

Omar: (Toma el morado) Éste no sé, entonces otra vez mido (itera junto al blanco), uno, dos, tres, cuatro, cinco y seis, son 1/6

Investigador: Ok vas bien

Omar: (Toma el rosa) Y estos vamos a ver, (itera junto al blanco) uno, dos, tres, cuatro, con este son cinco, seis, siete y ocho, estos son 1/8

Investigador: ¿Hay otra forma en la que podrías comprobar que los morados son 1/6 y los rosas son 1/8?

Omar: Pues comparando entre ellos, ya sabiendo la medida tomo dos de ellos y comparo

Investigador: A ver ¿cómo le harías? Demuestra que un morado es 1/6

Omar: Porque 1/6 sería la mitad de 1/3

Investigador: ¿Y el 1/8?

Omar: Lo podríamos comparar también con el 1/4, entonces podríamos decir que el amarillo vale 1 para el rosa, pero el blanco es la unidad del amarillo y el amarillo se repite 4 veces en el blanco, entonces en cada amarillo hay 2 rosas y 4 por 2 es 8.

A.2.1.4 Entrevistas con los alumnos de la segunda sección de Contaduría

Entrevista con Elena

Investigador: Vamos a suponer que por ahora el popote blanco vale 1 ¿Podrías decir cuánto valen los popotes de colores que tienes aquí? (Le proporciona un único popote azul, verde, amarillo, morado y rosa)

Elena: El azul vale 1/3

Investigador: ¿cómo demuestras que vale 1/3?

Elena: (Lo itera junto al blanco) Porque esta es una, dos, tres veces. Este (amarillo) vale 1/3

Investigador: A ver explícame

Elena: (Lo itera junto al blanco) Pues se repite, una, dos, tres, cuatro. Hay 4 en el blanco

Investigador: Ok, ¿y el verde?

Elena: (Lo itera junto al blanco) A ver cabe, una, dos, tres, cuatro, cinco, entonces es 1/5

Investigador: Muy bien, ahora con el morado

Elena: (Lo itera junto al blanco) Es una, dos, tres, cuatro, cinco, seis, vale 1/6 y el rosa es 1/7

Investigador: A ver comprueba

Elena:(Lo itera junto al blanco) Una, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho. Es 1/8

Entrevista a Genaro

Investigador: Vamos a decir que el blanco vale 1, y entonces puedes decir ¿cuánto valen los popotes de los otros colores? (Le proporciona un único popote azul, verde, amarillo, morado y rosa)

Genaro: (Itera tres veces el azul junto al blanco) Este vale 1/3

(Itera cuatro veces el amarillo junto al blanco) Este es 1/4

(Itera cinco veces el verde junto al blanco) Este es 1/5

Este (el rosa) es el más chiquito debe de ser 1/2

Investigador: ¿Será?

Genaro: No, mentira, mentira, (lo itera ocho veces junto al blanco) No, vale 1/8

Investigador: Ok, pero ahora, te saltaste el morado ¿no?

Genaro: (Lo itera seis veces junto al blanco) Es 1/6

Entrevista a Karla

Investigador: Si el popote blanco vale 1 ¿puedes decir cuánto valen los demás? (Le proporciona un único popote azul, verde, amarillo, morado y rosa)

Karla: (Toma el morado y lo itera tres veces en la primera mitad del blanco) Este es 1/3,

Investigador: ¿O sea que cabe tres veces en el popote blanco?

Karla: No, se repite 6, es 1/6

Investigador: Ok, bien, escoge otro

Karla: (Toma el rosa y lo itera 4 veces en la primera mitad el blanco) Este es 1/4

Investigador: ¿O sea que se repite 4 veces en el blanco?

Karla: No, es 1/8

Investigador: ¿Y el verde?

Karla: (Lo itera 5 veces en el blanco) Este es el 1/5

Investigador: Ajá muy bien

Karla: (Itera el amarillo 4 veces en el blanco) Este es el 1/4 y este (el azul) es la mitad

Investigador: ¿De verdad? ¿Ya checaste cuántas veces se repite?

Karla: No, pero puede verse

Investigador: Mejor revisa

Karla: (Lo itera 3 veces junto al blanco) Ah, no, es 1/3

A.2.1.5 Comentarios y Conjeturas

En las entrevistas anteriores puede advertirse que para encontrar el valor de cierto popote de color los jóvenes solían revisar cuántas veces se podía iterar en el blanco. Otras veces comparaban con popotes de otro color cuyo valor ya conocían.

Una vez más el interés de los jóvenes esta en iterar para encontrar longitudes equivalente y no necesitaron de varios popotes del mismo color que les permitieran igualar la longitud del blanco.

Nuevamente la evidencia sugiere que los estudiantes no necesitaban revisar el concepto de medición y en cambio podían establecer eficientemente la relación entre una unidad predefinida y una fracción unitaria.

A.2.2 Concepción individual de relaciones recíprocas de enteros mayores a uno

A.2.2.1 Entrevistas con los alumnos de la primera sección de Administración

Entrevista a Carolina

(Ver sección A.2.1.1 donde los alumnos definen el valor de los popotes de colores cuando el blanco valía uno)

Investigador: Ahora vamos a suponer que el blanco vale 32 ¿cuánto valdría el rosa?

Carolina: Tendría que multiplicar 1/6 por 32 ¿no?

Investigador: ¿El café vale 1/6?

Carolina: Ah, no, 1/8, entonces sería 1/8 por 32, entonces el rosa vale ¿246?

Investigador: ¿O sea que el rosa vale más que el blanco?

Carolina: No, o sea, el rosa sería 1/246

Investigador: ¿O sea que el rosa se haría más chiquito de lo que ya es?

Carolina: No es que se haga mas chiquito, lo que pasa es que como el blanco es 32 veces más grande entonces el rosa se hace 32 veces mas chiquito, y cabe 246 veces en 32 enteros

Investigador: Ok, a ver retomemos, si el blanco vale 1, ¿cuánto vale el rosa?

Carolina: 1/8

Investigador: Pero ahora te digo el blanco vale 32, y tu me dices que el rosa vale 1/246 ¿no? entonces ¿se hace mas chico?

Carolina: (Piensa durante un minuto) Bueno sería ver cuántos de 1/8 hay en 32 enteros

Investigador: Recuerda, el blanco no son 32 popotes, sino que el blanco vale 32 entonces ¿cuánto valdría el rosa?

Carolina: (Piensa unos momentos)

Investigador: Ok, a ver te cambio la pregunta (toma un rojo), sabemos que el rojo es la mitad del blanco, si el blanco vale 32 ¿cuánto vale el rojo?

Carolina: vale 16

Investigador: Ok, ¿cuánto vale el amarillo?

Carolina: ¿Este valía 1/4? ¿no?

Investigador: Ajá, así es,

Carolina: Si la mitad valía 16, el amarillo sería 1/8

Investigador: ¿o sea que el amarillo sería más pequeño que uno?

Carolina: Sí, necesitaría 8/8 para poder hacer un 1…. ¡Aash, ahora sí no sé!

Investigador: No te preocupes, tú tranquila, si la mitad vale 16 ¿Cuánto vale el amarillo?

Carolina: Entonces vale 8,

Investigador: Ajá, muy bien ¿por qué?

Carolina: Porque el amarillo es la mitad del rojo

Investigador: Ok, y ahora sí, ¿cuánto valdría el rosa?

Carolina: Valdría 16, que diga, valdría 4

Investigador: Muy bien, ¿y por qué?

Carolina: Porque es 1/8 de 32

Investigador: Si el blanco valiera 128 ¿cuánto valdría el rosa?

Carolina: Sería 128 entre 8 (usa su calculadora) sería 16

Investigador: Si el blanco valiera 30, ¿cuánto valdría el azul?

Carolina: Valdría 10

Investigador: Y ¿cuánto valdría el morado?

Carolina: ¿El morado era el 1/5? (lo compara con el tercio) Ah, no valía 1/6

Investigador: Entonces ¿cuánto vale el morado?

Carolina: Valdría 5

Investigador: ¿Y el verde?

Carolina: El verde sí es el 1/5 (piensa unos momentos) entonces serían 30 entre 5 valdría 6

Investigador: Si el blanco vale 180 ¿cuánto vale el azul?

Carolina: (Usa su calculadora) Sería 60

Investigador: ¿Y el verde?

Carolina: (Usa su calculadora) Sería 36

Investigador: ¿Y el morado?

Carolina: (Usa su calculadora) Sería 30

Entrevista a Marcela

(Ver sección A.2.1.1 donde los alumnos definen el valor de los popotes de colores cuando el blanco valía uno)

Investigador: Ok, vamos ahora a suponer que el blanco vale 120 ¿cuánto valdría el azul?

Marcela: Pues valdría 40

Investigador: ¿Qué pensaste?

Marcela: Pues es que ya sabemos que el azul se repite tres veces en el blanco

Investigador: Ok, y si ahora te digo que el blanco vale 125 ¿Cuánto vale el verde?

Marcela: Son 125 entre 5 (usa su calculadora), son 25

Investigador: Bien, ahora supón que el blanco vale 216 ¿Cuánto vale el morado?

Marcela: Son 216 entre 6 (usa su calculadora) son 36

Entrevista a Marcos

(Ver sección A.2.1.1 donde los alumnos definen el valor de los popotes de colores cuando el blanco valía uno)

Investigador: Si el popote blanco valiera 45 ¿cuánto valdría el azul?

Marcos: Valdría la tercera parte de 45, que vendrían siendo 15

Investigador: Ok, y si el blanco valiera 64, ¿cuánto valdría el amarillo?

Marcos: Pues un cuarto de eso, que son 16

Investigador: Bien, ahora digamos que el blanco vale 512 ¿cuánto vale el rosa?

Marcos: Sería un octavo de esa cantidad (usa su calculadora) serían 64

A.2.2.2 Entrevistas con los alumnos de la segunda sección de Administración

Entrevista con Jaime

(Ver sección A.2.1.1 donde los alumnos definen el valor de los popotes de colores cuando el blanco valía uno)

Investigador: ¿Qué pasaría ahora si el popote blanco valiera 90?¿Cuánto valdría el azul?

Jaime: Si es 1/3, valdría 30

Investigador: Ok, ¿cuánto valdría el verde? Puedes usar tu calculadora

Jaime: Este (el verde) se supone que es 1/7

Investigador: No, el verde no es 1/7

Jaime: Aah, ya es 1/5

Investigador: Ajá, y si el popote blanco vale 90 ¿cuánto vale el verde?

Jaime: (Usa su calculadora) Valdría 18

Investigador: ¿Cuánto valdría el popote morado?

Jaime: Es 1/6 (usa su calculadora) Valdría 15

Investigador: Ok, ahora si el popote blanco vale 180 ¿cuánto valdría el popote amarillo?

Jaime: Como es 1/3 valdría 60

Investigador: ¿Seguro que es 1/3?

Jaime: (Itera el amarillo en el blanco) Ah, no, es 1/4, entonces sería 180 entre 4 (usa su calculadora) Entonces el amarillo valdría 45

Investigador: Ok, ok, muy bien, ¿cuánto valdría el popote verde?

Jaime: (Usa su calculadora) Valdría 36

Investigador: ¿Cuánto valdría el morado?

Jaime: (Usa su calculadora) Son 180 entre 6, valdría 30

Investigador: ¿Y el azul?

Jaime: Valdría 90

Investigador: ¿Seguro?

Jaime: Sí, porque el azul sólo es 1/3

Investigador: A ver checa en tu calculadora

Jaime: Aaah, no, valdría 60

Investigador: Si el popote blanco valiera 540 ¿cuánto valdría el morado?

Jaime: (Usa su calculadora) Serían 77

Investigador: ¿Qué fracción era el morado del blanco?

Jaime: Valía 1/6

Investigador: Ok, ahora si el blanco vale 540, ¿cuánto vale el morado?

Jaime: (Usa su calculadora) Vale 90

Investigador: ¿Cuánto valdría el popote amarillo?

Jaime: (Usa su calculadora) Sería 135

Investigador: ¿Cuánto valdría el popote verde?

Jaime: (Usa su calculadora) Sería 108

Entrevista con Jazmín

Mostrada en la sección 7.3.2.2, en la página 180

Entrevista con Jethnael

(Ver sección A.2.1.1 donde los alumnos definen el valor de los popotes de colores cuando el blanco valía uno)

Investigador: Vamos a suponer ahora que el blanco vale 32, ¿cuánto valdría el rosa?

Jethnael: Pues 4

Investigador: Ajá ¿por qué?

Jethnael: Pues porque es la octava parte del blanco

Investigador: Ok, ahora, si el blanco vale 24, ¿cuánto vale el morado?

Jethnael: También 4

Investigador: ¿Puedes decir más?

Jethnael: Pues sería 24 entre 6, porque hay seis morados en el blanco

Investigador: Si ahora el blanco vale 18 ¿cuánto vale el café?

Jethnael: El café se repite 9 veces en el blanco (usa su calculadora) entonces valdría 162

Investiador: Ok, pero a ver, lo que estoy diciendo es que el blanco vale 18, no el café

Jethnael: Aaah, entonces el café vale 2

Entrevista con Nayeli

(Ver sección A.2.1.1 donde los alumnos definen el valor de los popotes de colores cuando el blanco valía uno)

Investigador: Ok vamos a suponer que el blanco vale 85 ¿cuánto valdría el verde?

Nayeli: Sería la quinta parte de 85

Investigador: ¿Y cuanto es? Puedes usar tu calculadora

Nayeli: (Usa su calculadora) Serían 17

Investigador: Ok, bien. Digamos ahora que el blanco vale 216 ¿cuánto valdría el amarillo?

Nayeli: (Usa su calculadora) Serían 54

Investigador: ¿Cómo lo supiste?

Nayeli: Dividí los 216 entre 4

Investigador: Ok, ¿y cuánto valdría el rosa?

Nayeli: ¿El blanco sigue valiendo 216?

Investigador: Ajá, así es

Nayeli: (Usa su calculadora) Sería 27

Investigador: Oye y el morado ¿se puede saber si tiene un valor exacto?

Nayeli: (Usa su calculadora) Sí, son 216 entre 6 que son 36

Entrevista con Rodrigo

(Ver sección A.2.1.1 donde los alumnos definen el valor de los popotes de colores cuando el blanco valía uno)

Investigador: Muy bien, ahora, digamos que el blanco vale 90 ¿cuánto valdría el verde? Puedes usar tu calculadora

Rodrigo: ¿Cuánto valía el verde? ¿un cuarto?

Investigador: No sé, si quieres vuelve a checar

Rodrigo: (Lo itera 5 veces) No, es 1/5. ¿Cuál era la pregunta?

Investigador: Que si el blanco vale 90 ¿cuánto vale el verde?

Rodrigo: ¿Podría ser 90/18?

Investigador: ¿Por qué lo dices?

Rodrigo: Bueno es que este (el verde) era 1/5 y ahora pues serían 90/5 podría ser ¿no?

Investigador: Pero entonces ¿estás diciendo que tienes 90 verdes? Serían mucho más grandes que el blanco ¿no?

Rodrigo: Pues no sé, mmm, no, no pueden ser 90/5

Investigador: Lo que digo es que el blanco mide 90 unidades de lo que tu quieras ¿Cuánto valdría el verde?

Rodrigo: Aaaah, pues 18 ¿no?

Investigador: Ajá ¿por qué?

Rodrigo: Porque dividí los 90 entre 5

Investigador: Ajá, muy bien ¿Cuánto valdría el morado?

Rodrigo: Era el 1/6, entonces (usa su calculadora) sería 15

Investigador: Ahora si el blanco valiera 180 ¿Cuánto valdría el amarillo?

Rodrigo: (Lo itera 4 veces junto al blanco y luego usa su calculadora) Valdría 45

A.2.2.3 Entrevistas con los alumnos de la primera sección de Contaduría

Entrevista con Enrique

(Ver sección A.2.1.1 donde los alumnos definen el valor de los popotes de colores cuando el blanco valía uno)

Investigador: Si el blanco vale 72 ¿Cuánto valdría el rosa?

Enrique: 576

Investigador: ¿O sea que el rosa sería mas grande que el blanco?

Enrique: No, valdría 9

Investigador: ¿Por qué?

Enrique: Porque es la octava parte del blanco

Investigador: ¿Cuánto valdría el amarillo?

Enrique: 18

Investigador: ¿Puedes decir más?

Enrique: Pues porque es el doble del rosa

Investigador: Si ahora el blanco vale 216 ¿cuánto vale el rosa?

Enrique: (Usa su calculadora) 27

Investigador: ¿Qué hiciste?

Enrique: Otra vez divides 216 entre 8

Entrevista con Fabiola

(Ver sección A.2.1.1 donde los alumnos definen el valor de los popotes de colores cuando el blanco valía uno)

Investigador: Vamos ahora a suponer que el blanco vale 90 ¿Cuánto vale el azul?

Fabiola: Pues 30

Investigador: Ok, ¿Cuánto vale el morado?

Fabiola: El morado vale 15

Investigador: Ok, si el blanco vale 180 ¿cuánto vale el amarillo?

Fabiola: (Piensa durante un minuto) Aaay, no, no sé

Investigador: A ver si el blanco vale 1 ¿Cuánto vale el amarillo?

Fabiola: Vale 1/4

Investigador: Ahora, si el blanco vale 180 ¿Cuánto vale el amarillo?

Fabiola: ¡Me estoy confundiendo! ¿180? Aaaah, ya vale 45

Investigador: Ajá. Bien. Ahora, si el blanco vale 132 ¿Cuánto vale el morado?

Fabiola: (Piensa casi un minuto) Vale 22

Investigador: ¿Por qué? ¿Qué hiciste?

Fabiola: Dividí 132 entre 6

Entrevista con Omar

(Ver sección A.2.1.1 donde los alumnos definen el valor de los popotes de colores cuando el blanco valía uno)

Investigador: Vamos ahora a suponer que el blanco vale 180 ¿Cuánto vale el azul?

Omar: Vale 60

Investigador: Ajá ¿por qué?

Omar: Porque si multiplicas 60 por 3 te da 180

Investigador: Ok, bien, y ¿Qué pasaría con el valor del amarillo?

Omar: (Usa su calculadora) Pues serían 180 entre 4 te da 45

Investigador: Bien, ¿cuánto valdría el morado?

Omar: (Usa su calculadora) Serían 30

Investigador: Ok, ahora digamos que el blanco vale 1080 ¿Cuánto vale el verde?

Omar: (Usa su calculadora) Serían 216

Investigador: ¿Y cuanto valdría el café?

Omar: ¿Qué es el café?

Investigador: No sé, si quieres checalo o vuelve a medir

Omar: (Itera el café junto al blanco) Es 1/9

Investigador: Ok, entonces si el blanco vale 1080 ¿cuánto vale el café?

Omar: Pues otra vez se divide, entonces te queda 1080 entre 9 que te da 120

A.2.2.4 Entrevistas con los alumnos de la segunda sección de Contaduría

Entrevista con Elena

(Ver sección A.2.1.1 donde los alumnos definen el valor de los popotes de colores cuando el blanco valía uno)

Investigador: Ahora si el blanco valiera 90 ¿Cuánto valdría el verde?

Elena: ¿Este (el verde) valía qué? (Lo itera 5 veces en el blanco) El verde vale 450

Investigador: A ver, el blanco vale 90, ¿a poco el verde valdría 450

Elena: ¿El blanco vale 90? Mmmm, ¡ash! no sé

Investigador: Si quieres puedes utilizar tu calculadora

Elena: Vale 18

Investigador: ¿Qué hiciste?

Elena: Dividí entre 5

Investigador: ¿Cuánto valdría el morado?

Elena: Serían 15, o sea, 90 entre 6

Investigador: Ok, Y si el blanco valiera 180 ¿Cuánto valdría el amarillo?

Elena: Serían 180 entre 4 serían 45

Investigador: Muy bien, ahora ¿Cuánto valdría el morado?

Elena: (Lo itera 6 veces en el blanco) Valdría 30

Entrevista con Genaro

(Ver sección A.2.1.1 donde los alumnos definen el valor de los popotes de colores cuando el blanco valía uno)

Investigador: Muy bien ahora vamos a decir que el blanco vale 45 ¿Cuánto vale el azul?

Genaro: (Itera 3 veces el azul en el blanco) El azul se repite 3 veces en el blanco entonces serían 45 por 3 ¿no?

Investigador: ¿O sea que el azul es tres veces más grande que el blanco?

Genaro: No, más bien serían 45 entre 3, (usa su calculadora) que son 15

Investigador: ¿Cuánto valdría el verde?

Genaro: (Itera el verde 5 veces en el blanco) Son 5 veces, si el blanco mide 45, serían 45 entre 5, te daría 9

Investigador: ¿Y cuanto valdría el café?

Genaro: El café sería 6

Investigador: ¿Estas seguro?

Genaro: Si porque el café es 1/9. No, a ver sería 45 entre 9. No, valdría 5

Investigador: Ahora vamos a suponer que el blanco vale 80 ¿Cuánto mediría el amarillo?

Genaro: (Lo itera 4 veces en el blanco y luego usa su calculadora) Valdría 20

Investigador: ¿Por qué?

Genaro: Porque el amarillo entra 4 veces en el blanco

Investigador: Ok, ¿Y el verde?

Genaro: (Usa su calculadora) Valdría 16

Investigador: ¿Por qué?

Genaro: Porque el verde cabe 5 veces en el popote blanco

Investigador: ¿Y el rosa?

Genaro: (Lo itera 8 veces en el blanco) Sería 10

Entrevista con Karla

(Ver sección A.2.1.1 donde los alumnos definen el valor de los popotes de colores cuando el blanco valía uno)

Investigador: Vamos a suponer ahora que el blanco vale 90 ¿Cuánto vale el azul?

Karla: Vale 30

Investigador: Ajá, ¿Por qué?

Karla: Porque si lo repites 3 veces te da 90

Investigador: ¿Cuánto valdría el verde?

Karla: Serían 20

Investigador: ¿Y por qué estas segura?

Karla: Porqué el verde es 1/5 y si lo repites 5 veces te da 90, ¡Ah, no! Serían 15

Investigador: Si quieres usa tu calculadora

Karla: Sería 90 entre 5, (usa su calculadora) es 18

Investigador: ¿Cuánto valdría el morado?

Karla: El morado son 1/6 entonces (usa su calculadora) Valdría 15

Investigador: Ahora, supongamos que vale 160 el popote blanco. ¿Cuánto vale el amarillo?

Karla: (Usa su calculadora) Vale 40

Investigador: ¿Cuánto vale el rosa?

Karla: (Usa su calculadora) Serían 30

Investigador: ¿Cuánto vale el verde?

Karla: (Usa su calculadora) Son 32

A.2.2.5 Comentarios y Conjeturas

Puede apreciarse en las entrevistas anteriores que, en general, los alumnos solían establecer una relación entre la fracción unitaria que representaba cierto popote de color y el divisor necesario para obtener su nuevo valor en números enteros. Así, por ejemplo, sabían que si el popote verde era 1/5 del blanco, y luego el popote blanco cambiaba su valor a, digamos, 75, tenían que dividir este último número entre 5 para obtener el nuevo valor del verde.

Probablemente esta labor se facilitaba porque involucraba a la división de un número entero entre otro número entero, la cual, al parecer, era muy familiar a los estudiantes.

De esta forma, la evidencia nuevamente parecía apoyar la conjetura sobre el punto de partida, pues los estudiantes pudieron aprovechar su conocimiento de la relación recíproca entre una unidad predefinida y una fracción unitaria, para redefinir el valor de una longitud (popote de valor) una vez que se redefinía el valor de otra con la que se comparaba (el popote blanco)

A.2.3 Concepción individual de las relaciones recíprocas entre una combinación de unidades fraccionarias iguales y otra fracción unitaria distinta

A.2.3.1 Entrevistas con los alumnos de la primera sección de Administración

Entrevista con Carolina

Investigador: Digamos que 3 rojos valen uno ¿Cuánto valdría el amarillo?

Carolina: (Itera un amarillo en un rojo) Valdría 6

Investigador: ¿Estas segura? ¿O sea que el amarillo es el doble del rojo?

Carolina: No, el rojo es el doble del amarillo

Investigador: Ajá, y lo que yo te digo es que ahora es que 3 rojos son una unidad

Carolina: Pues por eso, el amarillo valdría 6

Investigador: A ver, Si tres rojos valen uno ¿Cuánto vale un rojo?

Carolina: Pues 1/3… aaah, y el amarillo vale la mitad entonces sería 1/6

Investigador: Ok, ahora si juntamos 4 azules ¿Cuánto vale el café?

Carolina: (Itera tres veces un café en un azul) En un azul hay 3 cafés, entonces 4 por 3 da 12 el café sería 1/12

Entrevista con Marcos

Investigador: Vamos a suponer ahora que el blanco mide 3/2 ¿Cuánto valdría el azul?

Marcos: Valdría 1/2

Investigador: Ajá y, ¿por qué?

Marcos: Porque el blanco es el triple del azul

Investigador: Y si el popote blanco valiera 9/8 ¿Cuánto valdría el azul?

Marcos: Pues entonces valdría 3/8

Investigador: Ok, y por último si el blanco valiera 15/7 ¿Cuánto valdría el verde?

Marcos: Valdría 3/7

Investigador: Ajá, ¿Por?

Marcos: Porque el blanco es 5 veces mas grande que el verde

Entrevista con Marcela

Investigador: Bien, ahora digamos que el blanco mide 5/3 ¿Cuánto valdría el negro?

Marcela: ¿Cuántas veces dijimos que se repetía el negro?

Investigador: No lo sé. Si quieres checalo

Marcela: (Itera 10 veces el negro en el blanco) Ya el negro es 1/10 del blanco

Investigador: Ajá pero ahora decimos que el blanco mide 5/3

Marcela: mmmm ¿Dónde está el 1/5? ¿Era el verde, no? Si, si era y entonces el verde ahora ya vale 1/3

Investigador: Ajá y eso ¿De qué te sirve?

Marcela: Pues que el verde es el doble del negro, así que ahora el negro vale 1/6

A.2.3.2 Entrevistas con los alumnos de la segunda sección de Administración

Entrevista con Jaime

Investigador: Ahora si el popote blanco valiera 1/2 ¿Cuánto valdría el azul?

Jaime: Sería 0.25

Investigador: Acuérdate que estamos trabajando sin decimales

Jaime: Entonces sería 1/2 entre 3, (hace operaciones en su cuaderno) Sería 1/6

Investigador: ¿Cómo lo supiste?

Jaime: Porque sería cómo multiplicar 1/2 por 1/3 entonces numerado por numerador da uno y denominador por denominador da 6, entonces queda 1/6

Investigador: Ok, pero a ver, ¿si tu popote blanco es 1/2 de qué tamaño sería la unidad?

Jaime: Sería uno ¿no?

Investigador: Ajá, pero ¿cuántos popotes blancos se necesitarían?

Jaime: Un popote

Investigador: Si el popote blanco vale 1/2, ¿cuántos necesitarías para llegar a la unidad?

Jaime: 0.5

Investigador: No, pero 0.5 es la mitad, y el popote blanco ahora vale una mitad ¿cuánto mediría la nueva unidad?

Jaime: Pues lo multiplicas por 1/2 para que te de el entero completo

Investigador: Ajá, pero si este blanco es 1/ 2, ¿cuántos blancos necesitarías para tener una unidad?

Jaime: (Piensa durante unos tres minutos)

Investigador: ¿Cómo haces para saber que algo es 1/2 de otra cosa?

Jaime: Porque es la mitad

Investigador: Ajá, pero cómo se lo compruebas a otra persona

Jaime: Porque si tienes las dos mitades te da el entero

Investigador: Ok, ahora digamos que el blanco es 1/2 ¿De qué tamaño sería la unidad?

Jaime: Pues aquí en la mitad del blanco es 1/2 y esta sería la otra mitad entonces el blanco es la unidad.

Investigador: Bien, pero yo no te estoy diciendo que te fijes en la mitad del blanco te estoy diciendo que todo el blanco es 1/2, ¿cómo sería la unidad?

Jaime: Pues necesitaría otro 0.5, para tener la unidad

Investigador: Ajá y ¿De qué tamaño sería la unidad?

Jaime: Pues podría ser 1/3, o sea tres popotes azules

Investigador: A ver el blanco es 1/2, ¿qué longitud tendría la unidad si tuvieras las dos mitades juntas?

Jaime: A pues sería tener otro popote blanco exactamente idéntico y que se pusieran juntos para que pudieran hacer el entero

Investigador: ¿Te refieres a que en una unidad tendrías 2 blancos?

Jaime: Ajá

Investigador: Tomando eso en cuenta ¿cómo sabes que el azul sería 1/6?

Jaime: Bueno, si juntamos dos blancos el azul entraría 12 veces

Investigador: ¿Por qué 12 veces?

Jaime: No, eeeh, si este (el azul) vale 1/3, entonces serían 6 veces

Investigador: ¿Puedes explicar un poco mas?

Jaime: Porque el blanco ahora vale la mitad y el azul es 1/3 y se repite 3 veces en un blanco entonces en dos blancos se repetiría 6 veces

Investigador: Y si el azul se repite 6 veces en los dos blancos ¿cómo se llamaría?

Jaime: Sería 1/6

Investigador: Muy bien. Ahora supón que los dos blancos siguen siendo la unidad, ¿Cuánto valdría el amarillo?

Jaime: Este sería 1/4

Investigador: Ajá, cuando el blanco valía uno, entonces el amarillo valía 1/4, pero ahora son dos blancos los que son la unidad

Jaime: Bueno, si en un blanco entra 4 veces en la unión de los dos blancos entraría 8 veces

Investigador: Entonces ¿qué fracción sería?

Jaime: Ya en la unión sería 1/8

Investigador: Muy bien. Si seguimos diciendo que los dos blancos son la unidad ¿Qué fracción sería el verde?

Jaime: Sería un 1/5

Investigador: Ok pero recuerda que ahora los dos blancos son la unidad

Jaime: Entonces sería 1/10, porque entraría 10 veces en la unión de los dos

Investigador: ¿Qué fracción sería el morado?

Jaime: Sería 1/12

Investigador: ¿Cómo lo sabes?

Jaime: Porque si en un popote entra 6 veces, en dos popotes entraría 12 veces

Investigador: Y ¿cuánto valdría el café?

Jaime: Valdría 1/16

Investigador: ¿Por qué?

Jaime: Porque como entra 8 veces en un blanco, en la unión entraría 16

Investigador: Ok, te voy a seguir insistiendo con las preguntas sobre el popote blanco. Si ahora el popote blanco vale 1/3 ¿Cuánto valdría el azul?

Jaime: Pues el azul es 1/3 y ahora el blanco es 1/3 entonces el azul es 1/3 de 1/3

Investigador: ¿Y cuánto es eso?

Jaime: Es 1/6

Investigador: ¿1/6 es la tercera parte de 1/3?

Jaime: Ajá, porque el azul es 1/3 del 1/3 entonces entra 3 veces en esa fracción

Investigador: Ok, déjame retomar lo que platicábamos hace rato. Si el blanco vale 1/3, entonces, ¿de qué tamaño son los 3/3? ¿cuánto mediría el entero? ¿cómo sería?

Jaime: Necesitaría 3 blanco para hacer el entero

Investigador: Bien, ahora si el blanco es 1/3, ¿cuánto valdría el azul?

Jaime: Entonces en un blanco entran 3 azules, y en los tres blancos entrarían 9 popotes

Investigador: ¿Qué fracción sería el azul?

Jaime: Sería 1/3 de 1/3

Investigador: ¿Y eso cómo se llama?

Jaime: (Piensa unos momentos)

Investigador: Ya habías dicho que en un blanco entran tres azules, entonces ¿Cuántos azules necesitas para completar la unidad?

Jaime: Serían 9 en total

Investigador: Entonces ¿cómo se llama el azul?

Jaime: Es 9/3

Investigador: El azul solito, ¿qué fracción es de los tres blancos juntos?

Jaime: Sería 1/3

Investigador: ¿El azul solito es 1/3 del entero grandote?

Jaime: No

Investigador: ¿Cuántos blancos necesitas para hacer el entero?

Jaime: Tres

Investigador: ¿Y cuantos azules entran en esa unión?

Jaime: Nueve

Investigador: ¿Cómo se llama una fracción que son 9 partes?

Jaime: Son 9/3

Investigador: A ver, si el azul fuese 1/3 ¿cuántos azules necesitaría para igualar la unidad?

Jaime: Tres

Investigador: Pero ahora necesitas 9 azules para igualar la unidad ¿no?

Jaime: Ajá

Investigador: Entonces ¿Cómo se llama el azul?

Jaime: Pues es 1/3

Investigador: Pero para completar la unidad no necesitas 3 azules, necesitas 9 azules ¿Cómo se llaman los azules si necesitas 9 para igualar tu unidad?

Jaime: Aaaah, serían 1/9

Investigador: Ok, ahora si el blanco es 1/3 ¿Qué serían los amarillos?

Jaime: Sería 1/4

Investigador: El amarillo es la cuarta parte del blanco, pero ahora el blanco es 1/3

Jaime: (Piensa unos momentos) Ahora necesitaríamos 12 amarillos para completar el entero grandote, entonces serían 1/2

Investigador: Ajá, muy bien, ¿Qué sería el verde?

Jaime: Sería 1/5

Investigador: ¿De qué?

Jaime: De 1/3

Investigador: Entonces ¿qué sería?

Jaime: Sería 1/15

Investigador: ¿Y cuantos verdes necesitarías para igualar la unidad?

Jaime: 15, porque necesitarías 5 por blanco

Investigador: Muy bien, ¿cuánto valdría el morado?

Jaime: Sería 1/6 de 1/3, y necesitaríamos 6, 12, 18, serían 18 morados

Investigador: ¿Cómo se llamarían?

Jaime: son 1/18

Investigador: ¿Cuántos necesitarías para igualar la unidad?

Jaime: Pues 18

Investigador: Y ahora el rosa

Jaime: Este era 1/8 (Piensa unos momentos) Necesitamos 24 popotitos rosas para completar el entero, serían 1/24

Entrevista con Jazmín:

Investigador: Bien, ahora si el popote blanco valiera 1/2 ¿Cuánto valdría el popote azul?

Jazmín: ¿Cuánto habíamos dicho que valía el azul? (Lo itera tres veces en el blanco) Vale 1/3 Ahora éste (el azul) valdría 4/3

Investigador: ¿Por qué?

Jazmín: Porque se repite 4 veces en 1/2

Investigador: ¿El azul se repite 4 veces en el blanco?

Jazmín: Ah, no, lo que pasa es que yo pensé que había poner un azul después del blanco

Investigador: No, si el blanco vale 1/2 ¿Cuánto valdría el azul?

Jazmín: Ah, pues entonces el azul vale igual

Investigador: ¿Vale también 1/ 2?

Jazmín: No, vale 3 (Itera 3 veces el azul en el blanco)

Investigador: Pero el blanco ya no vale 1, vale 1/2

Jazmín: Ajá, por eso si esté (el blanco) vale 1/ 2 entonces necesito la mitad de otro blanco y entonces con este (el azul) se repetiría 4 veces, y valdría 4 ¿O valdría menos?

Investigador: A ver ¿Cuántas veces se repite el azul en el blanco?

Jazmín: Tres

Investigador: Entonces ¿Qué fracción es el azul del blanco?

Jazmín: Es 1/3

Investigador. Ajá, pero ahora el blanco no vale 1, vale 1/2 ¿Cuánto vale el azul?

Jazmín: Ah, ya, (piensa unos momentos)

Investigador: A ver acuérdate, si el blanco valía 30 ¿ cuánto vale el azul?

Jazmín: Valía 10

Investigador: Ok, Y si el blanco vale 3 ¿cuánto vale el azul?

Jazmín: mmm, (piensa uno momentos) Vale 3/3

Investigador: ¿Y eso cuánto es?

Jazmín: Un entero

Investigador: Si el blanco valiera 6 ¿Cuánto valdría el blanco?

Jazmín: Serían 6/6

Investigador: ¿Segura?

Jazmín: No, valdría 3/6

Investigador. ¿3/6?

Jazmín: Si valdría 3/6

Investigador: ¿Entonces el azul valdría 1/2? ¿Sería una mitad?

Jazmín: No, no, porque se repite 3 veces

Investigador: ¿Hay algún número que repetido 3 veces te de 6?

Jazmín: No ¿O sí?

Investigador: ¿Cuál podría ser?

Jazmín: El 2

Investigador: Ok, ¿cuánto valdría el azul?

Jazmín: 2/6

Investigador: ¿Por qué?

Jazmín: Si son 2/6 porque estamos repitiendo 3 veces el azul

Investigador: Ok, pero el popote blanco vale 6 ¿cuánto valdría el azul?

Jazmín: 2/3

Investigador: ¿O sea que si repites 3 veces 2/3 te da 6?

Jazmín: Sí, ¿no?

Investigador: ¿Hay algún número que repetido 3 veces te de 6?

Jazmín: No lo sé

Investigador: El blanco vale 6 unidades, no vale ni medios, ni tercios, el blanco vale 6 unidades ¿Cuánto valdría el azul?

Jazmín: ¿1/3?

Investigador: Ok 1/3 ¿De qué?

Jazmín: ¿1/3 de 6?

Investigador: ¿Cuánto es 1/3 de 6?

Jazmín: ¿6/3?

Investigador: Ajá, ¿Cuánto es eso?

Jazmín: Es que no entiendo

Investigador: ¿Cuánto es 6/3?

Jazmín: ¿Cuánto es 6/3? (Piensa durante un minuto) No, no sé

Investigador: Ok a ver, si el blanco vale 3 ¿Cuánto vale el azul?

Jazmín: 1/3

Investigador: No, el blanco ya no vale 1, vale 3

Jazmín: (Piensa durante 1 minuto) El azul vale 1/30

Investigador: ¿O sea que el azul se repite 30 veces en el blanco?

Jazmín: Es que ahora me esta preguntando al revés

Investigador: A ver, si el blanco vale 1, ¿cuánto vale el azul?

Jazmín: 1/3

Investigador: ¿O sea cuántas veces tienes que repetir el azul para que iguale al blanco?

Jazmín: Tres

Investigador: Si el azul vale 1, ¿cuánto vale el blanco?

Jazmín: ¿El azul vale 1?

Investigador: Ajá

Jazmín: El blanco serían … ¿3/6?

Investigador: A ver, el azul ya vale una unidad

Jazmín: ¿Entonces ahora ya vale una unidad?

Investigador: ¿Por qué preguntas que si vale una unidad? ¿Se te hace extraño que el azul valga un entero?

Jazmín: Sí

Investigador: ¿Por qué? Cuéntame por qué

Jazmín: Porque no concuerda,

Investigador: ¿No con cuerda con qué? Tu tranquila, platícame qué estas pensando

Jazmín: No es que ya

Investigador: A ver si quieres platícame un poquito por qué se te hizo raro. Me llama la atención que no se te hiciera raro que el blanco valiera 1, pero luego me dices que se te hace extraño que el azul valga 1

Jazmín: Porque yo sabía que el azul valía 1/3 y cuando usted me lo cambia a 1, pues yo me quedé pensando que pues ¿cómo? ¿así nada más? Pero luego ya ví que cualquier medida puede ser lo que yo quiera, si lo le digo a éste (el blanco) que sea 1, pues va a ser 1

Investigador: Ok, muy bien, muy bien, ahora regresemos. Si el azul vale 1 ¿Cuánto vale el blanco?

Jazmín: Vale 3…. ¿Cómo le digo que vale 3 unos?

Investigador: Pues son 3 unidades. Bien, entonces si el azul vale 2 ¿Cuánto vale el blanco?

Jazmín: Dos, cuatro, seis. Vale 6

Investigador: Y si el azul vale 3, ¿Cuánto vale el blanco?

Jazmín: Valdría 9

Investigador: Y si el azul vale 4 ¿Cuánto vale el blanco?

Jazmín: Valdría 12

Investigador: Ok, ahora si el blanco vale 12 ¿Cuánto vale el azul?

Jazmín: Vale 3/4

Investigador: No, a ver, el blanco vale 12 ¿Cuánto vale el azul?

Jazmín: Vale 3/6, mmmm. No porque entonces se repetiría 6 veces

Investigador: 3/6 es un medio, entonces si el blanco vale 12, ¿tu dirías que el azul vale 3/6?

Jazmín: No, entonces, no (Piensa unos momentos) Debe de ser 6/2

Investigador: ¿Cuánto es 6/2 expresado en enteros?

Jazmín: Tres

Investigador: Si el blanco vale 12, ¿El azul vale 3?

Jazmín: No, no puede valer 3

Investigador: ¿Y por que no?

Jazmín: Porque solamente se repetiría 3 veces el 3 en 12 y no daría

Investigador ¿Cuánto es 3 veces 3?

Jazmín: Nueve

Investigador: Entonces si el blanco vale 12 ¿cuánto vale el azul?

Jazmín: Cuatro,

Investigador: ¿Y cómo sabes?

Jazmín: Porque sería 4 veces 4, aaaaaaah, no, se repite 3 veces y como vale 4 serían 12

Investigador: Si el blanco valiera 6 ¿Cuánto valdría el azul?

Jazmín: Si el blanco valiera 6 ¿Cuánto valdría el azul?

Investigador: Ajá

Jazmín: Serían 2/3

Investigador: ¿2/3? ¿Cuántas veces lo vas a repetir en el blanco?

Jazmín: Tres veces

Investigador: Si repites 3 veces 2/3 ¿Cuántos tercios son?

Jazmín: Serían 2 por 3 son 6, serían 6/3

Investigador: ¿Y eso cuanto es?

Jazmín: Dos enteros

Investigador: ¿O sea que el popote blanco vale 6 y al mismo tiempo vale 2?

Jazmín: Si, no, no, mejor no

Investigador: A ver el popote blanco vale 6, ¿cuánto vale el azul?

Jazmín: Pues 2, ya ve sí estoy bien

Investigador: ¿Cómo puedes comprobar que 2 es la tercera parte de 6?

Jazmín: Porque son 6/2

Investigador: ¿Cuánto son 6/2?

Jazmín: Pues da 3

Investigador: ¿O sea que el azul vale 3? Pero acabas de decir que vale 2

Jazmín: Si vale 3 se repetiría 2 veces,

Investigador: Entonces ¿Te parece que vale 3?

Jazmín: No, porque se repite 3 veces

Investigador: Habías dicho que 6/3 ¿Cuánto dijiste que era eso?

Jazmín: Dijimos que era 2

Investigador: Ok, ¿cómo compruebas que 1/3 de 6 es 2?

Jazmín: ¿Qué 2 es la tercera parte de 6?

Investigador: Ajá

Jazmín: Porque lo repetiría 3 veces

Investigador: Muy bien, ¿Y sí? ¿si repites tres veces 2 es 6?

Jazmín: Sí

Investigador: ¿No es 9?

Jazmín: No, (Itera el azul en el blanco) porque son 2, 4, 6

Investigador: Ok a ver si el blanco vale 15 ¿Cuánto vale el azul?

Jazmín: Si el blanco vale 15 ¿Cuánto vale el azul?

Investigador: Ajá

Jazmín: Serían 5/3

Investigador: ¿Por qué?

Jazmín: Porque se repite 3 veces pero vale 5

Investigador: Vale 5, ¿qué?

Jazmín: 5/3 entonces si lo repito (Itera el azul en el blanco) 5, 10, 15, Serían 15/3 El blanco serían 15/3

Investigador. ¿Cuánto es 15/3?

Jazmín: ¿Cuánto es 15/3?

Investigador: Ajá, en enteros

Jazmín: Son cinco

Investigador: ¿O sea que el popote blanco vale 5 y vale 15 al mismo tiempo?

Jazmín: No, entonces no vale 5/3

Investigador: No. Lo que sabemos es que el popote blanco vale 15

Investigador: ¿Cuántos pedazos necesitas que sean azules para hacer un blanco?

Jazmín: Tres

Investigador: ¿Hay algún número que repetido 3 veces te de 15?

Jazmín: Pues solamente el 5

Investigador: ¿Entonces cuánto vale el azul?

Jazmín: ¿3/5?

Investigador: Si repites 3 veces 3/5 ¿cuánto te da?

Jazmín: 3/5 repetidos 3 veces ¿cuánto es?

Investigador: Ajá,

Jazmín: No sé (usa su calculadora). ¿Dijimos 3/5 repetidos 3 veces?

Investigador: Ajá.

Jazmín: Son 3

Investigador: ¿3/5 repetidos 3 veces son 3?

Jazmín: Si, ¿no?

Investigador: Dos veces 3/5 ¿Cuánto es?

Jazmín: ¿Dos veces 3/5?

Investigador: Ajá

Jazmín: Es 1/2

Investigador: Si repites dos veces 3/5 ¿Cuántos quintos tienes?

Jazmín: ¿3/16? Si ¿No?

Investigador: Dos veces 4 ¿cuánto es?

Jazmín: Ocho

Investigador: Dos veces 3/5 ¿Cuánto es?

Jazmín: Son 6/5

Investigador: Ok, y 3 veces 3/5 ¿Cuánto es?

Jazmín: Son 9/5

Investigador: Ok, y 9/5 ¿es menor o mayor a 2?

Jazmín: ¿Qué es mayor 9/5 o 2?

Investigador: Ajá, ¿cuántos quintos hay en 2 enteros?

Jazmín: ¿2/5?

Investigador: ¿Hay 2/5 en 2 enteros?

Jazmín: ¿Hay 2/5 en 2 enteros? (Piensa unos momentos)

Investigador: ¿Cuántos quintos hay en un entero?

Jazmín: Cinco

Investigador: ¿En dos enteros?

Jazmín: Dos…. Dos medios

Investigador: Pero no estamos hablando de medios sino de quintos

Jazmín: ¿En dos enteros cuantos quintos hay?

Investigador: Ajá

Jazmín: ¿10/5?

Investigador: ¿Te parece extraño?

Jazmín: Pues al razonarlo, sí

Investigador: ¿Por qué te parece extraño?

Jazmín: Porque los números están raros, o sea, si hago 10 entre 5 me da 2 que es lo que estoy buscando

Investigador: Ok. Y 10/5 ¿es mayor, menor o igual que 9/5?

Jazmín: (Piensa unos momentos) Son 10/5 es mayor

Investigador: Ok, retomando. Te dije que el blanco valía 15, y luego te pregunté cuánto valía el popote azul y dijiste que eran 3/5, entonces tres azules serían 9/5. Entonces, ¿estás diciendo que el popote blanco vale 9/5 y 15 enteros al mismo tiempo?

Jazmín: No, entonces el azul no vale 3/5

Investigador: Regresemos a la pregunta. Si el blanco vale 15, ¿cuánto vale el azul?

Jazmín: Serían 5/5, mmmm, no porque entonces sería un entero

Investigador: Ok, a ver, si el azul vale 1, ¿Cuánto vale el blanco?

Jazmín: 6, no, digo, 3

Investigador. Ahora, el blanco vale 15 ¿cuánto vale el azul?

Jazmín: (Piensa unos momentos) Es que debe valer 5 pero no estoy segura de por qué

Investigador: Es 5, esta bien, ¿ por qué?

Jazmín: Es que según yo tres veces 5 es 15

Investigador: Exactamente

Jazmín: ¿Eso era todo?

Investigador: Ok, y si el azul es 6, ¿Cuánto vale el blanco?

Jazmín: 18

Investigador: Ok, si el blanco es 21 ¿Cuánto vale el azul?

Jazmín: Siete

Investigador: Si el blanco es 24 ¿Cuánto vale el azul?

Jazmín: Ocho

Investigador: Si el blanco es 27 ¿Cuánto vale el azul?

Jazmín: Nueve

Investigador: ¿Cómo sabes?

Jazmín: Lo que pasa es que el azul se repite 3 veces en el blanco, entonces necesito un múltiplo que por 3 veces me de 27, y entonces 9 por 3 me da 27

Investigador: Si el blanco vale 66, ¿Cuánto vale el azul?

Jazmín: Valdría 22

Investigador: Si el azul vale 24 ¿cuánto vale el blanco?

Jazmín: Serían 72

Investigador: Ok, ahora si el blanco vale 72 ¿Cuánto vale el rosa?

Jazmín: ¿Cuánto valía el rosa?

Investigador: A ver checalo

Jazmín:. (Lo itera 8 veces en el blanco) Valía 1/8

Investigador: Ahora el blanco vale 72 ¿cuánto vale el rosa?

Jazmín: 1/24

Investigador: Si el rosa es 1/8, ¿Cuántas veces lo repito en el blanco para igualarlo?

Jazmín: Ocho

Investigador: Y si repito 1/24, ocho veces ¿Te da 72?

Jazmín: No, pues, no

Investigador: Entonces ¿Qué tipo de número tienes que buscar?

Jazmín: Uno que repetido ocho veces me de 72, …. O sea el rosa vale 9

Investigador: Y si el blanco valiera 144 ¿Cuánto valdría el rosa?

Jazmín: (Usa su calculadora) Serían 18

Investigador: Si el rosa valiera 5, ¿Cuánto valdría el blanco?

Jazmín: (Usa su calculadora) Sería 40

Investigador: Si el rosa valiera 3, ¿Cuánto valdría el blanco?

Jazmín: (Usa su calculadora) Valdría 24

Investigador: Si valiera 2 el rosa ¿Cuánto valdría el blanco?

Jazmín: (Usa su calculadora) Valdría 16

Investigador: Si el blanco valiera 96 ¿Cuánto valdría el morado?

Jazmín: ¿Qué fracción era el morado?

Investigador: A ver chécalo

Jazmín: (Itera 6 veces el morado en el blanco) Era 1/6

Investigador: Ajá, pero ahora el blanco vale 96 ¿Cuánto vale el morado?

Jazmín: (Usa su calculadora) Valdría 16

Investigador: Ahora si el blanco vale 66 ¿Cuánto vale el morado?

Jazmín: (Usa su calculadora) Once

Investigador: Si el blanco valiera 36 ¿Cuánto vale el morado?

Jazmín: (Usa su calculadora) Seis

Investigador: Si el blanco valiera 36 ¿Cuánto vale el morado?

Jazmín: (Usa su calculadora) Ocho

Investigador: Si el morado valiera 17, ¿Cuánto valdría el blanco?

Jazmín: (Usa su calculadora) 102

Investigador: ¿Qué hiciste?

Jazmín: 17 por 6

Investigador: Si el morado valiera 15, ¿Cuánto valdría el blanco?

Jazmín: (Usa su calculadora) 90

Investigador: Si el morado valiera 13, ¿Cuánto valdría el blanco?

Jazmín: (Usa su calculadora) 78

Investigador: Ok, muy bien entonces ahora retomamos la pregunta inicial, si el blanco vale 1/2 ¿Cuánto vale el azul?

Jazmín: Valdría 3/2

Investigador: 3/2 es tres veces 1/2 , entonces ¿Estás diciendo que el azul mide 3 blancos?

Jazmín: Ah, no entonces vale 2/3

Investigador: A ver, recuerda lo que acabamos de hacer, si el blanco vale 15 ¿Cuánto vale el azul?

Jazmín: Vale 5.

Investigador: Y ¿cómo lo supiste?

Jazmín: Busqué un número que viniera de dividir 15 entre 3 y me dio 5

Investigador: Ok, ¿Cómo le demostrarías a alguien que 5 es la tercera parte de 15?

Jazmín: Pues si repito 3 veces el azul me daría (Itera el azul en el blanco) 5, 10, 15

Investigador: Entonces ahora si el blanco vale 1/2 ¿Qué harías para saber cuánto vale el azul?

Jazmín: (Piensa durante 1 minuto) Necesito un número que multiplicado por 3 me de 1/2

Investigador: ¿Y cuál es ese número?

Jazmín: ¿Sería 3 por 3/3?

Investigador: A ver, haz la multiplicación para ver cuánto te da

Jazmín: 9/3, que son 3 enteros

Investigador: Entonces ¿3 enteros son igual a 1/2?

Jazmín: No, a ver (escribe en su cuaderno) Serían 3 por 1/2

Investigador: ¿Cuánto es 3 por 1/2?

Jazmín: 3/2

Investigador: Y, ¿eso es igual a 1/2?

Jazmín: No, la verdad no sé, sé que me lo sé pero ahorita no lo sé

Investigador: ¿El azul podría valer un número menor que 1/2?

Jazmín: Es que el azul vale 0.5 pero ya no sé cómo decirlo

Investigador: ¿Entonces 0.5 por 3 te daría 1/2?

Jazmín: Si,

Investigador: Ok, recuerda que estamos trabajando con fracción y luego ¿a qué fracción equivale 0.5?

Jazmín: A algo del 3, o algo así

Investigador: 0.5 ¿qué fracción es?

Jazmín: (Piensa durante unos 2 minutos)

Investigador: Ok, a ver retomemos, queremos saber cuánto vale el azul si el blanco vale 1/2. Pero entonces antes de responder eso, piensa si el blanco es 1/2 cuánto de qué tamaño sería la unidad

Jazmín: Es que no lo entiendo

Investigador: Ajá, el popote blanco vale 1/2, ¿cuánto sería un entero?

Jazmín: Sería 2/2

Investigador: Ajá, o sea, ¿Cuánto sería hablando de popotes blancos?

Jazmín: Se repetiría 2 veces el blanco

Investigador: Entonces el azul ¿qué fracción es?

Jazmín: Serían seis

Investigador: ¿Seis qué? ¿Qué quieres decir con seis?

Jazmín: O sea si el blanco es 1/2 equivale a tres veces el azul, y luego si repito el blanco serían otros tres azules, entonces serían 6

Investigador: ¿Cómo se llamaría uno de esos azules?

Jazmín: Eso es lo que no sé, no sé como llame

Investigador: Cuando tienes 1 sobre 3 ¿Cómo se llama?

Jazmín: Un tercio

Investigador: Cuando tienes 1 sobre 4 ¿Cómo se llama?

Jazmín: Un cuarto

Investigador: Cuando tienes 1 sobre 5 ¿Cómo se llama?

Jazmín: Un quinto

Investigador: Cuando tienes 1 sobre 6 ¿Cómo se llama?

Jazmín: Un sexto

Investigador: Entonces ¿Cómo se llama el azul?

Jazmín: 6/6

Investigador: Entonces ¿El azul es igual a los dos blancos?

Jazmín: Pues sí,

Investigador: El popote azul solito ¿Es igual a los dos blancos?

Jazmín: Si, … aaah, no

Investigador: Ok, a ver, ¿cuántos pedazos azules necesitarías para igualar los dos blancos?

Jazmín: Seis

Investigador. ¿Cómo se llamaría un solo pedazo azul?

Jazmín: Un sexto

Investigador: Ahora, si el blanco sigue siendo 1/2 ¿Qué sería el amarillo?

Jazmín: (Itera el amarillo sobre el blanco) El amarillo se repite 4 veces. Sería 1/4

Investigador: Si el blanco vale 1, el amarillo vale 1/4. Pero ahora el blanco vale 1/2

Jazmín: Entonces el amarillo valdría 1/8

Investigador: ¿Por qué?

Jazmín: Porque necesitas ocho amarillos para cubrir los dos blancos

Investigador: Ok, ¿cuánto valdría el morado?

Jazmín: Sería ¿1/18?, no, espere sería ¿1/12?

Investigador: Si el blanco valiera 1 ¿cuánto valdría el rosa?

Jazmín: 1/8

Investigador: Ok, ahora si el blanco valiera 1/2 ¿Cuánto valdría el rosa?

Jazmín: 1/16

Investigador: Ahora si el blanco vale 1/3 ¿cuánto vale el azul?

Jazmín: Se repite 3 veces el blanco. Sería 1/9

Investigador: Muy bien, ¿cuánto valdría el amarillo?

Jazmín: Se repite 4 veces. Sería 1/12

Investigador: Excelente, ¿cuánto valdría el verde?

Jazmín: Se repite (lo itera en el blanco) Se repite 5 veces. Sería 1/15

Investigador: Excelente, ¿cuánto valdría el morado?

Jazmín: (Itera en el blanco) Se repite 6 veces. Sería 1/18

Investigador: Muy bien ¿Cuánto valdría el rosa?

Jazmín: Este se repetía ocho. Sería 1/24

Investigador: Si ahora el blanco valiera 1/7 ¿cuánto vale el azul?

Jazmín: 1/21

Investigador: Muy bien ¿Cuánto valdría el amarillo?

Jazmín: Se repite 5 veces ¿no? (Lo itera) No, son 4 veces. Y el blanco vale 1/7. (Piensa unos instantes) Sería 1/28

Investigador: Excelente ¿Cuánto valdría el verde?

Jazmín: (Lo itera en el blanco) Se repite 5 veces. Sería 1/35

Investigador: OK ¿Cuánto valdría el morado?

Jazmín: (Itera en el blanco) Se repite 6 veces. Sería 1/42

Investigador: Ajá, muy bien, muy bien, ¿cuánto valdría el rosa?

Jazmín: (Itera en el blanco) Se repite 8 veces. Sería 1/56

Investigador: Si el blanco fuera 1/7, ¿cómo sería tu unidad?

Jazmín: Sería 7 blancos

Investigador: Ajá, ¿ Y cuantos rosas habría en esa unidad?

Jazmín: Pues habría 56 rosas.

Entrevista con Jethnael

No realicé esta sección de la entrevista con éste alumno porque había observado el tiempo que me había llevado entrevistar a Jaime y a Jazmín. En lugar de ello decidí revisar cómo es que Jethnael entendía las relaciones recíprocas entre áreas, y también cómo utilizaba esas áreas para medir. Lo anterior con el fin de tener una idea sobre cómo es que un estudiante de perteneciente a una segunda sección argumentaba con medios de simbolización en dos dimensiones. Se pueden revisar sus razonamientos en el anexo A.2.5.2

Entrevista con Nayeli

No realicé esta sección de la entrevista con Nayeli porque había observado el tiempo que me había llevado entrevistar a Jaime y a Jazmín. En lugar de ello decidí revisar cómo es que Nayeli entendía las relaciones recíprocas entre áreas, y también cómo utilizaba esas áreas para medir. Lo anterior con el fin de tener una idea sobre cómo es que un estudiante de perteneciente a una segunda sección argumentaba con medios de simbolización en dos dimensiones. Se pueden revisar sus razonamientos en la sección 7.3.2.5, página 187

Entrevista con Rodrigo

Investigador: Ok, muy bien ahora vamos a suponer que el blanco vale 1/2 ¿Cuánto vale el azul?

Rodrigo: El azul valía 1/3 ¿No?

Investigador: Ajá, cuando el blanco valía 1, ¿Cuántos azules necesitabas para igualar el blanco?

Rodrigo: Necesitaba 3

Investigador: Ajá, entonces ahora si el blanco vale 1/2 ¿Cuánto vale el azul?

Rodrigo: ¿Sería 1/5? No espere, sería 3/2

Investigador: El blanco ahora es 1/2 ¿Cuántos blancos sería 3/2?

Rodrigo: Tres blancos

Investigador: Entonces ¿eso es igual al azul?

Rodrigo: No pues no

Investigador. Ok, recuerda el blanco ahora vale 1/ 2

Rodrigo: Sería 1/6

Investigador: ¿Por qué?

Rodrigo: Porque el azul sería 1/3 de 1/2 que es el blanco entonces 2 por 3 te da 6 y el azul sería 1/6

Investigador: Ok, bueno con multiplicación se puede saber pero con popotes ¿Cómo lo demuestras?¿Cómo demostrarías que el azul es 1/6?

Rodrigo: Bueno, no sé, porque en un blanco hay tres de estos (azules) y como necesito otro medio necesitaría otros tres (azules) entonces en total serían 6

Investigador: Ok, muy bien, y ¿cuánto valdría el verde?

Rodrigo: Este (el verde) valdría 1/10 porque como cabe 5 veces en uno de estos (blanco) y otro (blanco) igual, por todo serían 10

Investigador: Muy, muy bien, ahora ¿Cuánto valdría el rosa?

Rodrigo: Valdría 1/16

Investigador: ¿Por qué?

Rodrigo: Igual, porque en el primer medio necesito 8 rosas y en el otro también 8 entonces son 16

Investigador: Muy bien, ahora si el blanco valiera 1/3 ¿Cuánto valdría el azul?

Rodrigo: 1/9

Investigador: ¿Por qué?

Rodrigo: Igual porque en este (el blanco) cabrían 3, pero éste (blanco) nada mas es 1/3 del entero y todavía nos faltan otros dos, pero en el segundo (blanco) habría otros 3 (azules) y el tercero (blanco) habría otros 3 azules, entonces serían 9

Investigador: Ok, ¿y cuánto valdría el rosa?

Rodrigo: Valdría 1/24

Investigador: Ajá, explica

Rodrigo: Porque en aquí (en el blanco) caben 8 (rosas), pero apenas en uno, entonces con dos (blancos) ya serían 16 (rosas) y otros 8 (rosas) del tercero (blanco) ya serían 24 rosas

A.2.3.3 Entrevistas con los alumnos de la primera sección de Contaduría

Entrevista con Enrique

Mostrada en la sección 7.3.2.3, en la página 182

Entrevista con Fabiola

Investigador: Vamos a suponer que el blanco vale 1/2 ¿Cuánto vale el azul?

Fabiola: (Piensa unos momentos) 1/6

Investigador: Ajá, ¿por qué?

Fabiola: Porque si éste (el blanco) es 1/2 y éste (el azul) cabe 3 veces, para hacer el entero serían 6 veces, entonces ya sería 1/6

Investigador: ¿Cuánto valdría el morado?

Fabiola: Sería 1/12

Investigador: Ajá, ¿por qué?

Fabiola: Porque cabe 6 veces en un medio, entonces para completar el entero serían 12 veces

Investigador: ¿Y el rosa?

Fabiola: ¿Este (el rosa) valía 1/8? ¿no?

Investigador: A ver checa

Fabiola: (Itera el rosa en el blanco) Si, sería 1/8

Investigador: Ok, y si el blanco vale 1/2 ¿cuánto vale el rosa?

Fabiola: Sería 1/16

Investigador: ¿Por?

Fabiola: Por lo mismo porque si cabe 8 veces en 1/2 caben 16 veces en un entero

Entrevista con Omar

Investigador: Digamos que el blanco vale 1/3 ¿Cuánto valdría el azul?

Omar: 1/9

Investigador: Ajá, muy bien, ¿Por qué?

Omar: Porque ya todo sería como en escala. Si el blanco vale 1. (Con un lápiz marca el inicio y el final del popote blanco) Hasta acá llega el 2, (marca el final del segundo blanco) y hasta acá llega el 3 (marca el final del tercer blanco) Todo esto sería el entero

Investigador: ¿Y cuánto valdría el azul?

Omar: Sería un noveno porque se repetiría 9 veces en todo el entero, o sea en el primer blanco habría 3, en el segundo otros 3, y en el último 3. Entonces serían 9. El blanco es 1/3 y el azul equivale a 1/3 del 1/3 del entero.

Investigador: Ok, excelente, muy interesante. Ahora digamos que el blanco sigue siendo 1/3 ¿Cuánto valdría el amarillo?

Omar: El amarillo era 1/4 del blanco, entonces ahora sería 1/12

Investigador: ¿Por qué?

Omar: Porque el amarillo entraría 12 veces en el nuevo entero

Investigador: Ok, muy bien, y si el blanco vale 1/3 ¿Cuánto vale el rosa?

Omar: El rosa era 1/8 del blanco, entonces sería 1/24, éste (el rosa) entraría 24 veces en lo que es el entero

Investigador: Si el blanco valiera 1/10 ¿Cuánto valdría el rosa?

Omar. Sería 1/80

Investigador: ¿Por qué?

Omar: Porque en 10 blancos habría 80 rosas

Investigador: ¿Y el amarillo?

Omar: Sería 1/40

Investigador: ¿Y el azul?

Omar: Sería 1/30

Investigador: ¿Y el café?

Omar: Valdría 1/90

A.2.3.4 Entrevistas con los alumnos de la segunda sección de Contaduría

Entrevista con Elena

Investigador: Ok, ahora si el popote blanco valiera 1/2 ¿Cuánto valdría el azul?

Elena: Valdría 3/2

Investigador: Si el blanco vale 1/2, ¿el azul valdría 3/2?

Elena: No, 2/3

Investigador: ¿Estás segura?

Elena: No, mmm. (piensa unos momentos) Necesito 3 azules para formar 1/2, entonces serían 6/2, no, serían, pues sí 3/2

Investigador: Pero quedamos que el blanco vale 1/2, ¿estarías diciendo que el azul vale 3 blancos?

Elena: No, entonces el azul vale 2/3

Investigador: ¿Segura?

Elena: No, vale 1/3

Investigador: Ajá, el azul vale 1/3 pero si el blanco vale 1, ahora el blanco vale 1/2

Elena: (Piensa durante un minuto) Valdría 1/6

Investigador: ¿Podrías explicarme por qué?

Elena: Porque dividí 1/2 entre 3, y eso me dio 1/6

Investigador: Ajá pero ahora con los popotes ¿puedes explicar?

Elena: Es que no sé cómo explicar, el blanco es 1/2

Investigador: Ajá

Elena: Y el azul vale 1/6…(piensa durante 1 minuto) No, profesor la verdad no sé

Investigador: Si el blanco vale 1/2, ¿Cómo formarías el entero?

Elena: Con 4/2

Investigador: ¿4/2 son un entero?

Elena: No la verdad no sé

Investigador: El blanco es 1/ 2 , ¿cuánto mediría el entero?

Elena: Dos enteros

Investigador: ¿Dos enteros es igual a un entero?

Elena: No

Investigador El blanco es 1/2 ¿Cómo formarías una unidad?

Elena: Con 2/2

Investigador: ¿Y medido en popotes? ¿Me lo explicas con popotes?

Elena: ¿Cómo lo explico?

Investigador: Dijiste que 2/2 son un entero, y ¿cuánto vale el popote blanco?

Elena: Pues 1/2,

Investigador: ¿Entonces cómo sería el entero?

Elena: Pues este (blanco) es 1/2 y otro (blanco) sería el otro 1/2

Investigador: Entonces en popote blancos ¿cuánto mide tu entero?

Elena: Dos blancos

Investigador: Ajá, muy bien, ahora ¿por qué el azul valdría 1/6?

Elena: Porque en un 1/2 hay 3/2, y eso es igual a un entero

Investigador: ¿3/2 es igual a un entero?

Elena: No, ¿o sí?

Investigador: Hasta ahora me has dicho que un entero sería dos blancos y también dijiste que en cada blanco hay 3 azules

Elena: Es que tengo que dividir 1/2 entre 3, y me da 6/2

Investigador: ¿Un 1/2 entre 3 te da 6/2?

Elena: Si eso da

Investigador: Otra vez, me has dicho que un entero sería dos blancos, has dicho que un azul es 1/6, y también dijiste que en cada blanco hay 3 azules. Ahora explícame ¿por qué dices que el azul es 1/6?

Elena: Es que no sé (piensa durante dos minutos) No sé profesor, pues lo divido entre 3

Investigador: A ver me has dicho que dos blancos son un entero y también me has dicho que el azul es 1/6, ¿por qué?¿Qué relación hay entre las dos cosas?

Elena: (Piensa durante un minuto) La verdad es que no entiendo

Investigador: Retomemos, tu dijiste que dos blancos son un entero y también que el azul es 1/6, ¿por qué?

Elena: Es que no puedo pensar en otra cosa que no sea dividir 1/2 entre 3, y da 1/6

Investigador: Si claro, en tus operaciones te da 1/6, pero piensa en los popotes y trata de justificar lo que estas diciendo. Ibas bien, porque dijiste varias cosas ciertas, me has dicho que para formar la unidad debes tener dos blancos….

Elena: O sea 2/2, que son un entero

Investigador: Ajá, y ¿entonces?

Elena: (Piensa unos momentos) Aaaah, ya sé, 2/2 es un entero, este (blanco) sería el primer medio y éste otro (blanco) sería el segundo medio. En cada medio hay tres (azules) entonces 3 y 3 son 6 (azules), entonces el azul es 1/6

Investigador: Ajá, excelente, muy bien: Ahora vamos a seguir suponiendo que el blanco vale 1/2, ¿Cuánto valdría el amarillo?

Elena: Es lo mismo ¿No? (itera el amarillo en el blanco) Este es 1/4 del blanco

Investigador: Ajá, ¿Y entonces?

Elena: Entonces, el amarillo sería 1/8

Investigador: ¿Por qué?

Elena: Porque en 1/2 hay 4/4

Investigador: ¿En 1/2 hay 4/4?

Elena: No

Investigador: Entonces hay 4 ¿qué?

Elena: No sé

Investigador: Si el blanco fuera 1, el amarillo sería 1/ 4, pero el blanco es 1/ 2 entonces ¿cuánto vale el amarillo?

Elena: 1/8

Investigador: ¿Por qué?

Elena: Porque en 2 blancos hay 8 amarillos

Investigador: ¿Y entonces el amarillo cuánto vale?

Elena: 1/8 de blanco

Investigador: ¿De un solo blanco?

Elena: No, es 1/8 de dos blancos

Investigador: Muy bien. Si el blanco es 1/ 2 ¿Cuánto vale el rosa?

Elena: Sería 1/16

Investigador: ¿Por qué platícame qué pensaste?

Elena: Porque en un popote blanco hay 8 popotes rosas y en dos blancos habría 16

Investigador: Muy bien, ahora el blanco va a valer 1/3 ¿Cuánto valdría el azul?

Elena: Entonces ahora 3 popotes blancos es un entero

Investigador: Así es, muy bien

Elena: Necesito 3 azules para hacer 1/3, entonces un popote azul vale 1/9

Investigador: ¿Por qué?

Elena: Porque en 3 popotes blancos hay 9 popotes azules

Investigador: Muy bien. Si el blanco vale 1/3 ¿Cuánto vale el amarillo?

Elena: ¿Cuánto valía el amarillo?

Investigador: Si quieres revisa

Elena: (Itera el amarillo en el blanco) Hay 4 amarillos en el blanco, entonces habría 12 amarillos en 3 blancos

Investigador: ¿Y cuanto valen los 3 blancos?

Elena: Tres blancos es un entero

Investigador: ¿Y cuánto vale el amarillo?

Elena: 1/12 porque necesito 12 amarillos para los 3 blancos que mi entero

Investigador: Excelente. Ahora vamos a suponer que el blanco vale 1/3 ¿Cuánto vale el rosa?

Elena: Sería 1/24

Investigador: ¿Cuántos rosas necesitarías para hacer 1 entero?

Elena: 24

Investigador: Ahora, si el blanco valiera 1/7 ¿Cuánto valdría el rosa?

Elena: (Piensa durante un minuto) Sería 1/56

Investigador: ¿Y cuantos rosas necesitarías para formar la unidad?

Elena: 56 rosas

Investigador: ¿y cuantos blancos?

Elena: siete

Entrevista a Genaro

Investigador: Ok, ahora vamos a suponer que el popote blanco vale 1/2, ¿cuánto vale el azul?

Genaro: 3/2

Investigador: ¿O sea que el azul es más grande que el blanco?

Genaro: Ah, no, … el blanco vale un medio y el azul entra tres veces en el blanco

Investigador: Así es, entonces ¿cuánto vale el azul?

Genaro: (Usa su calculadora) Según esto sería 1/6

Investigador: Ajá, con operaciones esta bien, pero ahora ¿Cómo lo explicas con los popotes?

Genaro: (Piensa durante unos dos minutos) El azul sería 1/6 de blanco

Investigador: ¿Un 1/6 de blanco se repite 3 veces en el blanco?

Genaro: Es que ya se que me estoy contradiciendo pero la calculadora me da que 1/2 entre 3 me da 1/6

Investigador: Entonces intentemos explicarlo con los popotes, sabemos que el blanco es un medio, y luego dijiste que en un blanco hay 3 azules

Genaro: Es que el popote blanco vale 1/ 2 y luego lo dividimos para poder sacar los 3 cachos de lo que miden ¿no?

Investigador: Pero como el azul es 1/6 ¿dividiste 1/ 2 entre 6?

Genaro: No, dividí 1/ 2 entre 3

Investigador: Entonces ¿el azul es 1/6 de popote blanco?

Genaro: Sí, mmm, no bueno, no, porque sino el azul sería más grande que el blanco

Investigador: ¿Tú crees?

Genaro: No,

Investigador: Entonces ahora te pregunto ¿cuántas veces se repite el azul en el blanco?

Genaro: El azul es 1/3 de blanco

Investigador: Pero también me dijiste que si el blanco vale 1/ 2 entonces el azul vale 1/6. Eso es lo que me gustaría que me explicaras con los popotes.

Genaro: Es que eso es lo que no sé, no sé como puedo demostrárselo

Investigador: Si el blanco vale 1, ¿Cuánto vale el azul?

Genaro: Vale 5

Investigador: ¿O sea que el azul equivale a 5 blancos?

Genaro: (Itera el azul en el blanco) Uno, dos, tres, no, no es cierto el azul cabe tres veces

Investigador: Ok, si el azul cabe tres veces en el blanco ¿qué fracción es?

Genaro: Sería 1/3

Investigador: Ajá, ahora entonces…

Genaro: Aaaaah, ya sé porque (el azul) es un 1/6, porque cabe tres veces en el blanco

Investigador: A ver explica un poco más

Genaro: Es que ya de ahí no se muy bien qué decir

Investigador: A ver si el blanco vale 3 ¿Cuánto vale el azul?

Genaro: Pues uno

Investigador: Si el blanco vale 9 ¿cuánto vale el azul?

Genaro: Tres

Investigador: Ok, ahora de regreso si el blanco vale 1 ¿cuánto vale el azul?

Genaro: 1/3

Investigador: Si el blanco es 1/ 2 ¿Cuánto vale el azul?

Genaro: 1/6

Investigador: Esta bien, pero ¿por qué?

Genaro: Según mi lógica es que dos popotes blancos completan la unidad, entonces serían 6 azules por eso el azul valdría 1/6

Investigador: Ok, muy bien, ahora digamos que el blanco todavía vale 1/ 2 ¿cuánto valdría el amarillo?

Genaro: Nada mas déjeme ver cuántas veces se repite el amarillo (Lo itera en el blanco) ya, el amarillo se repite 4 veces en el blanco. El blanco vale 1/ 2. (Piensa un poco) Entonces el amarillo sería 1/8,

Investigador: ¿Por qué?

Genaro: Porque para completar la unidad se necesitan dos popotes blancos y en cada uno hay 4 amarillos, entonces el amarillo es 1/8

Investigador: Ok, muy bien, ahora si el blanco es 1/ 2 ¿Cuánto valdría el rosa?

Genaro: Sería 1/16

Investigador: Otra vez ¿puedes explicar?

Genaro: Sí, porque la unidad tiene dos popotes blancos entonces en cada uno entran ocho rosas, y un rosa sería 1/16

Investigador: Entonces ¿cuánto valdrían dos blancos?

Genaro: Una unidad

Investigador: Ok, ahora si el blanco valiera 1/3 ¿Cuánto valdría el morado?

Genaro: (Itera 6 veces el morado en el blanco) Sería 1/18

Investigador: Ajá ¿Puedes explicar por qué?

Genaro: Porque ahora el blanco es 1/3 entonces sería como tener tres popotes (blancos) para completar la unidad, y éste (el morado) entra 6 veces en el popote blanco entonces necesitaríamos 18 popotes chiquitos (morados) para llegar a la unidad

Investigador: Ok, y si el blanco vale 1/3 ¿Cuánto vale el rosa?

Genaro: (Lo itera 8 veces en el blanco) Sería 1/24. Por lo mismo de que es como si fueran tres blancos para formar la unidad, y el rosa entra 8 veces en cada blanco, entonces necesitaría 24 rosas para poder formar la unidad

Entrevista con Karla

Mostrada en la sección 7.3.2.3 en la página 182

A.2.3.5 Comentarios y Conjeturas

En las entrevistas anteriores puede notarse la diferencia de flexibilidad para redefinir el valor de un popote entre alumnos de las primeras secciones y aquellos de las segundas. Así mientras los alumnos de las primeras secciones podían redefinir el valor de un popote de forma casi inmediata, los de las segundas, por lo general, tardaban varios minutos en reasignarles un valor mayor o menor que el que tenían.

El caso de Jazmín y Elena llama la atención porque llegan incluso a darse cuenta de la relación que existe entre, digamos el popote blanco y el azul, como unidad y 1/3. Sin embargo, al cambiar el valor del popote blanco designan al popote azul haciendo referencia tanto al nuevo valor del popote blanco como a su magnitud relativa al blanco. Por ejemplo, si el valor del popote blanco fuera 12, éstas alumnas dirían que el popote azul vale 4/3, de esta forma el 4 hace referencia al nuevo valor del blanco y el 1/3 con su valor anterior.

Puede apreciarse que en el caso de los alumnos de las segundas secciones, fue necesario realizar muchos ejemplos de relaciones recíprocas entre dos números enteros mayores a uno, para que finalmente advirtieran que:

1) Aunque la relación recíproca entre ambos números es constante, el valor que se le podía dar a cualquier popote era arbitrario
2) Que los algoritmos de la multiplicación y la división podían aprovecharse para saber cuánto valía una magnitud (blanco) una vez que se conocía el valor de la otra magnitud (verde=10) y la relación recíproca entre ambas (5 verdes = 1 blanco = 50)

Por supuesto este hecho parece reforzar la conjetura de que la relación recíproca entre una unidad predefinida y una fracción unitaria debe comprenderse de forma previa a la relación recíproca entre dos enteros, y que ésta última debe comprenderse de forma previa a la relación recíproca entre dos fracciones unitarias.

Una vez que todos los alumnos desarrollaron una comprensión de la relación recíproca entre dos enteros, fue relativamente mas sencillo que comprendieran la relación recíproca entre dos unidades fraccionarias.

No obstante, para ello fue necesario, especialmente en el caso de los alumnos de las segundas secciones, que comprendieran que:

1) La nueva unidad debía redefinirse (si blanco = 1/2 entonces 2 blancos=1)
2) La relación recíproca entre un popote de color y los blancos podía aprovecharse para obtener el nuevo valor del popote de color (si blanco = 6 morados; entonces 2 blancos = 12 morados)
3) El algoritmo de la multiplicación era útil para encontrar número de popotes de color necesarios para igualar a la unidad (1 blanco = 1/3, 3 blancos = 24 rosas, 1 rosa = 1/24)

A.2.4 Concepción individual de las relaciones recíprocas entre las longitudes de dos objetos cualquiera

A.2.4.1 Entrevistas con los alumnos de la primera sección de Administración

Entrevista con Carolina

Investigador: Si te pidiera que me dijeras cuánto mide el ancho del escritorio utilizando el ancho del escritorio como medida ¿cuánto mediría?

Carolina: (Comienza a medir, itera dos veces el popote blanco, y luego dos veces el verde) Mide dos enteros con 2/5

Investigador: Ok, eso ¿cuántos quintos son?

Carolina: Serían 12/5

Investigador: Ok, ahora, si midiera el popote blanco utilizando el ancho del escritorio como unidad ¿cuánto mediría?

Carolina: ¿Cómo? ¿Cómo? No entiendo

Investigador: A ver el escritorio midió 12/5, ¿cuántos verdes mediría el escritorio?

Carolina: Son 12 verdes

Investigador: ¿A cuántos verdes equivale un blanco?

Carolina: (Piensa unos momentos) A cinco

Investigador: Ok, ahora si el blanco vale 1, ¿Cuánto mide el ancho del escritorio?

Carolina: 12/5

Investigador: Y si el ancho del escritorio vale 1 ¿Cuánto vale el verde?

Carolina: 1/12

Investigador: Cuando el popote blanco vale 1 ¿Cuánto vale el verde?

Carolina: 1/5

Investigador: Bien ahora, si el ancho del escritorio vale 1 ¿cuánto vale el popote?

Carolina: (Piensa durante unos 2 minutos) Es que sería menos de 1/3 pero no puede ser 1/ 2

Investigador: No, no puede ser 1/ 2

Carolina: (Piensa unos momentos) No la verdad no sé

Investigador: Ok, revisemos los valores. Si el verde vale 1 ¿cuánto mide el escritorio?

Carolina: Doce

Investigador: Si el verde vale 1 ¿cuánto vale el popote blanco?

Carolina: Cinco

Investigador: Si el ancho del escritorio vale 1 ¿Cuánto mide el popote blanco?

Carolina: Valdría 1/5

Investigador: ¿O sea que el blanco se repite 5 veces en el ancho del escritorio?

Carolina: No, es que eso es lo me hace dudar, porque el escritorio es dos veces el blanco y otro pedacito que no es un medio. (Piensa unos momentos) No, no puedo

Investigador: Otra vez, si el verde vale 1 ¿Cuánto vale el escritorio?

Carolina: Doce

Investigador: Si el verde vale 1 ¿Cuánto vale el blanco?

Carolina: Cinco

Investigador: Si el escritorio vale 1 ¿Cuánto vale el blanco?

Carolina: ¿Sería 5 por 12?

Investigador: 5 por 12 es 60

Carolina: Sería 5/12

Investigador: Ok, muy bien ¿por qué?

Carolina: Porque éste (el escritorio) equivale a doce de éste (verde), y éste (blanco) es 5 veces este (verde) entonces 5/12 del blanco es el ancho del escritorio

Investigador: ¿5/12 del blanco?

Carolina: Si, ¿no?

Investigador: Pero 5/12 del blanco es casi la mitad del blanco ¿no?

Carolina: Si

Investigador: Entonces ¿Estas diciendo que la mitad de un popote blanco es igual al ancho del escritorio?

Carolina. No, pues, no

Investigador: Vas bien, pero trata de verbalizar mejor tu idea.

Carolina: A ver, éste (el blanco) equivale a 5 veces el verde, entonces el verde…. ¡es que no lo puedo explicar!

Investigador: Tranquila piensa tantito

Carolina: (Piensa unos dos minutos) Porque si tomamos esto (el ancho de escritorio) como un entero hay 12 partes, y un blanco sólo abarca 5/12 del entero

Entrevista con Marcela

Investigador: Si te pidiera que midieras el ancho del escritorio ¿Cuánto dirías que mide?

Marcela: (Comienza a alinear diferentes popotes en el ancho del escritorio) Sería el entero (blanco), los 3 azules, este (amarillo) y un rosa, entonces sería un entero, 3/3, 1/4 y 1/8

Investigador: Ok, y en total eso ¿cuánto es?

Marcela: ¿Lo puedo sumar?

Investigador: Si, claro

Marcela: (Efectúa una suma de fracciones en su cuaderno) El escritorio vale 57/24

Investigador: ¿Se puede simplificar?

Marcela: Segunda no tiene, tiene tercia creo a ver (usa su calculadora) El escritorio vale 19/8

Investigador: ¿19/8 de qué?

Marcela: De popote blanco

Investigador: ¿y cuanto mediría el popote en términos del escritorio?

Marcela: 8/19

Investigador: ¿Cómo lo explicas?

Marcela: Porque cuando nuestra unidad es el popote si lo dividimos en 8 partes, sabemos que necesitamos 19 de esas partes para tener un ancho de escritorio. Y si el escritorio lo dividimos en 19 partes necesitamos tan sólo 8 partes para completar un popote blanco

Investigador: Ok, ¿y el popote rosa qué mide con respecto al blanco y con respecto al ancho?

Marcela: Ajá, el popote rosa mide 1/8 del blanco y del escritorio no sé

Investigador: ¿Cuántos rosas habría en el escritorio?

Marcela: Serían 19 rosas

Investigador: ¿Cómo se llamaría el rosa?

Marcela: Un diecinueveavo

Entrevista con Marcos

Investigador: Ahora, si utilizas los popotes para medir el ancho del escritorio ¿cuántos popotes blancos mide el ancho del escritorio?

Marcos: (Comienza a alinear los popotes en el ancho del escritorio) Pues yo pondría dos veces el popote blanco, un amarillo, y un rosa. Que si todo lo transformo a octavos serían dos enteros 3/8

Investigador: Y ¿cuántos octavos son en total?

Marcos: Serían 19/8

Investigador: ¿Cuántos rosas son en total en el ancho del escritorio?

Marcos 19

Investigador: Y ¿Cuántos rosas son en el popote blanco?

Marcos: 8

Investigador: Ok, entonces a ¿qué fracción del escritorio equivale el popote blanco?

Marcos: Equivaldría a 8/19

Investigador: Porque éste (el blanco) equivale a 8 veces el rosa, y de este (el rosa) hay 19 en el escritorio, entonces el rosa es 1/19 del escritorio, y el popote (blanco) serían 8/19 del escritorio.

A.2.4.2 Entrevistas con los alumnos de la segunda sección de Administración

Entrevista con Jaime

Investigador: Bien, ahora digamos que medimos el ancho del escritorio ¿Cuántos popotes blancos y fracciones de popote blanco mide?

Jaime: (Comienza a alinear diferentes popotes junto al ancho del escritorio) Seríán dos blancos, un azul y un morado

Investigador: Ok, muy bien y eso en fracciones ¿Cuánto es?

Jaime: Son 2 enteros, 1/3 y 1/6

Investigador: Ahora de eso que me dijiste si lo sumas ¿cuántos sextos te da?

Jaime: (Piensa durante un minuto) En los un blanco hay 6/6 entonces en dos hay 12, en el azul hay 2/6 y todavía queda el otro sexto, entonces son 15/6

Investigador: ¿De qué?

Jaime: Del popote blanco

Investigador: ¿Eso quiere decir que es mayor o menor el ancho que el popote blanco?

Jaime: Pues mayor

Investigador: Ahora, vamos a suponer que el morado vale 1 ¿Cuánto valdría el ancho del escritorio?

Jaime: Quince

Investigador: ¿Cuánto valdría el popote blanco?

Jaime: (Itera el morado en el blanco) Sería 1/6 entonces el popote blanco vale 15

Investigador: No, el ancho del escritorio vale 15, pero ¿cuánto valdría el popote blanco si el morado vale 1?

Jaime: 15 enteros, porque entra esas veces

Investigador: ¿Cuántas veces se repite el morado en el blanco?

Jaime: Quince, bueno no, seis veces

Investigador: Entonces ¿cuánto vale el blanco?

Jaime: Vale tres

Investigador: Pero dijimos que el morado valía 1 ¿Cuántas veces entra en el blanco?

Jaime: Seis

Investigador: ¿Entonces cuánto valdría el blanco?

Jaime: Sería 1/6 del morado

Investigador ¿1/6 del morado? ¿O sea que el morado es 6 veces mas grande que el blanco?

Jaime: No, pues, no

Investigador: Ok, a ver si el morado vale 1 ¿Cuánto vale el ancho del escritorio?

Jaime: Quince

Investigador: Ahora, si el morado vale 1 ¿Cuánto vale el blanco?

Jaime: 15 entre 6, porque son seis morados

Investigador: Pero el morado vale 1

Jaime: ¡Aaah! ¿El morado vale 1?

Investigador: Si un 1 se repite seis veces en un objeto ¿Cuánto mide el objeto?

Jaime: Vale 1, no, no, sería 1/6

Investigador: ¿O sea que entre más lo repito mide menos el objeto?

Jaime: ¿Cómo fue otra vez?

Investigador: Si el morado vale 1, ¿cuánto vale el blanco?

Jaime: Si lo repito 6 veces valdría 6

Investigador: Ok, bien. Ahora dijiste que si el morado vale 1 el ancho del escritorio vale 15 y también que si el morado vale 1, el blanco vale 6. Ahora. Si ahora el ancho del escritorio vale 1 ¿cuánto vale el popote blanco?

Jaime: Pues serían 2 blancos, 1 azul y el morado

Investigador: Ok, pero ahí estas midiendo el ancho del escritorio con el popote blanco y sus fracciones, pero yo te estoy pidiendo que con el escritorio midas el popote blanco.

Jaime: (Intenta otra vez medir el escritorio con el popote blanco) El blanco se repite dos, pero el falta un cacho para tres

Investigador: Ok, pero ya lo habías medido ¿no?, ¿Cuántos morados mide?

Jaime: Quince

Investigador: ¿Cuántos morados mide el popote blanco?

Jaime: Seis

Investigador: Ahora si el escritorio vale 1, o sea, si es la unidad o el entero ¿qué fracción es el popote blanco?

Jaime: (Piensa durante 2 minutos, luego comienza a iterar el popote blanco en el ancho de escritorio, luego comienza a iterar el popote morado hasta llegar a la mitad del ancho del escritorio) Pues aquí sería 0.5 del escritorio… pero usted lo quiere en fracciones

Investigador: A ver, otra vez, si el morado vale 1 ¿Cuánto vale en ancho del escritorio?

Jaime: Quince

Investigador: Y ¿cuánto vale el popote blanco?

Jaime: Seis

Investigador: Ahora si yo comparo el popote blanco con el escritorio ¿Cuánto mide el popote blanco?

Jaime: (Piensa durante dos minutos) ¿Valdría 1/6?

Investigador: No, a ver, ya me dijiste que si el morado vale 1, el ancho del escritorio valdría...

Jaime: Quince

Investigador: Ok, ahora si el escritorio valiera 1, ¿Cuánto valdría el popote morado?

Jaime: Como entra 15, sería 1/15

Investigador: Exacto, ahora, si el escritorio es 1 ¿Cuánto mediría el popote blanco?

Jaime: Es que no se puede repetir el popote blanco en el escritorio porque al tercero le sobra. Sería 1/ 2 o un poco más:

Investigador: Si pero la información que tienes sobre el ancho del escritorio, el popote blanco y el morado ¿te sirve de algo para evitarte que tengas que medir con el popote blanco?

Jaime: Pues no necesariamente porque lo puedes medir directamente con el popote morado

Investigador: Acuérdate queremos medir el popote blanco con el ancho del escritorio ¿cuánto mediría?

Jaime: Pues es que no lo puedes repetir 3 veces en el escritorio, siempre te sobra un pedazo y por eso no lo puedes medir

Investigador: Ok, pero tu quieres medir el escritorio lo más exacto que se pueda ¿con qué lo medirías para que sí te alcanzara exactamente?

Jaime: Con el morado

Investigador: Ok, ahora regresando. Si el morado vale 1 ¿cuánto vale el ancho del escritorio?

Jaime: Quince

Investigador: ¿Cuánto vale el popote blanco?

Jaime: Serían 6.

Investigador: Y entonces ¿cuánto mediría el popote blanco si el escritorio vale 1?

Jaime: Serían, 2 blancos y un pedazo de blanco

Investigador: No, fíjate, lo que tu estas haciendo es medir el ancho del escritorio con el popote blanco, pero lo que yo te estoy preguntado es que con el escritorio midas el blanco. O sea, si el escritorio vale 1 ¿cuánto vale el blanco?

Jaime: Es que si este (el morado) vale 1 el blanco vale 6 (Comienza a iterar el popote blanco en el ancho del escritorio) Un popote blanco no llega a la mitad del escritorio

Investigador: Ajá, pero tu sigues intentando medir el ancho del escritorio con el popote blanco, pero lo que yo te digo es midas el blanco con el ancho del escritorio

Jaime: No alcanza, porque cuando repito el popote en el escritorio le sobra al tercer popote

Investigador: Otra vez, ahí estas intentando medir el escritorio con el blanco, y lo que te digo es que utilices el escritorio para medir el blanco…. A ver, si el escritorio vale 1, ¿cuánto vale el morado?

Jaime: Sería 1/15

Investigador: ¿De qué?

Jaime: Del ancho del escritorio

Investigador: ¿Y el blanco cuánto mediría?

Jaime: Seis morados

Investigador: ¿Y esos que son?

Jaime: Serían 6/15

Investigador: ¿6/15 de qué?

Jaime: Del ancho de la mesa

Entrevista con Jazmín

La relación recíproca entre dos objetos cualesquiera no pudo ser abordada con esta alumna debido a que el tiempo de la entrevista no fue suficiente

Entrevista con Jethnael

Esta entrevista se encuentra en la sección 7.3.2.4 página 185

Entrevista con Nayeli

Investigador: Ahora, vamos a medir el ancho del escritorio ¿Cuántos blancos y sus fracciones mide en total?

Nayeli: (Comienza a alinear popotes rosas junto al ancho del escritorio) son 18 rosas

Investigador: ajá y en fracción ¿cuanto es?

Nayeli: Serían 18/8 de blanco

Investigador: Y si utilizo como unidad los rosas ¿cuánto mide el ancho del escritorio?

Nayeli: Dieciocho

Investigador: ¿Cuántos rosas mide un popote blanco?

Nayeli: Ocho

Investigador: Ok. Entonces ¿A qué fracción del ancho del escritorio equivale un popote?

Nayeli: A 8/18

Investigador: ¿Puedes explicar un poco por qué?

Nayeli: Ajá, porque el popote rosa se repite 8 veces en el popote blanco, entonces el escritorio mide 18/8 de blanco,

Investigador: Ok, pero ahí estas explicando cuánto mide el escritorio si lo medimos con el blanco, ¿podrías decir a qué fracción del ancho del escritorio equivale el blanco?

Nayeli: A 8/18 del ancho del escritorio equivale un popote blanco, porque el popote rosa entra 18 veces en el ancho del escritorio

Investigador: Entonces el popote rosa ¿qué fracción es del ancho del escritorio?

Nayeli: Sería 1/18 de escritorio y 1/8 de popote blanco

Entrevista con Rodrigo

Investigador: Si medimos el ancho del escritorio ¿Cuántos popotes blancos y sus fracciones mide?

Rodrigo: (Alinea popotes a lo largo del ancho del escritorio)dos enteros, 1/3 y 1/6

Investigador: Ok, ¿Cuántos sextos son en total?

Rodrigo: Serían 15/6

Investigador: ¿Por qué?

Rodrigo: Porque bueno aquí esta 1/6, luego en 1/3 caben 2/6, y se puede decir que en cada blanco caben 3/3, pero cada 1/3 tiene 2/6 entonces en cada entero serían 6/6, con 2 enteros tendría 12/6. Entonces por todo tendría 15/6

Investigador: ¿15/6 pero de qué?

Rodrigo: De entero, que diga del blanco

Investigador: Ahora si tomáramos al popote morado como unidad ¿Cuánto valdría en ancho del escritorio?

Rodrigo: Serían 15 enteros ¿no?

Investigador: Ajá, ¿y cuánto valdría el blanco?

Rodrigo: Pues 6 enteros

Investigador: Muy bien ahora, si el escritorio vale 1, ¿cuánto valdría el popote blanco?

Rodrigo: ¿El blanco sigue valiendo 1?

Investigador: No, ahora el escritorio valdría 1, ¿cuánto valdría el blanco?

Rodrigo: (Itera el blanco en el ancho del escritorio) Serían, uno, dos, es que nos faltaría como un tercio para que fuera el escritorio fuera 3 veces el blanco

Investigador: Pero ¿te sirve de algo la información que tienes desde antes?

Rodrigo: Si bueno, se puede decir que en total el escritorio son 15/6

Investigador: Ajá, claro si el blanco vale 1, el escritorio equivale a 15/6 de blanco, pero yo lo que te dijo es que si el escritorio vale 1, ¿Cuánto valdría el blanco?

Rodrigo: (Piensa unos momentos) Sería 1/3 ¿no? ¿O puede ser 1/15?

Investigador: ¿El popote blanco sería 1/15? ¿ o qué sería 1/15 escritorio?

Rodrigo: No, el blanco no, el morado sería

Investigador: Ajá, y ¿por qué?

Rodrigo: Porque como ya lo comprobamos el morado cabe 15 veces acá en el escritorio

Investigador: Ok. Entonces ya sabes varias cosas ¿no? Si el morado vale 1 ¿cuánto vale el ancho del escritorio?

Rodrigo: Quince

Investigador: Si el morado vale 1 ¿cuánto vale el popote blanco?

Rodrigo: Seis

Investigador: También dijiste que el escritorio es 15/6 del blanco, y también sabes que si el escritorio vale 1 ¿cuánto vale el morado?

Rodrigo: Vale quince, que diga vale 1/15

Investigador: Tomando en cuenta toda esa información si el escritorio vale 1 ¿cuánto vale el popote?

Rodrigo: ¿Pues igual también 1/15? ¿no?

Investigador: ¿O sea que el blanco es igual al morado?

Rodrigo: No pues no,

Investigador: Recuerda tus observaciones que acabamos de repasar

Rodrigo: (Piensa durante un minuto) Pues es que según yo tendría que ser 1/3

Investigador: Pero para que fuera 1/3 del ancho del escritorio ¿cuántas veces tendría que caber el blanco en el escritorio?

Rodrigo: Tres, pero no cabe, porque se pasa

Investigador: Otra vez recuerda tus observaciones

Rodrigo: Ajá (Piensa otro minuto) ¿Sería 1/6?

Investigador: ¿O sea que el blanco cabría 6 veces en el ancho del escritorio?

Rodrigo: (Piensa otro minuto) Pues es que hasta ahorita sólo puedo razonarle que éste (el morado) cabe 15 veces y éste (el blanco) cabe las dos veces y un chachito que son los 3/6 que dije. (Piensa unos momentos) Sería 2/3

Investigador: ¿O sea el blanco sería 2/3 de escritorio?

Rodrigo: Ajá

Investigador: ¿Entonces el popote blanco casi es el de tamaño del escritorio?

Rodrigo: No, no , no

Investigador: ¿Te sirve de algo el popote morado?

Rodrigo: Ajá, pues es mi 1/6 (Piensa unos momentos) Pues valdría 2 enteros y 3/6

Investigador: Bueno, sí lo que me estas diciendo es cuánto mide el ancho del escritorio cuando lo mido con popote blanco. Pero si el escritorio vale uno , ¿cuánto vale el popote blanco?

Rodrigo: (Piensa unos momentos) Es que ahora sí me la puso difícil prof

Investigador: Tranquilo, no te preocupes. A ver sabes varias cosas, sabes que si mides el ancho del escritorio con el popote blanco vale 15/6. También sabes que si el morado es 1, el escritorio vale 15. También sabes que si el morado vale 1 el blanco vale 6. Y también sabes que si el escritorio vale 1 ¿cuánto vale el morado?

Rodrigo: Valdría 1/15

Investigador: Entonces, si el ancho del escritorio vale uno ¿cuánto vale el blanco?

Rodrigo: Pues que lo más que puede caber el blanco dentro del escritorio es 1/2 porque ya no alcanza a caber 3 veces

Investigador: Ajá, pero por eso te recordé la información que tu ya habías dicho

Rodrigo: A ver, cuando el morado vale 1 el escritorio vale 15, y cuando el morado vale 1 el blanco vale 6. ¿Valdría 15? ¿O 15/6? ¿Me deja apuntar lo que dijimos?

Investigador: Ajá, si quieres

Rodrigo: (Apunta la información reunida en una hoja) Entonces ¿no sería al revés? o sea cuando el escritorio vale 1, ¿el popote blanco vale 6/15?

Investigador: Pero demuestra por qué con los popotes

Rodrigo. (Piensa unos momentos) Porque dijimos que el morado cabía 15 veces en el escritorio, y cada morado en un blanco cabía 6 veces, entonces el popote blanco se divide en sextos y de esos en que se divide 15 veces cabe en el escritorio

Investigador: O sea que el morado ¿qué fracción es del escritorio?

Rodrigo: El morado es 1/15 del escritorio y el blanco es 6/15 de escritorio

Investigador: ¿Por qué?

Rodrigo: Porque cabe 6 veces el popote morado en el blanco y se puede decir que el morado es como 1/6 del blanco, y entonces yo puedo dar como interpretación que el blanco es las 6/15 partes del escritorio

Investigador: Trata de explicarme un poco más claro

Rodrigo: Es que puede decirse que el morado sería como la sexta parte del blanco y se tomaría como 1/6, y entonces ya nada mas faltaría los quinceavos, y los quinceavos se puede interpretar porque el escritorio se divide entre 15. O sea el morado cabe 15 veces en el escritorio. Y este (morado) también se puede interpretar como que cabe 6 veces en el blanco, entonces son 6/15

Investigador: Pero ahora el entero es el escritorio ¿no?

Rodrigo: Ajá, si, si , si, si, si , cuando el escritorio vale 1 el blanco es lo que vale del escritorio

Investigador: A ver, ok, creo que te entiendo pero explícalo más sencillo.

Rodrigo: A ver el escritorio es el entero, entonces el blanco sería 6/15 de nuestro escritorio

Investigador: ¿Por qué?

Rodrigo: Porque en un popote blanco hay 6/6 de éstos (morados)

Investigador: Pero los morados ya no son 1/6

Rodrigo: ¿Cómo que ya no son 1/6?

Investigador: No, porque el escritorio vale 1

Rodrigo: ¿Entonces serían 1/15 de escritorio?

Investigador: Ajá

Rodrigo: Entonces bueno, el escritorio se divide en 15 y el morado es 1/15 del escritorio y etonces serían 6 morados en el blanco

Investigador: ¿Cuánto morados caben en el blanco?

Rodrigo: Seis,

Investigador: ¿Cuántos quinceavos de escritorio caben en el popote blanco?

Rodrigo: Dos

Investigador: ¿Dos?

Rodrigo: ¿Cuántos quinceavos o morados caben en el popote (blanco)?

Investigador: Ajá

Rodrigo: Nada más caben 6 y por eso son 6/15. Entonces el escritorio es el entero, entonces hacemos ¿cuántas veces cabe el morado en todo el escritorio? Es 1/15 y nada más en el blanco caben 6 veces por eso son 6/15

Investigador: Pero, ¿de qué?

Rodrigo: 6/15 de escritorio

A.2.4.3 Entrevistas con los alumnos de la primera sección de Contaduría

Entrevista con Enrique

Investigador: Si medimos el ancho del escritorio con el popote blanco y los de colores ¿Cuánto mediría?

Enrique: ¿Y cuanto mide el popote blanco? ¿Uno?

Investigador: Ajá, mide uno

Enrique. (Comienza a alinear diferentes popotes junto al ancho del escritorio) Mediría dos enteros, 1/4 y 1/8

Investigador: ¿Y eso en fracciones cuánto es?

Enrique: (Hace una suma de fracciones en su cuaderno) Mide 19/8

Investigador: ¿Por qué?

Enrique: Porque 2 enteros son 16/8, 1/ 4 son 2/8 y mas 1/8 son 19/8

Investigador: Ok, bien. Y si ahora el escritorio mide 1 ¿cuánto mide el blanco?

Enrique: 8/19

Investigador: ¿Por qué?

Enrique: Porque 19 rosas caben aquí en el ancho del escritorio, entonces cada 8 de estos rosas es un popote completo. Entonces si el escritorio son 19 rosas, para formar un popote sólo necesitas 8 rosas.

Investigador: ¿y entonces cuánto vale el rosa?

Enrique: Vale 1/19 de escritorio y 1/8 del blanco

Entrevista con Fabiola

Investigador: Ahora, vamos a medir el ancho del escritorio con los popotes. Si el blanco vale 1, ¿cuánto mide el ancho del escritorio?

Fabiola: (Comienza a alinear popotes junto al ancho del escritorio) Son 5 rojos, entonces el escritorio mide 2 y medio blancos

Investigador: ¿Cuántos medios son?

Fabiola: Son cinco medios

Investigador: Si ahora decimos que el rojo vale 1, ¿Cuánto mide el ancho del escritorio?

Fabiola: Pues cinco

Investigador: ¿Y a qué fracción del escritorio equivale un pequeño?

Fabiola: (Piensa durante dos minutos) A 1/5

Investigador: Ok ahora, si el ancho del escritorio vale 1, ¿cuánto vale el popote blanco?

Fabiola: Un medio

Investigador: ¿O sea que con dos popotes blancos cubro todo el ancho del escritorio?

Fabiola: Ah, no, valdría 1/3

Investigador: ¿O sea que con tres blancos cubres todo el ancho del escritorio?

Fabiola: No, tampoco. Es que cómo lo digo (Piensa un minuto) Aaay, no sé

Investigador: Ok, ¿cuántos rojos mide el escritorio?

Fabiola: Cinco

Investigador: ¿Cuántos rojos mide el popote?

Fabiola: Dos

Investigador: ¿A qué fracción del escritorio equivale un popote?

Fabiola: ¿A 2/5?

Investigador: ¿Por qué? ¿Puedes explicar más?

Fabiola: Porque si lo cuentas por rojos el escritorio mide 5 rojos, que sería 5/5 pero sólo necesitas dos rojos para hacer un blanco entonces el blanco son 2/5

Entrevista con Omar

Investigador: Ahora, vamos a suponer que vamos a medir el ancho del escritorio utilizando el popote blanco y los otros de colores ¿Cuánto mide?

Omar: (Comienza a alinear los popotes en el ancho del escritorio) Son dos popotes y 1/2

Investigador: Entonces ¿a cuántos medios equivale?

Omar: A cinco

Investigador: Ok, ahora si el ancho del escritorio lo tomo como unidad, ¿cuánto vale el popote blanco?

Omar: Equivale a 1/3 de escritorio

Investigador: ¿O sea que el blanco se repite 3 veces en el ancho de escritorio?

Omar: No, porque la tercera vez no cabe completo ¿Equivale a 1/ 2?

Investigador: ¿O sea que caben dos blancos en el ancho de escritorio?

Omar: No, no, no, tampoco. Equivale a 1/ 2 con 1/ 4

Investigador: ¿A 1/ 2 con 1/ 4? A ver, ¿cuántos rojos mide el ancho de escritorio?

Omar: Cinco, ah, pues ya, entonces vale 1/5 del escritorio

Investigador: ¿O sea el popote blanco completo se repite 5 veces en el escritorio?

Omar: No, no,

Investigador: Si el ancho del escritorio vale 1, ¿Cuánto vale el popote blanco?

Omar: Es que no hay una unidad específica, porque se utilizaron 2 enteros y un medio, no se utilizaron 3 enteros exactos

Investigador: ¿Cuántos rojos mide el escritorio?

Omar: Cinco

Investigador: ¿Cuántos pequeños mide un popote blanco?

Omar: Dos

Investigador: ¿A qué fracción del escritorio equivale un popote blanco?

Omar: Es que no es 1/10 ¿sería 1/2?

Investigador: A ver te repito, ¿cuántos rojos mide el escritorio?

Omar: Cinco

Investigador: ¿Cuántos rojos mide un popote blanco?

Omar: Dos, pues entonces el popote blanco mide 1/10

Investigador: ¿O sea que si repito 10 veces el blanco equivale al escritorio?

Omar: No, tampoco. Es que 1/5 de escritorio equivale al rojo

Investigador: Ajá, recuerda que queremos saber cuánto mide el popote blanco si lo comparamos con ancho del escritorio

Omar: Es que el escritorio mide dos enteros y medio, o sea 5/2, pero si los represento al revés. No, es que se necesitaría otra fracción aparte

Investigador: Explícame un poco más

Omar: Ajá, este (el blanco) cabe dos veces y luego otra vez , pero luego le falta otro pedazo para completar el escritorio, que sería 1/ 2 y 1/ 4

Investigador: ¿1/2 y 1/ 4?

Omar: Ajá, el popote equivale a 1/ 2 y 1/4 que es la mitad que nos sobró

Investigador: ¿Pero tú qué estas tomando como unidad de medida?

Omar: El escritorio. O sea el blanco en relación al escritorio equivale a 1/ 2 y 1/ 4

Investigador: Estas diciendo que el escritorio equivale a dos blancos y medio. Luego dices que si tu mides al blanco utilizando el ancho del escritorio mide 1/ 2 y 1/ 4.

Omar: Ajá, porque se ve que el escritorio vale son 2 popotes enteros pero me falta todavía otro cacho. Entonces un blanco sería 1/2 y el pedazo que me falta sería 1/ 4

Investigador: Pero ¿hasta donde llegaría el medio del escritorio?

Omar: (Señala la mitad del ancho del escritorio) Hasta aquí hay un blanco pero como falta un pedacito para llegar hasta la mitad sería 1/8

Investigador: Pero tu dijiste que el blanco valía 1/ 2 más 1/ 4

Omar: Ah, no pero yo decía de todo el escritorio completo. La unidad principal es el escritorio, pero ahora queremos saber en relación al escritorio cuanto mide el blanco entonces yo digo que vale 1/2 de escritorio más 1/4 de escritorio

Investigador: ¿Cuántos rojos mide el escritorio?

Omar: Cinco

Investigador: ¿Cuántos rojos mide el popote?

Omar: Dos

Investigador: ¿A qué fracción del escritorio equivale el popote blanco?

Omar: Equivale a 2/3 se podría decir

Investigador ¿A 2/3?

Omar: Si fueran enteros serían 2/3. Si nos hubieran quedado 3 popotes blancos cada blanco equivaldría por así decir a 1/3 de escritorio. Pero como no nos quedó parejo entonces tenemos que usar dos fracciones. Para completarlo ¿no? Entonces serían 2/3 mas 1/6 para poder completarlo

Investigador: Pero el popote blanco no pueden ser 2/3 porque ni siquiera es 1/3 de escritorio ¿O sí se puede?

Omar: Es que eso es lo que nos falta

Investigador: A ver otra vez ¿El ancho de escritorio cuántos rojos mide?

Omar: Cinco

Investigador: ¿Y el popote blanco?

Omar: Dos

Investigador: Un popote blanco a ¿qué fracción del ancho del escritorio equivale?

Omar: Es que así con una sola fracción no se puede representar

Investigador: A ver ¿Cuánto mide un rojo en relación al escritorio?

Omar: 1/5 de escritorio

Investigador: ¿Y entonces un popote blanco a qué fracción de escritorio corresponde?

Omar. Es que no puede haber exactos, le diría que 2/3 pero …. Sí son 2/3 del escritorio

Investigador: ¿Por qué? Pero a ver, alinea 3 popotes rojos

Omar: (Los alinea)

Investigador: Ahora ahí, según tú, ya tendríamos 3/3 del escritorio pero ¿a poco los tres rojos ya igualaron al escritorio?

Omar: No, pero así no, (alinea 2 popotes blancos y señala el final del segundo) Ahora hasta aquí son 2 popotes enteros, pero sobra este pedazo, y pues ese pedazo no nos deja cerrar la fracción

Investigador: Ok, pero en ese pedazo tu habías dicho que ese pedazo mide un rojo,

Omar: Es que son dos enteros y medio en total de todo el ancho del escritorio,

Investigador: Ajá, son 2 enteros y medio o ¿cuántos rojos?

Omar: O cinco pequeños

Investigador: Y un rojo ¿qué fracción es del escritorio?

Omar: Sería 1/10

Investigador: ¿O sea que hay 10 rojos en el ancho escritorio?

Omar: Ah no serían 6

Investigador: A ver, otra vez un rojo, ¿qué fracción es del escritorio?

Omar: (Itera un rojo en el ancho del escritorio) Serían 5 rojos, entonces 1 rojo es 1/5 del escritorio

Investigador: Entonces un popote blanco, ¿qué fracción es del escritorio?

Omar: ¿Se pueden usar dos fracciones o nada más una?

Investigador: Con una es suficiente

Omar. Entonces el blanco sería equivalente a 1/4 de escritorio

Investigador: ¿O sea que si repites el blanco cuatro veces igualas el escritorio?

Omar: No, más bien sería 1/3

Investigador: Pero no estaría completo el tercero, sobraría

Omar: Sería 1/2 mas 1/4

Investigador: ¿De escritorio?

Omar: Ajá,

Investigador: Si tu dices que 1/2 mas 1/ 4 de escritorio equivale a un popote sería 1/2 de de escritorio que esta aquí (señala la mitad del ancho del escritorio) todavía más 1/4, lo que te da 3/4 de escritorio que esta hasta acá (señala los 3/ 4 del ancho de escritorio) ¿A poco eso es igual a un popote blanco?

Omar: No, entonces es igual a 1/3 más 1/4.

Investigador: 1/3 más 1/4 son (Piensa unos momentos) 7/12, o sea es más de la mitad, ¿Tu dirías que el blanco mide más de la mitad?

Omar: Entonces mediría 6/12

Investigador: 6/12 es la mitad, y ahí tampoco llega un blanco

Omar: Entonces serían 5/12

Investigador: Sería menos de la mitad pero no has comprobado que mida eso

Omar: No, pero sí mide 5/12 porque no se completó, entonces el blanco en relación al escritorio sí mide 5/12,

Investigador: Si dices que mide 5/12 estas de acuerdo que equivaldría a 2/6 y 1/12 de escritorio ¿Cómo podríamos encontrar que es 1/6 de escritorio?

Omar: Tomo el morado

Investigador: No, porque son 2/6 y 1/12 de escritorio entonces lo vas a hacer muy complicado. Pero hay una forma mucho mas sencilla de saber qué fracción es el blanco si tomo el ancho del escritorio si tomo el blanco como unidad

Omar: Es que si hay una forma mucho mas sencilla pero en este caso no se puede porque no tenemos los 3 blancos completos

Investigador: A ver piensa en lo que me has dicho, ¿cuántos rojos mide ancho del escritorio?

Omar: Cinco

Investigador: ¿Cuántos rojos mide el popote blanco?

Omar: Dos

Investigador: ¿A qué fracción equivale el rojo del ancho escritorio?

Omar: Pues así a ojo equivale a 1/7

Investigador: Mejor mídele

Omar: (Itera el rojo en el ancho del escritorio) Son 5 rojos

Investigador: Por eso ¿A qué fracción equivale el rojo del ancho escritorio?

Omar: A 1/5

Investigador: Entonces un popote blanco ¿A qué fracción del escritorio equivale?

Omar: A 1/2 mas 1/10

Investigador: A ver pon los dos rojos que traes justo en el filo del ancho del escritorio, ahora ¿cuántos rojos necesitas para completar el ancho del escritorio?

Omar: Tres

Investigador: No, a ver, desde el principio al final ¿Cuántos rojos necesitas?

Omar: Cinco

Investigador ¿Cuántos rojos necesitas para hacer un popote blanco?

Omar: Dos

Investigador: ¿A qué fracción del escritorio equivale un popote blanco?

Omar: A 1/3, es que no se puede hacer exacto

Investigador: A ver, a ver, vamos a desviarnos un poco ¿si el azul vale 1? ¿Cuánto vale el morado?

Omar: 1/2

Investigador: Si el rojo vale 1, ¿a qué fracción equivale el morado?

Omar: A 1/4

Investigador: ¿Ya lo mediste?

Omar: A 1/3 mas bien

Investigador: ¿Qué hiciste para saber qué fracción es?

Omar: Pues nada más es comparar con los tamaños pero aquí es más fácil porque por así decirlo el morado abarca exactamente el azul y el rojo, el morado cabe 3 veces en el rojo

Investigador: Ok, pero qué haces para saber ¿qué fracción es un popote con respecto a otro?

Omar: Pues digamos que es como hacer una división

Investigador: No, a ver, ¿qué haces para saber cuánto mide un popote con respecto a otro?

Omar: Comparar o yo lo que hago es medir

Investigador: Si el azul valiera 1 ¿Cuánto valdría el morado?

Omar: 1/2

Investigador: Si el azul valiera 1 ¿Cuánto valdría el blanco?

Omar. Sería 1 entero y 1/3

Investigador: Si el blanco vale 1 ¿cuánto vale el azul?

Omar: 3/4

Investigador: Si el blanco vale 1, ¿el azul vale 3/4? ¿O sea que el azul es más de la mitad del blanco?

Omar: Ah, no equivale a 1/3

Investigador: Y si el azul vale 1 ¿cuánto vale el blanco?

Omar: Tres enteros

Investigador: ¿Qué hiciste?

Omar: Nada más invertir por ejemplo aquí estamos midiendo en relación al popote blanco que es el entero y para llenarlo se necesitan 3 de estos (azules) por lo tanto es 1/3

Investigador. Ok, ahora si el morado vale 1 ¿Cuánto vale el azul?

Omar: A dos enteros

Investigador: ¿Y cuánto valdría el blanco?

Omar: Seis enteros

Investigador: ¿Y que hiciste?

Omar: Aquí lo que hice es que si por ejemplo este es el entero (el blanco) y éste (el azul) cabe tres veces aquí (en el blanco) y éste es la mitad (el morado) entonces sería 3 por 2 es 6, O también midiendo el morado te cabe 6 veces en el blanco

Investigador: Ok, entonces me acabas de decir que para encontrar una fracción comparas

Omar: Si entre los tamaños

Investigador: Dijiste que el ancho del escritorio valía 5 rojos

Omar: Si, si lo medimos un ancho de escritorio equivale 5 rojos

Investigador: Y el popote blanco ¿cuántos rojos mide?

Omar: Dos

Investigador: Y un rojo ¿a qué fracción equivale del escritorio?

Omar: Un rojo equivale a 1/5

Investigador: Entonces el escritorio mide 5 rojos y el blanco mide 2 rojos , el rojo es 1/5 del escritorio. ¿A qué fracción equivale 1 blanco si lo mido con el escritorio? Piensa ¿qué te estoy pidiendo que compares?

Omar: El popote blanco en relación al escritorio

Investigador: ¿Hay algo que te ayude a compararlos?

Omar: Ajá, como dije hay que ir midiendo y comparar cuántas veces entra el blanco en el escritorio:

Investigador: ¿Hay alguna unidad que te permita medir a los dos? ¿Al popote y al escritorio?

Omar: No, que sea así certera no, es que no quedan los 3 enteros si quedan los 3 enteros sería mucho más fácil, pero son dos enteros y medio de popote blanco, por eso no se puede encontrar una fracción

Investigador: ¿Pero hay alguna unidad que te sirva para medir los dos? ¿Qué quepa exactamente en los dos?

Omar: Pues los décimos

Investigador: ¿Hay otra?

Omar: O los quintos

Investigador: ¿cuáles quintos?

Omar: O sea los rojos

Investigador: Ajá

Omar: Si porque dos rojos harían 1 blanco y 5 rojos harían un escritorio

Investigador: Ok, entonces ¿A qué fracción del escritorio equivale un popote blanco?

Omar: Sería 1/3 de escritorio

Investigador: Ok, ¿A qué fracción del escritorio equivale 1 rojo?

Omar: A 5 enteros

Investigador: ¿O sea que el rojo es 5 veces más grande que el escritorio?

Omar: No entonces el rojo es 1/5 del escritorio

Investigador: ¿A qué fracción del escritorio equivale 1 popote?

Omar: Es que no es ni la mitad ni la tercera parte

Investigador: ¿Qué haces para darte cuenta que una cosa es fracción de otra?

Omar: Sacar como que los valores o sea entre qué se puede dividir

Investigador: Si pero por ejemplo qué hiciste para saber si el morado vale uno ¿cuánto vale el azul?

Omar: Pues aquí lo que hice fue multiplicar

Investigador: No, a ver pero si el morado vale 1 ¿cuánto vale el azul?

Omar: Dos

Investigador: Si el azul vale 1 ¿Cuánto vale el morado?

Omar: Un medio

Investigador: ¿Qué estas haciendo para darte cuenta?

Omar: Aaaah, nada más estoy invirtiendo el denominador

Investigador: No, pero digo, ¿qué haces para darte cuenta cómo es una cosa en relación a la otra?

Omar: Sería comparar, hacer una comparación

Investigador: Hasta ahora hemos utilizado el popote blanco, el rojo y el ancho del escritorio ¿Alguna de ellos te sirve para medir?

Omar: Si el rojo

Investigador: Ajá

Omar: Si pero si lo manejamos con enteros con cifras cerradas ya no funciona, por eso no te puedo decir ninguna fracción que mida el popote blanco si lo mido con el escritorio

Investigador: ¿El rojo te podría ayudar a establecer una fracción?

Omar: Si, si me ayudaría

Investigador: ¿Cómo te ayudaría?

Omar: Porque es más fácil, si tenemos 5 rojos sé que vamos a completar 1 entero de esto (el ancho del escritorio) y si tenemos 1 rojo sé que tenemos 1/5 del escritorio

Investigador: Ok pero me refiero a que ¿el rojo te ayudaría a saber qué fracción es el blanco del ancho del escritorio?

Omar: La verdad no creo porque no hay números certeros entre el blanco y el escritorio

Investigador: El popote blanco ¿Cuántos rojos tiene?

Omar: Tiene dos, es que según yo son 2 enteros y 1/2

Investigador: El rojo ¿a qué fracción del escritorio equivale?

Omar: A 1/5

Investigador: ¿Y el popote? Y recuerda no te estoy preguntando a qué fracción unitaria equivale el popote, sino a qué fracción del ancho del escritorio equivale el popote blanco. O a lo mejor para hacerte mas clara la pregunta ¿a cuántas partes del ancho del escritorio equivale el popote blanco?

Omar: Equivale a dos enteros y medio

Investigador: El ancho del escritorio ¿A cuanto equivale?

Omar: A un entero

Investigador. Y el rojo ¿A cuanto equivale?

Omar: A 1/5 de escritorio

Investigador: Y un blanco ¿Cuántos rojos mide?

Omar: Dos

Investigador: Y un rojo ¿a qué fracción de escritorio equivale?

Omar: A 1/5

Investigador: ¿Y el blanco a qué fracción de escritorio equivale?

Omar: Aaaah, creo que ya, creo que sería 3/5

Investigador: ¿O sea que necesitas 3/5 de escritorio para hacer 1 popote blanco?

Omar: No, serían 2/5 partes de escritorio

Investigador: ¿Por qué? A ver explícame

Omar: Porque digamos para llegar al a mitad del escritorio en relación a los pequeños sería como por acá (señala la mitad del escritorio). Y como sé que el escritorio vale 5/5 pero como sé que el rojo es la mitad del blanco sólo necesito 2/5 para completarlo

Investigador: ¿Para completar qué?

Omar: El popote blanco

Investigador: ¿Pero 2/5 de qué?

Omar: De escritorio,

Investigador: O sea ¿cuántos rojos?

Omar: Dos, serían dos rojos

Investigador: ¿Puedes resumir lo que dijiste ahorita? ¿Por qué el blanco mide 2/5 del ancho del escritorio?

Omar: Porque necesito 5 rojos para hacer el escritorio, entonces cada rojo es 1/5 de escritorio y como necesito 2 rojos para hacer el blanco, entonces mide 2/5 de escritorio

Investigador: Ok y nada mas para checar ¿Hay alguna fracción del escritorio que equivalga a una fracción del popote?

Omar: Los quintos

Investigador: ¿O sea un 1/5 de escritorio es igual a un 1/5 de popote?

Omar: No, no, no. 1/5 de escritorio es igual a un rojo

Investigador: ¿O sea qué fracción de popote?

Omar: A 1/2, aaaaaaah, ya, ya, ya, 1/5 de escritorio equivale a 1/2 de popote, y por lo tanto si estamos midiendo en enteros ¿si?

Investigador: No sé ¿en qué estamos midiendo ahora?

Omar: Ahorita estamos midiendo en quintos

Investigador: ¿De qué?

Omar: De escritorio. Entonces para sacar el entero necesito 5/5 pero estamos buscando cuánto mide el popote blanco que tiene 2/5

Investigador: ¿De qué?

Omar: De escritorio

A.2.4.4 Entrevistas con los alumnos de la segunda sección de Contaduría

Entrevista con Elena

Investigador: Entonces ahora me gustaría que midieras el ancho del escritorio si tomamos al popote blanco como unidad de medida. También puedes ayudarte de los otros popotes de color si crees que los necesitas

Elena: (Comienza a alinear diferentes popotes en el ancho del escritorio) Mide dos popotes blancos, un azul y un morado

Investigador: Ok, y en fracciones ¿cuantos sería?

Elena: Serían dos enteros por los blancos

Investigador: ¿Y nada más?

Elena: ¿Cuánto medía el azul?

Investigador: No sé, si quieres chécalo

Elena: (Itera el azul en el blanco) Cabe tres veces, es 1/3

Investigador: Ok ¿Y el morado?

Elena: (Itera el morado en el blanco) Son seis, son 1/6

Investigador: ¿Entonces cuánto mide el ancho del escritorio en total?

Elena: Serían dos enteros, 1/3 y 1/6

Investigador: Ok ¿Cuántos morados mide el escritorio?

Elena: (Toma un morado y lo itera en los dos blancos y en el azul que están al filo del ancho del escritorio) Serían doce, catorce y quince. Son quince

Investigador: Muy bien, son quince. Son ¿quince qué?

Elena: Son 15/6

Investigador: ¿De qué popote?

Elena: Del blanco

Investigador: Exacto. Ahora si el morado valiera 1 ¿Cuánto mediría el escritorio?

Elena: Quince

Investigador: Si el morado vale 1 ¿Cuánto mide el popote blanco?

Elena: Seis enteros

Investigador: Ahora si el escritorio vale 1 ¿cuánto mide el popote blanco?

Elena: Pero necesito las medidas que usé ¿No? O sea los blancos, el azul y el morado?

Investigador: Puede ser ¿Pero te sirve de algo saber que el ancho mide 15 morados?

Elena: Si, el ancho mide 1/6

Investigador: A ver si el morado vale 1 ¿Cuánto vale el escritorio?

Elena: ¿Me podría decir otra vez?

Investigador: Ajá si el morado vale 1 ¿Cuánto vale el escritorio?

Elena: Sería 1/6

Investigador: ¿1/6 de escritorio?

Elena: Si

Investigador: Pero la pregunta es si el morado vale 1 ¿Cuánto vale el escritorio?

Elena: ¿1/15?

Investigador: ¿O sea que si el morado vale 1 el escritorio es 1/15 del morado? ¿Sería un escritorio muy chiquito? ¿No crees?

Elena: No, entonces no es , pero ya no me acuerdo

Investigador: A ver ¿cuánto medía tu escritorio cuando usabas los diferentes popotes

Elena: 15/6

Investigador: Ok, 15/6 pero ¿de qué?

Elena: De popote

Investigador: ¿De que color?

Elena: De blanco, azul y morado

Investigador: ¿15/6 de blanco, azul y morado?

Elena: No, no sería 15/6 de morado

Investigador: ¿15/6 de morado?

Elena: Si

Investigador: Ok, vamos a ver ¿El morado cuánto vale para ti?

Elena: 1/6

Investigador: ¿De qué?

Elena: De morado

Investigador: ¿El morado vale 1/6 de sí mismo? ¿El morado cuanto mide?

Elena: 1/6

Investigador: Ajá pero ¿de qué?

Elena. De popote blanco

Investigador: Entonces ¿cuánto mide el ancho del escritorio?

Elena: 6/15 ¿no?

Investigador: No sé,

Elena: Aaaay, profe, no sé es la inversa ¿no?

Investigador: No, no sé, todavía no llegamos a las inversas. Lo que ahorita te estoy preguntado es si el blanco vale 1, ¿Cuánto vale el escritorio?

Elena: Pues dos, dos y cachito

Investigador: Dos y cachito, ¿cuánto mide el cachito?

Elena: Pues esto, 1/3 de azul y el sexto

Investigador: ¿Un tercio de azul?

Elena: No, 1/3 de blanco y 1/6 de blanco

Investigador: ¿Cuántos sextos de blanco son?

Elena: 15/6

Investigador: 15/6 pero ¿de qué?

Elena: 15/6 de popote blanco

Investigador: Exacto, entonces ¿cuántos morados mediría el escritorio?

Elena: Pues 1/6

Investigador: No, ¿cuántos morados mediría el escritorio?

Elena: ¿El escritorio mide 15/6 de popote blanco?

Investigador: Ajá, entonces ¿cuántos morados mide?

Elena: ¿Nueve?

Investigador: ¿Nueve morados? ¿O sea que si pongo nueve morados cubro todo el ancho del escritorio?

Elena: (Alinea 2 popotes blancos, un azul y un morado en ancho del escritorio) Pues ahí está

Investigador: Ok, pero ¿Cuántos morados son?

Elena: Serían quince morados

Investigador: A ver, ahora, si el blanco es 1 ¿cuánto mediría el escritorio?

Elena: Otra vez serían 15/6

Investigador: ¿De qué?

Elena: De popote blanco

Investigador: Ahora digamos que el morado vale 1 ¿Cuánto vale el escritorio?

Elena: ¡Quince!

Investigador: Si el morado vale 1 ¿Cuánto vale el popote blanco?

Elena: Vale 1/6

Investigador: ¿El popote blanco es 1/6 del morado?

Elena: No, vale 6

Investigador: ¿Y el escritorio?

Elena: Quince

Investigador: Ok, Ahora si el escritorio vale 1 ¿Cuánto vale el blanco?

Elena: 1/15

Investigador: ¿ O sea que el blanco se repite 15 veces en el escritorio?

Elena: No

Investigador: Si el escritorio vale 1 ¿Cuánto vale el blanco?

Elena: No, Aaaay, no sé profe

Investigador: Tranquila. Piensa un rato

Elena: 3/15, no 2/15, porque el blanco se repite 2 veces en el escritorio

Investigador: ¿O sea que necesito 7 y medio popotes para completar el escritorio?

Elena: No, ¿no es 1/15?

Investigador: No, pero veo que estas interesada en el 1/15

Elena: Es que el escritorio vale 15 enteros

Investigador: Si el escritorio vale 15 enteros ¿qué es el entero? ¿Cuál de los popotes es el entero cuando el escritorio vale 15?

Elena: El blanco

Investigador: ¿El blanco es el entero cuando el escritorio vale 15?

Elena: No, el morado

Investigador: Ok, el morado es el entero. Pero yo no te estoy diciendo que el morado vale 1, te estoy diciendo que el ancho del escritorio vale 1, y además te estoy preguntando a qué fracción de escritorio equivale el blanco.

Elena: Aaaaay, no sé, ¿podrían ser dos?

Investigador: ¿Cómo dos? Si el escritorio vale 1 ¿El popote vale el doble del escritorio?

Elena: Aaaash, la verdad ya no sé

Investigador: Vamos a pensar un ratito ¿Te sirve de algo el morado?

Elena: No sé, (Piensa unos momentos) ¿El blanco sería 1/6?

Investigador: ¿O sea que necesitas 6 blancos para igualar el ancho del escritorio?

Elena: ¡No! ¡Lo que necesito son 15/6!

Investigador: Ok, 15/6 es lo que mide el escritorio si el blanco vale 1. Pero ahora el ancho del escritorio vale 1

Elena: ¿Serían 6/15?

Investigador: ¿Por qué lo dices?

Elena: Porque 15/6 de blanco vale el escritorio y 6/15 de escritorio vale un popote blanco

Investigador: ¿Por qué?

Elena: Porque es lo mismo

Investigador: No, 15/6 no es lo mismo que 6/15

Elena: ¿Cómo que no es lo mismo?

Investigador: Si el morado vale 1/6 de blanco ¿cuánto mide el ancho de escritorio?

Elena: 15/6

Investigador: Ajá, y también recuerda que si el morado vale 1 ¿Cuánto vale el escritorio?

Elena: Quince

Investigador: Si el morado es 1 ¿Cuánto vale el popote blanco?

Elena: Seis

Investigador: Ahora lo que te estoy preguntando ya no es que el morado sea 1, o que el blanco valga 1. Te estoy diciendo el escritorio es 1, ¿cuánto vale el blanco?

Elena: 6/15

Investigador: ¿Por qué? ¿Cómo te diste cuenta?

Elena: Nada más les dí vuelta a los números

Investigador: Eso es lo más fácil, pero no es suficiente como respuesta

Elena: Aaaaaash, ya profe, de verdad no sé, ya nada se me ocurre

Investigador: Ok, a ver, si el escritorio vale 1, ¿cuánto vale el morado?

Elena: Valdría 1

Investigador: ¿O sea que el morado es igual al escritorio?

Elena: No, vale 15

Investigador: ¿O sea que el morado es igual a 15 escritorios?

Elena: ¿Entonces ahora cuánto valdría el morado? Ya no sé ¿Tendría que contarlos?

Investigador: ¿Cuántos morados crees que habría en el escritorio?

Elena: No sé, creo que 15,

Investigador: Ok, entonces si el escritorio vale 1 ¿cuánto valdría el morado?

Elena: 1/15

Investigador: Entonces ¿cuánto vale el blanco?

Elena. 6/15

Investigador: A ver ¿por qué?

Elena: Porque el morado vale 1/15 de escritorio y necesito 6 morados para hacer el blanco

Entrevista con Genaro

Investigador: Ahora vamos a medir el ancho del escritorio con popotes blancos, aunque te puedes ayudar de los otros popotes. Si el blanco vale 1 ¿Cuánto vale el ancho del escritorio?

Genaro: (Comienza a alinear diferentes popotes a lo largo del ancho del escritorio) Serían dos blancos y un rojo

Investigador: Y eso ¿Cuánto vale?

Genaro: Dos y medio

Investigador: Ok, ¿Cuántos rojos mide el escritorio?

Genaro: Son cinco

Investigador: ¿Cuántos rojos mide el blanco?

Genaro: Dos

Investigador: Ok, si ahora digo que el ancho del escritorio valga 1 ¿cuánto vale el popote blanco?

Genaro: Pues valdría 3

Investigador: ¿O sea que el blanco equivale a 3 escritorios?

Genaro: No, el escritorio vale 2 y 1/ 2 del blanco

Investigador: Ok, y ¿a cuántos rojos es equivalente?

Genaro: A cinco

Investigador: ¿Y el popote blanco cuánto vale si el rojo vale 1?

Genaro: El popote blanco vale 2

Investigador: Ahora, si te digo que el ancho del escritorio vale 1 ¿cuánto vale el blanco?

Genaro: ¿A sí completo? ¿Cuántas veces? ¿Entra dos veces y media en el escritorio? ¿No?

Investigador: Ajá, el popote blanco entra dos veces y media en el escritorio, estoy de acuerdo, pero ahí estas midiendo el escritorio con el popote blanco, y yo lo que quiero es que midas el popote blanco con el escritorio

Genaro: (Comienza a iterar el blanco en el ancho de escritorio) Pues igual 2 y 1/2

Investigador: Si pero si te fijas volviste a medir el escritorio con el blanco y yo quiero que midas el blanco con el escritorio

Genaro: Aaaaah, ya entendí, (Itera el blanco en el ancho de escritorio) Es que da 2 y 1/2, no entiendo

Investigador: Si pero lo que tu estas haciendo es repetir dos y media veces el blanco, entonces estas midiendo el ancho del escritorio con el blanco, yo lo que quiero es que utilices el ancho del escritorio para medir el popote blanco. O si quieres para decirlo de otra forma, el ancho de escritorio es 1, ¿cuánto vale el blanco?

Genaro: ¿O sea lo acostado?

Investigador: No, el largo del escritorio no. Si el ancho del escritorio vale 1 ¿Cuánto vale el popote blanco?

Genaro: ¿Valdría 2 y medio? ¿No?

Investigador: Fíjate, tu me estas respondiendo que si el popote blanco vale 1, entonces el ancho del escritorio vale dos blancos y medio. Pero yo te estoy preguntando si el escritorio vale 1, ¿cuánto vale el popote blanco?

Genaro: Ahora sí ya le entendí (usa su calculadora) Es que me da dos y medio

Investigador: Vamos a ver, ¿cuántos rojos vale el ancho del escritorio?

Genaro: Cinco

Investigador: ¿Cuántos rojos vale el popote blanco?

Genaro: Dos

Investigador: Ok, ahora si el ancho del escritorio vale 5 rojos, ¿a qué fracción del ancho del escritorio equivale a un rojo?

Genaro: A 1/5

Investigador: Entonces ¿cuánto vale un blanco?

Genaro: ¿Sería 1/3?

Investigador: ¿O sea que el popote blanco cabe 3 veces exactas en el ancho de escritorio?

Genaro: No, sería 1/2

Investigador: ¿O sea que el popote blanco cabe 2 veces exactas en el ancho de escritorio?

Genaro: No, porque sobraría 1 cacho, es que según yo son dos blancos y un cacho más

Investigador: ¿Cuántos rojos mide el ancho del escritorio?

Genaro: Son los dos blancos y un rojo

Investigador: Ajá, pero en total ¿cuántos rojos hay?

Genaro: En total son 5

Investigador: Y un blanco ¿cuántos rojos mide?

Genaro: Pues dos

Investigador: ¿Qué fracción del escritorio equivale 1 rojo?

Genaro: 1/5

Investigador: Y un popote blanco ¿A qué fracción del escritorio equivale?

Genaro: ¿3/2?

Investigador: ¿O sea que el blanco es mas grande que el escritorio?

Genaro: No pues no, Según yo sería 1/2

Investigador: ¿O sea que el popote blanco cabe exactamente dos veces en el escritorio?

Genaro: No

Investigador: Entonces otra vez. Dijiste que el escritorio vale 5 rojos ¿Entonces qué fracción es el rojo del escritorio?

Genaro: 1/5

Investigador: También dijiste que el popote blanco equivale a 2 rojos ¿no?

Genaro: Si

Investigador: Entonces 1 popote blanco ¿a qué fracción equivale del escritorio?

Genaro: Es que no puede ser viceversa o sea no puede ser 1/5 del escritorio

Investigador: No, no puede ser 1/5

Genaro: ¿Pues cómo sería porque 1/3 se pasa y 1/ 2 no llega? Pues es que sería dos rojos y para poderlo ya cerrar, serían dos blancos y luego lo que sobra

Investigador: Si pues, pero entonces otra vez estarías diciendo que el ancho del escritorio vale dos blancos y medio. Y en cambio, yo te estoy preguntando que si el escritorio vale 1, a qué fracción equivale el blanco. Entonces, tú me has dicho que como hay 5 rojos en el escritorio el rojo ¿qué fracción es del escritorio?

Genaro: La quinta parte

Investigador: Ajá, Entonces un popote blanco ¿a qué fracción del escritorio equivale?

Genaro: ¿A 1/5?

Investigador: Los rojos son 1/5 de escritorio ¿pero el blanco?

Genaro: Si ya entendí que usted lo que quiere saber es cuantas veces cabe el blanco exactamente en el escritorio siendo un entero

Investigador: No, de hecho sí quieres déjame expresarlo como tú, y entonces mi pregunta es ¿cuántas veces cabe el ancho de escritorio en el popote blanco? Pero eso sería una pregunta que no tiene sentido. Entonces la pregunta correcta es a qué fracción del escritorio equivale el popote blanco

Genaro: A 2/5

Investigador: ¡Exactamente! Ahora ¿Por qué?

Genaro: Porque 1 rojo es 1/5, 2 rojos son 2/5

Investigador: ¿De qué?

Genaro: De escritorio.

Entrevista con Karla

Investigador: Bien ahora vamos a medir el ancho del escritorio, ¿cuántos popotes blancos mide? Puedes utilizar los otros popotes de colores si ves que te hacen falta

Karla: (Comienza a alinear diferentes popotes en el ancho del escritorio) Serían dos blancos y un azul, o sea, dos enteros y 1/3

Investigador: Ok. ¿Y eso cuántos tercios son?

Karla: Son 7/3

Investigador: Ok ¿ y entonces cuántos azules son?

Karla: Son 7 azules

Investigador: Entonces si el azul vale 1, ¿cuánto vale el ancho del escritorio?

Karla: ¿Valdría 1/3?

Investigador: ¿O sea que el popote azul es tres veces más grande que el escritorio?

Karla: (Piensa durante dos minutos) No, el escritorio valdría 7 enteros

Investigador: Y si el azul vale 1 ¿cuánto vale el popote blanco?

Karla: Valdría 3

Investigador: Ok, ahora si el ancho del escritorio vale 1 ¿cuánto vale el popote blanco?

Karla: Sería 1/3

Investigador: ¿O sea que con dos blancos igualas el escritorio?

Karla: No, es que son dos y un cachito. ¿Puedo volver a medir?

Investigador: Si, si quieres

Karla: (Vuelve a medir el ancho del escritorio) Son 7/3

Investigador: Si, si el azul vale 1/3 y mides el escritorio tiene 7/3. Y luego te dije , si el azul vale 1, ¿cuánto vale el ancho del escritorio?

Karla: Vale 7

Investigador: Si el azul es 1 ¿Cuánto vale el blanco?

Karla: Tres

Investigador: Ok ahora, lo que te estoy preguntando es si el escritorio vale 1 ¿Cuánto vale el blanco?

Karla: (Piensa durante unos dos minutos) Sería 1/3

Investigador: ¿O sea que si repito el blanco 3 veces igualo el escritorio?

Karla: No, porque te pasas un cachito

Investigador: Ok, va otra vez si el azul vale 1/3 ¿cuánto vale el escritorio?

Karla: Sería 7/3

Investigador: Si el azul vale 1 ¿Cuánto vale el escritorio?

Karla: Siete

Investigador: Si el azul vale 1 ¿Cuánto vale el blanco?

Karla: Tres

Investigador: Ahora si el escritorio vale 1 ¿cuánto vale el blanco?

Karla: ¿Dos? ¿Tres?

Investigador: ¿O sea que el blanco equivale a 3 escritorios?

Karla: Sería 1/3

Investigador: ¿O sea que necesito 3 blancos para igualar el escritorio?

Karla: No, (Piensa unos momentos) ¿Sería 2/3?

Investigador: Pero si el blanco mide 2/3 del escritorio llegaría hasta acá (Señala los 2/3 del ancho del escritorio?

Karla: (Piensa durante unos dos minutos)

Investigador: Va otra vez, si el azul vale 1 ¿Cuánto vale el escritorio?

Karla: Es que eso si ya lo sé, serían 7

Investigador: ¿Y cuánto valdría el blanco?

Karla: Serían 3

Investigador: Ahora si el escritorio vale 1 ¿qué fracción es el popote blanco?

Karla: ¿Serían 3/7?

Investigador: ¿Tu crees? ¿Por qué? Explícate

Karla: Es que son 7 cachitos y por eso son 3/7

Investigador: Define cachito

Karla: O sea, los azules son 7/3 y cada azul es 1/3 de escritorio

Investigador: ¿O sea que con tres azules igualo el escritorio?

Karla.: Si, no, aaay, no sé

Investigador: ¿Qué fracción es el azul del escritorio?

Karla: Sería 1/7 del escritorio

Investigador: Ajá,

Karla: Si, y entonces el azul se repite 7 veces en el blanco

Investigador: ¿Estas segura?

Karla: Pues no, por que son 3 veces

Investigador: Ok, a ver tienes que el azul es 1/7 del escritorio y sólo estamos hablando de un solo popote blanco comparado con el escritorio

Karla: Es que el escritorio son 7 azules y el blanco son 3/7 de escritorio

Investigador: Lo que pasa es que no veo como se articula todo

Karla: Pues es que el popote blanco se repite 3 veces en el escritorio

Investigador: Entonces no, porque el blanco no se repite 3 veces en el escritorio

Karla: ¿Pero sí son 3/7? ¿ No?

Investigador: Si pero no se trata de que le des vuelta al número y ya, tienes que explicar cómo llegaste al número

Karla: (Piensa unos momentos) Es que la verdad ya no sé cómo decirlo

Investigador: Fíjate, tú dijiste que si el escritorio vale 1 el blanco vale 3/7 y también has dicho que necesitas 7 azules para igualar el escritorio ¿Entonces qué tiene que ver una cosa con la otra?

Karla: Pues también que el azul es parte del blanco

Investigador: Ok, pero a ver, si dices que el blanco son 3/7 del escritorio ¿Qué tiene que ver con el azul?

Karla: Pues que azul son 7/3

Investigador: ¿De qué?

Karla: De escritorio

Investigador: ¿O sea que el azul es más de dos escritorios juntos?

Karla: Aaaaash ¡ya me doy por vencida!

Investigador: No, tu tranquila. Fíjate me has dicho varias cosas interesantes. Me has dicho que el blanco es 3/7 del escritorio, que son necesarios 3 azules para igualar un popote blanco, y que son necesarios 7 azules para igualar un escritorio. Entonces ¿qué tiene que ver todo eso con que el blanco mida 3/7?

Karla: Pues que cada popote azul es 1/7

Investigador: ¿De qué?

Karla: De popote azul

Investigador: ¿un popote azul es igual a 1/7 de popote azul?

Karla: No es 1/3

Investigador: ¿Un popote azul es igual a 1/3 de popote azul?

Karla: No, un azul es 1/7 de escritorio

Investigador: ajá ¿y por qué?

Karla: Porque tengo 7 en el escritorio. Entonces cuando el azul vale 1/3

Investigador: ¿Vale 1/3?

Karla: No, vale 1, ¿o vale 1/3?, es que son 7 en el escritorio

Investigador: Entonces ¿Cuánto vale?

Karla: Aaaaash, ¡ya lo había dicho!

Investigador: ¿Cuánto es el azul?

Karla: 1/7

Investigador: ¿Pero de qué?

Karla: De escritorio

Investigador: ¿Y ahora?

Karla: ¿El blanco vale 3?

Investigador: ¿Necesitas exactamente 3 blancos para igualar el escritorio?

Karla: No, pero ¿son 3/7?

Investigador: No lo sé,

Karla: Pero son 7 cachitos azules en el escritorio

Investigador: Ajá,

Karla: Si, y entonces se supone que el blanco se repite 3 veces en el escritorio

Investigador: ¿O sea que caben exactamente 3 blancos en el escritorio?

Karla: Entonces el escritorio en el blanco

Investigador: ¿El escritorio se repite 3 veces en el blanco?

Karla: Ya no sé

Investigador: A ver, has dicho varias cosas interesantes. El azul es 1/7 del escritorio cuando el escritorio vale 1. Ahora ¿cómo lo relaciono con el popote blanco?

Karla: Pues es que queda igual

Investigador: Si el escritorio vale 1 ¿Cuánto vale el popote blanco?

Karla: (Piensa durante 1 minuto) ¿3/7?

Investigador: Ajá, pero por qué

Karla: Porque el escritorio vale 1 pero lo tengo que partir en 7, y entonces el azul es 1/7 de escritorio, y el blanco vale 3/7 de escritorio

Investigador: ¿Por qué?

Karla: Porque el blanco se repite casi 3 veces en el escritorio

Investigador: Pero no te estoy pidiendo que demuestres que el escritorio mide 7/3 de blanco tienes que demostrar que el blanco son 3/7 de escritorio

Karla: ¿Ahí es donde se podría utilizar el popote azul?

Investigador: No lo sé, no sé que estés pensando

Karla. Aaaaaaaah, ya

Investigador: Ok, a ver dime

Karla: Porque el azul es 1/7 de escritorio y se repite 3 veces en el popote blanco

Investigador: ¿Y entonces?

Karla: El blanco son 3/7 de escritorio

A.2.4.5 Comentarios y Conjeturas

Las entrevistas de esta sección (A.2.4) parecen ofrecer más evidencia que respalda la conjetura de que los estudiantes no necesitaban explorar conceptos como la medición, entendida como la comparación de las longitudes, pues ninguno de estos estudiantes tuvo problemas para elegir una combinación de popotes que se acercara lo más posible al ancho del escritorio. Incluso alumnos como Jaime y Elena, que tuvieron diferentes problemas en la entrevista, no enfrentaron mayor problema en reconocer que cuanto más pequeño era el popote elegido para medir el ancho del escritorio, era mas precisa la medición del mismo.

De esta forma parece nuevamente que hay evidencia que muestra que el punto de partida de los estudiantes son las relaciones recíprocas entre una unidad predefinida y una fracción unitaria, pues no era necesario investigar “más atrás”, y sin embargo, como puede apreciarse, dicho punto de partida sirvió para que, a diferentes ritmos, los alumnos pudieran comparar dos objetos no conmensurables a través de un escalar entero.

Por supuesto, como puede verse en las entrevistas, comparar dos longitudes no directamente conmensurables, resultó ser todo un reto incluso para algunos alumnos de las primeras secciones. Parece que los estudiantes enfrentaban los siguientes retos:

a) Ser flexibles en el tipo de unidad de medida a utilizar. Puede apreciarse que a pesar de que varios jóvenes sabían que no había una relación recíproca expresable a través de un número entero entre el ancho del escritorio y el popote blanco, seguían intentando medir ancho del escritorio con el popote blanco y sugerían varias veces en la entrevista que el popote blanco equivalía a 1/ 2 o a 1/3 del ancho de escritorio. Parecían que no tomaban en cuenta cuánto medía el ancho de escritorio en términos de popotes de otros colores con el fin de definirlos como unidades fraccionarias que sirvieran como unidades de medición. Así pues, para casi la totalidad de los jóvenes, la única medida que tomaban en cuenta es la que al final el proporcionara un número entero. Muy pocos consideraron la posibilidad de que una unidad fraccionaria también pudiera utilizarse como unidad de medición
b) Reconocer la presencia de un conmensurador común. En las entrevistas puede apreciarse que todos los jóvenes reconocieron la relación reciproca expresable a través de un número entero entre el ancho del escritorio y digamos, el popote morado. También reconocían el mismo tipo de relación recíproca entre el popote blanco y el morado. Pero casi a todos les tomó mucho tiempo darse cuenta que el popote morado que la relación recíproca entre el morado y los dos objetos anteriores, podía aprovecharse para compararlos a través de una fracción.
c) Expresar en términos de qué unidad de medida estaba definiéndose una fracción. En otras palabras era frecuente escuchar expresiones como “el escritorio vale 15/6”, pero frecuentemente era necesario aclarar con respecto a qué objetos se definía la fracción.

En síntesis, puede decirse que varios alumnos les fue difícil pasar de la relación recíproca expresable a través de un número entero entre dos longitudes , a una relación recíproca expresable por medio de una fracción. Para ello fue muchas veces necesario, hacer explícita la relación recíproca expresable a través de un entero entre la longitud del objeto “grande” (ancho escritorio) y la del conmensurador común (popote morado). Pero ello no implicaba que los alumnos recordaran la relación recíproca expresable a través de un entero, entre el conmensurador común (popote morado) y el objeto “pequeño” (popote blanco). Incluso varias de las entrevistas los alumnos seguían intentando durante varios minutos un número entero que les permitiera comparar de forma exacta el popote blanco con el ancho de escritorio.

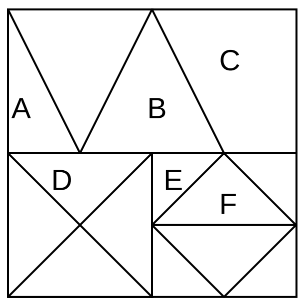
A.2.5 Concepción individual de las relaciones multiplicativas utilizando magnitudes bidimensionales.

A.2.5.1 Entrevistas con los alumnos de la primera sección de Administración

Entrevista con Carolina

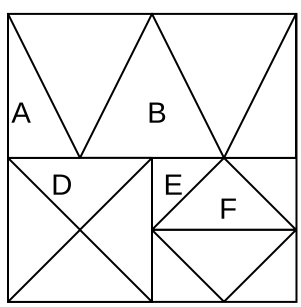
Investigador: Tienes aquí los triángulos con letras y además tienes dos cuadrados. Ahora si todo el cuadro vale 1 (Ver figura A.1) ¿Cuánto vale C?

Figura A.1 Entrevista con Carolina I



Carolina: (Juega tres minutos con los triángulos móviles, finalmente acomoda un triangulo similar al A como en la figura A.2) Vale 3/16

Figura A.2 Entrevista con Carolina II



Investigador: ¿Cómo lo supiste?

Carolina: Porque A cabe 3 veces en C y cabe 2 veces en B, entonces en la mitad de arriba tengo ocho A’s, y abajo tengo el mismo espacio entonces serían 16. Si C vale tres A’s , entonces vale 3/16

Investigador: Entonces A vale ¿Cuánto?

Carolina: Vale 1/16

Investigador: ¿B cuánto vale?

Carolina: 2/16 o sea 1/8

Investigador:¿Y cuánto vale C?

Carolina: 3/16

Investigador: ¿Cuánto vale D?

Carolina: (Piensa unos momentos) También vale 1/16

Investigador: ¿Por qué?

Carolina: (Señala al cuarto inferior izquierdo, ver figura A.1) Porqué aquí tengo una cuarta parte del entero, y D cabe cuatro veces, entonces en los otros cuartos también se repetiría 4 veces y serían 16 D’s en todo el cuadro

Investigador: ¿O sea que estás diciendo que D y A son iguales?

Carolina: En proporción al entero, sí

Investigador: ¿Pero en qué son diferentes?

Carolina: Digamos que están distribuidos de forma diferente

Investigador: ¿Cuánto vale F?

Carolina: (Juega unos momentos con F) Es igual a D, entonces es 1/16

Investigador: ¿Y cuanto vale E?

Carolina: Sería 1/64

Investigador: ¿O sea cabe 64 veces en el cuadro?

Carolina: Si porque en D, que quedamos que era 1/16, cabe dos veces E, o sea E es la mitad de D, y por eso necesito 2/32 para hacer 1/16

Investigador: ¿Entonces cuánto vale E?

Carolina: 1/32

Investigador: Entonces ahora suponiendo que el cuadro vale 64 ¿cuánto vale E?

Carolina: Serían 64 entre 32 (usa su calculadora) serían 2

Investigador: ¿Cuánto vale C?

Carolina: (Usa su calculadora) Serían 12

Investigador: ¿Por qué?

Carolina: Porque C vale 3/16 entonces se divide 64 entre 16 y se multiplica por 3, y te da 12

Investigador: Si el cuadro vale 26 ¿Cuánto vale B?

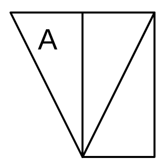
Carolina: Serían 32 porque quedamos que B era el doble de A, entonces si dividimos 256 entre 16 y luego multiplicamos por 2 te da 32

Entrevista con Marcela

Investigador: Bueno, entonces ahora tenemos aquí dos cuadros y los triángulos que son las fracciones de los cuadros. Suponiendo que todo el cuadro vale 1 ¿Cuánto valdría C?

Marcela: (Juega durante dos minutos con las figuras pero finalmente acomoda tres A’s en C como se puede ver en la figura A.3). Listo, vale 3 A’s, pero ¿cuánto vale A?

Figura A.3 Entrevista con Marcela I



Investigador: A ver, checa

Marcela: En la mitad de arriba tendríamos 8 A´s, y abajo también entonces son 16 A’s

Investigador: Entonces ¿Qué fracción es A del cuadro?

Marcela: Entonces A vale 1/16

Investigador: ¿Y cuanto vale C?

Marcela: 3/16

Investigador: ¿Cuánto valdría B?

Marcela: B son 2/16

Investigador: ¿Y eso a qué fracción equivale?

Marcela: A 1/8

Investigador: ¿D a qué fracción es igual?

Marcela: El cuadro tiene 4/4, entonces D cabe 4 veces en un cuarto entonces serían 16 D’s entonces D sería 1/16

Investigador: Entonces ¿Cómo son A y D entre sí?

Marcela: ¿Son equivalentes?

Investigador: ¿Cómo podrías estar segura de que son o no son equivalentes D y A?

Marcela: Pues por la forma que tienen

Investigador: ¿Entonces la forma es suficiente para decirte si son o no iguales?

Marcela: Pues sí, ambos pueden ser tomados como unidad de medida del cuadro

Investigador: ¿Cuántos A's hay en el cuadro?

Marcela: 16

Investigador: ¿Cuántos D's hay en el cuadro?

Marcela: También 16

Investigador: Entonces ¿son iguales?

Marcela: ¿Sí?

Investigador: ¿Por qué?

Marcela: Es que los dos caben 16 veces en el cuadro,

Investigador:¿Entonces son iguales?

Marcela: Iguales, iguales, no son, pero tienen el mismo contenido,

Investigador: ¿Cómo se llama el contenido de una figura?

Marcela: ¿El área?

Investigador: Ajá, ¿Entonces en que son diferentes y en qué son iguales?

Marcela: Tienen forma diferente pero son iguales en área

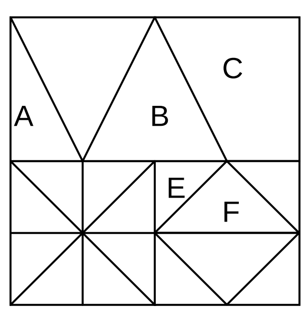
Investigador: F ¿qué fracción es de todo el cuadro?

Marcela: Es igual que D entonces es 1/16

Investigador: Y ahora E ¿qué fracción del cuadro sería?

Marcela: (Juega un poco con E y finalmente decide acomodarlos como se ve en el cuarto inferior izquierdo de la figura A.4) Pues E cabe ocho veces en un cuarto entonces cabría 32 veces en todo el cuadro, y entonces sería 1/32

Figura A.4 Entrevista con Marcela II



Investigador: Ahora si A vale 4, ¿cuánto vale todo el cuadro?

Marcela: Serían 4 por 16, son 64

Investigador: Si E valiera 3, ¿Cuánto vale todo el cuadro?

Marcela: Sería 3 por 32; (usa su calculadora) es 96

Investigador: Si todo el cuadro vale 128 ¿Cuánto vale A?

Marcela: 128 entre 16, (usa su calculadora) vale 8

Investigador: Si todo el cuadro vale 512, ¿cuánto vale E?

Marcela: 512 entre 32, (usa su calculadora) son 16

Entrevista con Marcos

Investigador: Bueno, aquí tenemos dos cuadros, y varios triángulos que son fracciones de los cuadros. Suponiendo que un cuadro vale 1, ¿Cuánto vale C?

Marcos: (Se mantiene callado durante un minuto pero con su pluma señala diferentes partes del cuadro. A veces murmulla y parece que esta contando)

Investigador: ¿Qué estas haciendo?

Marcos: Estoy sacando las diferentes proporciones del cuadro, D es 1/16, F también es 1/16, luego; E es 1/32, A valdría 1/8 de un 1/2 que vendría siendo 1/16, entonces si C es tres veces A, C vendría valiendo 3/16

Investigador: ¿Y cuánto sería B?

Marcos: 2/16

Investigador: Ok, y con todo lo que me dijiste ¿Dirías que A es igual a D?

Marcos: Físicamente, no, pero en relación al área que ocupan, sí

Investigador: Ok, ahora supón que el cuadro vale 64, ¿Cuánto valdría A?

Marcos: (Usa su calculadora) Valdría 4

Investigador: ¿Cuánto valdría E?

Marcos: Valdría 2

Investigador: Ok, y si D vale 3 ¿Cuánto vale C?

Marcos: 9

Investigador: ¿Cómo lo supiste?

Marcos: Porque D es igual a A, y C vale 3 A’s, entonces vale 9

Investigador: Ok, si el cuadro vale 256 ¿Cuánto vale A?

Marcos: (Usa su calculadora) A valdría 16

Investigador: ¿Y cuánto valdría C?

Marcos: (Usa su calculadora) Sería 48

A.2.5.2 Entrevistas con los alumnos de la segunda sección de Administración

Como comenté en la sección 7.3.2.5, no pude discutir este tipo de situaciones con Jaime, Jazmín y Rodrigo, pues el tiempo de entrevista no fue suficiente para llevarla a cabo. La entrevista con Nayeli se encuentra en la sección 7.3.2.5 en la página 187

Entrevista con Jethnael

Investigador: Aquí tienes dos cuadros y varios triángulos que son fracciones de esos cuadros. Ahora si decimos que todo el cuadro vale 1 ¿Cuánto valdría A?

Jethnael: (Toma A y comienza a acomodarlo en la mitad superior del cuadro) A es 1/16

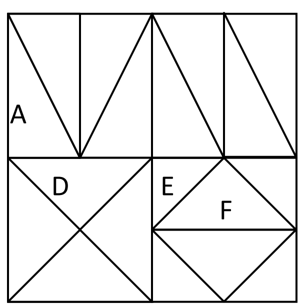
Investigador: ¿Puedes explicar un poco más?

Jethnael: Porque A puede entrar 8 veces en el medio de arriba y entonces también en el de abajo y en total son 16

Investigador: ¿Puedes mostrarme cómo fuiste acomodando A en la mitad superior?

Jethnael: Si, pues en cada triángulo grande serían 2 A's y en C serían tres (Ver figura A.5). Entonces arriba tienes 8 A's y abajo tendrías otros ocho

Figura A.5 Entrevista con Jethnael



Investigador: ¿Y cuánto valdría B?

Jethnael: 2/16

Investigador: ¿Hay otra fracción a la que sea equivalente?

Jethnael: (Piensa unos momentos) A 1/8

Investigador: ¿Cuántos triángulos B necesitarías para llenar todo el cuadro?

Jethnael: Ocho

Investigador: ¿Cuánto valdría D?

Jethnael: Sería 1/16

Investigador: ¿Cómo estas seguro?

Jethnael: (Señala el cuarto inferior izquierdo) Porque aquí hay cuatro D's y en los otros cuartos también habría 4 D's entonces 4 por 4 da 16

Investigador: Entonces ¿Qué es mas grande D o A?

Jethnael: No, pues es lo mismo

Investigador: ¿Y que es mas grande D o F?

Jethnael: Son iguales

Investigador: ¿Y cuanto vale E?

Jethnael: Pues la mitad de D

Investigador: ¿Y eso en fracciones cuanto es?

Jethnael: La mitad de 1/16, que es 1/32

Investigador: ¿Y si todo el cuadro valiera 32 cuánto valdría A?

Jethnael: Serían 2

Investigador: ¿Por qué?

Jethnael: Porque cada medio mide 16, luego cada cuarto mide 8, y cada cuarto tiene cuatro A's entonces valdría 2

Investigador: ¿Y cuánto valdría todo el cuadro si A valiera 5?

Jethnael: Serían 5 por 8, son 40 y luego por 2, serían 80

Investigador: ¿Puedes explicar un poco más?

Jethnael: Es que la mitad de arriba tiene 8 A's, entonces valdría 40 y la otra mitad también

Investigador: Si el cuadro valiera 48 ¿cuánto valdría D?

Jethnael: Sería 48 entre 16 son 3

Investigador: ¿Cuánto vale C si todo el cuadro vale 48?

Jethnael: (Juega unos momentos con D y C) Es que no se puede acomodar D en C

Investigador: Ok, ¿Cuánto vale A si todo el cuadro vale 48?

Jethnael: (Usa su calculadora) Serían 6

Investigador: Explícame por qué

Jethnael: Porque necesito 8 A's para cubrir la mitad del cuadro

Investigador: Pero yo te pregunté por todo el cuadro

Jethnael: Entonces serían 16 A’s

Investigador: ¿Y cuanto valdría A?

Jethnael: Serían 48 entre 16 son 3

Investigador: ¿Y cuanto valdría C?

Jethnael: Sería 9

Investigador: Si C vale 27 ¿cuánto vale todo el cuadro?

Jethnael: 162

Investigador: ¿Por qué?

Jethnael: Porque en C hay 3 cachos de A que vale 3, serían 6 y si lo multiplicamos por 27 por da 162

Investigador: A ver si A vale 3, ¿cuánto vale todo el cuadro?

Jethnael: Serían 18

Investigador: ¿Todo el cuadro vale 18?

Jethnael: Porque en todo el cuadro hay 16 A’s

Investigador: Pero A vale 3 ¿Entonces cuánto vale todo el cuadro?

Jethnael: 16 por 3 da 48

Investigador: ¿Y C cuánto valdría?

Jethnael: 9

Investigador: Ahora te estoy diciendo que C vale 27 ¿Cuánto valdría todo el cuadro?

Jethnael: (Piensa durante dos minutos) Serían 36

Investigador: ¿Por qué?

Jethnael. Por qué A vale 9 y se repite cuatro veces en todo el cuadro

Investigador: ¿O sea que con 4 A’s lleno todo el cuadro completo?

Jethnael: Ah, no

Investigador: La pregunta es si C vale 27 ¿cuánto vale todo el cuadro?

Jethnael: 27 por 3, da 81 y luego por 2, da 162

Investigador: ¿Por qué multiplicaste por 6?

Jethnael: No, primero por 3 y luego por 2

Investigador: Ok ¿Por qué por 2?

Jethnael: Porque serían dos mitades

Investigador: ¿Y dices que la mitad de arriba es 81? ¿Por qué?

Jethnael: Por que necesito 3 de A para hacer C

Investigador: ¿Ajá y entonces A vale 27? ¿A es Igual que C?

Jethnael: Ah, no, serían 27 entre 3 es 9, A es 9, y hay 8 A's en la mitad de arriba serían (usa su calculadora) serían 72, por 2 serían 144 por todo el cuadro

A.2.5.3 Entrevistas con los alumnos de la primera sección de Contaduría

Entrevista con Enrique

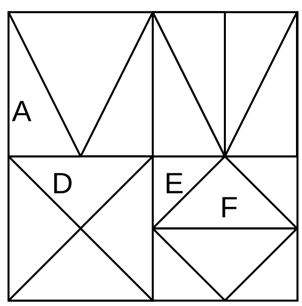
Investigador: Aquí tienes 2 cuadros y todos los triángulos que son fracciones de los cuadros entonces si decimos que un cuadro completo vale 1 ¿Cuánto vale C?

Enrique: (Observa el cuadro unos momentos) Valdría 3/16

Investigador: ¿Cómo explicarías ese valor?

Enrique: Es que el triangulo A cabe 3 veces en C, y se puede ver que habría entonces 4 A's en ese cuarto (el cuarto derecho superior, ver figura A.6) y entonces en cada cuarto habría 4 A's, y habría 16 A's en todo el cuadro, por eso A es 1/16 y C es 3/16

Figura A.6 Entrevista con Enrique



Investigador: ¿Cuánto vale B?

Enrique: 1/8

Investigador: ¿Por qué?

Enrique: Pues porque son 2 A's

Investigador: ¿Y cuanto vale D?

Enrique: 1/16

Investigador: ¿O sea que D es igual a A?

Enrique: Sí, o sea tienen la misma área

Investigador: ¿Cuánto vale F?

Enrique: Igual, vale lo mismo que D y A

Investigador: ¿Cuánto vale E?

Enrique: Supongo que es 1/32

Investigador: ¿Por qué?

Enrique: Porque es la mitad de F

Investigador: Si el cuadro vale 1/3 ¿Cuánto vale B?

Enrique: Sería 1/24

Investigador: ¿Por qué?

Enrique: Porque si antes necesitaba 8 B's para llenar el cuadro, ahora que el entero son 3 cuadros, necesitaría 24 B's

Investigador: ¿Cuánto valdría C?

Enrique: (Piensa unos momentos) Serían 3/48

Investigador: ¿Cómo lo explicas?

Enrique: Porque A es la mitad de B, entonces A es 1/48, y como C es tres veces A, C es 3/48

Investigador: ¿Cuánto valdría E?

Enrique: 1/96

Investigador: Si el cuadro ahora vale 96 ¿Cuánto vale A?

Enrique: (Usa su calculadora) Sería 6

Investigador: ¿Por qué?

Enrique: Divides 96 entre 16

Investigador: ¿Cuánto valdría C?

Enrique: 18

Investigador: ¿Cuánto vale E?

Enrique: Tres

Entrevista con Fabiola

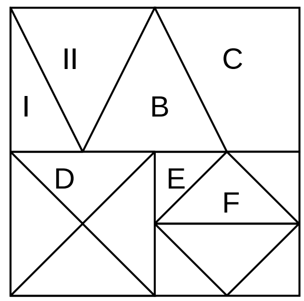
Investigador: Ok, aquí tienes dos cuadros y todos los triángulos que son fracciones de los cuadros. Entonces, si un cuadro valiera 1 ¿Cuánto valdría C?

Fabiola: Serían 2/5…. Mmmm… no espere,…. Sería 2/10

Investigador: ¿Por qué?

Fabiola: Porque la parte de arriba es un medio y C equivale a estos dos triángulos (ver I y II en la figura A.7) entonces en el medio de arriba hay 5 figuras pero abajo hay otras 5

Figura A.7 Entrevista con Fabiola I

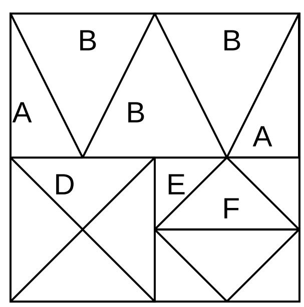


Fabiola: Aaaaah, no pero no, porque A y B no son iguales ¿Verdad?

Investigador: Exactamente

Fabiola: (Piensa durante unos dos minutos) Es que también podrías acomodar a A para que te quedaran 3 B's, seguidas y luego con las dos A's serían 4'A en la mitad de arriba (Ver Figura A.8). Pero luego de ahí no sé que hacer

Figura A.8 Entrevista con Fabiola II



Investigador: No te preocupes puedes seguir jugando con las figuras,

Fabiola: Pues ya viéndolo bien, C es A y B juntos, y A sería 1/16 y B sería 1/8 pero no sé cómo pueden sumarse 1/8 y 1/16

Investigador: ¿Se te ocurre otra alternativa para sumarlos?

Fabiola: Pues quizás si pongo todo en 1/16, ajá, así sí se podría porque como B son 2/16 y A es 1/16, C vale 3/16

Investigador: ¿Cuánto vale D?

Fabiola: También 1/16

Investigador: ¿Por qué? ¿Cómo lo demostrarías?

Fabiola: Porque en un cuarto (señala el cuarto inferior izquierdo) caben 4 D's, entonces en un medio serían 8 D's y en el cuadro serían 16 D's

Investigador: Ok, muy bien, ¿O sea que me estas diciendo que D es igual que A?

Fabiola: Bueno, no son iguales pero tienen la misma área

Investigador: Ok, bien, Y ¿cuánto vale F?

Fabiola: Es igual a D, es 1/16

Investigador: ¿y cuánto vale E?

Fabiola: Sería la mitad de D, que es entonces 1/32

Investigador: Ahora, vamos a decir que el cuadro vale 96 ¿Cuánto vale B?

Fabiola: (Usa su calculadora) Vale 12

Investigador: ¿Por qué?

Fabiola: Porque 1/2 de cuadro vale 48, y como en la mitad del cuadro tenemos 4 B's entonces 48 entre 4 te da 12

Investigador: Muy bien. ¿Cuánto valdría C?

Fabiola: ¿36?

Investigador: ¿O sea que C es el triple de B?

Fabiola: Ah, no, (Piensa unos momentos) C vale 18

Investigador: ¿Por qué? ¿Cómo te diste cuenta?

Fabiola: Porque A es la mitad de B entonces A valdría 6, y C son 3 A's entonces vale 18

Investigador: Si el cuadro vale 64 ¿Cuánto vale D?

Fabiola: (Usa su calculadora) ¿Vale 4?

Investigador: Ajá ¿por qué?

Fabiola: Porque 4 por 16 me da 64

Investigador: Si el cuadro vale 192, ¿cuánto vale C?

Fabiola: (Usa su calculadora) Sería 24

Investigador: ¿Cómo supiste?

Fabiola: Por que si divides 192 entre 8 te da el resultado

Investigador: ¿Pero C es un 1/8 del cuadro?

Fabiola: Ah, no, entonces divides 192 entre 16 que te da 12 y luego multiplicas por 3 y te daría 36 que es lo que vale C

Investigador: ¿Cuánto valdría E?

Fabiola: Sería la mitad de D, que sería 6

Investigador: ¿Por qué?

Fabiola: Porque A es 12, y D es igual a A

Entrevista con Omar.

Investigador: Entonces aquí tienes dos cuadros y además tienes varios triángulos que son fracciones de los cuadros, entonces si todo un cuadro vale 1 ¿Cuánto vale C?

Omar: Vale 1/14,

Investigador. ¿Por qué?

Omar: Porque si juntamos C y A hacen un cuarto de todo el cuadro pero como son 14 triángulos en todo el cuadro pues entonces C vale 1/14

Investigador: ¿O sea que lo que tu estas diciendo es que E y C son iguales y que los dos valen1/14 del cuadro?

Omar: Pues no son iguales pero los dos son 1/14 del cuadro

Investigador: ¿Pero cuál es la característica de las fracciones? Por ejemplo si te regreso al ancho del escritorio si yo pongo en el ancho una marca por acá (señala casi un extremo del escritorio) entonces podría decirse que estoy dividiendo el escritorio en dos partes, así que este pedazo minúsculo y este pedazote ¿los dos son mitades?

Omar: No, pues no

Investigador: Entonces ¿como deben ser las mitades entre sí?

Omar: Iguales

Investigador: Entonces, ¿Te parece que E y C los dos son 1/14 del cuadro?

Omar: Tampoco

Investigador: ¿Qué fracción es C entonces?

Omar: (Juega un poco con los triángulos) C sería 3/14 partes del entero

Investigador: Ok, pero ¿cuál sería el triángulo que vale 1/14?

Omar: Sería A

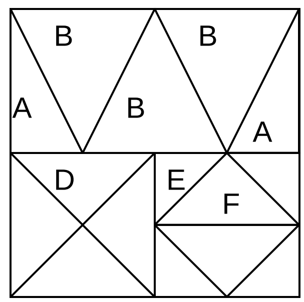
Investigador. ¿Y cómo demuestras que vale 1/14?

Omar: Es que tampoco porque no funciona, necesito una más chica para que pueda realmente ser 1/14

Investigador: ¿Pero como sabes que un triángulo de estos vale 1/14 del cuadro?

Omar: Porque entraría 14 veces en el cuadro (Juega durante tres minutos con los triángulos y finalmente toma el triángulo B y lo acomoda cómo en la figura A.9). Aquí arriba hay 4 B's porque quedan 3 B's seguidos y luego las mitades son otro triángulo B

Figura A.9 Entrevista con Omar I



Investigador: Entonces ¿qué fracción es B del cuadrado?

Omar: Sería 1/8, pero B no entra exactamente en C, necesita otro pedacito que podría ser A; Ajá, y entonces C mediría 1/8 y 1/4

Investigador. ¿ 1/8 y 1/4?

Omar: Si porque B vale 1/8 y A vale 1/4

Investigador: ¿O sea que si repito A cuatro veces llenaría todo el cuadro?

Omar: No, entonces A sería 1/16

Investigador: Ok, y entonces ¿cómo comprobarías que A es 1/16 del cuadro?

Omar. Porque sé que B es 1/8 del cuadro y sé que A es la mitad de B entonces tiene entrar 16 veces en el cuadro

Investigador: Ok. Muy bien. Entonces al final, ¿Cuánto vale C?

Omar: Pues A entraría 3 veces en C, entonces es 3/16

Investigador. Ok, y ¿Cuánto valdría D?

Omar: También 1/16

Investigador: ¿O sea que estas diciendo que D es igual a A?

Omar: No (Juega un poco con las figuras D's) Es que D también es 1/16

Investigador: Entonces A es 1/16 y B es 1/16. ¿Son iguales?

Omar: No, no son iguales pero las dos entran 16 veces

Investigador: Entonces, ¿son o no son iguales?

Omar: Es que es la forma en la que las acomodas porque las dos caben 16 veces en el cuadro pero entran distinto, o sea que es que son distintas en la forma pero son iguales en su medida

Investigador: ¿O sea que son igual de altas, de sus ángulos o de qué medida?

Omar: El espacio que ocupan, lo que cambio en la forma

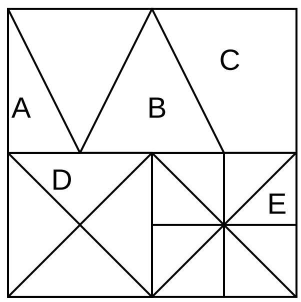
Investigador: ¿Cuánto vale F?

Omar: Es igual a D entonces es 1/16 también

Investigador: ¿Y cuánto vale E?

Omar: (Juega un poco con los triángulos iguales a E y finalmente los acomoda como en la figura A.10)

Figura A.10 Entrevista con Omar II



Omar: E sería 1/64

Investigador: ¿Seguro?

Omar: (Cuenta los triángulos E’s en el cuarto inferior derecho de la figura A.9), no, es 1/32

Investigador: Exacto. Ahora supongamos el cuadro vale 96 ¿Cuánto vale A?

Omar: (Usa su calculadora) ¿576?

Investigador: ¿O sea que A es mas grande que el cuadro?

Omar: (Usa su calculadora) Serían 1536

Investigador: Otra vez ¿A es más grande que el cuadro?

Omar: Pero eso es lo que da, porque divido 96 entre 1/16

Investigador: ¿Y porqué tienes que dividir entre 1/16?

Omar: Aaaaah, no, divido 96 entre 16, (usa su calculadora) Da 6

Investigador: ¿Cuánto vale C?

Omar: (usa su calculadora) 18

Investigador: ¿Cuánto vale B?

Omar (usa su calculadora) 12
Investigador: ¿Cuánto vale D?
Omar: (Usa su calculadora) seis
Investigador: ¿Cuánto vale E?
Omar: (usa su calculadora) tres
Investigador: Si el cuadro vale 192 ¿cuánto vale B?
Omar: (Usa su calculadora) 24
Investigador: ¿Cuánto vale C?
Omar: (Usa su calculadora) 12
Investigador: ¿O sea que C es mas chico que B?
Omar: (usa su calculadora) A 36
Investigador: ¿Qué hiciste para obtener C?
Omar: Dividí lo que valía B entre 2, y luego lo multiplique por 3
Investigador: ¿Cuánto valdría A?
Omar: (Usa su calculadora) Sería 12
Investigador: ¿Cuánto valdría E?
Omar: Seis

A.2.5.4 Entrevistas con los alumnos de la segunda sección de Contaduría

No fue posible realizar este tipo de entrevistas con Elena, Genaro y Karla debido a que el tiempo de la entrevista no fue suficiente.

A.2.5.5 Comentarios y conjeturas

En las entrevistas puede apreciarse que varios alumnos que podían establecer una relación reciproca entre dos diferentes objetos unidimensionales (popotes) pudieron establecer casi sin problemas el tipo de fracción unitaria que determinados triángulos representaban con respecto a la unidad predefinida, en este caso el cuadrado completo. De hecho varios estudiantes, antes de poder medir figuras irregulares como el trapezoide C, elegían una fracción unitaria del cuadro generalmente A para poder llevar a cabo sus mediciones.

Por otro lado una vez que los alumnos definían la fracción unitaria que representaba un triángulo con respecto al cuadro, podían emplear tal relación para encontrar nuevos valores de los triángulos cuando se definía un valor del cuadro como un número entero mayor a uno. Esto sugiere que los alumnos comprendían que aunque el valor del cuadro se viese modificado, la relación que guardaba con la figura no cambiaba.

A.2.6 Concepción individual de las relaciones recíprocas entre las áreas de dos superficies cualquiera

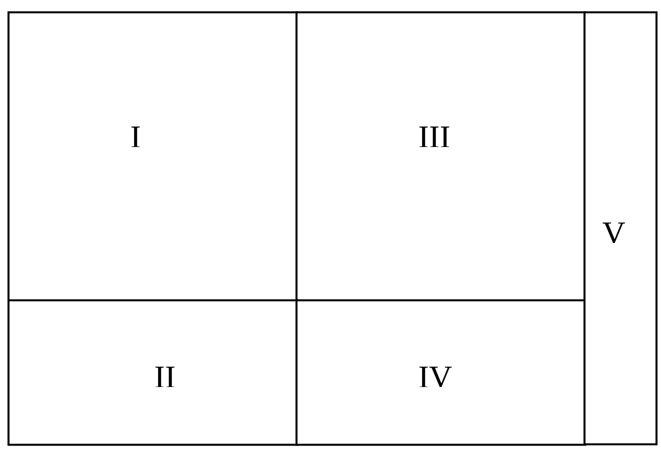
A.2.6.1 Entrevistas con la primera sección de Administración

Entrevista a Carolina

Investigador: Digamos que los cuadros valen 1 y vamos a medir la tapa de la computadora

Carolina: (Juega un poco con los cuadros completos y quedan como en la figura A.11)

Figura A.11 Entrevista con Carolina 1



Carolina: Es que no puede ser 1/3

Investigador: ¿Por qué no?

Carolina: (Ver Figura A.11) Porque aquí tenemos casi tres cuadros porque tenemos un cuadro completo (ver cuadro I) , y luego tenemos otro medio cuadro junto a el (ver rectángulo II), y luego se repite (III y IV) pero queda un espacio (V).

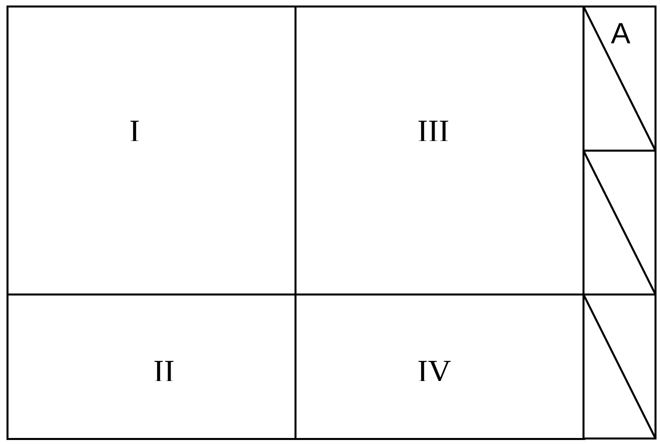
Investigador: ¿Y cómo harías para medir el espacio que te queda (V)?

Carolina: (Intenta cubrir el espacio (V) con una parte del cuadro completo) Según yo aquí es un cuarto completo entonces serían tres enteros tres octavos

Investigador: ¿Crees que otras figuras más pequeñas te servirían para medir ese espacio (V)?

Carolina: (Juega con las figuras A y las coloca en el espacio V como en la figura A.12)

Figura A.12 Entrevista con Carolina 2



Carolina: Entonces quedan 6 A's, y A era 1/16 entonces el espacio que me quedaba vale 6/16, que son 3/8

Investigador: Entonces ¿cuántos octavos son en toda la computadora?

Carolina: 8 por 3, son 24, y los 3 de aquí (V), serían 27/8

Investigador: Entonces si toda la computadora vale 1, ¿cuánto vale B?

Carolina: (Piensa unos momentos) Valdría 1/27

Investigador: ¿Porqué?

Carolina: Porque antes necesitabamos 27/8 para llenar la computadora y B es 1/8, entonces necesitaría 27 B's para llenar la computadora

Investigador: Muy bien, ¿Y si la computadora completa vale 1?¿Cuánto vale todo el cuadro?

Carolina: (Piensa durante dos minutos) Serían 8/27

Investigador: ¿Por qué?

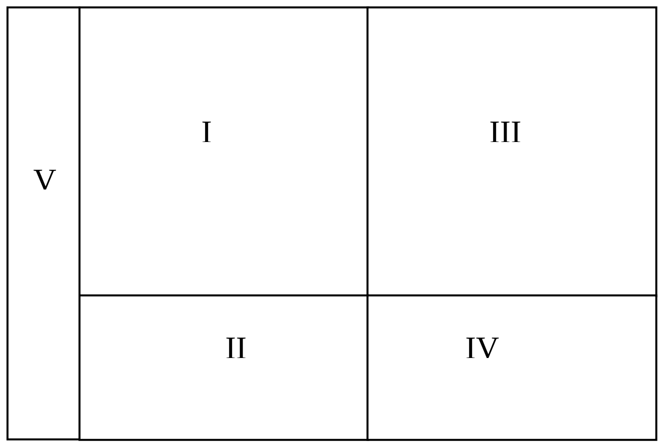
Carolina: Porque B se repite 8 veces en el cuadro y B es 1/27 de la computadora

Entrevista con Marcela

Investigador: Entonces ahora si suponemos que el cuadro completo vale 1, ¿cuánto mediría la tapa de la computadora? También puedes utilizar los triángulos que ves

Marcela: (Usa los cuadros completos y luego los coloca como se ve en la figura A.13) Podemos poner dos enteros juntos (Cuadros I y III) y luego aquí arriba, podemos suponer, no a ver, no de hecho aquí arriba cabe medio cuadro (IV) y luego al lado también entra otro medio (II), pero el problema es este espacio que me queda (V)

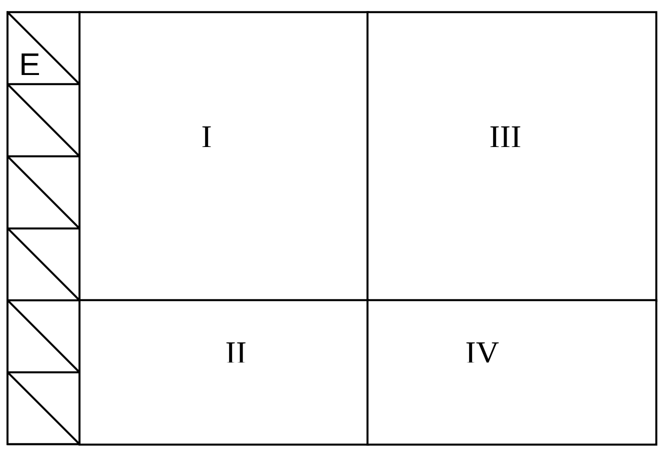
Figura A.13 Entrevista con Marcela 1



Investigador: Y entonces cómo podrías medir ese espacio (V)

Marcela: Podría tomar otros triángulos mas chiquitos como E (Los acomoda como en A.14)

Figura A.14 Entrevista con Marcela 2



Marcela: Entonces, serían 12 E's,

Investigador: Y en total ¿Cuánto sería de toda la computadora?

Marcela: Serían 3 enteros y 12/32

Investigador: ¿Y puedes reducirlo a una sola fracción?

Marcela: Serían 3 enteros y luego (hace operaciones en su cuaderno) y 3/8

Investigador: ¿Y cuántos octavos serían en total?

Marcela: Serían 27/8

Investigador: ¿Por qué?

Marcela: Porque habría 24/8 en los tres cuadros y 3/8 más serían 27/8

Investigador: Ok, Ahora, si la computadora vale 1 ¿Cuánto vale B?

Marcela: (Piensa unos momentos y pone B en el cuadro original) B sería 1/27

Investigador: ¿Puedes explicar más?

Marcela: Porque antes B era 1/8 del cuadro de papel y la computadora mide 27/8, entonces B es 1/27

Investigador: Muy bien, y entonces si la computadora vale 1 ¿cuánto vale el cuadro?

Marcela: Pues valdría 8/27

Investigador: Ok, ahora explícame

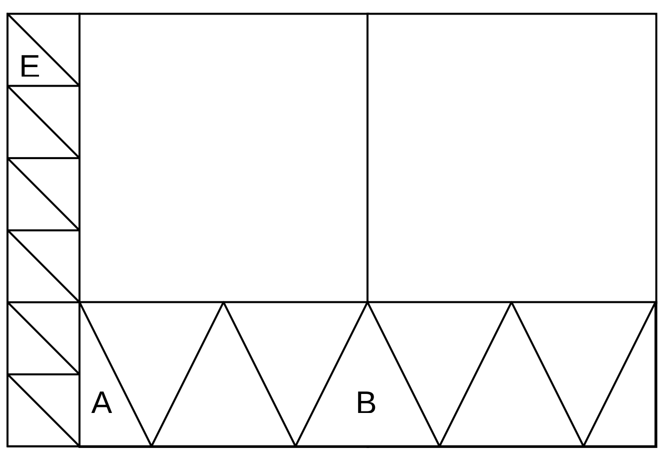
Marcela: Porque necesito 8 B's para llenar un cuadro, pero también 27 para llenar la computadora.

Entrevista con Marcos

Marcos: (Usa varios triángulos y al final la computadora queda como en A.15)

Investigador: Suponiendo que uno de estos cuadros completos vale 1, ¿Cuánto valdría la superficie de la computadora?

Figura A.15 Entrevista con Marcos



Marcos: (Ver la figura A.15) Entonces tenemos 2 enteros, pero tenemos 12 E's que serían 12/32, o 6/16, y luego tenemos 7 B's pero también 2 A's que dan una B,

Investigador: ¿Entonces cuántas B´s tienes en total?

Marcos: Pues tendría 8 B’s, entonces tendría 3 enteros y los 6/16 de las E’s

Investigador: ¿Y entonces cuantos 1/16 tienes?

Marcos: Voy, voy, voy, (Usa su calculadora) Serían 54/16 en total

Investigador: ¿Se puede simplificar todavía más?

Marcos: Serían 27/8

Investigador: ¿De qué?

Marcos: Del cuadro

Investigador: Entonces el cuadro ¿qué fracción sería de la computadora?

Marcos: El cuadro sería 8/27

Investigador: Ok, explica eso

Marcos: Porque en total tiene que haber 27/8 en toda la computadora, y quedamos que B era 1/8 del cuadro, y entonces 27 B’s cubren a toda la computadora, y ahora cuando la computadora vale 1, el cuadro vale 8/27 porque en el cuadro hay 8 B’s

Investigador: Entonces B ¿qué fracción es de la computadora?

Marcos: 1/27

Investigador: ¿Y del cuadro?

Marcos: 1/8

A.2.6.2 Entrevistas con la segunda sección de Administración

Como he comentado no pude llevar a cabo esta parte de la entrevista con Jaime, Jazmín, Rodrigo y Nayeli debido a que el tiempo no resultó suficiente

Entrevista con Jethnael

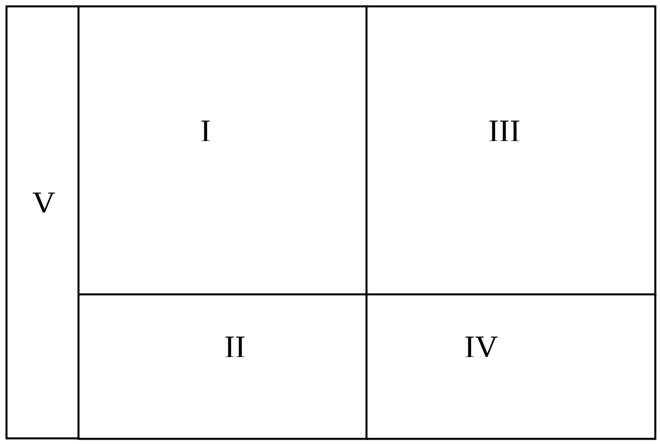
Esta entrevista se encuentra en la sección 7.3.2.6 en la página 192

Entrevista con Nayeli

Investigador: Ahora me gustaría que midiéramos cuánto vale el área de la tapa de la computadora, utilizando los cuadros y también los triángulos. Vamos a suponer que el blanco vale 1

Nayeli: (Comienza a jugar con los cuadros completos pero al final los coloca como se ve en la figura A.16)

Figura A.16 Entrevista con Nayeli 1

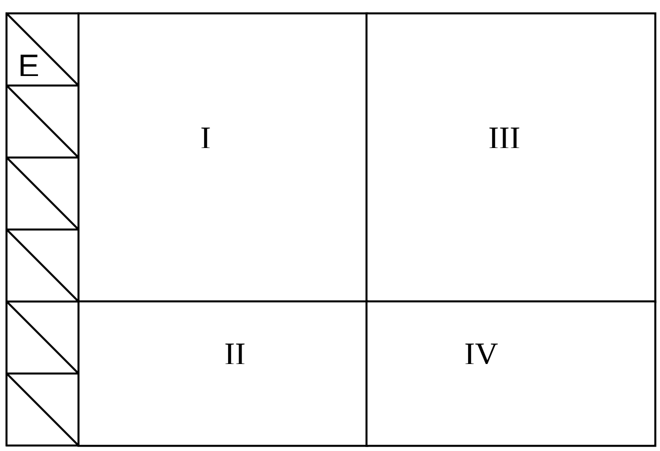


Nayeli: Entonces la computadora vale 3 cuadros por que aquí tenemos un cuadro (III) y luego arriba tenemos otro medio (IV) y de este lado tenemos lo mismo (I y II) entonces son tres cuadros en total

Investigador: Ok, pero si te fijas te sobra un espacio (V) ¿ese cuánto mides?

Nayeli: (Comienza a utilizar los triángulos E's como se ve en la figura A.17)

Figura A.17 Entrevista con Nayeli 2



Nayeli: Entonces tendríamos 3 enteros y 12 E's

Investigador: Ok, bien y ¿cuánto valía E?

Nayeli: Pues era 1/16

Investigador: ¿Estas segura?

Nayeli: Si

Investigador: ¿O sea que si repites el E 16 veces obtienes todo el cuadro?

Nayeli: (Comienza a iterar el E en el cuadro) Ah, no pues no, sería 1/32

Investigador: Entonces ¿qué fracción tienes?

Nayeli: Pues tengo 12/32

Investigador: y eso a ¿qué fracción se reduce?

Nayeli: a 6/16

Investigador: ¿Se puede reducir más todavía?

Nayeli: Serían 3/8

Investigador: Entonces ¿Cuántos octavos tendrías ya por toda la tapa?

Nayeli: Son 8 en cada entero son 24, y luego los otros 3, serían 27/8

Investigador: ¿De qué?

Nayeli: De cuadro

Investigador: Ok, si ahora toda la computadora vale una unidad ¿cuánto vale B?

Nayeli: (Piensa casi dos minutos) ¿Sería 1/27?

Investigador: Si, pero ¿cómo lo justificas?

Nayeli: Por que antes B era 1/8 y entonces son 27 B's en la computadora,

Investigador: Bien, muy bien, y ¿qué fracción es el cuadro de la computadora?

Nayeli: (Piensa un minuto) Son 8/27

Investigador: ¿Por qué?

Nayeli: Porque de todos los 27 B's que necesito para completar la computadora sólo hacen falta 8 para hacer el cuadro

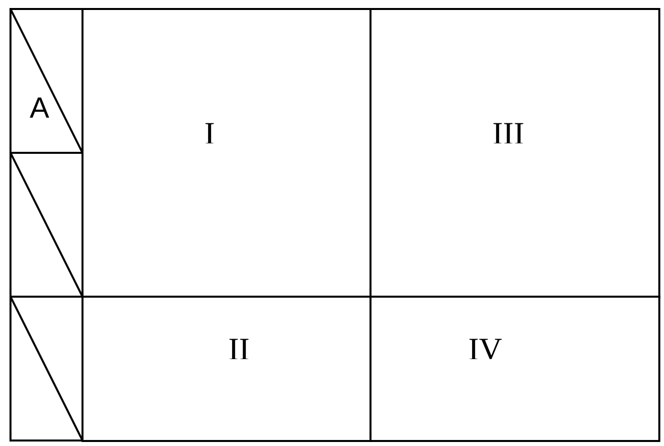
A.2.6.3 Entrevistas con la primera sección de Contaduría

Entrevista con Enrique

Investigador: Ok, ahora, tienes varios triángulos y los cuadros con los que me gustaría que midieras el área de la tapa de la computadora. Vamos a suponer que el blanco vale 1.

Enrique: (Juega con diferentes posiciones de los triángulos y cuadros pero al final los acomoda como puede apreciarse en la figura A.18)

Figura A.18 Entrevista con Enrique 1



Enrique: Entonces tengo tres cuadros en total y luego a un lado tengo 6/16

Investigador: ¿Puedes reducir la fracción?

Enrique: Serían 3/8

Investigador: Y entonces ¿cuántos octavos son en toda la computadora?

Enrique: Son 27/8

Investigador: ¿Por qué?

Enrique: Porque en tres enteros son 24/8 y luego los 3/8 son 27/8

Investigador: Ok ahora, si la computadora vale 1 ¿cuánto vale el cuadro?

Enrique: 8/27

Investigador ¿Por qué? ¿Cómo lo pensaste?

Enrique: Porque es como los popotes, si toda la computadora vale 27/8 tienes 27 pedazos de la computadora y cada pedazo ahora vale 1/27, y necesitas 8 de esos pedazos para hacer un cuadro

Investigador: ¿Y hay alguna figura que sea 1/27 de computadora?

Enrique: Sería B

Investigador: ¿Y qué fracción sería del cuadro?

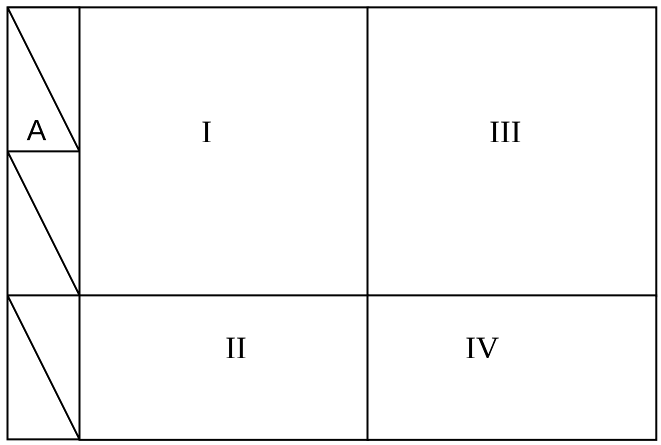
Enrique: 1/8

Entrevista con Fabiola

Investigador: Entonces ahora, tenemos aquí dos cuadros y varios triángulos, entonces me gustaría que midieras la tapa de la computadora con ellos. Y vamos a decir que el cuadro vale 1

Fabiola: (Juega un poco con los cuadros y los triángulos pero al final los acomoda como se muestra en la figura A.19)

Figura A.19 Entrevista con Fabiola 1



Fabiola: Serían 3 cuadros y 6/16

Investigador: ¿Se podrían reducir todavía esos 6/16?

Fabiola: Sí, sería 3/8

Investigador: ¿Cuántos octavos serían en total?

Fabiola: 27/8

Investigador: ¿Puedes decir un poco más de cómo llegaste a esa fracción?

Fabiola: Ajá, por que cada entero tiene 8/8 y como son tres son 24/8 y luego son los 3/8 de éste lado, son 27/8 en total

Investigador: Ahora si te digo que la computadora vale 1, ¿Cuánto vale el cuadro?

Fabiola: (Piensa unos momentos) ¿Serían 8/8?

Investigador: ¿O sea que el cuadro es igual a la computadora?

Fabiola: Ah, no por que ahora la computadora es 1 (Piensa durante un minuto) Entonces el cuadro vale 8/27 de computadora

Investigador: Si te pregunto ¿cuál de las figuras triangulares es 1/27 de computadora? ¿Qué dirías?

Fabiola: Pues sería A

Investigador: Pero A ¿qué fracción era del cuadro?

Fabiola: Era 1/16

Investigador: O sea que la computadora mide ¿27 A's?

Fabiola: No (Piensa unos momentos) Sería B,

Investigador: ¿Y por qué escogiste a B como 1/27 de la computadora?

Fabiola: Porque B era 1/8 del cuadro y se necesitan 27/8 para medir la computadora y entonces la inversa serían 8/27, o sea, B sería 1/27 de computadora

Investigador: ¿Y que fracción sería del cuadro?

Fabiola: 1/8

Investigador: Y entonces ¿cuántos 1/27 de computadora necesitas para hacer el cuadro?

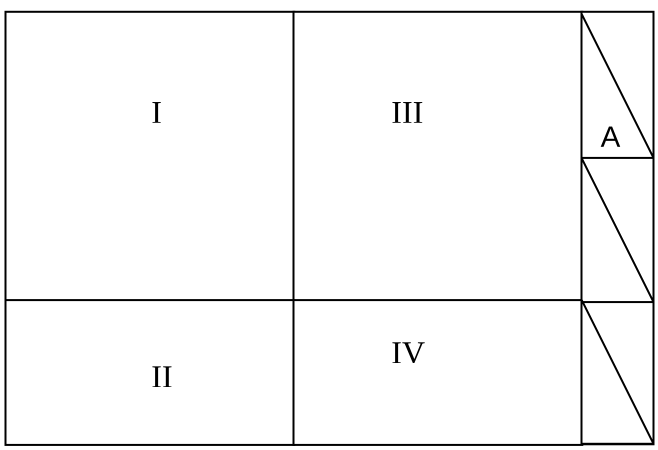
Fabiola: Ocho

Entrevista con Omar

Investigador: Entonces aquí tienes dos cuadros, y varios triángulos que son fracciones de los cuadros. Ahora, me gustaría que midieras la tapa de la computadora. Y vamos a definir al cuadro como la unidad

Omar: (Juega durante 3 minutos con los cuadrados y los triángulos pero al final los acomoda como lo muestra la figura A.20)

Figura A.20 Entrevista con Omar 1



Investigador: Entonces ¿cuánto midió la computadora?

Omar: Son 3 enteros y 3/8

Investigador: ¿Cómo supiste que eran 3 octavos?

Omar: Porque tengo 6 A's, y A era 1/16

Investigador: ¿Cuántos octavos tienes en total?

Omar: 24/8

Investigador: ¿Seguro? ¿Cuántos octavos hay en un entero?

Omar: Aaaaah, ya son tres enteros, entonces serían, 24, 25, 26, serían 27/8

Investigador: ¿De qué?

Omar: De cuadro

Investigador: Ok, ahora supongamos que la computadora es la unidad ¿Cuánto vale el cuadro?

Omar: Sería 8/27 partes

Investigador: ¿Cómo lo demuestras?

Omar: Es que necesitaría 1/27 de computadora

Investigador: ¿Cuál triángulo sería el 1/27 de computadora?

Omar: Sería el octavo de cuadro

Investigador. ¿Y cuál tríángulo sería?

Omar: El B es 1/8

Investigador: ¿De qué?

Omar: De cuadro

Investigador: Y de la computadora ¿qué fracción es B?

Omar: 1/27, o sea necesito 27 B's para llenar la computadora

Investigador: ¿Y cuantos necesitas para igualar el cuadro

Omar: Ocho

Investigador: Entonces el cuadro ¿qué fracción sería de la computadora?

Omar: 8/27

A.2.6.4 Entrevistas con la segunda sección de Contaduría

Desafortunadamente no pude realizar esta parte de la entrevista con Elena, Genaro y Karla, pues el tiempo de la entrevista no fue suficiente

A.2.6.5 Comentarios y conjeturas

Puede apreciarse que ninguno de los alumnos entrevistados tuvo ya dificultades significativas para establecer cuánto medía un área grande (tapa de computadora) en relación a un área pequeña (cuadro de papel). Además los alumnos reconocieron una vez más que las fracciones más grandes sirven para abarcar más área, las fracciones más pequeñas servían para realizar mediciones mas precisas. Parece así, que para éstos alumnos, la medición tampoco era un problema incluso en situaciones bidimensionales.

También puede observarse que todos los alumnos pudieron reconocer rápidamente, que para medir el cuadro, usando la tapa de la computadora como unidad de referencia; era necesario utilizar un conmensurador común, el cual resultó ser el triángulo B. Incluso Omar, que tuvo serias dificultades para encontrar un comensurador común entre dos magnitudes cuya relación recíproca no era expresable a través de un número entero, en estas situaciones bidimensionales ya no mostró ningún problema importante

Por último, puede comentarse que los alumnos parecían comprender que dos fracciones son recíprocas porque representan un cambio en la unidad de referencia elegida, y por tanto un cambio en el valor del conmensurador común (Si B=1/8 de cuadro la tapa de la computadora vale 27/8, pero si B=1/27 de la tapa de la computadora entonces el cuadro vale 8/27 de tapa)

Anexo B: Series de preguntas y formato de entrevistas

En este anexo presento las diferentes series de preguntas, así como el formato básico de las entrevistas semiestructuradas que apliqué a los estudiantes desde el semestre agosto/diciembre de 2006 hasta enero/junio de 2009

B.1 Preguntas aplicadas en agosto/diciembre de 2006

1. Juan Carlos tiene \$90 000 en su cuenta de banco ¿qué cantidad de dinero equivale a

   a) la mitad (1/2)?

   b) la tercera parte (1/3)?

   c) las tres quintas partes (3/5)?

   d) cinco tercios (5/3)?

   e) Representa las cantidades anteriores usando la línea siguiente

2. Un albañil sólo puede llevarse a su área de trabajo un costal de cemento a la vez , así que quiere llevarse el costal que tiene mas cemento. El sabe que el costal de la marca Apasco tiene $\frac{4}{9}$ de cemento y que el de marca Cemex tiene $\frac{6}{13}$ de cemento ¿Cuál costal se llevará a su área de trabajo?

3. Durango tiene 20% de analfabetismo mientras que el DF tiene únicamente el 8% de analfabetos ¿qué entidad tiene mayor número de analfabetos?

4. Los antiguos indios chiapanecos utilizaban la palabra oticaimo para referirse a los medios, y la palabra eticaimo para referirse a los tercios. Además su medida de peso se llamaba ayatán. Para ellos un ayatán de cacao era equivalente a seis ayatanes de maíz. Xochiltl, una indígena chiapaneca había logrado juntar 180 ayatanes de maíz. Una amiga suya, Quetzali, había juntado 54 ayatanes de cacao. En esas circunstancias Quetzali ofreció un trato a Xochitl, Quetzali dijo “te cambio un oticamo de eticaimo de tu maíz por un eticaimo de eticaimo de mi cacao” ¿Qué decidió Xochitl? Explica por qué tomo esa decisión.

5. La cantidad neta que un trabajador lleva a su casa es de US\$492 a la quincena, después de haberle reducido un 40% del pago bruto. ¿Cuál es su sueldo bruto?

6. Una pareja no desea gastar más de $70 por cenar en un restaurante. A la cuenta por alimentos se agrega un impuesto del 6% y de este total piensan agregar 15% de propina ¿Cuánto es lo más que pueden gastar en alimentos?

7 El salario básico de un trabajador es de US$10 por hora, pero cuando trabaja más de 40 horas por semana, recibe vez y media este salario. Si su cheque en una semana es por US$595. ¿Cuántas horas de tiempo extra trabajó?

8. Un joven necesita 90 min para podar el césped, pero su hermana lo puede hacer en 60 min. ¿Cuánto tiempo tardarían los dos si trabajaran juntos con dos podadoras?

9. Una muchacha necesita 45 min para entregar los diarios de su ruta; sin embargo, si la ayuda su hermano sólo necesitan 20 min. ¿Cuánto tardaría el hermano en entregar los diarios él solo?

B.2 Preguntas utilizadas en las entrevistas semiestructuradas de agosto/diciembre de 2007

1. En enero de 2006 para poder comprar un dólar se necesitaban 10 pesos. En esos tiempos, si los ciudadanos estadounidenses querían comprar un Bora de VW ensamblado en su país hubiesen tenido que pagar US$15 000. Por otro lado, este mismo auto ensamblado en México costaba Mex$ 150 000

a) Si el tipo de cambio hubiese pasado a 13 pesos por dólar

b) Si el tipo de cambio hubiese pasado a 8 pesos por dólar

2. Este año tus familiares han decidido iniciar un nuevo negocio y han adoptado un préstamo de $110 000, el cual acumula intereses. Después del primer mes la deuda acumulada era de $114 400. Por otro lado, compran ciertas acciones las cuales les proporcionan rendimientos que usarán para pagar la deuda anterior, de hecho ellos compraron $95 000 en acciones, y al siguiente mes ya tenían $101 650

a) ¿Cuál crece de manera más significativa los costos o los ingresos?
b) De mantenerse este crecimiento, ¿cuál sería la deuda y el ingreso del mes 3?
c) ¿En cuántos meses los recursos generados por las acciones podrán cubrir la deuda?
d) ¿Cómo calcular los ingresos y los costos en un mes cualquiera?

3. New Land Jeans es una marca que produce ropa de mezclilla en diversas regiones de México. En su planta de Nuevo Laredo durante junio de 2006 se fabricaron 25 331 pantalones y se emplearon a 347 trabajadoras maquiladoras. Luego en julio del mismo año se fabricaron 31 901 pantalones y se dio empleo a 437 trabajadoras

a) ¿En qué mes fueron mas productivas las empleadas de New Land Jeans?
b) ¿Cómo podría encontrarse cuantos pantalones producirían 237 empleadas?

4. Fernando ha estado pensado en trabajar como corredor de bolsa. Hay dos empresas que han ocupado su interés, ambas le ofrecen un sueldo base, pero no sabe cuanto puede ganar por comisiones extras.

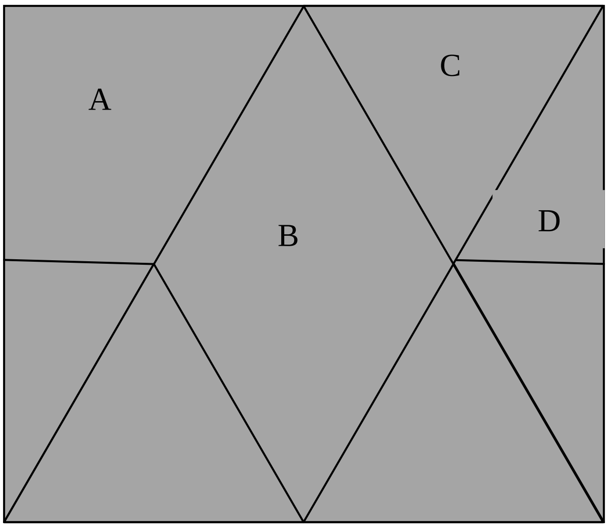
Su amigo Rodrigo, que trabaja en Merryl Lych le comenta que aunque cada mes gana cantidades diferentes por comisión, ha logrado ahorrar prácticamente todo lo que ha ganado en comisiones en los pasados 12 meses, lo cual es una suma de $200 400. Otro amigo, Arturo, quien trabaja en Smith Investors, le comenta que 20 meses él ha logrado ganar $320 000 en comisiones.

a) ¿Cómo piensas que Fernando podría usar esta información para decidir dónde trabajar?
b) ¿Cuánto tendría que haber ganado Fernando en Merryl Lynch para que fuera indiferente entre trabajar ahí o en Smith Investors?
c) ¿Cuánto tendría que haber Fernando en Smith Investors para que fuera indiferente a trabajar en Merryl Lynch?

B.3 Preguntas aplicadas en enero/junio de 2009

1. Utiliza las siguientes figuras para establecer el valor de las demás. Explica tu respuesta

a) Si se asume que todo el cuadro vale 1 ¿Cuánto valen A, B, C y D?
b) Si se asume que la figura D vale 1/3 ¿Cuánto valen C,B, A y todo el cuadro?
c) Si se asume que la figura C vale 3 ¿Cuánto valen A, B y D y todo el cuadro?
d) Si se asume que la figura B vale 4/7 ¿Cuánto valen A, C y D y todo el cuadro?



2. Durango tiene 20% de analfabetismo mientras que el DF tiene únicamente el 5% de analfabetos. ¿Qué entidad tiene mayor número de analfabetos?

3 En Julio de 2006 en México se llevaron a cabo las elecciones mas disputadas de toda su historia, la diferencia en el porcentaje de votación entre el candidato ganador y el segundo lugar fue de 0.5%

a) ¿Como podría representarse ese porcentaje con números decimales?
b) ¿cómo podría representarse ese porcentaje con fracciones? Explica tu respuesta
c) Proporciona otras dos fracciones equivalentes a la que encontraste en b)

4. Si son necesarios 5 euros para comprar 6 dólares, ¿a cuantos dólares equivale un euro? ¿a cuantos euros equivale un dólar? Expresa tus resultados en forma de fracciones. Explica tu respuesta y dibuja tus resultados

5. ¿Qué cantidad es cuatro veces cinco sextos? Expresa tus resultados en forma de fracciones. Explica tu respuesta y dibuja tus resultados

6. Carlos tiene hoy $47600 en el banco, el sabe que dentro de un año el tendrá 9/7 partes de lo que hoy tiene, ¿Cuánto dinero tendrá? Expresa tus resultados en forma de fracciones. Explica tu respuesta y dibuja tus resultados

7. ¿Por qué factor debe multiplicarse 5 para obtener 7? ¿Por qué factor debe multiplicarse 7 para obtener 5? Expresa tus resultados en forma de fracciones. Explica tu respuesta y dibuja tus resultados

8 En enero de 2006 para poder comprar un dólar se necesitaban 10 pesos. En esos tiempos, si los ciudadanos estadounidenses querían comprar un Bora de VW ensamblado en su país hubiesen tenido que pagar US$15 000. Por otro lado, este mismo auto ensamblado en México costaba Mex$ 150 000

a) Si el tipo de cambio hubiese pasado a 13 pesos por dólar

¿A cuantos dólares equivaldría un peso? ¿Dónde hubieran comprado el auto los mexicanos? ¿Dónde lo hubieran comprado los estadounidenses? Muestra tus razonamientos

b) Si el tipo de cambio hubiese pasado a 8 pesos por dólar

¿A cuantos dólares equivaldría un peso? ¿¿Dónde hubieran comprado el auto los mexicanos? ¿Dónde lo hubieran comprado los estadounidenses? Muestra tus razonamientos

9. Mónica tenía $54 468 hace dos años depositados en el banco, hace un año tenía $57 191.4 y este año tiene $60 050.97 ¿en qué porcentaje ha estado creciendo el monto de sus depósitos? ¿Cuánto dinero tendrá el año que viene? ¿cuánto dinero tendrá dentro de dos años? Expresa tus resultados en forma de fracciones. Explica tu respuesta y dibuja tus resultados

10. Actualmente Claudia tiene $348 327 sabe que esta cantidad equivale a 112/100 de la cantidad que tenía hace un año, ¿qué cantidad tenía originalmente? Expresa tus resultados en forma de fracciones. Explica tu respuesta y dibuja tus resultados

B.4 Formato general de las evaluaciones de desempeño grupal del semestre agosto/diciembre de 2009

1. Pedir a los alumnos que comparen el popote blanco con los popotes de colores y establezcan a qué fracción unitaria corresponde cada popote de color

2. Pedir a los alumnos que den al popote blanco un valor equivalente a un número entero y luego establezcan el valor de otros popotes de colores. Él valor del popote de color deberá ser una fracción unitaria del valor del popote blanco. En otras palabras utilizar la expresión multiplicativa

$$b = (1/k) \bullet a \text{ con } a, b, k \text{ enteros}$$

De ser necesario regresar a la expresión multiplicativa

$$b \bullet k = a \text{ con } a, b, k \text{ enteros}$$

3. Pedir a los alumnos que midan diferentes objetos del salón empleando los popotes de colores, y que expresen su medición como una fracción del popote blanco

4. Pedir a los alumnos que expresen la relación recíproca entre el popote blanco y determinado objeto del salón

B.5 Formato general de las entrevistas semiestructuradas del semestre enero/junio de 2009

1. Pedir a los alumnos que comparen el popote blanco con los popotes de colores y establezcan a qué fracción unitaria corresponde cada popote de color

2. Pedir a los alumnos que den al popote blanco un valor equivalente a un número entero y luego establezcan el valor de otros popotes de colores. Él valor del popote de color deberá ser una fracción unitaria del valor del popote blanco. En otras palabras utilizar la expresión multiplicativa

$$b = (1/k) \bullet a \quad \text{con } a, b, k \text{ enteros}$$

De ser necesario regresar a la expresión multiplicativa

$$b \bullet k = a \quad \text{con } a, b, k \text{ enteros}$$

3. Pedir a los alumnos que den al popote blanco un valor equivalente a un fracción unitaria y luego establezcan el valor de otros popotes de colores. Él valor del popote de color deberá ser una fracción unitaria del valor del popote blanco. En otras palabras utilizar la expresión multiplicativa

$$a = (1/k) \bullet b \quad \text{con } a, b, \text{ fracciones unitarias, } k \text{ entero}$$

De ser necesario regresar la expresión multiplicativa

$$b \bullet k = a \quad \text{con } a, b, k \text{ enteros}$$

4. Pedir a los alumnos que midan el ancho del escritorio empleando los popotes de colores, y que expresen su medición como una fracción del popote blanco

5. Pedir a los alumnos que expresen la relación recíproca entre el popote blanco y el ancho del escritorio,

6. Pedir a los alumnos que establezcan a qué tipo de fracción corresponde el valor de cada uno de los diferentes triángulos que componen a un cuadrado cuyo valor es 1

7. Pedir a los alumnos que midan la superficie de una lap top utilizando los triángulos y cuadrados de la pregunta anterior

8. Pedir a los alumnos que establezcan la relación recíproca entre el cuadrado y la superficie de una lap top.

Anexo C: Situaciones discutidas en las evaluaciones de desempeño grupal en enero/junio de 2009

En este anexo presento algunas de las preguntas que se discutieron durante las evaluaciones de desempeño grupal, en el semestre de enero/junio de 2009. Como se recordará del capítulo 8, el propósito de estas sesiones era simplemente revisar si los estudiantes podían aprovechar el punto de partida para desarrollar conceptualizaciones más complejas. Además, tales evaluaciones de desempeño tenían como propósito reunir evidencia que sirviera generar una primera versión de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje, que pudiera emplearse en futuras investigaciones.

C.1 Aplicaciones de la relación recíproca entre una unidad predefinida y una fracción unitaria

Si son necesarias 7 rupías para comprar un marevedís¿a cuantos marevedís equivale una rupía? ¿a cuantas rupias equivale un marevedís? Dibuja tus resultados

Si son necesarios 270 yenes para comprar 3 dólares ¿a cuantos yenes equivale un dólar? ¿a cuantos dólares equivale un yen? Dibuja tus resultados

Si son necesarios 65 pesos para comprar 5 dólares? ¿a cuantos dólares equivale un peso? ¿a cuantos pesos equivale un dólar? Dibuja tus resultados

Si son necesarios 5 euros para comprar 6 dólares, ¿a cuantos dólares equivale un euro? ¿a cuantos euros equivale un dólar? Dibuja tus resultados

C.2 Segunda Etapa

C.2.1 Etapa A, relaciones del tipo $k \bullet b = a$ con b,a enteros k fracción

¿Qué cantidad es tres veces tres medios?

¿Qué cantidad es cuatro veces cinco sextos?

¿Qué cantidad es cinco veces ocho séptimos?

¿Cuál es la mitad de 3?

¿Cuál es la cuarta parte de 7?

¿Qué cantidad equivale a 2/5 de 4?

¿Qué cantidad equivale a 13/7 de 3?

Carlos tiene hoy $47600 en el banco, el sabe que dentro de un año el tendrá 9/7 partes de lo que hoy tiene, ¿Cuánto dinero tendrá?

Ricardo tiene hoy $161 460 en el banco, el sabe que debido a los retiros que efectuará durante este año, en 2010 el tendrá 5/9 partes de lo qué hoy tiene ¿Cuánto dinero tendrá?

C.2.2 Etapas B y C, relaciones del tipo $\frac{a}{b}=k$, $\frac{b}{a}=\frac{1}{k}$ con *b,a* enteros *k* fracción

¿Por qué factor multiplico 3 para obtener 4?

¿Por qué factor multiplico 4 para obtener 3?

¿Por qué factor multiplico 5 para obtener 7?

¿Por qué factor multiplico 7 para obtener 5?

¿Por qué factor multiplico 6 para obtener 11?

¿Por qué factor multiplico 11 para obtener 6?

¿Por qué factor multiplico 63 para obtener 81?

¿Por qué factor multiplico 81 para obtener 63?

C.2.3 Etapa D, relaciones del tipo $\frac{1}{k} \bullet a = b$ con *b,a* enteros *k* fracción

Thalia actualmente tiene $369 376 pesos en el banco, ella sabe que esa cantidad corresponde a 11/8 de lo que tenía hace un año, ¿qué cantidad tenía en ese entonces?

Erika tiene actualmente $330 176, ella sabe que esta cantidad corresponde a 7/5 de lo que tenía hace un año, ¿qué cantidad tenía en ese entonces?

Rodrigo tiene actualmente $331 968, el sabe que esta cantidad corresponde a 13/9 de lo que tenía hace un año, ¿qué cantidad tenía en aquel entonces?

C.3 Tercera Etapa

C.3.1 Etapa A, relaciones del tipo $k \bullet b = a$ con b, a, k fracciones

¿Cuál es la cuarta parte de 3/2?

¿Cuál es la tercera parte 4/7?

¿Qué cantidad equivale a 11/7 de 7/8?

¿Qué cantidad equivale a 9/4 de 4/13?

¿Qué cantidad equivale a 5/4 de 3/2?

¿Qué cantidad equivale a 7/5 parte de 5/6?

¿Qué cantidad equivale a 13/5 de 3/2?

¿Qué cantidad equivale a 11/7 de 1/2?

C.3.2 Etapas B y C, relaciones del tipo $\frac{a}{b}=k$, $\frac{b}{a}=\frac{1}{k}$ con b, a, k fracciones

¿Por qué factor multiplico 5/8 para obtener 10/8?

¿Por qué factor multiplico 10/8 para obtener 5/8?

¿Por qué factor multiplico 4/7 para obtener 9/7?

¿Por qué factor multiplico 9/7 para obtener 4/7?

¿Por qué factor multiplico 5/8 para obtener 9/7?

¿Por qué factor multiplico 9/7 para obtener 5/8?

¿Por qué factor multiplico 11/9 para obtener 14/8?

¿Por qué factor multiplico 14/8 para obtener 11/9?

C.3.3 Etapa D, Relaciones del tipo $\frac{1}{k} \bullet a=b$ con b, a, k fracciones

Actualmente Javier tiene 33/4 de libras esterlinas, él sabe que esta cantidad equivale a 11/3 de la cantidad que tenía hace un año ¿qué cantidad tenía originalmente?

Actualmente Silvia tiene 81/4 de dólar ella sabe que esta cantidad equivale a 27/8 de la cantidad que tenía hace un año, ¿qué cantidad tenía originalmente?

Actualmente Tania tiene 27/4 de libras esterlinas ella sabe que esta cantidad equivale a 9/5 de la cantidad que tenía hace un año, ¿qué cantidad tenía originalmente?

Actualmente Deyanira tiene 63/4 de libra esterlina ella sabe que esta cantidad equivale a 7/5 de la cantidad que tenía hace un año, ¿qué cantidad tenía originalmente?

Actualmente Leonardo tiene 270/4 de dólar él sabe que esta cantidad equivale a 18/7 de la cantidad que tenía hace un año, ¿qué cantidad tenía originalmente?

Actualmente Roman tiene 837/4 de libra esterlina él sabe que esta cantidad equivale a 31/11 de la cantidad que tenía hace un año, ¿qué cantidad tenía originalmente?

Actualmente Maria tiene 1197/4 de libra esterlina ella sabe que esta cantidad equivale a 21/13 de la cantidad que tenía hace un año, ¿qué cantidad tenía originalmente?

Actualmente Alejandra tiene 3477/4 de dólar ella sabe que esta cantidad equivale a 57/15 de la cantidad que tenía hace un año, ¿qué cantidad tenía originalmente?

Actualmente Sofia tiene 3807/4 de libra esterlina ella sabe que esta cantidad equivale a 47/23 de la cantidad que tenía hace un año, ¿qué cantidad tenía originalmente?

Actualmente Pilarica tiene 7775/4 de libra esterlina ella sabe que esta cantidad equivale a 311/60 de la cantidad que tenía hace un año, ¿qué cantidad tenía originalmente?

Bibliografía

Ananiadou et. al. (2004) *Identifying effective workplace basic skills strategies for enhancing employee productivity and development*. National Research and Development Centre for Adult Literacy and Numeracy

Abramowitz, S. (1974) *Investigation of adolescent understanding of proportionality*. Unpublished doctoral dissertation, Stanford University

ANUIES (2000) *La Educación Superior en el Siglo XXI: Líneas Estratégicas de Desarrollo.* ANUIES.

Backhoff et. al. (2006) *El aprendizaje del español y las matemáticas en la educación básica en México*. INEE

Bauersfeld, H. (1988). *Interaction, construction, and knowledge: Alternative perspectives for mathematics education*. Ln T. Cooney & D. Grouws (Eds.), Effectivemathematics teaching (pp. 2746). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics and Lawrence Erlbaum Associates.

Behr, M. J., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. In D. Grows (Ed.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning* (pp. 296-333). New York: Macmillan.

Behr, M.J, Lesh, R., y Post, T.R. (1984) *The role of rational number concepts in the development of proportional reasoning skills* (NSF DPE-8470077) Washington, DC: National Science Foundation

Behr, M.J., Lesh, R., Post, T.R., y Silver, E.A. (1979) *The role of manipulative materials in the learning of rational number concepts: the rational number proyect* (NSF SED 79-20591) Washington, DC: National Science Foundation

Behr, M.J., Lesh, R., Post, T.R., y Silver, E.A. (1979) *The roles of manipulative materials in the learning of rationa number concepts: The rational number project* (NSF SED 79-20591) Washington, DC: National Science Foundation

Behr., M.J., Lesh, R., Post, T. R., Silver, E. A. (1983) Rational number concepts. In R. Lash y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (p. 91-126) Orlando, FL: Academic Press

Bereiter, C. (1990) *Aspects of an educational learning theory*. Review of Educational Research, 60 (4), 603-624

Berieter, C. (1985). *Towards a solution of the learning paradox.* Review of Educational Research, 55, 201-226

Bernanke, B. (2007) *Macroeconomics*. Addison-Wesley

Bezuk, N. (1986) *Variables affecting seventh grade students' performance and solution strategies on proportional reasoning word problems.* Unpublished doctoral dissertation, University of Minnesota

Bishop, A. J. (1988). *Mathematical enculturation: A cultural perspective on mathematics education*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Bowers, J., Cobb, P, & McClain, K. (1999). *The evolution of mathematical practices: A case study*. Cognition and Instruction, 17(1), 25-64.

Brown, A. L. (1992). *Design experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings.* The Journal of the Learning Sciences, 2(2), 141-78.

Bruner, J. (1994). *Four Ways to Make Meaning*. Invited Address a t the AERA Conference 1994, New Orleans.

Callanan, M.A., y Markman, E.M. (1982) P*rinciples of organization in young children's natural language hierarchies.* Child Development, 53, 1093-1101

Carpenter, T.P. et. al. (2004). *Scaling up innovative practices in Mathematics and Science*. National Center for improving student learning and achivemente in Mathematics and Science

Chaitin, Gregory L., (1997) *The Limits of Mathematics* 1-28, 89

Cobb (1993) *A constructivist alternative to the representational view of the mind in mathematics education* Journal for Research in Mathernar~cs Education1992. Vol. 23. No. 1, 2-33

Cobb, (1991). *Analogies from the philosophy and sociology of science for understanding classroom life*. Science Education, 75, 23-44.

Cobb y Confrey (2002) *Design experiments in educational research*. Educational Researcher, Vol. 32, No. 1, pp. 9–13

Cobb, McClain (2003) *Learning from and Adapting the Theory of Realistic Mathematics Education*. Vanderbilt University.

Cobb, P. (1987). *Information-processing psychology and mathematics education-A constructivist perspective.* Journal of Mathematical Behavior, 6, 3-40

Cobb, P. (1990a). *A constructivist perspective on information-processing theories of mathematics education.* International Journal of Educational Research, 14,67-92

Cobb, P. (1999). *Individual and collective mathematical development: The case of statistical data analysis*. Mathematical Thinking and Learning,1,5-44.

Cobb, P. (2001). *Participating in mathematical practices.* Journal of the Learning Sciences, 10(1, 2), 113-163.

Cobb, P. and Steffe, L. P. (1983). *The constructivist researcher as teacher and model builder*. Journal for Research in Mathematics Education, 14(1.), 83-95.

Cobb, P., & Whitenack, J. (1996). *A method for conducting longitudinal analyses of classroom video-recordings and transcripts.* Educational Studies in Mathematics, 30, 213-228.

Cobb, P., (2004) *Putting Philosophy to Work: Coping With Multiple Theoretical Perspectives* p. 42-43

Cobb, P., Yackel, E., Wood. T., (1993) *A constructivist alternative to the representational view of mind in Mathematics education.* Journal for Research in Mathematics education. Vol 23 (1)., p 2-33

Cobb, Visnovska, Zhao (2008) *Learning from and Adapting the Theory of Realistic Mathematics Education*. Education & Didactique, 2008, Vol 2, n°1

Cobb. P. (1989). *Experiential, cognitive, and anthropological perspectives in mathematics education*. For the Learning ofMathematics, 9(2), 32-42

Collette, J.P. (1998) *Historia de las Matemáticas*. Siglo XXI editores.

Comber, L.C., y Keeves, J.P. (1973) *Science education in 19 countries.* Stockholm: Almquist y Wiksell

Confrey, J. (1990a). *Student conceptions, representations, and the design of software.* In Design for learning (pp. 55-62). Cupertino, CA: Apple Computer, External Research

Cortina (2006) *Instructional Design in Ratio.* Vanderbilt University

Cortina, J. L., Saldanha, L. A., & Thompson, P. W. (1999). Multiplicative conceptions of the arithmetic mean. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the Twenty First Meeting of the North American Chapter of the International Group of of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 466-472). Cuernavaca, Morelos, Mexico: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Cortina, J. L., Zúñiga, C., & Visnovska, J. (2011). *Multiplication of magnitude values: An alternative to equal-partitioning in initial fraction instruction.* Manuscrito presentado para su publicación

Davis, G. E. (2003). From parts and wholes to proportional reasoning. *Journal of Mathematical Behavior, 22*, 213-216.

De Freitas, E. (2004) *Plotting intersections along the political axis: the interior voice of dissenting Mathematics teachers.* Educational Studies in mathematics. Vol. 55

Ehmke et. al. (2005) *Comparing adult mathematical literacy with PISA students: results of a pilot study*. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik Vol. 37 (3)

Ellerbruch. L. W., & Payne. J. N. *A teaching sequence for initial fraction concepts through the addition of unlike fractions.* In M. Suydam (Ed.), Developing computational skills. Reston. Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.1978.

Ernest, P. (1991b). *The philosophy of mathematics education.* New York: Falmer Press.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Freudenthal, H. (1971). *Geometry between the devil and the deep sea.* Educational Studies in Mathematics, 3, 413-35.

Freudenthal, H. (1981). *Major problems of mathematics education*. EducationalStudies in Mathematics, 2, 133-150.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht, Holland: Kluwer

Freudenthal, H., Janssen, G. M., and Sweers, W. J. (1976). Fire Years 1OWO on H. Freudenthal's Retirement from the Directorship of IOWO: 1OWO Snapshots. Dordrecht: Reidel.

Gravemaijer (1991) *An instruction-theoretical reflection on the use of manipulatives.* OW & OC. Research Group Utrecht

Gravemeijer (2004) *Local Instruction Theories as Means of Support for Teachers in Reform.* Mathematics Education, Mathematical Thinking and Learning, 6(2)

Gravemeijer, K. & Cobb, P. (2006). *Design research from a learning perspective.* En J. van Der Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, N. Nieveen. *Educational Design Research* (p.17-51). London: Routledge

Gravemeijer, K. (1 998). Developmental Research as a Research Method. In J. Kilpat-rick and A. Sierpinska (eds), *What is Research in Mathematics Education and What are its Results?* 1CMI Study Publication; Book 2 (pp. 277-95). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer, K. (1999). *How emergent models may foster the constitution of formal mathematics*. Mathematical Thinking and learning (2), 155-77.

Gravemeijer, k. P. E. (1 994). *Developing Realistic Mathematics Education.* Utrecht:CdK Press.

Gravemeijer, K., Cobb, P., Bowers, J., & Whitenack, J. (2000). Symbolizing, modeling, and instructional design. In P. Cobb, E. Yackel, & K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (pp. 225-273). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Hart, K. (1981) *Strategies and errors in secondary mathematics: The addition strategies and errors in secondary mathematics: The addition strategy in ratio.* Proceedings of the fifth conference of the international group for the psychology of Mathematics Education (p. 199-202) Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental education

Hart, K. (1988) Ratio and proportion. In J.Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (p. 198-219) Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics and Erlbaum

Hart, K.M. (1984) *Ratio: Children's strategies and errors. A report of the strategies and errors in secondary mathematics project* London: NFER- Nelson

Hiebert, J., y Behr, M. (Eds.). (1988) Introduction: Capturing the major themes. In J. Hiebert y M. Behr (Eds.) *Number concepts and operations in the middle grades* (p. 1-18) Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics and Erlbaum

INEE (2007) *PISA 2006 en México*. INEE

Johnson (1987) *The body in the mind: The bodily basis for reason and Imagination*. Chicago: Chicago University Press

Kaput, J.J., (1985) *Multiplicative word problems and intensive quantities: An integrated software response* (Tech. Rep.) Cambridge, MA: Harvard Graduate School of Education, Educational Technology Center

Karplus, K., Karplus, E., Formisano, M., y Paulsen, A. C. (1979). *Proportional reasoning and control of variables in seven countries.* In J. Lochhead y J. Clement (Eds.) Cognitive process instruction: Research on teaching thinking skills (p. 47-103) Philadelphia: Franklin Institute Press

Karplus, K., Karplus, E.,y Wollman, W. (1974) *Intellectual development beyond elementary school IV: Ratio, the influence of cognitive styl*e. School Science and Mathematics 74, 476-482

Karplus, R., Pulos, S., y Stage, E.K. (1983a) *Early adolescents' proportional reasoning on 'rate' problems.* Educational Studies in Mathematics, 14, 219-233

Karplus, R., Pulos, S., y Stage, E.K. (1983b) Proportional reasoning of early adolescents. In R. Lesh y M. Landau (Eds.) *Acquisition of mathematics concepts and processes* (p. 45-90) Orlando, FL: Acedemic Press

Kessels, J. P. A. M. and Korthagen, F. A. J. (1996). *The relation between theory and practice: Back to the classics*. Educational Researcher, 25, 17-22.

Kieren, T. (1976). *On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers*. In R. A. Lesh (Ed.) Number and measurement (p. 101-144) Columbus: OH: ERIC/SMEAC

Kieren, T. (1976). *The rational number constructivist elements and mechanisms.* In T. Kieren (Ed.) Recent research on number learning (p.125-149) Columbus: OH: ERIC/SMEAC

Lamon, S.J. (1993a) *Ratio and proportion: Children's cognitive and metacognitive processes.* In T.P. Carpenter, E. Fennema y T.A. Romberg (Eds.) Rational numbers: An integration of research (p. 131-156) Hillsdale, NJ: Earlbaum

Lamon, S.J. (1994) Ratio and proportion: cognitive foundations in unitizing and norming. In G. Harel y J. Confrey (Eds.) *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (p. 89-121) New York: State University of New York Press

Lamon, S.J. (2006) *Teaching fractions and ratios for understanding essential content knowledge and instructional strategies for teachers.* Mahwah, NJ: Erlbaum

Lamon, S.J. (2007) *Rational Numbers and proportional reasoning: toward a theoretical framework for research.* Students and learning., p. 628-667

Lamon, S.J., (1993b) *Ratio and proportion: Connecting content and children thinking.* Journal for research in Mathematics Education, 24(1), 41-61

Lesh, R. (1985). Conceptual analyses of problem solving performance. In E. A. Silver (Ed.) *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (p. 309-329). Hillsdale, NJ: Earlbaum

Lesh, R., Ladau, M., y Hamilton, E. (1983) *Conceptual models and applied mathematical problem-solving research.* In R. Lesh y M. Landau (Eds.), Acquisition of mathematics concepts and processes (p. 263-343) Orlando, FL: Academic Press

Lo, J.J., y Watanabe, T. (1997) *Developing ratio and proportion schemes: A story of a fifth grader*. Journal for research in Mathematics Education, 28(2), 216-236

Luengo, E. (2003) *Tendencias de la educación superior en México: Una lectura desde la perspectiva de la complejidad*. UNESCO.

Mack, N. (1990) *Learning fractions with understanding: building on informal knowledge*, Journal for Research in Mathematics Education, 21 (1), 16-32

Mack, N. (1995) *Confounding whole-number and fraction concepts when building on informal knowledge.* Journal for research in Mathematics Education 26(5) 422-441

Mack, N. (2001) *Building on informal knowledge through instruction in a complex content domain: Partitioning, units, and understanding multiplication of fractions.* Journal for research in Mathematics Education, 32(3), 267-295

Mankiw, G. (2007) *Principles of Economics.* AIPI

Markman, E.M. (1979) *Classes and collections: Conceptual organization and numerical abilities.* Cognitive Psychology, 11, 395-411

Mitchelmore, M. (2004) *Abstraction in Mathematics and Mathematics Learning.* Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,

National Research Council. (2002). *Scientific research in education*. Washington, DC:National Academy Press.

NCED (2006) *The case for quantitative literacy*. Math and Democracy

NCTM Research Advisory Comittee (1996). *Justification and reform.* Journal for Research in Mathematics Education, 27(5), 51 6-20 (Emotional acts).

Noelting, G. (1980a) *The development of proportional reasoning and the ration concept*. Part 1- Differentiation of Stages. Educational Studies in Mathematics, 11, 217-253

Noelting, G. (1980b) *The development of proportional reasoning and the ration concept. Part 2-Problem structure at successive stages; Problem-solving strategies and the mechanism of adaptative restructuring*. Educational Studies in Mathematics, 11, 331.-363

Novillis, C. (1976) *An analysis of the fraction concept into a hierarchy of selected subconcepts and the testing of the hierarchical dependencies.* Journal of Research in Mathematics Education, 7(3), 131-144

OCDE (1997) *Examen de las políticas nacionales de educación: México, educación superior.* OCDE

Ohlsson, S. (1987) *Sense and reference in the design of iterative illustrations for rational numbers*. In R.W. Lawler y M. Yazdani (Eds.) Artificial intelligence and education (p. 307-344) Norwood, NJ: Ablex

Ohlsson, S. (1988) *Mathematical meaning and applicational meaning in the semantics of fractions and related concepts.* In J. Hiebert y M. Behr (Eds.) Number concepts and operations in the middle grades (p. 53-92) Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics

Olive, J., y Steffe, L.P., (1994) TIMA Bars [Sofware para computadora] Acton, MA: William K. Bradford

Owens, D. T. *Study of the relationship of area concept and learning concepts by children in grades three and four*. In T. E. Kieren (Ed.), Recent research on number concepts. Columbus, Ohio: ERIC/SMEAC, 1980.

Parkin, M. (2007) *Economics*. Addison-Wesley

Piaget, J., Inhelder, B., y Szminska, A. (1960) *The child's conception of geometry.* London: Routledge y Kegan Paul

PISA (2003) *Learning for Tomorrow's World First Results from PISA 2003*. OECD

Post, T.R., Behr, M., Lesh, R., y Wachsmuth, I. (1985) Selected results from the Rational Number Project. In L. Streefland (Ed.) P*roceedings of the ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education:* Vol I. Individual contributions (p. 342-352) Columbus, OH: ERIC Clearinghous for Science, Mathematics and Environmental Education

Pulos, S., Karplus, R., Stage, E.K. (1981) *Generality of proportional reasoning in early adolecence: Content effects and individual differences*. Journal of early Adolescence, 1, 257-264

Putnam, H. (1981). *Reason, truth, and history*. London: Cambridge University Press.

Putnam, H. (1988). *Representation and reality*. Cambridge: Bradford Books.

Ray, D. (1998) *Development Economics*. Addison-Wesley

Rogoff, B. (1990).*Apprenticeship in thinking: Cognitive development in social context.* Oxford: Oxford University Press.

Rupley, W. H. (1981) The effects of numerical characteristics on the difficulty of proportional problems. Unpublished doctoral dissertation, University of California, Berkeley

Rupley, W.H., (1981) *The effects of numerical characteristics on the difficulty of proportional problems.* Unpublished doctoral dissertation, University of California, Berkeley

Saenz-Ludlow, A. (1994) *Michael´s fraction schemes*. Journal for Research in Mathematics Education, 25(1), 50-85

Saxe, G. B. (1991a). *Culture and cognitive development: Studies in mathematical understanding.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Schwartz, J. (1976). *Semantic aspects of quantity*. Unpublished manuscript, MIT, Cambridge

Schwartz, J. (1987) *Intensive quantity and referent transforming arithmeci operations.* Unpublished manuscript, MIT, and Hardvard Graduate School of Education, Cambridge

Schwartz, J. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. In J. Hiebert & M. J. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 41–52). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics

SEP et. al.(2003) *Informe nacional sobre la educación superior en México.* SEP

Sfard, A. (1991). *On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin.* Educational Studies in Mathematics, 22, 1-36.

Sinclair, H. (1990) *Learning: The interactive recreation of knowledge*. In L. P. Steffe &T. Wood (Eds.), Transforming children's mathematics education: International perspectives (pp. 19-29). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Smith, E., & Confrey, J. (1991, April). *Understanding collaborative learning: Small-group work on contextual problems using a multi-representational software tool*. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Chicago.

Steffe, L. P. (1983). The teaching experiment methodology in a constructivist research program. In: M. Zweng, T. Green, J. Kilpatrick, H. Pollak, and M. Suydam (eds), *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education* (pp. 469-71). Boston: Birkhauser.

Steffe, L. P. (2002). A new hypothesis concerning children's fractional knowledge. *Journal of Mathematical Behavior, 20*, 267-307.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). *Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements*. In A. Kelly & A. Lesh (Eds.), Handbook of science education (pp. 267-307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267-307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Steffe, L.P y Cobb (1988) *Construction of arithmetical meanings and strategies.* New York: Springer Verlag

Steffe, L.P. (1988) Children's construction of number sequences and multiplying schemes. In J. Hiebert y M. Behr (Eds.) *Number concepts and operations in the middle grades* (p. 41-52) Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics

Steffe, L.P. (1992) *Schemes of action and operation involving composite units.* Learning and Individual Differences, 4(3), 259-309

Steffe, L.P., von Glasersfeld, E. Richards, E., y Cobb, P. (1983) *Children's counting types: Philosophy, theory, and aplication*. New York: Praeger

Steffe, L.P., y Parr, R.B. (1968) *The devolpment of the concepts of ration and fraction in the fourth, fifth, and sixth years of elementary school* (Tech. Rep. No. 49) Madison, WI: Wisconsin Research and Development Center for Cognitive Learning

Steinbring, H. (1989). *Routine and meaning in the mathematics classroom.* For the Learning of mathematics, 9(1), 24-33

Stephan, et. al. (2004) *Suporting students' develpment of measuring conceptions: Analizing students' learning in social context.* Journal of Reasearch in Mathematics Education. Monograph no. 12

Streefland, L. (1984). Search for the roots of ratio: Some thoughts on the long term learning process (Towards ... a theory) Part I: Reflections on a teaching experiment. *Educational Studies in Mathematics*, 15, 327-348.

Streefland, L. (1985). Search for the roots of ratio: Some thoughts on the long term learning process (Towards ... a theory) Part II: The outline of the long term learning process. *Educational Studies in Mathematics*, 16, 75-94

Streefland, L. (1990). *Fractions in Realistic Mathematics Education, a Paradigm of Developmental Research*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Streefland, L. (1990). *Free productions in teaching and learning mathematics.* In K. Gravemeijer, M. van den Heuvel, & L. Streefland (Eds.), Contexts, free productions, tests, and geometry in realistic mathematics education (pp. 33-52). Utrecht, Netherlands: State University of Utrecht, OW & OC Research group

Streefland, L. (1991) *Fractions in realistic mathematics education: A paradigm of developmental research*. Dordrecht: The Netherlands: D. Reidel

Thompson P.W. (1992) *Images of rate.* Center for Research in Mathematics and Science Education

Thompson, P. W. (1989, April). *Notes on technology and curriculum reform.* Paper presented at the Research Presession of the annual conference of the National Council of Teachers of Mathematics, Orlando

Thompson, P. W. (1994a). *Images of rate and operational understanding of the Fundamental Theorem of Calculus*. Educational Studies in Mathematics, 26, 229–274

Thompson, P. W. (1994b). Calculational and conceptual orientations in teaching mathematics. In 1994 *Yearbook of the National Council fo Teachers of Mathematics* eston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Thompson, P. W., & Saldanha, L. A. (2003). Fractions and multiplicative reasoning. In J. Kilpatrick, G. Martin & D. Schifter (Eds.), *Research companion to the principles and standards for school mathematics* (pp. 95-114). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Thompson, P. W., y Saldanha, L. A. (2003). *Fractions and multiplicative reasoning.* En J. Kilpatrick, G. Martin y D. Schifter (Eds.), *Research companion to the principles and standards for school mathematics* (pp. 95-113). Reston, Virginia, EEUU: National Council of Teachers of Mathematics.

Thompson, P.W. (1989) *Quantitative Concepts as a Foundation for Algebraic Reasoning: Sufficiency,Necessity, and Cognitive Obstacles.* Illinois State University

Thompson, P.W. (1990) *A Theoretical Model of Quantity-Based Reasoning in Arithmetic and Algebra.* San Diego State University

Thompson, P.W. (1995) *Notation, Convention, and Quantity in Elementary.* Center for Research in Mathematics and Science Education

Thompson, P.W. (1996) *Imagery and the development of mathematical reasoning. reasoning.* In L. P. Steffe, B.Greer, P. Nesher, P. Cobb, & G. Goldin (Ed.), Theories of learning mathematics (pp. 267-283). Hillsdale,NJ: Erlbaum.

Toulmin, S. (1959.) *The uses of argument.* Cambridge, England: Cambridge University Press

Toulmin, S. (1969.) *The uses of argument.* Cambridge, England: Cambridge University Press. van Eemeren, F., Grootendorst, R., Henkemens, F., Blair, J., Johnson, R., Krabbe, E., et al. (Eds.) (1996). Fundamentals of argumentation: A handbook of historical backgrounds and contemporary developments (pp. 129-160). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Tourniaire, F. (1983) *Some aspects of proportional reasoning in young children.* In J.C. Bergeron y N. Herscovics (Eds.) Proceedings of the fifth annual meeting of the North American chapter of the international group for the Psychology of Mathematics Education (p 319-324) Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education

Tournier, F. (1986) *Proportions in elementary school*. Educational Studies in Mathematics, 17, 410-412

Treffers, A. (1 987). *Three Dimensions: A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction* - The Wiskobas Project. Dordrecht: Reidel.

Treffers, A. (1 987). *Three Dimensions: A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction* - The Wiskobas Project. Dordrecht: Reidel.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions: A model of goal and theory description in mathematics instruction*-The Wiskobas Project. Dordrecht, Netherlands: Reidel.

Treffers, A., y Gofree, F. (1985) Rational analysis of realistic mathematics education: The Wiskobas Program. In L Streffland. *Proceedings of the ninth International Conference on the Psychology of Mathematics Education* (p. 97-121) Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education

van den Brink, J., y Streefland, L. (1979). *Young children (6-8) Ratio an proportion.* Educational Studies in Mathematics, 10, 403-420

Varian, H. (2007) *Intermediate Microeconomics*. Norton

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh y M. Landau (Eds.) *Acquisition of mathematics concepts and processes* (p.127-174) Orlando, FL: Academic Press

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (p. 141-161) Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics and Erlbaum von Glasersfeld, E. (1978). *Radical constructivism and Piaget's concept of knowledge.* In F. B. Murray (Ed.), Impact of Piagetian theory. Baltimore: University Park Press

von Glasersfeld, E. (1984). *An introduction to radical constructivism*. In P. Watzlawick (Ed.), The invented reality, (pp. 17-40). New York: Norton.

von Glasersfeld, E. (1987). *Learning as a constructive activity.* In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp. 3-18). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

von Glasersfeld, E. (1990). *Environment and communication.* In L. P. Steffe & T. Wood (Eds.), Transforming children's mathematics education: International perspectives (pp. 30-38). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Wollman, W. (1974) *Intellectual development beyond elementary school V: Using ration in differing tasks*. School Science and Mathematics, 74, 593-611

Yackel, E. (1997, April). *Explanation as an interactive accomplishment: A case study of one second-grade mathematics classroom.* Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Chicago.