



**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL**

UNIDAD AJUSCO

Licenciatura en Psicología Educativa

TESIS

**ESTRATEGIAS USADAS POR CINCO  
DOCENTES DE PRIMARIA EN PROBLEMAS  
DE COMPARACIÓN DE RAZONES**

Que para obtener el título de licenciada en  
Psicología Educativa

**PRESENTA:**  
FLORES ANGEL LUZ MARIANA

**ASESOR DE TESIS:** LICENCIADO CUAUHTÉMOC GERARDO PÉREZ LÓPEZ

MÉXICO, D.F.; AGOSTO DEL 2010

## AGRADECIMIENTOS

A mi familia ( a mi madre, a mi padre,  
hermanos, sobrino y a mi mejor amigo)  
por ser pacientes,  
por animarme día a día y  
apoyarme incondicionalmente.  
Los quiero mucho.

A mis asesores:  
Cuauhtémoc G. Pérez López  
y a Silvia Alatorre Frenk, por guiarme, por  
motivarme y por contribuir a  
que lograra concluir mi trabajo de tesis;  
así como a su apoyo, a su paciencia  
y a su disponibilidad incondicional.

A Jaquelinne por ser mi  
compañera y amiga en este largo proceso  
de formación profesional.

# ÍNDICE

<b>Resumen</b> .....	<b>1</b>
<b>INTRODUCCIÓN</b> .....	<b>2</b>
<i>JUSTIFICACIÓN</i> .....	3
<i>OBJETIVO GENERAL</i> .....	6
<i>ORGANIZACIÓN DEL DOCUMENTO</i> .....	6
<b>1. FORMACIÓN Y ACTUALIZACIÓN EN MATEMÁTICAS DEL DOCENTE EN EDUCACIÓN PRIMARIA</b> .....	<b>9</b>
<i>1.1. FORMACIÓN Y ACTUALIZACIÓN DOCENTE EN MATEMÁTICAS</i> .....	9
1.1.1. Formación inicial del docente en matemáticas.....	12
1.1.2. Actualización docente en servicio. El caso de las matemáticas.....	15
<i>1.2. TIPOS DEL CONOCIMIENTO DEL DOCENTE</i> .....	17
1.2.1. Las categorías de Shulman .....	17
1.2.2. Conocimiento del contenido de proporcionalidad.....	20
<i>1.3. UNA REFLEXIÓN FINAL SOBRE EL TEMA</i> .....	22
<b>2. PIAGET: EL DESARROLLO COGNITIVO</b> .....	<b>24</b>
<i>2.1. DESCRIPCIÓN DE LOS ESTADIOS</i> .....	26
2.1.1. Estadio sensorio motor (0-2 años) .....	26
2.1.2. Estadio preoperatorio (2-7 años).....	26
2.1.3. Estadio de las operaciones concretas (7 -11 años) .....	27
2.1.4. Estadio de las operaciones formales (12 años en adelante) .....	28
<i>2.2. CARACTERÍSTICAS DEL ESTADIO DE LAS OPERACIONES FORMALES</i> .....	28
2.2.1. Propiedad funcional .....	28
2.2.2. Propiedad formal .....	31

2.2.3. El razonamiento proporcional en el estadio de las operaciones formales .....	33
<b>3. EL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL .....</b>	<b>35</b>
3.1. <i>ALGUNAS DEFINICIONES</i> .....	35
3.1.1. Los distintos problemas de razonamiento proporcional.....	37
3.1.2. Tipos de problemas de comparación de razones.....	39
3.2. <i>EL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL EN LOS MATERIALES DIRIGIDOS AL DOCENTE DE EDUCACIÓN PRIMARIA</i> .....	41
3.2.1. Conceptos .....	45
3.2.2. Enfoques didácticos para la proporcionalidad .....	47
<b>4. METODOLOGÍA.....</b>	<b>50</b>
4.1. <i>SUJETOS</i> .....	51
4.2. <i>TÉCNICA</i> .....	51
4.3. <i>INSTRUMENTO</i> .....	52
4.3.1. Contextos .....	53
4.3.2. Estructuras numéricas .....	54
4.4. <i>CLASIFICACIÓN DE LAS RESPUESTAS</i> .....	55
4.4.1. Centraciones.....	57
4.4.2. Relaciones .....	59
4.4.3. Estrategias compuestas.....	62
4.4.4. Clasificación según el estatus de corrección.....	63
4.5. <i>NIVELES DE DIFICULTAD</i> .....	67
4.6. <i>PROCEDIMIENTO</i> .....	67
4.7. <i>METODOLOGÍA PARA EL ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS</i> .....	69
4.7.1. Metodología para el análisis cuantitativo.....	69
4.7.2. Comportamiento de acuerdo al nivel de dificultad.....	71
4.7.3. Análisis cualitativo.....	73
<b>5. ANÁLISIS DE RESULTADOS.....</b>	<b>76</b>
5.1. <i>CONSIDERACIONES METODOLÓGICAS SOBRE LAS ENTREVISTAS</i> .....	77
5.2. <i>ANÁLISIS POR NIVEL DE DIFICULTAD DE LAS PREGUNTAS</i> .....	79

5.2.1. Nivel I.....	79
5.2.2. Nivel II.....	89
5.2.3. Nivel III.....	97
5.2.4. Análisis global por niveles de dificultad de las preguntas.....	106
<b>5.3. ANÁLISIS POR CONTEXTO.....</b>	<b>109</b>
5.3.1. Velocidad .....	109
5.3.2. Cuadernos .....	112
5.3.3. Exámenes.....	115
5.3.4. Botellas.....	119
5.3.5. Jamaica .....	122
5.3.6. Análisis global de contextos.....	126
<b>CONCLUSIONES .....</b>	<b>128</b>
<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>137</b>
<b>ANEXO 1 .....</b>	<b>140</b>
<b>ANEXO 2.....</b>	<b>146</b>

## RESUMEN

El objetivo de este trabajo fue conocer las estrategias que utilizan cinco maestras de Educación Primaria al resolver ciertos problemas de razonamiento proporcional. Para ello se aborda primero un marco teórico, en donde se estudian antecedentes desde varias perspectivas (Formación y Actualización del docente en Educación Primaria, el Desarrollo Cognitivo según Piaget y el Razonamiento Proporcional). En la parte experimental se utilizaron dos problemas de Tasa y tres problemas de Mezcla.

La manera de llevar a cabo este proyecto fue realizarles dos entrevistas a los cinco sujetos. La primera entrevista consistió en presentarles problemas de razonamiento proporcional, de acuerdo con preguntas ya preestablecidas para conocer el tipo de estrategia que utilizaron para resolver las situaciones planteadas. Ese trabajo se ocupa de analizar los resultados obtenidos en las cinco entrevistas. La segunda entrevista que se realizó con cada sujeto será motivo de otro trabajo (Solis, 2010).

Una vez que se identificaron las estrategias empleadas por los cinco sujetos de acuerdo con el instrumento de Alatorre (2004) estas se analizaron por niveles de dificultad y por contextos. Los resultados obtenidos corroboraron la clasificación de los niveles de dificultad establecido por Alatorre; así como la dificultad al resolver los tipos de contextos. Se puede concluir que las cinco maestras entrevistadas no conocen y no manejan adecuadamente las estrategias correctas aplicables a las situaciones presentadas.

Por los resultados obtenidos, se sugieren estrategias didácticas para la formación de los docentes, así como para la enseñanza de los temas de razón y proporción en primaria.

# INTRODUCCIÓN

El proyecto que aquí se presenta es un estudio sobre el tipo de estrategias que utilizan 5 maestras de nivel primaria, al resolver problemas que implican para su resolución correcta, del razonamiento proporcional, estos problemas son de comparación de razones, los cuales fueron retomados del instrumento de la tesis doctoral de Alatorre (2004), de donde se hizo uso únicamente de 5 diferentes contextos (historias) que por el tipo de magnitudes que en ellos se plantean son clasificados en: problemas de comparación de tasas, de los cuales sólo se retomaron dos ejemplos y tres problemas de mezcla, en los que se incluye un contexto de mezcla probabilística.

El tema de razonamiento proporcional es de gran importancia en el nivel primaria, no sólo porque con ese tema se cierra la educación matemática en este nivel, sino también por el hecho de que es un contenido básico para que los alumnos puedan continuar el aprendizaje ya no sólo de contenidos matemáticos, sino también físicos en el nivel de secundaria.

El hecho de que en esta investigación a quien se considera relevante estudiar sea a las maestras se debe a que son éstas quienes al transmitir ciertas estrategias a sus alumnos pueden llegar a hacerlo de manera incorrecta o no considerar todas las alternativas o confusiones que puedan llegar a presentárseles a ellas y a los mismos alumnos. Por ello, las estrategias correctas e incorrectas utilizadas por el docente al resolver problemas de comparación de razones pueden ser un indicador del dominio que tenga de este contenido y podría llegar a suponerse que también es la manera en que lo transmite a sus alumnos. Por lo tanto es importante hacer estudios que arrojen información acerca de este tema.

Así mismo el análisis de la formación que el docente ha recibido a lo largo de su preparación sobre qué estrategias utilizar para el proceso de enseñanza de este tema puede determinar el porqué del uso más frecuente de ciertas estrategias y también contribuir a mostrar ciertos sesgos en su formación tanto inicial como continua. Pero a la vez, los resultados pueden

permitir vislumbrar alternativas didácticas para la enseñanza de problemas que requieran de un razonamiento proporcional.

Para identificar las estrategias usadas por estas maestras, se les realizó una entrevista semiestructurada con la posibilidad de presentarles por cada contexto trece diferentes arreglos numéricos que tienen cierto nivel de dificultad. En todos ellos se les pedía que eligieran una de las tres opciones de respuesta, lado A, lado B o si le daba igual; por ejemplo, en el contexto de jamaica: en dos jarras (A y B) se confecciona agua de jamaica con distintas cantidades de vasos de concentrado de jamaica y con agua. ¿En cuál jarra la preparación tiene sabor más fuerte a jamaica, o tienen el mismo sabor? Por cada pregunta realizada a las maestras se les cuestionó sobre el procedimiento que llevaron a cabo para elegir determinada opción, es decir lo que se necesitó en esta investigación era que las maestras justificaran su elección para conocer qué estrategia habían utilizado. Para este análisis se utilizó la videograbación de sus procedimientos.

La justificación de las respuestas fue la forma por medio de la cual se determinó el tipo de estrategia que las maestras estaban utilizando (análisis cualitativo) según la clasificación determinada por Alatorre (2004). Estas estrategias a su vez fueron clasificadas según un estatus de corrección mediante el cual se asignan puntos, lo que da pie a un análisis cuantitativo.

## **Justificación**

Las razones que motivan a realizar esta investigación son las siguientes:

- La importancia de la construcción de nociones relacionadas con el tema de proporcionalidad en educación primaria y su valor para adquirir otros conocimientos en niveles subsecuentes.
- El conocimiento del contenido matemático por parte del docente como una posible variable para llegar a una mejor comprensión de procesos de enseñanza-aprendizaje de nociones que lleven a desarrollar un razonamiento proporcional.



- La relevancia de conocer las estrategias que usa el docente considerándolas como parte de sus conocimientos para resolver problemas de comparación de razones que requieren un razonamiento proporcional, involucrando por tanto su formación inicial y su formación continua.

Los argumentos que fundamentan estos motivos son:

Se debe considerar que la aplicación del razonamiento proporcional para la resolución de muchos problemas se presenta en la vida diaria de la personas; por ejemplo, en los precios de productos, porcentajes, recetas de cocina, etc., que a pesar de la frecuencia de su uso, es generalmente un tema mal entendido, y cuya enseñanza está enfocada de forma mecánica, al algoritmo de la regla de tres (SEP, 1992).

Hay por tanto temas sobre matemáticas que se inician en educación primaria y cuyo éxito de aprendizaje en este nivel permitirá al estudiante avanzar en la comprensión de conceptos con los que se enfrentará en los siguientes niveles educativos. Esto es lo que sucede con nociones como razón y proporción los cuales se pretenden desarrollar en los niños en primaria y que resultan ser un cimiento para la adquisición de futuros conceptos fundamentales en su aprendizaje.

La incompreensión de temas como razón y proporción contribuye al mal empleo de conocimientos de la aritmética escolar, como el manejo de problemas multiplicativos (Ruiz y Lupiáñez, 2009). Así mismo contribuye a distorsionar y delimitar conceptos que se abordan en secundaria y nivel medio superior, que suelen ser más formales, como en el caso de la Física en secundaria, en donde se usan fórmulas que están basadas en una suposición de proporcionalidad. Por ejemplo, “el alargamiento de una barra de metal es proporcional al cambio de su temperatura” (SEP, 1992). En el caso del nivel medio superior, un caso en el que la proporcionalidad tiene una aplicación es en el estudio de funciones.

En el Libro de Texto de la SEP de matemáticas para sexto grado de primaria (SEP, 2001) el tema de proporcionalidad es uno de los más

frecuentes, lo cual refleja su relevancia como tema fundamental para abordar en clase y para conocer qué tipo de formación ha recibido el docente al respecto.

El conocimiento específico que posean los docentes sobre estrategias para problemas que requieren resolverse correctamente con este razonamiento no sólo afecta el nivel de comprensión y aprendizaje de sus alumnos, sino también la forma en que el docente razona y transmite dichas estrategias en el aula. Por tanto se pensaría que entre más conocimientos posea un docente sobre estrategias para este tipo de problemas le resultaría más fácil resolverlos y así mismo enseñarlos.

Convendría que los docentes reflexionaran acerca de cómo enfrentan y resuelven problemas que requieren de un razonamiento proporcional, si como lo hacen es correcto o no, y que conozcan otras estrategias para resolverlos.

Morales y Roldán (2007) argumentan que es indispensable que el docente que imparte a nivel primaria conozca y use diferentes estrategias de solución como parte de su conocimiento del contenido. Argumentan que para evitar el fracaso escolar del estudiante, un maestro debe considerar las diferencias cognitivas de cada sujeto partiendo del conocimiento de diversas estrategias que es posible utilizar al resolver problemas de comparación de razones, para lo cual es indispensable que el docente desde el nivel primaria conozca y use diferentes estrategias de solución como parte de su conocimiento del contenido.

El considerar de importancia conocer aspectos sobre los conocimientos del docente sobre estrategias para resolver problemas que requieren un razonamiento proporcional, como factor sobre el éxito de enseñanza de este tema en primaria, implica por tanto considerar la formación proporcionada para dicho contenido recibida en la formación inicial y actualización permanente del docente.

En esta investigación se le da un papel primordial al conocimiento del docente, ya que sus conocimientos pueden ser un factor que ayude a explicar por qué muchas iniciativas para la mejora en la calidad de la educación no han

dado buenos resultados y que se mejore la formación matemática de los estudiantes.

“Los profesores son, por tanto, agentes imprescindibles para modificar pautas culturales que reproducen el modelo de enseñanza tradicional y para ignorar o abordar los problemas que dicho modelo genera (Porlán, 2001, pág.9).”

## **Objetivo General**

Conocer las estrategias usadas por los maestros al resolver problemas de comparación de razones en cinco contextos diferentes y a partir de ello hacer propuestas para el tratamiento didáctico del tema.

Por contexto se entiende: la “historia” que acompaña un problema matemático.

### *Objetivos específicos*

- Identificar las respuestas por contexto y nivel de dificultad de la pregunta.
- Analizar la relación de las respuestas con el contexto y el nivel de dificultad de las preguntas planteadas.

## **Organización del documento**

La tesis está organizada en un resumen, un apartado introductorio donde se incluyen la justificación y los objetivos de la investigación y en cinco capítulos más, de los cuales los tres primeros conforman perspectivas sobre el marco teórico utilizado.

En el Capítulo 1, se abordan los temas de formación inicial y actualización de los maestros de primaria de México sobre todo en lo referido a los contenidos de matemáticas. También se abordan las categorías de Shulman (1986) sobre el manejo del contenido por parte del profesor y por último se abordan aspectos de la formación que los docentes han recibido del

contenido de proporcionalidad desde su preparación como docentes hasta su actualización.

En el Capítulo 2, se aborda la teoría de Piaget en cuanto al desarrollo cognitivo, abarcando los cuatro estadios o períodos de desarrollo y enfatizando el razonamiento proporcional en el estadio de las operaciones formales.

En el Capítulo 3 se habla sobre el tema de razonamiento proporcional. Se proporcionan algunas definiciones sobre este tema, se abordan los distintos problemas de razonamiento proporcional, y las dos formas de clasificación de los problemas de comparación de razones: 1) por contexto: problemas de tasas y problemas de mezcla simple o probabilística y 2) por la estructura numérica. También se abordan los materiales que han sido dirigidos al docente de educación primaria sobre el razonamiento proporcional y los enfoques didácticos para este tema.

En el Capítulo 4 se presenta el método que se usó en la investigación con las maestras de educación primaria, empezando con la técnica que se llevó a cabo para la entrevista y con las características del instrumento y la forma en que se utilizó (Alatorre, 2004). Además se presenta la clasificación de las estrategias, el estatus de corrección de estas y los niveles de dificultad de las estructuras numéricas. También se indica en este capítulo la metodología de análisis de resultados iniciando con la clasificación de sus respuestas en estrategias y con la puntuación correspondiente según Alatorre (1994, 2004). A partir de esos resultados se hace un análisis cuantitativo que lleva a clasificar las respuestas a los distintos contextos según la forma general del comportamiento de los sujetos ante ellos. El segundo análisis se realizó de forma cualitativa.

En el Capítulo 5 se exponen los resultados, los cuales se presentan desde dos perspectivas: por niveles y por contextos, cada uno con su análisis cuantitativo, análisis cualitativo y un análisis global.

Por último se exponen, a manera de conclusión, diversas reflexiones: acerca de los puntos de coincidencia y de discrepancia con dos trabajos previos que han utilizado la misma metodología que en este trabajo; acerca de

las estrategias utilizadas por estas docentes en cada uno de los niveles y contextos; acerca de las implicaciones de la teoría piagetiana en esta investigación; y finalmente acerca de la formación de maestros. Este apartado se cierra con un par de recomendaciones.

# **CAPÍTULO 1. FORMACIÓN Y ACTUALIZACIÓN EN MATEMÁTICAS DEL DOCENTE DE EDUCACIÓN PRIMARIA**

En este capítulo se habla sobre la formación inicial y actualización de maestros de educación primaria en México. En primer lugar, como referencia, se mencionará lo que señala la Secretaría de Educación Pública (SEP) a través de varios documentos sobre formación inicial y actualización magisterial para la enseñanza de las matemáticas. En segundo lugar, se mencionan aspectos de formación en matemáticas para un desarrollo profesional del docente en el conocimiento del contenido matemático. En tercer lugar, se verán aspectos de la formación que los docentes han recibido con respecto al contenido de proporcionalidad desde su preparación como docentes hasta su actualización. En el último apartado se plantea una reflexión sobre los aspectos anteriormente mencionados.

## **1.1 Formación y actualización docente en matemáticas**

A través del Acuerdo Nacional para la Modernización de la Educación Básica del Sistema Educativo Mexicano (ANMEB) en 1992, se reaccionó a las evidencias del deterioro progresivo de los logros educativos del país. En dicho Acuerdo el papel del docente se visualizó como factor protagónico para realizar un cambio en los procesos y resultados de la educación. Con esto se generó una transformación de nuevas dimensiones para la educación básica y en materia de formación inicial de maestros, a través de la propuesta de trabajo pedagógico de enfoque constructivista (Zorrilla, 2002).

Este autor dice que para lograr una práctica pedagógica desde el constructivismo, se reformularon planes y programas para la educación primaria, se diseñaron libros de texto gratuitos, se produjeron materiales de apoyo para las tareas docentes y se implementaron nuevos modelos para la

formación inicial y permanente del profesorado a través de elementos teóricos y metodológicos, que siguen actualmente vigentes.

Latapí (2003) coincide con Zorrilla en que, desde una perspectiva nacional, la formación y la actualización del magisterio han sido temas en Programas Sectoriales de la SEP y aún así, no se han hallado soluciones satisfactorias para realizar el cambio en los procesos y resultados de la educación.

Actualmente en el Programa Sectorial de Educación 2007-2012 (SEP, 2007), se puntualiza que para mejorar la calidad de la educación, se requiere de la capacitación de los docentes, lo cual podrá cumplirse cuando aumente el porcentaje de docentes de escuelas públicas actualizados y/o capacitados. Para el caso de la enseñanza de las matemáticas también se plantea el aumento de docentes capacitados y de la creación de materiales, así como de talleres para mejorar la calidad de su enseñanza de esta disciplina.

Se enfatiza por tanto la mejora en la formación y capacitación docente en matemáticas, a través de la actualización de programas de estudios y sus contenidos, lo que se basa en las necesidades de los docentes, siempre respondiendo a los objetivos del currículo de educación primaria. Esto por ejemplo se refleja en las intenciones de la formación inicial y la actualización del magisterio.

En la formación inicial del futuro docente, se tiene la intención de prepararlo en habilidades intelectuales y competencias profesionales que le permitan conocer e interpretar las principales características del medio, su influencia en la educación de los niños, los recursos que pueden aprovecharse y las limitaciones que impone; este conocimiento será la base para adaptar los contenidos educativos y las formas de trabajo a los requerimientos particulares de cada región (SEP, 2002a).

Para la actualización del docente, la Coordinación General de Actualización y Capacitación para Maestros de Educación Básica en Servicio dirige un conjunto de actividades formativas destinadas a los profesores en servicio en funciones docentes, directivas o de apoyo técnico-pedagógico, las

cuales se pretende le permitan la puesta al día o la adquisición del conjunto de saberes profesionales necesarios para enseñar o promover una enseñanza de calidad. Los saberes profesionales para enseñar son los contenidos, las disciplinas, los enfoques y los métodos de enseñanza, las habilidades didácticas y el desarrollo de los valores y las actitudes que permiten sostener una labor docente o directiva enfocada en el aprendizaje y la formación de los alumnos, además del desarrollo personal de las habilidades intelectuales básicas para el estudio autónomo y la comunicación (SEP, 2003).

Por tanto se considera a la formación inicial, la actualización y el desarrollo profesional de los docentes como factores en proyectos para mejorar el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas escolares. Martínez (2006) señala que los tres factores anteriormente mencionados se han cuestionado por su insuficiente impacto en el desarrollo del conocimiento profesional necesario en los docentes y para mejorar su práctica, así como la enseñanza de las matemáticas.

Martínez agrega que generalmente se cree que no es necesario tener un conocimiento profesional muy profundo para enseñar las matemáticas elementales, lo cual genera en los docentes una práctica empírica e intuitiva de esta disciplina, enfatizando así aprendizajes superficiales y no los fundamentales. Así mismo este autor coincide con Rico (1997, citado en Martínez, 2006), quien argumenta que la mala organización y el carácter estructural de la formación de profesores de matemáticas repercuten en la calidad de la enseñanza que reciben los escolares y afecta el nivel cultural, científico y técnico de los ciudadanos.

Thurston, Grant y Topping (citados en Ruiz y Lupiáñez, 2009) señalan que si los conocimientos de los docentes son débiles y que si se suma la poca confianza que tienen algunos docentes para impartir ciencias en la escuela primaria, esto influye sobre la manera en que el estudiante enfrenta el aprendizaje.



### 1.1.1 Formación inicial del docente en matemáticas

En esta parte de la formación del docente sólo se hace mención al plan de estudios 1997 de la Licenciatura en Educación Primaria de la Benemérita Escuela Nacional de Maestros (BENM), ya que no hay un programa unificado en las escuelas normales del país. En este plan están designados dos cursos llamados Matemáticas y su Enseñanza I y II para el segundo y tercer semestres. Cada uno de estos cursos cuenta con cuatro bloques temáticos y un total de 108 horas, que se imparten en 6 horas por semana (SEP, 2002b).

Los cursos se relacionan con los contenidos de matemáticas de educación a nivel primaria, y el temario se muestra a continuación:

#### Matemáticas y su Enseñanza I

Bloque I. Aprender matemáticas al resolver problemas

Bloque II. Los números naturales y el sistema decimal de numeración

Bloque III. Las cuatro operaciones básicas con números naturales

Bloque IV. La geometría

#### Matemáticas y su Enseñanza II

Bloque I. La medición

Bloque II. Los números racionales

Bloque III. Procesos de cambio

Bloque IV. Tratamiento de la información, predicción y azar

Estos cursos están organizados en torno a los contenidos de matemáticas del currículo de educación primaria. En SEP (1998) se propone que el tiempo para su estudio se distribuya en seis horas semanales en tres sesiones de dos horas, ocupando el mayor tiempo posible en sesiones de taller. En ellas se trabaja en equipos, realizando actividades como resolver o analizar situaciones problemáticas, en las cuales se pretende que los

estudiantes amplíen y profundicen su conocimiento matemático, elaboren procedimientos de solución de problemas, no necesariamente formales, y que analicen procedimientos empleados por los niños.

Los bloques de los cursos establecen dos tipos de contenidos: los dirigidos a la formación en matemáticas del estudiante para profesor y los destinados a reflexionar sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la escuela primaria, su sentido y su estructura. En los cursos se separan los propósitos de formación matemática del profesor de aquellos de reflexión acerca de la enseñanza a los niños. El propósito de la formación de los próximos maestros pretende ofrecer oportunidades para profundizar y consolidar los conocimientos básicos acerca de las matemáticas (sobre los contenidos básicos de la disciplina) con el fin de que el estudiante logre reconocer y estructure los contenidos de primaria y secundaria.

Por cada bloque se sugiere bibliografía, material de audioteca y videoteca de la escuela normal.

A los alumnos se les proporcionan para estos cursos de matemáticas un paquete didáctico de libros titulados “La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Taller para maestros”, tanto la primera y la segunda parte como el libro de lecturas. Este paquete didáctico de Matemáticas es componente del Programa Nacional de Actualización Permanente para maestros de educación básica en servicio, elaborados por la Secretaría de Educación Pública (SEP, 1995). Los materiales que en él se incluyen son destinados a maestros que laboran en los planteles de educación primaria de los distintos niveles, grados y asignaturas. A los maestros que obtengan la acreditación del curso que corresponde a este paquete didáctico de Matemáticas les será tomado en cuenta para la Carrera Magisterial y otros mecanismos de estímulo profesional.

La evaluación de los alumnos en la BENM considera por igual los aprendizajes de los contenidos que conforman cada bloque; los referidos a las matemáticas y los relativos a la enseñanza y aprendizaje en la primaria.

Al evaluar los aprendizajes de los alumnos en los contenidos de matemáticas se espera que ellos puedan utilizarlos en la resolución de problemas, que los definan y que expresen explícitamente sus propiedades.

Con respecto a la evaluación de la enseñanza y aprendizaje en primaria, se espera que los alumnos den ejemplos variados de situaciones didácticas relativas a diversas nociones matemáticas, utilizando variables que los hagan complejos o simples dependiendo de los grados escolares y que logren anticipar procedimientos que sean más probables que utilicen los niños de primaria frente a esas situaciones, así como los posibles errores.

Se pretende a través de estos cursos que los alumnos logren los siguientes propósitos:

- Que consoliden el conocimiento de los contenidos matemáticos fundamentales que se enseñan en la escuela primaria y comprendan los distintos significados que adquieren al aplicarlos en situaciones diversas y en resolución de problemas.
- Que conozcan las características del enfoque didáctico para la enseñanza de las matemáticas que enfatiza la construcción de significados a partir de la resolución de situaciones problemáticas.
- Que conozcan y apliquen elementos de didáctica de las matemáticas para analizar situaciones de enseñanza y su relación con los procesos de aprendizaje de conocimientos matemáticos en los niños.

Algunos autores plantean críticas sobre esta primera etapa de preparación del magisterio. Por una parte se han manejado como insatisfactorios o incompletos algunos de los requisitos de ingreso a la formación. En los requisitos de ingreso no se tiene como objetivo conocer el perfil vocacional del aspirante, ni sus conocimientos previos disciplinares. Valiente (1998, pág. 58) señala que se les debe dar importancia debido a que “las últimas generaciones de alumnos aceptados en nuestras escuelas formadoras de docentes son bachilleres que carecen del antecedente pedagógico obligado, cosa que es un verdadero lastre pues tampoco traen

consigo un bagaje estándar de conocimientos matemáticos de los cuales partir con buen nivel”.

Esta observación va en el mismo sentido de Fullan y Hargraves (citados en Martínez, 2006), quienes señalan que el requisito más difícil de los lineamientos que un docente comprometido con el cambio educativo debe seguir es el referido a la vocación, ya que consideran que es de suma importancia en la tarea educativa, más que en otras profesiones.

Por otra parte hay también una serie de cuestionamientos a los materiales de apoyo diseñados para apoyar a los docentes. Valiente (1998) señala que los materiales no indican al docente cómo construir en forma práctica el conocimiento, no proporcionan ejemplos comprensibles, ni se dice cómo realizar un avance, un plan, ni qué recursos utilizar. También la bibliografía que proponen es de difícil acceso y algunos libros contienen información sobre formación matemática que no concuerda con el modelo del constructivismo.

Por lo tanto si los cursos de Matemáticas y su Enseñanza I y II establecen como propósito general que los estudiantes para maestro tengan oportunidades de profundizar y consolidar el conocimiento que tienen de las matemáticas, resulta difícil de creer que se llegue a cumplir satisfactoriamente este propósito, por el poco tiempo asignado para estudiarlas. Se debe considerar también la carga de estudiar las otras materias para su formación, dificultando aún más el que consoliden los conocimientos matemáticos que se requieren para enseñar esta disciplina.

### *1.1.2 Actualización docente en servicio. El caso de las matemáticas*

A partir del Acuerdo Nacional para la Modernización de la Educación Básica se generaron modelos de formación permanente del profesorado. El objetivo es que éste logre una práctica constructivista a través de programas y cursos de instancias muy diferentes, entre ellas escuelas normales de diversos tipos, universidades pedagógicas, instituciones universitarias, sistemas a distancia, dependencias federales y estatales e instituciones privadas. Sin

embargo la principal instancia para esta instrumentación son los Centros de Capacitación y Actualización del Magisterio (CECAM). El docente no está obligado a tomar los cursos y muchas veces su elección se dirige más a lograr puntajes, acomodarse a sus horarios, etc. Este sistema se encuentra vinculado con el esquema de carrera magisterial.

Algunas de las críticas u opiniones que han manifestado diversos autores acerca del sistema de actualización docente en servicio son:

- Según Latapí (2003), algunos programas de actualización y fortalecimiento académico, como el Programa para la Transformación y el Fortalecimiento Académicos de las Escuelas Normales y el Programa Nacional para la Actualización Permanente de los Maestros de Educación Básica en Servicio (Pronap), se han cuestionado debido a que ofrecen objetivos restringidos.
- Los programas de actualización y su enfoque tienen un escaso impacto sobre la docencia y la calidad de la educación. Por ello se requiere que sean revisados a la luz de las experiencias y evaluaciones (Bransford, citado en Latapí, 2003).
- Martínez (2006) señala que los cursos del sistema de actualización no abordan contenidos de interés para la enseñanza de las matemáticas, ni las necesidades de los profesores, y mucho menos la problemática de su implantación en el aula. También comenta que este sistema funciona para mejorar los ingresos del magisterio y no como un sistema de evaluación; argumenta que no existe evidencia de que influya en el mejoramiento de prácticas docentes ni, por tanto, en la calidad de la educación.
- Fullan (citado en Martínez, 2006), señala que los cursos de instancias oficiales para la capacitación y actualización del profesorado incurren en los siguientes errores: 1) la selección de temas es realizada por personas que no son las que van a recibir la formación; 2) en pocos casos, las ideas y las prácticas implementadas tienen un seguimiento; 3) los cursos tratan raramente las necesidades y preocupaciones

individuales de los participantes; 4) no hay un reconocimiento general de las diferencias en las dimensiones positivas y negativas en el sistema al que han de regresar pues en los cursos participan docentes de escuelas o zonas muy distintas; y 5) no existen bases conceptuales para planear y ejecutar cursos que aseguren su efectividad.

Al hablar de actualización docente se debe reflexionar sobre las formas en las que aprende el maestro, pues lo hace continuamente, ya que para su profesión necesita constantes renovaciones en las disciplinas que enseña, tanto para su difusión como para su apropiación. Debe considerarse como un proceso permanente, para que el docente realmente logre consolidar estos conocimientos.

Al analizar el desarrollo profesional de los profesores en el campo de las matemáticas se han considerado como variables el conocimiento, las concepciones, las creencias y los procesos de pensamiento de los profesores como un punto de referencia desde la psicología cognitiva (Llinares, 1996).

Cuando se plantea la pregunta de ¿Cómo aprenden los maestros? Latapí (2003) señala que el docente debe empezar por analizar sus propias necesidades de aprendizaje, lo cual contribuiría a elegir una oportunidad de actualización, que no fuera con el objetivo de un puntaje sino por la posibilidad de crecimiento profesional.

## **1.2 Tipos de conocimientos del docente**

En esta sección se tratará, por una parte, la visión de Shulman (1986) acerca de los conocimientos de los maestros y, por otra, más específicamente lo referente al conocimiento que según la SEP tienen los maestros acerca de los contenidos sobre proporcionalidad.

### *1.2.1 Las categorías de Shulman*

En la literatura se habla sobre la carencia en el manejo del contenido en la formación del profesor. En su artículo clásico sobre el tema, Shulman (1986)

señala que la persona que enseña contenidos debe demostrar conocimiento de dicho contenido como pre-requisito de la enseñanza. Por tal razón resulta importante conocer cuáles son las fuentes de conocimiento de los maestros, por ejemplo, las estrategias de resolución de problemas, cómo llegó a adquirir tal conocimiento y cómo lo usa en la enseñanza.

Así mismo, Shulman realiza las siguientes preguntas que según él tienen que ver con el conocimiento de contenido del docente:

¿Cómo el contenido se ha transformado desde el conocimiento del maestro en el conocimiento que se enseña?

¿Cómo las formulaciones particulares de ese contenido se relacionan con lo que los estudiantes llegan a conocer? ó ¿cómo lo construyen equivocadamente?

Shulman llamó a la ausencia de un enfoque de contenido como el problema del “paradigma perdido”. No obstante indica que el énfasis actual está en cómo los maestros administran aulas, organizan actividades, estructuran tareas, etc. Plantea que no hay referencias acerca del contenido de las lecciones que se enseñan, comenta que desde la formación inicial y profesional de los maestros surgen preguntas como ¿de dónde vienen las explicaciones que dan los maestros? ¿Cómo es que los maestros deciden qué enseñar, cómo lo representan, cómo se les puede preguntar a los maestros acerca de ello y cómo trabajar con problemas de mal entendimiento? Indica que estas preguntas se plantean pero desde la perspectiva de los aprendices. Shulman aclara que su investigación no intenta denigrar la importancia del conocimiento de la comprensión pedagógica o la habilidad en el desarrollo de un maestro, sólo que para juntar estos aspectos de las capacidades de un maestro se requiere prestarle atención tanto a los aspectos del contenido de la enseñanza, como a la atención dada a los procesos de enseñanza.

Distingue para este fin tres categorías de conocimiento de contenido:

- a) El conocimiento del contenido matemático (MCK, por sus siglas en inglés). Este conocimiento implica la organización del contenido en la

mente del maestro, lo que implica mucho más del mero conocimiento de los hechos y los conceptos del campo. Este conocimiento requiere de la comprensión de las estructuras sustantivas y sintácticas de la materia: las estructuras sustantivas son las diversas maneras en que los conceptos básicos y los principios de la disciplina se organizan para incorporar hechos, y las estructuras sintácticas son el conjunto de maneras en las que se establece si algo es cierto o falso, válido o no válido (Schwab, citado en Shulman, 1986).

- b) El conocimiento del contenido pedagógico (PCK, por sus siglas en inglés). Habla de la forma particular del conocimiento del contenido que toma parte en los aspectos más relacionados con su enseñanza. Se incluyen temas que regularmente se enseñan más en el área que se imparte, las formas más útiles de representar estas ideas, las analogías más poderosas, ilustraciones, ejemplos, etc. Es decir, se habla de las maneras de representar y formular el tema para que otros lo comprendan. También aborda lo que hace al aprendizaje de un determinado tema fácil o difícil, las diversas estrategias para reorganizar el entendimiento de los aprendices, y cuándo las concepciones y las pre-concepciones de los estudiantes de diferentes edades y procedencias pueden ser o no erróneas.
- c) El conocimiento curricular. Este conocimiento incluye el rango completo de programas designados para la enseñanza de temas particulares en un determinado nivel, sus materiales, sus características e indicaciones para su uso. Estos programas son herramientas de enseñanza que presentan un contenido particular y que evalúan qué tan adecuado es el desempeño de los estudiantes. Por lo tanto se espera que un maestro posea conocimientos de las alternativas que son disponibles para la instrucción, considerando el aspecto vertical de ese conocimiento curricular, es decir los tópicos y temas que han sido y serán enseñados en la misma materia durante los años anteriores y posteriores en la escuela y los materiales que van con ellos.



### 1.2.2 Conocimiento del contenido de proporcionalidad

El desconocimiento del contenido que enseña el docente es fuente de gran parte de sus limitaciones para diseñar y desarrollar procesos didácticos más significativos (Martínez, 2006). Esto es de gran importancia que se tome en cuenta si se desea mejorar el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas.

En la formación del docente se inicia el estudio del contenido de proporcionalidad en la licenciatura de educación primaria en el curso las Matemáticas y su Enseñanza I en el bloque III “las cuatro operaciones básicas con números naturales” (SEP, 1998). El resto de los tópicos relativos a este tema se encuentran en el curso de Matemáticas y su Enseñanza II (SEP, 2002a). En primer lugar, en el bloque II “los números racionales” en el apartado sobre multiplicación por una fracción, y posteriormente en el bloque III “procesos de cambio”, donde se estudian explícitamente situaciones sobre magnitudes proporcionales y se abordan nociones relacionadas como razón, porcentaje y escala. Finalmente se introduce la noción de función y su representación en el plano cartesiano, y se define la relación de proporcionalidad como una función lineal.

Los propósitos de este último bloque buscan que, a través de sus actividades, los estudiantes:

- Distingan las magnitudes proporcionales de aquellas que no lo son y analicen los procedimientos que se generan en función de las magnitudes o en función de los números que se utilizan.
- Analicen la pertinencia de usar el valor unitario, la regla de tres u otro procedimiento al resolver problemas de proporcionalidad.
- Utilicen e interpreten tablas de dos columnas y gráficas relacionadas con problemas de proporcionalidad.
- Analicen algunos casos de proporcionalidad inversa y de proporcionalidad múltiple.

- Conozcan la relación entre la función lineal y las situaciones de proporcionalidad directa.
- Conozcan el proceso evolutivo del razonamiento de los niños en situaciones de proporcionalidad.
- Conozcan, de manera general, la forma en que las situaciones de proporcionalidad se van haciendo complejas a lo largo de la primaria (*Ibid*).

El material designado para este bloque es el Paquete didáctico *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Taller para maestros. Segunda parte*, en el que se abordan los siguientes temas:

- Las magnitudes proporcionales y las magnitudes no proporcionales;
- La variable “magnitudes del mismo tipo-magnitudes distintas” y los procedimientos de solución que se generan (razón interna y razón externa);
- La variable “tipo de números” y los procedimientos que se generan;
- La relación proporcional entre magnitudes de distinto tipo. El caso de las magnitudes derivadas (velocidad, densidad). Cantidades intensivas y cantidades extensivas;
- El porcentaje;
- La proporcionalidad “múltiple”;
- La proporcionalidad inversa;
- Los contenidos de proceso de cambio a lo largo de la escuela primaria; y
- El desarrollo de la noción de proporcionalidad en los niños.

### 1.3 Una reflexión final sobre el tema

El considerar el papel del docente para remediar y mejorar los resultados en la calidad de la educación, debería implicar el análisis de su formación y actualización.

En cuanto al análisis de la formación inicial del docente en matemáticas, se considera importante que los docentes consoliden y profundicen sus conocimientos acerca de las matemáticas, aunque algunos de los medios para cumplirlo lleguen a ser insuficientes. Ejemplo de ello son las reducidas horas establecidas en los actuales cursos de Matemáticas y su Enseñanza para abarcar el estudio de la curricula de educación primaria y el material asignado para estudiarlo, agregando que en los semestres en los que se cursan, los estudiantes llevan también cursos para enseñar otras materias. También se ha de considerar que la elaboración del material con el que se pretende preparar a los futuros docentes no fue destinada a ellos sino que estaba destinada a la formación continúa. El paquete didáctico contiene la mayoría de las actividades para el estudio de dichos cursos.

Es de importancia valorar que se pretende utilizar materiales, dirigidos a la actualización docente, para la formación inicial. Sin embargo, no son lo mismo los alumnos de 2° y 3° semestres de la licenciatura de educación primaria que inician precisamente en estos semestres actividades en la escuela primaria (tareas de enseñanza), que los docentes que se encuentran frente a grupo día a día, y que tienen más experiencia y un dominio diferente de la disciplina.

La actualización de los docentes debería tratarse como una preparación necesaria para que los docentes puedan desarrollarse profesionalmente, es decir que les proporcione herramientas y ciertos conocimientos que les ayuden a prepararse a cambios que se den a través del tiempo y no sólo les ayuden a enfrentarse a problemáticas actuales o del pasado. Estos conocimientos deben generarse a través de investigaciones didácticas, de estudios sobre el aprendizaje y de políticas de la educación. Con todo esto no se debe olvidar que no es conveniente sólo considerar estos aspectos, ya que eso lleva a

reducir las horas de formación específica de las matemáticas, lo que es una medida incorrecta ya que “para transmitir cualquier saber concreto, lo primero de todo es tenerlo” (De la Torre, Díaz, y Guerrero, 2006).

Algunos puntos de análisis que contribuirían para mejorar la actualización del docente son:

- Considerar que lo aprendido por el docente toma parte en su enseñanza.
- Que el docente reflexionara acerca de los conocimientos que posee y lo que sería importante que conociera, para que le resultara ser más fácil y efectiva su labor de enseñanza.
- Cuáles son las necesidades de aprendizaje sobre las disciplinas que enseña.
- Que el docente reconociera que el conocimiento que posea sobre estrategias de solución de problemas (conocimiento del contenido) puede resarcir obstáculos en los aprendizajes de los estudiantes.

El conocer los puntos anteriores coadyuvaría a elaborar planes y programas de apoyo actualizados para la preparación de los docentes y basados en sus necesidades.

El análisis de la formación y actualización del docente tal vez contribuiría a comprender cómo el estudiante aprende.

## CAPÍTULO 2. PIAGET: EL DESARROLLO COGNITIVO

La psicología del desarrollo plantea que la formación de la inteligencia y el conocimiento tienen una organización a través de estructuras variables en los aspectos motor, social y afectivo, en dimensiones individuales y sociales, las cuales se presentan como una serie de etapas de desarrollo.

El desarrollo orgánico y psíquico del ser humano consiste en una marcha al equilibrio de menor a mayor grado; de ese modo, el desarrollo mental es continuo y pasa por una serie de construcciones que generan estructuras variables con sucesivos equilibrios, los cuales aseguran el paso de un nivel al siguiente.

Ahora bien, “la información que surge del exterior (del medio) se integrará en un esquema ya existente en el individuo; a este proceso se le conoce como asimilación de información y, consecutivamente, tiene el objetivo de cambiar los procesos mentales cuando un nuevo objeto o idea no encaja de manera *significativa* en los esquemas ya existentes. De este modo, con la información recibida del exterior, el sujeto tendrá que realizar una modificación en su respuesta-acción frente al(los) objeto(s) o situaciones que enfrenta de manera permanente; a este proceso se le denomina acomodación” (Piaget, 2002, p. 16).

La teoría que desarrolló Piaget enfatiza que “el conocimiento es un conjunto de informaciones que se interrelacionan haciendo vínculos que permiten almacenarlo, recuperarlo y hacer uso de él. Así, con el modelo de estructura cognoscitiva operatoria se explica la forma de pensar de los sujetos operatorios. Por ello se dice que el sujeto integra de modo ordenado la información del exterior, la asimila y la usa para dar respuesta ante el objeto, que acomoda el esquema de acción” (Piaget, 1978, p. 36).

La acción que realice un sujeto ante un objeto siempre revelará una *necesidad*; esta *necesidad* forzaría un desequilibrio, para posteriormente volver a

obtener un equilibrio; cuando esa *necesidad* (del exterior o interior) quede satisfecha, entonces se dirá que el sujeto se encuentra en equilibrio.

La teoría de equilibración es el modelo al que Piaget recurre para explicar la forma en que un individuo hace el proceso de adquisición de conocimiento, visto como un proceso de adaptación con equilibrio. El propósito es, entonces, explicar cómo se producen dichas operaciones.

“Estas estructuras de conjunto requieren estar en un sistema de equilibrio, pero para llegar a ese estado de equilibrio, la acción del sujeto (mental o motora) tiene que producir un desequilibrio, consecuentemente se compensará y necesitará de un mecanismo regulador para lograr un equilibrio”. Esto ocurre según Piaget (citado en Carretero y Martín, 1997, p. 210), de la siguiente manera:

- De un esquema de acción a un objeto exterior. Son los esquemas del sujeto ya existentes con acontecimientos externos.
- De un sistema de acción a otro esquema de acción. El sujeto hace una coordinación entre el grupo y el objeto; se establece ya un equilibrio.
- La diferenciación e integración de esquemas en uno más general. El sujeto observa que en los grupos A, B y C existen objetos de diferente tamaño, pero crea un nuevo grupo donde generaliza que esos tres grupos pertenecen a uno solo.

Por lo tanto el sujeto construye operaciones a partir de una interacción con los objetos que encuentra en su medio, obteniendo como resultado un conocimiento nuevo. El sujeto podrá hacer una reconstrucción de las acciones y objetos que se encuentren presentes dentro de su sistema, es decir; que el sistema de equilibrio se refiere cuando al sujeto se le presenta un nuevo conocimiento el sujeto lo recibirá, lo procesará, lo ordenará y lo utilizará. Un ejemplo de ello es cuando al niño se le presentan las vocales, manifestándole sus características comunes (pertenecen al mismo grupo) y propias (fonéticas y su trazo) el niño las incluirá como un nuevo conocimiento.

El estudio del desarrollo psíquico de las funciones cognitivas plantea relaciones entre el organismo y el medio a través de etapas secuenciadas que tienen características muy especiales; dichas etapas se integran y son necesarias para que cada una sea el resultado que precede a la anterior.

Este enfoque se caracteriza por cuatro estadios o periodos de desarrollo con ciertas estructuras cognitivas específicas que todo individuo humano construye sucesivamente gracias a mecanismos externos e internos. A continuación se presenta una descripción breve de los estadios.

## **2.1 Descripción de los estadios**

### *2.1.1 Estadio sensorio motor (0-2 años)*

El sujeto manipula objetos, utiliza percepciones y movimientos organizados en “esquemas de acción”; así, esta inteligencia coordina acciones sin por ello tener representaciones o pensamiento. Dentro del estadio de los primeros hábitos motores, se adquieren conductas condicionadas y se forman hábitos de movimiento consolidadas con ayuda de la experiencia.

“Durante los dos años, aproximadamente, que dura este estadio se generan cuatro procesos fundamentales: la construcción de las categorías del objeto y del espacio, de la causalidad y del tiempo, como categorías de acción pura, para después pasar a ser nociones del pensamiento” (Piaget, 1995, p. 25).

### *2.1.2 Estadio preoperatorio (2-7 años)*

Es también llamado el estadio de la inteligencia intuitiva, porque en él aparece el lenguaje y se modificarán las estructuras afectivas e intelectuales del sujeto. Debe tenerse en cuenta que los esquemas anteriores le permitirán al niño recrear sus acciones pasadas en forma de relato y anticipar sus necesidades por medio del lenguaje.

Este proceso se manifiesta en cuatro momentos. El primero es a través de la interacción del sujeto hacia el medio y el adulto. En la segunda situación, el sujeto ya domina el lenguaje y con éste podrá explicarse a sí mismo y explicar a los demás sus propias acciones y anticipar sus conductas futuras. El tercer momento es cuando el sujeto desarrolla una inteligencia práctica, con la cual se observa la manipulación directa de los objetos que se encuentran en su medio. Posteriormente adquirirá una experiencia que lo llevará a una interiorización y consecuentemente a la intuición. Finalmente se encuentra la socialización que parte de la correspondencia entre el desarrollo afectivo y las funciones intelectuales. A través del desarrollo afectivo se distinguen los sentimientos individuales (simpatías y antipatías), los cuales son expresados por un sentimiento moral intuitivo, que posteriormente, una vez trastocados en intereses y valores son, expresados por un pensamiento intuitivo general.

### *2.1.3 Estadio de las operaciones concretas (7 -11 años)*

Durante este periodo el sujeto realizará operaciones que expresará de diversas maneras; una conclusión de estas manifestaciones es que una acción es dependiente de otra; es decir, toda acción que ejecuta el sujeto está dentro de una estructura organizada y no puede desvincularse. La siguiente característica es la reversibilidad. Esto hace referencia a una acción ejecutada por el sujeto que puede efectuarse en doble sentido o dirección (directa e inversa).

En consecuencia, las operaciones que realice el sujeto se caracterizarán porque están relacionadas entre sí y a la vez son independientes de las demás. “Utiliza estructuras lógico-matemáticas como modelos para describir las estructuras cognitivas que constituyen las operaciones”. (Piaget, citado en Carretero y Martín, 1997, p. 210). Con esto se puede describir el proceso por el cual el sujeto atraviesa para pasar de una estructura a otra.



El sujeto adquiere la capacidad de agrupar, conservar, clasificar, también adquiere la noción del espacio, del tiempo y velocidad, causalidad y azar, y logra entre otros, el concepto de número.

#### *2.1.4 Estadio de las operaciones formales (12 años en adelante)*

Cuando el sujeto llega a la etapa de la adolescencia presenta cambios físicos, afectivos y cognitivos. Antes de llegar a esta etapa el sujeto mostró un progreso que consistió en el tránsito de la manipulación del objeto, a la acción inmediata y finalmente, la interiorización de esa acción. Ahora bien, el sujeto tiene como objetivo pasar de la acción a la operación (reconstruir una acción con el pensamiento): es el paso de la centralización a la descentralización.

Señalado por Piaget éste es el último proceso por el cual atraviesa el sujeto para lograr un pensamiento lógico sobre conceptos abstractos e hipótesis, así como también concretos en su desarrollo cognitivo.

## **2.2 Características del estadio de las operaciones formales**

El pensamiento del sujeto se caracteriza ahora por dos tipos de propiedades, que son las funcionales y formales, que se describen a continuación.

### *2.2.1 Propiedad funcional*

Representa las formas o estrategias para abordar y tratar los problemas planteados. Éstas se distinguen en tres situaciones. Una de ellas se refiere a cuando se opera sobre lo real y lo posible; el sujeto hará explícita su estrategia para resolver una tarea o un problema planteado y lo comprobará dentro de su vida cotidiana mediante la experimentación, por último lo analizará para obtener sus propias conclusiones.

La segunda situación se distingue porque se hacen todas las relaciones posibles; es decir, el sujeto deberá apartarse de lo real y situarse en el plano de la posibilidad, de la cual elaborará una hipótesis. Combina todas las relaciones posibles entre objetos o factores, ideas o proposiciones; para esto es necesario realizar operaciones de clasificación o de relaciones de orden.

Esta nueva forma de razonar llevará al sujeto a una lógica “hipotético – deductiva”, en la que el sujeto realizará la abstracción de sus creencias y la de los demás. Esto es visto de la siguiente manera:

- El sujeto descarta aquellas hipótesis simples, cuando reconoce que lo son, y deja aquellas hipótesis que comprueba mediante la práctica; estas hipótesis podrán volverse posteriormente teoría.
- El sujeto comprende lo que está sucediendo en un hecho y hace la abstracción de que el hecho se puede comprobar sin tener que llevarlo a la práctica. Por ejemplo, se le presentan dos recipientes llenas de agua en el mismo nivel y se le pregunta qué sucedería si se introdujera un barco de papel; el sujeto, sin tener que realizar la acción, conoce la respuesta.
- El sujeto confirma una hipótesis realizando el análisis y la comprobación de acción de las variables que intervinieron.

Según Inhelder y Piaget, “El comportamiento de los sujetos supone a veces que poseen la capacidad de formular hipótesis, pero no son capaces de comprobarlas adecuadamente, pues no aíslan a los factores entre sí, ni los llegan a combinar de todas las formas posibles” (citado en Carretero, 1997, p.43).

Finalmente (tercera situación) el sujeto para poder afirmar o negar su hipótesis, utiliza una operación de carácter proposicional, razona sobre ella al hacer una operación proposicional, ya sea implicación (si o entonces), disyunción (uno u otro), exclusión (o), o incompatibilidad (uno y no el otro).

El sujeto actúa sobre la acción (hace una operación sobre otra operación) mientras que el sujeto del periodo anterior piensa la acción sobre los datos-hechos

que tiene presentes. El razonamiento del sujeto tendrá también como herramienta al lenguaje, pues habrá adquirido la posibilidad de formular más proposiciones (hacer más frases) y poder combinarlas o relacionarlas.

Con el pensamiento deductivo el sujeto hace afirmaciones sobre acontecimientos (va de lo general a lo particular): el sujeto podrá inferir una conclusión a partir de varias proposiciones. Entonces:

- El razonamiento del sujeto se da con una proposición molecular (unión de varias preposiciones atómicas) que parte de dos premisas para obtener una conclusión.
- Cuando un objeto “cae” sobre una categoría general (subsumir), el sujeto clasifica de manera inmediata, por ejemplo: todos los animales vertebrados son diferentes a los animales invertebrados, pero las dos clasificaciones se encuentran en sólo una: “los animales”.
- El sujeto argumentará, dará razones por algo que va a hacer y se le exigirá que dé razones.
- Por último la lógica del sujeto servirá para encontrar razones a sus acciones.

Para ejemplificar este primer avance del pensamiento del sujeto, se tiene como ejemplo el problema del péndulo: ¿Qué variable determina el número de oscilaciones del péndulo, el peso, la longitud del hilo, la altura en la que se dispone al hacer el empuje o la fuerza que se utiliza al hacer el empuje?

Para determinar una solución, el sujeto estructurará su pensamiento de una manera sistemática. Concebirá todas las relaciones posibles entre las variables y los factores del problema planteado, con los cual formulará una hipótesis, finalmente realizará una comprobación mediante la manipulación del material.

### 2.2.2 Propiedad formal

La segunda propiedad formal del pensamiento del sujeto se caracteriza por la capacidad de los sujetos para operar simultáneamente con las siguientes cuatro operaciones mentales o llamado grupo de INRC:

- Identidad (I): no cambia una proposición establecida.
- Negación (N): cambiar una variable por su contrario.
- Reciprocidad (R): la variable cambiada tiene que producir el mismo efecto que la anterior.
- Correlación (C): consiste en regresar la variable anterior.

“Piaget e Inhelder las utilizan porque opinan que los adolescentes son capaces de resolver los problemas que suponen no sólo la realización de operaciones lógicas como la implicación, la disyunción, la exclusión y otras, sino también los que implican estructuras o sistemas más amplios que contienen las citadas operaciones” (Carretero y Martín, 1997, p. 48).

Cuando se combinan de dos en dos esas cuatro operaciones lógicas, se tienen 16 combinaciones que se muestran en el siguiente cuadro.

	<b>I</b>	<b>N</b>	<b>R</b>	<b>C</b>
<b>I</b>	I	N	R	C
<b>N</b>	N	I	C	R
<b>R</b>	R	C	I	N
<b>C</b>	C	R	N	I

#### **Grupo INRC**

Tomado de (Fiol y Fortuny, 1990, p.99).

Por ejemplo, la negación (N) y reciprocidad (R) dan una correlación (C); esto es  $NR=C$ ; dicho de otra manera, la negación de una reciprocidad es una correlación.

Esa combinatoria de las 16 operaciones binarias forma un grupo de Klein, que tiene ciertas propiedades matemáticas:

“Se considera que el grupo de Klein cumple con las siguientes propiedades: a) la operación realizada es interna, porque al operar elementos del grupo se obtiene un elemento de este grupo; b) que cada elemento es inverso de sí mismo; c) existe un elemento idéntico; y d) se cumple con la propiedad asociativa; finalmente el grupo de INRC actúa sobre las 16 proposiciones lógicas.”(Fiol y Fortuny, 1990, p.99).

El discurso del sujeto se distingue en este estadio por ser racional y convincente; también explicará el porqué de una acción, basado en un fundamento lógico.

El sujeto podrá combinar entre sí objetos o factores, ideas o proposiciones que intervienen en una situación cuya relación efecto–causa se desconoce, de manera completa y sistemática. Y tendrá la capacidad para concebir todas las relaciones posibles entre los elementos de un problema.

Los esquemas operatorios formales del desarrollo cognitivo se caracterizan porque el sujeto combina objetos y proposiciones de todas las maneras posibles, comprende que existe una igualdad entre las acciones realizadas y que éstas pueden compensarse o anularse, también reconoce que existe un equilibrio entre la primera y la segunda variable (acción y reacción) y adquiere la nociones de probabilidad, de correlación y de compensaciones multiplicativas.

En este estadio se marca un desarrollo importante en los procesos del pensamiento; éstos son más complejos porque el sujeto comprende y utiliza conceptos abstractos, utiliza operaciones matemáticas, prescindiendo de objetos concretos, utiliza fórmulas, fracciones, proporciones, decimales, etc.

### 2.2.3 *El razonamiento proporcional en el estadio de las operaciones formales*

Piaget estudió diversos aspectos y presentaciones del concepto de proporcionalidad. A partir de 1946 estudia el movimiento y la velocidad; la noción de proporción interviene cuando se trata de comparar dos movimientos siendo distintos los espacios recorridos y los tiempos empleados. En 1951 estudia con Inhelder el desarrollo de la noción de azar en el niño; la idea de probabilidad aparece, por ejemplo, cuando se atribuye el mismo valor a dos casos favorables sobre cuatro posibles o a tres casos favorables sobre seis posibles. Piaget y otros, (citado en Fiol y Fortuny, 2000) se enfocan en el estudio de las funciones, y entre ellas el de la función lineal, estudiada en unos ejemplos hoy ya clásicos (peces que comen según su longitud), considerando primero ejemplos de magnitudes discontinuas, y en segundo lugar, de magnitudes continuas.

La razón principal para el estudio de las proporciones en el dominio espacial es que, según Piaget, el análisis de los estadios es mucho más fácil que en el terreno no geométrico. Y esto ya que antes de saber razonar sobre figuras semejantes, el individuo tiene que saber discernir, sólo por simple percepción, si determinadas figuras están en la misma razón o no. Así afirma: “la génesis de la proporción se tiene que buscar en la percepción de las figuras” (Piaget, citado en Fiol y Fortuny, 2000, p.98).

La probabilidad es el resultado de la unión de la noción combinatoria y la proporción. El sujeto plantea una serie de las acciones probables y no probables que puedan suceder en un evento. La proporción, por otro lado, es considerar conjuntamente dos variables, y viendo qué cambios ocurren en una cuando se modifica la otra. Se habla de proporcionalidad cuando esos cambios son de naturaleza multiplicativa (no aditiva); por ejemplo la velocidad y tiempo.

La proporción implica dos variables simultáneamente, lo cual implica un razonamiento matemático con esquemas operatorios formales. Se puede tratar de

proporcionalidad espacial (figuras semejantes), velocidades métricas (km/hr), probabilidades, relaciones cualitativas, etc. Esto se verá más específicamente en el Capítulo 3 “Razonamiento proporcional”.

Con respecto a los problemas de proporcionalidad que involucran cuatro números, una de las cosas que según la teoría Piagetiana distinguen al estadio de las operaciones concretas del estadio de las operaciones formales es que en el estadio anterior al estadio formal el sujeto sólo puede comparar una pareja de números, mientras que en el estadio de las operaciones formales el sujeto, como puede realizar acciones sobre las acciones, puede comparar parejas de parejas de números.

Es importante mencionar que Piaget trabajó exclusivamente con sujetos menores de edad; en la presente investigación los participantes son mayores de edad. Una pregunta que es posible plantearse es si los supuestos recién mencionados de la teoría Piagetiana acerca de la resolución de problemas de proporcionalidad se cumplen o no.

## **CAPÍTULO 3. EL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL**

El primer estudio sobre razonamiento proporcional fue realizado por Inhelder y Piaget (citados en Sanz, Pozo, Pérez y Gómez, 1996). Estos autores señalaron que el razonamiento proporcional es uno de los ocho esquemas formales, el cual se alcanza en el periodo de operaciones formales conformando una estructura cognitiva general. Agregan que al alcanzar este esquema, el sujeto estaría capacitado para resolver cualquier tarea proporcional independientemente del contenido.

### **3.1 Algunas definiciones**

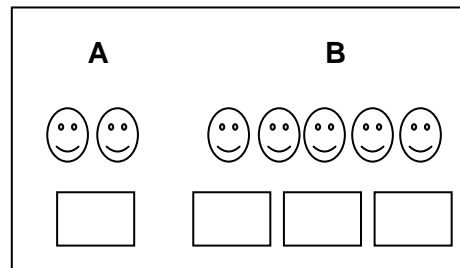
Lesh y otros autores citados en Alatorre (2004), describen al razonamiento proporcional como “una forma de razonamiento matemático, [que] involucra un sentido de covariación, comparaciones múltiples y la capacidad para almacenar y procesar mentalmente varias proporciones de información. El razonamiento proporcional tiene mucho que ver con la inferencia y la predicción, e involucra métodos de pensamiento tanto cualitativos como cuantitativos”.

Se entiende que “una razón es una pareja ordenada de números o de valores de magnitud” (Freudenthal, citado en Alatorre, 2004). Los problemas de razonamiento proporcional implican cuatro números, agrupados en dos parejas de razones. Cada razón está formada por un antecedente y un consecuente. Siempre se expresa en primer lugar el antecedente (a) y en segundo el consecuente (c), como  $a:c$ ; pero la determinación de cuál de los dos números involucrados en una razón es el antecedente y cuál es el consecuente depende de la pregunta que se plantea.

Véase un ejemplo: supóngase que en el patio de una escuela A hay 2 niños jugando en un área determinada con una baldosa, y en una escuela B hay 5 niños



jugando en 3 baldosas del mismo tamaño a la anterior, como se ilustra en la siguiente figura:



**FIGURA 1**

En este problema se tiene los siguientes números: 2, 1, 5, 3. Dos de ellos se refieren a una magnitud (la cantidad de niños) y los otros dos se refieren a otra magnitud (la cantidad de baldosas). Además, dos números se refieren a uno de los “objetos” que se comparan y los otros dos al otro (en este caso los dos “objetos” son las dos escuelas).

Se pueden plantear dos preguntas en este contexto:

1) ¿Dónde están más apretados los niños para jugar?

En este caso se tiene que:

- + Mientras más niños, más apretados están los niños.
- Mientras menos baldosas, más apretados están los niños.

Entonces, en cada una de las razones que se consideran (una por escuela),

- + El antecedente son los niños.
- El consecuente son las baldosas.

Y las razones son:

Para la escuela A, 2:1

Para la escuela B, 5:3

2) ¿Dónde tienen más espacio los niños para jugar?

En este caso se tiene que:

- + Mientras más baldosas, más espacio tiene cada niño.
- Mientras menos niños, más espacio tiene cada niño.

Entonces en cada una de las razones que se consideran (una por escuela),

- + El antecedente son las baldosas.
- El consecuente son los niños.

Y las razones son:

Para la escuela A, 1:2

Para la escuela B, 3:5

### 3.1.1 Los distintos problemas de razonamiento proporcional

Los problemas de razonamiento proporcional se clasifican según Alatorre (2004) en dos tipos:

Problemas de valor perdido. También son llamados de cuarta proporcional. En estos problemas se da por sentado que hay una proporcionalidad; es decir, las dos razones son iguales. Pero se desconoce uno de los cuatro números. Por ejemplo: si se sabe que 3kg de maíz cuestan \$24, ¿cuánto costarán 5kg de maíz? Esto se puede expresar así: 3 es a 24 como 5 es a x; es decir  $3:24::5:x$ . Otra manera de plantear la información es en un arreglo como el que aparece en el recuadro.

3		\$24
5		\$ x

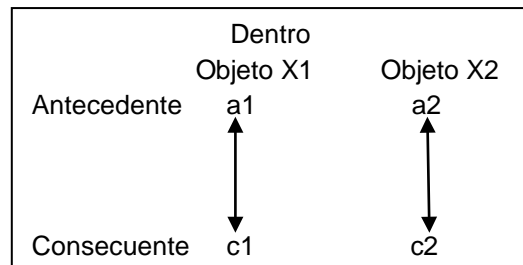
Para solucionar el problema se pueden utilizar varias estrategias. Por ejemplo, se puede encontrar la razón unitaria, es decir; para conocer el precio de 1kg de maíz, se realiza la siguiente operación  $\$24 \div 3 = \$8$  y después multiplicar este resultado por 5 para encontrar el precio de los 5kg,  $\$8(x)5 = \$40$ . Otra estrategia es la conocida regla de tres:  $x = 5(x)24 \div 8 = 40$ .

Problemas de comparación de razones. En estos problemas se presentan los cuatro números pero lo que se desea averiguar es si hay o no proporcionalidad y, si no la hay, dónde es mayor la razón. Por ejemplo si 3kg de maíz cuestan \$24 y 5kg de trigo cuestan \$42, ¿qué está más barato, el maíz o el trigo? Ahora las dos razones a comparar son 3:24 y 5:42, y nos preguntamos cuál es mayor, o si son iguales. También se puede expresar con el siguiente arreglo (3,24) (5,42) o bien de esta manera, como se presenta en el recuadro:

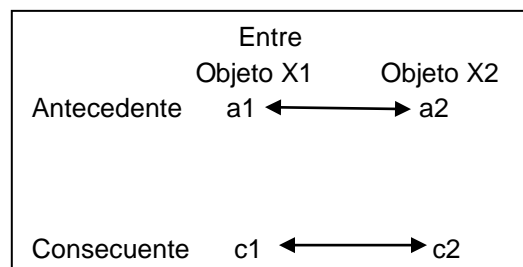
3	\$24
5	\$42

En general, se puede hablar de este esquema, como se vio en el Capítulo 2 sobre El desarrollo cognitivo según Piaget, para quien el razonamiento proporcional implica una acción sobre la acción, es decir la comparación de los resultados de dos comparaciones:

Por ejemplo, el sujeto considera dos objetos (A y B). En cada uno de ellos, encuentra dos clases de elementos. Con los cuatro elementos el sujeto hará comparaciones de una de las dos siguientes maneras.



1. Esquema dentro: el sujeto compara los antecedentes y consecuentes de un mismo objeto (a1 y c1 en el primero objeto y a2 y c2 en el segundo) y obtendrá resultados de estas comparaciones. Posteriormente el sujeto hará de nuevo una comparación de los resultados obtenidos de la primera comparación que realizó (ambos objetos).
2. Esquema entre: el sujeto compara sólo antecedentes y los consecuentes de ambos objetos (a1 y a2, ó c1 y c2) y obtendrá resultados de estas comparaciones. Consecutivamente el sujeto hará una comparación de los resultados de esas comparaciones



(entre objetos).

Este es el tipo de problemas que se trabajarán en ésta investigación. Las estrategias que permiten resolver los problemas planteados se verán más adelante.

### *3.1.2 Tipos de problemas de comparación de razones.*

Los problemas de comparación de razones se pueden clasificar según varias categorías (Nesher y Sukenik, citados en Alatorre, 2004); entre ellas se destacan:

- Clasificación según el **contexto**, es decir según el tipo de historia involucrada en el enunciado del problema.
- Clasificaciones según la **estructura numérica**, es decir según el tipo de números y según el tipo de relaciones entre los números que aparecen en el problema.

A continuación se explican las características de estas clasificaciones:

#### A) Por contexto

De acuerdo a Alatorre (2004), los contextos se pueden clasificar en:

##### *Problemas de tasas*

- Relacionan dos unidades de medida diferentes

Ejemplo: Dos niñas (A y B) caminan distinta cantidad de cuadras en distintos tiempos (minutos). ¿Cuál niña camina más rápido, o caminan a la misma velocidad?

En el ejemplo anterior se observa que las unidades de medida de los términos de la razón son distintas: el antecedente (espacio recorrido) se mide en

número de cuadras y el consecuente (tiempo empleado en recorrer el espacio) se mide en minutos. Otro ejemplo sería el de los niños y las baldosas.

*Problemas de mezcla.* También llamados razones de parte-parte-todo

- Relacionan dos unidades de medida iguales.

Se pueden distinguir dos tipos de esta clase de razones:

*Mezcla simple*

Ejemplo: En dos jarras (A y B) se elabora agua de jamaica con distintas cantidades de vasos de concentrado de jamaica y de agua simple. ¿En cuál jarra la preparación tiene el sabor más fuerte, o tienen el mismo sabor?

En el ejemplo anterior se puede ver que la unidad de medida de los términos de la razón es la misma: tanto el antecedente (jamaica) como el consecuente (agua) se miden en cantidad de vasos (Alatorre, 2004).

*Mezcla probabilística*

Ejemplo: En dos botellas (A y B) se echan distintas cantidades de canicas azules y amarillas. Sólo se puede agitar una de las dos botellas y sacar una canica de ella; si la canica que salga es azul entonces se obtiene un premio. ¿Cuál botella conviene agitar, o da igual?

En este ejemplo se puede ver que la unidad de medida de los dos términos de la razón es la misma: tanto el antecedente (azules) como el consecuente (amarillas) se miden en cantidad de canicas (Alatorre, 2004).

*B) Estructura numérica*

Alatorre (2004) distingue 86 situaciones distintas de acuerdo con las relaciones entre los siguientes números de la pareja de razones:

- Los dos antecedentes.

- Los dos consecuentes.
- Los dos totales (antecedente más consecuente).
- Las dos diferencias (antecedente menos consecuente).
- Los dos cocientes parte-todo (antecedente sobre total).

Esas 86 situaciones se reclasifican a su vez en tres grandes categorías, denotadas Nivel I, Nivel II y Nivel III. Según Alatorre (2004), estas categorías son también categorías de dificultad creciente y se definen con base en las estrategias que pueden ser utilizadas para resolver exitosamente los problemas, por lo que se expondrán en el Capítulo cuarto de Metodología.

### **3.2 El razonamiento proporcional en los materiales dirigidos al docente de educación primaria**

Como se mencionó en el Capítulo 1, tanto la formación inicial como la actualización de los docentes de educación primaria se basan en los materiales de la SEP (1995). La definición ahí dada señala que dos magnitudes son directamente proporcionales cuando, al aumentar una cantidad, la otra aumenta en la misma proporción. También se dice que dos magnitudes son directamente proporcionales si el cociente entre dos cantidades correspondientes es siempre constante (Capítulo II “Procesos de cambio”, pág. 109).

El capítulo mencionado está organizado en el análisis de tres temas; en ellos hay una serie de actividades “situaciones problemas” sobre situaciones de proporcionalidad en las que una magnitud varía en función de otra. Con estas actividades se busca que el docente amplíe sus conocimientos sobre los contenidos matemáticos, a través de problemas que den sentido y muestren la utilidad de los conocimientos matemáticos y que reflexione sobre los procesos didácticos que pueden favorecer su adquisición.

En las siguientes páginas se muestran tres cuadros en donde se desglosan los temas para el contenido de proporcionalidad en el Capítulo II “Procesos de cambio”, con sus propósitos y algunas reflexiones sobre la didáctica.

<b>TEMA 1</b>		
<b>VARIACIÓN PROPORCIONAL Y NO PROPORCIONAL</b>		
<b>Actividades</b>	<b>Propósitos</b>	<b>Reflexiones para el proceso didáctico</b>
1 <i>Los engranes y las vueltas</i>	*Análisis de variación proporcional no proporcional. *Representación gráfica. *Encontrar procedimientos y recursos para resolver los problemas de proporcionalidad directa.	*Procedimientos de cómo calcular dobles, triples, mitades, cuartos, decimos, etc.; o sumar dos o más cantidades; para obtener datos faltantes en una tabla; son sencillos y permiten que los niños comprendan mejor la variación proporcional y sus propiedades. *Calcular el valor unitario, no es tan intuitivo, pero sirve al calcular dobles, triples, etc.
2 <i>Los rectángulos</i>	*Análisis de una situación de razonamiento proporcional. *Conocer la complejidad conceptual, al confrontar distintas estrategias de solución.	*La manipulación de material y el trabajo en grupo favorece el intercambio de ideas, así como el análisis de los procedimientos que se usan.
3 <i>Se hacen grandes, se hacen chiquitos</i>	*En la resolución de problemas confrontar el razonamiento proporcional con el aditivo, al comparar varias estrategias de resolución.	
4 <i>Distintos razonamientos frente a un mismo problema</i>	*Análisis de diferentes niveles de razonamiento de niños al resolver un problema de proporcionalidad.	*No hay una secuencia específica por la que deban pasar todos los niños. El razonamiento proporcional se desarrolla a lo largo de varios años, a través de numerosas experiencias.
5 <i>Qué hacen los niños</i>	*Que el maestro conozca los procedimientos iniciales de alumnos de 5° y 6° al resolver un problema de proporcionalidad, que implica el uso de operadores multiplicativos fraccionarios.	

**TABLA 1**

<b>TEMA 2</b>		
<b>EL PORCENTAJE</b>		
<b>Actividades</b>	<b>Propósitos</b>	<b>Reflexiones para el proceso didáctico</b>
1 <i>Tres cuartos, tres de cada cuatro o 75%</i>	*Se analizan diferentes formas de expresar la relación entre una parte y un todo o entre dos partes.	*Las fracciones permiten expresar la relación entre una parte y un todo, ya que, hay situaciones en las cuales lo que interesa saber es qué parte es una cantidad de otra cantidad, y no tanto conocer el número de elementos de esa cantidad.  *Las fracciones, los porcentajes y las expresiones “x de cada y” permiten expresar qué parte de una cantidad es otra cantidad.
2 <i>¿Nos toca dar lo mismo?</i>	*Análisis de una lección de 6° cuyo propósito es estudiar la noción de porcentaje como fracción de una cantidad, en un contexto en la que interesa que unas cantidades sean proporcionales a otras.	*El porcentaje de una cantidad, se puede expresar como una fracción de la cantidad y se utiliza para establecer una relación proporcional.
3 <i>Algunas maneras rápidas para calcular porcentajes.</i>	*Resolución de problemas de porcentajes a través de procedimientos sencillos.	* Comparar porcentajes con las fracciones $\frac{1}{2}$ , $\frac{1}{3}$ , $\frac{1}{4}$ , $\frac{1}{5}$ , $\frac{1}{10}$ , ayuda a tener una idea del tamaño que indica un porcentaje y permiten también, en algunos casos, facilitar los cálculos.  *Para calcular porcentajes de una cantidad, muchas veces resulta práctico calcular el 10%.y el 1%.  *Para calcular el 10% de una cantidad se divide la cantidad entre 10, es decir corriendo el punto un lugar a la izquierda. Para calcular el 1% de una cantidad, al ser equivalente a la centésima parte de la cantidad, se obtiene dividiendo entre 100, es decir, corriendo el punto decimal dos lugares a la izquierda. Estas formas de calcular los porcentajes son prácticas para hacer cálculos mentales, pero no deben proporcionarse prematuramente. Es importante que previamente los alumnos comprendan el significado de esta noción, y la puedan aplicar en varios contextos.
4 <i>Otros problemas de porcentaje</i>	*Analizar algunas expresiones en las que se utiliza el porcentaje.	

TABLA 2



<b>TEMA 3</b>		
<b>LA PROPORCIONALIDAD INVERSA</b>		
<b>Actividades</b>	<b>Propósitos</b>	<b>Reflexiones para el proceso didáctico</b>
1 <i>Entre más somos, menos nos toca</i>	*Distinguir dos tipos de variación proporcional: directa e inversa. *Analizar algunas propiedades de las magnitudes inversamente proporcionales.	*Dos magnitudes son inversamente proporcionales si cuando una aumenta, la otra disminuye en la misma proporción; también se puede decir que son inversamente proporcionales si al multiplicar las cantidades correspondientes, el producto es constante.
2 <i>Los materiales de trabajo</i>	*Resolver algunas actividades sobre la variación proporcional, de los libros de texto de Matemáticas de 4°, 5° y 6° grado.	El uso prematuro de fórmulas para resolver problemas de proporcionalidad directa evita la realización para desarrollar y comprender nociones importantes para estos procesos.

**TABLA 3**

Cabe mencionar que en algunas actividades no se menciona nada sobre su reflexión para el proceso didáctico, ya que en ellas se le plantean al docente preguntas sobre cómo resolvió el problema, los procedimientos que considera sencillos para resolverlos, etc., debido a que son situaciones problemas con variaciones para que los niños puedan realizarlas. También hay actividades dirigidas para que el docente resuelva lecciones de los libros de texto de matemáticas utilizando varias estrategias, sugiriéndole que analice la dificultad de éstas y de las lecciones.

Otro material que se le proporciona al docente para trabajar el tema de proporcionalidad es la Guía para el maestro de 6° (SEP, 1992). Aunque este material no está elaborado para la formación y actualización del magisterio, se toma en cuenta pues contiene información relevante sobre lo que se supone que el docente debe conocer acerca de enfoques para desarrollar en el niño nociones importantes relacionadas con el concepto de proporcionalidad.

### 3.2.1 Conceptos

En la Guía para el maestro de 6° se señala que la idea básica en la que se integra la proporcionalidad es la de comparación, y se menciona que se puede hacer una comparación cuantitativa de dos maneras:

Aditiva (por medio de la diferencia)

Multiplicativa (por medio de su cociente)

Las primeras actividades, que sirven de apoyo para construir la noción de razón, deben estar encaminadas a distinguir entre estos dos tipos de comparación.

Se aclara que ambas comparaciones son correctas y que se usa una u otra dependiendo de cuál es más apropiada en el contexto real; aunque se insiste en que la comparación aditiva no implica el establecimiento de una razón.

Se indica que la idea de comparación es fundamental, iniciándose en temas de suma y resta, con la noción de diferencia y que posteriormente en la multiplicación y la división, aparece la comparación del tipo: “¿cuántas veces cabe?”.

La comparación multiplicativa (sin residuo) lleva al concepto de fracción como comparación entre dos cantidades. Por ejemplo si se quiere comparar la forma de un rectángulo de 9 cm de ancho por 15 cm de largo con la de uno que mida 3 cm de ancho por 5 de largo, en el primero el ancho cabe  $15/9$  veces en el largo, y en el segundo cabe  $5/3$ . Como  $15/9=5/3$ , se puede concluir que ambas formas son similares

#### *Razón*

Las actividades que se proponen en la Guía para el maestro de 6° se encaminan a desarrollar el siguiente concepto de razón como “una comparación multiplicativa entre dos cantidades”. (SEP, 1992, p. 15)

La razón se puede representar como 9 de 15, 9 a 15 y 9:15. También se puede representar una razón como una fracción ( $9/15$ ). Aquí se está asociando a la razón un número fraccionario que se debe saber interpretar.

Cuando la razón relaciona una parte y su todo, esa interpretación es más o menos sencilla. Cuando la razón se relaciona parte con parte o relaciona cantidades de diferente medida, su interpretación es mucho más difícil debido a que la fracción en este caso se utilizaría como una comparación entre dos cantidades diferentes.

En una razón el orden de las cantidades es un punto muy importante. Al especificar una razón debe quedar muy claro qué cantidades intervienen en ella y en qué orden.

Las aplicaciones cotidianas del uso de la razón son las escalas y los porcentajes. Las escalas tienen la ventaja de que pueden visualizarse geoméricamente (pueden servir como una buena introducción al concepto de razón). Los porcentajes tienen la ventaja de que pueden utilizarse en contextos relacionados por el niño. Una idea para introducir porcentajes es que son razones equivalentes que están referidas a 100 unidades.

### *Variación*

La variación de una cantidad relativa a otra es cómo una cantidad puede depender de otra.

La variación proporcional es de las más simples, es la que aparece más en la vida cotidiana y por lo cual conviene estudiar sus propiedades más a fondo. Se debe saber diferenciarla de otro tipo de variaciones.

Una variación muy conocida es la que se utiliza en situaciones de compra y venta, entre el precio y la cantidad comprada.

Al igual que dobles y triples, la proporcionalidad transfiere también a la otra cantidad, mitades, terceras partes, o cualquier otro submúltiplo. Mientras que en la

variación aditiva ambas cantidades se incrementan, pero si una aumenta en tres unidades, la otra también aumentará en tres unidades.

Por lo tanto, lo que caracteriza una variación proporcional es que esta variación tiene la propiedad de transferir de una cantidad a la otra cambios multiplicativos como el doble, el triple, la mitad, la cuarta parte, o bien cualquier otro múltiplo o submúltiplo.

### 3.2.2 Enfoques didácticos para la proporcionalidad

Se pueden usar varios enfoques para resolver problemas de proporcionalidad. A continuación se presentan en la Tabla 4 cuatro enfoques de proporcionalidad con información de sus ventajas y desventajas y su pertinencia para la enseñanza de la proporción en la primaria, que se marcan en SEP (1992).

Enfoques	Descripción	Ventajas	Desventajas	Enseñanza en primaria
Uso de tablas y razonamiento pre-proporcional	Se utiliza una tabla, la cual se va extendiendo con la ayuda de ir efectuando dobles, triples, mitades, etc.; y sumas de estas cantidades	Esta estrategia se apoya en las propiedades más intuitivas de la proporcionalidad. Es el más fácil y desarrolla en el niño la noción de proporcionalidad.		Se sugiere utilizar este enfoque como primera fase de la enseñanza de la proporcionalidad
Razonamiento proporcional	Se usa la constatación de la razón en forma de cociente que se tiene para cada pareja de datos de una variación proporcional	Se utilizan varias técnicas como: a) Equivalencia de fracciones b) Obtención del factor de proporcionalidad de dos de los datos por medio del cociente entre ellos (debe mantenerse constante) y aplicándolo al otro dato (multiplicando)		

Enfoques	Descripción	Ventajas	Desventajas	Enseñanza en primaria
<i>(continúa)</i>				
Unitario	Se utiliza la razón unitaria por medio de una división y después se multiplica por la cantidad deseada		Utilizar la razón unitaria puede ser pesado e innecesario.  No siempre la razón unitaria en un contexto real puede interpretarse fácilmente.	
Algoritmo	Implica el uso de la regla de tres y de los productos cruzados para resolver la incógnita.  NOTA: En la presente investigación, aquí se considera que debería decir "Implica el uso de la llamada regla de tres para resolver la incógnita en el caso de los problemas de valor perdido, y de los productos cruzados en el caso de los problemas de comparación."	El procedimiento, de dividir entre un número y multiplicar por el otro puede ser descubierto por los niños, siguiendo un razonamiento proporcional o el enfoque unitario.	Se trabaja de manera muy mecánica, lo cual se quiere evitar en este nivel elemental.	No se recomienda, pues implica el conocimiento de nociones de álgebra.  Puede utilizarse como alternativa ante datos complicados en el problema.

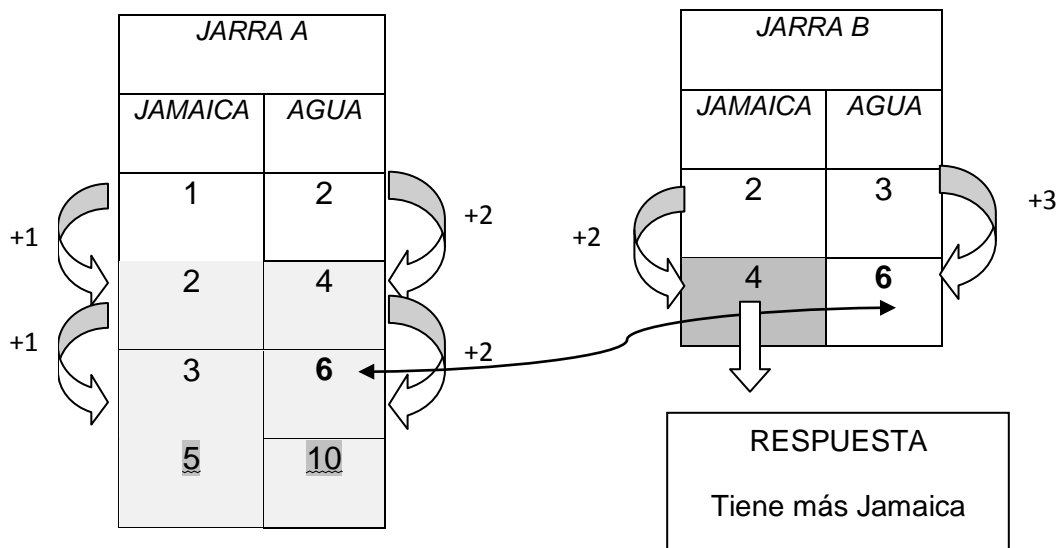
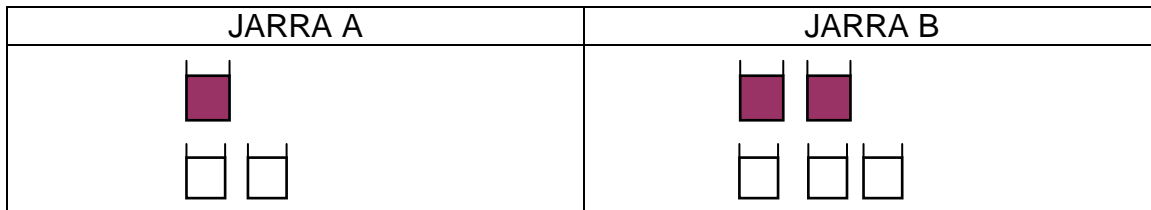
TABLA 4

Con respecto a la información contenida en esta tabla se considera pertinente aclarar los siguientes puntos.

- 1) En algunos enfoques no se hace mención de sus ventajas o sus desventajas, así como de su enseñanza en primaria, puesto que no se señala en el documento dónde se obtuvo la información.

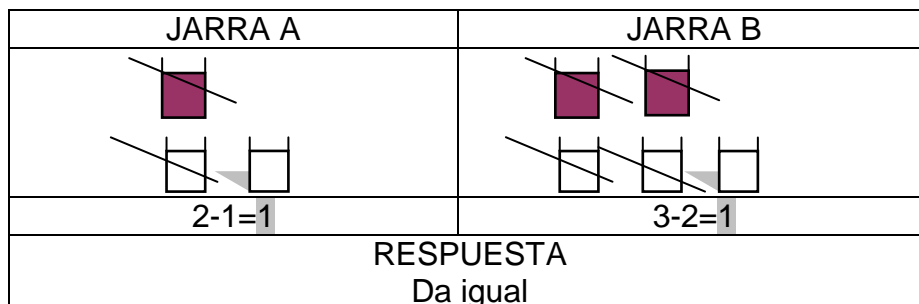
- 2) Cuando en los materiales de la SEP se habla de estrategias aditivas, se refieren al uso de la suma en tablas como la siguiente:

**Aditivo correcto: igualación**



Sin embargo, en este documento, cuando hablemos de estrategias aditivas nos referiremos al uso de la suma o la resta directamente en la situación, como en el siguiente esquema (ver Capítulo 4):

**Aditivo incorrecto**



## CAPITULO 4. METODOLOGÍA

En este capítulo se presenta el método que se usó en la investigación con maestros de educación primaria. Se utilizó un instrumento en el que se plantearon problemas de razonamiento proporcional (problemas de comparación de razones y tasas), para poder conocer qué estrategias utilizan los maestros.

Para describir las circunstancias de cada sujeto, se inició con una pequeña plática que nos permitió conocer algunos aspectos de la vida profesional del maestro (los datos generales de las cinco maestras entrevistadas se encuentran en el Anexo 2). Después se trabajó en dos sesiones con cada una, de la siguiente manera.

En la primera sesión se realizó una entrevista semiestructurada, que permitió plantearle a cada maestra preguntas abiertas. Se le planteaban problemas de razonamiento proporcional y se le cuestionaba sobre el procedimiento que utilizó para llegar al resultado; esto posteriormente permitió clasificar la respuesta dada por la maestra en alguno de los tipos de estrategias. Se trabajó con un instrumento en donde se plantearon problemas en cinco contextos distintos.

Después de haber analizado las estrategias de solución que emplearon estas maestras en la resolución de problemas de proporcionalidad según la propuesta de Alatorre (2004), se trabajó con cada una en una segunda sesión, en la que se les dio una retroalimentación acerca de las respuestas correctas e incorrectas que utilizaron para resolver los problemas. Además, se les presentó una lista de las posibles respuestas para los problemas de proporcionalidad que se les habían planteado y finalmente se hizo una plática sobre algunos comentarios que pudiesen surgir durante las dos entrevistas, acerca de la enseñanza de este tema en el aula. En este trabajo no se abordarán los materiales ni los resultados de esta segunda entrevista; el tema será objeto de un trabajo posterior (Solís, 2010).

## 4.1 Sujetos

Se trabajó con cinco maestras de educación primaria pública de diferentes escuelas, pertenecientes al sector 33 ubicado en la delegación Tlalpan. Las maestras de educación primaria entrevistadas trabajan frente a grupo o son apoyos técnicos pedagógicos.

La selección de las maestras participantes fue proporcionada por la jefa del sector 33, Lilia María de la Paz Carreño. Es importante mencionar que la relación con la maestra Carreño está establecida dentro de un proyecto UPN-CONACyT denominado “Saberes matemáticos de maestros de primaria” bajo la coordinación de la Doctora Silvia Alatorre Frenk, quien también ha laborado impartiendo diversos talleres a los profesores del sector.

## 4.2 Técnica

La técnica que se aplicó a las maestras de educación primaria es una entrevista de corte clínico, la cual consiste en tener una conversación abierta tipo interrogatorio con el fin de descubrir algo sobre el pensamiento del sujeto.

Con esto se pretendió “no limitarse a registrar respuestas que da el sujeto a la pregunta que se le ha formulado, sino dejar que converse” (Claparède, citado por Alatorre, 1994). Ésta fue una forma directa de hacerle preguntas al sujeto con el fin de conocer su manera de razonar para llegar a la resolución del problema planteado.

El procedimiento consistió en utilizar preguntas preestablecidas y otras que se fueron formulando con base en sus respuestas; esta técnica de pregunta-respuesta y respuesta-pregunta, tiene como objetivo conocer el tipo de estrategia que utiliza el sujeto para resolver los problemas.



No todas las preguntas preestablecidas se le plantearon a las maestras, eso dependió del tipo de respuestas que éstas dieron al inicio de cada contexto.

A través de las respuestas que cada una de las maestras fue dando, se le pudo cuestionar cuando su respuesta fue contradictoria o insuficiente para poder analizar la estrategia que estaba empleando.

### 4.3 Instrumento

El instrumento que se utilizó fue tomado de la tesis doctoral de Alatorre (2004). Ese instrumento consta de 10 contextos (cuatro problemas de comparación de tasas, cuatro de comparación de razones y 2 de comparación de particiones), con quince situaciones numéricas cada uno.

Para esta investigación sólo se retomaron 5 problemas de los siguientes contextos (como se indicó en los objetivos, contexto es “la historia” que acompaña un problema matemático; el contexto tiene efecto sobre las respuestas, como lo tienen, en el caso particular de problemas de razonamiento proporcional, la estructura numérica, el tipo de medidas -continuas o discretas-, y el nivel de familiaridad que posean los sujetos con el tipo de problemas):

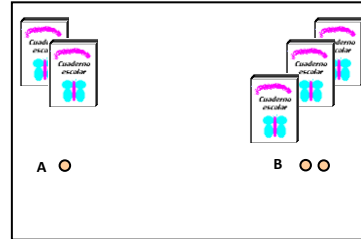
- Dos problemas de comparación de tasas (cuadernos y velocidad).
- Problemas de comparación de mezcla, dos de mezcla simple (jamaica y exámenes) y uno de mezcla probabilística (canicas).

Las preguntas se presentaron a las maestras en fichas de 5x8” (pulgada), y la reproducción de las tarjetas se muestra en el Anexo 1. A continuación se presentan los contextos que se utilizaron, así como la estructura numérica de las preguntas planteadas.

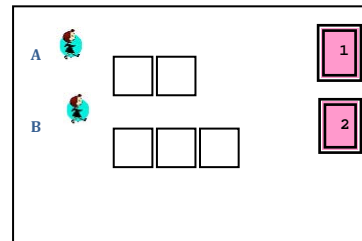
4.3.1 Contextos

*Dos problemas de comparación de tasas*

- C: *Cuadernos*. En dos tiendas (A y B) se compraron distintas cantidades de cuadernos por distintos precios (en monedas). **¿En cuál tienda son más baratos los cuadernos, o están igualmente baratos en ambas?**

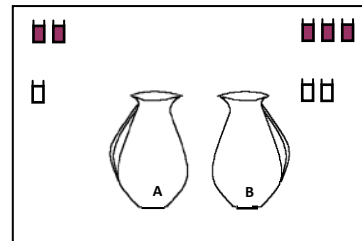


- V: *Velocidad*. Dos niñas (A y B) caminan distinta cantidad de cuadras en distintos tiempos (minutos). **¿Cuál niña camina más rápido, o caminan a la misma velocidad?**

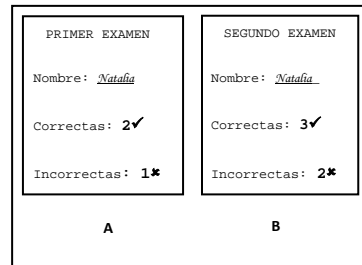


*Dos problemas de mezcla*

- J: *Jamaica*. En dos jarras (A y B) se confecciona agua de Jamaica con distintas cantidades de vasos con concentrado de jamaica y con agua. **¿En cuál jarra la preparación tiene sabor más fuerte a jamaica, o tienen el mismo sabor?**

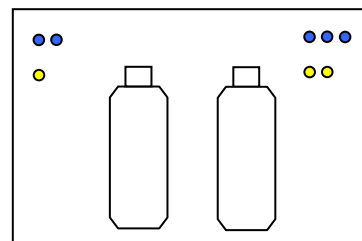


- E: *Exámenes*. Una niña presentó dos exámenes (A y B), en los que obtuvo distintas cantidades de respuestas correctas e incorrectas. **¿En cuál examen tuvo mejores resultados, o le fue igual en los dos?**



*Un problema de mezcla probabilística*

- B: *Botellas de canicas (urnas)*. En dos botellas (A y B) se echan distintas cantidades de canicas azules y amarillas. Sólo se puede agitar una de las dos y sacar una canica de ella; si la canica que salga es azul entonces se obtiene un premio. **¿Cuál botella conviene agitar, o da igual?**



En los cinco contextos los antecedentes y consecuentes son:

En los cinco contextos, los objetos, los antecedentes y consecuentes son los que se presentan en la Tabla 5.

CONTEXTO	OBJETOS (A y B)	ANTECEDENTE	CONSECUENTE
Cuadernos	Dos tiendas	Cuadernos	Monedas
Velocidad	Dos niñas	Cuadras	Tiempo
Agua de Jamaica	Dos jarras	Jamaica	Agua
Exámenes	Dos exámenes	Respuestas correctas	Respuestas incorrectas
Botella de canicas	Dos botellas	Canicas azules	Canicas amarillas

**TABLA 5**

#### 4.3.2 Estructuras numéricas

Cada uno de los cinco contextos dio lugar a una serie de trece preguntas, las mismas, según su estructura numérica, para cada uno. El instrumento por lo tanto cuenta con 65 preguntas. El total de preguntas que se le plantearon a cada sujeto dependió de las respuestas que iba dando a los primeros problemas de cada contexto, por lo tanto se hizo una selección del total de preguntas.

En todos los ejemplos gráficos recién presentados, el antecedente y el consecuente del lado A valen respectivamente 2 y 1, y los del lado B valen respectivamente 3 y 2. Una manera abreviada de representar esta información es mediante el arreglo (2,1)(3,2); este arreglo corresponde a la cuarta pregunta del instrumento.

La estructura numérica de las demás preguntas se presenta en la siguiente tabla:

*Estructura numérica de los problemas*

<b>PREGUNTA</b>	<b>ARREGLO</b>
1	(2,3)(2,3)
2	(1,4)(3,2)
3	(2,3)(2,2)
4	(2,1)(3,2)
5	(3,3)(1,1)
6	(2,2)(3,2)
7	(3,3)(2,0)
8	(2,1)(4,2)
9	(2,5)(1,3)
10	(3,6)(1,2)
11	(5,2)(7,3)
12	(4,6)(2,3)
13	(3,2)(5,3)

**TABLA 6**

Al analizar la estructura numérica de las preguntas de comparación de razones o tasas, Alatorre (2004) definió 86 situaciones distintas. Posteriormente las agrupó en tres niveles de dificultad, según el tipo de estrategias que pueden aplicarse en cada situación. Estos niveles, denominados Nivel I, Nivel II y Nivel III en orden creciente de dificultad, se describirán en la sección 4.5.

#### **4.4 Clasificación de las respuestas**

Durante el proceso de enseñanza-aprendizaje el sujeto adquiere ciertos tipos de conocimientos (sintáctico y semántico) y habilidades que lo llevan a

comprender qué procedimiento utilizar para poder resolver una tarea determinada o un problema.

“Se considera que el sujeto no dispone de un sistema de respuestas para resolver de forma inmediata un problema, con lo cual tampoco es un hecho que el sujeto no pueda resolver problemas que se le planteen más allá de lo que él podría resolver de acuerdo con su etapa de desarrollo cognitivo, nivel educativo, experiencias previas de aprendizaje con las que cuenta, sino que dependerá de cómo se le plantee el problema” (Parra, 1990). Podemos agregar que la resolución no sólo depende de la forma del planteamiento sino de muchas otras variables.

“Para que un estudiante pueda resolver un problema, deberá recoger la información relevante para determinar qué estrategia utilizará y posiblemente haga una transferencia de conocimientos de un contexto a otro contexto (de la vida cotidiana al ámbito escolar o viceversa). Por lo tanto se considera que las estrategias de aprendizaje son un proceso en la toma de decisiones (conscientes e intencionales) en las cuales el alumno elige y recupera, de manera coordinada, los conocimientos que necesita para completar una determinada demanda u objetivo, dependiendo de las características de la situación educativa en que se produce la acción” (Monereo, 1998, p.14).

El siguiente apartado está dedicado a las posibles estrategias de solución de los problemas antes mencionados. Las estrategias utilizadas para estos problemas se clasificaron según el sistema creado por Alatorre (1994, 2004). Se presenta la descripción de las categorías.

En el instrumento de Alatorre (1994, 2004) se clasifican las estrategias en simples y compuestas; a su vez las estrategias simples pueden ser centraciones y relaciones. Todas las estrategias pueden ser clasificadas según su estatus de corrección.

#### 4.4.1 Centraciones

En estas estrategias de solución el sujeto se centra sólo en una de tres clases de elementos de arreglo: totales, antecedentes o consecuentes. El sujeto elige el objeto en el que hay más elementos (centración positiva) o en el que hay menos elementos (centración negativa) o bien, cuando es el caso, puede decir “da igual” (centración de igualdad).

Se representa de la siguiente manera:

CT. Centraciones en los Totales:

- {CT-} : El sujeto elige el objeto en el que la cantidad total es menor.
- {CT+} : El sujeto elige el objeto en el que la cantidad total es mayor.
- {CT=} : El sujeto dice que da igual, porque en los dos objetos hay la misma cantidad total.

CA: Centraciones en los Antecedentes:

- {CA+} : El sujeto elige el objeto en el que el antecedente es mayor.
- {CA-} : El sujeto elige el objeto en el que el antecedente es menor.
- {CA=} : El sujeto dice que da igual, porque hay la misma cantidad de antecedentes en ambos objetos.

CC. Centraciones en los Consecuentes:

- {CC+} : El sujeto elige el objeto en el que el consecuente es mayor.
- {CC-} : El sujeto elige el objeto en el que el consecuente es menor.
- {CC=} : El sujeto dice que da igual, porque hay la misma cantidad de consecuentes en ambos objetos.

Ejemplos:

- Cuando el arreglo es (2,1)(3,2), representado en la Figura 1 (contexto Botellas), las justificaciones que se podrían presentar son las de la Tabla 7:

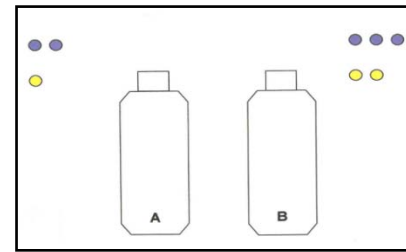


FIGURA 1

Decisión	Justificación	Estrategia	Explicación
A	porque tiene menos canicas	{CT-}	La cantidad total es menor
B	porque tiene más canicas	{CT+}	La cantidad total es mayor
B	porque tiene más canicas azules	{CA+}	El antecedente es mayor
A	porque tiene menos canicas azules	{CA-}*	El antecedente es menor
B	porque tiene más canicas amarillas	{CC+}*	El consecuente es mayor
A	porque tiene menos canicas amarillas	{CC-}	El consecuente es menor
*Estrategias poco comunes.			

TABLA 7

- Cuando el arreglo es (1,4)(3,2), la justificación {CT=} que se podría presentar es la siguiente: da igual en ambas botellas, porque la cantidad total de canicas es igual.
- Cuando el arreglo es (2,3)(2,2), la justificación {CA=} que se podría presentar es la siguiente: da igual en ambas botellas, porque tienen igual cantidad de canicas azules.
- Cuando el arreglo es (2,2)(3,2), la justificación {CC=} que se podría presentar es la siguiente: da igual en ambas botellas, porque tienen igual cantidad de canicas amarillas.

#### 4.4.2 Relaciones

En las estrategias denominadas relaciones el sujeto considera paralelamente dos clases de elementos y establece una relación entre ellos; después compara los resultados de esa relación en las dos parejas formadas. La relación inicial puede ser una de orden, de adición-sustracción o proporcional.

En las relaciones de orden el sujeto compara si el antecedente está en ventaja, empate o desventaja, con respecto al consecuente.

Hay tres relaciones de orden posibles, que se muestran en la Tabla 8.

<b>{RO+}</b>	El sujeto elige el objeto en que el antecedente está en ventaja, ( $a > c$ ), cuando en el otro objeto el antecedente está en desventaja ( $a < c$ ), o bien
	El sujeto elige el objeto en el que el antecedente está en ventaja ( $a > c$ ), cuando en el otro objeto el antecedente empata con el consecuente ( $a = c$ ), o bien
	El sujeto elige el objeto en el que el antecedente empata con el consecuente ( $a = c$ ), cuando en el otro objeto el antecedente está en desventaja ( $a < c$ ).
<b>{ROe} *</b>	El sujeto elige el objeto en el que el antecedente empata con el consecuente ( $a = c$ ), cuando en el otro objeto el antecedente está en ventaja ( $a > c$ ).
<b>{RO=}</b>	El sujeto dice que “da igual” cuando en ambos objetos el antecedente está en ventaja ( $a > c$ ) o bien, cuando en ambos objetos está en desventaja ( $a < c$ ).
*Estrategia poco común.	

**TABLA 8**

Ejemplos:

- Cuando el arreglo es (1,4)(3,2), la justificación {RO+} que se podría presentar es la siguiente: “la botella B porque tiene más canicas azules que amarillas, mientras que la otra tiene más canicas amarillas que azules”.
- Cuando el arreglo es (2,2)(3,2), la justificación {RO+} que se podría presentar es la siguiente: “La botella B porque tiene más canicas azules



que amarillas mientras que la otra tiene igual de canicas azules que amarillas”.

- Cuando el arreglo es (2,3)(2,2), la justificación {RO+} que se podría presentar es la siguiente: “La botella B, porque tiene igual cantidad de canicas azules y amarillas, mientras que la otra tiene menos azules que amarillas”.
- Cuando el arreglo es (2,2)(3,2), la justificación {ROe} que se podría presentar es la siguiente: “La botella A, porque tiene la misma cantidad de canicas azules y amarillas”.
- Cuando el arreglo es (2,1)(3,2), la justificación {RO=} que se podría presentar es la siguiente: “Da igual, porque en las dos botellas hay más canicas azules que amarillas”.
- Cuando el arreglo es (1,2)(2,3), la justificación {RO=} que se podría presentar es la siguiente: “Da igual, porque en las dos botellas hay más canicas amarillas que azules”.

El segundo tipo de relaciones corresponde a las relaciones sustractivas, en las cuales el sujeto compara el antecedente y consecuente, cuantificando la diferencia.

Este tipo de estrategia es de naturaleza aditiva o sustractiva. Hay tres relaciones sustractivas, que se presentan en la Tabla 9:

{RS+}	El sujeto elige el objeto en que el resultado de la diferencia antecedente menos consecuente es mayor.
{RS-}*	El sujeto elige el objeto en el que el resultado de la diferencia antecedente menos consecuente es menor.
{RS=}	El sujeto dice “da igual” porque en ambos lados las diferencias de antecedente menos consecuente son iguales
* Estrategia poco común	

**TABLA 9**

Ejemplos:

- Cuando el arreglo es (4,1)(3,2), la justificación {RS+} que se podría presentar es la siguiente: "La botella A, porque si se quitan parejas de canicas amarillas y azules, en A quedan 3 canicas azules y en B sólo 1 canica azul".
- Cuando el arreglo es (1,4)(2,3), la justificación {RS+} que se podría presentar es la siguiente: "La botella B, porque si se quitan parejas de canicas amarillas y azules, queda sólo 1 amarilla en la botella B y 3 amarillas en la botella A".
- Cuando el arreglo es (2,1)(3,2), la justificación {RS=} que se podría presentar es la siguiente: "Da igual, porque en ambas botellas la diferencia es la misma, hay una canica azul más que las amarillas".

El último tipo de relaciones corresponde a las de proporcionalidad, que también parten de la comparación del antecedente y consecuente, pero ésta se realiza de forma multiplicativa.

En esta familia hay las siguientes categorías; se presentan en la Tabla 10:

{RP+}	El sujeto elije el objeto en que el cociente (antecedente/consecuente) o (antecedente /total) es mayor (o algún mecanismo equivalente)
{RP=}	El sujeto dice que da igual porque en ambos lados los cocientes (antecedente/consecuente) o (antecedente/total) son iguales (o algún mecanismo equivalente).
{RP'}	Se produce un error aritmético
{RPS}	El error aritmético es parcialmente aditivo (es decir, consiste en iniciar un reparto pero no repartir los residuos que quedan sino compararlos directamente)

**TABLA 10**

Ejemplos:

- Cuando el arreglo es (1,3)(2,5), una posible justificación {RP+} que se podría presentar es la siguiente: “La botella B, porque en la botella A una de cada cuatro canicas es azul, mientras que a la botella B le faltaría una canica amarilla para estar igual”.
- Cuando el arreglo es (2,1)(4,2), una posible justificación {RP=} que se podría presentar es la siguiente: “Da igual, porque tanto en la botella A como en la B hay el doble de canicas azules que amarillas”.
- RP' no es, en sí, una estrategia, sino un intento infructuoso de aplicar {RP+} ó {RP=}. Por ejemplo, en el arreglo (1,3)(2,5) una posible justificación incorrecta es la siguiente: “ La botella B, porque en la botella A una de cada cuatro canicas es azul, o sea 25%, mientras que en la B cinco de cada siete son amarillas, o sea 71%” (**a/t** vs **c/t**).
- Cuando el arreglo es (1,3)(2,5), una posible justificación {RPS} que se podría presentar es la siguiente: “Da igual, porque si se forman grupos de una azul con dos amarillas, en la botella A se forma un grupo y queda una amarilla, y en la botella B se forman 2 grupos y también queda una amarilla”.

#### 4.4.3 Estrategias compuestas

En estas estrategias de solución el sujeto considera dos o más estrategias simples, las cuales pueden ser asociadas de diversas maneras en una estrategia compuesta, en donde cada una puede ser dominante o dominada. Es decir, si E1 y E2 son dos estrategias, pueden formar cuatro posibles estrategias compuestas, que se ilustran en la Tabla 11:

$\{E1 \ \& \ E2\}$	<b>Conjunción:</b> Tanto E1 como E2 llevan a la misma decisión y se apoyan mutuamente. Tanto E1 como E2 son dominantes
$\{E1 \ \neg \ E2\}$	<b>Exclusión:</b> E1 lleva a la elección de un objeto o a la decisión “da igual” y E2 lleva a la elección del otro objeto, pero E1 prevalece. E1 es dominante y E2 es dominada.
$\{E1 \ * \ E2\}$	<b>Compensación:</b> E1 lleva a la elección de un objeto y E2 lleva a la decisión “da igual”, pero E1 prevalece. E1 es dominante y E2 es dominada.
$\{E1 \ \perp \ E2\}$	<b>Contrapeso:</b> E1 lleva a la elección de un objeto y E2 lleva a la elección del otro objeto, y la decisión es “da igual”. Tanto E1 como E2 son dominadas.

TABLA 11

Ejemplos:

$\{E1 \ \& \ E2\}$	(2,3)(1,8)	<b>{CA+ &amp; CT-}</b> La botella A, porque tiene más canicas azules y además tiene menos canicas.
$\{E1 \ \neg \ E2\}$	(2,3)(1,2)	<b>{CA+ <math>\neg</math> CT-}</b> La botella A, porque tiene más canicas azules, a pesar de que la botella B tiene menos canicas.
$\{E1 \ * \ E2\}$	(2,3)(1,4)	<b>{CA+ * CT=}</b> La botella A, porque tiene más canicas azules; y tienen la misma cantidad de canicas las dos botellas.
$\{E1 \ \perp \ E2\}$	(2,3)(1,2)	<b>{CA+ <math>\perp</math> CT-}</b> Da igual, porque aunque la botella A tiene más canicas azules, por el otro lado la botella B tiene menos canicas.

TABLA 12

#### 4.4.4 Clasificación según el estatus de corrección

Ante cualquier arreglo numérico una de las estrategias  $\{RP+\}$  o  $\{RP=\}$  se puede aplicar siempre y se tratará de una estrategia correcta siempre y cuando se aplique sin errores. Por otro lado, hay estrategias que son algebraicamente

equivalentes al resultado formal y que por lo tanto son correctas, pero que no siempre se pueden aplicar, sino sólo en algunos arreglos.

Estas estrategias se denominan “estrategias de comparación”; pueden ser estrategias simples o compuestas. Las primeras son las relaciones de orden {RO+}, y entre las segundas están las compuestas del estilo de la conjunción {CA+ & CC-} (cada vez que en un objeto el antecedente es mayor y el consecuente es menor que en el otro, las razones en él son mayores que en el segundo).

Una segunda categoría son las potencialmente correctas: son aquellas que cuando la estructura numérica es tal que una composición correcta lleva a la elección de un lado (A o B), y un sujeto justifica la elección de ese lado sólo mediante una de las estrategias simples de la composición, cabe la posibilidad de que esté considerando el otro componente, pero no lo esté verbalizando. En estos casos se dice que la justificación es una expresión potencialmente incompleta de una justificación correcta, por lo cual se resume que la estrategia es potencialmente correcta (Alatorre, 2004). Esto puede ocurrir en las preguntas 1, 2, 3 y 6 del instrumento.

Finalmente las estrategias incorrectas son aquellas que cuando se pueden aplicar, no son algebraicamente equivalentes al resultado formal. Están incluidas en esta categoría la mayoría de las centraciones, la relación de orden de igualdad y todas las relaciones sustractivas.

Las siguientes tablas presentan las distintas clases de estrategias de acuerdo con su estatus de corrección. En la tabla 13 se presentan las estrategias correctas, potencialmente correctas e incorrectas para las preguntas 2, 3, 6, y 7 del instrumento, en la tabla 14 se presenta lo mismo para las preguntas 5, 8, 10, y 12, por último la tabla 15 presenta las preguntas 4, 9, 11 y 13.

**RESPUESTAS CORRECTAS, POTENCIALMENTE CORRECTAS E  
INCORRECTAS EN LAS PREGUNTAS 2, 3, 6 y 7.**

Pregunta	Arreglo	Respuestas correctas		Respuestas potencialmente correctas		Respuestas incorrectas	
		Decisión	Estrategias simples y compuestas	Decisión	Estrategias simples	Decisión	(Sólo se presentan las estrategias simples)
2	(1,4)(3,2)	B	{RP+}, {RO+}, {CC- * CT=}, {CA+ * CT=}, {CA+ & CC-}	B	{CA+}, {CC-}	A	{RS-}, {CA-}, {CC+}
						B	{RS+}
						=	{CT=}
3	(2,3)(2,2)	B	{RP+}, {RO+}, {CC- * CA=}, {CT- * CA=}	B	{CC-}, {CT-}	A	{CT+}, {RS-}, {CA+}
						B	{RS+}
						=	{CA=}
6	(2,2)(3,2)	B	{RP+}, {RO+}, {CA+ * CC=}, {CT+ * CC=}	B	{CA+}, {CT+}	A	{CA-}, {CT-}, {RS+}, {ROe}
						B	{RS-}
						=	{CC=}
7	(3,3)(2,0)	B	{RP+}, {RO+}, {CC-}			A	{CA+}, {CT+}, {CC+}, {RS-}, {ROe}
						B	{CT-}, {CA-}, {RS+}

**TABLA 13**

**RESPUESTAS CORRECTAS E INCORRECTAS EN  
LAS PREGUNTAS 5, 8, 10 y 12 \***

Pregunta	Arreglo	Respuestas correctas		Respuestas incorrectas	
		De- ci- sión	Estrategias simples y compuestas	De- ci- sión	(Sólo se presentan las estrategias simples)
5	(3,3)(1,1)	A	{RP=}	A	{CA+}, {CT+} {CC+}
				B	{CA-}, {CT-}, {CC-}
				=	{RS=}
8	(2,1)(4,2)	=	{RP=}	A	{CT-}, {CA-}, {CC-}, {RS-}
				B	{CA+}, {CT+}, {CC+}, {RS+}
				=	{RO=}
10	(3,6)(1,2)	=	{RP=}	A	{CA+}, {CT+}, {CC+}, {RS-}
				B	{CA-}, {CT-}, {CC-}, {RS+},
				=	{RO=}
12	(4,6)(2,3)	=	{RP=}	A	{CA+}, {CT-}, {CC+}, {RS-}
				B	{CA-}, {CT-}, {CC-}, {RS+}
				=	{RO=}

**TABLA 14**

**RESPUESTAS CORRECTAS E INCORRECTAS EN  
LAS PREGUNTAS 4, 9, 11 y 13 \***

Preg	Arreglo	Respuestas correctas		Respuestas incorrectas	
		De- ci- sión	Estrategias simples y compuestas	De- ci- sión	(Sólo se presentan las estrategias simples)
4	(2,1)(3,2)	A	{RP+}	A	{CT-}, {CA-}, {CC-}
				B	{CA+}, {CC+}, {CT+}
				=	{RO=}, {RS=},
9	(2,5)(1,3)	A	{RP+}	A	{CA+}, {CT+}, {CC+}, {RS-}
				B	{CA-}, {CT-}, {CC-}, {RS+}
				=	{RO=}
11	(5,2)(7,3)	A	{RP+}	A	{CA-}, {CT-}, {CC-}, {RS-}
				B	{CA+}, {CT+}, {CC+}, {RS+}
				=	{RO=}
13	(3,2)(5,3)	B	{RP+}	A	{CA-}, {CT-}, {CC-}, {RS-}
				B	{CA+}, {CT+}, {CC+}, {RS+}
				=	{RO=}

**TABLA 15**

\*En las preguntas de las tablas 14 y 15 no hay correctas que sean centraciones, estrategias compuestas ni respuestas potencialmente correctas.

## 4.5 Niveles de dificultad

Como se mencionó anteriormente, al analizar la estructura numérica de las preguntas de comparación de razones o tasas, Alatorre (2004) definió 86 situaciones distintas. Posteriormente las agrupó en tres niveles de dificultad, que definió de la siguiente manera:

- Un primer nivel (I), está conformado por las situaciones en las que pueden ser correctamente aplicadas, además de las relaciones de proporcionalidad  $RP+$  y  $RP=$ , las relaciones de orden  $RO+$  o bien algunas centraciones; es decir son situaciones que pueden ser exitosamente resueltas con estrategias de comparación. En el cuestionario que se aplicó en esta investigación, son de Nivel I las preguntas 1, 2, 3, 6 y 7 (ver Tabla 13 del apartado 4.4.4).<sup>1</sup>
- En un segundo Nivel (II), se encuentran las situaciones de proporcionalidad en las que solamente son correctamente aplicables las estrategias  $RP=$ . Son de Nivel II las preguntas 5, 8, 10 y 12 del instrumento (ver Tabla 14, del apartado 4.4.4).
- En un tercer Nivel (III), se ubican las situaciones en las que las únicas estrategias correctamente aplicables son las  $RP+$ . Son de Nivel III las preguntas 4, 9, 11 y 13 del cuestionario aplicado (ver Tabla 15, del apartado 4.4.4).

## 4.6 Procedimiento

Para poder iniciar la entrevista se invitaba al sujeto a que:

---

<sup>1</sup> También la pregunta 1 se planteó al sujeto, pero ésta no se utilizó para el análisis, ya que sólo se usó para asegurar que la persona comprendiera el contexto.



- Dijera lo que estaba en su mente, no guardándose lo que pudiera considerar como conjetura o idea vaga.
- Hablara en tono que se oiga.

La técnica que se empleó para la entrevista fue la siguiente:

- El entrevistador siempre trató de reducir su participación a un mínimo y se cuestionó a la maestra sólo cuando algo no quedaba claro.
- Para poder entender muy bien el proceso cognitivo que la maestra llevó a cabo, fue escuchada y observada para tener una idea razonable acerca de qué clase de operaciones mentales usaba para resolver los problemas.
- En este sentido la participación del entrevistador se redujo con frecuencia a preguntar en cada respuesta, cuando no era clara, ¿por qué?

A cada maestra se le entrevistó dos veces. En la primera entrevista se le aplicó el instrumento presentado en tarjetas (ver Anexo 1), se le invitó a dibujar sobre ellas y también se le indicó que podría utilizar una calculadora cuando lo deseara.

Se inició la entrevista con una pequeña conversación, de la cual se obtuvieron algunos datos generales, como: edad, grados escolares en los que ha impartido clases, si se encuentra laborando frente a grupo, si trabaja ambos turnos y sobre su historia laboral (ver Anexo 2). A cada una de las maestras se les asignó un número para identificarlas, el cual corresponde al orden en el que fueron entrevistadas, lo cual se hizo con el objetivo de omitir su nombre. Así, en este documento los sujetos se denominan M1, M2, M3, M4 y M5.

Posteriormente se abordó la entrevista con la aplicación del instrumento, iniciando con el contexto de agua de jamaica. Cada vez que se cambiaba de contexto se exponía el planteamiento general, y posteriormente se presentaban las fichas. Este procedimiento se aplicó para los cinco contextos.

No se preestableció un tiempo para responder a cada una de las preguntas asignadas.

Al término de la aplicación del instrumento a cada maestra, se le invitó a realizar una tarea extra que tendría que responder, mencionándole que se trabajaría con ella para la segunda entrevista, por lo cual debería llevarla. Las dos entrevistas que se les realizaron a las maestras fueron videograbadas.

Después se editaron las entrevistas realizadas a cada una de las maestras, para extraer la parte más representativa de cada respuesta dada, con el fin de obtener los argumentos presentados arreglo por arreglo en cada uno de los cinco contextos.

## **4.7 Metodología para el análisis de los resultados**

Se realizó un análisis por cada maestra, que inició con la clasificación de sus respuestas en estrategias según Alatorre (1994, 2004). A partir de dicha clasificación se hicieron dos procedimientos. Uno de ellos de forma cuantitativa, para la cual se dio un valor de corrección a cada respuesta (ver apartado 4.7.1), y consecuentemente se clasificaron globalmente las respuestas de cada maestra en uno de diversos grupos (ver apartado 4.7.2). El segundo análisis se realizó de forma cualitativa; se presenta en el apartado 4.7.3.

Cabe mencionar que los dos tipos de análisis que se presentan se complementan uno a otro para obtener un mejor análisis del comportamiento de cada uno de las cinco maestras.

### *4.7.1 Metodología para el análisis cuantitativo*

De acuerdo con las distintas clases de estrategias que usaron las entrevistadas, en este trabajo se consideraron tres tipos de respuestas según su corrección: correctas, potencialmente correctas e incorrectas. Alatorre (2004)

arguye que desde un punto de vista estricto, sólo se puede considerar como correctas las respuestas marcadas como tales, y por lo tanto son las únicas que deben considerarse para esa contabilidad.

Sin embargo agrega que desde un punto de vista más relajado, también las respuestas denominadas “potencialmente correctas” podrían ser consideradas como correctas; en todo caso no son marcadamente incorrectas, aunque desde luego tampoco son “totalmente” correctas. Para esta autora la opción intermedia ha sido la construcción de un “Puntaje Índice de Corrección” (PIC) calculado de la siguiente manera:

- A cada respuesta correcta se le asigna un punto.
- A cada respuesta potencialmente correcta se le asigna medio punto. También se asigna medio punto a las respuestas con elección correcta (A, B o da igual) pero sin justificación clasificada en estrategias (por ejemplo, las descripciones).
- A cada respuesta incorrecta se le asigna cero puntos.

Para cualquier conjunto de respuestas se suman los puntos así obtenidos en el conjunto y se expresa la suma como un porcentaje del total de respuestas del conjunto.

El PIC es entonces un indicador del nivel de resultados correctos que alcanza una persona en diversos grupos de respuestas. El análisis cuantitativo que permite el PIC no es la única vía de análisis, sino un complemento para un análisis cualitativo acerca del tipo de estrategias utilizadas en cada grupo de respuestas. En la Tabla 16 se señalan el tipo de respuestas correctas y potencialmente correctas que se pueden llegar a usar en cada nivel. Cabe aclarar que las estrategias que no aparecen en la tabla son todas incorrectas (por ejemplo, RO= aplicable en los Niveles II y III, o las estrategias RS+ y RS=, aplicables en todos los niveles).

Nivel	preg	CORRECTAS: valen 1			PORTENCIALMENTE CORRECTAS: valen 0.5	
I	2	CA+&CC-	CA+*CT=	RO+, RP+	CA+	S/J Descripción  Siempre y cuando acompañen la respuesta correcta
	3	CC-*CA=	CT-*CA=	RO+, RP+	CC-, CT-	
	6	CA+*CC=	CT+*CC=	RO+, RP+	CA+, CT+	
	7	CC-				
II	5, 8, 10, 12	RP=				
III	4, 9, 11, 13	RP+				

**TABLA 16**

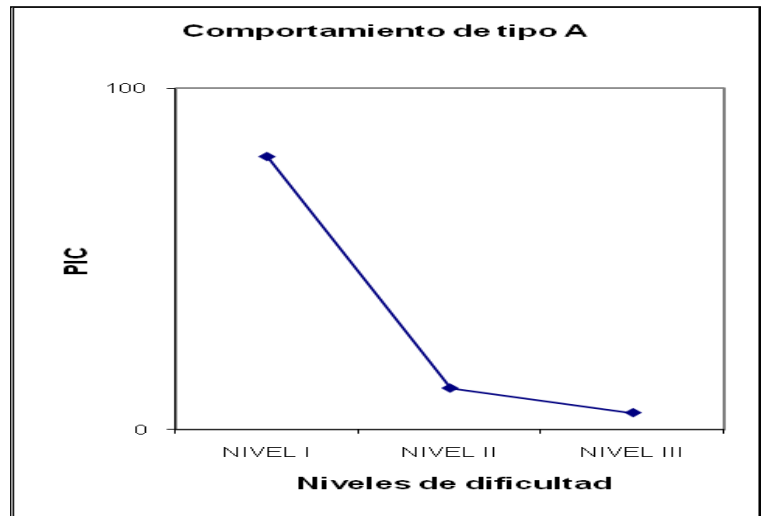
*4.7.2. Comportamiento de acuerdo al nivel de dificultad*

A partir de los valores PIC obtenidos por cada persona en las Niveles I, II, y III (ya sea por contexto o en forma global), Alatorre (2004) describió cuatro comportamientos típicos, que denominó A, B, C y D.

El comportamiento tipo A tiene las siguientes características (ver Figura 2):

- Valores relativamente altos en el Nivel I
- Valores bajos o muy bajos en el Nivel II
- Valores muy bajos en el Nivel III.

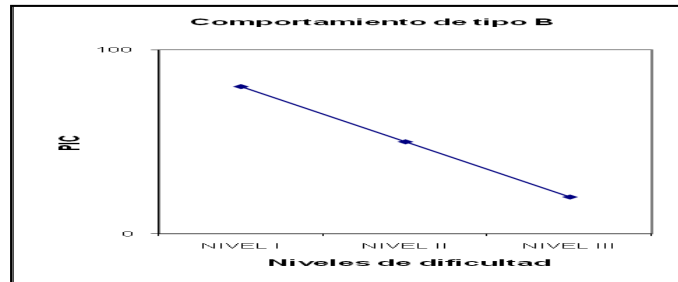
Las personas con comportamiento tipo A dan respuestas correctas de comparación en las preguntas del Nivel I, pero estas estrategias no permiten la resolución en el Nivel II ni en el III.



**FIGURA 2**

El comportamiento tipo B tiene las siguientes características (ver Figura 3):

- Valores altos en el Nivel I
- Valores medios en el Nivel II
- Valores bajos en el Nivel III

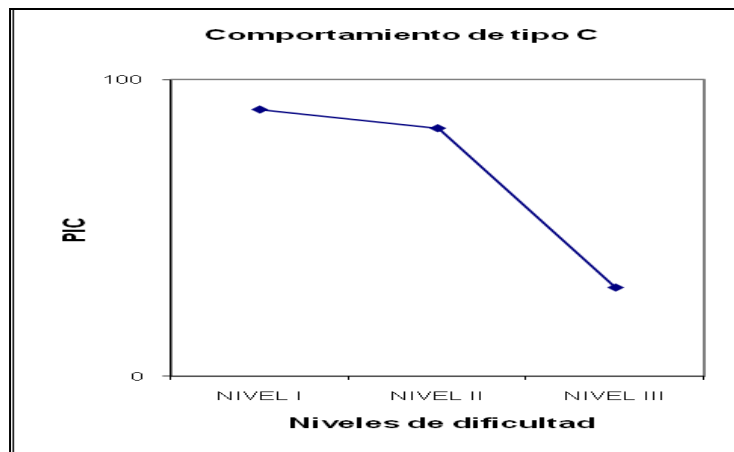


**FIGURA 3**

En este comportamiento los valores PIC en el Nivel de dificultad II están cerca de la mitad entre el Nivel I y el III, lo que hace que las gráficas sean cercanas a las líneas rectas. En este grupo se encuentran respuestas con un uso adecuado de estrategias de comparación en el Nivel I, y algunos usos de RP= en el Nivel II. Sin embargo, las aplicaciones de RP+ en el Nivel III son menos exitosas que las de RP= en el Nivel II.

El comportamiento tipo C tiene las siguientes características (ver Figura 4):

- Valores altos en el Nivel I
- Valores en el Nivel II prácticamente a la par con el Nivel I
- Valores relativamente bajos en el Nivel III



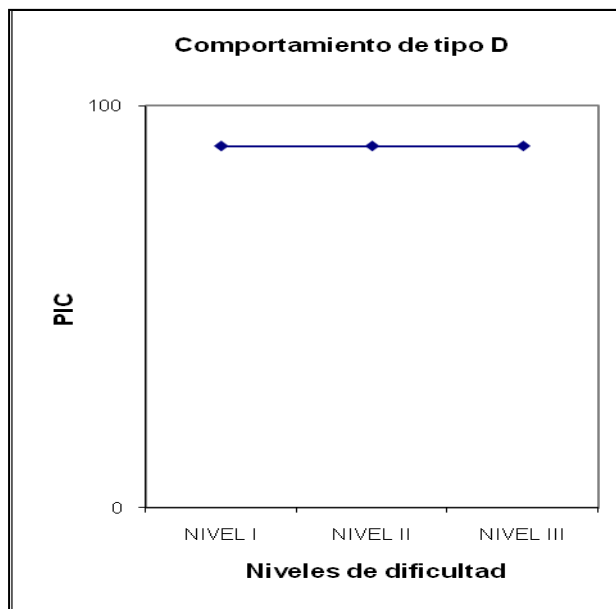
**FIGURA 4**

En este grupo se encuentran usos diferentes tanto en estrategias de comparación como de RP en el Nivel I y con la misma eficiencia en usos de RP= en el Nivel II, pero todavía se detectan algunas dificultades para el uso de RP+ en el Nivel III.

Finalmente, el comportamiento tipo D tiene la siguiente característica (ver Figura 5):

- Los valores que se alcanzan en los tres Niveles I, II y III son prácticamente los mismos, es decir, altos.

En estas respuestas no hay dificultad ni para aplicar estrategias de comparación en el Nivel I, ni para aplicar RP= en el Nivel II, ni para aplicar RP+ en el Nivel III.



**FIGURA 5**

En resumen, los cuatro comportamientos se presentan de acuerdo con los siguientes valores PIC, que representan la calidad de las respuestas:

COMPORTAMIENTO	NIVEL I	NIVEL II	NIVEL III
<b>A</b>	Altos	Bajos o muy bajos	Muy bajos
<b>B</b>	Altos	Medios	Bajos
<b>C</b>	Altos	Altos	Bajos
<b>D</b>	Altos	Altos	Altos

**TABLA 17**

Estos cuatro comportamientos típicos surgen de lo cuantitativo, pero también dan información cualitativa. Se pueden entender como una graduación en la calidad de las respuestas, de la más baja (A) a la más alta (D).

#### 4.7.3 Análisis cualitativo

Este análisis se realizó a partir de las siguientes tablas:

- *Por Contexto (Velocidad, Cuadernos, Jamaica, Exámenes y Botellas).*

Por cada contexto se llenó una tabla como la Tabla 18. En cada celda se escribió la clasificación de la estrategia utilizada.

CONTEXTO:						
NIVEL	PREG	MAESTRAS				
		M1	M2	M3	M4	M5
I	2					
	3					
	6					
	7					
II	5					
	8					
	10					
	12					
III	4					
	9					
	11					
	13					

**TABLA 18**

- *Por nivel de dificultad*

Por cada nivel se llenó una tabla como la Tabla 19. En cada celda se escribió la clasificación de la estrategia utilizada.

NIVEL:					
PREGUNTA					
MAESTRAS	CONTEXTOS				
	Velocidad	Cuadernos	Jamaica	Exámenes	Botellas
M1					
M2					
M3					
M4					
M5					

**TABLA 19**

- *Conteo de estrategias utilizadas*

Por cada tabla del nivel de dificultad se realizó un conteo (de la frecuencia o frecuencia relativa) con la que las docentes utilizaron algunas de las estrategias más importantes, en tablas como la Tabla 20.

En una segunda tabla se realizó el promedio por cada estrategia utilizada en cada uno de los contextos.

NIVEL:								
CONTEXTO	ESTRATEGIA CORRECTAS		ESTRATEGIAS INCORRECTAS				OTRAS	TOTAL
	Estrategias de comparación (Nivel I)	RP	Centraciones	RO=	RS	RP'		
Velocidad								
Cuadernos								
Jamaica								
Exámenes								
Botellas								
Total								

**TABLA 20**

Así, las tablas y las gráficas permitieron realizar un análisis cualitativo y cuantitativo que se retroalimentaron mutuamente. Cabe señalar que el análisis cuantitativo no fue un análisis estadístico, ya que no se cuenta con muestras representativas ni de la población de maestros (ya que lo que se tiene es un estudio de casos) ni del conjunto de posibles respuestas de cada una de ellas. Así mismo, estas herramientas permitieron comparar los comportamientos de las distintas maestras, y verificar si los niveles de dificultad efectivamente funcionan como tales, cuáles son las estrategias más utilizadas en los distintos tipos de contextos, etc.



## CAPÍTULO 5. RESULTADOS

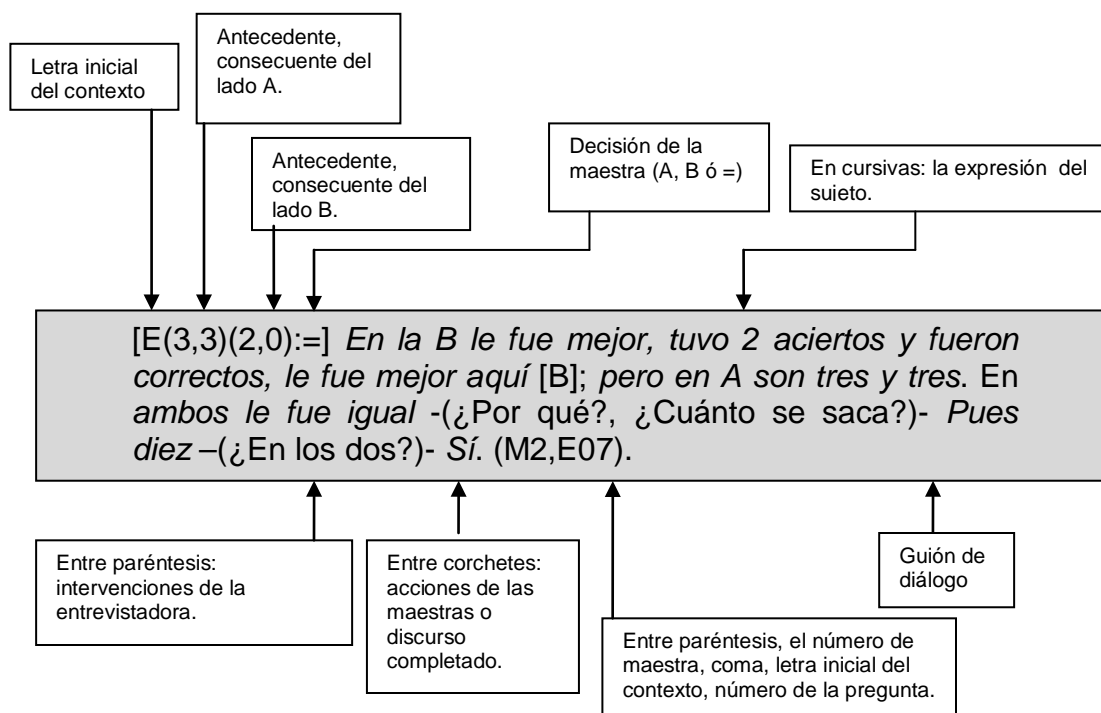
Como se señaló en el capítulo anterior, el análisis de las respuestas que dieron las maestras se realizó a través de la observación de los videos, lo que permitió extraer los argumentos o partes más representativas de sus respuestas, y clasificarlas. El análisis de estos resultados se presenta desde dos perspectivas, cada una con su análisis cuantitativo, análisis cualitativo y un análisis global.

1. La primera perspectiva que se muestra es por Niveles de dificultad de las preguntas. En este análisis por cada nivel se exponen las regularidades de estrategias usadas según el tipo de contexto (mezcla y tasa). A partir del análisis de cada uno de los tres Niveles se presenta un análisis general.
2. La segunda perspectiva es por contextos. Se exponen los comportamientos presentados por las cinco maestras (análisis cuantitativo) y se presentan las respuestas más representativas de las estrategias más usadas (análisis cualitativo). De este segundo análisis también se presenta un análisis global en donde se expone lo más representativo según los dos tipos de contextos.

Cabe señalar que para la presentación de los resultados a cada una de las maestras se les asignaron números, los cuales corresponden al orden en el que fueron entrevistadas: M1 a M5 (ver Anexo 2 “Semblanza de las maestras”).

Para el análisis cualitativo de cada una de estas perspectivas se muestran ejemplos a través de un formato común (Alatorre, 2004) de las respuestas de las maestras. En algunas ocasiones, se reproducen las partes más significativas, ya que las maestras tardaban en dar sus respuestas, o bien eran repetitivas o descriptivas.

El formato se muestra a continuación con un ejemplo de respuesta. Cabe agregar que en ocasiones se acompaña a las respuestas con la ficha que la maestra llegó a rayar o dibujar, para explicar su respuesta.



## 5.1 Consideraciones metodológicas sobre las entrevistas

En el apartado sobre el procedimiento (ver capítulo anterior), se indicó que las maestras no tendrían un tiempo definido para responder a cada pregunta que se le planteara, sin embargo para el tiempo total de la entrevista sólo se dispuso de dos horas para que las maestras contestaran a las preguntas de los cinco contextos. Por el poco tiempo disponible se decidió que, para ahorrarlo y así mismo no cansar a las maestras, se realizarían las siguientes acciones:

- Como se indicó en los apartados sobre la técnica y sobre las estructuras numéricas, no todas las preguntas preestablecidas (65 preguntas en total) se plantearon a las maestras; eso dependió del tipo de respuestas que cada una fue dando a lo largo de cada contexto.

Por ejemplo, cuando las primeras respuestas del Nivel II (estructuras numéricas 5 y 8) y las primeras respuestas del Nivel III (estructuras numéricas 4 y 9) no fueron RP= o RP+, no se plantearon las últimas dos preguntas de cada uno de estos niveles.

- No se les plantearon algunas preguntas intermedias si se observaba que un comportamiento era persistente, no importando si las respuestas eran correctas e incorrectas.
- En algunas ocasiones las maestras no justificaban sus respuestas y para no estar preguntando el porqué de su decisión se decidió dejar hasta ahí los cuestionamientos ya que en algunas preguntas, por ejemplo la 7, la decisión es demasiado obvia para algunos sujetos.

En dos entrevistas se cometieron dos errores. El primero se cometió con M1 a quien se le indujo a usar la estrategia RP+ en el contexto de exámenes, debido a que se le preguntó por la calificación que tenía la niña en cada uno de los exámenes, cuando tal vez no era la intuición de la maestra. El segundo error se debió a un error técnico con la videograbación en la entrevista de M3, por tanto a la maestra se le plantearon por segunda vez sólo algunas de las estructuras numéricas de todos los contextos; en particular, como había contestado correctamente las preguntas del Nivel I, éstas en su mayoría ya no se le volvieron a plantear.

Los contextos fueron presentados a las maestras en el siguiente orden: Jamaica, Cuadernos, Botellas, Velocidad y Exámenes. Este orden podría indicar el porqué las maestras tuvieron tantos errores en Jamaica (desconcierto) y el porqué de los errores en Exámenes (efecto de cansancio).

## 5.2 Análisis por nivel de dificultad de las preguntas

La primera perspectiva de análisis es por niveles de dificultad. Para realizar este análisis, en cada nivel se consideraron conjuntamente las repuestas de todas las maestras a cada una de las preguntas del nivel en cada uno de los contextos. Además se consideraron globalmente todas las preguntas en cada contexto y todos los contextos en cada pregunta (ver el formato de la Tabla 21).

### 5.2.1 Nivel I

Este nivel está conformado por las situaciones en las que pueden ser correctamente aplicadas, además de las relaciones de proporcionalidad  $RP+$  y  $RP=$ , las relaciones de orden  $RO+$  o bien algunas centraciones; es decir son situaciones que pueden ser exitosamente resueltas con estrategias de comparación.

#### *Análisis cuantitativo*

La Tabla 21 y la Figura 6 reportan los promedios PIC que las cinco maestras obtuvieron en las cuatro preguntas de los cinco contextos del instrumento.\*

	VELOCIDAD	CUADERNOS	JAMAICA	EXÁMENES	BOTELLAS	TOTAL
PREG 2	91.3	100.0	100.0	90.0	80.0	91.3
PREG 3	90.0	100.0	87.5	87.5	100.0	93.2
PREG 6	100.0	100.0	87.5	87.5	87.5	92.9
PREG 7		90.0	87.5	66.7	83.3	83.3
TOTAL	92.9	100.0	91.7	88.5	89.3	90.7

**TABLA 21**

\* En el contexto de Velocidad, no se planteó la pregunta 7, cuya estructura numérica es (3,3)(2,0), porque no tendría sentido que una niña caminara 2 cuadras en 0 minutos.

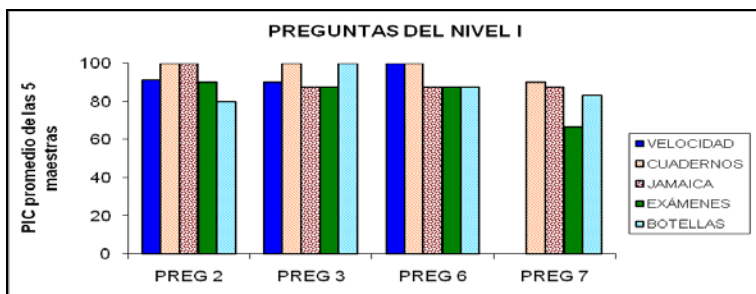


FIGURA 6

En los contextos de tasas obtuvieron los mejores promedios las cinco maestras. El contexto que más se les facilitó fue el de Cuadernos y en el que obtuvieron el menor promedio fue Exámenes.

Las primeras tres preguntas de este nivel fueron las más fáciles para estas maestras. La pregunta 3 resultó ser la más fácil aparentemente, mientras que la pregunta 7, que es la última del nivel, aparentemente fue la más difícil para las maestras, siendo que su estructura numérica la hace ser la más fácil de todas las preguntas; esto se comentará más adelante.

#### *Análisis cualitativo*

Para realizar este análisis se considerarán por separado las respuestas que dieron las maestras a cada una de las preguntas de este nivel. En cada pregunta se muestra la clasificación de las respuestas utilizadas y se ejemplifican algunas.

- *Pregunta 2* (1,4)(3,2)

Las estrategias utilizadas por las maestras se muestran en la Tabla 22.

NIVEL I					
PREGUNTA DOS					
MAESTRAS	CONTEXTOS				
	VELOCIDAD	CUADERNOS	JAMAICA	EXÁMENES	BOTELLAS
M1	CA+&CC-	CA+&CC-	RO+	RP+	RO+
M2	CA+&CC-	RO+	RO+	CA+	CA+
M3	CA+&CC-			CA+*CT=	CA+&CC-
M4	CA+&CC-	CA+&CC-	RO+	CA+&CC-	RO+
M5	DESCRIPCIÓN	CA+&CC-	CA+*CT=	CA+*CT=	CA+

TABLA 22

En esta pregunta las estrategias correctas pueden ser CA+&CC-, CA+\*CT=, RO+ y RP+. En los contextos de Velocidad y Cuadernos (mezclas) las estrategias que usaron las maestras son correctas, excepto M5 cuya respuesta fue incorrecta.

En Cuadernos solamente una maestra (M2) utilizó la estrategia RO+, contrariamente al contexto de Jamaica, donde sólo una (M5) utilizó una estrategia de centración. En Exámenes sólo una maestra (M1) utilizó RP+ y las demás maestras usaron centraciones. En Botellas se encuentran tanto relaciones como estrategias potencialmente incompletas (CA+) y una estrategia compuesta.

Las respuestas dadas por las maestras en los diferentes contextos se ejemplifican a continuación.

Para el contexto de Velocidad M5 fue quien sólo describió su respuesta, sin explicar de qué manera la eligió.

[V(1,4)(3,2):B] *¿Quién caminó más rápido? Pues la B. – (¿Por qué?)- Pues caminó tres cuadras en dos minutos. (M5, V02).*

El contexto de Cuadernos (tasa) M1, M4 y M5 utilizaron CA+&CC- siendo ésta una estrategia correcta. La respuesta de M4 es adecuada porque hace una centración en donde hay más cuadernos y además en donde hay menos monedas de cada objeto.

[C(1,4)(3,2):B] *Un cuaderno con cuatro monedas [A] y acá tres cuadernos con dos monedas [B] aquí compraría más. – (¿Por qué?)- Porque pagarías menos monedas. Y aquí [A] es un sólo cuaderno y son más monedas. (M4, C02)*

En los problemas de mezcla pasa algo parecido a lo que ocurre con los problemas de tasas, en el sentido de que se encuentran tanto estrategias correctas como potencialmente incompletas. Sin embargo, como se comentará más adelante, el tipo de respuestas correctas tuvo una variación.

M1 utiliza RO+ en el contexto de Jamaica; esta estrategia RO+ es una estrategia correcta porque elige la jarra en donde los vasos de concentrado

(antecedente), superan a los vasos de agua, dado que en la jarra B el antecedente (vasos de concentrado) está en desventaja con el consecuente (vasos de agua).

[J(1,4(3,2):B] *El sabor más fuerte es en la B. – (¿Por qué?) Porque en la B, porque en el concentrado son tres vasos por dos de agua y vemos acá [A] es más agua que concentrado, y acá es más concentrado que agua [B]. (M1, J02).*

En esta pregunta M2 tiene un CA+ que corresponde a una respuesta potencialmente incompleta en el contexto de Botellas (mezcla), ya que se centra en los antecedentes (canicas azules) de ambos objetos y no considera los consecuentes (canicas amarillas) de ambas botellas. Se considera una respuesta potencialmente correcta porque M2 podría estar viendo que en A hay menos consecuentes que en B o bien podría estar viendo que hay la misma cantidad de totales, pero no lo dice.

[B(1,4)(3,2):B] *Yo lo enfoco a que es un evento de probabilidad, es más factible que me quede en la B una azul, porque hay más azules que en la botella A. -(¿Cómo? ¿tres es más grande que uno, comparando canicas azules, [los antecedentes en ambas botellas]?). Pero también tres es más grande que dos [comparando antecedentes y consecuentes en la botella B]. Yo no sé si usted esté comparando más canicas azules en la botella B, con respecto a las canicas azules de la botella A, o comparando más canicas azules con respecto a las canicas amarillas en la botella B, ¿ó compara las dos cosas?)- .Me enfoqué más en comparación de las puras canicas azules. (M2, B02).*

- *Pregunta 3 (2,3)(2,2)*

Las respuestas de las maestras se presentan en la Tabla 23.\*

NIVEL I					
PREGUNTA TRES					
MAESTRAS	CONTEXTOS				
	VELOCIDAD	CUADERNOS	JAMAICA	EXÁMENES	BOTELLAS
M1	CC-*CA=	CC-*CA=	RO+	RP+	RO+
M2	CC-*CA=	RP+	RO+	RO+	CA=
M3	CC-*CA=				RO+
M4	CC-*CA=	CC-*CA=	RO+	RO+	RO+
M5	S/J	CC-*CA=	CC-	CT-	CC-*CA=

**TABLA 23**

\* La escasez de respuestas de M3 se debe al error técnico mencionado.

En esta pregunta las estrategias correctas pueden ser CC-\*CA=, RO+ y RP+. En Cuadernos M2 utilizó RP+. En Jamaica utilizaron más relaciones y una centración potencialmente correcta. En Exámenes M1 usó RP+ y las maestras M2 y M4 utilizaron otra vez RO+ como en Jamaica. En Botellas nuevamente usaron las mismas estrategias que en la pregunta 2.

En esta pregunta sólo las maestras M2 (Cuadernos-tasa) y M1 (Exámenes-mezcla) utilizaron RP+. Es necesario mencionar que M1 en Exámenes usó esta estrategia debido al error cometido por la entrevistadora al inducir esta estrategia.

Para el contexto de Cuadernos (tasa) M1 utiliza un CC-\*CA= adecuadamente, porque hace una centración de los consecuentes (monedas) de ambos objetos, y elige el objeto donde el antecedente sea menor (paga menos por los cuadernos), considerando que los antecedentes son iguales (misma cantidad de cuadernos):

[C(2,3)(2,2):B] *Aquí pago una moneda de más [A] y acá pago una moneda de menos [B]. En ésta doy mayor cantidad de monedas [A] y en ésta doy menor cantidad de monedas [B]. – (Entonces ¿dónde me conviene más?)- Pues en la B, pago menos. (M1, C03).*

En el contexto de Velocidad, M5 fue la única que dio una respuesta sin justificación. M5 sólo hace referencia al tiempo, pero se desconoce si está comparando el tiempo de la niña A con la niña B:

[V(2,3)(2,2):B] *Pues no sé, la B caminó más rápido, dos cuabras. (M5, V03).*

Como se ve en la Tabla 23, en el contexto de Jamaica (mezcla) M1, M2 y M4 utilizaron RO+ como estrategia adecuada, porque se puede elegir donde el antecedente (vasos de concentrado) es igual que el consecuente (vasos de agua) de un objeto, mientras que en el otro objeto los vasos de concentrado están en desventaja con los vasos de agua; ésta fue la estrategia que utilizó M4 y su respuesta es:



[J (2,3)(2,2):B] *En ésta [B] – (¿Por qué?)- Porque es la misma cantidad, dos vasos de concentrado y dos de agua y aquí [A] es menos [vasos de concentrado] y más de agua.*(M4, J03).

La maestra M5 en el contexto de Jamaica utiliza CC- como estrategia, siendo ésta una respuesta potencialmente correcta: observa que en el lado B hay menos vasos de agua pero no dice que en ambos hay la misma cantidad de concentrado de jamaica.

[J (2,3)(2,2):B] *En este caso, sería aquí [B] porque hay menos agua natural.* (M5, J03).

Las estrategias incorrectas de esta pregunta se presentan sólo en los problemas de mezcla (Exámenes y Botellas); son respectivamente de M5 y M2. La primera es incorrecta porque es una centración en los totales. La segunda; que se reproduce a continuación, es incorrecta porque M2 observa las canicas azules de ambas botellas; como en ningún objeto hay una canica de más o de menos, ella decide que es “igual” al ver que tienen la misma cantidad de canicas azules, pero no considera las amarillas. Esto la lleva incluso a dar la decisión incorrecta “da igual”.

[B(2,3)(2,2): Da igual] *Para mí sería de nuevo un evento igual, porque en ambas hay dos azules.* (M2, B03).

- *Pregunta 6 (2,2)(3,2)*

Las respuestas de las maestras se muestran en la Tabla 24.

NIVEL I					
PREGUNTA SEIS					
MAESTRAS	CONTEXTOS				
	VELOCIDAD	CUADERNOS	JAMAICA	EXÁMENES	BOTELLAS
M1	CA+*CC=	CA+*CC=	RO+	RP+	RO+
M2	CA+*CC=	RP+	RO+	RO+	
M3		CA+*CC=			RO+
M4	CA+*CC=	RO+	RO+	RO+	CA+*CC=
M5	RO+	RO+	CA+	CA+	CA+

**TABLA 24**

En esta pregunta las estrategias correctas pueden ser CA+\*CC=, RO+ y RP+. En los contextos de tasas las maestras usaron más centraciones. En cambio en los contextos de mezcla simple utilizaron más relaciones. En botellas utilizaron por igual centraciones y relaciones.

En esta pregunta al igual sólo dos maestras, M2 y M1, usaron RP+ en los mismos contextos que en la pregunta 3. En el caso de M1, el que usara esta estrategia en Exámenes se debió a la misma razón que en la pregunta 3.

La maestra M1 tiene una respuesta correcta al utilizar como estrategia CA+\*CC= en el contexto de Velocidad (tasa), porque compara la distancia recorrida por ambas niñas, hace una centración en quién recorre más y se da cuenta que ambas lo hacen en el mismo tiempo:

*[V(2,2)(3,2): B] En A recorrió dos cuadras en dos minutos y en B recorrió tres cuadras en dos minutos. Sería en B, porque en menos tiempo recorre más. -(¿Cómo, en menos tiempo?)- Porque en A recorre menor distancia por dos minutos y en B recorre mayor distancia por menor tiempo, ella recorre más, es más rápida. (M1, V06).*

En el contexto de Cuadernos (tasas) M2 es la única que utiliza RP+, que es también una respuesta correcta, porque calcula en cada objeto las razones parte-parte consecuente/antecedente (monedas/cuadernos) y al final compara los resultados; elige donde es menor la cantidad a pagar por cada cuaderno:

*[C(2,2)(3,2): B] Pues son más económicos en la B, haciendo el mismo procedimiento que en el anterior, acá [B] me salen a 66 centavos y aquí [A] me sale a peso cada uno. En éste es más [B] económico. (M2, C06).*

La maestra M5 es la única que presenta un CA+ como estrategia en los problemas de mezcla. Sólo observa donde el número de antecedentes es mayor sin hacerle caso a los consecuentes de ambos objetos; por eso se considera una respuesta potencialmente incompleta.

*[J(2,2(3,2):B] Es B -(¿Por qué?)- Porque tiene más vasos de Jamaica. (M5, J06).*

La estrategia más utilizada para esta pregunta en los problemas de mezcla fue RO+. M3 utiliza esta estrategia adecuadamente porque elige el objeto donde el antecedente (canicas azules) está en ventaja, mientras que en el otro hay la misma cantidad de antecedentes y consecuentes:

[B(2,2)(3,2):B] *Aquí hay dos a dos [A], entonces aquí [B] hay tres a dos; entonces hay más probabilidad de que me quede una azul.*(M3,B06).

- *Pregunta 7 (3,3)(2,0)*

La tabla 25 muestra los resultados obtenidos.

NIVEL I					
PREGUNTA SIETE					
MAESTRAS	CONTEXTOS				
	VELOCIDAD	CUADERNOS	JAMAICA	EXÁMENES	BOTELLAS
M1		CC-	CC-		CC-
M2		CC-	CC-	Roe ⊥ CC-	
M3		CC-			
M4		CC-	CC-	CC-	CC-
M5		SJ	SJ	CC-	SJ

**TABLA 25**

En esta pregunta las estrategias correctas pueden ser CC-, RO+ y RP+. Las maestras usaron más centraciones y sólo hay una respuesta incorrecta en la que se hizo uso de una relación. Por lo demás, el relativamente bajo resultado PIC (83.3) se debe a las respuestas sin justificación (SJ) de M5, para quien la estructura numérica fue tan fácil que no justificó su respuesta: la elección “B” le parecía obvia.

Para el contexto de cuadernos (tasa) la estrategia CC- fue utilizada frecuentemente por las primeras cuatro maestras, por ejemplo M4 elige el objeto con el menor consecuente (las monedas):

[C(3,3)(2,0):B] *No, pues a leguas, éste el que más me conviene porque me lo regalan.* [B]. (M4, C07).

La maestra M5 fue la única que presenta una respuesta sin justificación, sólo hace una observación:

[C (3,3)(2,0):B] *Obviamente el B. (M5, C07).*

En el contexto de Exámenes M2 utiliza RO<sup>e</sup>- CC -, que es una estrategia incorrecta porque llega a la decisión “da igual”.

[E (3,3)(2,0):Da igual] *Sólo tuvo dos aciertos, le fue mejor aquí [B], pero aquí [A], son tres y tres. En ambos le fue igual. (M2. E07).*

La única estrategia utilizada adecuadamente para el contexto de Botellas (mezcla) fue CC-. La maestra M1 observa donde hay menos canicas azules.

[B (3,3)(2,0):B] *En ésta [B] No hay canicas azules.(M1,B07).*

Regularidades encontradas

En las tablas 22, 23, 24 y 25 se pueden observar algunas regularidades acerca del tipo de estrategias utilizadas según los contextos. La Tabla 26 muestra las frecuencias con las que se observan las distintas estrategias en cada contexto, la Tabla 27 muestra las frecuencias relativas y la 28 agrupa las frecuencias relativas por tipo de contexto.

NIVEL I							
CONTEXTO	Respuestas correctas		Respuestas potencialmente incompletas		Respuestas incorrectas	TOTAL	
	RP+	estrategias de comparación					
		RO+	centraciones				
			completas	incompletas	S/J o descr		
VELOCIDAD	0	1	11	0	2	0	<b>14</b>
CUADERNOS	2	3	12	0	1	0	<b>18</b>
JAMAICA	0	9	4	2	1	0	<b>16</b>
EXÁMENES	3	4	5	3	0	1	<b>16</b>
BOTELLAS	0	7	5	3	1	1	<b>17</b>
<b>TOTAL</b>	<b>5</b>	<b>24</b>	<b>37</b>	<b>8</b>	<b>5</b>	<b>2</b>	<b>81</b>

**TABLA 26**

NIVEL I							
CONTEXTO	Respuestas correctas		Respuestas potencialmente incompletas		Respuestas incorrectas	TOTAL	
	RP+	estrategias de comparación					
		RO+	centraciones				
		completas	incompletas	S/J o descr			
VELOCIDAD	0.0%	7.1%	78.6%	0.0%	14.3%	0.0%	100%
CUADERNOS	11.1%	16.7%	66.7%	0.0%	5.6%	0.0%	100%
JAMAICA	0.0%	56.3%	25.0%	12.5%	6.3%	0.0%	100%
EXÁMENES	18.8%	25.0%	31.3%	18.8%	0.0%	6.3%	100%
BOTELLAS	0.0%	41.2%	29.4%	17.6%	5.9%	5.9%	100%
TOTAL	6.2%	29.6%	45.7%	9.9%	6.2%	2.5%	100%

TABLA 27

NIVEL I							
CONTEXTO	Respuestas correctas		Respuestas potencialmente incompletas		Respuestas incorrectas	TOTAL	
	RP+	estrategias de comparación					
		RO+	centraciones				
		completas	incompletas	S/J o descr			
TASAS	6.3%	12.5%	71.9%	0.0%	9.4%	0.0%	100%
MEZCLAS	6.1%	40.8%	28.6%	16.3%	4.1%	4.1%	100%

TABLA 28

Las regularidades que se encontraron en este Nivel I son: el único contexto en donde se usaron espontáneamente RP+ fue en Cuadernos, puesto que las RP+ usadas por M1 en Exámenes fueron inducidas por la entrevistadora. En tasas las centraciones usadas fueron completas, mientras que en mezclas usaron completas e incompletas. En tasas no se cometieron errores y en mezclas sí. En mezclas se utilizaron más RO+ que en tasas. Las maestras que utilizaron esta estrategia eligieron el objeto donde el antecedente estaba en ventaja con el consecuente. Eligen donde hay más vasos de concentrado que de agua. A continuación se ejemplifican algunas respuestas:

[J(1,4)(3,2):B] *Es lo mismo... mayor concentrado en ésta [B] (Sabor más fuerte). Se supone que éste es como quién dice el jarabe y éste es al agua simple [B]. Hay uno de concentrado por uno de agua simple, y aquí [A] hay más agua que jarabe.(M2,J02).*

[J(1,4)(3,2):B] *B (¿Por qué?) Porque hay menos agua simple (Hay menos agua simple ¿que qué?) Hay más concentrado y son dos de agua simple, y aquí [A] hay uno solo y aquí [A] son cuatro de agua simple, se diluye más ese vaso (M4,J02).*

[J(2,2)(3,2):B] *Sería ésta la B (¿Por qué) Porque tiene un vaso más de concentrado. (M4,J06).*

En resumen en los contextos de tasas todas las centraciones fueron completas. En cambio en los contextos de mezcla usaron más RO+ que en tasas y cuando usaron centraciones más de la tercera parte fueron incompletas; aun juntando los dos tipos de centraciones son menos que las RO+ usadas.

Estos resultados podrían sugerir que como estrategia didáctica se usaran más RO+ en mezclas y centraciones en tasas.

### 5.2.2 Nivel II

En este segundo nivel se encuentran las situaciones de proporcionalidad, en las que solamente hay una estrategia correcta aplicable, RP=.

#### *Análisis cuantitativo*

En la Tabla 29 y la Figura 7 se reportan los promedios PIC que las cinco maestras obtuvieron en las cuatro preguntas de los cinco contextos del instrumento.

	VELOCIDAD	CUADERNOS	JAMAICA	EXÁMENES	BOTELLAS	TOTAL
PREG 5	100.0	100.0	100.0	100.0	66.7	95.2
PREG 8	100.0	100.0	0.0	0.0	50.0	58.7
PREG 10	100.0	100.0	20.0	25.0	60.0	65.2
PREG 12	100.0	100.0	0.0	50.0	100.0	82.4
TOTAL	100.0	100.0	41.2	56.7	66.7	74.4

**TABLA 29**

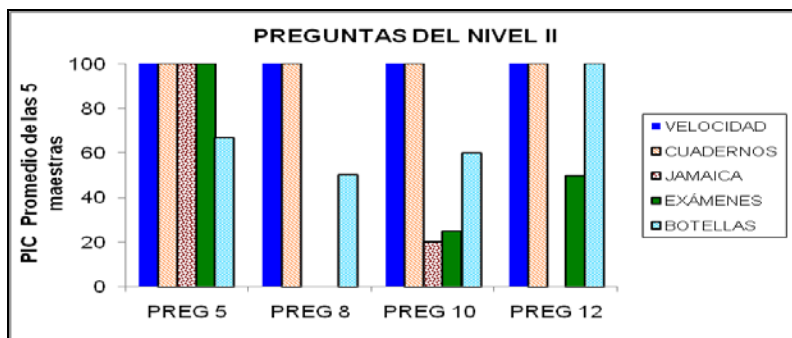


FIGURA 7

En los contextos de tasas las maestras obtuvieron los mejores promedios, por lo tanto fueron aparentemente los que más se les facilitaron. El contexto donde obtuvieron el menor promedio fue el de Jamaica.

Aparentemente la pregunta 12 les resultó más fácil que la 8 y la 10, pero esto es un efecto de que la pregunta 12 no fue planteada cuando se percibía que la entrevistada no estaba logrando RP=.

#### Análisis cualitativo

- *Pregunta 5* (3,3)(1,1)

Los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 30.

NIVEL II					
PREGUNTA CINCO					
MAESTRAS	CONTEXTOS				
	VELOCIDAD	CUADERNOS	JAMAICA	EXÁMENES	BOTELLAS
M1	RP=	RP=	RP=	RP=	RP=
M2	RP=	RP=	RP=	RP=	CA+
M3	RP=		RP=	RP=	
M4	RP=	RP=	RP=	RP=	RP=
M5	RP=	RP=	RP=	RP=	RP=

TABLA 30

En esta pregunta se utilizó correctamente RP= por todas las maestras. A continuación se muestran algunos ejemplos de estas respuestas. Para el contexto de Cuadernos (tasas) M4 utiliza RP= adecuadamente, porque hace una relación de uno a uno en cada tienda y se da cuenta que hay una equivalencia en ambas:

[C(3,3)(1,1):Da igual] *Es lo mismo, porque aquí pagaríamos una moneda por cada cuaderno [A] y aquí también [B].* (M4, C05)

En el siguiente ejemplo la estrategia que utilizó M1 fue RP= para el contexto de Jamaica (mezcla). Esta estrategia lleva a decir “da igual” a M1, cuando reconoce que en ambos lados existe la misma cantidad de vasos de agua y de concentrado de Jamaica, es decir hay una equivalencia, y se presenta una situación de proporcionalidad:

[J(3,3)(1,1):Da igual] *Cualquiera de las dos porque en B hay uno de concentrado que de agua y en A también es lo mismo.* (M1, 05J).

Una estrategia que podría representar también la manera en que resolvió M1 la pregunta 5 en el contexto de Jamaica (mezcla): identifica los grupos formados por un vaso de agua con un vaso de concentrado de jamaica en ambos lados y reconoce la equivalencia.

En esta pregunta sólo hay un error: M2 contestó con CA+ en Botellas, (mezcla), es decir, M2 sólo considera que la botella A tenía más canicas azules que la botella B, no contempla las canicas amarillas existentes de la Botella A y B. Sólo se centra en los antecedentes (canicas azules):

[B(3,3)(1,1):A] *Hay más canicas azules que en la B.* (M2, B05).

- *Pregunta 8 (2,1)(4,2)*

Las respuestas dadas por las maestras se presentan en la Tabla 31.

NIVEL II					
PREGUNTA OCHO					
MAESTRAS	CONTEXTOS				
	VELOCIDAD	CUADERNOS	JAMAICA	EXÁMENES	BOTELLAS
M1	RP=	RP=	RS+		RP=
M2	RP=	RP=	RS+	RP=	
M3	RP=	RP=	RS+	RP=&RP'	RP=
M4	RP=	RP=	RO=	RS+	RO=
M5	RP=	RP=	CC-	CA+	CC-

**TABLA 31**

En la pregunta 8 en los contextos de Velocidad y Cuadernos (tasas), todas las maestras utilizaron la estrategia RP= adecuadamente. En esta pregunta los



errores estuvieron en los contextos de mezcla, sobre todo en Jamaica, en la que ninguna de las maestras usó correctamente la estrategia RP= y ni siquiera lo intentan. Hubo distintas clases de errores; el más frecuentemente fue RS+.

En el siguiente ejemplo se muestra el uso adecuado de la estrategia RP= en el contexto de velocidad (tasas). M3 responde diciendo “da igual”, porque divide los elementos de cada objeto: en el objeto A divide  $4/2=2$  y en B divide  $2/1=2$ ; entonces sería que recorrería en dos minutos una cuadra tanto para el objeto A como el B.

[V(2,1)(4,2):Da igual] *Dos cuadras en un minuto en A y en B cuatro cuadras en dos minutos, por lo tanto son iguales. [En B divide cada dos cuadras por un minuto] (M3, V08).*

En el contexto de Exámenes (mezcla), M2 utiliza RP= adecuadamente porque calcula en cada objeto una razón (antecedente/total): preguntas correctas entre el total de preguntas y se da cuenta que ambos obtienen la misma calificación y observa una igualdad entre ambos objetos:

[E(2,1)(4,2)B] *Sacan la misma calificación: ambos 6.9. Les fue igual. - [Divide el número de respuestas correctas entre el total de preguntas en A y en B] - (M2, E08).*

En el contexto de Jamaica (mezcla), tres maestras utilizan RS+ para solucionar la situación presentada. Esta estrategia es incorrecta porque eligen donde la ventaja es mayor: hacen una comparación de la existencia de cada vaso de concentrado con un vaso de agua simple en cada objeto, y deciden elegir donde hay más sobrantes de concentrado. Por ejemplo, la respuesta de M1:

[J(2,1)(4,2):B] *Sería en la B, porque aquí tengo cuatro vasos de concentrado por dos de agua y aquí tengo dos vasos de concentrado por uno de agua simple [A]. -(Sí, pero ¿qué en esos dos y ese uno, en ese cuatro y esos dos le hace a usted saber que es la B, la A o da igual?)-Son dos más de concentrado en B y en A sólo hay uno de concentrado. -(Entonces ¿usted escoge la B porque tiene dos vasos más de concentrado que la A?)- .Sí (M1, J08).*

Estos vasos de concentrado, a los que algunas llaman sobrantes, se tendrían que dividir entre los vasos de agua existentes en A o B, o según sea el caso, para llegar a  $RP=$ .

- *Pregunta 10 (3,6)(1,2)*

Las respuestas a esta pregunta se muestran en la Tabla 32.

NIVEL II					
PREGUNTA DIEZ					
MAESTRAS	CONTEXTOS				
	VELOCIDAD	CUADERNOS	JAMAICA	EXÁMENES	BOTELLAS
M1		$RP=$	$RS+$		$RP=$
M2	$RP=$	$RP=$	$RS+$	$RP=$	$RP'$
M3	$RP=$	$RP=$	$RP=$	$RP'$	$RP=$
M4	$RP=$	$RP=$	$CC-$	$CA+$	$CC-$
M5	$RP=$	$RP=$	$CC-$	$RO=-RP=$	$RP=$

**TABLA 32**

En esta pregunta para los contextos de Velocidad y Cuadernos (tasas) las maestras usan  $RP=$  como estrategia correcta. En los contextos de Jamaica y Exámenes (mezcla) sólo M3 y M2 utilizan  $RP=$ , aunque en el contexto de Botellas (mezcla) M1, M3 y M5 también hacen uso de esa misma estrategia. Los errores que se encuentran en los problemas de mezcla son las  $RS+$  de M1 y M2 en Jamaica, las centraciones de M4 en los tres contextos y de M5 en Jamaica; las  $RP'$  de M3 en Jamaica y M2 en Botellas; por último la estrategia compuesta de M5 en Exámenes. La única maestra que no usó ni tuvo intento de  $RP=$  en mezclas fue M4.

Para el contexto de Cuadernos (tasa) M5 utiliza  $RP=$ : compara la cantidad de cuadernos y monedas en A y B, y encuentra una equivalencia:

[C(3,6)(1,2): Da igual] *Igual, mismos libros, mismas monedas, aquí [A] y también aquí [B]. (M5, C10)*

La estrategia  $RP=$  fue utilizada por M3, en el contexto de Botellas (mezcla) al observar que había la misma proporción en ambas botellas, haciendo una relación de consecuentes con antecedentes (entre canicas amarillas y canicas azules:

[B(3,6)(1,2): Da igual] *Aquí es igual. – (¿Por qué?)- Porque están dos amarillas, una azul [A] y [B] Pueden tener la misma proporción para la suerte de que caiga azul. (M3, B10).*

Uno de los errores que aparecen en esta pregunta es CA+; es expresada por M4. Es incorrecta porque sólo considera los aciertos de ambos exámenes y no presta atención a las respuestas incorrectas:

[E(3,6)(1,2): A] *De un total de nueve tiene tres aciertos [señala la opción A] y de un total de 3 tiene un acierto, le fue bien en A. -(¿Por qué?)-. Porque fueron más aciertos. (M4, E10)*

- *Pregunta 12 (4,6)(2,3)*

Los resultados se presentan en la Tabla 33.

NIVEL II					
PREGUNTA DOCE					
CONTEXTOS					
MAESTRAS	VELOCIDAD	CUADERNOS	JAMAICA	EXÁMENES	BOTELLAS
M1	RP=	RP=	RS+	RP=	RP=
M2	RP=	RP=			RP=
M3	RP=	RP=	RS+	RP'	RP=
M4	RP=	RP=			
M5	RP=	RP=			

**TABLA 33**

La pregunta 12 sólo fue planteada en los cinco contextos a M1. En Velocidad y Cuadernos (tasas) y Botellas (mezcla) RP= fue la única estrategia que utilizaron todas las maestras. Para los contextos de Jamaica, Velocidad y Botellas (mezcla) no fueron planteadas a M4 y M5. En el contexto de Jamaica las dos únicas maestras que contestaron la pregunta presentan RS+ como estrategia incorrecta y sólo hay un RP' dentro del contexto de Exámenes,

A continuación se muestran algunos ejemplos de sus respuestas. Dentro del contexto de Velocidad (tasas) M2 utilizó RP= adecuadamente porque argumentó que la cantidad de tiempo y cuerdas de una niña es el doble que la de la otra niña:

[V(4,6)(2,3):Da igual] *Es el mismo tiempo, porque es el doble de cuerdas y de tiempo. (M2, V12).*

En el contexto de Jamaica (mezcla) solamente fue planteado a dos maestras; la estrategia RS+ que usaron fue incorrecta; ahora expondremos un ejemplo de ellas. M1 comienza haciendo grupos de un vaso de concentrado con un vaso de agua simple para B y se da cuenta que le sobra un vaso de agua, hace lo mismo para A y dice “me sobran dos en B”. M1 elige donde la diferencia de vasos de agua entre ambos objetos es menor. La idea de la maestra M1 al querer formar grupos en ambos objetos es buena, pero la manera en como lo resolvió no lo fue, porque pudo haber dicho lo que la entrevistadora le comentó (una forma diferente de hacer grupos, sin que le queden sobrantes):

[J(4,6)(2,3):B] *Para mí el concentrado estaría en ésta [B]. -(¿Por que?)- Porque en ésta sólo me sobra un vaso de agua [B] y en ésta dos [A]. - (Fíjese, maestra, que ayer que estábamos aplicando esta entrevista con otra maestra, esta maestra dijo algo chistoso: aquí en B tengo estas dos con estas tres y para A tengo estas dos con estas tres; y estas dos con estas tres, entonces da igual, y ¿usted qué opina?)- Pues que sí, pero sólo que en éste es mayor la cantidad de líquido [A]. -(Pero entonces ¿cómo calibra usted?, pues en B me dijo que sólo sobra una y es cierto y en A me sobran dos y es cierto, y entonces tiene más agua y entonces usted dice tiene más sabor la B, y la otra maestra dijo que da igual)- Lo que pasa es que yo me fui por la percepción o sea lo que vi así directo. -(Entonces ¿la otra maestra la convence a usted?)- No, pero suena lógico lo que ella está diciendo. (M1, J12).*

La estrategia RP= fue utilizada por M3, en el contexto de Botellas (mezcla) al encontrar que las proporciones entre las canicas azules y amarillas en la botella A y B son iguales.

[B(4,6)(2,3): Da igual] *Dos, dos me quedan dos [A].Una, una y me queda una [B].Pues los dos tienen su probabilidad, pero este [azules] es la mitad de éste [amarillas], es lo mismo. (M3, B12).*

### *Regularidades encontradas*

En las tablas 30, 31, 32 y 33 se observan algunas regularidades acerca del tipo de estrategias usadas según los contextos. La Tabla 34 muestra las frecuencias en las que se observan las distintas estrategias en cada contexto, en la Tabla 35 se presentan las frecuencias relativas y en la 36 se agrupan las frecuencias relativas por tipo de contexto.

NIVEL II							
CONTEXTO	Estrategia correcta	Estrategias incorrectas					TOTAL
	RP=	RP'	RS	Centraciones	RO =	OTRAS	
VELOCIDAD	19	0	0	0	0	0	19
CUADERNOS	19	0	0	0	0	0	19
JAMAICA	6	0	7	3	1	0	17
EXÁMENES	9	2	1	2	1	0	15
BOTELLAS	11	1	0	3	1	0	16
<b>TOTAL</b>	<b>64</b>	<b>3</b>	<b>8</b>	<b>8</b>	<b>3</b>	<b>0</b>	<b>86</b>

TABLA 34

NIVEL II							
CONTEXTO	Estrategia correcta	Estrategias incorrectas					TOTAL
	RP=	RP'	RS	Centraciones	RO =	OTRAS	
VELOCIDAD	100.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	100%
CUADERNOS	100.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	100%
JAMAICA	35.3%	0.0%	41.2%	17.6%	5.9%	0.0%	100%
EXÁMENES	60.0%	13.3%	6.7%	13.3%	6.7%	0.0%	100%
BOTELLAS	68.8%	6.3%	0.0%	18.8%	6.3%	0.0%	100%

TABLA 35

NIVEL II							
CONTEXTO	Estrategia correcta	Estrategias incorrectas					TOTAL
	RP=	RP'	RS	CENTRACIONES	RO =	OTRAS	
TASAS	100.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	100%
MEZCLAS	54.2%	6.3%	16.7%	16.7%	6.3%	0.0%	100%

TABLA 36

Las regularidades encontradas en este Nivel II son: en contextos de tasas (velocidad y mezclas) no hubo ningún tipo de estrategias incorrectas, mientras que RP= fue la única estrategia utilizada por todas las maestras. En los contextos de mezcla (Jamaica, Exámenes y Botellas) sí hubo estrategias incorrectas. Las más utilizadas por las maestras fueron las RS+ y las centraciones, aunque también hubo RP' y RO=.

### 5.2.3 Nivel III

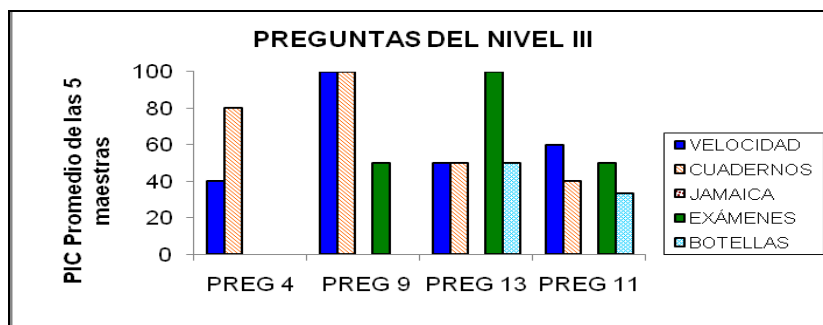
En este tercer nivel se ubican las situaciones en las que las únicas estrategias correctamente aplicables son las RP+. En el análisis de este nivel se explica el tipo de respuesta de las maestras.

#### Análisis cuantitativo

La Tabla 37 y la Figura 8 reportan los promedios PIC que las cinco maestras obtuvieron en las cuatro preguntas de los cinco contextos del instrumento.

	VELOCIDAD	CUADERNOS	JAMAICA	EXÁMENES	BOTELLAS	TOTAL
PREG 4	40.0	80.0	0.0	0.0	0.0	33.3
PREG 9	100.0	100.0	0.0	50.0	0.0	48.0
PREG 11	60.0	40.0	0.0	50.0	33.3	41.2
PREG 13	50.0	50.0	0.0	100.0	50.0	42.9
TOTAL	73.7	63.2	0.0	33.3	17.6	41.3

**TABLA 37**



**FIGURA 8**

En Velocidad obtuvieron el mejor promedio las cinco maestras. El contexto donde obtuvieron el peor promedio fue Jamaica.

La pregunta aparentemente más difícil de este nivel fue la primera. En las otras tres preguntas hubo una diferencia mínima, el promedio PIC de cada una es menor de 50. Los promedios de las preguntas pueden deberse a que la pregunta 4 se les planteó a todas las maestras en todos los contextos y que sus respuestas no fueron RP+. Al ver que las maestras no contestaban correctamente a estas

estructuras numéricas en los contextos de mezcla, éstas se omitieron, por ejemplo la pregunta 11 y 13. El caso contrario fue con M1, a quien no se le plantearon las últimas preguntas del nivel pues venía contestando correctamente, exceptuando el contexto de Exámenes en el que se indujo en la maestra el uso de una estrategia correcta.

### Análisis cualitativo

- *Pregunta 4 (2,1)(3,2)*

La Tabla 38 muestra las estrategias que utilizaron las cinco docentes entrevistadas a para la pregunta 4.

NIVEL III					
PREGUNTA CUATRO					
MAESTRAS	CONTEXTOS				
	VELOCIDAD	CUADERNOS	JAMAICA	EXÁMENES	BOTELLAS
M1	RP+	CA+	RS=	RP+	RP'
M2	RP+	RP+	RS=	RP'	CA+
M3	RP+	RP+	RS=	RP'	RO=
M4	CA+&RP'	RP'	CT-	RS=	RO=
M5	RP+	RP+	CA+ <sup>1</sup> CC-	CC-	CC-

**TABLA 38**

En tasas la mayor cantidad de respuestas fueron correctas {RP+}, pero hubo algunos errores, mientras que en mezclas sólo hubo una correcta y errores de diversos tipos. Un ejemplo de estrategia correcta en tasas es de la maestra M5 quien calculó correctamente el cociente de consecuente: antecedente, o sea 1:2. Aunque en B no realizó la operación 2:3, sí concluyó correctamente que no podría ser por cada cuadra medio minuto, sino que sería más y por tanto eligió el cociente menor:

[V(2,1)(3,2):A] *Yo creo que la B, porque en dos minutos hizo tres cuadras y en A, pues hizo en un minuto dos cuadras. -(¿Cómo dijo?)- A ver, por lo que estoy observando sería A, hizo medio minuto por cuadra. En sí, [...A] porque en A son dos cuadras y se lleva medio minuto y en B son tres cuadras en dos minutos, no pudo haber hecho medio minuto en cada cuadra (M5,V04).*

Un ejemplo de error en tasa es de M4, quien duplicó (multiplicó) las cuadras y los minutos en A y B sin sentido, pues no era necesario, sólo basta hacerlo en A para así tener el mismo número de minutos que en B y comparar únicamente la cantidad de cuadras recorridas:

*[V(2,1)(3,2):B] Es A, porque camina dos cuadras en un minuto y en B camina tres cuadras por dos minutos. -(¿Por qué?)- La niña A caminaría cuatro cuadras en dos minutos, esta niña camina dos cuadras en un minuto, y la niña B recorre tres cuadras en dos minutos, sería la B. - (¿Por qué?)- porque caminaría el doble de estos [seis cuadras en cuatro minutos] y en A sólo recorrería cuatro cuadras en dos minutos (M4,V04).*

El ejemplo de error en mezclas es de la maestra M2, quien sólo comparó los antecedentes (canicas azules) de ambas botellas y eligió donde había más, sin considerar el número de canicas amarillas en las dos botellas.

*[B(2,1)(3,2):A] Mayor probabilidad que quede una azul, sería en la B, porque hay más azules, a diferencia de la A (M2, B04).*

- *Pregunta 9 (2,5)(1,3)*

La Tabla 39 muestra las estrategias que utilizaron las cinco docentes entrevistadas a la pregunta 9.

NIVEL III					
PREGUNTA NUEVE					
MAESTRAS	CONTEXTOS				
	VELOCIDAD	CUADERNOS	JAMAICA	EXÁMENES	BOTELLAS
M1	RP+	RP+	RS+		RP'
M2	RP+	RP+	RS+	RP+	CC-&CT-
M3	RP+	RP+	RPS	RP'	RO=
M4	RP+	RP+	CC-	CC-	CC-
M5	RP+	RP+	CC-	RO=	CC-

**TABLA 39**

En esta pregunta en el contexto de Jamaica las maestras usaron RS+ y centraciones como en la pregunta 4, pero ahora M3 usó RPS. En Botellas y Exámenes usaron una RO=. La maestra M4 usó tres de las seis centraciones usadas en los contextos de mezcla.



Un ejemplo de estrategia correcta en tasas es la usada por la maestra M4, quien igualó la cantidad de cuadernos (antecedentes) multiplicando B por dos, lo que le permitió comparar la cantidad de monedas que se tendrían que pagar en cada una y elegir donde se pagaría menos (tienda A) ya que ahí se pagó sólo cinco monedas y no seis monedas como en la tienda B.

[C(2,5)(1,3):A] *Es ésta [A]. -(¿Por qué?)- Porque pagamos cinco y nos dan dos cuadernos y aquí tendríamos que pagar seis monedas para obtener dos cuadernos [B] (M4, C09).*

Los ejemplos de estrategias correctas e incorrectas son de M2 (correcta) y M1 (incorrecta) en mezclas.

La maestra M2 en el caso de exámenes realizó la comparación de razones por el cociente parte-todo  $2/7$  y  $1/4$ ; la maestra eligió el examen donde obtuvo mayor proporción de aciertos.

[E (2,5)(1,3):A] *Le va mejor en ésta porque aquí saca 2.8 [A] y acá saca 2.5 [B], en este examen le va mejor [A]. -(¿O sea  $20 \div 7$  y  $10 \div 4$ ?)- Sí. (M2, E09).*

La maestra M1 realiza y después compara agrupamientos de un antecedente con un consecuente en ambas jarras, los vasos sobrantes de agua en ambas jarras, considera que el agua de jamaica se disuelve más en A, porque “sobran” más vasos de agua que en B, y por eso elige B.

[J (2,5)(1,3):B] *La B -(¿Por qué?)- Porque aquí [B] si a un vaso de agua le pongo uno de jamaica, para mí se equilibra, y si le pongo dos más, ya es un poco más ligero. Y acá [A] se equilibra con dos pero le pongo tres más: se disuelve más el sabor de jamaica. (M1, J09).*

- *Pregunta 11 (5,2)(7,3)*

La Tabla 40 muestra las estrategias que utilizaron las cinco docentes entrevistadas a la pregunta 11.

NIVEL III					
PREGUNTA ONCE					
MAESTRAS	CONTEXTOS				
	VELOCIDAD	CUADERNOS	JAMAICA	EXÁMENES	BOTELLAS
M1	RP+	RP+	RPS		RPS
M2	RP+	RP+		RP+	RP+
M3	RP+	RPS	RPS	RPS	RPS
M4	RP'	RPS			
M5	CA+	CA+			

TABLA 40

Algunos ejemplos de estrategias correctas e incorrectas en los contextos de tasas y mezclas son:

La maestra M3 realizó agrupamientos en A y B de cuadra y media por minuto, pero en B le faltó media cuadra para realizar el tercer grupo, lo que la lleva a elegir A pues ahí no le faltaron cuadras (antecedentes) (la Figura 9 reproduce los dibujos realizados por M3 en la tarjeta):

[V(5,2)(7,3):A] Aquí, [A] si lo vemos en proporción [...] dos cuadras y media por un minuto, dos cuadras y media por un minuto. Y aquí [B] le faltó, para que hiciera el tercer minuto. Entonces es ésta [A]. -(A ver, píntele las cuadras)-. Mire, dos cuadras y media, porque son cinco cuadras -(¿Eso es lo que caminó el primer minuto?)- Sí, porque eso caminó un minuto y de aquí para acá caminó otro minuto y es igual a dos minutos [A]. -(Ok)- Y en ésta [B] [...] le faltó media cuadra para que ocupara el otro minuto. (M3, V11).

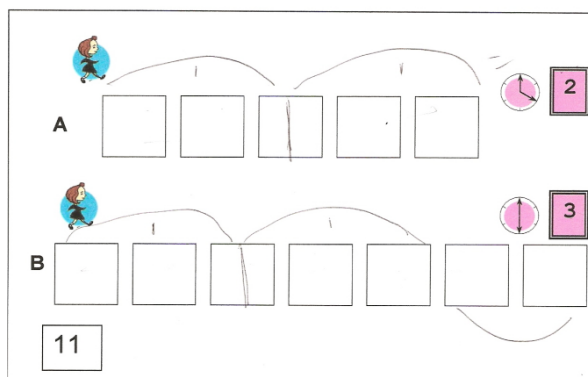


FIGURA 9

La maestra M5, aunque no lo dijo, se fijó sólo en que en B eran más cuadernos que en A y que no importaba que en ambas tiendas dieran más cuadernos por menor cantidad de monedas:

[C (5,2)(7,3):B] *Es la B, menos monedas más cuadernos, no tengo otra razón.* (M5, C11).

La maestra M2 realizó la equivalencia de fracciones de ambas botellas, por medio de productos cruzados.

[B(5,2)(7,3):A] *Pues la B –(¿Por qué?)- porque hay más cantidad de azules, menos amarillas, aquí hay más probabilidad de que salga una azul –(¿Porque 7 es más grande que 5?)- [escribe 5/7 en A, 7/10=49/70 en B. ¿En cuál tengo más probabilidad, verdad? –(Sí)- En la A [50/70 contra 49/70, ¿por eso le fue mejor?)- Sí, A* (M2, B11).

La maestra M3 realizó agrupamientos dos a uno (dos azules y una amarilla), en ambas botellas, y no repartió los residuos en ambas (una canica azul) entre las amarillas de cada botella, lo que le llevó a decir da igual pues terminó comparando los residuos:

[B(5,2)(7,3):A] *En A es dos a una, dos a una, me queda una. En B es dos a una, dos a una y dos a una y me queda una: es igual en las dos* (M3, B11).

En esta pregunta el error que más cometieron fue el uso de RPS, cometiéndolo más M3. La maestra M5 fue la única en utilizar centraciones.

- *Pregunta 13 (3,2)(5,3)*

La Tabla 41 muestra las estrategias que utilizaron las cinco docentes entrevistadas para la pregunta 13.

NIVEL III					
PREGUNTA TRECE					
MAESTRAS	CONTEXTOS				
	VELOCIDAD	CUADERNOS	JAMAICA	EXÁMENES	BOTELLAS
M1				RP+	RP+
M2	RP+	RP+			RP+
M3	RP+	RPS	RS+	RP'	RP'
M4	CA+&RP'	RPS			
M5	CA+→RP'	CA+			CA+

TABLA 41

Un ejemplo de estrategia correcta fue la usada por la maestra M2, quien calculó el consecuente (monedas) entre el antecedente (cuadernos) en ambas tiendas, para sacar el valor unitario de cada cuaderno, y así elegir el número decimal menor:

[C(3,2)(5,3):B] *Aquí son más económicos [B] que aquí [A]. Bueno, haciendo el procedimiento aquí me sale .60 [B] y acá me sale a 66 centavos. (M2, C13).*

Un ejemplo de estrategia incorrecta es la centración compuesta que usó la maestra M5 en tasas, quien en un inicio eligió la niña correcta "B" al tener un intento de RP al dividir la cuerdas entre los minutos, lo que le da una cuerda y media por minuto en A. También lo intentó en B aunque lo hizo mal, lo que la llevo a elegir B por el hecho de que eran más cuerdas.

[V(3,2)(5,3):B] [Divide el segundo cuadrado presentado en la opción A] *Por minuto hace una cuerda y media. [Al observar la opción B también divide las cuerdas por minuto, pero lo hace de manera incorrecta] Es la B, es más menos [camina más cuerdas por menos tiempo]. No encuentro otra razón. -(¿Porque son más cuerdas que acá?)- Sí (M5, V13).*

El problema de la maestra M2 es que desde un inicio comparó mal las fracciones, lo que la llevó a elegir A. Cuando realizó los productos cruzados, realizó bien los cálculos, pero no sabía que fracción correspondía a cada lado (la Figura 10 reproduce los dibujos y escritos realizados por M2 en la tarjeta):

[B(3,2)(5,3):B] Sería la A porque es mayor  $3/5$ . -(¿Cómo sabemos?)- ¿Qué es  $3/5$ ?-(No, ¿cómo sabemos que  $3/5$  es mayor que  $5/8$ ?)- Lo representaría por medio de una recta, la divido en cinco partes y represento  $3/5$  y hago otra y la divido en  $5/8$ . Ahora  $3/5$  es equivalente a  $6/10$ , tengo mayor probabilidad en A.- (No entiendo)- Quise sacar una fracción equivalente, comparé y ... -(¿Entonces cuál sería?)- El mayor es  $3/5$ , tres por ocho veinticuatro y cinco por cinco veinticinco y ya tienen el mismo denominador, entonces aquí el mayor sería  $3/5$ , sería  $25/40$  y entonces sí sería mayor  $5/8$  -(O sea: el que es equivalente a  $25/40$  ¿es  $5/8$  o  $3/5$ ?)- Serían  $5/8$ , en éste tengo mayor probabilidad (M2, B13).

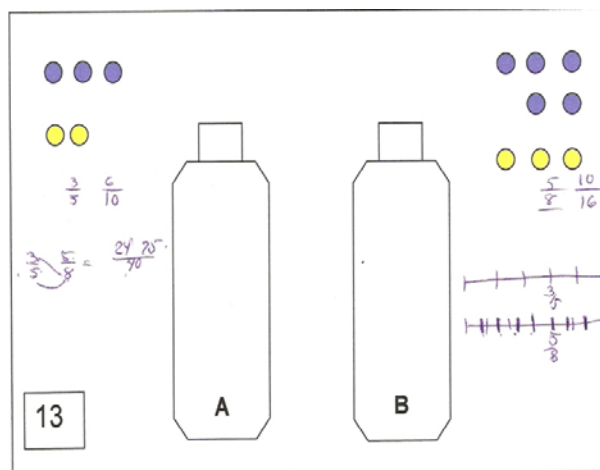


FIGURA 10

La maestra M3 hace un intento RP' por hacer una RP+ al agrupar de dos a una, en la botella B y los sobrantes (una canica azul y una amarilla) los compensa como si no existieran, y en la botella A lo hace de una en una y como ahí le sobra, comenta que esa canica "no discute" con nadie y por tanto no la reparte y así es como decide que como es la única que queda sola es donde es más probable que gane, aunque llega a reconocer que en B hay más azules que en A:

[B(3,2)(5,3):A] A ver [B] dos a uno, dos a uno, [A] uno a uno, uno a uno, no, aquí hay más probabilidad -(¿Por qué?)- Aunque hay más aquí [B], más azules. A ver, es una a una, una a una, me queda una sola [A], sí me sobra [una azul] -(¿Cuál es?)- En proporción me sobra ésta [azul en A], una a una, una a una y ésta me queda libre [azul en A] no hay con quien discuta. Aquí [B] hay dos a una, dos a una y una con ésta (M3, B13).

De las cuatro centraciones usadas en esta pregunta dos aparecen en Velocidad y tres son de M5. En Jamaica sólo fue planteada esta pregunta a M3, quien usó la única RS de todos los contextos.

### *Regularidades encontradas*

En las tablas 38, 39, 40 y 41 se observan algunas regularidades acerca del tipo de estrategias usadas según los contextos. En la Tabla 42 se muestran las frecuencias con las que se observan las distintas estrategias en cada contexto, en la Tabla 43 se muestran las frecuencias relativas y en la 44 se agrupan las frecuencias relativas por tipo de contexto.

NIVEL III							
CONTEXTO	Estrategia correcta	Estrategias incorrectas				Otras	TOTAL
	RP+	RP'	RS	Centraciones	RO=		
VELOCIDAD	14	1	0	4	0	0	19
CUADERNOS	11	1	4	3	0	0	19
JAMAICA	0	0	9	4	0	0	13
EXÁMENES	4	3	2	2	1	0	12
BOTELLAS	3	3	2	6	3	0	17
TOTAL	32	8	17	19	4	0	80

**TABLA 42**

NIVEL III							
CONTEXTO	Estrategia correcta	Estrategias incorrectas				OTRAS	TOTAL
	RP+	RP'	RS	Centraciones	RO=		
VELOCIDAD	73.7%	5.3%	0.0%	21.1%	0.0%	0.0%	100%
CUADERNOS	57.9%	5.3%	21.1%	15.8%	0.0%	0.0%	100%
JAMAICA	0.0%	0.0%	69.2%	30.8%	0.0%	0.0%	100%
EXÁMENES	33.3%	25.0%	16.7%	16.7%	8.3%	0.0%	100%
BOTELLAS	17.6%	17.6%	11.8%	35.3%	17.6%	0.0%	100%

**TABLA 43**

NIVEL III							
CONTEXTO	Estrategia correcta	Estrategias incorrectas				OTRAS	TOTAL
	RP+	RP'	RS	Centraciones	RO=		
TASAS	65.8%	5.3%	10.5%	18.4%	0.0%	0.0%	100%
MEZCLAS	16.7%	14.3%	31.0%	28.6%	9.5%	0.0%	100%

TABLA 44

Las regularidades que se encontraron en el Nivel III son: ninguna RP en Jamaica, ni siquiera con intentos infructuosos (RP'). Las maestras usaron centraciones en los cinco contextos, las RO= sólo en los contextos de Exámenes y Botellas (mezclas). En Velocidad ninguna maestra usó RS.

Si se consideran las respuestas RP+ y sus intentos infructuosos RP', se ve que en tasas estos dos suman 71.1%, mientras que en mezclas sólo llegan al 31.0%; además, de estos totales los intentos infructuosos RP' conforman solamente el 7.5% (5.3/71.1) en tasas, mientras que en mezclas llegan al 46.1% (14.3/31.0). Estos dos resultados muestran que el razonamiento proporcional les resultó mucho más fácil a estas maestras en los contextos de tasas que en los de mezclas: más intentos de aplicar la estrategia correcta, y mucho mayor porcentaje de aplicación exitosa.

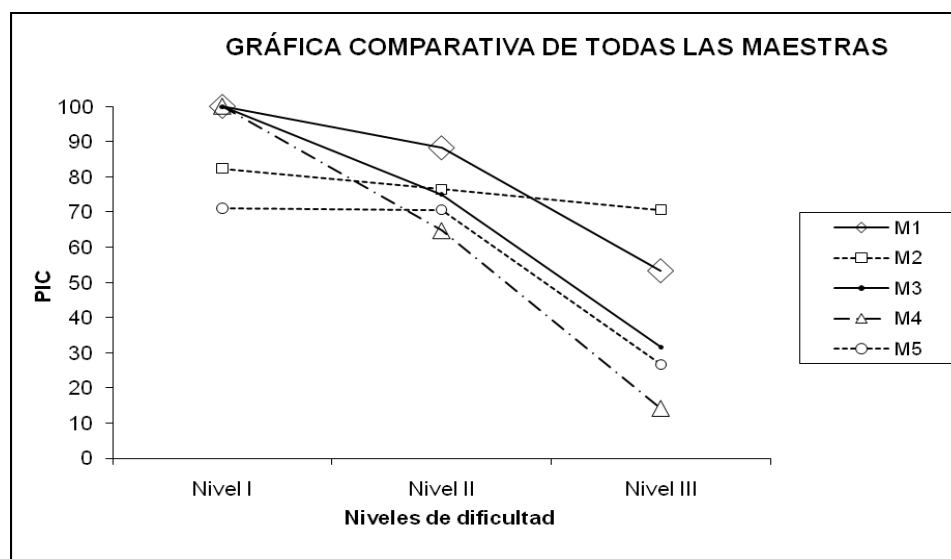
También muestran que la clasificación con Nivel III de este grupo de preguntas es adecuada, ya que a estas maestras les resultó más difícil utilizar RP+ en ellas, de lo que les resultó utilizar RP= en el Nivel II.

#### 5.2.4 Análisis global por niveles de dificultad de las preguntas

En este apartado se tratarán de manera global las regularidades más representativas entre niveles con respecto a las preguntas, estrategias y el contexto. Se hará una comparación del análisis obtenido de las maestras entrevistadas según su tipo de comportamiento ante los niveles de dificultad de las preguntas, con respecto a la propuesta de Alatorre (2004) (ver página 68).

Como se recordará, la diferencia entre estos niveles radica en las estrategias que se pueden aplicar correctamente en cada uno. En el Nivel I se pueden utilizar estrategias de relaciones de proporcionalidad  $RP+$  y  $RP=$ , relaciones de orden  $RO+$  y algunas centraciones, que son llamadas estrategias de comparación. En el Nivel II, donde se encuentran las situaciones de proporcionalidad, las únicas estrategias que se pueden aplicar son  $RP=$ . Finalmente en el Nivel III se encuentran situaciones de no proporcionalidad y las únicas estrategias que pueden ser utilizadas son las  $RP+$ .

La Figura 11 reporta el promedio PIC que obtuvieron las cinco maestras en los tres niveles de dificultad de las preguntas del instrumento.



**Figura 11**

Las cinco maestras entrevistadas obtuvieron un promedio PIC superior en el Nivel I de los tres niveles de dificultad de las preguntas. Una de las regularidades encontradas en las preguntas de este nivel fue que las maestras utilizaron con frecuencia las estrategias de comparación, que son más fáciles que las  $RP$ , y que dentro de ellas usaron más centraciones compuestas en los problemas de tasas y más relaciones  $RO+$  en los de mezcla. El contexto de Jamaica fue el que presentó de todos los contextos el promedio más bajo.



El Nivel II les resultó un poco más complicado que el Nivel I, pues M1, M2, M3 y M5 obtuvieron promedios PIC entre 70 y 90, mientras que M4 es la que obtuvo el promedio PIC más bajo de todas las maestras. Las preguntas de este Nivel presentaban situaciones de proporcionalidad; de ellas donde resulta más fácil aplicar la estrategia  $RP=$  es la pregunta 5, que obtuvo el mejor promedio PIC de todas las preguntas. Las dificultades que tuvieron las maestras en este nivel pudieron deberse a la complejidad de percatarse de la proporcionalidad y de aplicar un razonamiento  $RP=$ . Los errores que se encuentran en este nivel corresponden a algunas estrategias de comparación y de relaciones aditivas  $RS+$ , que fueron utilizadas por algunas maestras. Como para el Nivel I, el contexto de Jamaica fue el más difícil de resolver para las todas maestras.

La mayoría de los errores cometidos por las maestras se encuentran en el Nivel III; asimismo, la mayoría de las respuestas en ese nivel fueron erróneas: el PIC general fue de 41.3 (pero estos valores varían: en los contextos de mezcla el promedio PIC se encuentra de 0 a 33, mientras que en los de tasa está entre 63 y 74). En este nivel la pregunta 4 obtuvo un promedio PIC de 33.3, que es el más bajo de todas las preguntas. Comparando con el Nivel II, aumentó considerablemente el uso de estrategias de comparación y de relaciones aditivas  $RS+$ ; sin embargo hay también una pregunta (la pregunta 9) en donde en los contextos de tasas  $RP+$  es la única estrategia que utilizaron las maestras. Nuevamente, en el contexto de Jamaica se obtiene el promedio PIC más bajo de todos los contextos.

En resumen, el Nivel I fue donde las maestras alcanzaron un mayor éxito, seguido del Nivel II que fue el intermedio, y finalmente el Nivel III obtuvo el menor promedio PIC. Estos niveles difieren no sólo en el aspecto cuantitativo (PIC) sino también en el cualitativo: algunas estrategias fueron utilizadas tanto para las respuestas correctas como para las respuestas incorrectas en los diferentes niveles y contextos, pero la cantidad de errores cometidos por las maestras con respecto a la cantidad total de respuestas en cada nivel, fue aumentando por nivel.

A partir de todo lo anterior podemos concluir que los resultados obtenidos en los tres niveles de dificultad por las maestras entrevistadas actuaron de acuerdo a la propuesta de Alatorre (2004) porque obtuvieron promedios PIC decrecientes.

### 5.3 Análisis por contexto

En esta sección se muestran los resultados obtenidos en la segunda perspectiva de análisis, es decir, por contextos. Se presentan primero los dos contextos de tasas (Velocidad y Cuadernos), y luego los de mezclas (Exámenes, Botellas y Jamaica). Como en el caso del análisis por niveles, en cada apartado se hará primero un análisis cuantitativo y después uno cualitativo.

#### 5.3.1 Velocidad

La pregunta que se planteó para este contexto es: Dos niñas (A y B) caminan distinta cantidad de cuadras en distintos tiempos (minutos). ¿Cuál niña camina más rápido, o caminan a la misma velocidad?

##### *Análisis cuantitativo*

La Tabla 45 y la Figura 12 reportan los promedios PIC que cada maestra obtuvo en los tres niveles de dificultad de las estructuras numéricas de este contexto.

	M1	M2	M3	M4	M5	TOTAL
NIVEL I	100	100	100	100	67	92.9
NIVEL II	100	100	100	100	100	100
NIVEL III	100	100	100	25	50	72.2
TOTAL	100	100	100	70	73	88.0
TIPOS DE GRAFICOS	D	D	D	C	C	

**TABLA 45**

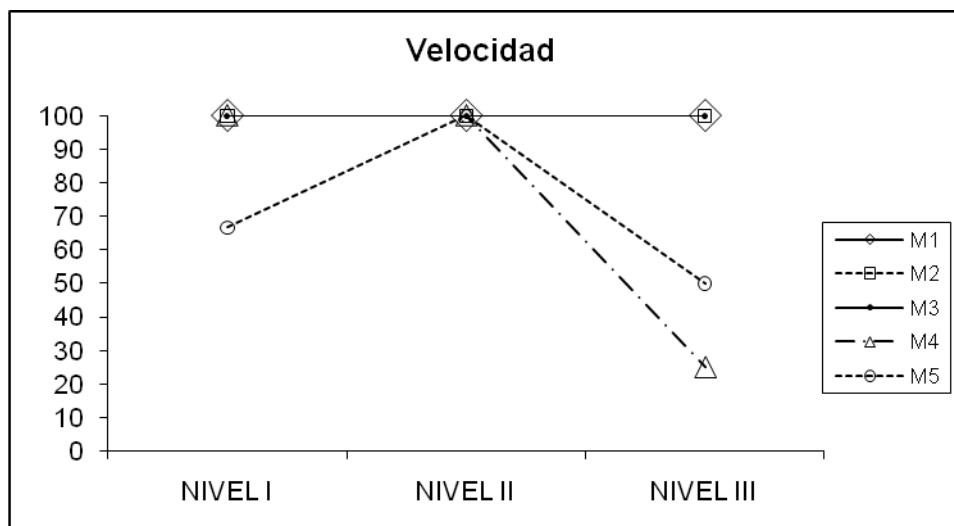


FIGURA 12

A las maestras M1, M2 y M3 se les facilitó este contexto en todos los niveles. A las maestras M4 y M5 se les facilitó el contexto en los Niveles I y II; a ambas maestras se les dificultaron las estructuras numéricas del Nivel III. De acuerdo con los comportamientos típicos, descritos por Alatorre (2004), las maestras en este contexto tuvieron los siguientes comportamientos:

- El comportamiento tipo C, que presentaron las maestras M4 y M5 se caracteriza por el uso de diferentes estrategias de comparación así como de RP en el Nivel I. En el Nivel II se usa eficazmente RP=, pero todavía se detectan algunas dificultades para el uso de RP+ en el Nivel III. Cabe aclarar que el aparentemente bajo PIC de M5 en el Nivel I no se debe a errores sino a dos respuestas con puntuación de 0.5 (una descripción y una respuesta sin justificación).
- El comportamiento tipo D, de las maestras M1, M2 y M3, se caracteriza por no tener dificultad al usar estrategias de comparación o RP en el Nivel I, ni para aplicar RP= en el Nivel II, ni para aplicar RP+ en el Nivel III.

## Análisis cualitativo

VELOCIDAD						
NIVEL	PREG	MAESTRAS				
		M1	M2	M3	M4	M5
I	2	CA+&CC-	CA+&CC-	CA+&CC-	CA+*CC-	DESCRIPCIÓN
	3	CC-*CA=	CC-*CA=	CC-*CA=	CC-*CA=	S/J
	6	CA+*CC-	CA+*CC-		CA+*CC=	RO+
	7					
II	5	RP=	RP=	RP=	RP=	RP=
	8	RP=	RP=	RP=	RP=	RP=
	10		RP=	RP=	RP=	RP=
	12	RP=	RP=	RP=	RP=	RP=
III	4	RP+	RP+	RP+	CA+&RP'	RP+
	9	RP+	RP+	RP+	RP+	RP+
	11	RP+	RP+	RP+	RP'	CA+
	13		RP+	RP+	CA+&RP'	CA+~RP'

TABLA 46

En la Tabla 46 se muestra que en el Nivel I las maestras M1, M2, M3 y M4 utilizaron centraciones, en contraste la maestra M5 en su única estrategia conocida utilizó una relación de orden.

En el Nivel II las cinco maestras utilizaron RP=, no hubo errores dentro de este nivel.

Para el Nivel III las maestras M1, M2 y M3 utilizaron RP+, mientras que la maestra M4 sólo la usó en la pregunta 9 y la maestra M5 en las preguntas 4 y 9. Los errores que cometieron estas dos últimas dentro de este nivel fueron centraciones e intentos infructuosos de RP+.

A continuación se presentan algunos errores cometidos dentro del Nivel III por la maestra M4, al usar como estrategia un (CA+&RP') en dos ocasiones:

[V(2,1)(3,2):B]. *Es A, porque camina dos cuadradas en un minuto y en B camina tres cuadradas por dos minutos.- (¿Por qué?)- La niña A caminaría cuatro cuadradas en dos minutos, esta niña camina dos cuadradas en un minuto, y la niña B recorre tres cuadradas en dos minutos, sería la B.- (¿Por qué?)- Porque caminaría el doble de estos, [seis*

cuadras en cuatro minutos] y en A sólo recorrería cuatro cuadras en dos minutos (M4, V04).

[V(3,2)(5,3):B]. Sería en la B. -(¿Por qué?)- Caminaría más cuadras, porque aquí [A] caminaría en cuatro minutos seis cuadras y en B en seis minutos caminaría 10 cuadras (M4, V13).

Por su parte M5 usa (CA+→RP').

[V(3,2)(5,3):B]. [Divide el segundo cuadrado presentado en la opción A] Por minuto hace una cuadra y media. [Al observar la opción B también divide las cuadras por minuto, pero lo hace de manera incorrecta y se da cuenta]. Es la B, es más menos, camina más cuadras por menos tiempo. No encuentro otra razón.- (¿Porque son más cuadras que acá?)- Sí (M5, V13).

Lo importante de la maestra M4 es que tuvo tres intentos infructuosos de RP, los cuales se comentarán en el análisis de esta maestra.

### 5.3.2 Cuadernos

La pregunta que se planteó para este contexto es: En dos tiendas (A y B) se compraron distintas cantidades de cuadernos por distintos precios (en monedas). ¿En cuál tienda son más baratos los cuadernos, o están igualmente baratos en ambas?

#### Análisis cuantitativo

La Tabla 47 y la Figura13 reportan los promedios PIC que cada maestra obtuvo en los tres niveles de dificultad de las estructuras numéricas de este contexto.

	M1	M2	M3	M4	M5	TOTAL
NIVEL I	100	100	100	100	88	97.2
NIVEL II	100	100	100	100	100	100.0
NIVEL III	67	100	50	25	50	57.9
TOTAL	91	100	78	75	80	84.8
TIPOS DE GRÁFICOS	C	D	C	C	C	

**TABLA 47**

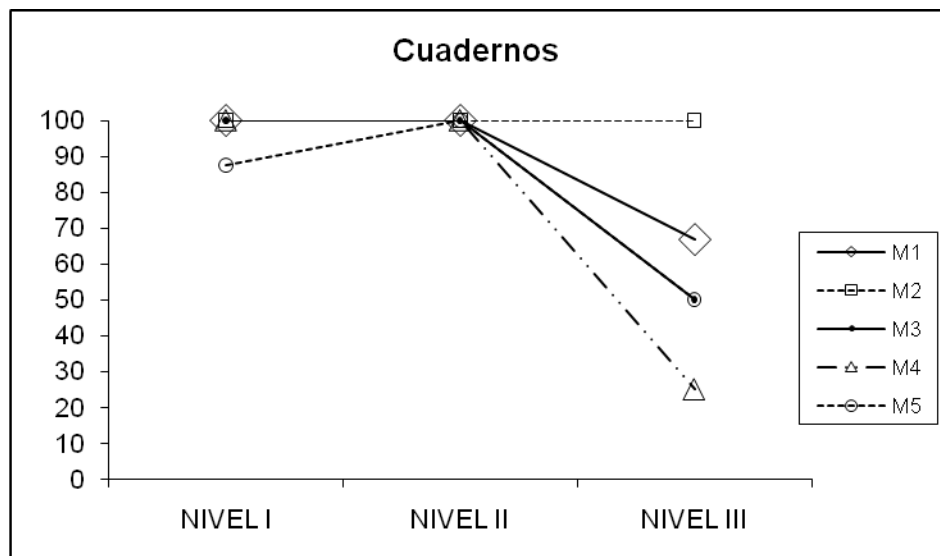


FIGURA 13

De acuerdo con los comportamientos típicos, descritos por Alatorre (2004), las maestras en este contexto tuvieron los siguientes comportamientos:

- Exceptuando a la maestra M2, las maestras tuvieron un comportamiento tipo C, al usar diferentes estrategias de comparación en el Nivel I y de RP= en el Nivel II, mientras que en el Nivel III tuvieron dificultades al usar RP+.
- El comportamiento tipo D de M2 indica que la maestra no tuvo dificultad al aplicar estrategias de comparación o RP en el nivel I, en la aplicación de RP= en el nivel II ni en la aplicación RP+ en el nivel III.

Las cinco maestras obtuvieron el promedio más alto en los niveles I y II, pero es necesario aclarar los siguientes casos: 1) a M3 sólo se le plantearon tres preguntas, dos del Nivel I y la última del Nivel II debido al error técnico ya comentado y, 2) el promedio PIC de M5 en el Nivel I no alcanza el 100% debido a que en la pregunta 7 no justificó y no porque se deba a una estrategia incorrecta, como ya se había mencionado en el análisis de este Nivel.

En el Nivel III la maestra M2 obtuvo el promedio más alto (ver Tabla 47 y Figura 13). En el caso de M1 no se le planteó la pregunta 13 y obtuvo el segundo

promedio más alto aunque usó una centración. La maestra quien obtuvo el promedio PIC más bajo en el Nivel III fue M4, pues sólo usó una RP+.

### Análisis cualitativo

CUADERNOS						
NIVEL	PREG	MAESTRAS				
		M1	M2	M3	M4	M5
I	2	CA+&CC-	RO+		CA+&CC-	CA+&CC-
	3	CA-*CA=	RP+		CC-*CA=	CC-*CA=
	6	CA+*CC=	RP+	CA+&CC-	RO+	RO+
	7	CC-	CC-	CC-	CC-	SJ
II	5	RP=	RP=		RP=	RP=
	8	RP=	RP=	RP=	RP=	RP=
	10	RP=	RP=	RP=	RP=	RP=
	12	RP=	RP=	RP=	RP=	RP=
III	4	CA+	RP+	RP+	RP'	RP+
	9	RP+	RP+	RP+	RP+	RP+
	11	RP+	RP+	RPS	RPS	CA+
	13		RP+	RPS	RPS	CA+

**TABLA 48**

En la Tabla 48 se observa que en el Nivel I todas las estrategias utilizadas fueron correctas con la posible excepción de la estrategia desconocida de M5 en la pregunta 7; las maestras utilizaron como estrategia más frecuente las centraciones, algunas relaciones de orden y menos frecuentemente las RP. En el Nivel II las cinco maestras utilizaron RP= en todas las preguntas. Y para el Nivel III, la maestra M2 es la única que utilizó RP+ en todas las preguntas de este nivel; las maestras M1, M3 y M5 utilizan esta misma estrategia sólo en dos preguntas de las situaciones presentadas a cada una de ellas y M4 sólo en una. Los errores más frecuentes en este nivel son RPS, algunas centraciones y un intento infructuoso de RP.

Las maestras M3 y M5 usaron RP+ en las preguntas 4 y 9. Las diferencias entre ellas dos en el Nivel III son en las preguntas 11 y 13; la primera maestra usó RPS y la maestra M5 usó centraciones. A continuación se ejemplifican estas estrategias con la pregunta 11:

- M3 usó RPS:

[C(5,2)(7,3):B] *Con dos monedas compro cinco cuadernos en A y con una moneda compro dos cuadernos en B; pues definitivamente me conviene ésta que es B -(pero lo que había dicho es que... ¿son más cuadernos que monedas?)- Este, sí a ver, en A son dos monedas y voy a comprar cinco cuadernos y en B son cinco cuadernos por dos monedas y con una sola moneda compro dos cuadernos (M3, C11).*

- M5 usó centraciones:

[C(5,2)(7,3):B] *Son más libros y menos monedas [B], pues estaba viendo que las monedas serían como el cuarto precio de cada cuaderno, pero serían, ah, no. Pues como que ya me hice... pues no tengo otra razón: menos monedas, más cuadernos, es ésta [B].(M5,C11).*

### 5.3.3 Exámenes

La pregunta para este contexto es: Una niña presentó dos exámenes (A y B), en los que obtuvo distintas cantidades de respuestas correctas e incorrectas. ¿En cuál examen tuvo mejores resultados, o le fue igual en los dos?

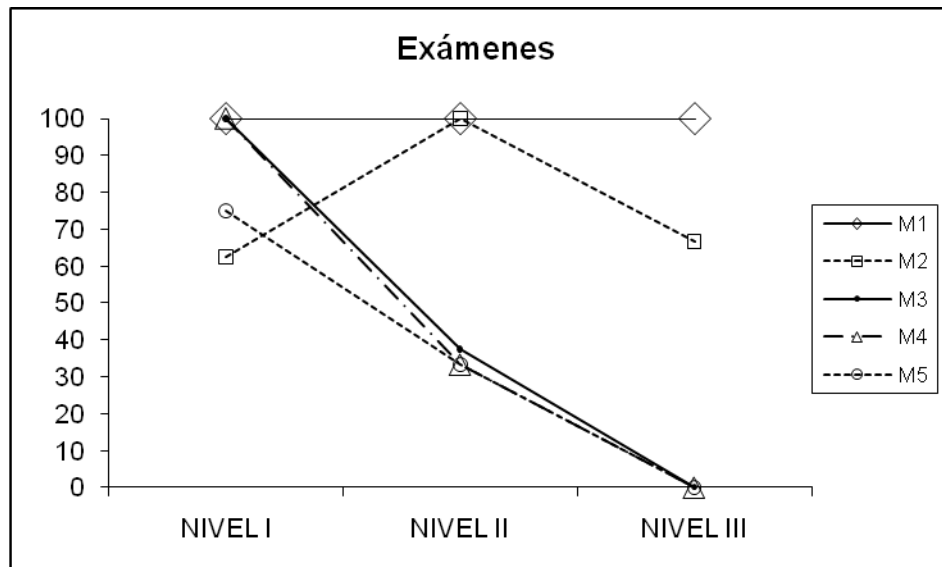
#### *Análisis cuantitativo*

La Tabla 49 y la Figura 14 reportan los promedios PIC que cada maestra obtuvo en los tres niveles de dificultad de este contexto.

	M1	M2	M3	M4	M5	TOTAL
NIVEL I	100	62.5	100	100.0	75.0	84.4
NIVEL II	100	100.0	37.5	33.3	33.3	56.7
NIVEL III	100	66.7	0.0	0.0	0.0	33.3
TOTAL	100	75.0	31.3	55.6	44.4	60.5
TIPO DE GRAFICO	D	ATÍPICO	B	B	B	

**TABLA 49**



**FIGURA 14**

De acuerdo con los comportamientos típicos, descritos por Alatorre (2004), las maestras en este contexto tuvieron los siguientes comportamientos:

- El comportamiento tipo A, que presentaron las maestras M3 y M4, se caracteriza por respuestas correctas de comparación en las preguntas del Nivel I, pero estas estrategias no permiten la resolución en los Niveles II y III.
- El comportamiento tipo B, que muestra la maestra M5, se caracteriza por respuestas correctas en las preguntas del Nivel I, algunas aplicaciones correctas de  $RP=$  en el Nivel II, pero fracaso en el Nivel III.
- El comportamiento tipo D, de la maestra M1, indica que no se le dificultó aplicar estrategias de comparación en el Nivel I, ni la aplicación de  $RP=$  en el Nivel II, ni la aplicación de  $RP+$  en el Nivel III.
- El comportamiento de M2 se clasifica como atípico debido a que fue el Nivel I (ver la Tabla 49 y la Figura 14) donde presentó más dificultades, todo lo contrario a lo que se esperaría, pues fue en el

Nivel II donde tuvo el PIC más alto. Esto se comentará en el análisis de esta maestra.

Las maestras a quienes se les plantearon todas las preguntas del Nivel I fueron M2, M4 y M5. La maestra M1 obtuvo un buen promedio PIC debido a que todas las respuestas que dio en este contexto fueron RP= y RP+, las cuales fueron inducidas y, por tanto, ya no se le preguntó acerca de todas las estructuras numéricas. Puede considerarse que la maestra que obtuvo el promedio más alto en el Nivel I fue M4 pues aunque haya obtenido el mismo promedio que M3, de esta maestra sólo quedó registrada una pregunta del contexto debido al error técnico.

En el Nivel I las maestras M2 y M5 fueron las únicas en usar incorrectamente centraciones.

En el Nivel II la única maestra a quien se le plantearon las cuatro preguntas fue M3. Esta maestra contestó correctamente sólo a una de las estructuras numéricas, y tuvo dos intentos infructuosos de RP=. A las maestras M1 y M2 no se les plantearon todas las preguntas porque estaban usando con regularidad la misma estrategia (en el caso de M1, fue inducida); en cambio, a las maestras M4 y M5 la última pregunta de este nivel no se les planteó ya que usaron con regularidad una estrategia inadecuada en este nivel.

En el Nivel III sólo a M3 se le plantearon las cuatro preguntas respectivas del nivel.

### *Análisis cualitativo*

EXÁMENES						
NIVEL	PREG	MAESTRAS				
		M1	M2	M3	M4	M5
I	2	RP+	CA+	CA+*CT=	CA+&CC-	CA+*CT=
	3	RP+	RO+		RO+	CT-
	6	RP+	RO+		RO+	CA+
	7		ROe ⊥ CC-		CC-	CC-

EXÁMENES						
NIVEL	PREG	MAESTRAS				
		M1	M2	M3	M4	M5
II	5	RP=	RP=	RP=	RP=	RP=
	8		RP=	RP=&RP'	RS+	CA+
	10		RP=	RP'	CA+&CT+	RO=-RP=
	12	RP=		RP'		
III	4	RP+	RP'	RP'	RS=	CC-
	9		RP+	RP'	CC-	RO=
	11		RP+	RPS		
	13	RP+		RP'		

TABLA 50

Llama la atención en la Tabla 50 que para resolver las preguntas del Nivel I las maestras (salvo M1 por lo ya comentado) utilizaron estrategias muy similares: centraciones en las preguntas 2 y 7, y relaciones de orden en las preguntas 3 y 6. Los errores en ese nivel fueron pocos. En Nivel II sólo en la pregunta 5 usaron la estrategia correcta todas las maestras, y en las demás, así como en las del Nivel III, la única maestra que utilizó las estrategias adecuadas fue M2. Los errores fueron principalmente RP', algunas estrategias aditivas y algunas centraciones

Algunos ejemplos de respuestas incorrectas usadas por las maestras fueron los intentos de RP, por ejemplo:

[E(2,1)(3,2):A]. *En A son tres y en B son cinco, si en A son una a dos y en B una a dos, en ésta [B] le faltaría para que fueran cuatro buenas y ésta se quedó en medio. -(¿Entonces en cuál le fue mejor?)- En B, porque en A es una a dos, tuvo dos buenas y una mala y en B tuvo tres buenas y dos malas. Pero si queremos tener la misma proporción en A serían dos y dos igual a cuatro, y una de A y una de B son dos (M3,E04).*

[E(2,1)(3,2):=] *En ambas saca la misma calificación. No recuerdo exactamente los reactivos de las demás, a lo mejor por eso estuve mal en los otros. Pero aquí ya viendo son cinco [B] y aquí son tres [A] Considerando con mi operación sacan 6 ambos. -(¿Pero cómo le sale el seis?)- ¿Cómo me sale el seis? Pues yo tomo en cuenta los aciertos, por ejemplo 30, porque le agrego un cero, para sacar el 100%, entonces son 30 entre el total de preguntas en general que son 5 y entonces me da 6 [B].(M2,E04)*

Otras respuestas incorrectas usadas por las maestras fueron centraciones en los consecuentes, por ejemplo:

[E(2,5)(1,3):B]. *En A tiene mayor número de aciertos que errores, y en B tiene menos errores con respecto que A, entonces es B, porque tiene menos errores y un acierto, en A tiene más errores (M4,E09).*

[E(2,1)(3,2):A]. *Son tres preguntas de las cuales sólo dos tuvo buenas y sólo tuvo un error [A] y en éste son cinco preguntas y sólo tuvo tres buenas y dos errores [B], ¿En qué examen le fue mejor? En el A (M5,E04).*

### 5.3.4 Botellas

La pregunta para este contexto es: En dos botellas (A y B) se echan distintas cantidades de canicas azules y amarillas. Sólo se puede agitar una de las dos y sacar una canica de ella; si la canica que salga es azul entonces se obtiene un premio. ¿Cuál botella conviene agitar, o da igual?

#### *Análisis cuantitativo*

La Tabla 51 y la Figura 15 reportan los promedios PIC que cada maestra obtuvo en los tres niveles de dificultad de las estructuras numéricas de este contexto.

	M1	M2	M3	M4	M5	TOTAL
NIVEL I	100.0	25.0	100.0	100.0	82.4	82.4
NIVEL II	100.0	33.3	100.0	33.3	68.8	68.8
NIVEL III	25.0	50.0	0.0	0.0	0.0	17.6
TOTAL	75.0	38.9	60.0	55.6	56.0	56.0
TIPO DE GRÁFICO	C	ATÍPICO	C	B	ATÍPICO	

**TABLA 51**

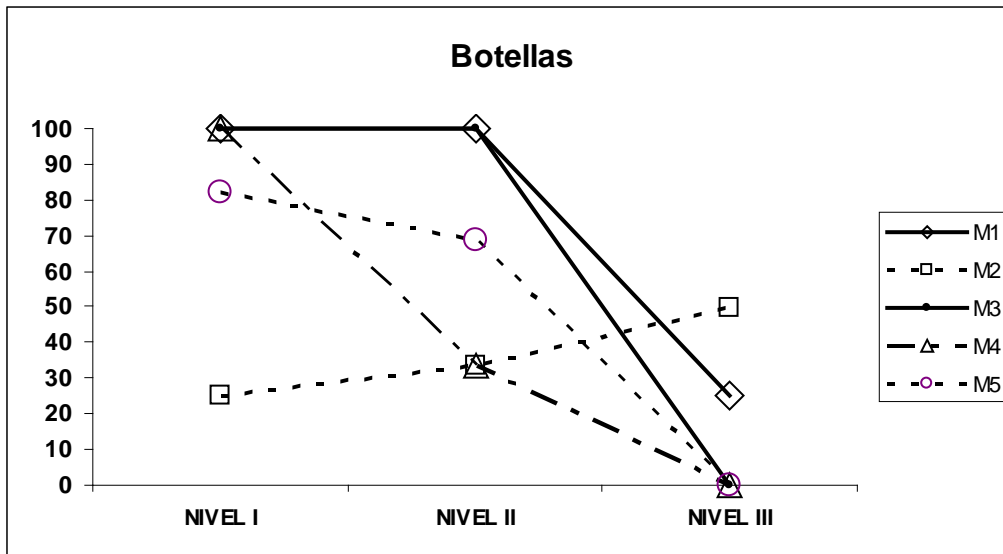


FIGURA 15

De acuerdo a los comportamientos típicos descritos por Alatorre (2004), las maestras en este contexto tuvieron los siguientes comportamientos:

- El comportamiento tipo C, que presentaron las maestras M1 y M3 se caracteriza por el uso de diferentes estrategias correctas en el Nivel I y con la misma eficiencia por el uso de RP= en el Nivel II, pero todavía se detectan bastantes dificultades para el uso de RP+ en el Nivel III.
- El comportamiento tipo A presentado por M4 se caracteriza por el uso de estrategias correctas de comparación en las preguntas del Nivel I, pero el uso de estas estrategias no permite la resolución en los Niveles II y III.
- Los comportamientos presentados por M2 y M5 no se clasifican en ninguno de los establecidos por Alatorre; reflejan la dificultad que tienen las maestras al resolver las estructuras numéricas planteadas sobre mezcla aleatoria, lo cual se comentará en el análisis de cada maestra.

## Análisis cualitativo

BOTELLAS						
NIVEL	PREG	MAESTRAS				
		M1	M2	M3	M4	M5
I	2	RO+	CA+	CA+&CC-	RO+	CA+
	3	RO+	CA=	RO+	RO+	CC-*CA=
	6	RO+		RO+	CA+*CC=	CA+
	7	CC-			CC-	SJ
II	5	RP=	CA+		RP=	RP=
	8	RP=		RP=	RO=	CC-
	10	RP=	RP'	RP=	CC-	RP=
	12	RP=	RP=	RP=		
III	4	RP'	CA+	RO=	RO=	CC-
	9	RP'	CC-&CT-	RO=	CC-	CC-
	11	RPS	RP+	RPS		
	13	RP+	RP+	RP'		CA+

TABLA 53

En este contexto, como se observa en la Tabla 53, en el Nivel I las maestras no utilizaron para responder correctamente RP sino RO+ y un poco menos frecuentemente centraciones. Los errores en ese nivel son centraciones en los antecedentes: las maestras eligieron la botella en la que había más canicas azules. En los Niveles II y III los errores fueron centraciones, tanto en consecuentes como en antecedentes, RO=, algunos intentos infructuosos de RP y, en un par de ocasiones, la estrategia aditiva RPS. Estos errores en los Niveles II y III variaron ligeramente entre las maestras: M1 utilizó RP' y RPS y en el otro extremo M5 utilizó centraciones; M2, M3 y M4 tuvieron tanto centraciones como relaciones incorrectas.

Algunos ejemplos de los comportamientos de algunas maestras en el Nivel II, según los errores mencionados muestran la diferencia de las estrategias que usaron M2 (intento de RP=) y M4 (uso de relación RO=).

[B(3,6)(1,2):B]. Sería la B, porque es un tercio. – (¿Qué es más grande, un tercio o tres novenos?) - Un tercio. (M2, B10).

[B(2,1)(4,2):=]. *En ésta [B], porque son más azules –(Pero en A también hay más azules)- Sí... es lo mismo, es la misma probabilidad –(¿Por qué?)- Porque hay más menos cantidad de amarillas [en A y en B] (M4, B08).*

En el Nivel III M2 alcanzó apenas la mitad del promedio PIC total. Usó dos RP+ en las cuatro preguntas que se le plantearon y aun así fue la maestra en obtener el promedio más alto en el mismo, aunque estos promedios se comparan con los de las maestras M4 y M5 a quienes ya no se les plantearon las últimas preguntas del nivel pues ya venían contestando incorrectamente. Las maestras M3, M4 y M5 tuvieron cero de promedio en el Nivel III.

El caso de M2 es especial puesto que usó más RP= que las otras maestras en el nivel de mayor dificultad, pero sin embargo obtuvo el promedio más bajo del contexto aunque se considera que esto puede deberse a que no se le plantearon tres preguntas.

Algunas estrategias incorrectas en el Nivel III son la estrategia RPS de M3, y la centración CC- de M4 y M5.

[B(5,2)(7,3):=]. *En A es dos a una, dos a una, me queda una. En B es dos a una, dos a una y dos a una y me queda una, es igual en las dos. (M3,B11).*

[B(2,5) (1,3):B]. *En ésta [B] porque hay menos amarillas (M4,B09).*

[B(2,1)(3,2):B]. *B, no A, ahora sí estoy convencida, porque sólo hay una amarilla [A] no hay mucho pierde (M5,B04).*

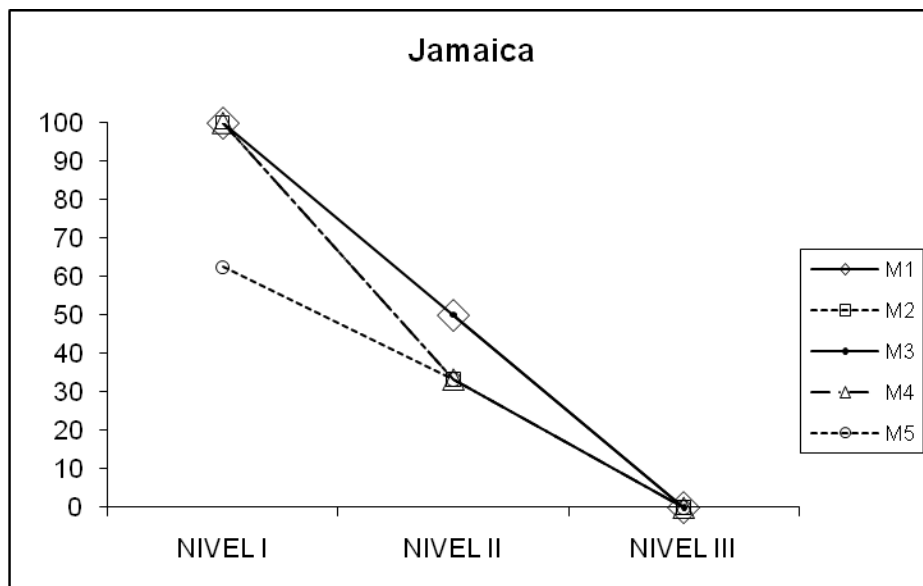
### 5.3.5 Jamaica

La pregunta para este contexto es: En dos jarras (A y B) se confecciona agua de Jamaica con distintas cantidades de vasos de concentrado de jamaica y con agua. ¿En cuál jarra la preparación tiene sabor más fuerte a jamaica, o tienen el mismo sabor?

*Análisis cuantitativo*

La Tabla 53 y la Figura 16 reportan los promedios PIC que cada maestra obtuvo en los tres niveles de dificultad de las estructuras numéricas de este contexto.

	M1	M2	M3	M4	M5	TOTAL
NIVEL I	100	100		100	62.5	90.6
NIVEL II	50	33.3	50.0	33.3	33.3	41.2
NIVEL III	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
TOTAL	54.5	55.6	25.0	55.6	38.9	46.7
TIPO DE GRAFICO	B	B	B	B	B	

**TABLA 53****FIGURA 16**

De acuerdo a los comportamientos típicos descritos por Alatorre (2004), las maestras en este contexto tuvieron el siguiente comportamiento:

- El comportamiento tipo B, que presentaron todas las maestras, se caracteriza por el uso adecuado de estrategias de comparación y RP+ en el Nivel I y algunos usos de RP= en el Nivel II. Sin embargo en el uso de RP+ en el Nivel III, son menos exitosas que en el Nivel II con el uso de RP=.



En el Nivel I se debe mencionar que a M3 no se le plantearon las preguntas de este nivel debido al error técnico cometido. Dentro de este nivel se puede observar que a la única maestra a quien se le dificultaron las estructuras numéricas fue a M5. En el Nivel II las maestras M1 y M3 fueron las únicas en tener un promedio PIC de 50, el promedio que obtuvieron las maestras restantes está por debajo de 50, lo cual habla de la dificultad para usar RP= en este nivel. En el Nivel III las 5 maestras obtuvieron un promedio PIC de 0, lo cual refleja la imposibilidad de usar aunque sea en una ocasión una estrategia RP+.

### Análisis cualitativo

JAMAICA						
NIVEL	PREG	MAESTRAS				
		M1	M2	M3	M4	M5
I	2	RO+	RO+		RO+	CA+*CT=
	3	RO+	RO+		RO+	CC-
	6	RO+	RO+		RO+	CA+
	7	CC-	CC-		CC-	SJ
II	5	RP=	RP=	RP=	RP=	RP=
	8	RS+	RS+	RS+	RO=	CC-
	10	RP=	RS+	RP=	CC-	CC-
	12	RS+		RS+		
III	4	RS=	RS=	RS=	CT-	CA+ <del>CC-</del>
	9	RS+	RS+	RPS	CC-	CC-
	11	RPS		RPS		
	13			RS+		

**TABLA 54**

Las estrategias que utilizaron las maestras en el contexto de Jamaica se presentan en la Tabla 54. De las cuatro maestras a quienes se les plantearon todas las estructuras numéricas del Nivel I sólo M5 usó centraciones incompletas y una compuesta a comparación de las demás maestras que usaron RO+ en este nivel.

En el Nivel II la única pregunta que fue resuelta adecuadamente con RP= por todas las maestras fue la 5; la pregunta 10 fue respondida correctamente sólo

por M1 y M3. Todas las demás respuestas fueron incorrectas; las maestras M1, M2 y M3 utilizaron RS+ y las maestras M4 y M5 centraciones y RO=.

En el Nivel III ninguna maestra logró usar exitosamente las RP+, por lo que todas las respuestas fueron incorrectas. La única maestra a quien se le plantearon las cuatro estructuras numéricas fue a M3. Las maestras M1, M2 y M3 usaron RS= en la pregunta 4, también fueron quienes usaron RPS y RS+; las maestras M4 y M5 usaron centraciones.

Algunos ejemplos de la estrategia más usada (RS+) en este Nivel son:

[J(2,1)(4,2):B]. *En la B porque tengo cuatro concentrados por dos de agua y en A tengo dos concentrados por uno de agua. -(Pues sí, pero ¿qué hay en esos cuatro y en esos dos; y en esos dos y ese uno, que le hacen a usted saber que es la B, A o da igual?)- En B porque tengo dos más de concentrado, porque se igualan estos dos [los vasos de agua simple] y en la A sólo uno. (M1,J08).*

[J(4,6)(2,3):B]. *Para mí el concentrado estaría en B, porque sólo me sobraría un vaso de agua simple y en A me sobran dos. (M1, J12).*

[J(4,6)(2,3):B]. *La B va a tener más sabor. -(¿Por qué?)- En A es dos vasos de concentrado por dos de agua y me quedan dos vasos de agua y en B es un vaso de concentrado por un vaso de agua y me queda un solo vaso de agua. (M3,J12).*

Algunos ejemplos de las estrategias usadas por algunas maestras en el Nivel III, según los errores mencionados son: RS= de la maestra M1 en la pregunta 4, RS+ de la maestra M2 en la pregunta 9, el RPS de la maestra M3 en la pregunta 11 y la centración de la maestra M4 en la pregunta 9.

[J(2,1)(3,2):=]. *El concentrado es igual. -(¿Por qué?)- En ambas jarras tengo uno de concentrado más. -(¿le sobra?)- Sí, me sobra. (M1, J04).*

[J(2,5)(1,3):B]. *Pues en la B, un vaso de Jamaica le corresponde uno de agua y sobran dos de agua, pero aquí [A] sobran tres [agua]. Sí, es la B. (M2, J09)*

[J(5,2)(7,3):B]. *Con dos monedas compro cinco cuadernos en A y con dos monedas compro cinco cuadernos y con una moneda compro dos cuadernos en B, pues definitivamente me conviene ésta, que es B. -(Pero ¿lo que habías dicho es que son más cuadernos que monedas?)-*

*Este... sí, a ver, en A son dos monedas y voy a comprar cinco cuadernos y en B son cinco cuadernos por dos monedas y con una sola moneda compro dos cuadernos. (M3, J11).*

*[J(2,5)(1,3):B]. Está más concentrada la B, porque es menos agua simple, mientras que en A es más agua (M4, J09).*

### 5.3.6 Análisis global de contextos

Los comportamientos que tuvieron las maestras en los cinco contextos se muestran en las Tablas 45, 47, 49, 51 y 53, y se reproducen conjuntamente en la Tabla 55, junto con los promedios PIC obtenidos en general en cada contexto.

		M1	M2	M3	M4	M5	Promedio PIC
Tasas	Velocidad	D	D	D	C	C	88.0
	Cuadernos	C	D	C	C	C	84.8
Mezclas	Exámenes	D <sup>(1)</sup>	Atípico <sup>(2)</sup>	B	B	B	60.5
	Botellas	C	Atípico <sup>(3)</sup>	C	B	Atípico <sup>(4)</sup>	56.0
	Jamaica	B	B	B	B	B	46.7
<sup>(1)</sup> Estrategia inducida. <sup>(2)</sup> Mejores resultados en el Nivel II que en el I y el III. <sup>(3)</sup> Mejores resultados en el Nivel III que en el II y el I <sup>(4)</sup> Mejores resultados en los Niveles I y II que en el III, pero muy bajos							

**TABLA 55**

En los contextos de tasas los comportamientos comunes de las maestras fueron de los tipos C y D, los cuales se caracterizan por alcanzar valores altos en los Niveles I y II; la diferencia es que en C el PIC del Nivel II es más bajo mientras que en D los tres niveles tienen PICs altos. En conclusión ambos contextos de tasas les resultaron fáciles.

En el caso de los contextos de mezcla no se presentó un comportamiento tan homogéneo entre las maestras, quienes en general siempre obtuvieron malos resultados en el Nivel III (no hay comportamientos D, salvo el de M1 en

Exámenes); se presentaron además dos comportamientos atípicos de la maestra M2 y uno de M5, que serán comentados en el análisis de cada maestra. De los tres contextos donde se obtuvo el promedio más alto fue en Exámenes; pero lo que hace que se eleve este promedio fue el total de los promedios por nivel de la maestra M1 (respuestas inducidas). El contexto donde las maestras obtuvieron el promedio más bajo fue en Jamaica; ahí, el comportamiento común de las maestras fue del tipo B, lo cual refleja la dificultad que tuvieron las cinco maestras en este contexto y en especial en el Nivel III.

En resumen, las maestras obtuvieron mejores resultados en los contextos de tasas, mientras que los contextos de mezcla aparentemente les resultaron ser más complicados.

## CONCLUSIONES

Para cerrar este trabajo se presentarán unas reflexiones generales. En primer lugar se señalarán los puntos de coincidencia y de discrepancia con dos trabajos previos que han utilizado la misma metodología (Alatorre, 2004 y Morales y Roldán, 2007). Una segunda reflexión se enfocará a las estrategias utilizadas por estas cinco docentes en los problemas planteados. Las siguientes reflexiones se dirigen a consideraciones sobre la teoría piagetiana y sobre la formación de maestros. Por último, cerraré con un par de recomendaciones.

En los siguientes puntos se muestran dos resultados obtenidos en esta investigación que coinciden y ratifican los hallazgos de las investigaciones previas citadas en este trabajo sobre el tema de razonamiento proporcional:

- Las docentes obtuvieron los mejores promedios PIC en el Nivel I, seguido del Nivel II con un promedio regular y en el Nivel III obtuvieron los promedios más bajos. Esto concuerda con los tres niveles de dificultad establecidos por Alatorre (2004).
- Esta investigación también coincide con las conclusiones a las que llegaron Morales y Roldán (2007) sobre la mayor dificultad al resolver correctamente los problemas de mezcla comparada con la que los sujetos tienen con los de tasas.

En esta investigación también se encontró una discrepancia con el siguiente resultado de Alatorre:

- En el contexto de Botellas, no hubo coincidencia entre los resultados obtenidos con las docentes y los sujetos entrevistados por Alatorre, ya que en su investigación los sujetos tuvieron dificultad al resolver los problemas en los que se habla sobre el azar, lo cual no sucedió con todas las docentes. Aunque por lo menos dos de ellas (M2 y M5) sí tuvieron dificultades, en los resultados globales las maestras no obtuvieron el

promedio más bajo en estos problemas, sino que fue en el contexto de Jamaica.

En cambio se esperaba una discrepancia con uno de los resultados de Alatorre pero éste no ocurrió:

- Los resultados obtenidos en el contexto de Exámenes sorprenden, ya que en un inicio se pensó que quizá las cinco maestras obtendrían los mejores resultados en este contexto por su familiaridad y que utilizarían estrategias formales, pero no fue así. No sólo es relevante este hecho sino que en este contexto usaron algoritmos que fueron mal empleados; además frecuentemente las maestras no sabían para qué servían los algoritmos o qué hacer con los resultados que éstos les arrojaban.

La siguiente reflexión se refiere a las respuestas de estas maestras en los distintos niveles y contextos. Para guiar esa reflexión se muestran, en la siguiente tabla, distintas estrategias que se pueden usar en cada uno de los tres niveles en el contexto de Jamaica; evidentemente los mismos argumentos se podrían traducir a los otros cuatro contextos. En la tabla las estrategias aparecen clasificadas según si son “dentro” o “entre”. Se señala en qué casos son correctas (recuadros con fondo blanco) y en cuáles no lo son (recuadros con fondo gris). Esta tabla cumple con el propósito de ejemplificar cómo en algunas situaciones (con ciertos números) sirven algunos razonamientos y en otros no; así mismo ejemplifica cómo estos argumentos pueden llevar a elegir el lado correcto por una razón incorrecta: estos casos se encuentran en los recuadros con doble borde.

		<b>NIVEL I</b>	<b>NIVEL II</b>	<b>NIVEL III</b>
		<p><b>Pregunta 2</b></p>	<p><b>Pregunta 8</b></p>	<p><b>Pregunta. 4</b></p>
<b>Centraciones (consecuentes)</b>		<b>B</b> , porque tiene menos agua que A. <b>CC-</b>	<b>A</b> , porque tiene menos agua que B. <b>CC-</b>	<b>A</b> , Porque tiene menos agua que B. <b>CC-</b>
<b>Composición de Centraciones (CA y CC)</b>		<b>B</b> , porque tiene más jamaica y menos agua que A. <b>CA+&amp;CC-</b>	<b>B</b> , porque tiene más jamaica y más agua que A. <b>CA+&amp;CC+</b>	<b>B</b> , porque tiene más jamaica y más agua que A <b>CA+&amp;CC+</b>
<b>RO (dentro)</b>		<b>B</b> , porque tiene más jamaica que agua, mientras que A tiene menos jamaica que agua <b>RO+</b>	<b>Da igual</b> , porque en ambas hay más jamaica que agua. <b>RO=</b>	<b>Da igual</b> , porque en ambas hay más jamaica que agua. <b>RO=</b>
<b>RS (dentro) (también pueden ser entre pero no es frecuente)</b>		<b>B</b> , porque tiene 1 más de jamaica que agua, mientras que A tiene 3 más de agua que de Jamaica <b>RS+</b>	<b>B</b> , porque tiene 2 más de jamaica que de agua, mientras que A tiene sólo 1 más. <b>RS+</b>	<b>Da igual</b> , porque en ambas hay 1 más de jamaica que de agua. <b>RS=</b>
<b>RP</b>	<b>DENTRO</b>	<b>B</b> , porque por cada agua hay 1 ½ de jamaica, mientras que en A por cada agua hay sólo ¼ de jamaica. <b>RP+</b>	<b>Da igual</b> , porque en ambas hay dos de jamaica para cada agua. <b>RP=</b>	<b>A</b> , porque la jamaica duplica al agua, y en B faltaría un vaso de jamaica para tener lo mismo. <b>RP+</b>
	<b>ENTRE</b>	<b>B</b> , porque triplica la jamaica de A, pero el agua es mucho menos del triple de la de A. <b>RP+</b>	<b>Da igual</b> , porque si preparo dos tantos de A es lo mismo que B <b>RP=</b>	<b>A</b> , porque si preparo dos tantos de A tengo la misma cantidad de agua pero más jamaica que la que tiene B. <b>RP+</b>

**TABLA 56**

La Tabla 56 permite ver los tipos de estrategias correctas que se pueden utilizar en cada nivel. En el Nivel I se pueden utilizar estrategias sencillas que en algunas ocasiones son correctas como son las estrategias de comparación

(centraciones compuestas y relaciones de orden), que en ninguno de los otros niveles son correctas, además de las de proporcionalidad. En el Nivel II solamente se puede utilizar correctamente  $RP=$ ; en este nivel es más fácil comparar las razones que cuando no hay proporcionalidad, es decir, se facilita más el razonamiento cuando hay una igualdad que cuando no la hay. El Nivel III es difícil porque las estrategias  $RP+$  (que son las únicas que se pueden aplicar correctamente) pueden implicar el uso de algunos algoritmos, los cuales si no se entiende el porqué, el cómo y el para qué se utilizan pueden llevar a elegir el lado incorrecto o no aplicarse correctamente.

Por otra parte, el que los contextos de tasas (Velocidad y Cuadernos) sean más fáciles de resolver que los contextos de mezclas (Jamaica, Exámenes y Botellas); puede deberse al hecho de que en los primeros se manejan dos magnitudes distintas (cuadras y minutos, y cuadernos y monedas), mientras que en los segundos la magnitud es la misma para antecedentes y consecuentes (vasos, preguntas y canicas). Tal vez esto facilite más la comprensión y el uso de ciertos algoritmos, que si se manejan las mismas magnitudes. Esto implica que es más fácil poner en correspondencia los antecedentes y los consecuentes de cada opción (A o B); por ejemplo, es más fácil pensar “2 cuadras por minuto” o “2 cuadernos por cada moneda” que “2 vasos de jamaica por cada uno de agua”, “2 respuestas correctas por cada respuesta incorrecta” o “2 canicas azules por cada amarilla”. Esto ocurre a pesar de que en los problemas de mezcla se pueden comparar por partes o las partes con los totales, lo cual implica más posibilidades para llegar a entender y resolver un problema. Sin embargo el hecho de que se trate de una sola magnitud hace que se dificulte más.

Una de las diferencias entre estos dos tipos de contextos en el Nivel I para estas cinco personas, fue que les resultó más fácil operar con centraciones (comparaciones entre objetos) en los contextos de tasas y con relaciones de orden (comparaciones dentro de los objetos) en los de mezclas. Por ejemplo en la estructura numérica (2,2)(3,2) el razonamiento que usaron más frecuentemente para elegir la tienda B es que por más cuadernos se pagan las mismas monedas



o, en el caso del contexto de Velocidad, es que la niña B caminó más cuerdas en el mismo tiempo. En los contextos de tasa, el razonamiento que usaron más frecuentemente para llegar a la misma decisión (B) fue, en el contexto de Jamaica, que la jarra B tiene más jamaica que agua mientras que en A hay la misma cantidad de jamaica que de agua; en el de Exámenes, que en el examen B la niña tuvo más respuestas buenas que malas mientras que en el A tuvo tantas malas como buenas; y en el de Botellas que en la botella B ganan las azules mientras que en la A empatan las azules y amarillas.

El tipo de estrategia que las maestras usaron en el Nivel I para estos contextos es significativo, porque puede sugerir que una estrategia didáctica para la enseñanza de este tipo de razonamiento empiece con problemas del Nivel I en tasas promoviendo las centraciones (entre objetos), sin que esto implique la prohibición de RO+ ni RP+ y continúe con mezclas también en el Nivel I promoviendo las RO+ (dentro de objetos) sin excluir las centraciones ni RP+.

Una tercera reflexión se refiere al papel que puede tener la teoría piagetiana en la interpretación de nuestros resultados. Es necesario aclarar que en esta investigación en ningún momento se etiquetó o evaluó a las maestras, sino que se intentó conocer qué tanto comprendían y conocían acerca de la proporcionalidad y del uso de ciertas estrategias. Por ello, la teoría de Piaget en esta investigación sirvió para exponer el desarrollo cognitivo del nacimiento a la adolescencia; sin dar por sentado que las adaptaciones y supuestos procesos que deberían ser característicos en la etapa de las operaciones formales, se den tal cual en la edad adulta, ya que la teoría piagetiana no cubre el desarrollo cognitivo que logra tener un sujeto después de la adolescencia.

A partir de esta postura y de la investigación realizada no se puede asentar que las docentes entrevistadas se encuentren ni en el estadio de las operaciones concretas ni en el de las operaciones formales. Así mismo, esto se justifica al haber presentado las diferentes estrategias utilizadas por los sujetos entrevistados: de hecho, como se ha visto, todas las maestras utilizaron en algún momento estrategias características del estadio de las operaciones formales, que

consisten en realizar una operación sobre otra, o una acción sobre la acción (RP+ y RP=), pero ninguna tuvo exclusivamente estos comportamientos en los Niveles II y III, donde era necesario.

Para recalcar lo anterior, diremos que una de las estrategias RP más utilizada frecuentemente por las maestras fue la estrategia de igualación, la cual consiste en duplicar o triplicar un objeto, hasta que se encuentre una igualdad con los antecedentes o los consecuentes del otro. Sin embargo, con frecuencia las maestras, aún cuando intentaran este procedimiento, no llegaban a comprender completamente lo que estaban haciendo (por ejemplo duplicaban o triplicaban innecesariamente ambos objetos en el Nivel II).

La última reflexión se refiere a la problemática de la formación de los docentes. En esta investigación se buscó conocer qué estrategias suelen usar las docentes en la resolución de problemas de comparación de razones y así obtener un panorama del conocimiento que poseen sobre el contenido. Para tal fin se siguió la primera categoría de las tres presentadas por Shulman (1986) sobre el conocimiento del contenido. Esta primera categoría se refiere al conocimiento del contenido matemático, y comprende dos estructuras:

1. Las estructuras sustantivas, en la cuales se incluyen las diferentes maneras de incorporar hechos a través de los conceptos básicos y los principios de la disciplina. Sobre estas estructuras las docentes reflexionaron acerca de cómo tenían que resolver las estructuras numéricas, es decir, identificaban que ciertas estrategias y argumentos no servían para resolver más de un problema.
2. Las estructuras sintácticas, que incluyen las maneras en las cuales se establece si algo es válido o no lo es. Las docentes usaron poco estas estructuras; en algunas ocasiones al pedirles la justificación sólo describían la situación planteada o no daban la justificación (esto no fue grave en el caso en donde la elección era obvia).

Morales y Roldán (2007) llegaron a la conclusión de que es necesario que el docente de nivel primaria conozca diferentes estrategias de solución como parte de su conocimiento proporcional, para que así reconozca las diferencias cognitivas de sus alumnos. Puede argumentarse que efectivamente esto podría permitir al docente utilizar dichas estrategias para trabajarlas en el aula y que así sean más los alumnos que lleguen a desarrollar ciertos tipos de razonamiento; es decir facilitar el conocimiento por adquirir.

Pero es cierto que no sólo es necesario conocer las estrategias, sino realmente dominarlas. Creo que aquí podría abarcarse la segunda categoría propuesta por Shulman sobre el conocimiento del contenido pedagógico, en la cual se abarcan los temas que se enseñan más. Como ya se había mencionado en la justificación, el lugar que ocupa el tema de proporcionalidad en los programas de primaria es importante, por lo que los maestros deben conocer no sólo los contenidos sino también el contenido pedagógico correspondiente: deben poder representar y formular los temas para que otros los comprendan, identificar lo que hace fácil o difícil el aprendizaje de un tema determinado en el aula, y valorar así las estrategias para reorganizar el entendimiento cuando las concepciones sean erróneas.

Sin embargo, de acuerdo con los resultados obtenidos, las cinco docentes con las que se trabajó poseen pocas estrategias para lograr reorganizar su propio pensamiento, y si se pensara en sus alumnos, esto sería mucho menos factible. Esto es un foco rojo para los docentes que se encuentran frente a grupo.

En un primer momento se pensaría que tal vez sería más eficaz que los docentes lograran dominar una estrategia correcta y que fuera ésa la que usaran y enseñaran; sin embargo el dominio de esa estrategia única no sería suficiente, ya que además de enseñar de alguna manera, es importante que los docentes sepan reconocer, en los casos en los que las intuiciones de los niños no coincidan con esa estrategia única, cuándo dichas intuiciones son correctas y cuándo no lo son. Sin embargo, como es evidente que las maestras no comprenden los temas de

razón y proporción, no llegan a utilizar por lo menos una estrategia correctamente de manera consistente.

El material designado para la formación inicial y para la actualización del magisterio analizado (SEP, 2002a) menciona como propósito que el docente conozca la pertinencia de procedimientos como la regla de tres, el uso e interpretación de tablas de dos columnas y el uso de porcentajes. Estos procedimientos los llegaron a usar pero sin éxito o en sus primeros intentos les fue difícil entender para qué servían. Los usaban como receta y no sabían cómo interpretar los resultados, por lo cual no lograban reinterpretar significativamente lo que se le pedía. Un ejemplo claro es identificar tablas (intentos de igualación), como se mencionó arriba.

Para ser educador en matemáticas en el nivel básico no es fundamental ser matemático, pero sí se debe poseer una formación matemática de lo que se desea enseñar, la cual debe ser suficientemente amplia y bien fundamentada; es decir, se le debe de dar mayor importancia a los saberes profesionales relacionados con el manejo del contenido. Ya Shulman (1986) mencionaba que al enseñar un determinado contenido se debería demostrar que éste se conoce como prerrequisito para enseñar.

A través de esta experiencia con estas docentes, coincido con Latapí (2003), quien dice que es necesario que los maestros empiecen por analizar sus propias necesidades de aprendizaje, para trabajar con contenidos que no se comprenden. Aunque en esta investigación no se abarcó la parte de reflexión y análisis por parte del docente, sí se hará en el trabajo de Solís (2010) donde a partir de esta investigación se intentó a través de la comprensión del uso de ciertas estrategias por parte de las docentes, que éstas generaran un cambio en su pensamiento.

Por tanto de este trabajo se desprenden dos recomendaciones principales. La primera se refiere a la formación de los maestros. Como se planteó en el Capítulo 1, uno de los objetivos de los cursos de formación inicial de los maestros

es que ellos “consoliden el conocimiento de los contenidos matemáticos fundamentales que se enseñan en la escuela primaria y comprendan los distintos significados que adquieren al aplicarlos en situaciones diversas y en resolución de problemas” (SEP, 1995). Como hemos visto, ese objetivo no se cumple en el caso del razonamiento proporcional; la recomendación evidente es que haya mayor atención en la formación inicial para cubrirlo, y además abordar el tema en los cursos de actualización, para completar la formación tanto de los maestros que se encuentran en servicio como la de los que vayan egresando de las escuelas Normales.

La segunda recomendación es de carácter didáctico para la escuela primaria. Dadas las dificultades relativas de los distintos niveles y contextos, se podía recomendar empezar con el Nivel I, para luego seguir con el II y el III en ese orden; sin embargo, no deberían abandonarse los ejemplos de los niveles anteriores una vez abordado uno superior. Asimismo, se podría recomendar empezar con tasas y seguir con mezclas; nuevamente, sin abandonar los ejemplos de tasas una vez abordadas las mezclas. Tal vez lo más adecuado sería que en el Nivel I los docentes utilizaran centraciones en tasas y RO+ en mezclas. Para los Niveles II y III quizá lo que facilitaría a las docentes la enseñanza de temas que contengan razonamiento proporcional sería que entendieran para qué sirve el enfoque didáctico propuesto en SEP (1992) sobre el uso de las tablas de doble columna (para estrategias de igualación), y así lo enseñaran, porque ahí se sugiere para resolver problemas de proporcionalidad en su primera fase de enseñanza.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alatorre, S. (1994). *Respuestas intuitivas de adultos a problemas de proporcionalidad. Algunas aportaciones metodológicas*. Tesis de maestría. México: UPN.
- Alatorre, S. (2004). *¿A, B o da igual? Estudio sobre el razonamiento proporcional*. Tesis de Doctorado. México: IPN.
- Carretero, M. (1997). El desarrollo cognitivo en la adolescencia y la juventud: las operaciones formales. En: M. Carretero, J. Palacios y A. Marchesi (Comps). *Adolescencia, madurez y senectud*. Madrid; Alianza. (pp. 95-142).
- Carretero, M. y Martín, E. (1997). De los dos años a la adolescencia. Operaciones concretas. En: M. Carretero, J. Palacios y A. Marchesi (Comps.). *Desarrollo cognitivo y social del niño*. Madrid: Alianza. (pp. 37-93).
- De la Torre, E. Díaz, M. y Guerrero, S. (2006) Formación inicial del profesorado de primaria y secundaria. En: *Uno Revista de Didáctica de las matemáticas*, (41), 20-39.
- Fiol, M. y Fortuny, J (2000). *Proporcionalidad Directa. La forma y el Número*. España: Síntesis.
- Latapí, P. (2003). *¿Cómo aprenden los maestros? Cuadernos de discusión 6*. México: SEP.
- Llinares, S. (1996). *Conocimiento profesional de profesores de matemáticas: conocimiento, creencias y contexto en relación a la noción de función*. España: Departamento de Didáctica de las ciencias (Matemáticas) Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Sevilla.
- Martínez, M. (2006) *Educación matemática para todos. Aportes para la formación y el desarrollo profesional de los profesores de educación primaria*. México: Diálogos Ediciones; Comité Regional Norte de Cooperación con la UNESCO.
- Monereo, C. (1998). *Formación del profesorado y aplicación en el aula*. Barcelona: Grao.
- Morales, G. y Roldán, A. (2007). *Razonamiento proporcional de estudiantes de secundaria escolarizada y abierta*. Tesis Licenciatura. México: UPN
- Parra, B. (1990). Dos concepciones de resolución de problemas, *Revista Educación Matemática*, 2 (3), 22-31.

- Piaget, J. (1978). *La equilibración de las estructuras cognitivas: Problema Central del desarrollo*. España: Siglo Veintiuno. (pp. 22-47).
- Piaget, J. (1995). *Seis estudios de psicología*. Colombia: Labor.
- Piaget, J. Inhelder, B. (2002). *Psicología del niño*. España: Morata. (pp.11-45)
- Porlán, R., Martín, R., Martín, J. y Rivero, A. (2001) *La relación teoría-práctica en la formación permanente del profesorado. Informe de una investigación*. Sevilla: Díada
- Ruiz, E. y Lupiáñez, J. (2009). Detección de obstáculos psicopedagógicos en la enseñanza y el aprendizaje de los tópicos de razón y proporción en alumnos de sexto grado de Educación Primaria. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 7 (17), 397-424.
- Sanz, A., Pozo, J., Pérez, M. y Gómez, A. (1996) El razonamiento proporcional en expertos y novatos: el efecto del contenido. *Revista de psicología general y aplicada*. 4 (2), 337-352
- SEP (1992). Razón y proporción. En: *Guía para el maestro. Sexto Grado. Educación Primaria*. México: Secretaría de Educación Pública. (pp. 13-41)
- SEP (1995). La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Taller para maestros. Segunda parte. México: Secretaria de Educación Pública, Dirección General de Materiales y Métodos Educativos.
- SEP (1998). *Matemáticas y su Enseñanza I. Programa y materiales de apoyo para el estudio. Licenciatura en Educación Primaria. Segundo semestre*. Programas para la Transformación y el Fortalecimiento Académicos de las escuelas normales. México: Subsecretaría de Educación Básica y Normal de la Secretaría de Educación Pública.
- SEP. (2002a). *Matemáticas y su Enseñanza I y II. Programas y materiales de apoyo para el estudio. Licenciatura en Educación Primaria: Programas para la Transformación y el Fortalecimiento Académicos de las escuelas normales*. México: Subsecretaría de Educación Básica y Normal de la Secretaría de Educación Pública.
- SEP (2002b). *Plan de estudios 1997. Licenciatura en Educación Primaria*. México: Secretaria de Educación Pública
- SEP (2003). *Aspectos básicos a considerar en el diseño de Cursos Estatales de actualización*. México: Subsecretaría de Educación Básica y Normal Coordinación General de Actualización y Capacitación para Maestros en Servicio.

- SEP (2007). *Programa sectorial de educación 2007-2012*. México: SEP.
- Shulman, L.S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, 5(2), 4-14.
- Solís, J. (2010). *Retroalimentación a docentes de primaria sobre estrategias usadas en problemas de comparación de razones*. Trabajo de tesis en proceso, UPN.
- Valiente, S. (1998). La formación de maestros de matemáticas en los niveles básicos. En: *Educación y Desarrollo. Las matemáticas*. México: SEP (pp. 55-63).
- Zorrilla, M. (2002). Diez años después del Acuerdo Nacional para la Modernización de la Educación Básica en México: Retos, tensiones y perspectivas. *Revista electrónica de Investigación Educativa*, 4 (2). <http://redie.uabc.mx/vol4no2/contenido-zorrilla.html>



## **ANEXO 1: INSTRUMENTO**

En este anexo se reproducen las fichas utilizadas en las entrevistas con las maestras. Se plantean en el orden en que fueron planteadas: los contextos de Jamaica, Cuadernos, Botellas, Velocidad y Exámenes. Dentro de cada uno, se muestran las fichas desde la 1 hasta la 13.

<p><b>JAMAICA</b> (MEZCLA SIMPLE) ANTECEDENTE: vasos con concentrado CONSECUENTE: vasos con agua pura <i>¿En qué jarra la mezcla tiene un <b>sabor más fuerte</b> a jamaica: A, B, o da igual?</i></p>	<p><b>CUADERNOS</b> (TASA) ANTECEDENTE: cuadernos CONSECUENTE: monedas <i>¿En qué tienda están <b>más baratos</b> los cuadernos: A, B, o da igual?</i></p>	<p><b>BOTELLAS</b> (MEZCLA PROBAB.) ANTECEDENTE: canicas azules CONSECUENTE: canicas amarillas <i>¿Qué botella conviene agitar para obtener un <b>premio</b> (canica azul): A, B, o da igual?</i></p>	<p><b>CUADRAS</b> (TASA) ANTECEDENTE: cuadras CONSECUENTE: minutos <i>¿Qué niña camina <b>más rápido</b>: A, B, o da igual?</i></p>	<p><b>EXÁMENES</b> (MEZCLA SIMPLE) ANTECEDENTE: respuestas correctas CONSECUENTE: respuestas incorrectas <i>¿En qué examen <b>le fue mejor</b> a la niña: A, B, o da igual?</i></p>
--	--	---	---	---

1

1

1

1

PRIMER EXAMEN Nombre: <u>Natalia</u> Correctas: 2✓ Incorrectas: 3* Calificación: __	SEGUNDO EXAMEN Nombre: <u>Natalia</u> Correctas: 2✓ Incorrectas: 3* Calificación: __
---	--

1

2

2

2

2

PRIMER EXAMEN Nombre: <u>Natalia</u> Correctas: 1✓ Incorrectas: 4* Calificación: __	SEGUNDO EXAMEN Nombre: <u>Natalia</u> Correctas: 3✓ Incorrectas: 2* Calificación: __
---	--

2

Nota: En las fichas de la pregunta 1 en los contextos de Jamaica y Botellas los antecedentes y consecuentes en el lado B aparecen mezclados; en ambos casos el arreglo es (2,3)(2,3) como en los demás contextos.

3

3

3

3

3

2

3

PRIMER EXAMEN Nombre: <u>Natalia</u> Correctas: 2✓ Incorrectas: 3* Calificación: __	SEGUNDO EXAMEN Nombre: <u>Natalia</u> Correctas: 2✓ Incorrectas: 2* Calificación: __
---	--

4

4

4

4

1

2

4

PRIMER EXAMEN Nombre: <u>Natalia</u> Correctas: 2✓ Incorrectas: 1* Calificación: __	SEGUNDO EXAMEN Nombre: <u>Natalia</u> Correctas: 3✓ Incorrectas: 2* Calificación: __
---	--

5

5

5

5

3

1

5

PRIMER EXAMEN Nombre: <u>Natalia</u> Correctas: 3✓ Incorrectas: 3* Calificación: __	SEGUNDO EXAMEN Nombre: <u>Natalia</u> Correctas: 1✓ Incorrectas: 1* Calificación: __
---	--

6

6

6

6

2

2

PRIMER EXAMEN Nombre: <u>Natalia</u> Correctas: 2✓ Incorrectas: 2* Calificación: __	SEGUNDO EXAMEN Nombre: <u>Natalia</u> Correctas: 3✓ Incorrectas: 2* Calificación: __
---	--

6

7

7

7

PRIMER EXAMEN Nombre: <u>Natalia</u> Correctas: 3✓ Incorrectas: 3* Calificación: __	SEGUNDO EXAMEN Nombre: <u>Natalia</u> Correctas: 2✓ Incorrectas: 0* Calificación: __
---	--

7

8

8

8

8

1

2

PRIMER EXAMEN Nombre: <u>Natalia</u> Correctas: 2✓ Incorrectas: 1* Calificación: __	SEGUNDO EXAMEN Nombre: <u>Natalia</u> Correctas: 4✓ Incorrectas: 2* Calificación: __
---	--

8

9

9

9

9

PRIMER EXAMEN Nombre: <u>Natalia</u> Correctas: 2✓ Incorrectas: 5* Calificación: __	SEGUNDO EXAMEN Nombre: <u>Natalia</u> Correctas: 1✓ Incorrectas: 3* Calificación: __
---	--

9

10

10

10

10

PRIMER EXAMEN Nombre: <u>Natalia</u> Correctas: 3✓ Incorrectas: 6* Calificación: __	SEGUNDO EXAMEN Nombre: <u>Natalia</u> Correctas: 1✓ Incorrectas: 2* Calificación: __
---	--

10

11

11

11

11

PRIMER EXAMEN Nombre: <u>Natalia</u> Correctas: 5✓ Incorrectas: 2* Calificación: __	SEGUNDO EXAMEN Nombre: <u>Natalia</u> Correctas: 7✓ Incorrectas: 3* Calificación: __
---	--

11

PRIMER EXAMEN Nombre: <u>Natalia</u> Correctas: 4✓ Incorrectas: 6* Calificación: __	SEGUNDO EXAMEN Nombre: <u>Natalia</u> Correctas: 2✓ Incorrectas: 3* Calificación: __
---	--

12

PRIMER EXAMEN Nombre: <u>Natalia</u> Correctas: 3✓ Incorrectas: 2* Calificación: __	SEGUNDO EXAMEN Nombre: <u>Natalia</u> Correctas: 5✓ Incorrectas: 3* Calificación: __
---	--

13

## ANEXO 2: SEMBLANZAS BIOGRÁFICAS

Maestra y edad	Semblanza biográfica
M1 34 años	Trabaja como A.T.P. en ambos turnos. Ha laborado frente a grupo 3 años en 2° y 1°. En una ocasión impartió clases en 6° por seis meses. Como A.T.P ha laborado 2 años.
M2 40 años	Da clases en 5° por las mañanas, ha impartido clases en este grado alrededor de 10 años. En el turno vespertino labora en la zona escolar como A.T.P. Ha impartido clases a 4° y 6°, esporádicamente a los grados de 1° y 2°.  Frente a grupo ha laborado 22 años y estudió en la BENM.
M3 56 años	Trabaja como A.T.P. en ambos turnos. Laboró frente a grupo 28 años, impartió clases a los seis grados de primaria pero impartió clases más tiempo a 3°, 4° y 5°. Lleva fuera de grupo 10 años.  Tiene 34 años en servicio. E la SEP han sido 22 años, y en una escuela particular dando clases 12 años.  Se formó como docente en un colegio particular, el "Instituto Anglo Español".
M4 50 años	Imparte clases a un grupo de niños desfasados de 4° por las tardes y por las mañanas es A.T.P.  Los grados en los que más tiempo impartió clases fueron 1° y en sus últimos años a 5° y 6°.  Tiene 30 años de servicio, de los cuales 25 ha laborado frente a grupos regulares y lleva ya 4 años trabajando en el sector como A.T.P.
M5 27 años	Es su primer año laborando como docente, imparte clases en 4° por las mañanas. Egreso de la BENM