UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

LICENCIATURA EN PSICOLOGÍA EDUCATIVA
UNIDAD AJUSCO

“PROBLEMAS DE ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA: UNA PROPUESTA PSICOPEDAGÓGICA CON ESTUDIANTES DE 5º GRADO DE PRIMARIA DE UNA ESCUELA PÚBLICA DEL DISTRITO FEDERAL”

TESIS

Que para obtener el título de:

Licenciada en Psicología Educativa

Presenta:

KARLA ERÉNDIRA RIOS SERRATO

Asesora:

Dra. Cristianne Butto Zarzar

México, D.F., marzo de 2010

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar agradezco a AQUEL que es el motor de mi vida y me dio la energía, el tiempo y la paciencia para terminar con esta carrera.

A mi mamá por el apoyo que me brindó y a toda mi familia (RIOS y SERRATO) por estar siempre respaldándome y tendiendo una red en caso de caer, sobra decir que los AMO.

A mi asesora por el tiempo, la dedicación prestadas a este trabajo, por abrirme las puertas de su casa y ser mi amiga, Dra. Mil gracias por TODO TE QUIERO MUCHO.

A la Mtra. Imelda González y a la Mtra. Carla Hernández por ser mi red de apoyo, por escucharme, por aconsejarme y por enseñarme que en la vida siempre hay más opciones y que se puede cambiar de opinión, tienen mi admiración y respeto LAS QUIERO.

A mi sister por siempre estar pendiente a pesar de la largaaaaa distancia y a María Francia por ayudarme con este trabajo en la recta final, I LOVE YOU SO MUCH.

A mis amigas y compañeras de carrera Ara, Ale, Lucy y Sam por compartir cuatro años de alegrías, logros, enojos y desesperos LAS VOY A EXTRAÑAR.

Al Lic. José Luis Gutiérrez Calzadilla por el apoyo y cariño que me ha brindado durante muchos años de mi vida, TE QUIERO.

A la Directora del CEPP-STUMAN Gaby y a la maestra Ale del 5º grado de primaria por el apoyo brindado para realizar este trabajo, muchas gracias por todo.

ÍNDICE

RESUMEN

El aprendizaje de los problemas de estructura multiplicativa (multiplicación y división) representa una dificultad para los niños de la escuela primaria, en sus aspectos de tipo conceptual (razonamiento matemático), procedimental (algoritmo) y su relación con las reglas del sistema de numeración decimal. Esto se acentúa si no se toma en cuenta el contexto de resolución de problemas que presenta cada modelo matemático. Por otro lado, este contenido, se enseña de forma descontextualizada, pues el conteo, el sistema de numeración decimal y las operaciones básicas se consideran como procesos separados. En el presente trabajo se estudian las dificultades que los estudiantes presentan con los problemas de estructura multiplicativa y se propone un programa de intervención psicopedagógico como una alternativa para el trabajo de los mismos. El marco teórico se fundamenta en la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud y en el constructo de la Zona de Desarrollo Próximo de Vigotsky. El método que se utilizó es de corte cualitativo. Se trabajó con seis alumnos de 5º grado de primaria de una escuela pública del Distrito Federal. Los resultados muestran que los alumnos presentan mayores dificultades en los problemas de multiplicación y división asociados al modelo matemático cardinal en la idea de combinatoria, pues requiere que el alumno comprenda los problemas de tipo multiplicativo o por lo menos su pensamiento esté en transición de lo aditivo a lo multiplicativo. Se evidenció que después de la aplicación del programa de intervención, los alumnos mostraron avances significativos respecto a las ideas abordadas.

INTRODUCCIÓN

La enseñanza y el aprendizaje de los problemas de estructura multiplicativa (multiplicación y división) a nivel primaria representan una de las mayores dificultades que enfrentan alumnos y profesores. Esto se ve reflejado en varios aspectos, por ejemplo, en la comprensión de los problemas, en el contexto en que los mismos son abordados en la instrucción escolar, así como en el algoritmo a ser utilizado.

En lo que respecta a este tipo de problemas, dicho aprendizaje se dificulta, pues se enseña sin tomar en cuenta los diferentes contextos de resolución de problemas presentes en cada uno de los modelos matemáticos (lineal; cardinal, medida; numérico y funcional), de igual forma es importante tomar en cuenta los conocimientos previos que tienen los alumnos en relación a los conceptos de multiplicación y división y su relación con la adquisición de las reglas del sistema de numeración decimal.

En respuesta a señalamientos como los anteriores, se han llevado a cabo estudios para investigar el aprendizaje de los problemas de estructura multiplicativa, por ejemplo: *Adquisición del sistema de numeración decimal un problema didáctico,* Lerner (1995); *Dividir con dificultad o la dificultad de dividir,* Parra y Sainz (2001), *Problemas de estructura multiplicativa*, Vergnaud (1985); *El progreso para la multiplicación y la división,* Nunes y Bryant (1997); *El cambio en el entendimiento de la división con cero en maestros de preservicio*, Kyong-Hee (2008); *Problemas aritméticos. Articulación, significados y procedimientos de resolución* Peltier (2003); *Multiplicación y División en Didáctica de la matemática en la educación primaria* Castro (2001)*;* entre otros.

Este trabajo estudió los problemas de estructura multiplicativa (los conceptos de multiplicación y división y sus diversas representaciones) explorando diferentes modelos matemáticos. Para alcanzar tales objetivos, se diseñó inicialmente un cuestionario inicial (problemas de estructura multiplicativa y escritura numérica) seguido de una entrevista clínica individual:

posteriormente se diseñó y aplicó un programa de intervención psicopedagógico que contempló tanto aspectos matemáticos como cognitivos y un cuestionario final con el objetivo de verificar la evolución de las ideas matemáticas.

Preguntas de investigación

a) ¿Las dificultades que presentan los niños en el aprendizaje de los problemas de estructura multiplicativa están relacionadas con el modelo matemático que se utiliza?

b) ¿La aplicación de un programa de intervención psicopedagógica que contemple aspectos matemáticos y cognitivos facilita el aprendizaje de los problemas de estructura multiplicativa en un modelo matemático específico?

Objetivos del Estudio

a) Identificar las dificultades que presentan los niños en el aprendizaje de los problemas de estructura multiplicativa, específicamente en relación a los diferentes modelos matemáticos.

b) Diseñar un programa de intervención psicopedagógico que contemple tanto aspectos matemáticos como cognitivos en el modelo matemático de mayor dificultad.

El marco teórico de este estudio se fundamenta en la teoría Socio-Histórico-Cultural de Vygotsky, en específico se trabajar con el constructo de Zona de Desarrollo Próximo (ZDP). El marco teórico específico se fundamenta en las aportaciones de Vergnaud (1983), dicho autor centra su interés en los problemas de estructura aditiva y multiplicativa; el segundo grupo de problemas lo interpreta como un conjunto de problemas que involucran multiplicación, división, fracción, razón y semejanza. Esta tesis se centra en los problemas de estructura multiplicativa, específicamente, la multiplicación y la división.

El método del estudio es de tipo descriptivo y explicativo y de corte cualitativo, que permite una interacción entre los sujetos y el investigador, teniendo éste una parte más activa. Así mismo permite, describir las dificultades que presentan los niños de una manera más detallada.

Se trabajó con seis niños de 5º grado de primaria de una escuela pública del Distrito Federal con edades variando entre 10 y 11 años de edad. El estudio se llevó a cabo en tres etapas: 1era; Aplicación del cuestionario inicial de problemas de estructura multiplicativa seguido de una entrevista clínica individual y aplicación del cuestionario de escritura numérica seguido de una entrevista clínica individual; 2da Aplicación de un programa de intervención psicopedagógico; 3ra Aplicación de un cuestionario final.

En el capítulo uno: *Antecedentes del estudio: Sistema de numeración decimal;* trata sobre la evolución del sistema, el aprendizaje del mismo, su relación con la aritmética y el algoritmo.

En el capítulo dos: *Antecedentes del estudio: Problemas de estructura multiplicativa,* se abordan los problemas de estructura multiplicativa, el concepto de modelo matemático, los tipos y subtipos de problemas de acuerdo a los diferentes modelos, así como el proceso de adquisición de dichos problemas.

El capítulo tres: *Marco teórico*, se aborda la teoría de Vigostsky en lo referente al constructo de Zona de Desarrollo Próximo (ZDP) y la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud. La segunda teoría cubre los requerimientos didácticos y matemáticos de esta tesis.

El capítulo cuatro: *el método* utilizado en el estudio, describiendo el tipo de estudio que fue utilizado, el corte del estudio, así como la población con la cual se realizó el estudio, el escenario. Posteriormente, se describen las etapas del estudio y los instrumentos de investigación utilizados en cada una de las etapas, incluyendo, la descripción, aplicación de los instrumentos y propuesta de análisis de los datos. Finalmente, se hacen consideraciones del estudio piloto para el estudio principal.

El capítulo cinco: *Resultados de la primera parte del estudio: cuestionario inicial seguido de entrevista clínica individual*; reporta los resultados del cuestionario inicial referente a los problemas de estructura multiplicativa, explorando los modelos matemáticos funcional, cardinal en sub-categoría de esquema rectangular y combinatorias y el análisis de las entrevistas clínicas individuales aplicadas.

El capítulo seis: *Resultados de la primera etapa del estudio: Cuestionario diagnóstico de escritura numérica y entrevista clínica individual;* contiene los resultados del cuestionario y el análisis de las entrevistas clínicas aplicadas.

El capítulo siete: *Resultados de la segunda etapa del estudio: Programa de intervención; contiene el análisis de los resultados de la aplicación del programa de intervención* referente a problemas de estructura multiplicativa en el modelo cardinal en la idea de combinatoria.

El capítulo ocho: *Resultados de la tercera etapa del estudio: Cuestionario final sobre el modelo cardinal en la sub-categoría de combinatoria;* se presentan los resultados del cuestionario y un comparativo entre las respuestas dadas en el cuestionario inicial y las del cuestionario final.

CAPÍTULO 1

ANTECEDENTES DEL ESTUDIO: SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL

En este capítulo se aborda la evolución del sistema de numeración decimal indo-arábico comparando algunos de los sistemas utilizados por el hombre a lo largo de la historia cómo son los sistemas sumativos, multiplicativos y posicionales. Posteriormente, se describe la enseñanza de dicho sistema y su relación con la aritmética y los algoritmos.

1.1 Evolución del sistema de numeración decimal

Antes de comenzar con la evolución, la numeración y comparación de sistemas, es necesario decir que la finalidad de un sistema es asignar a cada número natural individual (con un límite que depende de las necesidades prácticas) un nombre y una representación escrita, formada por combinaciones de un reducido número de signos, efectuadas siguiendo leyes más o menos regulares (Gómez, 1998). En otras palabras la finalidad de los sistemas de numeración es que por medio de un número reducido de signos se puedan representar cantidades sin importar que tan grandes sean éstas, siguiendo un patrón constante.

Según Gómez (1998) los sistemas de numeración que han existido hasta llegar al Sistema de Numeración Decimal actual son los que se describen a continuación:

1.1.1 Sistemas aditivos o sumativos; como su nombre lo indica, se basan en una adición constante, es decir, se van aumentando símbolos en relación a la cantidad que se quiere representar.

1.1.2 Sistemas multiplicativos; en estos sistemas se utilizan dos clases de símbolos, unos para las potencias de la base y otros en función de multiplicador de aquéllos (de las potencia de la base); otra de sus características es que los números se leen diciendo las potencias de las bases, es decir, es un sistema multiplicativo ordenado y a la vez un sistema escrito posicional.

Una variante de los sistemas multiplicativos es el sistema multiplicativo ordenado que consiste en ordenar los numerales en unidades, decenas y centenas, pues ahorra símbolos y espacio, como se hace en sistema numérico que se utiliza en México.

1.1.3 Sistemas posicionales; se caracterizan por utilizar un número reducido de símbolos que variaran de valor dependiendo la posición que ocupen, así mismo es en este sistema donde se introduce el uso del cero para indicar la inexistencia de determinada potencia de la base.

Con la evolución de este sistema, la humanidad en general ha preferido adoptarlo y darle un símbolo propio a cada número y de esto se desprenden las cifras (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.) que son las que se utilizan en la actualidad en México.

1.2 Sistema de numeración decimal

Como se mención al inicio del capítulo, para que un sistema sea considerado efectivo debe facilitar no sólo el conteo y la representación numérica, sino también el cálculo mismo que debe tener ciertas reglas específicas que se puedan repetir. Éstas características son las que hacen que el sistema de numeración decimal sea considerado funcional y se aplique en casi todo el mundo. Dicho sistema se desprende por un lado de la herencia hindú pues fueron estos quienes comenzaron a utilizar los nueve primeros números con los cuales se pueden representar todas las potencias de 10.

De igual forma también es el sistema hindú el que reúne por primera vez las tres características fundamentales del sistema actual decimal, cifrado y posicional; una de las diferencias que se pueden notar con el sistema de numeración decimal actual, es que los hindúes asignaban un nombre independiente a cada una de las potencias, mientras que nosotros utilizamos unidades, decenas y centenas y sólo les agregamos de millar o de millón dependiendo el caso (Gómez, 1998).

Por otro lado, el sistema que se utiliza en occidente es indo-arábigo porque de los segundos se desprenden las cifras que se conocen actualmente.

De todo lo anterior se puede decir que el principio básico del sistema de numeración decimal se fundamenta en la elección de un número limitado de signos, y como se decía es un principio de agrupación extendido que consiste en descomponer los enteros en sumas de cantidades sucesivas, cada una de las cuales es un múltiplo entero de la anterior, en general este múltiplo se toma como valor fijo y se llama base del sistema, la cual en este caso es diez, y es por esto que nuestro sistema se llama decimal.

En resumen al añadir al principio de agrupación el principio cifrado y el principio posicional, se configura un sistema cuyas características son:

- La base del sistema es el diez y se escribe 10.
- Todo número es suma de potencias de la base.
- Adopta un símbolo específico para cada uno de los números inferiores a la base llamados cifras (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).
- Una cifra a la izquierda de otra representa potencias de la base inmediatamente superior.
- Cada cifra tiene dos valores, uno según su forma y otro por el lugar que ocupa, de modo que la primera de la derecha expresa unidades simples, la segunda unidades de segundo orden, la tercera de tercer orden, etc.
- Cada unidad de un orden equivale a diez unidades del orden inferior.

- Para expresar la carencia de unidades de cualquier orden se emplea el cero, 0.

Estas características como explica Buenrostro (2003) facilitan la lectura y escritura de números al poderlos clasificar en órdenes, clases y períodos, es decir, tres órdenes (1-2-3) forman una clase (unidades, decenas y centenas), otros tres órdenes forman la clase de las (unidades, decenas y centenas de millar) y así sucesivamente.

Como ya se mencionó, el sistema de numeración decimal es un sistema posicional y de base diez, que utiliza diez cifras (ya que se cuenta el cero) que al momento de contar y llegar a 9 unidades se agotan los símbolos disponibles por lo que hay que agregar una nueva columna a la izquierda del número que representa en este caso las decenas (unidad de segundo orden), al agotarse los símbolos se siguen agregando columnas a la izquierda que representan unidades de tercer, cuarto, quinto orden, etc.

1.3 Aprendizaje del Sistema de Numeración Decimal

De acuerdo a Buenrostro (2003) el aprendizaje del Sistema de Numeración Decimal, como productos culturales, debe estar relacionado con situaciones en las cuales el niño pueda utilizarlo, esto con el fin de facilitar su adquisición.

Terigi y Wolman (2007) consideran que actualmente las estrategias de enseñanza del sistema de numeración decimal se caracterizan por concebir el aprendizaje como reproducción de modelos y procedimientos, que se desconocen los requerimientos necesarios para su aprendizaje y se ignora el proceso que los niños llevan a cabo para apropiarse del sistema, las hipótesis que elaboran y la forma en que organizan sus conocimientos para darle significado. Por otro lado afirman que aunque las escuelas reconocen la necesidad de la condición constructiva del conocimiento, éstas sólo dirigen su atención al aspecto formal del Sistema de Numeración Decimal (SND), sin considerar la forma como los niños construyen o redescubren las reglas del sistema en la vida escolar y en su vida cotidiana; esto lo que ocasiona es que los niños arrastren durante su paso por la primaria deficiencias en el entendimiento y dominio de las Reglas del SND.

Los estudios del aprendizaje del número muestran cómo esta situación no sólo dificulta el aprendizaje del SND, sino que además genera obstáculos para comprenderlo (Kamii, 1995). De acuerdo con la citada autora, la enseñanza del SND requiere proporcionarles a los alumnos situaciones numerosas y variadas mediante las cuales adquieran, entre otras cosas, formular hipótesis, probar y formar de manera empíricas argumentos acerca de la validez de su hipótesis.

Lerner y Sadovsky (2001) realizan un estudio poniendo atención en la producción, interpretación y comparación de escrituras convencionales sobre el sistema de numeración decimal demostrando que los niños de cinco y seis años de edad elaborar sus propias reglas antes de recibir instrucción formal. Las autoras mencionan que los niños elaboran hipótesis que han adquirido en su vida cotidiana, en experiencias con números escritos y orales y argumentan que en el caso de la numeración escrita los niños conocen primero el resultado de las regularidades de la serie numérica, y después las causas, los principios de base y los principios de posición del sistema de numeración decimal.

Dichas autoras concluyen que los niños se apropian progresivamente de las reglas del sistema de numeración decimal y elaboran reglas intuitivas, mismas que al momento de que formalizan la instrucción de dicho contenido escolar, éstas entran en contradicción y paulatinamente van reconceptualizando sus propias reglas hasta apropiarse de las reglas formales del sistema de numeración.

A continuación se describe de manera breve, las reglas intuitivas que los niños elaboran sobre el sistema de numeración decimal:

- La cantidad de cifras se corresponde con la magnitud del número representado; entre más cifras tiene la cantidad mayor es el número.

- La posición de las cifras como criterio de comparación (el primero es el que manda); se le atribuye un valor a la cifra dependiendo el lugar que ocupa y si hay un número con la misma cantidad de cifras es mayor el que tenga la cifra más grande.

- La numeración escrita se corresponde con la numeración hablada; los niños escriben el número como lo escuchan, salvo los números ubicados entre intervalos, y en lo que respecta a los números nudos (decenas, centenas y unidades de millar) que son los que pueden escribir de forma convencional. El conflicto se presenta cuando los números que corresponden a intervalos tienen más cifras que los nudos, por ejemplo: 21000710085 para 2785 no puede ser mayor que 3000. La misma autora aclara que en un primer momento esto no genera conflicto; pero que posteriormente si lo hace conduciendo al niño a corregir su escritura numérica y a tratar de hacerla corresponder con la escritura convencional.

En este mismo sentido, Brizuela (2006) realiza un estudio sobre las concepciones que tienen los niños de 6 años de edad sobre el uso de las comas y los puntos para facilitar la lectura y escritura de los números.

En dicho estudio la autora encontró que una primera hipótesis sobre el uso de la puntuación en la notación numérica se refiere a la lectura de los números. Los chicos leen números de forma convencional antes de entrar a la educación formal basados en su conocimiento sobre el dinero, es así como suponen que los números que están a la derecha del punto se refieren a dólares (el estudio fue realizado en los Estados Unidos) y los que están a la izquierda a centavos, lo que equivale en el SND a décimas.

Una segunda hipótesis que encontró fue que los niños asimilan la puntuación de la notación numérica a la puntuación en lecto-escritura, es decir, los chicos dicen que los puntos que están en un número indican el momento en el que hay que parar de leer la cantidad y que las comas indican una pausa en dicha lectura; cabe aclarar que esto sólo aplica a las cantidades que se encuentran en los nudos de la numeración, puesto que en otras cantidades a esta edad aún hay confusión.

En tercer término los chicos en la escritura utilizan las comas para dividir grupos de tres números como por ejemplo: 1,000; 10,000; 1,000,000; etc.

Los estudios realizados por Brizuela (2006) Lerner y Sadovsky (1995) son relevantes para el presente trabajo, pues encontraron coincidencias en algunas de las hipótesis que los niños elaboran, por ejemplo, el uso de la puntuación para facilitar la lectura y escritura de números largos, como se observará en el capítulo de resultados del cuestionario inicial de escritura numérica.

1.4 La aritmética, el sistema de numeración y su enseñanza

Una vez descrita la evolución del sistema de numeración decimal y los estudios realizados sobre la adquisición del mismo; en este apartado se revisará de forma breve como se entrelaza la aritmética y el Sistema de numeración decimal (SND) y su enseñanza.

Para el presente trabajo la aritmética es entendida como una de las formas básicas de razonamiento que sistematiza el estudio de las cantidades, su simbolización y sus relaciones (Gómez, 1998), es decir, es el estudio del número, de su uso y de sus reglas, por lo que la aritmética está íntimamente relacionada con el aprendizaje del sistema de numeración decimal, lo que facilita a su vez el aprendizaje de los algoritmos. Dicho aprendizaje se facilita con el uso de material estructurado, pues les da la posibilidad a los niños de pensar y representar los números, lo cual facilita la comprensión y el empleo del sistema de numeración.

Así mismo, se debe tomar en cuenta el contexto del niño, puesto que le facilita el trabajo del nuevo orden, pues podrá aplicar los conocimientos adquiridos con un significado práctico que lo lleve a tener un aprendizaje significativo, puesto que desde el principio podrá plantearse situaciones problemáticas que le interesan directamente dándole sentido a dicho aprendizaje.

1.5 Algoritmos

Como se dijo en párrafos anteriores el aprendizaje y entendimiento de las reglas del sistema de numeración decimal y la aritmética facilitan el aprendizaje de los algoritmos, mismos que se conceptualizan como:

…"*Una serie finita de reglas a aplicar en un determinado orden a un número finito de datos, para llegar con certeza (es decir, sin indeterminación ni ambigüedades) a un número finito de etapas a cierto resultado, y esto independientemente de los datos"*

(Gómez, 1998)

A partir de esta definición se deduce que el sentido dado al algoritmo no hace referencia únicamente a los problemas matemáticos, sino a todos aquellos problemas que requieren de un proceso sistemático para llegar a un resultado o producto, pero sin olvidar que en su origen el algoritmo se utilizó para la resolución de las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) permitiendo utilizar las reglas establecidas para poder extender el cálculo a operaciones entre números de "n" cantidad de cifras y son a estos a los que llamamos algoritmos de las operación .

Para poder resolver un algoritmo matemático se requiere tener claras las reglas del sistema de numeración decimal, pues estas ayudan a comprender la forma en la que se deben acomodar las cantidades para su resolución, entre otros aspectos.

Cabe señalar que la resolución del algoritmo de la división en particular dichas reglas del sistema de numeración decimal son de suma importancia, pues su resolución como se aprecia en lo que anota Castro (2001), es diferente a las otras tres operaciones básicas, puesto que en vez de comenzar de izquierda a derecha, se hace de derecha a izquierda. Es por ello que es necesario hacer mención sobre las formas en las cuales se enseña el algoritmo y se favorece su comprensión.

1.5.1 La enseñanza de los algoritmos

Los debates sobre los métodos de enseñanza en cualquier materia versan entre los métodos tradicionales y los métodos constructivistas; los primeros apuntan que lo importante es que el alumno memorice los procedimientos y la información y el segundo pone énfasis en que los alumnos generen comprensión.

En lo referente a la enseñanza tradicional de los algoritmos lo importante es la comprensión instrumental, es decir, saber aplicar las reglas en cada caso concreto sin necesidad de tener que comprender su funcionamiento, ya que el algoritmo debe permitir resolver el problema sin necesidad de pensar en su significado, es decir, el alumno debe ser capaz de aplicar el algoritmo de forma mecánica.

Por su parte, la enseñanza constructivista enfatiza el hecho de que lo más importante es que el alumno comprenda la lógica que sustenta la resolución de los algoritmos, es decir, se debe conocer que hacer en los casos concretos y estar en condiciones de relacionar los procedimientos con conocimientos matemáticos más generales, como son las propiedades de la numeración de posición, propiedades de las operaciones como la asociativa y la conmutativa, etc.

El problema real radica en que en el sistema educativo se le da prioridad a que el niño obtenga el resultado correcto de forma rápida; en otras palabras se basan en el maquinismo, en donde no es importante el razonamiento sino el manejo de símbolos. El resultado de la aplicación de este método es que al no comprender las reglas del sistema de numeración decimal, el procedimiento para resolver el algoritmo y la lógica del mismo, los alumnos crean una imagen equivocada de las matemáticas, un menosprecio a la propia inteligencia y se compromete el éxito a largo plazo ante la imposibilidad de reconstruir los pasos.

Por otro lado, también es difícil para los maestros utilizar otros métodos de enseñanza pues requieren más tiempo y un número reducido de alumnos, lo contrario a lo que sucede en las aulas mexicanas, en donde existe una sobrepoblación.

Otra de las dificultades que se presentan al enseñar a los alumnos con métodos tradicionales es que el algoritmo aparte de carecer de sentido, pareciera que no deja otra posibilidad de resolver el problema o la operación, es decir, cuando el niño se enfrenta a la tarea de resolver el problema y no encuentra el algoritmo que se le ha enseñado no encuentra la solución, no es capaz de trasladar sus conocimientos a la nueva situación problemática.

Todo lo anterior no quiere decir que el método de lápiz y papel por el que la mayoría aprende o aprendió sea del todo malo, pues es por medio de éste que se pueden buscar nuevas alternativas de enseñanza.

En la tabla no.1 se muestran variaciones de la presentación instrumental, en donde el niño puede ir observando los pasos que se siguen para realizar una operación hasta llegar a la forma tradicional en la que se enseña:

Tabla no 1. Variaciones de presentación instrumental **tomado de Gómez, (1998)**

	Expandido	Extendido	Abreviado	Estándar
Suma	40 + 5 + 30 + 8 70 + 13 (70 + 10) + 3	45 + 38 13 70	45 + 38 (7 + 1) 3	45 + 38 83

	Expandido	Extendido	Abreviado	Estándar
Resta	500 + 60 + 7 - 200 + 40 + 1 300 + 20 + 6 326	567 - 241 6 20 300	567 - 241 6 2 3	567 - 241 326
Multiplicación de un dígito	400 + 30 + 4 x 6 400 x 6 + 30 x 6 + 4 x 6 2400 + 180 + 24	434 x 6 24 180 2400 2604	434 x 6 2(4+1)(8+2)4	434 x 6 2604
Multiplicación de dos dígitos	400 + 30 + 4 x 30 + 6 400 x 6 + 30 x 6 + 4 x 6 + 400 x 30 + 30 x 30 + 4 x 30 2400 + 180 + 24 + 12000 + 900 + 120	434 x 36 24 180 2400 120 900 + 12000 15624	4 3 4 X3 6 2(4+1)(8+2)4 + 12(9+1) 20	434 x 36 2604 + 13020 15624
División	2175 36 |78315 -72000 6315 - 3600 2715 - 2520 195 - 180 15	2175 36 |78315 -72 63 - 36 271 - 252 195 - 180 15	2175 36 |78315 63 271 195 15	

Tabla no 1. Variaciones de presentación instrumental **tomado de Gómez, (1998)**

Como se puede observar en la primera columna se muestra el sistema expandido, este consiste en que se descompone el número de la operación a realizar en unidades, decenas, centenas, etc.; en el sistema extendido primero se hace la operación de las decenas, después la de las centenas, para posterior sumarlas, restarlas, multiplicarlas. En el sistema abreviado ya no se descompone todo el número, solo se va colocando el resultado y se anota el número que se lleva en la casilla que le corresponde, y por último el método estándar es que él todos conocemos y el que es utilizado para enseñar las operaciones básicas.

La ventaja de enseñarles a los niños del método expandido al estándar, es que ellos pueden observar el número en notación desarrollada e ir dándose cuenta conforme avanzan por los sistemas como el número se va simplificando, esto ayuda a reafirmar las reglas del sistema de numeración decimal, y a que el niño entienda porque no lleva uno, sino diez.

CAPÍTULO 2

ANTECEDENTES DEL ESTUDIO: PROBLEMAS DE ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA

En el presente apartado se abordan brevemente los problemas de estructura multiplicativa, los diferentes modelos matemáticos de resolución de problemas con énfasis en la multiplicación y la división, así como los problemas de estructura multiplicativa y por último se hará referencia a los errores asociados a éstas.

2.1 Problemas de estructura multiplicativa

Los problemas de estructura multiplicativa son aquellos que requieren una multiplicación, división, regla de tres, porcentajes, etc., para su resolución, mientras que los problemas de estructura aditiva son los que requieren una suma o una resta.

El aprendizaje de los problemas de estructura multiplicativa inicia con la multiplicación y la división, mismas que requieren que el niño tenga uso y dominio de los números, que conozca su simbolización y que haya adquirido la estructura aditiva (suma y resta); esto tiene su justificación, en virtud de que multiplicar en su sentido más intuitivo es sumar de forma reiterada una cantidad, mientras que dividir es una resta reiterada de una cantidad.

En el caso de la multiplicación por un lado se tiene al multiplicando que es el número que se repite, y el multiplicador que es el que nos indica la cantidad de veces que se repite el número (Castro y Castro, 1995).

Por su parte la división consiste en repartir una cantidad en partes iguales; el dividendo es la cantidad a repartir, y se trata usualmente de un número en contexto cardinal, expresado mediante objetos concretos, y el divisor es el número de partes, siendo también un número cardinal pero más abstracto y se pasa a escribir simbólicamente.

2.2 Los diferentes Modelos Matemáticos y los problemas de estructura multiplicativa: multiplicación y división

En primer término abordaremos la definición de modelos matemáticos que se utilizan en este trabajo para comprender a que nos referimos con este.

Para tal efecto un modelo matemático es una forma de expresar declaraciones y/o proposiciones sustantivas de hechos o de contenidos simbólicos, en donde están implicadas variables, parámetros y relaciones entre variables y/u operaciones (Satty y Joyce, 1981). En este sentido se puede decir que el éxito de un modelo matemático es encontrar la formulación que sea más apropiada a la realidad estudiada.

En otras palabras, un modelo matemático es aquel que se utiliza para dar un sentido apropiado a la realidad que nos presenta el problema, debiendo tomar en cuenta la relación que hay entre las declaraciones o la enunciación semántica y la operación a realizar.

Por lo tanto cada uno de los modelos que se describen a continuación, enfatizan un contexto particular del número y el algoritmo.

2.2.1 Modelos lineales.- Utiliza la recta numérica como soporte gráfico, el producto n x a se modeliza formando un intervalo de longitud a-unidades y contándolo n-veces (Castro, 2001).

Para la división se cuenta hacia atrás desde el dividendo, y de tanto en tanto, según indique el divisor, siendo el cociente el número de pasos dados.

2.2.2 Modelos cardinales.- Se representan uno o los dos factores, siendo los siguientes los tipos más utilizados en el caso de la multiplicación:

- La unión repetida de conjuntos cardinales, usualmente con los mismos objetos.

- Distribución de objetos es un esquema rectangular, en donde cada uno de los factores se puede reconocer en la representación.

- Producto cartesiano de dos conjuntos o combinatorias.

- Diagrama de flechas, se utiliza para representar un producto de dos conjuntos.

Para la división el modelo más usual es el de repartir en partes iguales, es decir, si se tiene un conjunto de 12 elementos y se abren a partir de él 3 subconjuntos, o bien se puede utilizar el modelo inverso sobre el conjunto de 12 elementos se van haciendo subconjuntos de 3 elementos hasta que todos quedan distribuidos. Así mismo la distribución rectangular de un total de elementos dados por el dividendo en tantas filas iguales como indique el divisor es otro modelo adecuado, el cociente se determina contando el número de filas obtenidas (Castro, 2001).

2.2.3 Modelos con medida.- La representación gráfica de este modelo se tiene en las regletas de cuisenaire que representan al número como longitud, el producto 2x3 se representa tomando 3 regletas del número 2. De igual forma tenemos la balanza en donde el contexto del número es de medida y peso, el producto es el resultado de colocar tantas veces una unidad de peso como indique el otro número.

En el caso de la división se establece la equivalencia entre una longitud o peso global (dividendo) y otro pequeño (divisor) que hay que reiterar varias veces hasta conseguir dicho equilibrio. El número de veces en ambos casos se obtiene contando y nos da el cociente. (Castro, 2001)

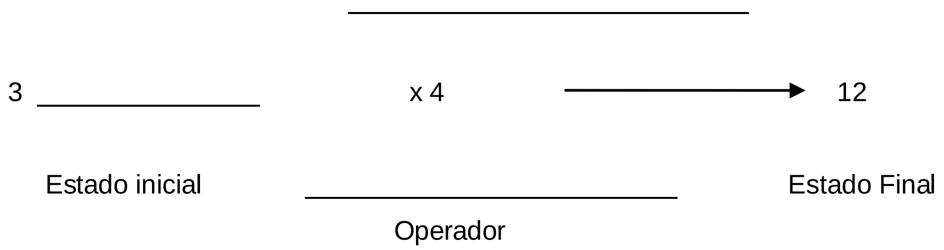
2.2.4 Modelos numéricos.- Los números aparecen únicamente simbolizados.

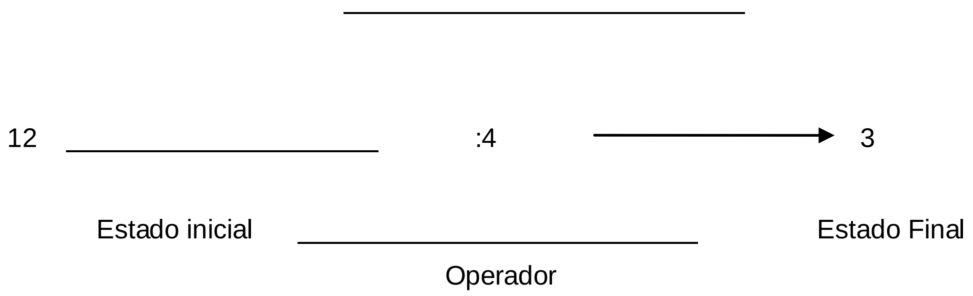
$$3 \text{ x } 4 = 3 \text{ veces } 4 = 4 + 4 + 4$$

124 consiste en ver cuántas veces puede restarse 4 de 12

$$12 - 4 = 8$$
$$8 - 4 = 4$$
$$4 - 4 = 0$$

2.2.5 Modelos funcionales.- Son todos aquellos casos en donde el producto aparece con carácter de función u operador. Consiste en considerar cada operación como una máquina-operador que transforma números-estados en números-estados, de la siguiente forma:





2.3 EL aprendizaje de la división y la multiplicación

El aprendizaje de la división debe ir simultáneo con el de la multiplicación. Su mayor dificultad se encuentra en el doble papel que puede representar el divisor en los diferentes modelos: número de partes en las que se divide la cantidad inicial o bien la cantidad fija que sirve para ir formando las diferentes partes en las que se divide la cantidad total.

La dificultad real de la división aparece en la mecanización de su algoritmo y en el paso a conceptos más elaborados como los de fracción, razón y número racional (Castro y Castro, 1995).

2.4 Campo conceptual y problemas de estructura multiplicativa

En primer lugar se define qué se entiende por campo conceptual en el presente trabajo:

…"Un campo conceptual es un espacio de problemas o de situaciones-problema en los que el tratamiento implica conceptos y procedimientos de varios tipos en estrecha conexión"

(Vergnaud, 1994)

En otras palabras, un campo conceptual es un problema que requiere diferentes conceptos y procedimientos para poder llegar a su resolución.

Vergnaud trata de dos campos conceptuales; la estructura aditiva y la estructura multiplicativa, ambos considerados como un conjunto de problemas que comportan operaciones aritméticas y nociones de tipo aditivo o de tipo multiplicativo.

Si bien la estructura multiplicativa se basa en la aditiva, tiene componentes específicos, por lo que el citado autor conceptualiza a la estructura multiplicativa como un conjunto de situaciones problema cuya resolución requiere la multiplicación o la división. Haciendo una categorización que consiste en proporción simple, producto de medidas y proporción múltiple.

2.4.1 Tipos de problemas de estructura multiplicativa.

El análisis que hace Vergnaud (1983) de los problemas que conllevan operaciones de multiplicación y división, muestra que los problemas simples de este tipo se citan casi siempre en el marco de dos grandes categorías mismas que veremos a continuación:

La primera categoría se refiere al Isomorfismo de medida; ésta estructura engloba a los problemas que tienen una proporcionalidad simple directa entre dos magnitudes implicadas, incluye los problemas de repartos iguales, precios constantes, movimiento uniforme, densidades constantes a lo largo de una línea, en una superficie o en volumen; y para representar esto Vergnaud (1983) utiliza las tablas de correspondencia como la que se muestra en seguida:

$$\begin{array}{l} M_1 - - - M_2 \\ \hline x \underline{\qquad\quad} y = f(x) \\ \quad\;\; \cdots \\ x' \underline{\qquad\quad} y' = f(x') \end{array}$$

En esta estructura la función F: $M_1 \longrightarrow M_2$ es una proporcionalidad simple directa entre dos magnitudes M_1y M_2 e identifica cuatro grandes subclases de problemas dentro de la estructura del isomorfismo de medida multiplicación, división y problemas generales de regla de tres.

- La subclase de la multiplicación se organiza de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l} M_1 - - - M_2 \\ \hline 1 \underline{\qquad\quad} a \\ \quad\;\; \cdots \\ b \underline{\qquad\quad} x \end{array}$$

A continuación, el ejemplo ilustra esta subclase: Pepe compra 6 chocolates a $12 cada uno. ¿Cuánto tiene que pagar?

a = 12, b = 6, M_1 = [número de chocolates], M_2 = [pesos]

- La subclase de la división (primer tipo) se organiza de la siguiente forma:

$$\begin{array}{l} M_1 --- M_2 \\ \hline 1\_\_\_\_\_\_ x = f(1) \\ \quad \ldots \\ a\_\_\_\_\_ b = f(a) \end{array}$$

Consiste en encontrar el valor de la unidad f(1) conociendo a y f(a).

El siguiente ejemplo ilustra esta subclase: José quiere repartir sus dulces entre Mariana y Angélica, en partes iguales. Su padre le da 12 dulces ¿Cuántos dulces recibir cada una?

a = 3, b = 12, M_1 = [número de niñas], M_2 = [números de dulces]

- Subclase división segundo tipo se organiza de la siguiente forma:

$$\begin{array}{l} M_1 --- M_2 \\ \hline 1\_\_\_\_\_\_ a = f(1) \\ \quad \ldots \\ x\_\_\_\_\_ b = f(x) \end{array}$$

Esta consiste en encontrar x conociendo f(x) y f(1)

A continuación, el ejemplo ilustra esta subclase: José tiene $150 y quiere comprar discos compactos; cada uno de ellos cuesta $ 30. ¿Cuántos discos puede comprar?

a = 300, b = 1500, M_1 = [número de Cd's], M_2 = [costo]

Problemas de reglas de tres en un caso general se organiza de la siguiente forma:

$$M_1 - - - M_2$$

$$\overline{}$$

$$a \_\_\_\_\_\_ b$$

$$\dots$$

$$c \_\_\_\_\_ x$$

En este tipo de problemas intervienen tres datos a, b, c; por lo que no son problemas simples de estructura multiplicativa. Vergnaud (1983) apunta que deberá quedar ya claro que los problemas de multiplicación y división son casos simples de los problemas más generales de regla de tres y se distinguen de estos en que uno de los cuatro términos implicados es igual a uno.

La segunda clase hace referencia al producto de medida, que engloba a tres magnitudes M1, M2 y M3, de tal manera que una de ellas, M3 es el producto cartesiano de las otras dos.

M1 x M2 = M3

Su forma general es una relación ternaria entre tres cantidades una de las cuales esté definida como un par ordenado cuyos componentes son las otras dos cantidades; y se dividen en dos subtipos de problemas:

Tipo uno: Multiplicación; se debe encontrar la medida producto, conocidas las medidas que la componen. Por ejemplo, ¿Cuál es el área de una habitación rectangular que mide 5 metros de largo por 3 metros de ancho?

M1 = [largo] M2 = [ancho]M1 x M2 = [rea]

Tipo dos: División; se debe encontrar una de las cantidades elementales que se componen, conociendo la otra y la cantidad compuesta. Por ejemplo, la superficie de una habitación rectangular es de 24 metros cuadrados y el largo de la habitación es de 6 metros. ¿Cuál es el ancho de la habitación que responde a las mismas magnitudes del problema anterior?

En el campo conceptual de las estructuras multiplicativas se pueden distinguir subclases de problemas sin más que considerar el tipo de magnitud elemental implicado discreta, continua; el tipo de números enteros, decimales, números grandes, números inferiores a 1, y también teniendo en cuenta los conceptos implicados.

2.5 Errores asociados a los problemas de estructura multiplicativa

Los problemas verbales que incluyen multiplicación y división son difíciles de resolver por los niños, algunas de estas dificultades se deben a la comprensión limitada que tienen de estas operaciones aritméticas y su poca experiencia con los distintos tipos de situaciones que exigen utilizar estas operaciones.

La comprensión del significado de la multiplicación y de la división es considerablemente más difícil que el de la adición y la sustracción, una explicación a este fenómeno se da en términos de las palabras que comúnmente se asocian a los signos de las operaciones; así:

+ significa “sumar”, “añadir” o “y”
- significa “restar”, o “quitar”
: significa “repartir”
x significa “tantas veces”

Mientras que añadir, quitar y repartir son acciones concretas y fáciles de visualizar, no ocurre lo mismo con tantas veces, que no presenta una referencia activa clara.

Con respecto a lo anterior Brosseau (1986) menciona que los niños buscan dentro del problema a resolver “variables pertinentes”, que son aquellas palabras que cuya presencia o ausencia influyen sobre las posibilidades de reconocimiento o de resolución de un problema de multiplicación o división. El valor que los niños atribuyen a estas variables o palabras se hace mayor cuando la enseñanza pone énfasis en la operación correspondiente en vez de hacerlo en el razonamiento del problema.

Saiz (1994) reportó que los niños al no razonar y sólo utilizar las operaciones de forma automática, presentan dificultades en resolver problemas de división cuando esta no hace referencia a la idea de reparto, lo cual provoca que en un contexto matemático diferente a este el niño no sabe qué hacer.

Es por esto que Charnay (1988, citado en Saiz, 1994) pone énfasis en que la enseñanza de las matemáticas debe ser significativa, para lograr una comprensión, que como anota Brosseau (1986) debe ser a nivel semántico, es decir, hay que ser capaz de reconocer las ocasiones en las que se deben utilizar los conocimientos e invertirlos en nuevos retos; y a nivel sintáctico, en términos de lógica-matemática que es cuando el alumno ya puede razonar sobre su saber, analizarlo o combinarlo con otros. En otras palabras, la comprensión es la posibilidad de restaurar ciertos recursos de control y de engendrar las alternativas a rechazar, para la resolución de un problema.

Es así como se puede notar que los problemas de estructura multiplicativa son un contenido complejo, ya que no se limita a la enseñanza del uso del algoritmo, sino que necesita que el niño tenga comprendidas las reglas del sistema de numeración decimal y los problemas de estructura aditiva, así como el uso de la operación en los diferentes modelos matemáticos.

CAPITULO 3
MARCO TEÓRICO

Este capítulo está dividido en dos partes; en la primera se expone la teoría de Vygotsky en lo referente a la Zona de Desarrollo Próximo y en la segunda a Vergnaud en la parte matemática con las ideas de Estructura multiplicativa y Campo Conceptual.

3.1 Teoría socio-histórico-cultural de Vygotsky: La Zona de Desarrollo Próximo

Este apartado comienza con un esbozo general de la teoría Socio-histórico-cultural en lo referente al aprendizaje y desarrollo, posteriormente se hace referencia al concepto de Zona de Desarrollo Próximo, Zona de Desarrollo Real y Zona de Desarrollo Potencial, así mismo se explica a grandes rasgos que es y cómo funciona este constructo explicando brevemente de igual forma a que se refiere el autor de esta teoría cuándo hace mención a los procesos interpsicológicos e intrapsicológicos.

3.1.1 Aprendizaje y desarrollo desde la teoría de Vygotsky

La Teoría de Vygotsky pretende dar una explicación de las formas en las que los sujetos aprenden, poniendo especial énfasis en los procesos mentales superiores (pensamiento, lenguaje) y la influencia que ejerce el medio social, así mismo explica que el desarrollo cognitivo se genera mediante el uso de instrumentos y signos en interacciones sociales, que se transforman en la mente del sujeto, tomando de dicha cultura las herramientas mediante las cuales transforma la realidad.

Vygotsky (1988) distingue dos clases de herramientas en función del tipo de actividad:

- Instrumentos: Son algo que puede ser usado para construir o manejar algo.

- Signos: Es algo que significa una cosa, distinguiendo tres tipos;
    - Indicadores, son aquellos en los cuales se relacionan una causa y un efecto con lo que significan;
    - Icónicos, son las imágenes a las que hacen referencia los significados;
    - Simbólicos, son los que tienen una relación abstracta con lo que significan. Las palabras son un ejemplo de signos lingüísticos; los números son signos matemáticos; en el Lenguaje y en la matemática se consideran como sistemas de signos. (Vygotsky, 1988).

Cabe señalar que los instrumentos y signos son construcciones sociales, históricas y culturales, mismos que son internalizados por el sujeto, a partir de la mediación social, y ésta genera su desarrollo cognitivo. En otras palabras este autor distingue entre la mediación instrumental que se refiere precisamente al uso de los instrumentos y signos establecidos culturalmente, que le permite al sujeto transformar la realidad, y la mediación social, que se da en las interacciones entre personas, por medio de las cuales el niño se va apropiando de las herramientas necesarias para su desarrollo.

Los procesos mentales superiores se presentan en la interacción social, entendida ésta como el intercambio de experiencias y conocimientos entre los miembros que participan y a partir de esta los significados y signos se adquieren y se construyen, internalizando los que ya existen en el contexto del individuo. Para Vygotsky el lenguaje es el sistema de signos más importante para el desarrollo cognitivo, porque lo libera de los vínculos contextuales inmediatos y concretos, puesto que los procesos mentales superiores depende de la descontextualización, es decir, el lenguaje otorga flexibilidad al pensamiento conceptual y proposicional, permitiendo que los conceptos se puedan generalizar. En este sentido Vigotsky menciona:

…"El momento más significativo en el curso del desarrollo intelectual, que da a luz las formas más puramente humanas de la inteligencia práctica y

abstracta, es cuando el lenguaje y la actividad práctica, dos líneas del desarrollo completamente independientes, convergen."

(Vygotsky, 1988).

En otras palabras la inteligencia práctica se refiere al uso de instrumentos y la abstracta al uso de signos y aunque ambas se desarrollan separadamente en las primeras etapas de la vida, posteriormente convergen; pudiéndose observar cuando el niño comienza hablar mientras resuelve un problema práctico.

En resumen el desarrollo de las funciones psicológicas superiores se lleva a cabo por la incorporación y la interiorización de instrumentos y signos que se adquiere en relación con los otros. Esto es posible porque el niño vive en grupos sociales y se relaciona con otras personas de quienes puede aprender al relacionándose con ellas; sin embargo el aprendizaje sólo se lleva a cabo cuando los instrumentos, los signos y las normas de las personas con quienes interacciona el niño corresponden a su nivel de desarrollo previo. Vygotsky establece la relación entre aprendizaje y desarrollo, cuando afirma que no sólo es necesario establecer el nivel de desarrollo mediante tareas o actividades que el niño puede realizar por sí mismo, sino que es necesario determinar también aquello que puede hacer con ayuda de otros.

3.1.2 La Zona de Desarrollo Próximo

Para Vygotsky el desarrollo del ser humano está determinado por los procesos de enseñanza y educación, los cuales deben llevarlo a obtener niveles mayores de desarrollo. Estos niveles según el autor, se alcanzan a través de la Zona de Desarrollo Próximo (ZDP) que es concebida como la distancia entre el nivel real de desarrollo determinado por la capacidad de resolver un problema y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz (Vygotsky, 1988).

En otras palabras, la ZDP es el espacio que hay entre la Zona de Desarrollo Real, que es lo que el niño puede hacer sin ayuda, y la Zona de Desarrollo Potencial, que es lo que el niño puede hacer con ayuda de un compañero con mayor nivel de conocimiento; que es el objetivo principal del programa de intervención del presente trabajo.

Dentro del proceso que se lleva a cabo en la ZDP el niño tiene la posibilidad de realizar las acciones necesarias que lo lleven o poder resolver un problema de forma lógica, es decir, no sólo aprende pasos para resolver un problema en específico, sino que con la ayuda del otro va aprendiendo y razonando el por qué de esos pasos, lo cual le permite en otro momento resolver problemas que tengan similitud.

Para Newman, Griffin y Cole (1998), la ZDP esté dada por el espacio de negociaciones sociales sobre los significados y, en el contexto de las escuelas, el lugar en que profesores y alumnos pueden apropiarse de las comprensiones del otro.

Para estos autores la ZDP en un contexto escolar, lo que debe propiciar es un intercambio de ideas entre alumnos y profesores que los lleve a entender y apropiarse del entendimiento de otros; es un aprendizaje conjunto en el cual el adulto debe de tener en cuenta que los alumnos tienen diferentes Zonas de Desarrollo Real y Potencial.

De igual forma, hay que tener presente que una de las finalidades de la ZDP es crear una nueva ZDP, es decir, ya que el niño pasó del plano inter-psicológico (mediadores externos) al plano intra-psicológico (reflexión individual) y alcanzó con esto un nivel mayor de desarrollo, la Zona de Desarrollo Potencial se convierte en Zona de Desarrollo Real, lo que permite que el sujeto siga desarrollándose.

La interacción social por lo tanto, se torna indispensable ya que el niño inexperto adquiere del experto las herramientas psicológicas necesarias para poder resolver el problema, esto lo hace a través del lenguaje, y una vez que ya no necesita la ayuda del otro es que ha interiorizado las herramientas psicológicas necesarias. Todo esto no puede ser posible, si el niño tiene una actitud pasiva, pues requiere reflexionar sobre sus propios errores y su pensamiento, lo que lo lleva a un ajuste de la comprensión del objeto de conocimiento.

Para Vygotsky son dos los niveles en los que se da el desarrollo psíquico; primero se da el nivel inter-psicológico en donde el individuo se encuentra inmerso en una actividad social de comunicación interactuando con otros sujetos, cuando las acciones que realiza con los otros las produce a nivel mental, es decir individualmente, se da paso al nivel intra-psicológico (Montero, 2003).

Es importante decir en este momento, que no toda interacción social que se propicie dentro del aula de clases es ZDP y genera conocimiento. Para que la ZDP funcione deben tomarse en cuenta los conocimientos previos de los niños y la actividad debe representar un reto para el alumno, pero no tanto que no pueda realizar la actividad ni con ayuda, ya que esto puede producir confusión de los conocimientos ya adquiridos. Así mismo el compañero debe de saber más que el niño pero no debe poseer conocimientos mucho más elevados porque esto provoca que no se puedan entender en el proceso de socializar el conocimiento.

Con respecto a lo anterior Álvarez (1990) (citado en Montero, 2003) apunta que se tiende a dar por supuesto que toda tarea instruccional se sitúa en la ZDP del alumno, cuando lo que mayoritariamente predomina en nuestra cultura escolar es una transmisión unidireccional de destrezas o conocimientos descontextualizados que por su propia naturaleza y por el formato instruccional que se emplea en la situación de aula no puede en absoluto considerarse como objeto de enseñanza en la ZDP.

Lo anterior porque éste tipo de enseñanza no permite la reflexión y la participación activa del niño; el simple hecho de ponerlos a trabajar por equipos o en parejas no quiere decir que socialicen el conocimiento y de igual forma los conocimientos que se enseñan suelen carecer de sentido para el alumno, pues no encuentran su utilidad en la vida cotidiana; en este sentido para Vygotsky es esencial que el sujeto le encuentre significado a las actividades de aprendizaje fuera de la escuela, es decir, en su contexto cultural.

Lo antes dicho provoca que el conocimiento que se adquiere sea duradero y generalizable, es decir, que se pueda aplicar en otros contextos y otras circunstancias.

Todo lo antes expuesto es de gran relevancia para el psicólogo educativo, en virtud de que debe conocer los procesos psicológicos mediante los cuales el niño se apropia del conocimiento y poder determinar el nivel de desarrollo de dichos procesos, así como los conocimientos previos del alumno o del sujeto para poder potenciar dicho desarrollo.

3.2 Teoría de los campos conceptuales de Vergnaud

Este apartado está compuesto de tres partes en las que se exponen el marco teórico de esta investigación; en el primer lugar se describe la Teoría de los Campos Conceptuales propuesta por Gerard Vergnaud (1994), se exponen de forma breve los conceptos que la componen; se continua con una exposición sobre el papel de la representación y, finalmente se abarca su relevancia didáctica.

3.2.1 La teoría de los Campos Conceptuales

Para Vergnaud (1994) los conocimientos tienen un carácter contextualizado, lo cual proporciona una importancia fundamental a las reglas de acción que de igual forma también se encuentran dentro de un contexto.

El autor considera que el conocimiento esté organizado en campos conceptuales; mismos que están fundamentados en una teoría psicológica de la conceptualización de lo real, estudia las relaciones y rupturas entre los conocimientos desde el punto de vista conceptual; ofrece un marco para la comprensión del aprendizaje y se propone dar cuenta de los procesos de conceptualización que se siguen en la construcción de los problemas de estructura multiplicativa, en el caso de este trabajo.

En esta teoría se parte de la idea de que el elemento más importante del desarrollo es la conceptualización; por ello plantea que se debe prestar atención a los aspectos conceptuales que conforman los esquemas.

Cabe aclarar que la conceptualización de lo real se refiere específicamente al contenido; esta no puede ser reducida a las operaciones lógicas, ni a las operaciones puramente lingüísticas; tampoco puede ser reducida a la reproducción social, ni a la aparición de estructuras innatas.

Los conceptos esenciales de la teoría de los campos conceptuales son: campo conceptual, esquema, situación, invariante operatorio (teorema en acción y concepto en acción), y su propia definición de concepto.

3.2.1.1 Campo conceptual.- Como ya se mención, Vergnaud (1994) define campo conceptual como el conjunto de situaciones en las que, para su dominio participan varios conceptos.

La teoría de los campos conceptuales se sostiene en tres argumentos:

1) Un concepto no se forma dentro de un solo tipo de situaciones.

2) La construcción y apropiación de las propiedades de los conceptos es un proceso largo que dura varios años; puede durar hasta 10 años ó más, y se logra mediante análogas; en ocasiones no se entiende completamente o se entiende mal, o no se establece una relación adecuada con otros conceptos, con otros procedimientos o entre los significantes.

3) El autor considera al campo conceptual como una unidad de estudio para dar sentido a las dificultades observadas en la conceptualización de

lo real; la Teoría de los Campos Conceptuales supone que la conceptualización es la esencia del desarrollo cognitivo.

El mismo autor reconoce que los conceptos no se encuentran aislados unos de otros; por ello los agrupa según su operatividad, relacionando conceptos, situaciones y teoremas en acción. De igual forma, supone que las cosas no se pueden estudiar separadamente, es necesario hacer recortes, y en ese sentido los campos conceptuales son unidades de estudio que pueden servir para dar sentido a los problemas de adquisición y a las observaciones hechas en relación con la conceptualización.

3.2.1.2 Concepto.- La Teoría de los Campos Conceptuales considera que los conceptos no deben ser definidos por su estructura, sino que se requiere considerar sus propiedades y las situaciones en las cuales son usados, así como las representaciones simbólicas que se usan para pensar, hablar o escribir acerca de un concepto; en ese sentido, los conceptos están constituidos por elementos que se relacionan, pues corresponden a un conjunto de situaciones, invariantes operatorios y sus propiedades expresadas mediante diferentes representaciones simbólicas.

La formación de conceptos matemáticos conduce a considerar el concepto como una agrupación de invariantes que pueden ser utilizados en la acción, el concepto por lo tanto se refiere al conjunto de situaciones en las cuales adquiere sus propiedades, su significados, y al conjunto de esquemas que el sujeto pone en acción en esas situaciones. De ahí que Vergnaud (1994) defina concepto a partir de tres conjuntos que conforman la SIR:

S = es conjunto de situaciones que dan sentido al concepto;

I = es el conjunto de invariantes (objetos, propiedades, relaciones) sobre las cuales se sostiene la operacionalidad del concepto, o un conjunto de invariantes que pueden ser reconocidas y usadas por el sujeto para analizar y dominar las situaciones del primer conjunto; a este aspecto se le puede identificar como el significado del concepto;

R = es el conjunto de representaciones simbólicas (lenguaje, gráficos, enunciados formales, etc.) que se pueden usar para indicar y representar esos invariantes y, consecuentemente, representar las situaciones y los procedimientos. Las representaciones simbólicas son el significante del concepto.

Los conceptos adquieren su sentido en las situaciones, de ahí que las situaciones constituyan un acceso a los campos conceptuales; es decir, las situaciones corresponden a la realidad, y un alumno adquiere mediante su interacción con situaciones y problemas; de esta forma el alumno incorpora las propiedades que constituyen los conceptos- en- acción y teoremas en acción, o sus conocimientos en acción, en la medida en que se puedan expresar mediante sus significantes (representaciones simbólicas), esos invariantes o conocimientos en acción pasan a formar el concepto del estudiante.

3.2.1.3 Situación.- Cuando Vergnaud se refiere a la situación pone énfasis en la tarea a realizar, pues considera que una situación compleja puede ser analizada como una combinación de tareas, con características y dificultades propias; el resultado no depende de la suma de las tareas, sino del desempeño en cada una, pues este afecta el desempeño global.

Según Vergnaud (1994), los procesos cognitivos y las respuestas del sujeto son resultado de las situaciones con las cuales es confrontado; muchas de las concepciones vienen de las primeras situaciones en que se fue capaz de dominar o de experiencias al intentar cambiarlas.

En cuanto a las situaciones, distingue dos tipos:

1) Aquellas para las cuales el sujeto dispone de competencias necesarias para el tratamiento relativamente inmediato de la situación.

2) Aquellas para las cuales el sujeto no tiene todas las competencias necesarias.

El concepto de esquema se aplica fácilmente a la primera de las categorías de situaciones mencionadas; es decir, aquellas para las que el sujeto dispone de las competencias necesarias.

En situaciones de la segunda categoría, por ejemplo en resolución de problemas, los estudiantes muestran conductas igualmente estructuradas con los esquemas de que disponen, especialmente aquellos relacionados con situaciones que parecen tener una semejanza con la situación que ahora están tratando.

Sin embargo, como la semejanza es parcial y posiblemente sólo aparente, los esquemas sólo se esbozan, las tentativas se suspenden, varios esquemas pueden ser evocados sucesivamente o simultáneamente en una situación que es nueva o considerada como tal por el sujeto; esto es, el funcionamiento cognitivo del sujeto se basa en el repertorio de esquemas disponibles. Dado esto, dice Vergnaud (1994), no se puede teorizar de modo válido respecto al funcionamiento cognitivo sin tener en cuenta el desarrollo cognitivo; hacia este problema crítico apunta la teoría de campos conceptuales.

3.2.1.4 Esquema.- Vergnaud (1994) llama esquema a la organización invariante del comportamiento para una determinado tipo de situaciones. Es decir, un esquema es una sucesión de acciones que tienen una organización y que pueden repetirse en situaciones semejantes. En los esquemas se deben investigar los conocimientos en acción del sujeto, es decir los conocimientos que hacen que la acción del sujeto sea operatoria. Un esquema genera acciones y contiene reglas, pero no es modelo de acciones porque la secuencia de acciones depende de la situación.

Un esquema es eficiente para varias situaciones; puede generar secuencias de acción distintas, de información y de control según la situación; no es el comportamiento, lo organiza.

Los algoritmos son esquemas, pero no todos los esquemas son algoritmos; se utilizan para tratar las mismas situaciones, se transforman en esquemas ordinarios o hábitos.

Los esquemas para Vergnaud (2003) se refieren a situaciones; expone que se debiera hablar de interacción esquema-situación; entiende qué el desarrollo consiste en un repertorio de esquemas; la función del esquema la ubica en todos sus componentes, y explica que, para comprender si un esquema es eficaz o no, se deben analizar sus componentes:

1) El objetivo, los sub-objetivos, las anticipaciones: Este componente refleja la integración de la intención, el motivo, el deseo, la expectativa los esquemas se componen y se descomponen jerárquicamente; el objetivo se subdivide en sub-objetivos y anticipaciones.

2) Las reglas de acción, toma de información y control: Este componente forma la parte que genera el esquema; crea de forma temporal la organización de la actividad, que involucra desde su creación hasta la toma de información y el control sobre su eficacia.

3) Los invariantes operatorios conceptos-en-acción y teorema-en-acción: Los invariantes constituyen la parte cognitiva del esquema; su función es identificar y reconocer objetos, sus propiedades, sus relaciones y transformaciones. Extrae la información pertinente, realiza inferencias sobre los efectos de la información, controla la toma de información y verifica su eficacia.

4) Las inferencias: La actividad nunca es automática, esté regulada por adaptaciones, controles y ajustes progresivos.

Estos cuatro componentes constituyen el esquema, que es también sistemático y contingente es sistemático porque la actividad está sujeta a reglas univocas, es decir, a un sólo tipo de reglas; y es contingente porque las reglas generan actividades y conductas distintas según la situación en donde se generan. Esto es más claro en situaciones nuevas, cuando el alumno no tiene un esquema preparado en su repertorio y debe crear un nuevo esquema a partir de sus esquemas anteriores.

La idea de campos conceptuales lleva al concepto de concepto, con los tres elementos que lo conforman (referente, significado y significante), pero son las situaciones las que dan sentido al concepto; llegamos as al concepto de situación y al de esquema; los esquemas dan sentido a la situación. El concepto de esquema nos conducir al de invariante operatorio.

3.2.1.5 Invariante operatorio.- Cada esquema se refiere a una clase de situaciones, pero un individuo puede aplicar un esquema a una clase más pequeña, aquella a la cual se le podrá aplicar de modo eficaz; de esta forma se puede vislumbrar que un esquema puede aplicarse a un grupo de situaciones más amplio. Cuando un individuo puede aplicar un esquema referido a una situación a otras situaciones de la misma clase, ha descubierto un invariante. Un invariante es la generalización de un esquema. Para que un esquema pueda generalizarse, el sujeto debe reconocer analogías, semejanzas en algunos aspectos y diferencias en otros, entre situaciones en las que el esquema era operatorio para el sujeto y aquellas nuevas. Esto implica que la clave de la generalización del esquema esté en el reconocimiento de invariantes. Vergnaud (2003) considera que el invariante operatorio es el pasaje de la realidad a la representación, esta última es funcional en la medida en que refleje aspectos de la realidad y permita al pensamiento operar con significados y significantes.

Toda representación para que sea funcional debe cumplir un criterio de orden semántico (debe reflejar ciertos aspectos de la realidad en formas simbólicas), y un criterio de orden sintáctico (debe permitir el cálculo relacional). Estos criterios también los identifica como concepto-en-acto y teorema-en-acto (esto es, conceptos y teoremas que, sin ser explícitos, dirigen las conductas del sujeto), son los conocimientos contenidos en los esquemas.

Establece tres tipos lógicos de invariantes operatorios:

1) Del tipo proposiciones pueden ser verdaderos o falsos; tal es el caso de los teorías-en-acto.

2) Del tipo función preposicional no pueden ser verdaderos o falsos pero permiten la construcción de proposiciones; son de este tipo, los conceptos de cardinal, y de transformación; son los conceptos-en-acto o las categorías-en-acto, raramente explicitados por los alumnos. No hay proposiciones sin funciones preposicionales y, viceversa, no hay funciones preposicionales sin proposiciones.

3) Del tipo argumento en matemáticas, los argumentos pueden ser objetos materiales, personajes, números, relaciones e incluso proposiciones. Al respecto Vergnaud (2003) expone que una aproximación psicológica y didáctica de la formación de conceptos matemáticos, conduce a considerar un concepto como un conjunto de invariantes utilizables en la acción. La definición pragmática de un concepto pone, por tanto, en juego el conjunto de situaciones que constituyen la referencia de sus diferentes propiedades, y el conjunto de los esquemas puestos en juego por los sujetos en estas situaciones.

Este autor agrega que el uso de significantes explícitos es indispensable para la conceptualización. Esto lo lleva a considerar que el concepto esté formado por tres conjuntos: el de las situaciones que dan sentido al concepto, el de los invariantes sobre el que reposa la operacionalidad de los esquemas y el de las formas, tanto lingüísticas como no lingüísticas, que permiten representar el concepto, sus propiedades, las situaciones y los procedimientos de tratamiento.

En el análisis de conceptos la noción de invariante es la más útil; pues su elaboración es la herramienta decisiva en la construcción de la representación; estas hacen que una representación sea eficaz, al cumplir las funciones de reflejar la realidad y de proporcionarse al cálculo relacional.

3.2.1.6 Representación.- La representación en los niños no se compone de números, figuras, dibujos, diagramas, gráficos, sino de formas interiorizadas de actividades en situaciones. Vergnaud (2003) aclara que la actividad no es solamente el comportamiento; se requiere estudiar la actividad de representación, y para ello es necesario recurrir al concepto de esquema. Una parte importante del conocimiento, son la habilidades, y estas no se pueden expresar en palabras fácilmente. Esto se aplica a todos los tipos de conocimiento, incluso las matemáticas, los niños muchas veces no pueden expresar los conocimientos que usan en la acción.

Este autor explica que es imposible aprehender la realidad directamente; la mente humana la representa, de tal manera que esa representación acta como intermediario entre el sujeto y su entorno. Es decir, la constitución del conocimiento no es otra cosa que un proceso de construcción paulatino de representaciones mentales sobre la realidad que pretende comprender; esa realidad se representa por medio de esquemas.

Vergnaud (2003) considera que las representaciones permiten a los individuos (alumnos) actuar sobre la realidad, pues les permite predecir y explicar el mundo que representan; también nos permiten anticipar y predecir, hacer deducciones e inferencias, pues actúan como sustitutos de la realidad y, por ello, están constituidas por teoremas en acción; estos son proposiciones que se consideran verdaderas. La conceptualización de lo real requiere, como primer paso, la representación de esa realidad, lo que hace que podamos aprehenderla de modo inmediato; pero se necesita atribuirle un significado y ese significado se adquiere en la situación.

Vergnaud (1983) establece una relación entre las situaciones y los esquemas; la situación dispara las representaciones, de tal modo que esas representaciones activan cognitivamente esquemas que se ponen en juego y, al mismo tiempo, los condicionan.

Un esquema es la organización invariante de la conducta e incluye, invariantes operatorios (conceptos y teoremas en acción). Una vez construido un esquema, el sujeto lo usa, asimilando as situaciones de una determinada clase, es decir situaciones parecidas. Pero ante una situación nueva necesita un mecanismo que le permita aprehenderla, captar esa nueva situación y hacerle frente; ese mecanismo es una representación que puede hacer que el sujeto se la explique y pueda predecir. Una vez que esa nueva situación deja de ser nueva, cuando se le presenta repetidamente, el individuo adquiere dominio sobre esta clase de situaciones; con lo que genera una organización invariante de su conducta y eso es un esquema.

Se puede afirmar que la representación es un conjunto de esquemas en los cuales se organizan la acción, la conducta y la actividad. Así, la actividad misma es producto de la acción y de la actividad; además, hace posible una cierta simulación de lo real, y por lo tanto la anticipación. En los esquemas se manifiesta la primera expresión de los conceptos que organizan la actividad. En la solución de problemas, el alumno analiza la solución posible y, de esa forma, identifica los esquemas que le permiten comprender el problema y encontrar la solución. Esa comprensión del problema, le otorga el significado, y este significado se encuentra mediante las reglas de acción que conducen a identificar de qué tipo de problema se trata y cuáles son las variables conocidas y desconocidas; en la comprensión se encuentra implícita la solución, la acción del alumno que da significado al problema y la acción que da lugar a una solución constituyen la representación, a su vez constituida por estos dos tipos de esquemas.

Los esquemas de solución refieren comportamientos, razonamientos, adaptaciones y modificaciones en el planteamiento del problema; por ello se clasifican en esquemas algorítmicos, que implican el uso de los algoritmos con su respectiva simbolización y procedimiento convencional para darle solución por otro lado, los esquemas no algorítmicos utilizan simbolización espontánea para la solución.

La simbolización revela el uso de símbolos y signos que sirven como herramientas en el proceso de pensamiento, de la misma forma en que se utilizan para comunicar experiencias o conocimientos conceptuales. En la simbolización se identifican dos formas:

1) La espontánea, donde las invariantes operacionales utilizan símbolos genéricos (dibujos, trazos, objetos, etc.).

2) La convencional, donde los invariantes son simbolizados mediante notaciones convencionales de un algoritmo.

Desde esta perspectiva el proceso de solución de un problema va vinculado al de su representación en el proceso de representación puede utilizar símbolos convencionales o símbolos no convencionales; el proceso esté constituido por dos procesos que actúan de forma simultánea; un proceso se refiere a identificar las acciones que conducen a la solución y le dan significado al problema y la representación del problema que conduce a la solución.

La simbolización convencional involucra la escritura numérica. El número es un concepto, que en nuestro contexto hace uso del sistema de numeración decimal para su escritura. El sistema de numeración es un soporte de la conceptualización, sin el cual será muy difícil hacer la notación de grandes números. Durante los dos primeros grados de la escuela primaria, se hacen las primeras adquisiciones de las estructuras numéricas, de tal forma que la escritura del numero esté íntimamente relacionada al número, de tal forma que en ocasiones se confunden uno con el otro.

3.2.2 Relevancia didáctica de la Teoría de los Campos Conceptuales

Esta teoría permite visualizar el aprendizaje de las operaciones como un proceso largo y lento en el cual el sujeto construye los conceptos a partir de las diferentes facetas analizadas en cada situación presentada.

Al trabajar desde la perspectiva de la Teoría de los Campos Conceptuales, se trabaja con la resolución de problemas, al mismo tiempo que se pueden desarrollar secuencias de enseñanza que permitan abordar los diferentes aspectos de los conceptos matemáticos.

También permite estimular el desarrollo de esquemas para resolver problemas dentro de un mismo campo conceptual. Es decir, que él niño logre identificar el sentido de cada situación para luego utilizarla como un esquema ante situaciones del mismo tipo (lo que se denomina clases de problemas).

El estudio de los problemas en el aprendizaje de las estructuras multiplicativas puede partir de marco teórico de Vergnaud. Ya que para él son las situaciones las que dan sentido al concepto, los invariantes forman el significado y las representaciones su significante. De ahí, que, como sugiere Vergnaud (2003), es preciso identificar las situaciones adecuadas para adquirir un campo conceptual, así como los diferentes tipos de problemas que pueden ser propuestos a los alumnos. Implica también el estudio de los diferentes procedimientos y representaciones simbólicas que el alumno utiliza. Esta teoría brinda los aportes necesarios para identificar el proceso de construcción de un campo conceptual, así como las dificultades a las que se enfrenta el alumno para su adquisición.

CAPÍTULO 4

MÉTODO

En este capítulo se describe el método utilizado en el presente trabajo. Inicialmente se hace referencia al tipo y corte del estudio que se utilizó, la población que participó y el escenario; posteriormente se describen las etapas en que se llevó a cabo incluyendo la descripción, aplicación y la propuesta de análisis de los datos.

4.1 Tipo de estudio

El tipo de estudio es descriptivo y explicativo, pues busca especificar las características que presentan los niños de 5º de primaria de una escuela pública del Distrito Federal, en cuanto a las dificultades que presentan en la adquisición del concepto de división y multiplicación en los diferentes modelos matemáticos.

Los estudios descriptivos según Hernández, Fernández y Baptista (2006) buscan especificar propiedades, características y rasgos importantes de cualquier fenómeno que se analice. En este tipo de estudio se eligen una serie de cuestiones para recopilar información y poder describirlas. En el caso del presente trabajo lo que se recopiló en primer término fueron los conocimientos previos que tenían los alumnos con respecto de los problemas de estructura multiplicativa en los modelos matemáticos funcional y cardinal en sus sub-categorías de esquema rectangular y combinatoria, así como sobre las reglas del sistema de numeración decimal, esto se hizo a través de dos cuestionarios diagnósticos y entrevistas clínicas individuales, por último se aplicó un cuestionario final para recopilar datos acerca de los nuevos conocimientos de los alumnos, lo anterior con el fin de poder describir la evolución de las ideas matemáticas trabajadas en el programa de intervención.

Los estudios explicativos no se limitan a la descripción del fenómeno o de conceptos, sino que pretenden establecer causas del fenómeno. En otras palabras centran su atención en explicar por qué ocurre el fenómeno y en qué condiciones se manifiesta o en qué se relaciona con otras variables (Hernández, et all, 2006); en este caso lo que se pretendió fue explicar cómo los diferentes modelos matemáticos influyen en el aprendizaje de los problemas de estructura multiplicativa y cómo las dificultades que presentan los alumnos al momento de enfrentarse a estos tienen relación con la forma en la que se presenta el problema en su contexto específico.

El estudio es de corte cualitativo, pues asume los fenómenos que ocurren durante la enseñanza y el aprendizaje como un conjunto de diversas variables a considerar desde una visión más dinámica. Se propone comprender los procesos, significados y la naturaleza social del proceso, en este caso los procesos y significados que los estudiantes elaboran alrededor de los problemas de estructura multiplicativa, específicamente con los problemas de división.

Los estudios de corte cualitativo suelen más flexibles, no siguen un proceso de forma rígida, sino que se puede ir modificando según las demandas de la investigación. Suelen comenzar examinando el mundo social y posteriormente desarrollan una teoría en la que se pueda fundamentar el fenómeno encontrado.

La mayoría de estos estudios no pretenden probar hipótesis, sino que éstas se van generando durante el proceso de la investigación, su interés se centra en las interacciones entre individuos o grupos. Por lo que los datos recolectados son descripciones detalladas de situaciones, eventos, personas, interacciones y conductas observadas.

La investigación cualitativa se fundamenta en una perspectiva interpretativa, es decir, busca comprender el significado de las acciones, en este caso, de los niños que participaron en este estudio.

Es importante mencionar que en este tipo de estudios no se pretende hacer una generalización de los fenómenos, pues lo que busca es describir y explicar las características de una población específica.

Por otra parte, permite la participación del investigador de una forma más cercana, es decir, permite la interacción del investigador con el fenómeno a estudiar.

Con base en todo lo anterior se optó por este tipo de estudio para el presente trabajo, pues proporciona una mirada global del fenómeno de los procesos de enseñanza y aprendizaje y además permite describir los procesos que se llevan a cabo dentro del salón de clases.

4.2 Población

Participaron del estudio seis niños de 5o grado de una escuela primaria del Distrito Federal con edades entre los 10 y los 11 años. En principio se aplicaron veinticinco cuestionarios de escritura numérica y veinticinco de problemas de estructura multiplicativa, de los cuales fueron seleccionados seis niños de acuerdo al resultado obtenido en la evaluación inicial. El criterio de selección de la muestra fue de acuerdo a los diferentes niveles de conceptualización matemática obtenido en los dos cuestionarios iniciales aplicados: dos niños con nivel de conceptualización matemática alta, dos niños con nivel de conceptualización matemática mediana, dos niños con nivel de conceptualización matemática baja.

4.3 Escenario

La investigación se realizó en el Centro de Educación Preescolar y Primaria del Sindicato de Trabajadores de la UNAM (CEPP-STUNAM), que se encuentra ubicado en la Colonia Santo Domingo perteneciente a la Delegación Coyoacán.

Se trata de un edificio de dos pisos pintado de color amarillo con azul. En la planta baja se encuentran los baños, la dirección, una bodega, la caseta de vigilancia, el área de juegos y los salones de preescolar, el salón de música y el de computación y al fondo, el patio de recreo, donde llevan a cabo la clase de deportes. En el segundo piso se encuentran los salones de primaria. El estudio se llevó a cabo en el salón de usos múltiples ubicado en la planta baja de la escuela.

La escuela atiende a los hijos de los trabajadores que se encuentran afiliados al sindicato de la UNAM, quienes en su mayoría tienen una clase social media y a pesar de que es una escuela incorporada a la Secretaría de Educación Pública presenta todas las características de una escuela pública, ya que no se pagan colegiaturas, el horario es de ocho de la mañana a dos de la tarde.

4.4 Instrumentos

4.4.1 Descripción de los instrumentos

El diseño de los instrumentos está basado en las investigaciones realizadas con los problemas de estructura aditiva, específicamente el concepto de multiplicación y división en los diferentes modelos matemáticos, y las investigaciones realizadas sobre la adquisición de las reglas del sistema de numeración decimal.

Así mismo se toma en cuenta la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (1994), y el constructo de Zona de Desarrollo Próximo (ZDP) tomado de la teoría socio-histórico-cultural. Este constructo sirvió de base para el diseño de las tres etapas del estudio. En la primera etapa que corresponde a la aplicación de los cuestionarios iniciales sobre el sistema de numeración decimal y los problemas de estructura aditiva se utiliza la idea de Zona de Desarrollo Real o actual que es entendida como lo que los niños pueden hacer solos y sin ayuda, posteriormente la segunda etapa del estudio que corresponde al programa de intervención psicopedagógico, hace énfasis en la idea de zona de desarrollo próximo o potencial, en el entendido que tanto la participación de la investigadora, la estructura y el diseño de las actividades propuesta en el programa de intervención potencializan las capacidades cognitivas de los niños guiadas por un individuo más experto, que en este caso, pudo ser la investigadora o la interacción entre pares de niños. Finalmente, en la última parte del estudio, cuestionario final, se evalúa si la ZDA inicialmente identificada cambió o no, y de qué forma, mediante el programa de intervención, es decir, si la ZDP se transformó en ZDA.

4.4.1.1 Cuestionarios iniciales.

El primer cuestionario (que se muestra en el anexo 1) de escritura numérica explora algunas ideas sobre el sistema de numeración decimal, como se puede apreciar en la tabla no. 2.

Tabla No. 2. Cuestionario Sistema de Numeración Decimal

No.	Contenido matemático	Solicitud de la pregunta
1	Numeral del 1 al 100	Se le solicita al niño que observando el cuadro del numeral del 1 al 100, cuente del 1 al 100.
2	Escritura de números	Se solicita al niño anote los números que se le dictan.
3	Nombres de números	Se le solicita al niño que escriba los nombres de los números de la lista.
4	Identificar antecesor y sucesor	Se solicita al niño que coloque el antecesor y sucesor de los números que se le muestran.
5	Secuencias de números en orden ascendente	Se solicita al niño que ordene los numérales de menor a mayor.
6	Secuencias de números en orden descendente	Se solicita al niño ordene los numerales en orden descendente.

El segundo cuestionario inicial (Anexo 2) explora tres modelos matemáticos (funcional, cardinal en sub-categoría de esquema rectangular y cardinal en sub-categoría de combinatorias) los cuales se especifican a continuación en la tabla no. 3:

Tabla No. 3. Cuestionario inicial de estructura multiplicativa
Modelos matemáticos: Funcional, Cardinal en esquema rectangular y cardinal en combinatorias

No. de pregunta	Idea matemática	Solicitud de la pregunta
1	Modelo funcional Multiplicación por proporcionalidad directa	Cantidad total de dulces y de bolsas 30 niños, 10 dulces por bolsa.
1.1	Modelo funcional Multiplicación por proporcionalidad directa	Cantidad total de dulces y de bolsas 75 niños, 10 dulces por bolsa
1.2	Modelo funcional Multiplicación por proporcionalidad directa	Cantidad total de dulces y de bolsas 197 niños, 10 dulces por bolsa.
2	Modelo funcional Idea de reparto	Cantidad total de dulces que le tocan a cada niño. 30 niños, 120 dulces a repartir.
3	Modelo cardinal Idea de esquema rectangular	Cantidad de mosaicos de cada color que hay que pegar. 620 mosaicos 4 colores diferentes
4	Modelo cardinal Idea de esquema rectangular	Número total de soldados que hay en el desfile, 30 por fila en 25 hileras.
5	Modelos cardinal Idea de combinatoria	Número total de combinaciones que se pueden hacer con 5 pantalones, 3 sombreros y 4 moños.
6	Modelos cardinal Idea de combinatoria	Número total de camisas que se tienen para hacer 45 combinaciones con 5 faldas.

Cada uno de los modelos matemáticos contextualiza la resolución de los problemas, en su caso el modelo funcional muestra un número estado que por medio de un operador se convierte en otro número estado, trabajando la idea de reparto siendo ésta la más común dentro de los problemas de división y la proporcionalidad directa en la multiplicación. El modelo cardinal en la idea de esquema rectangular muestra cómo cada una de las variables presentadas se pueden reconocer en la representación rectangular y la combinatoria presenta la conjunción de los objetos presentados en un número determinado de posibilidades.

4.4.1.2 Intervención psicopedagógica (anexo 6): La intervención psicopedagógica se hizo con base en el constructo de Zona de Desarrollo Próximo (ZDP) y la propuesta hecha por Cantero (2003), quien da una serie de ayudas para la resolución de problemas, dichas ayudas son:

- Renunciación oral o escrita del problema, con lo cual se pretende explicitar la estructura del problema. La ayuda cosiste en volver a enunciar el problema de manera que sea más comprensible para el alumno.

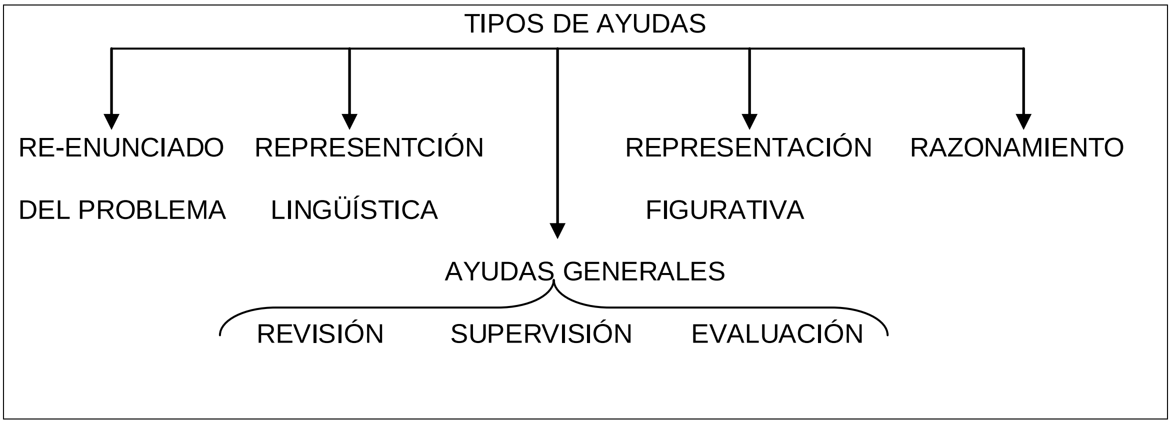
- Representación lingüística del problema, consiste en articular el enunciado del problema en función de lo que se conoce (datos) y de lo que no se conoce (pregunta), partiendo de las ayudas textuales dadas.

- Representación figurativa, se pretende que el alumno represente gráficamente el problema mediante figuras geométricas, dentro de las cuales debe colocar lo que sabe y lo que no sabe, en base a la información adquirida a partir de las ayudas dadas. Lo que pretende es que el alumno descubra los distintos conjuntos, la estructura semántica del problema, su categoría y tipo de problema. De esta forma el alumno tiene que aprender a discriminar las categorías de problemas (Isomorfismo de medida, comparación, escalares, producto cartesiano o combinatorias)

- Razonamiento, consiste en tomar la decisión sobre qué tipo de operación hay que realizar.

- Ayudas generales de evaluación, supervisión y revisión de lo realizado en cada una de las fases anteriores.

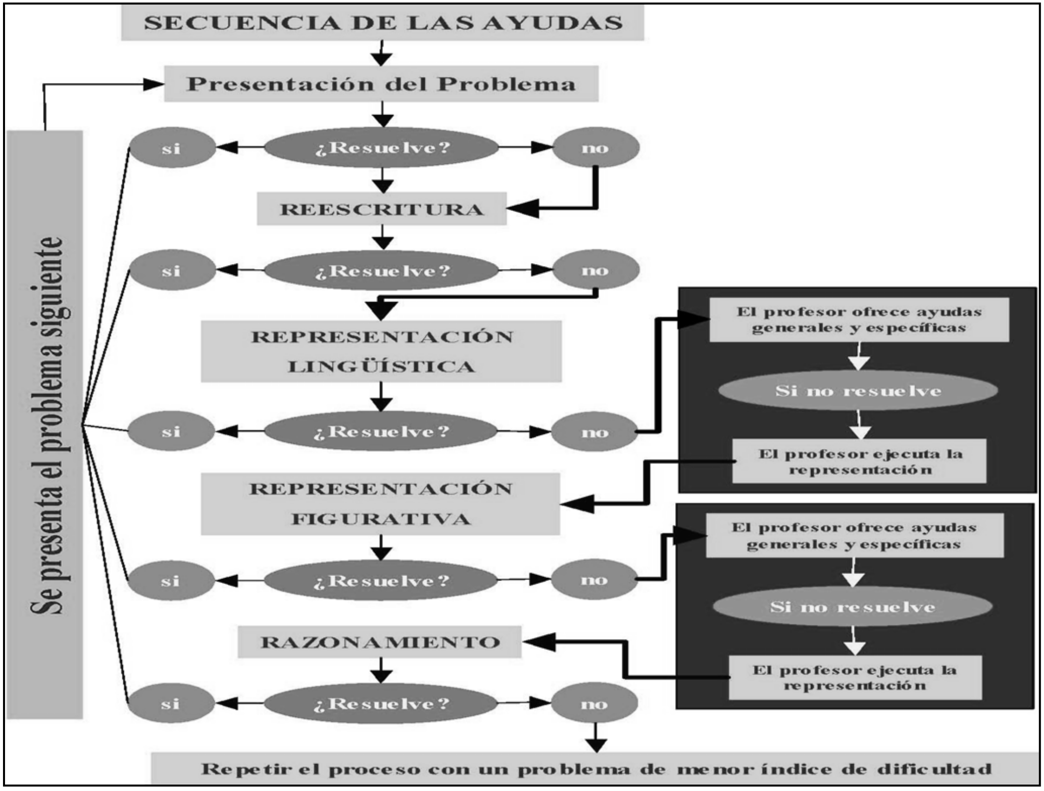
Figura número 4. Tipos de ayuda en resolución de problemas de Cantero (2003)



Estos tipos de ayuda llevan una secuencia al momento de trabajar con los niños, en primer término se le presenta el problema al niño, la investigadora tendrá la tarea de verificar si el niño resuelve o no el problema inicialmente, en caso de que no pueda hacerlo se le reestructura, es decir, se le explica de otra forma, en caso de no resolverlo, se hace una representación lingüística, que como se dijo, consiste en plantear el problema en función de lo que se conoce o nos dice el problema de forma textual, si aun con esto, no puede resolver el problema se plantea una representación figurativa, en está la investigadora o el profesor utilizando figuras como óvalos y rectángulos por decir algo, hace una representación de lo que se conoce y lo que no se conoce, una vez hecho esto se pasa al razonamiento en donde el profesor ofrece ayudas específicas y ejecuta el problema.

Lo anterior se muestra en el cuadro siguiente tomado de Cantero (2003)

Figura No. 5. Secuencias de ayudas. Tomado de Cantero (2003)



Con esto lo que se pretende es ir observando cuáles son los puntos débiles del alumno, para así poder escoger las ayudas que le pueden ser más útiles, sin dejar de lado que el niño pueda ir dándose cuenta de su propio proceso y de la forma en la cual puede ir resolviendo el problema planteado.

En virtud de que este tipo de ayudas son flexibles al momento de su aplicación, en el programa de intervención realizado se utilizaron los niveles de ayuda de reescritura, representación lingüística, razonamiento y supervisión; ya que los alumnos no necesitaron la representación figurativa y en ocasiones, dependiendo la tarea a realizar y la sesión, sólo se utilizaron una o dos ayudas.

Por último hay que mencionar que el programa de intervención versó sobre el tema de problemas de estructuras multiplicativas tanto de multiplicación como de división en el modelo cardinal con la idea de combinatoria.

4.4.1.3 Cuestionario final (Anexo 3): Explora la idea de combinatoria dentro del modelo cardinal, consta de 5 preguntas, 2 correspondientes a división, 2 a multiplicación y 1 que para su resolución utiliza ambas operaciones.

Tabla No.6. Cuestionario Final. Estructuras multiplicativas
Combinatorias

No de pregunta	Modelo matemático	Solicitud de la pregunta
1	Cardinal: Combinatorias	¿De cuántas formas se puede vestir Paulina? Con 4 faldas, 6 blusas, 3 pares de zapatos y 9 listones?
2	Cardinal: Combinatorias	¿Cuántas niñas habrá en la fiesta? Hay 50 niños y se pueden formar 4500 parejas diferentes.
3	Cardinal: Combinatorias	¿Cuántas blusas tendrá? Si puede hacer 45 combinaciones con 9 pantalones.
4	Cardinal: Combinatorias	¿Cuántas colas tendrá? Si tiene 10 pares de patas y 13 cabezas de animales diferentes.
5	Cardinal: Combinatorias	¿Cuántas combinaciones puede hacer? Con 5 pantalones, 3 sombreros y 4 moños.

Para los problemas de multiplicación lo que se busca en cuanto a idea matemática es que los alumnos encuentren el número total de combinaciones que pueden hacer conociendo los conjuntos de objetos diferentes que tienen y en lo que respecta a los problemas de división lo que se busca es el número de objetos que se tiene en uno de los conjuntos, conociendo el número de objetos que se tienen en el otro conjunto y el número de combinaciones totales que se pueden hacer.

4.5 Etapas del estudio

El estudio se divide en cinco etapas:

- Primera etapa del estudio: Diseño de los instrumentos de investigación. Cuestionario Inicial, programa de intervención y cuestionario final

- Segunda Etapa: Aplicación del cuestionario inicial y entrevista clínica individual.

- Tercera Etapa: Aplicación del programa de intervención psicopedagógico.

- Cuarta Etapa: Aplicación del cuestionario final.

- Quinta Etapa: Análisis de los resultados.

La secuencia que se siguió para la aplicación de las etapas:

1) APLICACIÓN DE LOS CUESTIONARIOS INICIALES

TEMA	DIRIGIDO A	PROPÓSITO	DURACIÓN APROXIMADA
División de acuerdo al modelo funcional y cardinal. Exploración sobre las reglas del Sistema de Numeración Decimal	Estudiantes de 5to grado de primaria	Evaluar el nivel de Zona de desarrollo real en la que se encuentran los estudiantes en lo concerniente a los modelos de división y sobre las Reglas del SND.	3 sesiones de 1hr por cuestionario

2) APLICACIÓN DE LA ENTREVISTA CLÍNICA INDIVIDUAL

TEMA	DIRIGIDO A	PROPÓSITO	DURACIÓN APROXIMADA
División y multiplicación de acuerdo al modelo cardinal en idea de combinatoria, esquema rectangular y modelo funcional.	Estudiantes de 5to grado de primaria	Conocer las estrategias de resolución de problemas del concepto de división explorando el modelo cardinal en idea de combinatoria, esquema rectangular y modelo funcional.	Una sesión de 1 hora aproximadamente.

3) PROGRAMA DE INTERVENCIÓN PSICOPEDAGÓGICA

TEMA	DIRIGIDO A	PROPÓSITO	DURACIÓN APROXIMADA
División y multiplicación de acuerdo al cardinal en la idea de combinatoria.	Estudiantes de 5to grado de primaria	Enseñar la idea de combinatoria para la resolución de problemas de tipo multiplicativo.	6 sesiones de 1 hora y media cada una

4) APLICACIÓN DE LOS CUESTIONARIOS FINALES

TEMA	DIRIGIDO A	PROPÓSITO	DURACIÓN APROXIMADA
División y multiplicación de acuerdo al cardinal en idea de combinatoria.	Estudiantes de 5to grado de primaria	Evaluar los avances que lograron los niños en términos de aprendizaje después de la aplicación del programa de intervención.	Una sesión de 1hr

5) APLICACIÓN DE LA ENTREVISTA CLÍNICA INDIVIDUAL

TEMA	DIRIGIDO A	PROPÓSITO	DURACIÓN APROXIMADA
División de acuerdo al modelo funcional y cardinal.	Estudiantes de 5to grado de primaria	Conocer si el niño tuvo cambios en las estrategias de resolución de problemas.	Una sesión de 1 hora

4.6 Consideraciones del estudio piloto

Antes de realizar el estudio principal, se hizo un estudio piloto con doce niños de una escuela pública del Distrito Federal ubicada al sur de ciudad de México, tres niños de 4º grado, tres de 5º grado y tres de 6º grado, con el fin de decidir con qué grado trabajar el estudio principal. Además de verificar la pertinencia de los instrumentos aplicados en lo que respecta al contenido explorado, situaciones, lenguaje y grado de dificultad de los instrumentos.

Se aplicó el cuestionario de escritura numérica (mismo que se utilizó en el estudio principal) (Anexo1), un cuestionario de problemas de división y multiplicación en el modelo funcional con la idea de reparto (Anexo 4) y un cuestionario de problemas de multiplicación y división que exploraba los cinco modelos matemáticos (funcional, cardinal, de medida, numérico y lineal) (Anexo 5).

En el caso de los alumnos de cuarto grado no presentaron dificultades con el cuestionario de multiplicación y división en el modelo funcional trabajando la idea de reparto, pero el cuestionario exploratorio de los diferentes modelos matemáticos resultó demasiado difícil para ellos, por lo que se decidió no trabajar con este grado.

Por otro lado, para los alumnos de 6º grado los tres cuestionarios aplicados resultaron fáciles de resolver en términos generales, situación por la cual no se trabajó con este grado.

Los alumnos de 5º grado presentaron dificultades al resolver los tres cuestionarios (escritura numérica, modelo matemático funcional explorando la idea de reparto y el cuestionario exploratorio de los cinco modelos matemáticos), pero a diferencia de los alumnos de 4º grado sí resolvieron algunos de los problemas, por lo que se decidió trabajar con ellos.

Así mismo los modelos en los cuales presentaron mayor dificultad fueron el modelo cardinal en la sub-categoría de esquema rectangular y de combinatorias y en el modelo funcional, por lo que para el estudio principal se trabajó con estos tres modelos.

Cabe mencionar que el estudio principal no se trabajó con los alumnos del estudio piloto, ya que no se otorgó el permiso por parte de la Secretaría de Educación Pública, por lo que se realizó en la escuela que se describió en párrafos anteriores, y en virtud de esto se tuvieron que hacer cambios tanto en los cuestionarios, como en el programa de intervención.

CAPÍTULO 5

RESULTADOS DE LA PRIMERA ETAPA DEL ESTUDIO: CUESTIONARIO INICIAL SEGUIDO DE ENTREVISTA CLÍNICA INDIVIDUAL

En este capítulo se describen los resultados de la primera etapa del estudio correspondiente al cuestionario inicial de problemas de estructura multiplicativa (multiplicación y división) y de la entrevista clínica individual aplicada a los niños que participaron del estudio. El capítulo se inicia con una descripción sobre el cuestionario inicial, posteriormente, se describe la aplicación del instrumento seguido de la entrevista clínica individual, y se finaliza con el análisis de los resultados.

5.1 Descripción del cuestionario inicial de problemas de estructura multiplicativa: multiplicación y división

El cuestionario diagnóstico se realizó con base en tres modelos matemáticos: modelo funcional, cardinal en la sub-categoría de esquema rectangular y de combinatorias. Este cuestionario consistió en ocho preguntas, que se describen a continuación:

Las tres primeras preguntas pertenecen al modelo funcional, cabe decir que este modelo es el más explorado en las escuelas primarias y está presente en los planes y programas de estudio de educación primaria, así como también en los libros de texto gratuitos de la Secretaría de Educación Pública (SEP). Las otras dos preguntas siguientes corresponden al modelo cardinal en la sub-categoría de esquema rectangular y las dos últimas corresponden al modelo cardinal en la sub-categoría de combinatorias.

En las tablas que a continuación se presentan, se describen las ideas matemáticas de cada una de las preguntas exploradas en el cuestionario inicial, así como la solicitud de la pregunta del problema. El cuestionario completo se puede observar en el anexo 2.

Tabla No.7 Cuestionario inicial de estructura multiplicativa
Modelos matemáticos: Funcional

No. de pregunta	Idea matemática	Solicitud de la pregunta
1	Modelo funcional Multiplicación por proporcionalidad directa	Cantidad total de dulces y de bolsas 30 niños, 10 dulces por bolsa.
1.1	Modelo funcional Multiplicación por proporcionalidad directa	Cantidad total de dulces y de bolsas 75 niños, 10 dulces por bolsa
1.2	Modelo funcional Multiplicación por proporcionalidad directa	Cantidad total de dulces y de bolsas 197 niños, 10 dulces por bolsa.
2	Modelo funcional Idea de reparto	Cantidad total de dulces que le tocan a cada niño. 30 niños, 120 dulces a repartir.

Cada uno de los modelos matemáticos contextualizan la resolución de los problemas, en su caso el modelo funcional lo que muestra es un número estado que a través de un operador se convierte en otro número estado, trabajando la idea de reparto siendo esta la más común dentro de los problemas de división y la proporcionalidad directa en la multiplicación.

Tabla No.8 Cuestionario inicial de estructura multiplicativa
Modelos matemáticos: Cardinal-Esquema Rectangular

No. de pregunta	Idea matemática	Solicitud de la pregunta
3	Modelo cardinal Idea de esquema rectangular	Cantidad de mosaicos de cada color que hay que pegar. 620 mosaicos 4 colores diferentes
4	Modelo cardinal Idea de esquema rectangular	Número total de soldados que hay en el desfile, 30 por fila en 25 hileras.

Por su parte el modelo cardinal en la idea de esquema rectangular lo que muestra como cada uno de los conjuntos presentados se pueden reconocer en la representación rectangular.

Tabla No.9 Cuestionario inicial de estructura multiplicativa
Modelos matemáticos: Cardinal-Combinatoria

No. de pregunta	Idea matemática	Solicitud de la pregunta
5	Modelos cardinal Idea de combinatoria	Número total de combinaciones que se pueden hacer con 5 pantalones, 3 sombreros y 4 moños.
6	Modelos cardinal Idea de combinatoria	Número total de camisas que se tienen para hacer 45 combinaciones con 5 faldas.

Por último, la combinatoria presenta la conjunción de los objetos presentados en un número determinado de posibilidades.

5.2 Aplicación del cuestionario inicial

El cuestionario inicial fue aplicado a 25 alumnos de 5º grado de primaria del CEPP-STUNAM, ubicado en la colonia Pueblo de los Reyes en la delegación Coyoacán, en el Distrito Federal.

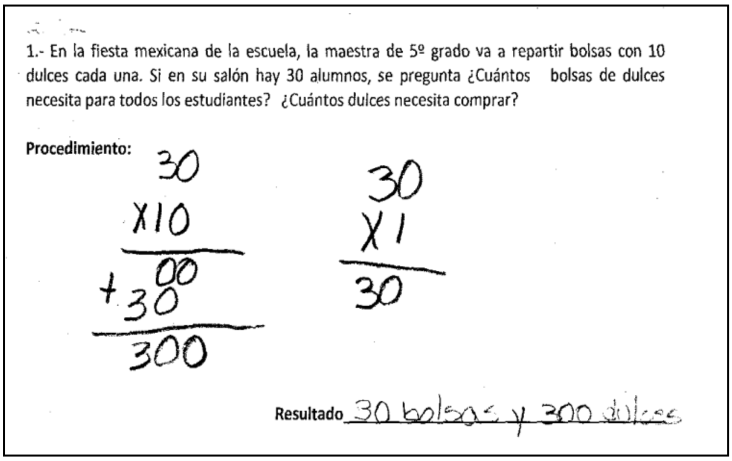
La aplicación de los cuestionarios se realizó en el salón de clase en un horario de 12:00 a 13:00 hrs. Inicialmente, se distribuyó el cuestionario a cada alumno, posteriormente se dieron las instrucciones que consistieron en leer los problemas con atención y resolverlos sin borrar nada, y en caso de requerir material pedirlo a la aplicadora. No se proporcionó ningún tipo de ayuda, pues se buscaba poder determinar la zona de desarrollo real (ZDA) de los niños, es decir, lo que podían hacer solos y sin ayuda.

5.3 Resultados del cuestionario inicial

Los resultados del cuestionario inicial se analizaron mediante tres categorías de análisis como siguen abajo:

Nivel de logro.- Se consideraron tres niveles de logro; alto, medio y bajo. Para clasificar a los alumnos se tomó en cuenta el número de respuestas correctas y el nivel de conceptualización matemática.

> En el nivel de logro alto se encuentran los alumnos que tuvieron de seis a ocho respuestas correctas y que utilizaron operaciones correspondientes a estructuras multiplicativas.



1.- En la fiesta mexicana de la escuela, la maestra de 5º grado va a repartir bolsas con 10 dulces cada una. Si en su salón hay 30 alumnos, se pregunta ¿Cuántos bolsas de dulces necesita para todos los estudiantes? ¿Cuántos dulces necesita comprar?

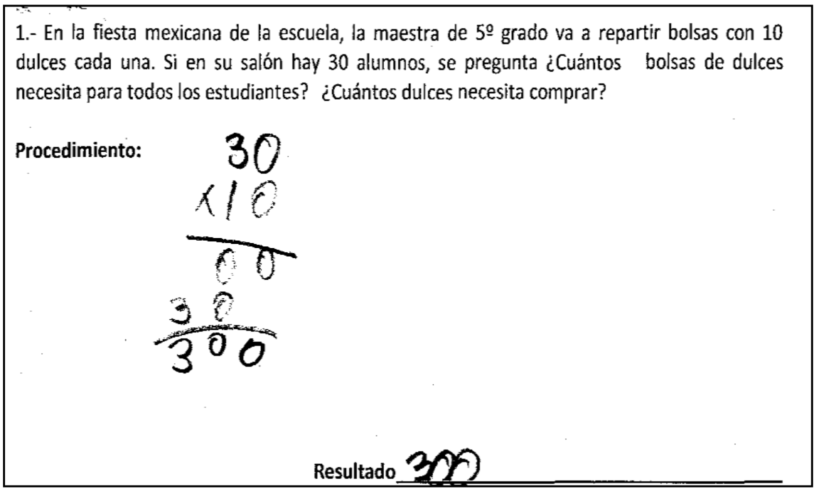
Procedimiento:

30
x10
00
+30
300

30
x1
30

Resultado 30 bolsas y 300 dulces

En nivel de logro medio se encuentran los alumnos que tuvieron de cuatro a cinco respuestas correctas y utilizaron operaciones aditivas en transición a estructuras multiplicativas.



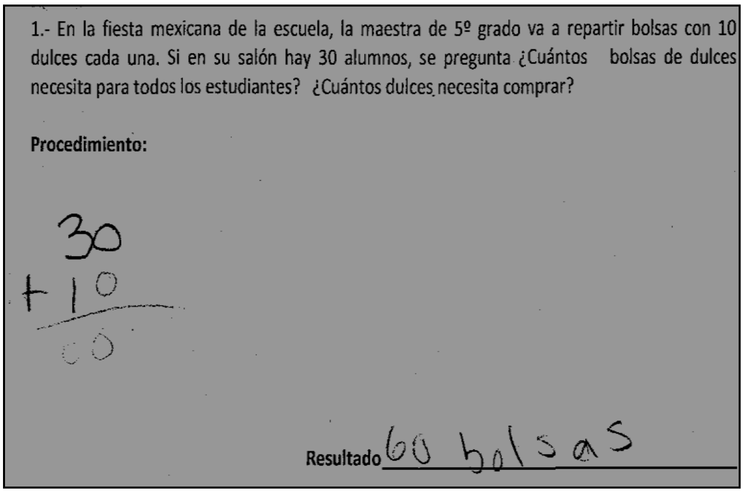
1.- En la fiesta mexicana de la escuela, la maestra de 5º grado va a repartir bolsas con 10 dulces cada una. Si en su salón hay 30 alumnos, se pregunta ¿Cuántos bolsas de dulces necesita para todos los estudiantes? ¿Cuántos dulces necesita comprar?

Procedimiento:

30
x10
00
30
300

Resultado 300

En nivel de logro bajo están los niños que tuvieron menos de cinco respuestas correctas y utilizaron dibujos u operaciones aditivas o usan la idea de partes repetidas de la adición.



1.- En la fiesta mexicana de la escuela, la maestra de 5º grado va a repartir bolsas con 10 dulces cada una. Si en su salón hay 30 alumnos, se pregunta ¿Cuántos bolsas de dulces necesita para todos los estudiantes? ¿Cuántos dulces necesita comprar?

Procedimiento:

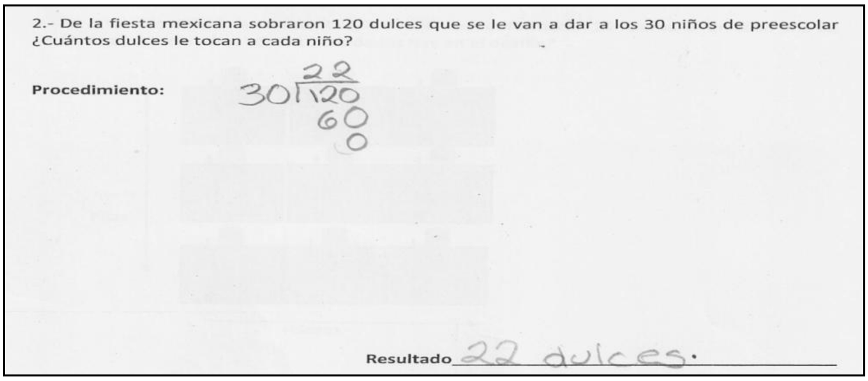
30
+10
60

Resultado 60 bolsas

- **Soporte auxiliar de representación:** recursos aparentemente externos que ayudan en la resolución de los problemas y que apoyan el entendimiento de los niños. Estos fueron:

  - Resuelven el problema con una operación
  - Resuelven el problema, con dibujos
  - Resuelven el problema con cálculo mental.

Operación: Se entiende por operación, el algoritmo ya sea de suma, resta, multiplicación o división.



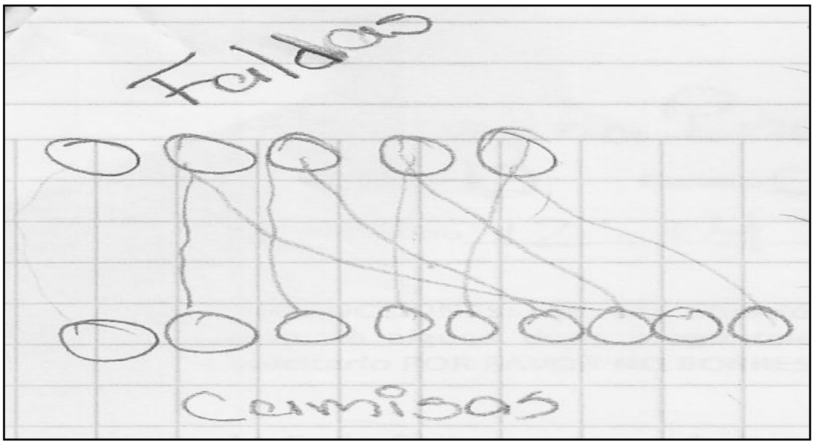
2.- De la fiesta mexicana sobraron 120 dulces que se le van a dar a los 30 niños de preescolar ¿Cuántos dulces le tocan a cada niño?

Procedimiento:

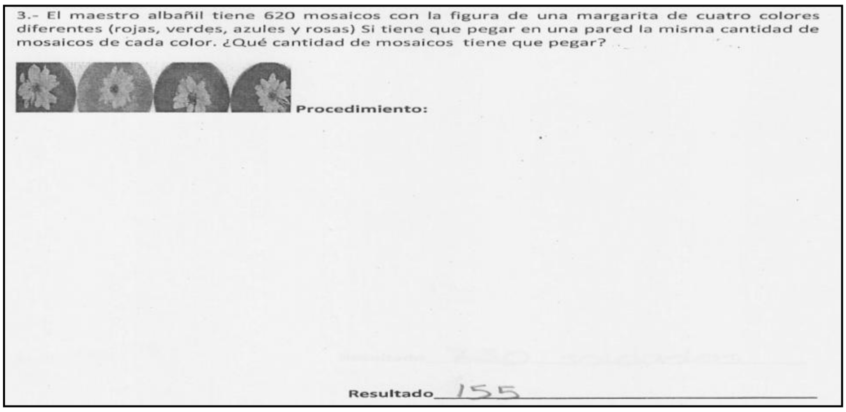
22
30⟌120
60
0

Resultado 22 dulces.

Dibujo: Por dibujo se toma en consideración cualquier representación gráfica que excluya al algoritmo; como los diagramas.



Cálculo mental: El problema es resuelto mentalmente, es decir, se resuelve la operación por medio de una representación mental, sin que ésta se haga con lápiz y papel o calculadora.



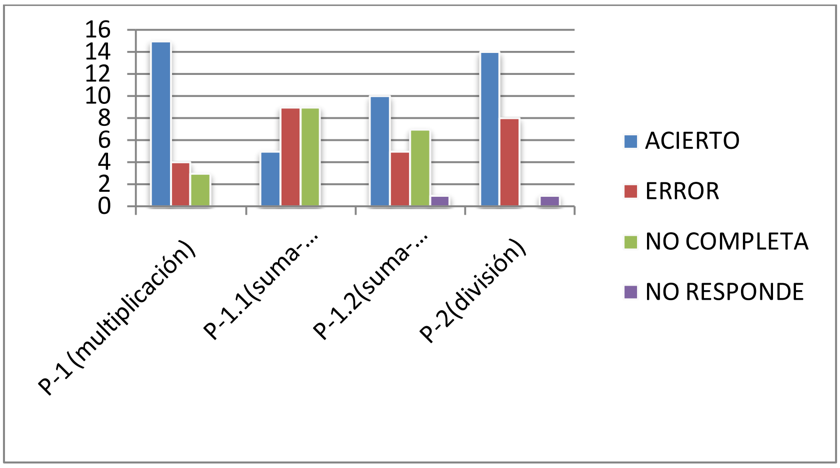
3.- El maestro albañil tiene 620 mosaicos con la figura de una margarita de cuatro colores diferentes (rojas, verdes, azules y rosas) Si tiene que pegar en una pared la misma cantidad de mosaicos de cada color. ¿Qué cantidad de mosaicos tiene que pegar?

Procedimiento:

Resultado 155

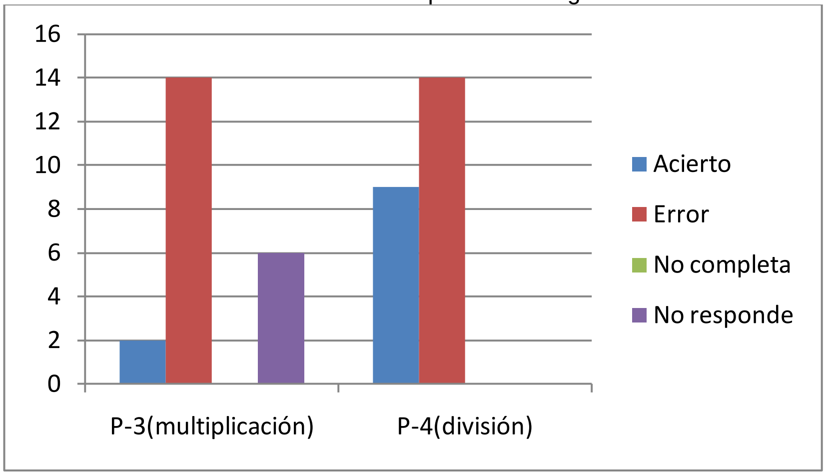
Para presentar los resultados obtenidos se decidió hacerlo mediante gráficas, éstas muestran en primer lugar el número de aciertos, errores (intento de resolver el problema sin la obtención de un resultado satisfactorio), respuestas incompletas o no respondió, por modelo matemático; en primer lugar se muestra el modelo funcional, seguido del modelo cardinal en la sub-categoría de esquema rectangular, para finalizar con el modelo cardinal en la sub-categoría de combinatorias.

Gráfica No.10 Resultados por respuesta Modelo Funcional



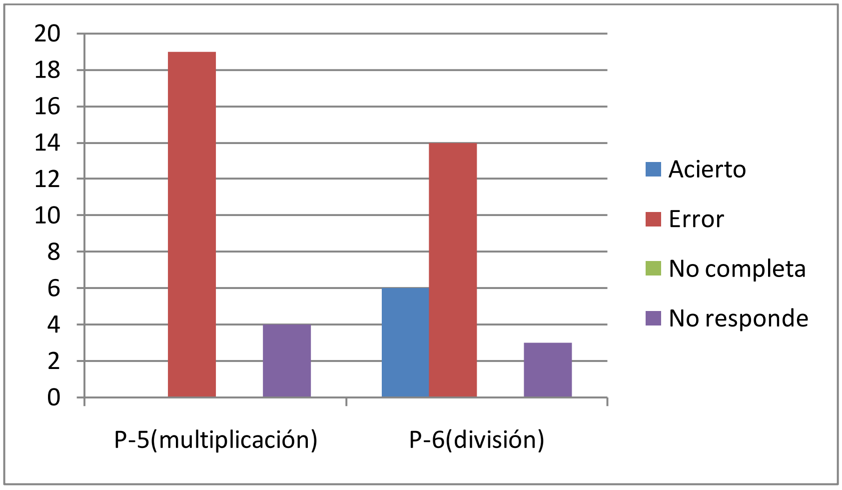
Como se puede verificar en la gráfica anterior el mayor número de aciertos, lo tenemos en el modelo funcional, que si bien en el problema 1.1 la mayoría no completa el procedimiento, pues en primer lugar tenían que sumar y después multiplicar para obtener el resultado. Estos resultados obedecen a que este modelo es el que los niños utilizan con más frecuencia y es el que predomina en los libros de texto de la Secretaría de Educación Pública (SEP) desde los primeros grados; como se puede observar en la mayoría de las lecciones que tienen que ver con el eje temático de los números, sus relaciones y sus operaciones.

Gráfica No.11 Por respuesta
Modelo Cardinal: esquema rectangular



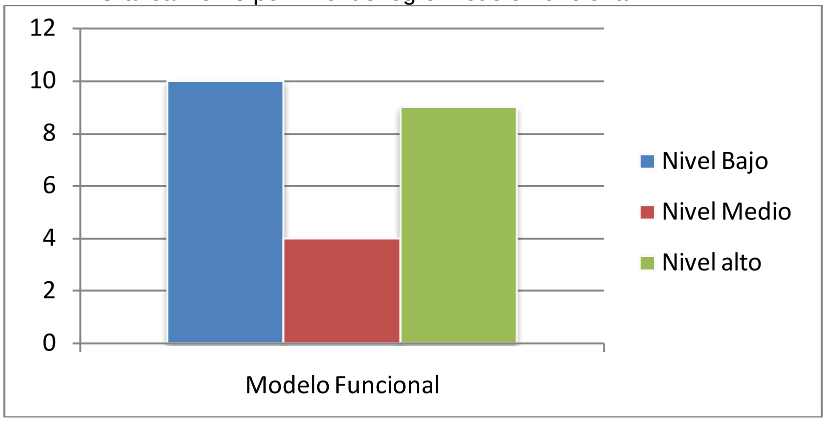
En el modelo cardinal en el sub-tipo de esquema rectangular los alumnos presentaron dificultades, a pesar que este modelo se utiliza como introductorio a los problemas de estructura multiplicativa, como se puede observar en diferentes lecciones de los libros de texto de 2º y 3º grado de primaria. En este modelo la mayoría de los alumnos no pudieron resolver los problemas, esto se puede deber a que dentro de la redacción del problema no se incluyen palabras que les den pistas a los alumnos de que operación utilizar para resolverlo, pues no se utilizan palabras como “repartir”, “tantas veces más que”, “partir”, etc. Brousseau (1986) le llama a esto “variables pertinentes” de un concepto; afirma que los alumnos buscan características dentro del planteamiento del problema que les ayuden a reconocer un problema de multiplicación o división y su resolución.

Gráfica No.12 Por respuesta
Modelo Cardinal: Combinatoria

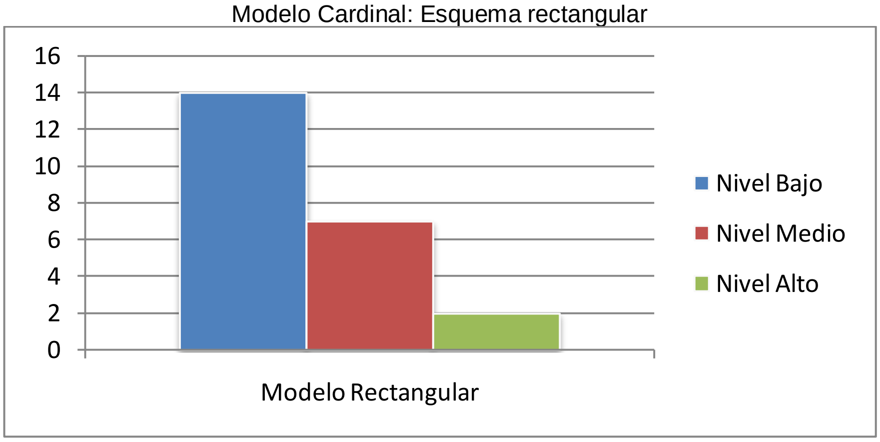


Por último como se puede observar el modelo cardinal en la sub-categoría de combinatoria es donde los alumnos presentan la mayor dificultad, ya que el problema correspondiente a la multiplicación ningún niño logró resolverlo y en la división solo 6 lo hicieron. Las combinatorias al igual que el esquema rectangular tiene un contexto de resolución diferente, el problema como tal no da la opción de poder resolverse con una suma o restas reiteradas, tampoco manejan variables pertinentes y los libros de texto destinan muy pocas lecciones para las combinatorias, mismas que se comienzan a ver en 4º grado y en 5º se introduce el diagrama de árbol para la resolución de este tipo de problemas, por lo que a los alumnos les cuesta trabajo entender como mediante una operación se puede llegar al resultado.

Los resultados de acuerdo al nivel de logro fueron los siguientes:

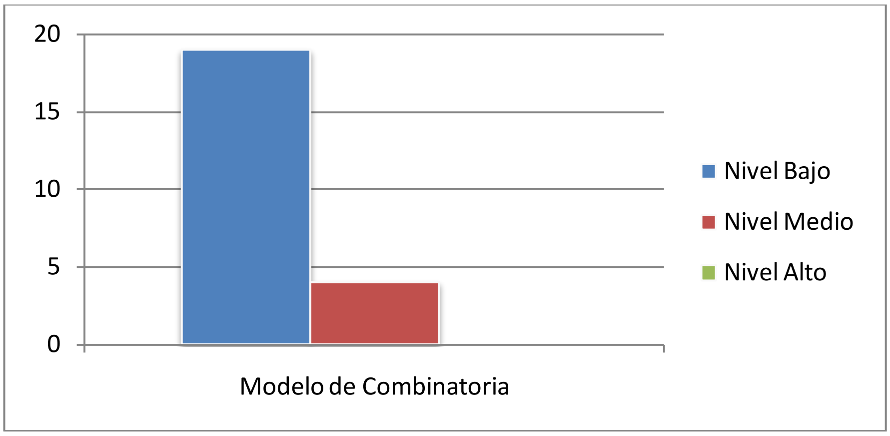

Gráfica No.13 por nivel de logro Modelo Funcional

Como se aprecia en la gráfica presentada, la mayoría de los alumnos se ubican en el nivel bajo, aun y cuando el modelo funcional es el que más practican los alumnos. La dificultad se encontró en que la mayoría de estos casos no completaron el procedimiento; es decir, no hicieron la operación de suma y posteriormente de multiplicación que se requerían para llegar al resultado final. De igual forma otro de los obstáculos para resolver estos problemas es que los alumnos no se saben las tablas de multiplicar por lo que el resultado salió erróneo. Así mismo como se puede ver la diferencia con los alumnos que obtuvieron un nivel alto no es mucha, lo que lleva a reafirmar que este modelo es el que presenta menores dificultades.


Gráfica No.14 por nivel de logro
Modelo Cardinal: Esquema rectangular

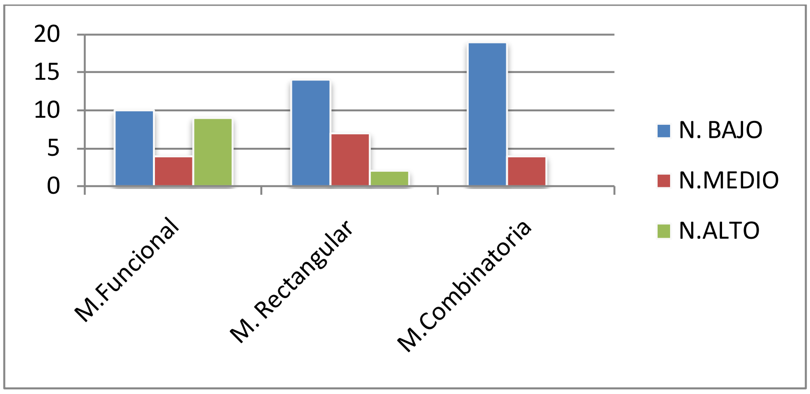
En primer término se puede apreciar que al igual que en el modelo funcional la mayoría de los alumnos obtuvieron el nivel bajo con la diferencia que en el modelo rectangular los alumnos que obtuvieron un nivel medio son significativamente menos. Esto se debe a que, a pesar de que el modelo rectangular se utiliza como introductorio a los problemas de multiplicación, los alumnos no tienen un nivel conceptual que les permita resolver los problemas en el contexto de este modelo, ya que al verse solo durante un breve periodo en 2º y 3º de primaria y únicamente como soporte de representación para poder resolver el algoritmo de la multiplicación, el concepto no ha sido adquirido, pues como anota Vergnaud (1994), la adquisición de un campo conceptual requiere varios años de práctica.

Gráfica No. 15 por nivel de logro
Modelo Cardinal: Combinatoria



El modelo cardinal en la sub-categoría de combinatorias, como se ha venido repitiendo es donde los alumnos tienen la mayor dificultad. Como se puede apreciar, ningún alumno logró un nivel alto, y los que alcanzaron un nivel medio contestaron el problema de división, no así el de multiplicación. Cabe repetir que la idea de combinatoria como la posibilidad de combinar todos los objetos representados en dos conjuntos diferentes, no es una idea con la cual los alumnos hayan trabajado de una forma constante, ya que como se dijo con anterioridad los problemas de combinatoria comienzan a trabajarse en 4º grado de primaria y se retoman en 5º grado. Así mismo la idea de combinatoria es compleja, puesto que se trata de hallar en una primera situación todas las combinaciones posibles, conociendo el número de elementos de los dos conjuntos y en una segunda situación hay que encontrar el número de elementos de uno de los conjuntos, conociendo el otro conjunto y el número total de las combinaciones posibles. Así mismo el contexto del problema de manera general indica el número de combinaciones, pero no utiliza palabras pertinentes que indiquen la operación a realizar.

Gráfica No.16 por nivel de logro
Todos los modelos



La gráfica anterior lo que muestra es una visión global de los tres modelos matemáticos que se han venido trabajando. Se puede ver que el modelo funcional es donde los alumnos presentan menos problemas con relación a los dos modelos siguientes, y que el modelo cardinal en la sub-categoría de combinatorias es en que los alumnos presentaron la mayor dificultad; esto se debe a que como se ha venido repitiendo, es el modelo con el que los alumnos han trabajado menos y durante menos tiempo, por lo que se decidió trabajar el programa de intervención sólo con el modelo cardinal en la sub-categoría de combinatoria, así mismo a petición de la profesora y de la directora de la primaria pues uno de los temas a repasar en 5º grado es la idea de combinatoria que se ve en 4º grado y se introduce el diagrama de árbol para la resolución gráfica de este tipo de problemas.

En cuanto a los soportes de representación utilizados por los alumnos para resolver los problemas del cuestionario inicial tenemos que la mayoría de ellos resuelven con un algoritmo y unos pocos resuelven con cálculo mental y únicamente en los problemas de combinatoria lo hacen mediante dibujos o diagramas.

En el modelo funcional la mayoría de los alumnos utilizaron el algoritmo de la suma, la multiplicación y la división para resolver los problemas, los mínimos lo hicieron con cálculo mental o no respondieron. No se puede obviar que si la mayoría utiliza el algoritmo y ninguno el dibujo, es porque la idea de reparto les es familiar y por lo tanto saben que operación utilizar para resolver los problemas planteados.

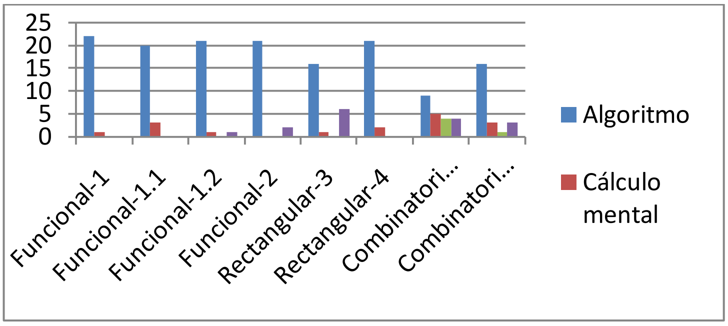
Al igual que en el modelo funcional la mayoría de los niños utilizan el algoritmo de la división o multiplicación para resolver los problemas en el modelo cardinal en la sub-categoría de esquema rectangular, la diferencia radica en que la minoría utiliza cálculo mental y sube el número de alumnos que no responde el problema de multiplicación, a pesar de que como ya se dijo el esquema rectangular se utiliza en los grados de 2º y 3º de primaria para introducir a los alumnos a la multiplicación.

En el modelo de combinatoria los resultados son diferentes a los otros dos modelos (funcional y esquema rectangular), si bien en ambos problemas, es decir, en la multiplicación y en la división, la mayoría de los alumnos utilizó el algoritmo, un mayor número de alumnos utilizó el cálculo mental, el dibujo o bien no respondieron.

La utilización del dibujo se explica a partir de que los problemas de combinatorias son de un mayor nivel de complejidad y los alumnos necesitan material concreto para resolverlos. En este caso lo que los alumnos hicieron fue unir con flechas la ropa correspondiente, pero sin llegar al resultado correcto.

Lo antes expuesto se puede verificar en la siguiente gráfica:

Gráfica No.17 por Soporte de representación
Todos los Modelos



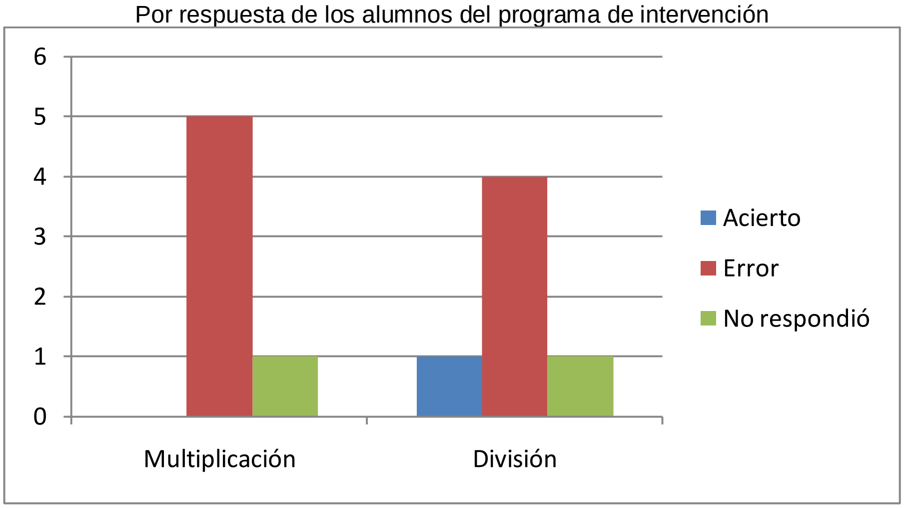
En esta última gráfica se muestra cómo el soporte de representación más utilizado es el algoritmo y como los tres soportes se utilizan en los problemas de combinatoria.

En virtud de que el modelo cardinal en la sub-categoría de combinatoria fue en donde los alumnos presentaron mayor problema y por cuestiones de tiempo y políticas de la escuela primaria en la que se hizo la toma de datos la intervención se realizó únicamente con dicho modelo.

Así mismo los resultados obtenidos en la aplicación del cuestionario inicial sirvieron para escoger a dos niños por nivel de logro y de conceptualización matemática; es decir, se escogieron 2 niños de nivel alto, 2 de nivel medio y 2 de nivel bajo, para la aplicación del programa de intervención.

Los resultados de estos niños únicamente en los problemas de combinatoria son los siguientes:

Gráfica No.18 Problemas de combinatoria
Por respuesta de los alumnos del programa de intervención



A partir de esta gráfica se puede concluir que ni los alumnos de nivel alto lograron resolver el problema de combinatoria referente a la multiplicación y sólo uno logró resolver el de división, lo que confirma lo que se ha venido diciendo a lo largo del presente análisis, que la idea de combinatoria es la más difícil para los alumnos, pues este tipo de problemas los obliga a pensar en términos de estructuras multiplicativas, puesto que no es posible resolverlos con una suma reiterada. Por otro lado, la enseñanza tradicional le da un mayor peso al aprendizaje del algoritmo dejando un poco de lado la comprensión y como menciona Brousseau (1986), la enseñanza de la matemática debe tener un significado que lleve al alumno a la comprensión, por un lado a nivel de semántica, es decir comprender para ser capaz de utilizar los aprendido en diferentes dominios y una comprensión a nivel de sintáctica, que hace que el alumno razone sobre lo aprendido, lo analice y sea capaz de combinarlo con otros saberes. Así mismo como encontró Saiz (1994) en su estudio realizado con alumnos argentinos de 5º y 6º grado de primaria, los alumnos presentan mayor dificultad para resolver problemas de división que no corresponden a la idea de reparto, debido a que el automatismo en el algoritmo lleva al alumno a buscar palabras introductorias en el problema para su resolución, en vez de hacer un análisis del problema y una comprobación del mismo. Por lo que se puede concluir que a los alumnos les cuesta más trabajo el modelo de combinatoria porque no lo comprenden y no pueden trasladar los conocimientos que ya tiene adquiridos a problemas de este tipo.

5.4 Descripción y aplicación de las entrevistas clínicas individuales

Las entrevistas clínicas individuales se aplicaron a tres niños de acuerdo a los resultados obtenidos en el cuestionario inicial. Los niños fueron elegidos por niveles de conceptualización matemática: alto, medio y bajo.

La entrevista se basó en el método clínico de Piaget, que suele identificarse con un método de entrevista verbal, en dónde se realiza una conversación libre con el niño o el alumno, siguiendo el curso de sus ideas sobre la explicación de un problema (Delval, 2001).

Siguiendo las ideas de Juan Delval, se realizó una entrevista semi-estructurada, misma que el autor nos dice que se caracteriza por “preguntas básicas comunes para todos los sujetos, que se van ampliando y complementando de acuerdo con las respuestas de los sujetos para poder interpretar lo mejor posible lo que van diciendo. Las respuestas van guiando el curso del interrogatorio, pero se vuelve a los temas esenciales establecidos inicialmente” (Delval, 2001).

Lo anterior sirvió en el presente trabajo para explorar sobre el pensamiento de los alumnos, en cuanto a la forma en la cual resolvieron los problemas planteados en el cuestionario inicial, pues permite conocer el nivel de conceptualización del alumno.

Las preguntas que se utilizaron en la entrevista clínica fueron:

1. ¿Cómo resolviste este problema? (haciendo referencia a cada uno de los problemas en los tres modelos matemáticos)
2. ¿Cómo sabes que se resuelve de esta forma y no de otra?
3. Puedes hacerlo de otra forma, ¿Cuál sería?
4. Hay niños que resuelven este mismo problema de forma diferente, ¿Tú qué les dirías?
5. ¿Cómo sabes qué operación utilizar para resolver el problema?

Las entrevistas se realizaron de manera individual en una hora y media aproximadamente en el laboratorio de biología de la escuela, que es un lugar cerrado, con un espacio cómodo para sentarse y trabajar, con medidas de aproximadamente 4x5 metros. En un principio se le informó a cada niño cual era el objetivo de la entrevista, lo que se pretendía con ella y se les pidió permiso para audio-grabarlos.

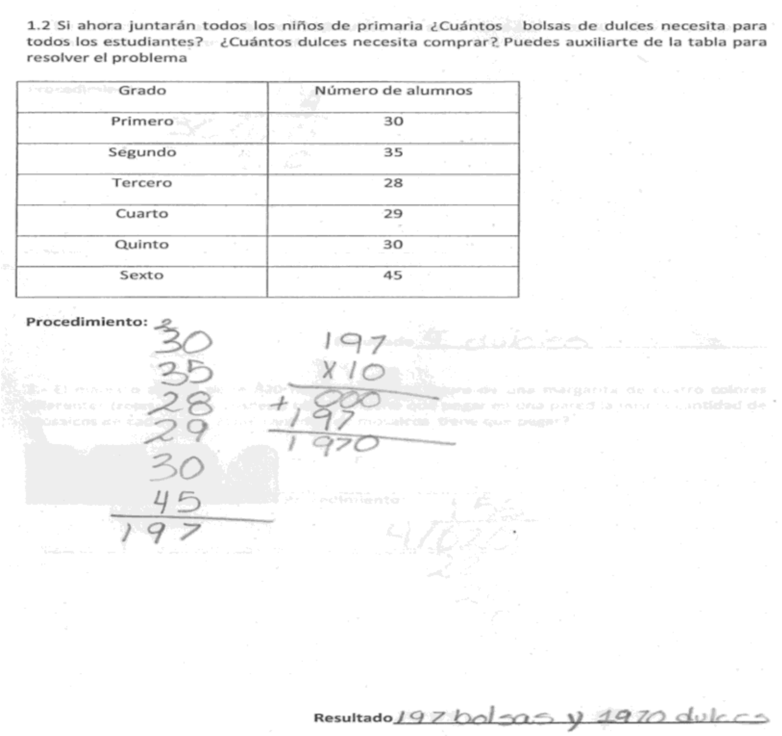
El material que se utilizó fue: una grabadora de audio, el cuestionario inicial de estructuras multiplicativas por modelo matemático que resolvió cada niño, hojas blancas y lápices.

5.5 Resultados de las entrevistas clínicas individuales

En este apartado se presentan fragmentos de las entrevistas clínicas aplicadas a los alumnos con el fin de poder mostrar el nivel de conceptualización que cada uno tiene de acuerdo a su nivel de logro. Así mismo se decidió hacer la entrevista puesto que el cuestionario sólo no muestra el dicho nivel de conceptualización.

5.5.1 Idea de Reparto

5.5.1.1 Nivel alto: El alumno que se coloca en un nivel alto analiza el problema de tal forma que no sólo se fija en los números que aparecen, sino en el resto de la información, cómo los objetos o los sujetos que aparecen en el mismo. De igual forma completa el procedimiento y hay un pensamiento multiplicativo y la idea de reparto es clara.



1.2 Si ahora juntarán todos los niños de primaria ¿Cuántos bolsas de dulces necesita para todos los estudiantes? ¿Cuántos dulces necesita comprar? Puedes auxiliarte de la tabla para resolver el problema

Grado	Número de alumnos
Primero	30
Segundo	35
Tercero	28
Cuarto	29
Quinto	30
Sexto	45

Procedimiento:

$$\begin{array}{r} {}^{2}\\ 30\\ 35\\ 28\\ 29\\ 30\\ 45\\ \hline 197 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 197\\ \times 10\\ \hline 000\\ +197\\ \hline 1970 \end{array}$$

Resultado 197 bolsas y 1970 dulces

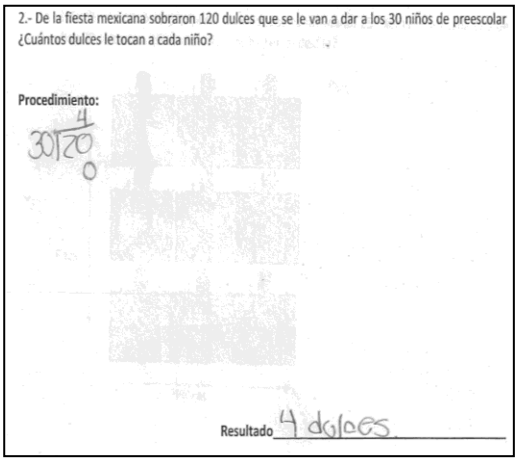
Trecho del protocolo

Entrevistadora (E): ¿Cómo resolviste el problema?

Ismael (I): Sumé el número de alumnos que tiene cada grupo y como nada más le toca de una bolsa a cada alumno el resultado te da 197 bolsas, porque nada más es una bolsa por alumno. Luego si quieres sacar los dulces multiplico 197x10, y aquí sólo agarro este uno, porque si multiplicara por cero me quedarían ceros y así nada más multiplicó 197x1 y lo pongo y ya nada más le aumento el cero.

Comentario: En este caso se puede observar cómo el niño analiza el problema en conjunto, fijándose en las cantidades, pero también en los sujetos y los objetos. Así mismo al realizar el problema de primera instancia hace la suma para poder tener el total de los alumnos y posteriormente multiplica sólo por uno, explicando que cuando las multiplicaciones son por 10 lo único que puede hacer es aumentar el cero, lo cual refleja el pensamiento multiplicativo. Por otro lado hace uso de la simbolización convencional mencionada por Vergnaud, es decir, las relaciones entre invariantes las representa mediante los símbolos convencionales del tipo aditivo y multiplicativo, como lo solicita el problema.

5.5.1.2 Nivel Medio: En este nivel el análisis del problema para su resolución se basa en la información literal que aporta, es decir, se fijan en las palabras que les den pistas de lo que se tiene que hacer, de no encontrarla se dificulta su resolución, pero con un poco de ayuda para reflexionar sobre lo que el problema requiere lo pueden resolver. Así mismo reconocen la idea de reparto como la división de varios objetos entre un número determinado de sujetos. Utilizan operaciones de tipo multiplicativo o aditivo.

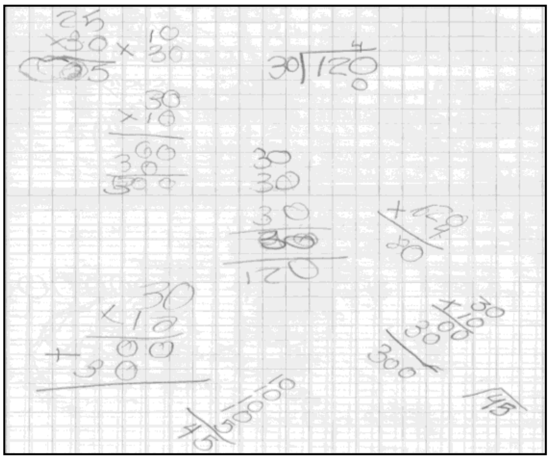


2.- De la fiesta mexicana sobraron 120 dulces que se le van a dar a los 30 niños de preescolar ¿Cuántos dulces le tocan a cada niño?

Procedimiento:

$$\begin{array}{r} 4 \\ 30\overline{)120} \\ 0 \end{array}$$

Resultado 4 dulces.



Trecho del protocolo

E: en el siguiente problema se pide que se repartan los 120 dulces que sobraron de la fiesta mexicana entre los 30 niños del preescolar.

E: ¿qué hiciste en este problema?

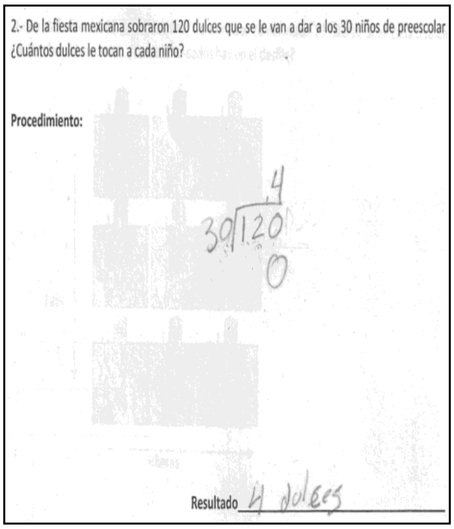
P: una división, si te dice que son 120 dulces los pones y si los quiere dividir para los 30 niños, y pones cuantas veces multiplicas o cabe 30 en el 120 y son 4, 4x30 son 120, y puse dos 30 y sume y así hasta que me salió 120 y son 4.

E: ¿es lo mismo que multiplique o sume?

P: si, solo que en la multiplicación es más rápido porque sale directo y en la suma las tienes que contar, pero las multiplicaciones las tienes que saber.

Comentario: Asocia reparto con la idea de división, busca dentro del problema la variable pertinente de “reparto” para, como apunta Brousseau (1986), decida si utiliza una multiplicación o una división, en este caso. Se puede notar que hay un pensamiento multiplicativo, pero en virtud de no saberse de memoria las tablas de multiplicar, recurre a una simbolización convencional de tipo aditivo para resolver las multiplicaciones, ya que sabe que una multiplicación es una suma reiterada que la llevaran al resultado de la división que está realizando, resaltando el hecho que para este último algoritmo también utiliza una simbolización convencional.

5.5.1.3 Nivel Bajo: En este nivel el análisis del problema para su resolución se basa únicamente en la información literal que aporta, es decir, se fijan en las palabras que les den pistas de lo que se tiene que hacer, de no encontrarlas no pueden llegar a la resolución, el nivel de ayuda que requieren es mayor, es necesario dar una explicación amplia para llegar a que ellos mismo resuelvan el problema. Reconocen la idea de reparto como la división de varios objetos entre un número determinado de sujetos. Utilizan operaciones aditivo, pues se encuentran en una transición entre el pensamiento aditivo al multiplicativo.

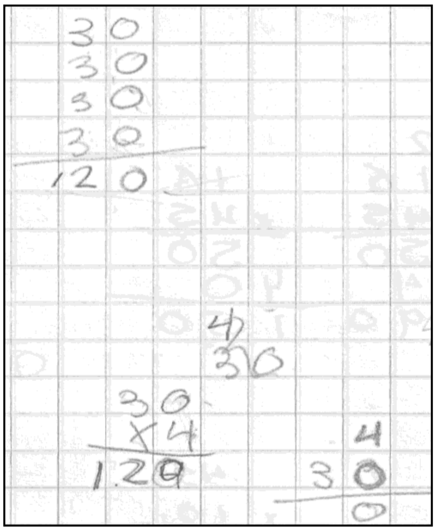


2.- De la fiesta mexicana sobraron 120 dulces que se le van a dar a los 30 niños de preescolar ¿Cuántos dulces le tocan a cada niño?

Procedimiento:

$$\begin{array}{r} 4 \\ 30\overline{)120} \\ 0 \end{array}$$

Resultado 4 dulces



Trecho del protocolo

E: Este problema dice que de la fiesta mexicana sobraron 120 dulces y que se los van a repartir a los 30 niños del preescolar, y pregunta cuántos dulces le tocan a cada niño.

A: les tocan 4

E: ¿cómo sabes?

A: sólo lo dividí, vi cuántas veces cabe 30 en el 12 y como no cabe pues tome el otro número y vi que 30 cabe 4 veces en el 120

E: ¿cómo sabes que 30 cabe 4 veces en el 120?

A: sólo lo calculé, veo cuántos niños son y cuantos dulces tengo que repartir y lo sumo para saber, (va aumentando 30's hasta que le sale el 120).

E: hay niños que lo que hacen es multiplicar 4x30

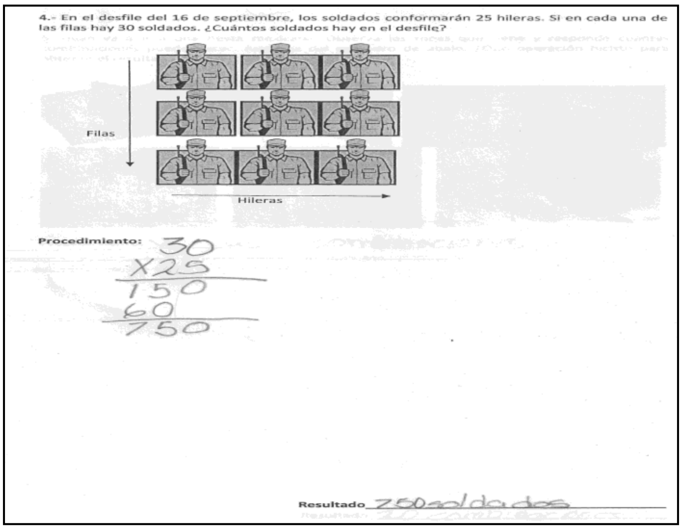
A: No sale lo mismo, porque multiplicar no es igual a sumar.

A: (después de hacerla) si da lo mismo

Comentario: Existe un pensamiento aditivo en transición al multiplicativo, ya que conoce la simbolización convencional de la multiplicación y la división, pero para su resolución recurre a operaciones de tipo aditivo, de igual forma no llega directamente al resultado sumando 30 veces 4 pues como ella misma indica mediante una suma no se puede llegar al mismo resultado que una multiplicación; posteriormente con una explicación y después de hacerlo llega a la conclusión de que en este problema si se puede hacer una multiplicación. Sabe que hay que hacer una división porque encuentra la palabra repartir dentro del problema. Utiliza simbolizaciones de tipo aditivo para resolver el problema y conoce las de tipo multiplicativo, pero no las usa para la resolución. Como anota Saiz (1994), es observable que existe un automatismo en el algoritmo cuando busca las palabras introductorias y como dice Charnay (1988) no hay un nivel de comprensión interno de los problemas de estructura multiplicativa, pues no sabe cómo funciona la multiplicación como suma reiterada, no hay una relación entre las operaciones básicas las ve como cosas que no tienen nada que ver la una con la otra.

5.5.2 Idea de cardinal en esquema rectangular

5.5.2.1 Nivel alto: El alumno que se coloca en un nivel alto analiza el problema de tal forma que no solo se fija en los números que aparecen, si no en el resto de la información, cómo los objetos o los sujetos que aparecen en el mismo. De igual forma completa el procedimiento y hay un pensamiento multiplicativo. La idea de cardinal en esquema rectangular es clara, sabe que cada uno de los factores se puede reconocer en la representación.



4.- En el desfile del 16 de septiembre, los soldados conformarán 25 hileras. Si en cada una de las filas hay 30 soldados. ¿Cuántos soldados hay en el desfile?

Procedimiento:

30
X25
150
60
750

Resultado 750soldados

Trecho del protocolo

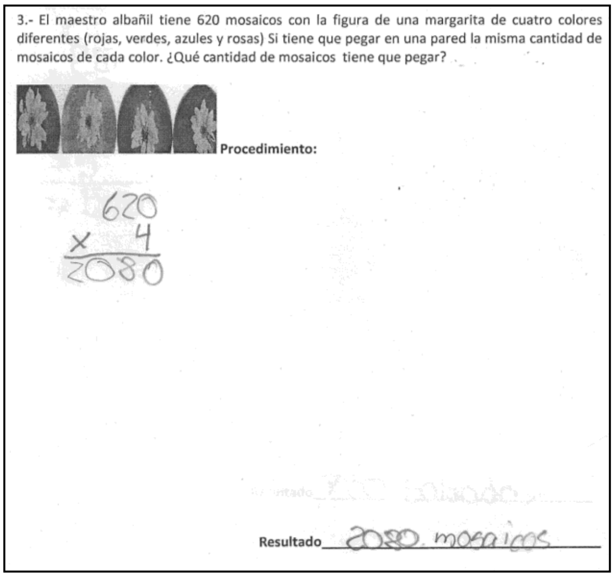
E: En este problema dice que en el desfile del 16 de septiembre, los soldados conformarán 25 hileras. Si en cada una de las filas hay 30 soldados ¿cuántos soldados hay en el desfile?

E: Hiciste una multiplicación ¿por qué?

I: porque tu multiplicas esto porque si solo sumaras las filas y las hileras (señala sumar solo una fila y una hilera) solo te saldría el resultado de acá y acá, pero si lo multiplicas te sale 25 hacia acá, y 30 soldados para allá y entonces tu lo multiplicas haber cuanto hay en el contenido y no solo lo que hay en las orillas, multiplicas 30x25 y te da 150 por el 5 y luego el 2 te da 60 y lo sumas 750.

Comentario: En este ejemplo se encuentra que existe un análisis del problema y una comprensión del mismo, lo cual lleva al niño a decidir que el algoritmo que resuelve el problema es una multiplicación; como anota Brosseau (1986), la comprensión es la que da la posibilidad de utilizar ciertos recursos de control y de engendrar las alternativas a rechazar; el niño rechaza utilizar el algoritmo de la suma, pues comprende que si lo utiliza deja fuera el resto del contenido del cuadro del esquema rectangular. Así mismo utiliza una simbolización convencional de tipo multiplicativo, lo que resalta que resuelve el problema haciendo uso de un esquema algorítmico, mismo que Vergnaud conceptualiza como el uso de comportamientos, razonamientos, adaptaciones y modificaciones del planteamiento del problema mediante una simbolización y un procedimiento convencional.

5.5.2.2 Nivel Medio: En este nivel el análisis del problema se dificulta porque no se encuentran las variables pertinentes que menciona Brousseau (1986), los alumnos requieren un nivel de ayuda mínima para entender u resolver el problema. Tienen la idea de cardinal en el esquema rectangular al igual que los alumnos de nivel alto y existe un pensamiento multiplicativo aunque a veces utilizan simbolizaciones convencionales de tipo aditivo, para facilitar la resolución pues no se saben de memoria las tablas de multiplicar.

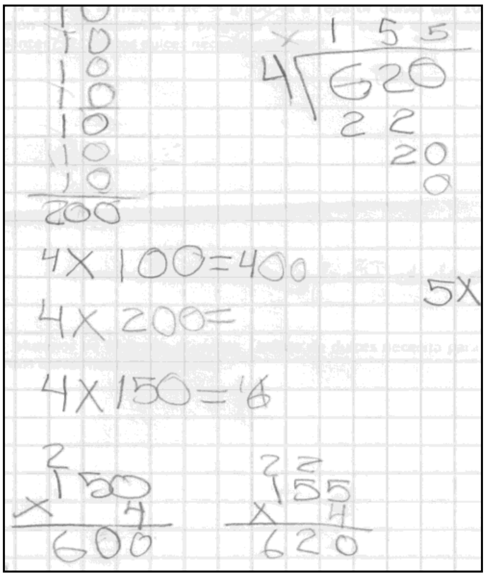


3.- El maestro albañil tiene 620 mosaicos con la figura de una margarita de cuatro colores diferentes (rojas, verdes, azules y rosas) Si tiene que pegar en una pared la misma cantidad de mosaicos de cada color. ¿Qué cantidad de mosaicos tiene que pegar?

Procedimiento:

$$\begin{array}{r} 620 \\ \times\ \ 4 \\ \hline 2080 \end{array}$$

Resultado 2080 mosaicos



$$\begin{array}{r} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ \hline 200 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 155 \\ 4\overline{)620} \\ 22 \\ 20 \\ 0 \end{array}$$

4X 100=400

4X 200=

4X 150=6

5X

$$\begin{array}{r} 2 \\ 150 \\ \times\ \ 4 \\ \hline 600 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 22 \\ 155 \\ \times\ \ 4 \\ \hline 620 \end{array}$$

Trecho del protocolo

E: El problema dice: el maestro albañil tiene 620 mosaicos con la figura de una margarita de cuatro colores diferentes, rojas, verdes, azules y rosas, si tiene que pegar en una pared la misma cantidad de mosaicos de cada color ¿Qué cantidad de mosaicos tiene que pegar?

E: ¿Cómo lo resolviste?

P: multipliqué los 620 mosaicos por los 4 colores y me dio 2080, pensé que tenía que poner los 620 mosaicos en cada pared, pero ya después lo hice y no salía como la pregunta porque no alcanzaba para las paredes.

E: pero aquí dice ya que tienes 620 mosaicos y que esos los tienes que pegar

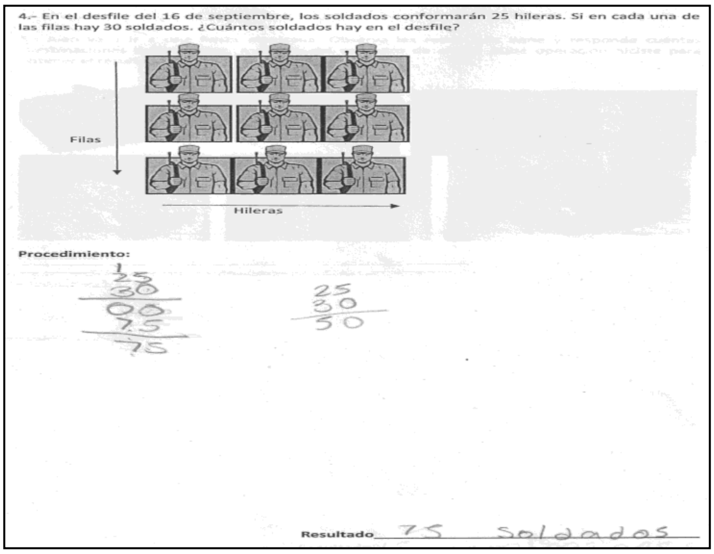
P: ah, entonces tenía que dividir

E: ¿Por qué?

P: para que de la cantidad exacta, y para eso lo divides para que te de exacto y ninguna pared tenga más ni tenga menos; (hace la división) cuántas veces cabe 4 en el 620 (y lo hace por tanteo multiplicando) 4x100 serían 100 y me falta, entonces 4x200 ya se pasa, 4x150 serían 620 y entonces serían 155 por 4 y me dan 620.

Comentario: En este caso se observa que la semántica del problema, entendida como la parte comunicativa del campo de conocimiento (Vergnaud, 1991); no es entendida por el alumno, por lo que al dar una mínima explicación solo llega a la conclusión de que lo que tiene que hacer es una división que le de la cantidad exacta de objetos. Se dificulta la comprensión del problema ya que no se utiliza la palabra “repartir” que es la que se asocia a la división, como encontró en su investigación Irma Saiz (1994), los alumnos presentan mayor dificultas para resolver un problema de división cuando este no corresponde a la idea de reparto.

5.5.2.3 Nivel Bajo: En este nivel aumenta la dificultad para resolver problemas de tipo cardinal en esquema rectangular, pues lo que se asocia a los problemas de estructura multiplicativa, es en el caso de la división la idea de reparto o partición y en la multiplicación la idea de “tantas veces” y al no estar estas variables pertinentes dentro del contexto del modelo matemático el alumno no sabe qué operación usar. Requieren una explicación más amplia para poder entender el problema y la idea de cardinal en el esquema rectangular no está conceptualizada. Utilizan operaciones aditivo, pues se encuentran en una transición entre el pensamiento aditivo al multiplicativo.



4.- En el desfile del 16 de septiembre, los soldados conformarán 25 hileras. Si en cada una de las filas hay 30 soldados. ¿Cuántos soldados hay en el desfile?

Procedimiento:

1
25
30
00
75
75

25
30
50

Resultado 75 soldados

Trecho del protocolo

E: Aquí en el problema del desfile de los soldados ¿qué procedimiento hiciste?

A: una suma, sume 25 más 30

E: ¿Por qué sumaste 25 más 30?

A: Porque aquí dice 25 hileras y 30 soldados, y fue por lo único que me guié.

E: Hay niños que lo que hacen es multiplicar.

A: puede ser que también esté bien, (hace la operación) y da 750.

E: ¿Qué resultado está bien 55 o 750?

A: 750 porque tiene más coherencia, ahorita que ya lo hice y por eso no es una suma sino una multiplicación.

E: ¿Por qué tiene más coherencia?

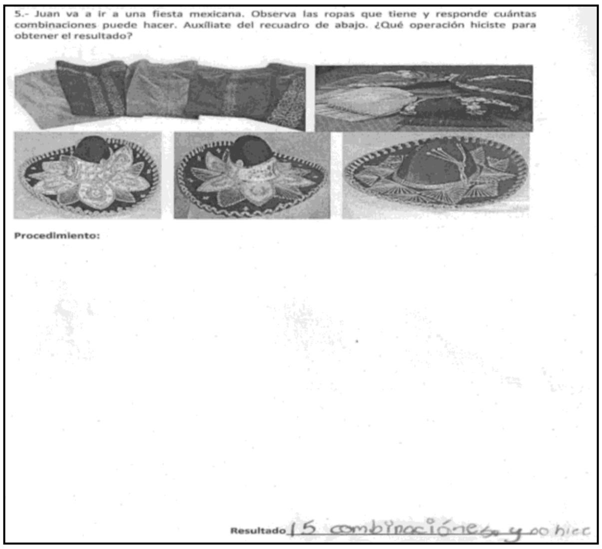
A: Porque da un resultado más grande, porque si formo a los soldados en mi mente hay más.

Comentario: Recordando que la idea de cardinal en la formación de esquema rectangular es la representación en la que se pueden reconocer cada uno de los factores dados, en este caso los 750 soldados formados en 25 hileras de 30 soldados cada una, se puede notar que el alumno no logra observar esta relación y sólo se guía por lo que le suena coherente sin llegar a un razonamiento del por qué la multiplicación es el algoritmo que resuelve el problema dado. Como en la idea de reparto, utiliza la simbolización convencional de tipo aditivo como su primera opción, lo que indica que la comprensión del modelo cardinal en la sub-categoría de esquema rectangular no está adquirida. De igual forma al no encontrar la variable pertinente correspondiente a la multiplicación, lo que hace es que de forma automática utiliza el algoritmo más sencillo ubicando únicamente las orillas de la formación rectangular.

5.5.3 Idea de cardinal en sub-categoría de combinatoria

En este modelo hay que recordar, que como se mencionó en la parte del análisis de los resultados del cuestionario inicial, ninguno de los alumnos con los que se trabajó la intervención obtuvo el resultado correcto del problema correspondiente a la multiplicación y sólo uno resolvió de forma correcta el de división.

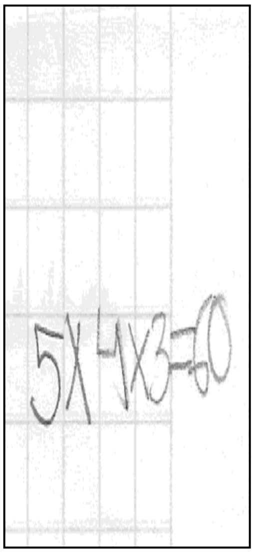
5.5.3.1 Nivel Alto: Se encuentran los alumnos que intentaron resolver el problema utilizando conocimientos previos y que con una breve explicación logran llegar al resultado final. Utilizan simbolización espontánea y convencional para la resolución y tienen un pensamiento multiplicativo.



5.- Juan va a ir a una fiesta mexicana. Observa las ropas que tiene y responde cuántas combinaciones puede hacer. Auxíliate del recuadro de abajo. ¿Qué operación hiciste para obtener el resultado?

Procedimiento:

Resultado 15 combinaciónes 60 y no hice



5X4X3=60

Trecho del protocolo

E: Aquí nos dice: Juan va a ir a una fiesta mexicana. Observa las ropas que tiene y responde cuántas combinaciones puede hacer. Y te tenías que fijar en la ropa que se muestra aquí en los dibujos. Son 5 pantalones, 4 moños y 3 sombreros, pusiste que son 15 combinaciones ¿cómo llegaste a las 15 combinaciones?

P: porque dije este pantalón puede ir con este sombrero y con este moño, y este negro con este oscuro, y este claro con este clarito y este pantalón con este porque casi son del mismo color y luego este con este.

E: ¿Qué es combinar?

P: que se vea bien la ropa, que se vea bonito.

E: vamos a suponer que aunque se vea fea o que toda se ve bonita con toda, si es así ¿Cuántas combinaciones podríamos hacer?

P: muchas, porque este pantalón podría ir con todos los moños y todos los sombreros y estos otros también.

E: ¿Cómo llegaríamos a saber cuántas son?

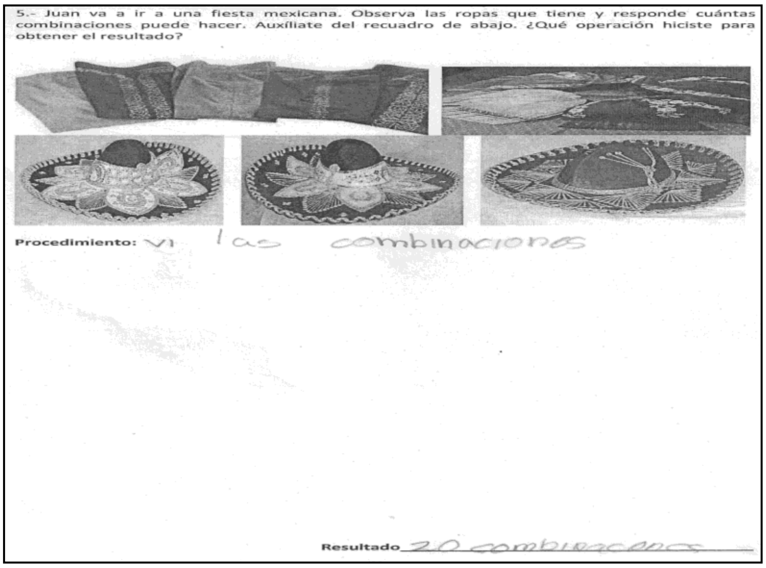
P: multiplicando, los 5 pantalones por los 4 moños y los 3 sombreros, 5x4 son 20 y 20x3 son 60.

E: ¿Cómo sabes que tienes que multiplicar todos por todos?

P: porque si los sumo, 5 pantalones más 4 más 3 sería muy poquito, porque este no solo va a tener uno va a tener con todos.

Comentario: En primera instancia se puede notar como para resolver el problema el alumno utiliza sus conocimientos previos de lo que entiende por combinar, y al no tener más referentes sobre el tipo de problema que se está planteando lo que hace es recurrir a la simbolización espontánea, que como se recordará según Vergnaud (1994) esta simbolización se refiere al uso de dibujos, trazos, objetos, etc., es decir, utiliza el observar los dibujos para combinar las prendas. Posteriormente al comprender que el contexto de la combinatoria se refiere a la posibilidad de relacionar todos los objetos que se presentan con todos llega a la conclusión de que la operación a utilizar es una multiplicación puesto que la suma no sirve para resolverlo. Se dificulta elegir la operación en primer lugar porque el problema no se puede asociar a la idea de reparto y en segundo término porque no existe ninguna variable pertinente conocida por el alumno. Así mismo utiliza ya una simbolización convencional de tipo multiplicativo.

5.5.3.2 Nivel Medio: En este caso los alumnos utilizan conocimientos previos para saber que si lo que pide el problema es combinar todas las prendas entonces cada una de ellas cabe en los otros conjuntos. Necesitan más que una ayuda mínima para resolverlo, dándose cuenta de la dificultad del problema. Aún y cuando en otros problemas se puede notar que existe un pensamiento multiplicativo en este caso no se observa pues no hay ningún referente que los haga utilizar conocimientos anteriores.



5.- Juan va a ir a una fiesta mexicana. Observa las ropas que tiene y responde cuántas combinaciones puede hacer. Auxíliate del recuadro de abajo. ¿Qué operación hiciste para obtener el resultado?

Procedimiento: Vi las combinaciones

Resultado 20 combinaciones

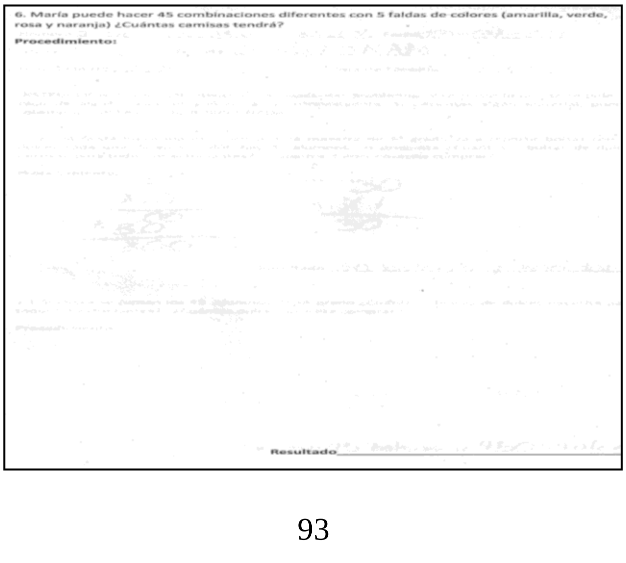
Trecho del protocolo

E: Si en el problema de la fiesta mexicana nos imaginamos que todos los pantalones se ven bien con todos los moños y con todos los sombreros, ¿nos saldrían más de 30 combinaciones o las mismas 20?

I: Saldrían más, porque si tu aquí sacas de un pantalón cabrían en este y este sombrero y en este y este moño y así todos los pantalones. Estos 3 le caben a este pantalón entonces ya serían tres, pero esta difícil resolverlo si combinaran todos.

Comentario: El alumno como menciona Saiz (1994) busca dentro del problema indicios que le indiquen como resolver el problema y al no encontrarlos no saben qué operación utilizar y como indica esto se debe a que en la enseñanza tradicional el énfasis se encuentra en el automatismo y no en el razonamiento. Esto lo podemos ver en el trecho del protocolo, el alumno con ayuda logra identificar que el sentido del problema es combinar todas las prendas pero no encuentra un algoritmo que le ayude a resolverlo. Utiliza simbolización espontánea para resolverlo al fijarse en los dibujos y no hay una comprensión.

5.5.3.3 Nivel Bajo: Se ubican los alumnos que están en transición de un pensamiento aditivo al multiplicativo y que ni con un nivel de ayuda más alto logran comprender el problema. Necesitan variables pertinentes claras para poder determinar cuál es la operación que se debe utilizar y al no encontrarla no hicieron el intento de resolver el problema.



6. María puede hacer 45 combinaciones diferentes con 5 faldas de colores (amarilla, verde, rosa y naranja) ¿Cuántas camisas tendrá?

Procedimiento:

Resultado

Trecho del protocolo

E: ¿Por qué no resolviste el problema?

A: Porque no lo entendí

E: Lo que quiere decir el problema es que tienes que encontrar el número de camisas que se tienen para hacer 45 combinaciones, es decir, cuántas camisas le caben a 45 combinaciones, hay niños que lo que hacen es una división.

A: Están mal porque si es una división dice el problema dice que tienes que repartir, si no dice es una multiplicación, si es una suma tiene que haber más cantidades y si es una resta tiene que decir que le quito o algo así.

Comentario: Los problemas de combinatoria son los más complicados ya que en su contexto no menciona ninguna palabra clave o variable pertinente, así mismo no es posible asociarlo ni a una suma ni a una resta reiterada para poder resolverlo, es decir, se necesita que el alumno ya tenga un pensamiento multiplicativo o bien que la transición entre el pensamiento aditivo y este vaya más avanzado. Como se citado en el análisis de los dos modelos anteriores, lo encontrado por Saiz (1994) en su investigación se comprueba en el presente trabajo, la comprensión es necesaria para poder resolver cualquier problema, por lo que no es suficiente tener el automatismo del algoritmo en la idea de reparto o de tantas veces para los problemas de estructura multiplicativa. Como se puede observar en el caso de esta alumna ni la simbolización espontánea utilizo por falta de conocimientos previos y de comprensión de la semántica del problema.

A manera de conclusión se puede decir que las principales dificultades que presentan los alumnos de esta muestra están en la resolución de problemas de combinatoria y en la falta de comprensión y de esquemas previos para poderlos resolver.

De igual forma las diferencias entre cada uno de los niveles independientemente del modelo matemático o de la idea matemática que se trabaje, es que los alumnos de un nivel alto tienen una mayor comprensión de los conocimientos que ya tienen, lo cual les permite hacer uso de los mismos para poder resolver los problemas en donde la idea matemática no les es familiar, como en el caso de la combinatoria. La única diferencia grande con el nivel medio es que los alumnos que se encuentran aquí necesitan ayuda, aunque mínima, para darse cuenta de sus errores y poder resolver de forma correcta. En el caso del nivel bajo lo que tenemos es que aún están en la transición de un pensamiento aditivo a uno multiplicativo y por lo tanto el nivel de ayuda que requieren es superior.

CAPÍTULO 6

RESULTADOS DE LA PRIMERA ETAPA DEL ESTUDIO: CUESTIONARIO DIAGNÓSTICO DE ESCRITURA NUMÉRICA Y ENTREVISTA CLÍNICA INDIVIDUAL

En este capítulo se reportan los resultados del cuestionario diagnóstico de escritura numérica y los resultados de la entrevista clínica individual. En primer lugar se describe el cuestionario diagnóstico, posteriormente se hace una breve presentación de la forma de aplicación del mismo, para pasar a los resultados.

En un segundo momento se analiza la entrevista clínica individual aplicada a tres sujetos de la muestra, mismos que se escogieron de acuerdo a sus niveles de conceptualización matemática, uno de nivel alto, otro de nivel medio y el último de nivel bajo; haciendo una breve presentación de la misma, de su aplicación y lo obtenido de las mismas.

6.1 Descripción del cuestionario diagnóstico de escritura numérica

El cuestionario diagnóstico de escritura numérica (anexo 1) se divide en cinco partes; la primera corresponde al dictado de números, consta de diez números que van de las unidades de millar a las unidades de millón. La segunda parte corresponde a la escritura de números con letra, se dieron cinco cantidades que los alumnos deberían escribir que iban de las unidades de millar a las unidades de millón. El tercer apartado corresponde a la secuencia de numérica, se proporcionaron diez cantidades a las cuales se les debía colocar su antecesor y su sucesor inmediato. En la cuarta parte del cuestionario los alumnos debían representar las cantidades dadas en un ábaco vertical, dichas cantidades van de las unidades de millar a las decenas de millar, y por último en la quinta parte los alumnos debían de escribir la cantidad representada en el ábaco vertical y de igual forma estas cantidades van de las unidades de millar a las decenas de millar.

Tabla No. 19 Cuestionario Sistema de Numeración Decimal

No. De pregunta	Contenido matemático	Solicitud de la pregunta
1	**Escritura de números**	Se solicita al niño anote los números que se le dictan.
2	**Nombres de números**	Se le solicita al niño que escriba los nombres de los números de la lista.
3	**Identificar antecesor y sucesor**	Se solicita al niño que coloque el antecesor y sucesor de los números que se le muestran.
4	**Representar la cantidad en el ábaco vertical**	Se solicita al niño que represente la cantidad que se le da, colocando el número de bolitas correspondientes en cada una de las filas.
5	**Escribir la cantidad que se representa en el ábaco vertical**	Se solicita al niño que escriba la cantidad que se representa en el ábaco vertical.

El cuestionario diagnóstico se aplicó con la finalidad de conocer la zona de desarrollo real (ZDA) que presentaban los alumnos del 5º grado de primaria del CEPP-STUNAM en cuanto a las reglas del sistema de numeración decimal, ya que están son la base para poder tener éxito en la resolución de las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división).

6.2. Aplicación del cuestionario diagnóstico de escritura numérica

La aplicación del cuestionario diagnóstico de escritura numérica se hizo en un horario de 12:00 a 13:00 horas, a 25 alumnos del 5º grado de primaria, con el fin de conocer su zona de desarrollo real (ZDA) y escoger a 6 niños para ser parte de la muestra de este trabajo. Se eligieron de acuerdo a su nivel de logro, alto, medio y bajo, siguiendo los mismos criterios que en el cuestionario de estructuras multiplicativas.

Una vez distribuido el cuestionario se les dieron las instrucciones a los alumnos que consistían en leer atentamente y contestar el cuestionario sin borrar nada, debiendo poner las respuestas incorrectas entre paréntesis. No se les proporcionó ningún tipo de ayuda y al inicio se les dictaron diez números que debían colocar con número y siguieron respondiendo lo siguiente.

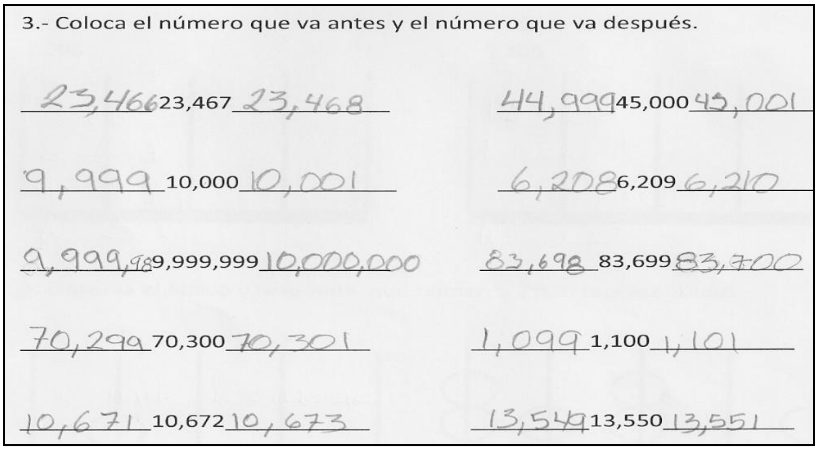
6.3 Resultados del cuestionario de escritura numérica

Los resultados del cuestionario inicial se analizaron mediante dos categorías de análisis:

- Nivel de logro: Al igual que en el cuestionario inicial se consideraron tres niveles de logro; alto, medio y bajo.

  Para clasificar por nivel de logro a los alumnos se tomó en cuenta el número de respuestas correctas por apartado del cuestionario, es decir, el número de respuestas correctas que se obtuvieron en escritura de números con número y letra, antecesor u sucesor y representación en el ábaco vertical; así como el nivel de conceptualización.

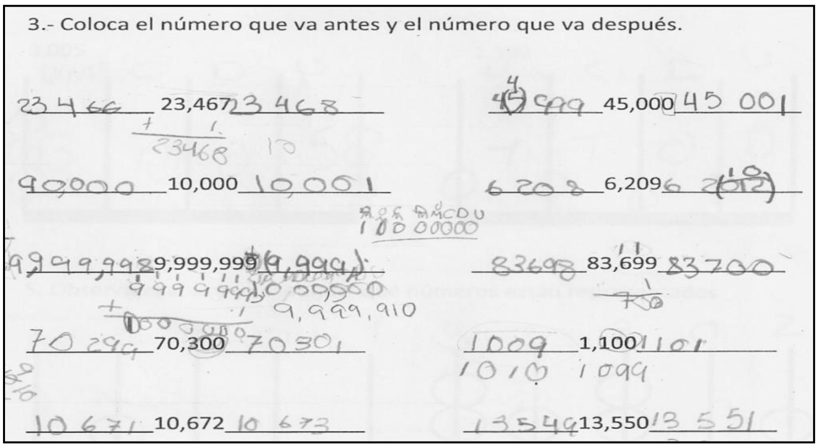
  Nivel alto: Aquellos alumnos que por apartado tuvieron máximo dos errores y que tienen claras las reglas del sistema de numeración decimal.



3.- Coloca el número que va antes y el número que va después.

23,466 23,467 23,468
44,999 45,000 45,001
9,999 10,000 10,001
6,208 6,209 6,210
9,999,98 9,999,999 10,000,000
83,698 83,699 83,700
70,299 70,300 70,301
1,099 1,100 1,101
10,671 10,672 10,673
13,549 13,550 13,551

Nivel medio: Aquellos que máximo tuvieron cuatro errores y que tienen conocimiento de las reglas, pero tienen problemas con los millones y que con un poco de ayuda logran resolver el ejercicio.



3.- Coloca el número que va antes y el número que va después.

23466 23,467 23468 — 44999 45,000 45 001

\+ 1 23468 10

90,000 10,000 10,001 — 6208 6,209 6 2(012)

10000000

9,999,998 9,999,999 9,999, — 83698 83,699 83700

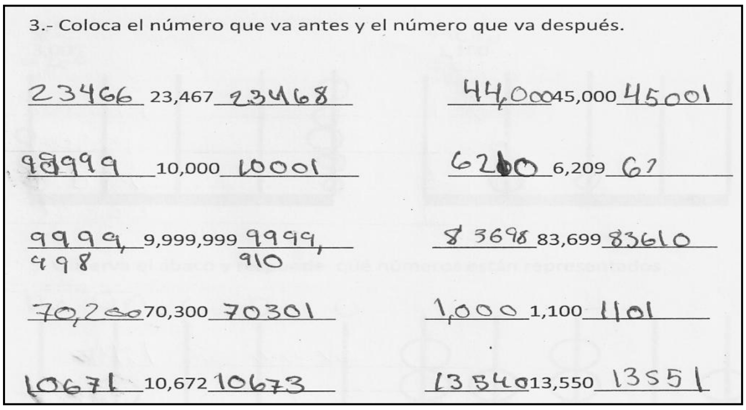
9999999 10,000000 9,999,910

70 299 70,300 70301 — 1009 1,100 1101

1010 1099

10 671 10,672 10 673 — 13549 13,550 13 551

Nivel bajo: Aquellos que tuvieron más de cinco errores por apartado y que tienen problemas a partir de los millares y no tiene claro el valor posicional de los números.



3.- Coloca el número que va antes y el número que va después.

23466 23,467 23468 — 44,000 45,000 45001

99999 10,000 10001 — 6200 6,209 67

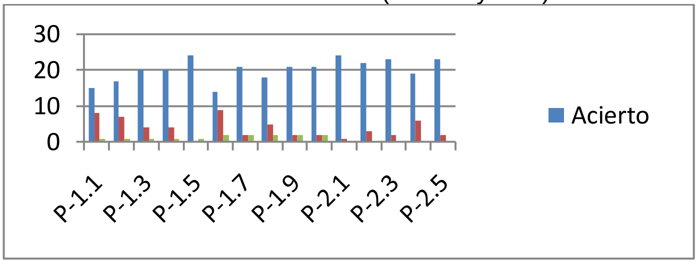
9999,998 9,999,999 9999,910 — 83698 83,699 83610

70,200 70,300 70301 — 1,000 1,100 1101

10671 10,672 10673 — 13540 13,550 13551

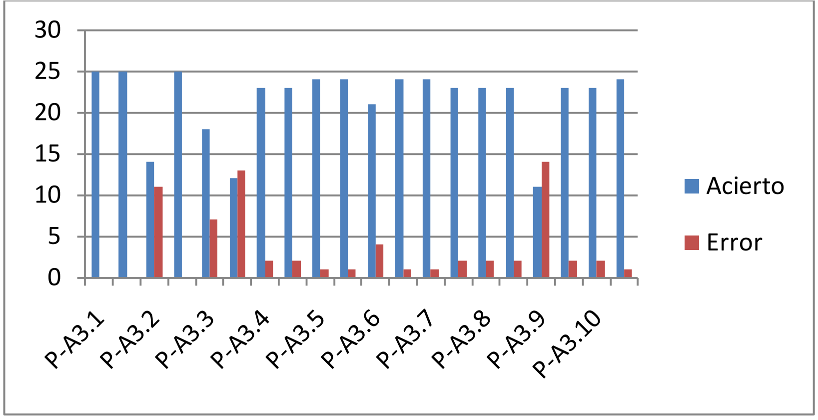
Los resultados por apartado se muestran a continuación en las siguientes gráficas:

Gráfica No. 20 De resultados
Escritura de números (número y letra)



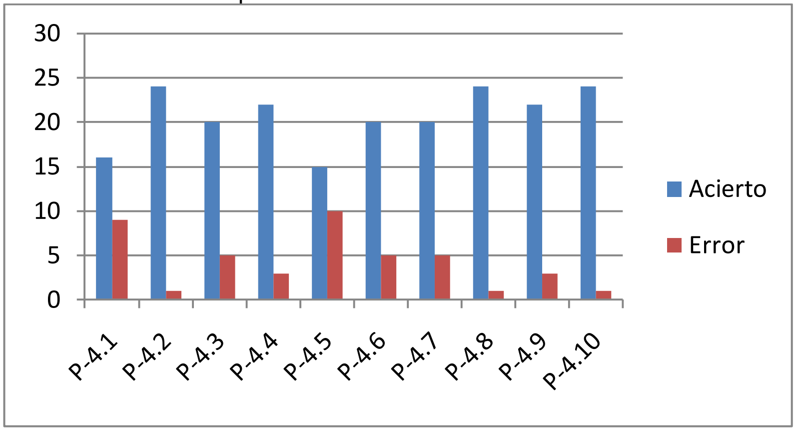
Se puede observar que la mayoría de los alumnos respondieron de forma correcta este apartado del cuestionario, la mayoría presentó dificultades en las unidades de millón, pero aún así el nivel en general es alto. Para la lectura y escritura de números, como apunta Buenrostro (2003) es importante que el alumno conozca la clasificación en órdenes, clases y periodos, es decir, que sepan que cada tres órdenes de números forman una clase (unidades, decenas y centenas en el primer orden; unidades, decenas y centenas de millar en el segundo orden; unidades, decenas y centenas de millón en el tercer orden). Cuando los alumnos conocen esto, normalmente separan con una coma cada orden.

Gráfica No. 21 Resultados
Antecesor y sucesor



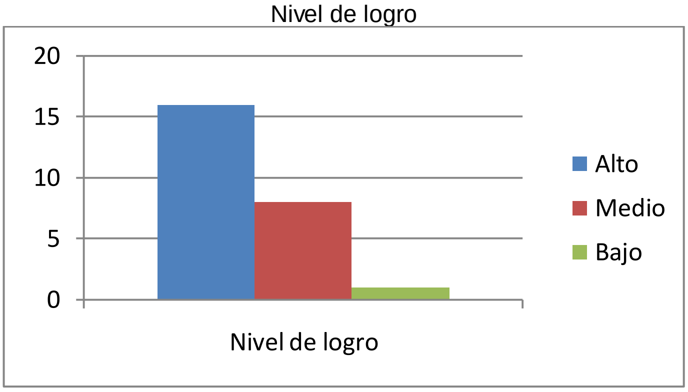
Como se puede notar en esta sección del cuestionario tampoco hay grandes dificultades, pero hubo mayor número de errores en cuanto al antecesor del número. Los errores se presentan cuando la cantidad contiene ceros o bien cuando se requiere un cambio en el tamaño del número. Por ejemplo tenemos que en antecesor del 1,100 (que es la columna P-A3.9) el número de errores es mayor pues la mayoría de los alumnos no cambia los ceros por nueves, lo que hacen es quitar el 100 completo o bien poner un nueve en vez del primer cero pero sin cambiar los demás (1,009). Esto lo que refleja es que los alumnos utilizan como estrategia de resolución el fijarse únicamente en el último digito de la cifra y cambiarlo por un número menor.

Gráfica No 22. Resultados
Representación en el ábaco vertical



En el ábaco vertical de igual forma los resultados fueron muy buenos, esto se debe a que los alumnos al tener un soporte de representación gráfico que de alguna forma les recuerda que deben tomar en cuenta la casa del valor posicional del número, lo que hacen es ir colocando en cada uno de los espacios el número que hay en la cifra comenzando de izquierda a derecha, lo que representa que el alumno sabe que para representar un nuevo orden o un nuevo valor posicional se agrega una columna hacia la izquierda.

Gráfica No. 23 Resultado general
Nivel de logro



A partir de los resultados que se muestran en la gráfica anterior se puede ver que los alumnos del 5º grado del CEPP-STUNAM tienen conocimiento de las reglas del sistema de numeración decimal, es decir, conocen el valor absoluto de los números, su valor relativo, su valor posicional, el agrupamiento y la descomposición.

Así mismo saben que el sistema es de base 10, por lo que cada diez, que cada orden aumenta a un orden inmediato superior y que los 10 dígitos que se utilizan (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) se repiten en cada orden.

En virtud de lo anterior no se consideró necesario incluir este tema dentro del programa de intervención que se aplicó, pues la mayoría de los alumnos que participaron no presentaron dificultades grandes.

6.4 Descripción de la entrevista clínica individual

Las entrevistas clínicas individuales, se aplicaron a tres niños de acuerdo a los resultados obtenidos en el cuestionario diagnóstico. Se eligió un niño por nivel de logro, es decir, uno de nivel alto, otro de nivel medio y el último de nivel bajo.

La entrevista consistió en una exploración sobre el pensamiento de los niños, con base en lo que contestaron en cada uno de los apartados del cuestionario, es decir, las preguntas se hicieron por cada respuesta que el alumno dio en el cuestionario.

Se realizó una guía para la entrevista en donde las preguntas versaron sobre la forma de resolución del cuestionario, se indago sobre el conocimiento del niño sobre el valor posicional de los números y sus secuencias.

Las preguntas comunes para los tres sujetos entrevistados fueron:

1. ¿Cómo sabes que este número se escribe así y no de otra forma?
2. ¿Cómo le explicarías a un compañero como se escribe este número?
3. ¿Cómo sabes que antes de este número se encuentra el que colocaste?
4. ¿Sabes cuantos números caben en cada casa posicional?
5. ¿Sabes cuánto valen las unidades?
6. ¿Sabes cuánto valen las decenas?
7. ¿Sabes cuánto valen las centenas?

8. ¿Sabes cuánto valen las unidades de millar?
9. ¿Sabes cuánto valen las decenas de millar?
10. ¿Sabes cuánto valen las centenas de millar?

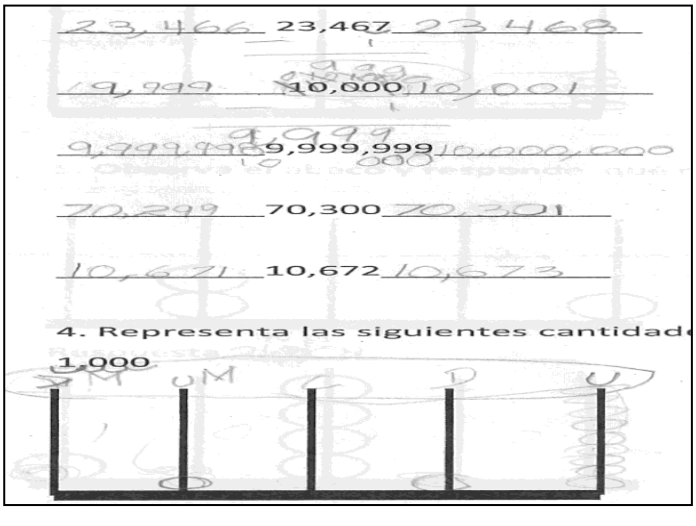
Las entrevistas se aplicaron en el laboratorio de biología que se describió en el capítulo anterior. Su duración fue entre 45 minutos y hora y media por niño. El material que se utilizó fue: grabadora de audio, lápices, hojas blancas y el cuestionario que resolvió cada alumno.

6.5. Resultados de las entrevistas clínicas individuales

Los resultados de la entrevista clínica individual se presentan de acuerdo a las reglas del sistema de numeración decimal y las concepciones que tienen los alumnos por nivel de logro sobre las mimas.

6.5.1 Nivel del logro alto

Los alumnos que se encuentran en este nivel, tienen claras las reglas del sistema de numeración decimal, no presentan dificultades en ninguna casa decimal, establecen regularidades para explicar la organización del sistema y no hay confusión en cuanto al uso del cero.



23,466 23,467 23,468

9,999 10,000 10,001

9,999,998 9,999,999 10,000,000

70,299 70,300 70,301

10,671 10,672 10,673

4. Representa las siguientes cantidad

1,000

Trecho del protocolo

E: el primer número que dicte fue el 10,064

I: porque así nos enseñaron, y fuimos viendo por unidades, decenas, centenas, unidades de millar y decenas de millar y así voy sabiendo cuántos ceros le agrego y en qué parte voy a escribir qué número

E: Cómo sabes en qué parte va cada número, ¿me puedes explicar?

I: aquí van las unidades, nada más llega hasta el nueve porque si no ya se pasa, decenas, centenas, unidades de millar y centenas de millar.

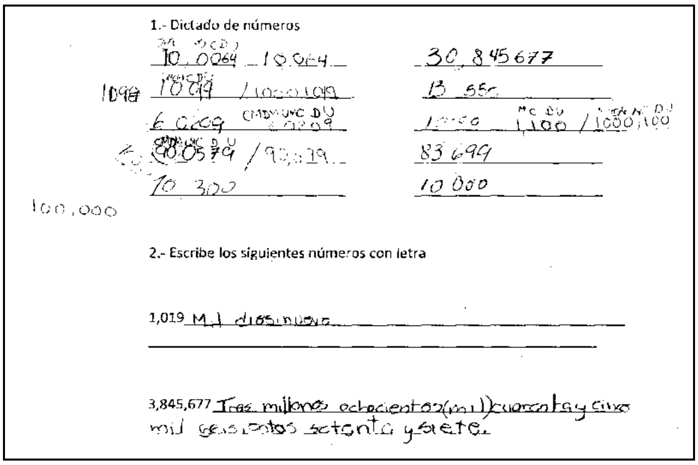
E: ¿para leer los números necesitas poner imaginariamente la casita?

I: no ya no, porque has de cuenta que aquí los números los vas dividiendo cada tres, porque nada mas llega hasta tres, aquí van unidades-decenas-centenas, y aquí otra vez van unidades-decenas-centenas pero de millar, nada más es tres y así vas dividiendo cada tres y cambias.

Comentario: Como indica Buenrostro (2003) para facilitar la lectura y escritura de números se clasifican en órdenes, clases y periodos, lo que se puede apreciar en el trecho del protocolo anterior, el alumno utiliza las unidades, decenas, centenas, unidades de millar, etc., para acomodar los números y leerlos. Así mismo como anota Brizuela (2006), los niños desde edades tempranas utilizan la coma para agrupar los números grandes y establecer una relación de orden, es decir, cada tres números son separados por una coma, lo que indica que de derecha a izquierda el número va aumentando obteniendo una nueva clase.

6.5.2 Nivel de logro medio

Los alumnos que se encuentran en este nivel conocen las reglas del sistema de numeración decimal y con un mínimo de ayuda que los haga reflexionar sobre su respuesta llegan a la forma correcta y presentan una ligera dificultad con las unidades de millar.



1.- Dictado de números

10,0064 10,064 30,845677

1098 1099 /1000,109 13 550

6,0209 6,0209 1,050 1,100 / 1000,100

90,0579 /90,079 83 699

70 300 10 000

100,000

2.- Escribe los siguientes números con letra

1,019 Mil diesinueve

3,845,677 Tres millones ochocientos(mil)cuarenta y cinco mil seisientos setenta y siete.

Trecho del protocolo

E: ¿Por qué acomodaste el diez mil sesenta y cuatro así 10,0064?

P: porque así nos enseñó la maestra, por unidades, decenas, centenas

E: ¿Cuánta vale una unidad?

P: uno

E: ¿y una decena?

P: 10

E: ¿y las centenas?

P: 100

E: ¿las unidades de millar?

P: mil

E: ¿y las decenas de millar?

P: diez mil

E: entonces qué número escribiste

P: cien mil sesenta y cuatro

E: ¿cómo pondrías el número correcto?

P: le quito un cero

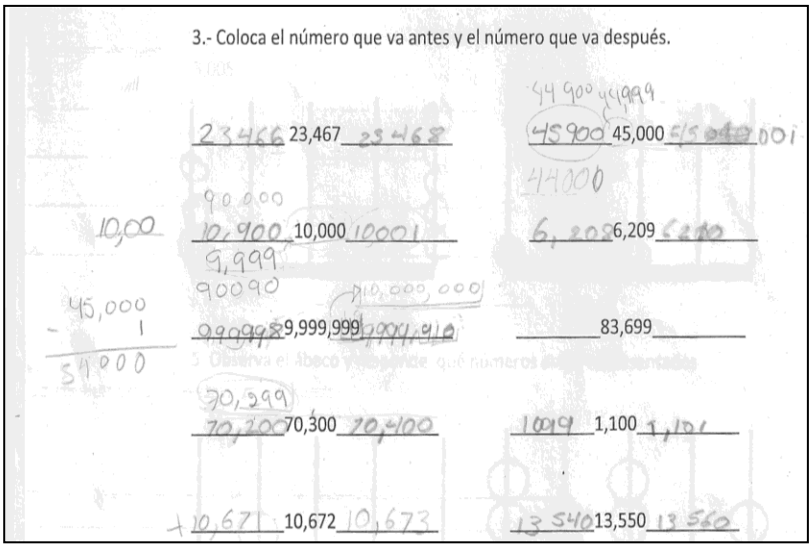
E: ¿con 10 centenas de millar formo una unidad de millón?

P: creo que sí pero ya no estoy segura

Comentario: Loa alumnos clasificados en este nivel, al igual que los de nivel alto tienen claras las reglas del sistema de numeración decimal y tuvieron algunos errores que mediante una mínima ayuda se dieron cuenta y rectificaron de forma correcta. Presentan algunas dificultades con los millones al momento de escribirlos, pero en la lectura de los mismos ayudándose de la separación de las comas lo pueden hacer.

6.5.3 Nivel de logro bajo

Los alumnos que se clasifican en este nivel fueron los mínimos, conocen algunas reglas del sistema de numeración decimal y comienzan a presentar problemas con los millares y los millones, pero con una explicación y con ayuda para que reflexionen sobre lo que están haciendo logran llegar al resultado. Así mismo utilizan criterios de comparación, es decir, se fijan en lo largo del número para determinar cuál es el número y establecen regularidades como que las centenas tienen tres números y los millares cuatro. Presentan dificultades con el uso del cero.



3.- Coloca el número que va antes y el número que va después.

44 900 44999
23466 23,467 23468
45900 45,000 [illegible]001
44000
90 000
10,00
10,900 10,000 10001
6,208 6,209 6210
9,999
90090
10,000,000
45,000
\- 1
54000
999998 9,999,999 [illegible]
________ 83,699 ________
70,299
70,200 70,300 70,400
1019 1,100 1,101
+10,671 10,672 10,673
13 540 13,550 13 560

Trecho del protocolo

E: ¿Qué son los millares?

A: Son números grandes que tienen 4 números

E: ¿cuántos números puede tener una unidad?

A: hasta 9 porque 10 ya sería otro número

E: ¿Qué sigue de las unidades?

A: las decenas, las centenas, los millares, las unidades de millar, luego las decenas de millar.

E: ¿qué número va antes del 10,000?
A: el diez mil cero

Comentario: En el caso anterior se tiene que la alumna conoce algunas de las reglas del sistema de numeración decimal, como el valor posicional de los números, presentando dificultades con los millares y con los millones, pero que después de una ayuda amplia para reflexionar sobre sus respuestas logra darse cuenta de los errores y corregir. Lerner y Sadovsky (citado en Saiz, 1994) reportan que los niños presentan dificultades en la escritura de números cuando estos no corresponden a los nudos (100, 1000, 10000, etc.) por lo que la escritura convencional se les dificulta, aunando a esto que una de las primeras concepciones que tienen es que el número que está primero es el que manda, por lo que, como se observa en el ejemplo anterior la alumna presenta dificultades en el orden ascendente y descendente de los números.

Como se puede observar los alumnos entrevistados conocen las reglas del sistema de numeración decimal y lo único que varía es el nivel de ayuda que necesitan para poder reflexionar sobre sus respuestas y darse cuenta de si está bien o mal la respuesta que dio, al mismo tiempo que la puede justificar.

CAPÍTULO 7
RESULTADOS DE LA SEGUNDA ETAPA DEL ESTUDIO: PROGRAMA DE INTERVENCIÓN PSICOPEDAGÓGICA

En el presente capítulo se reportan los resultados del programa de intervención sobre el modelo matemático cardinal en la sub-categoría de combinatorias. Inicialmente, se describe el programa de intervención, posteriormente se hace una breve explicación su aplicación y se concluye con los resultados obtenidos.

7.1 Descripción del programa de intervención psicopedagógico

El programa de intervención se desarrolló en seis sesiones de aproximadamente dos horas, pues fue el tiempo que la dirección de la escuela otorgó. Se exploraron los problemas de estructura multiplicativa (división y multiplicación) correspondientes al modelo matemático cardinal con la idea de combinatoria, pues fue en ese modelo donde los alumnos presentaron una mayor dificultad.

El programa de intervención se basó en el constructo de la Zona de Desarrollo Próximo (ZDP) de Vygotsky y en los niveles de ayuda de Cantero (2005).

Las seis sesiones aplicadas se dividieron como se muestra a continuación:

- Sesiones no 1 y 2 Introductorias; el objetivo de estas sesiones fue introducir a los alumnos a la idea de combinatoria, como la posibilidad de combinar todos los objetos de un conjunto con los de uno o más conjuntos. Para esto se utilizó el material recortable que se puede observar en el anexo 7; los alumnos recortaron la muñeca y las prendas de vestir para poder combinarlas todas, posteriormente en su hoja de trabajo (anexo 8) anotaron si podían llegar al número de combinaciones con una operación o de cualquier otra forma sin utilizar la muñeca y la justificación a su respuesta. En la sesión no 2 se inició con un ejercicio en donde los alumnos tenían que formar el mayor número de parejas que pudieran. Posteriormente se abrió la sesión para discutir la forma en la que resolvieron el ejercicio de la muñeca y el de las parejas, para llegar a una conclusión.

- Sesiones no 3 y 4 Problemas de multiplicación; el objetivo de ambas sesiones fue que los alumnos utilizaran el algoritmo de la multiplicación para resolver problemas con la idea de combinatoria. Se utilizaron las hojas de trabajo que se pueden observar en el anexo 8. Los chicos resolvieron los problemas por parejas y pasaron a explicar por qué lo hicieron de esa forma. En la sesión no 4 se aplicó un problema de evaluación para ver si los alumnos ya podían con los problemas de multiplicación para pasar a los de división.

- Sesiones no 5 y 6 Problemas de división; el objetivo de la sesión 5 fue introducir a los alumnos a la idea de combinatoria en la resolución de problemas de división, para lo que se les dio la hoja de trabajo número 5 (anexo 8) y resolvieron los problemas con un algoritmo o con cualquier otro soporte de representación, una vez hecho se discutieron las respuestas argumentándolas. La sesión no 6 el objetivo fue que resolvieron los problemas con el algoritmo de la división y se hizo una actividad de cierre en donde resolvieron problemas que combinaban ambas operaciones (anexo 8).

7.2 Aplicación del programa de intervención

El programa de intervención psicopedagógico se aplicó a seis alumnos, tres niñas y tres niños. Estos fueron elegidos de acuerdo a los resultados que obtuvieron en los cuestionarios diagnósticos.

Las sesiones de trabajo con los estudiantes ocurrieron tres veces por semana, lunes y miércoles de 9:00 a 11:00 horas y viernes de 12:00 a 14:00.

En todas las sesiones los alumnos trabajaron en díadas o tríadas, las cuales fueron cambiando dependiendo la forma en la cual los chicos se iban moviendo de un nivel a otro; y recibían ayuda o explicación de la investigadora cuando estaban trabajando en equipos y al final de las sesiones para finalizarlas.

En las primeras dos sesiones trabajaron por triadas, una compuesta por dos chicos de nivel de logro alto y uno de nivel medio y la otra compuesta por dos chicos de nivel de logro medio y dos de nivel de logro bajo, esto atendiendo a que como menciona Vygotsky (1988) para que el niño pueda aprender y desarrollarse es necesario tomar en cuenta su zona de desarrollo real, es decir, lo que puede hacer sin ayuda, para poder potenciar su zona de desarrollo próximo, tomando en cuenta la ZDA de sus compañeros más expertos, puesto que esta no puede ser de un nivel mucho mayor ya que no funcionaria. En general esta idea predominó en la formación de las diadas posteriormente.

Las ayudas que prestó la psicóloga educativa fueron las mencionadas en el capítulo de método, mismas que fueron elaboradas por Cantero (2003), estas dependieron del nivel de logro de cada uno de los chicos y de lo que ellos iban concluyendo al interior de sus equipos.

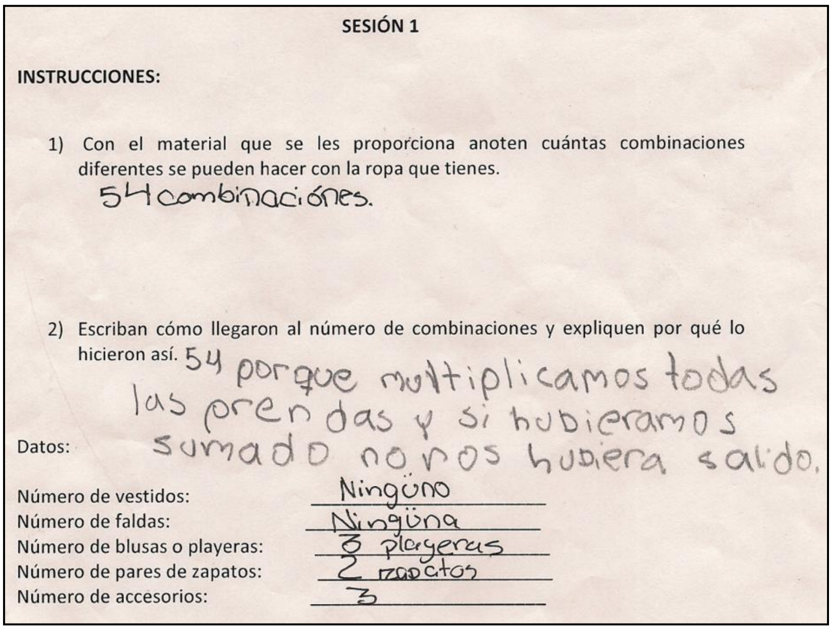
7.3 Análisis del programa de intervención

El análisis del programa de intervención se basa en los tres niveles de logro que se especificaron en el capítulo del análisis de los cuestionarios diagnósticos; es decir, en nivel alto, medio y bajo.

Cabe señalar que aún y cuando los alumnos con los que se trabajó el programa de intervención fueron de los niveles anteriormente señalados, en la resolución de los problemas con idea de combinatoria ninguno obtuvo un nivel de logro alto, ya que no pudieron resolver los problemas.

7.3.1 Nivel de logro Alto

Los alumnos colocados en el nivel de logro alto fueron dos, estos a diferencia de los otros dos niveles, necesitaron una ayuda mínima para comenzar a comprender la idea de combinatoria y dos sesiones. Cabe decir que se puede afirmar que la idea de combinatoria como concepto fue adquirida por los alumnos ya que para esto se requiere de un mayor número de sesiones y de evaluaciones posteriores así como de entrevistas clínicas individuales, pues no podemos olvidar que como afirma Vergnaud (1994) la adquisición de un campo conceptual necesita un tiempo largo.



SESIÓN 1

INSTRUCCIONES:

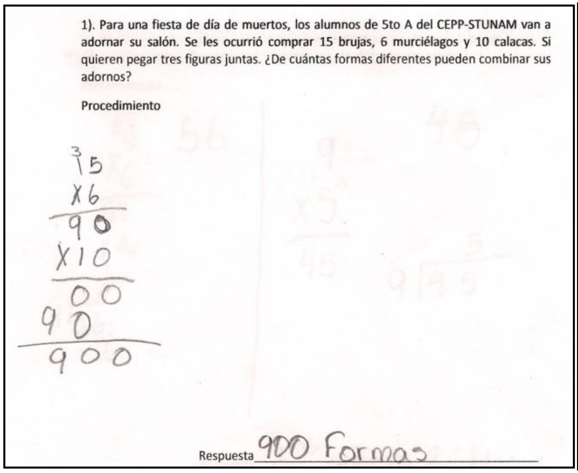
1) Con el material que se les proporciona anoten cuántas combinaciones diferentes se pueden hacer con la ropa que tienes.
54 combinaciónes.

2) Escriban cómo llegaron al número de combinaciones y expliquen por qué lo hicieron así. 54 porque multiplicamos todas las prendas y si hubieramos sumado no nos hubiera salido.

Datos:

Número de vestidos: Ningüno
Número de faldas: Ningüna
Número de blusas o playeras: 3 playeras
Número de pares de zapatos: 2 zapatos
Número de accesorios: 3

Al preguntarles por qué afirmaban que con una suma no hubieran llegado al resultado, respondieron que por qué si sumaban sólo les daría el resultado del número de prendas que tienen y no del número de combinaciones, porque todas las prendas debían ir con todas.

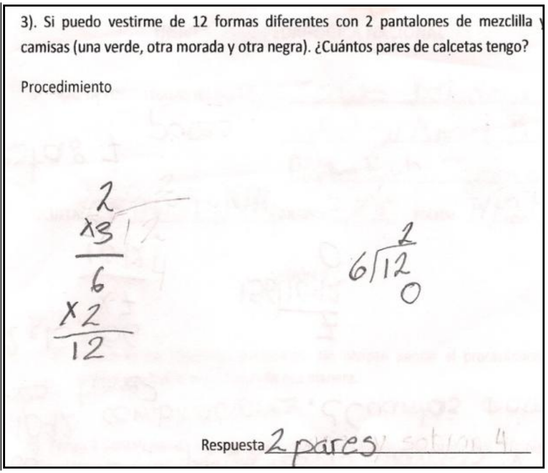


1). Para una fiesta de día de muertos, los alumnos de 5to A del CEPP-STUNAM van a adornar su salón. Se les ocurrió comprar 15 brujas, 6 murciélagos y 10 calacas. Si quieren pegar tres figuras juntas. ¿De cuántas formas diferentes pueden combinar sus adornos?

Procedimiento

$$\begin{array}{r} {}^{3}15 \\ \times 6 \\ \hline 90 \\ \times 10 \\ \hline 00 \\ 90 \\ \hline 900 \end{array}$$

Respuesta 900 Formas



3). Si puedo vestirme de 12 formas diferentes con 2 pantalones de mezclilla y camisas (una verde, otra morada y otra negra). ¿Cuántos pares de calcetas tengo?

Procedimiento

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 3 \\ \hline 6 \\ \times 2 \\ \hline 12 \end{array}$$

$$6\overline{)12}\;\overset{2}{}\quad 0$$

Respuesta 2 pares

Para la sesión número 3 estos alumnos ya utilizaban el algoritmo de la multiplicación para resolver los problemas y podían explicar que estos no podían resolverse con una suma reiterada ya que el problema no les daba la posibilidad pues no decía que número era el que tenían que repetir.

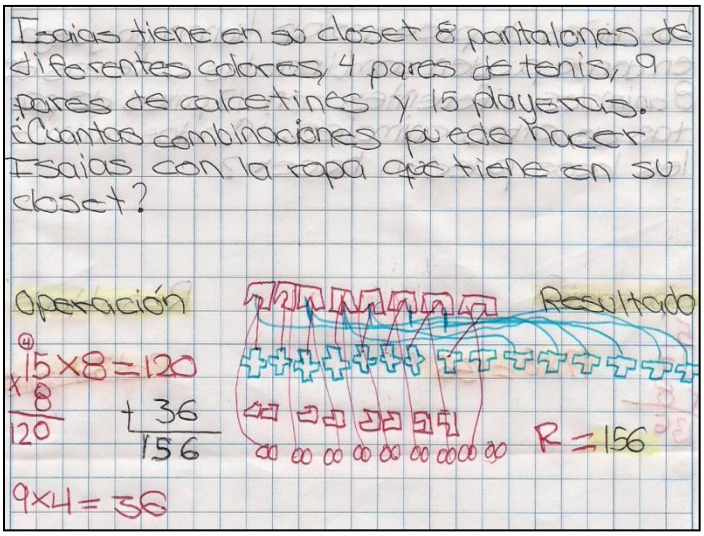
Comentario.- A los alumnos de este nivel les fue más sencillo pasar de un nivel bajo (cabe recordar que en el cuestionario inicial no resolvieron los problemas que incluían la idea de combinatoria) a un nivel de logro alto, puesto que sus conocimientos previos les ayudaron en el análisis de la información que presentaban los problemas, identificando de esta forma que un algoritmo correspondiente a estructuras aditivas no era el adecuado, aún y cuando al principio no utilizaron ni la multiplicación ni la división. De acuerdo a Vergnaud (2003) los alumnos utilizaron reglas de acción, toma de información y control para poder formular una estrategia de organización temporal, posteriormente utilizaron invariantes operatorios al identificar y reconocer los objetos, sus propiedades y sus relaciones, lo que al final les permitió verificar la eficacia de la forma de resolución que decidieron utilizar, en este caso, el algoritmo de la multiplicación y en problemas de división fue mucho más rápido y sencillo. Los alumnos de este nivel utilizaron la simbolización convencional desde la primera sesión.

Por otro lado la utilización de mediadores instrumentales como la muñeca de ropa intercambiable, les proporcionó una ayuda para poder llevar al plano de lo real el problema planteado y así decidir que una suma no era la operación adecuada.

Las ayudas que proporcionadas en este nivel por parte de la pasante de psicología educativa sólo fueron la renunciación del problema y el razonamiento.

7.3.2 Nivel de logro Medio

Los alumnos de este nivel requirieron un mayor número de sesiones para comprende la idea de combinatoria y utilizar el algoritmo, así mismo necesitaron un mayor nivel de ayuda tanto de sus compañeros más expertos como de la pasante de psicología educativa.



Isaias tiene en su closet 8 pantalones de diferentes colores, 4 pares de tenis, 9 pares de calcetines y 15 playeras. ¿Cuantos combinaciones puede hacer Isaias con la ropa que tiene en su closet?

Operación

Resultado

15×8=120

$\begin{array}{r} 15 \\ \times\ 8 \\ \hline 120 \end{array}$

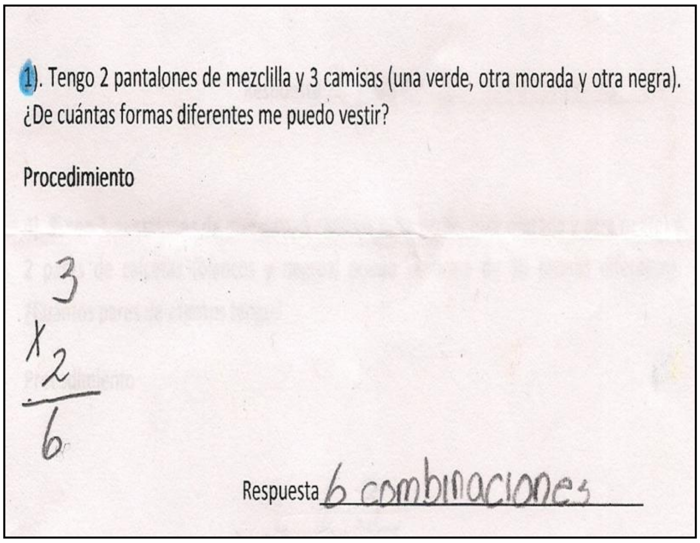
$\begin{array}{r} 120 \\ +\ 36 \\ \hline 156 \end{array}$

9×4=36

R=156

En las primeras dos sesiones utilizaban sumas y multiplicaciones para la resolución de los problemas, el argumento que daban para no utilizar sólo multiplicación era que no podía ser que saliera un número tan grande de combinaciones cuando el número de objetos presentados en el problema eran pocos.

Para la sesión no 4 los alumnos de este nivel ya pueden resolver los problemas con un algoritmo de multiplicación y justificar su respuesta.



1). Tengo 2 pantalones de mezclilla y 3 camisas (una verde, otra morada y otra negra).
¿De cuántas formas diferentes me puedo vestir?

Procedimiento

3
x 2
6

Respuesta 6 combinaciones

Comentario.- En este caso los conocimientos previos de los alumnos no ayudaban a comprender el por qué salían tantas combinaciones, pues para ellos con un número limitados de objetos debería salir un número limitado de posibilidades. Con la ayuda del mediador instrumental (la muñeca) pudieron notar que la cantidad de combinaciones podrían ser muchas, pero al momento de plantear un problema con mayor número de prendas combinaron multiplicación con suma. Cuando lo comentaron con sus compañeros el razonamiento fue que podías multiplicar dos conjuntos y luego por separado otros dos y después esas cantidades sumarlas y que así combinabas todo pero el resultado no salía tan grande.

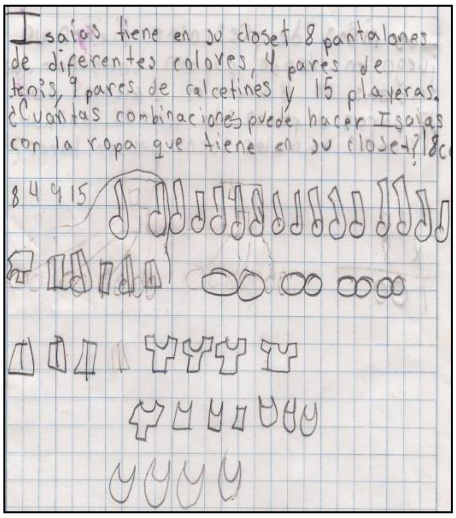
Al igual que sus compañeros del nivel alto utilizaron las reglas de acción, toma de información y control, así como los invariantes operatorios, la diferencia estribó en los conocimientos previos de unos y otros. Así mismo combinaron en un primer momento la simbolización convencional y la espontánea para corroborar si el resultado de la operación era coherente.

Al final de la cuarta sesión los alumnos de este nivel comprendieron que la no se podía hacer una suma reiterada para resolver el problema, y que al multiplicar y luego sumar lo único que hacían era sacar las combinaciones de dos conjuntos y luego sumar la otra cantidad de combinaciones.

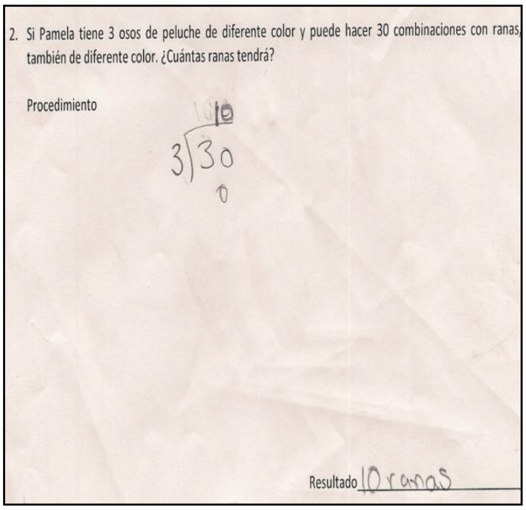
Los niveles de ayuda para estos alumnos fueron la renunciación, la representación lingüística y el razonamiento, para que pudiesen llegar a los resultados.

7.3.3 Nivel de logro bajo

En el caso de los alumnos con este nivel de logro, la diferencia fue que tardaron más en comprender la idea de combinatoria en el caso de la multiplicación, y de igual forma una de las alumnas logró alcanzar el nivel de logro alto, mientras que la otra mantuvo el nivel bajo, con la diferencia de utilizar el algoritmo pero sin poder justificar sus respuestas.



Isaias tiene en su closet 8 pantalones de diferentes colores, 4 pares de tenis, 9 pares de calcetines y 15 playeras. ¿Cuantas combinaciones puede hacer Isaias con la ropa que tiene en su closet? 18c



2. Si Pamela tiene 3 osos de peluche de diferente color y puede hacer 30 combinaciones con ranas, también de diferente color. ¿Cuántas ranas tendrá?

Procedimiento

$$\begin{array}{r} 10 \\ 3\overline{)30} \\ 0 \end{array}$$

Resultado 10 ranas

Comentario.- Estos alumnos no contaban con los conocimientos previos suficientes para poder utilizarlos en la resolución de los problemas, lo que ayudó fue la interacción con sus compañeros más expertos y las discusiones al interior de los equipos, los compañeros más expertos exponían sus opiniones y explicaban el procedimiento, mientras que los otros observaban y rebatían los resultados.

Así mismo la ayuda por parte de la pasante de psicología educativa fue mayor, en principio se utilizó la representación lingüística, es decir, se replanteaba el problema en otras palabras para que los alumnos comprendieran lo que tenían que hacer, al momento de no percibir las palabras clave dentro del problema, se perdían, por lo que la representación figurativa se utilizó de cierta manera (sin las figuras geométricas) para que sacaran la información del problema.

Para la sesión no 6 ya se había comprendido la idea de combinatoria y podían resolver los problemas con una simbolización convencional, ya sin recurrir a la espontánea.

A manera de conclusión se puede decir, que el programa de intervención estuvo planeado de tal forma que se tomaran en cuenta los conocimientos previos de los alumnos para formar las díadas o las tríadas, esto con el fin de que se pudiese potenciar la ZDP; así mismo se propusieron tareas que representaran un reto para los alumnos siempre y cuando estas no estuviesen demasiado elevadas; por último las ayudas estuvieron orientadas a hacer que los alumnos reflexionaran sobre su desempeño y la forma de resolver las tareas planteadas.

De seis alumnos que participaron en el programa de intervención, cinco lograron alcanzar un nivel de logro alto, mientras que sólo uno quedó en su mismo nivel (bajo), pero aun así se acercó a la comprensión de la idea de combinatoria.

La diferencia entre los chicos de nivel alto, medio y bajo fue su nivel de conocimientos previos y el nivel de ayuda que necesitaron para alcanzar el objetivo.

CAPÍTULO 8

RESULTADOS DE LA TERCERA PARTE DEL ESTUDIO: CUESTIONARIO FINAL SOBRE EL MODELO CARDINAL EN LA SUB-CATEGORÍA DE COMBINATORIAS

En el presente capítulo se reportan los resultados del cuestionario final sobre el modelo matemático cardinal en la sub-categoría de combinatorias, ya que fue el que se trabajó en el programa de intervención. Primero se describe el instrumento, posteriormente se da una breve explicación de la aplicación del cuestionario y se concluye con los resultados obtenidos.

8.1 Descripción del cuestionario final

El cuestionario final se hizo sobre el modelo cardinal en la sub-categoría de combinatoria. Constó de 5 problemas de multiplicación y división. Los problemas 1 y 5 se refieren a multiplicación, el 2 y el 3 son sobre división y en el 4 había que realizar ambas operaciones.

Tabla No. 23 Cuestionario Final. Estructuras multiplicativas Combinatorias

No de pregunta	Modelo matemático	Solicitud de la pregunta
1	Cardinal: Combinatorias	¿De cuántas formas se puede vestir Paulina? Con 4 faldas, 6 blusas, 3 pares de zapatos y 9 listones?
2	Cardinal: Combinatorias	¿Cuántas niñas habrá en la fiesta? Hay 50 niños y se pueden formar 4500 parejas diferentes.
3	Cardinal: Combinatorias	¿Cuántas blusas tendrá? Si puede hacer 45 combinaciones con 9 pantalones.
4	Cardinal: Combinatorias	¿Cuántas colas tendrá? Si tiene 10 pares de patas y 13 cabezas de animales diferentes.
5	Cardinal: Combinatorias	¿Cuántas combinaciones puede hacer? Con 5 pantalones, 3 sombreros y 4 moños.

Para los problemas de multiplicación lo que se busca en cuanto a idea matemática es que los alumnos encuentren el número total de combinaciones que pueden hacer conociendo los conjuntos de objetos diferentes que tienen y en lo que respecta a los problemas de división lo que se busca es el número de objetos que se tiene en uno de los conjuntos, conociendo el número de objetos que se tienen en el otro conjunto y el número de combinaciones totales que se pueden hacer.

8.2 Aplicación del cuestionario final

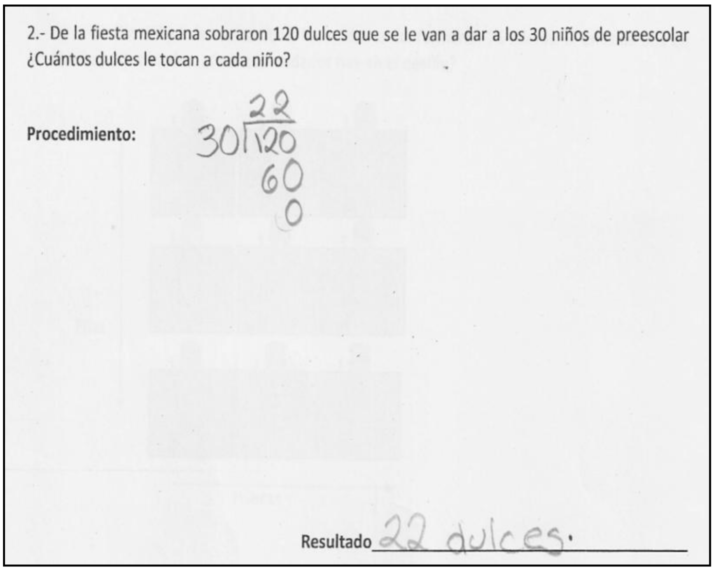
El cuestionario final fue aplicado a 6 alumnos de 5º grado de primaria del CEPP-STUNAM, en el salón de usos múltiples, que es un lugar cerrado de 5x6 metros, cuenta con ventilación, mesas y bancas y un espacio cómodo para realizar actividades; en un horario de 12:00 a 13:00. Inicialmente se distribuyó el cuestionario y se leyeron las instrucciones que consistieron en leer con atención cada uno de los problemas y responderlos, realizar todas las operaciones o los dibujos (si los utilizaron) en las hojas del cuestionario y no borrar nada, cualquier cosa que se necesitara solicitarla a la aplicadora y no se les proporcionó ningún tipo de ayuda para resolverlo, pues el objetivo del cuestionario era ver la ZDA de los alumnos después de la aplicación de la intervención.

8.3 Resultados del cuestionario final

Los resultados del cuestionario final, al igual que en el inicial se clasificaron en tres categorías de análisis:

- Nivel de logro.- Se consideraron tres niveles de logro; alto, medio y bajo. Para clasificar a los alumnos se tomó en cuenta el número de respuestas correctas y el nivel de conceptualización matemática.

  En el nivel alto se encuentran los alumnos que tuvieron 4 o 5 respuestas correctas y que utilizaron operaciones correspondientes a estructuras multiplicativas.

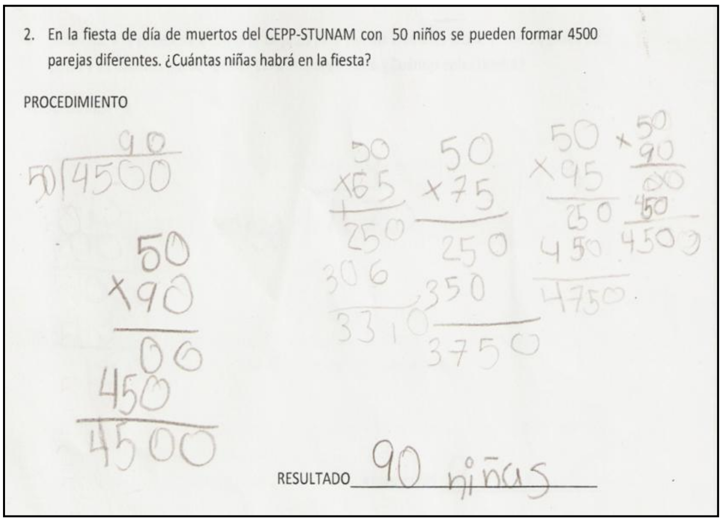


2.- De la fiesta mexicana sobraron 120 dulces que se le van a dar a los 30 niños de preescolar ¿Cuántos dulces le tocan a cada niño?

Procedimiento: 30 | 120 = 22; 60; 0

Resultado 22 dulces.

En nivel medio se encuentran los alumnos que tuvieron de 3 respuestas correctas y utilizaron operaciones aditivas en transición a estructuras multiplicativas.



2. En la fiesta de día de muertos del CEPP-STUNAM con 50 niños se pueden formar 4500 parejas diferentes. ¿Cuántas niñas habrá en la fiesta?

PROCEDIMIENTO

50 | 4500 = 90

50 × 90 = 00; 450; 4500

50 × 65 = 250; 306; 3310

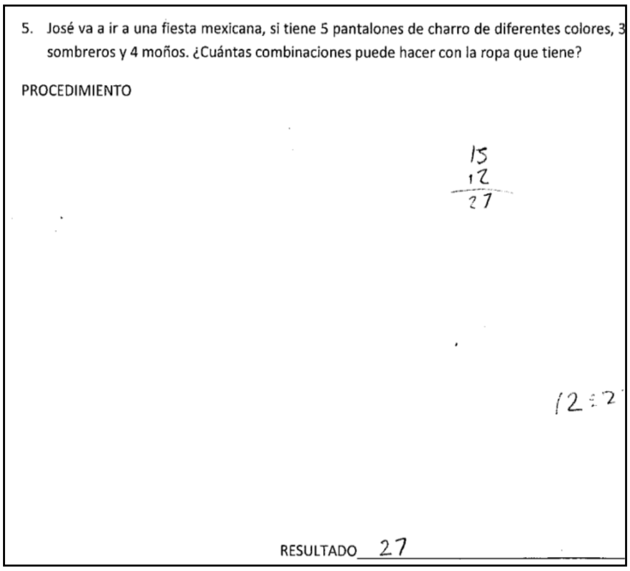
50 × 75 = 250; 350; 3750

50 × 95 = 250; 450; 4750

50 × 90 = 00; 450; 4500

RESULTADO 90 niñas

En nivel bajo están los niños que tuvieron menos de 5 respuestas correctas, y utilizaron dibujos u operaciones aditivas o usan la idea de partes repetidas de la adición.



5. José va a ir a una fiesta mexicana, si tiene 5 pantalones de charro de diferentes colores, 3 sombreros y 4 moños. ¿Cuántas combinaciones puede hacer con la ropa que tiene?

PROCEDIMIENTO

15
12
27

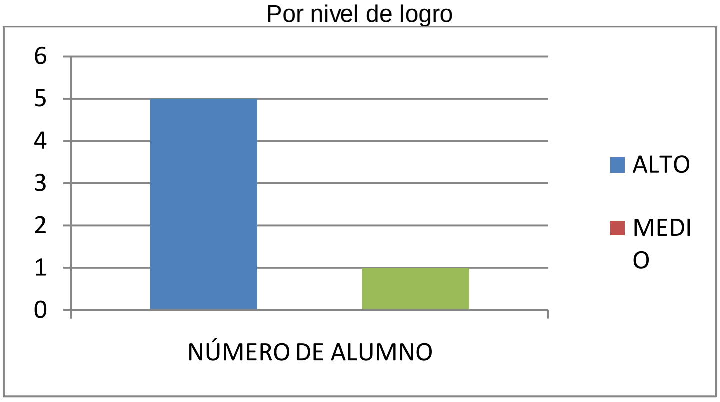
12:2

RESULTADO 27

- Soporte auxiliar de representación: como se había definido en el capítulo de resultados del cuestionario inicial, son los recursos que pueden ser externos o internos que utiliza el alumno para poder resolver un problema y que al mismo tiempo le ayuda a comprender cómo es que lo resuelve. Estos recursos pueden ser:
  - Operación
  - Dibujo
  - Cálculo mental

Los resultados obtenidos se presentan en la siguiente gráfica por nivel de logro; no se hace por soporte de representación ya que en este caso los 6 alumnos a los que se les aplico el cuestionario final utilizaron únicamente el algoritmo.

Gráfica No.23 cuestionario fina
Por nivel de logro

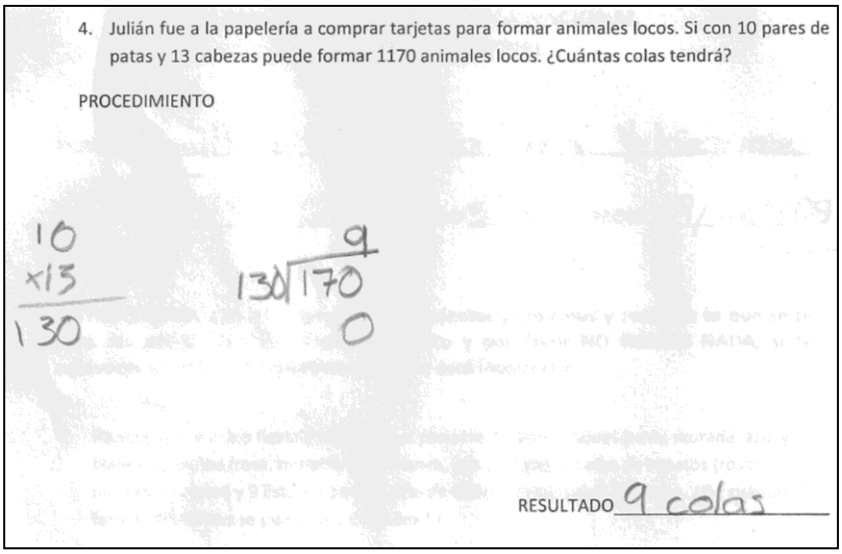


Como se ve en la gráfica anterior, después de la intervención 5 de 6 alumnos lograron un nivel alto en la resolución del cuestionario final en el modelo cardinal en la sub-categoría de combinatoria, que fue la que se trabajó durante 6 sesiones de hora y media.

8.4 Análisis del cuestionario final

Para el análisis del cuestionario se tomaron en cuenta los niveles de logro descritos en el punto anterior, utilizando únicamente el nivel alto y bajo puesto que fueron los resultados que se arrojaron como se muestra a continuación.

8.4.1 Nivel de logro alto



4. Julián fue a la papelería a comprar tarjetas para formar animales locos. Si con 10 pares de patas y 13 cabezas puede formar 1170 animales locos. ¿Cuántas colas tendrá?

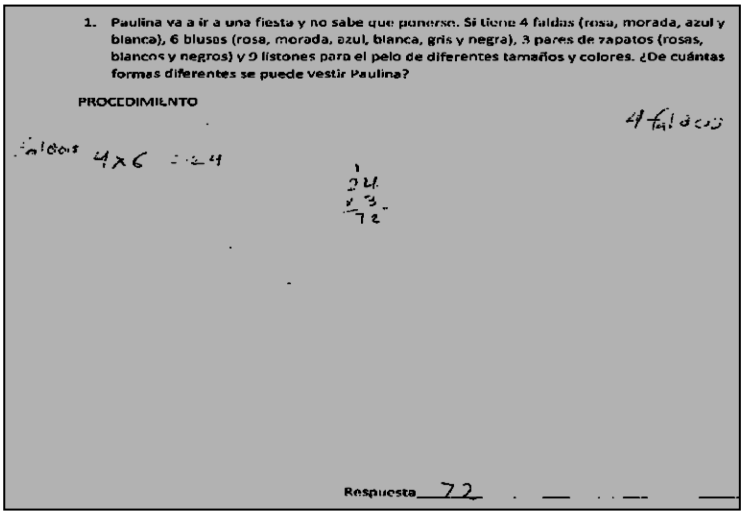
PROCEDIMIENTO

$$\begin{array}{r} 10 \\ \times 13 \\ \hline 130 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9 \\ 130\overline{)170} \\ 0 \end{array}$$

RESULTADO 9 colas

Los alumnos que alcanzaron este nivel, utilizan la simbolización convencional de tipo multiplicativo para resolver el problema. Si bien no se puede afirmar que hayan adquirido un esquema, puesto que como menciona Vergnaud (2003) la construcción de este lleva varios años, y al mismo tiempo no es algo que se pueda comprobar en este trabajo, si hay una comprensión de la idea de cardinal en el esquema de combinatoria, como la posibilidad de combinar los elementos de un conjunto con otro u otros, como se puede observar en el capitulo anterior. Así mismo pueden resolver problemas que involucran una multiplicación y una división para poder llegar al resultado final.

8.4.2 Nivel de logro bajo



1. Paulina va a ir a una fiesta y no sabe que ponerse. Si tiene 4 faldas (rosa, morada, azul y blanca), 6 blusas (rosa, morada, azul, blanca, gris y negra), 3 pares de zapatos (rosas, blancos y negros) y 9 listones para el pelo de diferentes tamaños y colores. ¿De cuántas formas diferentes se puede vestir Paulina?

PROCEDIMIENTO

4 faldas

faldas 4x6 = 24

24
x 3
72

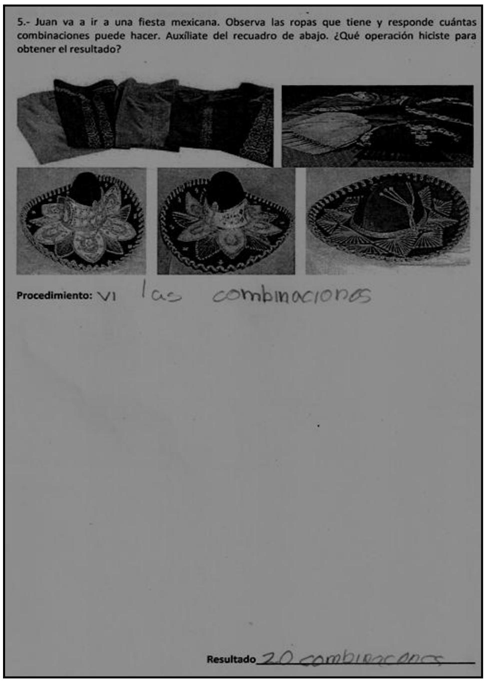
Respuesta 72

Aun cuando el ejemplo anterior es de nivel bajo, hubo un avance en cuanto a la utilización de la simbolización convencional de tipo multiplicativo. El análisis del problema y la comprensión del mismo no se logró se siguen buscando las variables pertinentes para poder decidir la operación a utilizar y no se completa el procedimiento.

A continuación se muestra el comparativo de las respuestas dadas por los alumnos en el cuestionario inicial y en el final, para lo cual se escogió el problema que se repitió en ambos cuestionarios; con el fin de que se pueda observar de forma más clara la evolución que tuvieron los alumnos de los diferentes niveles.

- Nivel alto: Los alumnos de este nivel no lograron resolver los problemas del modelo cardinal en la sub-categoría de combinatoria en el cuestionario inicial; así que se puede decir que de un nivel bajo lograron alcanzar un nivel alto, al poder resolver los problemas.

Cuestionario inicial problema no 5

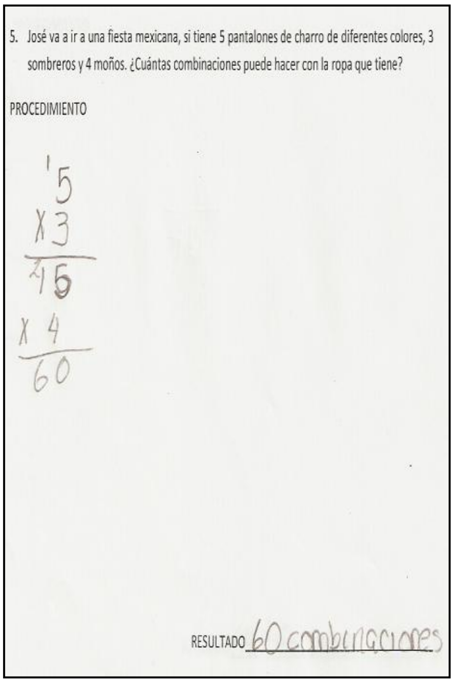


5.- Juan va a ir a una fiesta mexicana. Observa las ropas que tiene y responde cuántas combinaciones puede hacer. Auxíliate del recuadro de abajo. ¿Qué operación hiciste para obtener el resultado?

Procedimiento: vi las combinaciones

Resultado 20 combinaciones

Cuestionario final problema no 5



5. José va a ir a una fiesta mexicana, si tiene 5 pantalones de charro de diferentes colores, 3 sombreros y 4 moños. ¿Cuántas combinaciones puede hacer con la ropa que tiene?

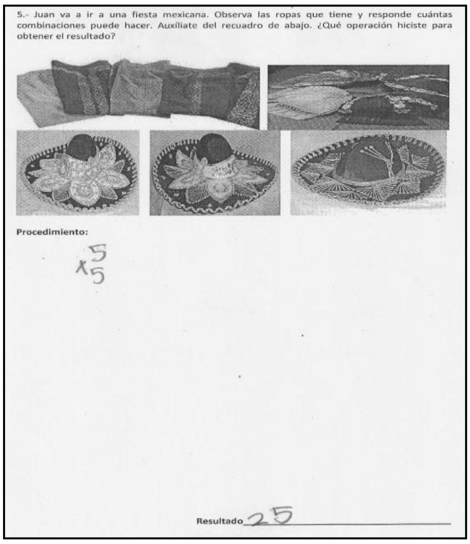
PROCEDIMIENTO

5
x3
15
x 4
60

RESULTADO 60 combinaciones

- Nivel medio; al igual que sus compañeros del nivel alto, en el cuestionario inicial no lograron responder los problemas y para el cuestionario final ya lo pudieron hacer utilizando la simbolización convencional.

Cuestionario inicial problema 5



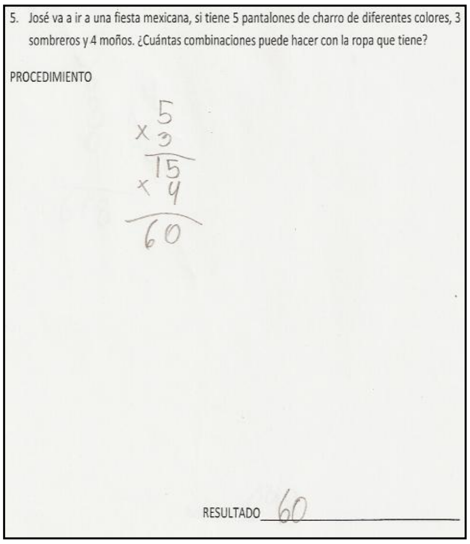
5.- Juan va a ir a una fiesta mexicana. Observa las ropas que tiene y responde cuántas combinaciones puede hacer. Auxíliate del recuadro de abajo. ¿Qué operación hiciste para obtener el resultado?

Procedimiento:

5
x5

Resultado 25

Cuestionario final problema 5



5. José va a ir a una fiesta mexicana, si tiene 5 pantalones de charro de diferentes colores, 3 sombreros y 4 moños. ¿Cuántas combinaciones puede hacer con la ropa que tiene?

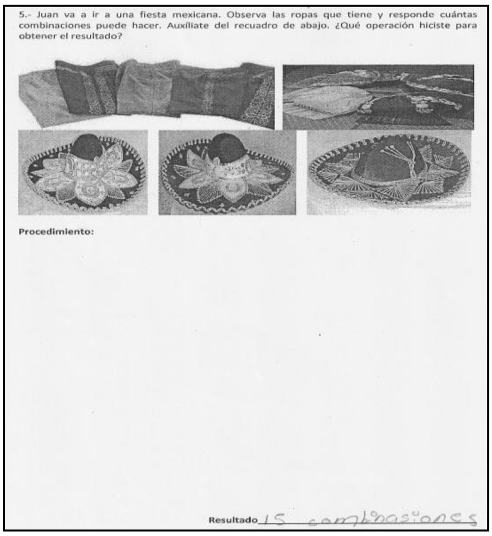
PROCEDIMIENTO

5
x 3
15
x 4
60

RESULTADO 60

- Nivel Bajo; en este caso se muestra el avance que tuvo una de las alumnas de nivel bajo a un nivel alto, ya que la otra no tuvo movimiento de nivel.

Cuestionario inicial problema 5

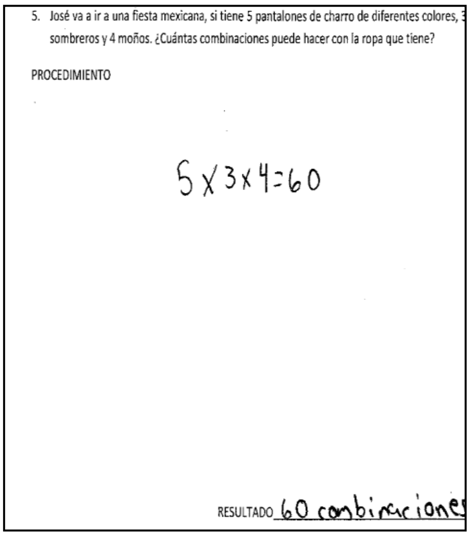


5.- Juan va a ir a una fiesta mexicana. Observa las ropas que tiene y responde cuántas combinaciones puede hacer. Auxíliate del recuadro de abajo. ¿Qué operación hiciste para obtener el resultado?

Procedimiento:

Resultado 15 combinasiones

Cuestionario inicial problema 5



5. José va a ir a una fiesta mexicana, si tiene 5 pantalones de charro de diferentes colores, 3 sombreros y 4 moños. ¿Cuántas combinaciones puede hacer con la ropa que tiene?

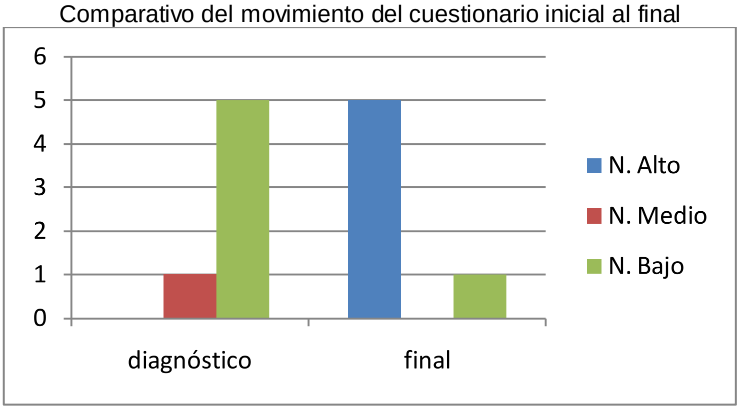
PROCEDIMIENTO

5x3x4=60

RESULTADO 60 combinaciones

Para cerrar este capítulo se muestra en la siguiente gráfica el movimiento de los alumnos después de la aplicación del programa de intervención.

Gráfica No.24
Comparativo del movimiento del cuestionario inicial al final



Se puede concluir que los resultados obtenidos muestran que durante la intervención se logró potenciar la ZDP al trabajar en diadas o triadas con los alumnos colocados según sus resultados en el cuestionario inicial y posteriormente moviéndolos de acuerdo a los avances individuales logrados por sesión.

Con lo anterior se logró que la ZDP se convirtiera en ZDA, lo que permite qué los alumnos sigan aprendiendo y desarrollándose.

CONCLUSIONES

El estudio tuvo como objetivo general Identificar las dificultades que presentaban los niños en el aprendizaje de los problemas de estructura multiplicativa, específicamente en relación a los diferentes modelos matemáticos. Posteriormente, se diseñó un programa de intervención psicopedagógico que contempló tanto aspectos matemáticos como cognitivos con el objetivo de verificar la evolución de las ideas matemáticas. El estudio se llevó a cabo con seis niños de 5º grado de primaria de una escuela pública del Distrito Federal con edades variando entre 10 y 11 años de edad. En tres etapas: Primera: Aplicación del cuestionario inicial de problemas de estructura multiplicativa seguido de una entrevista clínica individual y aplicación del cuestionario de escritura numérica seguido de una entrevista clínica individual; Segunda: Aplicación de un programa de intervención psicopedagógico; Tercera: Aplicación de un cuestionario final.

Los participantes del estudio presentaron algunas dificultades con los problemas de estructura multiplicativa (multiplicación y división), principalmente cuando se trataba del modelo matemático cardinal específicamente en la idea de combinatoria. En este mismo sentido, Saiz (1994) menciona que cuando el problema carece de palabras clave los alumnos no saben qué operación pueden utilizar, por lo que se vuelve necesario que estos comprendan los problemas y las ideas matemáticas, así como en contexto de resolución de problemas.

De igual forma de los resultados obtenidos se observa que es importante que los alumnos tengan claras las reglas del sistema de numeración decimal, y específicamente los alumnos de 5º grado aún recurren a reglas que en un principio fueron empíricas, como lo apunta Lerner cuando menciona las reglas intuitivas de los niños y Brizuela (2006) en su estudio sobre el uso de puntos y comas para facilitar la lectura y la escritura de números.

Por otro lado, en lo que respecta al aprendizaje de la idea de combinatoria para la resolución de problemas de multiplicación y división, se muestra la importancia en retomar los conocimientos previos de los alumnos en el diseño de un programa de intervención para potenciar el conocimiento de los estudiantes que ocurre con pares de estudiantes y con la ayuda de algunas estrategias aplicadas por la psicología educativa, en este caso, los alumnos del 5º grado del CEPP-STUNAM lograron tener un entendimiento de la idea matemática de combinatoria, misma que es difícil, pues presenta como característica principal el no poder resolverse con una suma o una resta reiterada, lo que requiere que los alumnos tengan un pensamiento multiplicativo o de menos estén en la transición del pensamiento aditivo al multiplicativo. Como afirma Vigotsky (1988) el aprendizaje está relacionado con la cultura en la que el sujeto está inmerso, y al ser el lenguaje matemático una serie de símbolos, éste debe aprenderse en interacción con los otros, con el fin de que el niño con menores conocimientos previos, pueda tomar de un niño más experto las herramientas necesarias para poder resolver los problemas que se le presenten y así poder potenciar su ZDP. De igual forma, Vergnaud (1994) explica que el aprendizaje de conceptos es una tarea difícil que requiere un tiempo relativamente largo, por lo que en este caso no podemos afirmar que el concepto de combinatoria está adquirido, pero sí que los alumnos comprendieron en un nivel inicial dicha idea, lo que se pudo comprobar con los resultados del cuestionario final.

El presente trabajo aporta a la psicología educativa el darse cuenta de lo importante que es conocer las ideas que tienen los alumnos con respecto al contenido que se va a trabajar para poder diseñar un programa de intervención que logre los objetivos planteados, para esto el hacer sólo un cuestionario diagnóstico no es suficiente, ya que influyen factores como los nervios o la distracción que hacen que los chicos no respondan de forma óptima; es por esto que las entrevistas clínicas individuales ayudan a explorar de una forma más profunda el pensamiento del niño y así poder determinar con mejor precisión el nivel en el cual se encuentra. Lo anterior sirve para poder planear las tareas, las cuales como menciona Vygotsky tienen que representar un reto para los niños y que éstas no sean tan complicadas que no lo logren resolver.

El cuestionario final sirve para poder verificar si la Zona de Desarrollo Próximo (ZDP) se transformó en Zona de Desarrollo Actual (ZDA) en la que los alumnos se encuentran después de la intervención y entonces poder decidir con qué contenidos escolares se continúa y cómo los mismos serán abordados.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Balacheff, N. (1990). Towards a problematique for research on mathematics teaching. *En Journal for research in mathematics aducation*. Número 4.

- Bouvier, A. y George, M. (1984). *Diccionario de matemáticas*. Madrid: Aral.

- Brizuela, B. (2006). *Desenvolvimento Matemático na crianca: explorando notacoes*. Brasil:Artmed.

- Brosseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática.* Facultad de matemáticas, astronomía y física. Universidad de Córdoba.

- Buenrostro, A. (2003). *Aritmética y bajo rendimiento escolar: Diseño e implementación de los modelos de enseñanza, tesis doctoral*; Doctorado en Ciencias con especialidad en matemática educativa; CINVESTAV. IPN. México.

- Cantero, A., Hidalgo. Á., Merayo, B., Primo, F., Sanz, A., Vega, A (2003). *Resolución de problemas aritméticos en educación primaria*.

- Castro, E y Castro, E. (1995). *Estructuras aritméticas elementales y su modernización*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericana.

- Castro, E. (2001). *Didáctica de la matemática en la educación primaria*. Madrid:Ed. Síntesis, educación.

- Cole, M. (1999). *Psicología Cultural*. Madrid, Morata.

- Gómez, A. (1998). *Numeración y Cálculo*. Madrid, Ed. Síntesis.
- Hernández, R., Fernández-Collado, C. y Baptista, P. (2006). *Metodología de la Investigación*. Cuarta edición. Mc Graw Hill: México.
- Kyong-Hee, L. (2008). Change in preservice teacher's understanding on división with zero. *En International Group for the Psicology of mathematics education*. México PME 32 and PME-NA XXX.
- Lerner, D. y Sadovsky, P. (1995). El sistema de numeración decimal: un problema didáctico de las matemáticas, Capítulo V. En Parra C. y Saiz, I. Compiladoras (2001) *Didáctica de las matemáticas*. Buenos Aires:Paidós.
- Meza Gómez, C. (1991). *Multiplicar y Dividir: a través de la resolución de problemas.* Madrid, Ed. Visor.
- Moll, L. (1993). Vygotsky y la educación: connotaciones y aplicaciones de la Psicología Sociohistórica de la educación. Argentina, Aique.
- Montero, P. (2003). La Zona de Desarrollo Próximo: procedimientos y tareas de aprendizaje. Habana, Cuba. Editorial Pueblo y Educación.
- Newman, D., Griffin, P. y Cole, M. (1998). La zona de construcción del conocimiento: trabajando por un cambio cognitivo en educación. Madrid: Morata.
- Nunes, T. y Bryant, P. (1997). Las matemáticas y su aplicación: la perspectiva del niño. México: Siglo XXI.
- Saiz, I. (1994). Dividir con dificultad o la dificultad de dividir. Capítulo VI. En Parra, C. y Saiz, I. (2001) *Didáctica de las matemáticas*. Buenos Aires: Paidós.

- Saaty, T.L.; Joyce, A.M. (1981). *Thinking with models*. Oxford: Pergamon Press.

- Teregi, F. y Wolman, S. (2007). Sistema de numeración: consideraciones acerca de su enseñanza. *Revista Iberoamericana de Educación.* No. 43, número dedicado a la enseñanza de las matemáticas. Madrid:OEI.

- Vergnaud, G. (1983). *Multiplicative structures*. En J. Hiebert y M. Behrs (Eds.), Number concept and operations in the middle grades. Hillsdale, NJ: Erlbaum; Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics..

- Vergnaud, G. (1994). La teoría de los campos conceptuales. En *Lecturas de didáctica de las matemáticas, escuela francesa*. Compilación de Ernesto Sánchez y Gonzalo Zubieta. Traducido de: La theorie des Champs Conceptuales. Recherches en Didactiques des mathetiques. Vol 10. Nros 2 y 3.1990. Pgs. 133-170.

- Verngnaud, G. (2003). *El niño, las Matemáticas y la Realidad. Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. México, Trillas 1991 (reimpresión 1993).

- Vygotsky, L. (1988). El desarrollo de las funciones psicológicas superiores. México: Grijalbo.

ANEXOS

ANEXO 1

CUESTIONARIO DIAGNÓSTICO

ESCRITURA NUMÉRICA

Cuestionario diagnóstico

NOMBRE____ FECHA________

INSTRUCCIONES: Lee con atención y contesta lo que se te pide. En caso de alguna duda pregúntale a la entrevistadora. Si necesitas algún material, puedes solicitarlo POR FAVOR NO BORRES NADA.

1.- Dictado de números

___________________________   ___________________________

____________________________   ___________________________

___________________________   ___________________________

___________________________   ___________________________

___________________________   ___________________________

2.- Escribe los siguientes números con letra

1,019____

____

3,845,677____

____

10,064____

____

300,050____

____

90,579____

____

3.- Coloca el número que va antes y el número que va después.

__________ 23,467____________ _________45,000__________

___________10,000____________ _________6,209___________

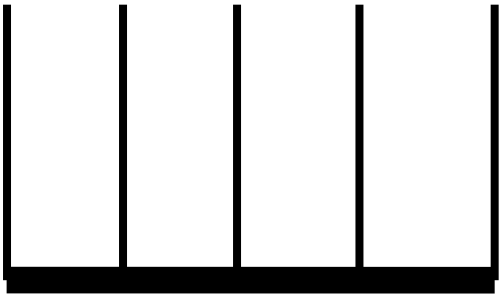
__________9,999,999__________ _________83,699__________

__________70,300___________ _________1,100___________

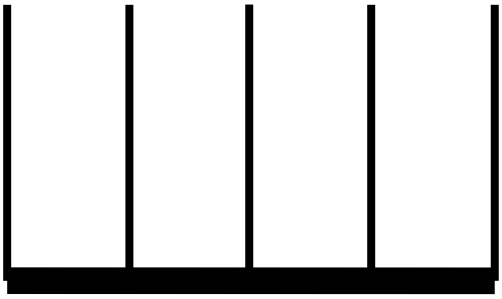
__________10,672___________ _________13,550__________

4. Representa las siguientes cantidades en el ábaco:

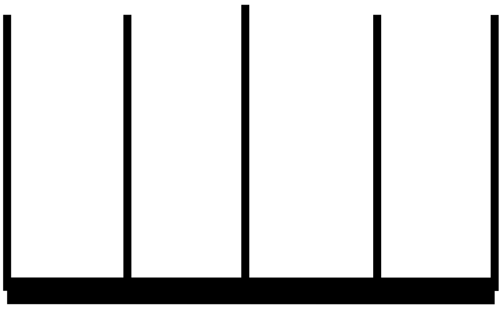
1.000



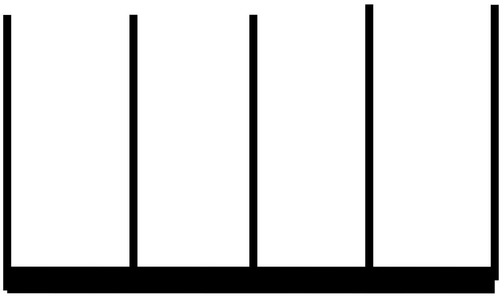
35,003



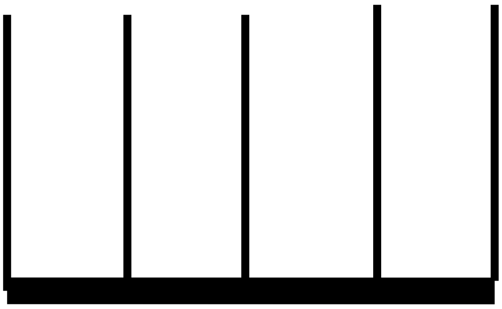
1,00



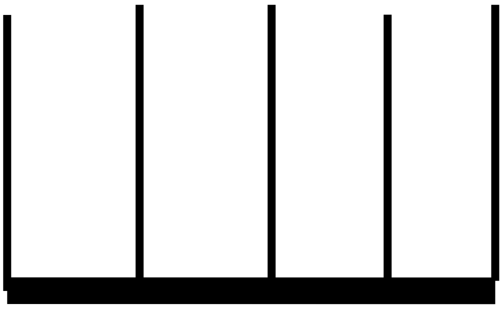
30,000



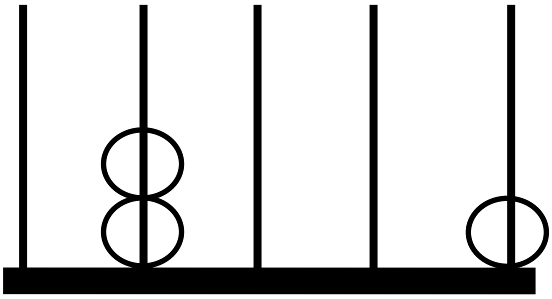
3,005



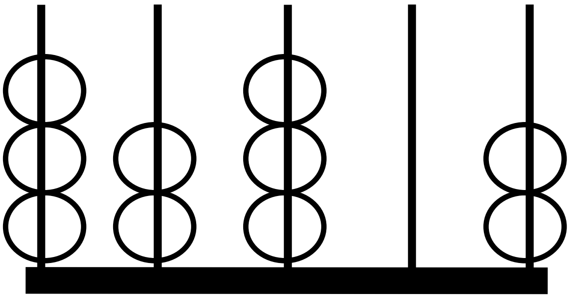
1,100



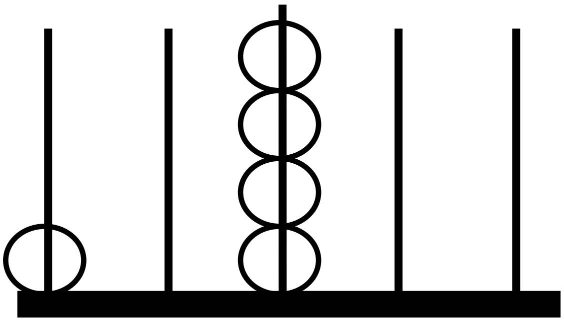
5. Observa el ábaco y responde qué números están representados



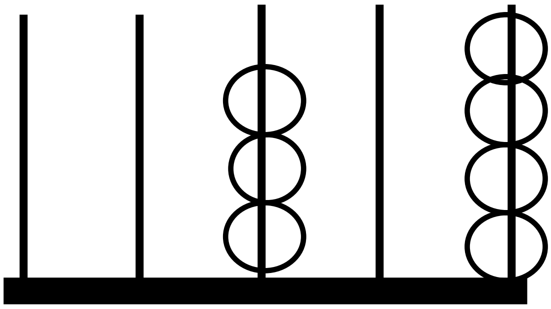
Respuesta__________________



Respuesta__________________



Respuesta__________________



Respuesta__________________

ANEXO 2

CUESTIONARIO DIAGNÓSTICO

MODELOS MATEMÁTICOS

FUNCIONAL

CARDINAL EN SUB-CATEGORÍA DE ESQUEMA RECTANGULAR

CARDINAL ES SUB-CATEGORÍA DE COMBINATORIA

Cuestionario diagnóstico

Nombre_______________________________________ Fecha__________________

Grado__________ Escuela____

Hora de Inicio__________________ Hora de Término_________________

INSTRUCCIONES: Lee con atención los siguientes problemas y contesta lo que se te pide. En caso de alguna duda pregúntale a la entrevistadora. Si necesitas algún material, puedes solicitarlo POR FAVOR NO BORRES NADA.

Funcional
1.- En la fiesta mexicana de la escuela, la maestra de 5º grado va a repartir bolsas con 10 dulces cada una. Si en su salón hay 30 alumnos, se pregunta ¿Cuántos bolsas de dulces necesita para todos los estudiantes? ¿Cuántos dulces necesita comprar?

Procedimiento:

Resultado_______________________________________

1.1 Si ahora se juntan los 45 alumnos de 6º grado ¿Cuántos bolsas de dulces necesita para todos los estudiantes? ¿Cuántos dulces necesita comprar?

Procedimiento:

Resultado_______________________________________

1.2 Si ahora juntarán todos los niños de primaria ¿Cuántos bolsas de dulces necesita para todos los estudiantes? ¿Cuántos dulces necesita comprar? Puedes auxiliarte de la tabla para resolver el problema

Grado	Número de alumnos
Primero	30
Segundo	35
Tercero	28
Cuarto	29
Quinto	30
Sexto	45

Procedimiento:

Resultado____

2.- De la fiesta mexicana sobraron 120 dulces que se le van a dar a los 30 niños de preescolar ¿Cuántos dulces le tocan a cada niño?

Procedimiento:

Resultado______________________________________

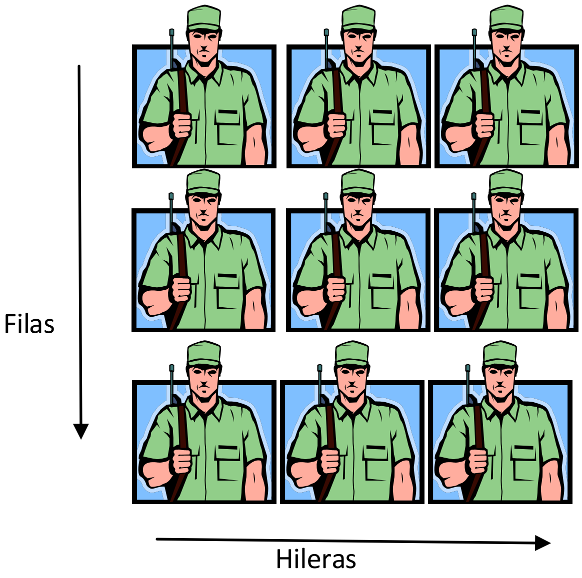
Rectangular

3.- El maestro albañil tiene 620 mosaicos con la figura de una margarita de cuatro colores diferentes (rojas, verdes, azules y rosas) Si tiene que pegar en una pared la misma cantidad de mosaicos de cada color. ¿Qué cantidad de mosaicos tiene que pegar? (respuesta 155)

Procedimiento:

Resultado______________________________________

4.- En el desfile del 16 de septiembre, los soldados conformarán 25 hileras. Si en cada una de las filas hay 30 soldados. ¿Cuántos soldados hay en el desfile?



Procedimiento:

Resultado______________________________________

Combinatoria

5.- Juan va a ir a una fiesta mexicana. Observa las ropas que tiene y responde cuántas combinaciones puede hacer. Auxíliate del recuadro de abajo. ¿Qué operación hiciste para obtener el resultado?

Procedimiento:

Resultado_____________________________________

6. María puede hacer 45 combinaciones diferentes con 5 faldas de colores (amarilla, verde, rosa y naranja) ¿Cuántas camisas tendrá?

Procedimiento:

Resultado_____________________________________

Anexo 3

Cuestionario final

Modelo cardinal en sub-categoría de combinatoria

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
CUESTIONARIO FINAL

NOMBRE ____

ESCUELA ______________________ _____ **GRADO** __________ **FECHA** ________________

INSTRUCCIONES: Lee con atención los siguientes problemas y resuelve lo que se te pide. No olvides escribir el procedimiento y por favor NO BORRES NADA, si te equivocas encierra entre paréntesis lo que está incorrecto.

1. Paulina va a ir a una fiesta y no sabe que ponerse. Si tiene 4 faldas (rosa, morada, azul y blanca), 6 blusas (rosa, morada, azul, blanca, gris y negra), 3 pares de zapatos (rosas, blancos y negros) y 9 listones para el pelo de diferentes tamaños y colores. ¿De cuántas formas diferentes se puede vestir Paulina?

PROCEDIMIENTO

Respuesta____

2. En la fiesta de día de muertos del CEPP-STUNAM con 50 niños se pueden formar 4500 parejas diferentes. ¿Cuántas niñas habrá en la fiesta?

PROCEDIMIENTO

RESULTADO___________________________________

3. Si Andrea puede hacer 45 combinaciones diferentes con 9 pantalones de diferentes colores. ¿Cuántas blusas tendrá?

PROCEDIMIENTO

RESULTADO______________________________________

4. Julián fue a la papelería a comprar tarjetas para formar animales locos. Si con 10 pares de patas y 13 cabezas puede formar 1170 animales locos. ¿Cuántas colas tendrá?

PROCEDIMIENTO

RESULTADO______________________

5. José va a ir a una fiesta mexicana, si tiene 5 pantalones de charro de diferentes colores, 3 sombreros y 4 moños. ¿Cuántas combinaciones puede hacer con la ropa que tiene?

PROCEDIMIENTO

RESULTADO__________________________________

ANEXO 4

CUESTIONARIO DEL ESTUDIO PILOTO

IDEA DE REPARTO

CUESTIONARIO

NOMBRE____EDAD___________

ESCUELA____GRADO__________

FECHA____

1.- 720 figuritas serán repartidas entre 18 niños. ¿Cuántas figuritas le corresponden a cada uno?

2.- ¿A cuántos niños se les puede repartir 8 dulces, si se cuenta con 240 dulces?

3.- ¿A cuántos niños se les puede repartir 8 juguetes, si en total hay 240 juguetes?

4.- ¿Cuántos ramos se pueden hacer con 144 flores, si cada ramo debe de estar formado por 8 flores?

5.- Si a cada uno de 8 floreros le correspondieron 14 flores. ¿Cuántas flores formaban esa colección?

ANEXO 5

CUESTIONARIO PILOTO

MODELOS MATEMÁTICOS (LINEAL, FUNCIONAL, CARDINAL, NUMÉRICO Y DE MEDIDA)

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

Nombre____ Fecha____________________

Grado___________ Escuela____

Hora de Inicio____________________ Hora de Término___________________

1. MODELO LINEAL

1.- Rosa tiene una rana que todos los días salta 3 metros. ¿Cuántos metros saltará la rana de Rosa en 15 días?

|---|

2.- Un carro recorre una distancia de 350 km en 5 días. ¿Cuántos kilómetros recorre en un día?

|---|

2. MODELO CARDINAL: Unión repetida de conjuntos, matrices o esquema rectangular y producto cartesiano de dos conjuntos.

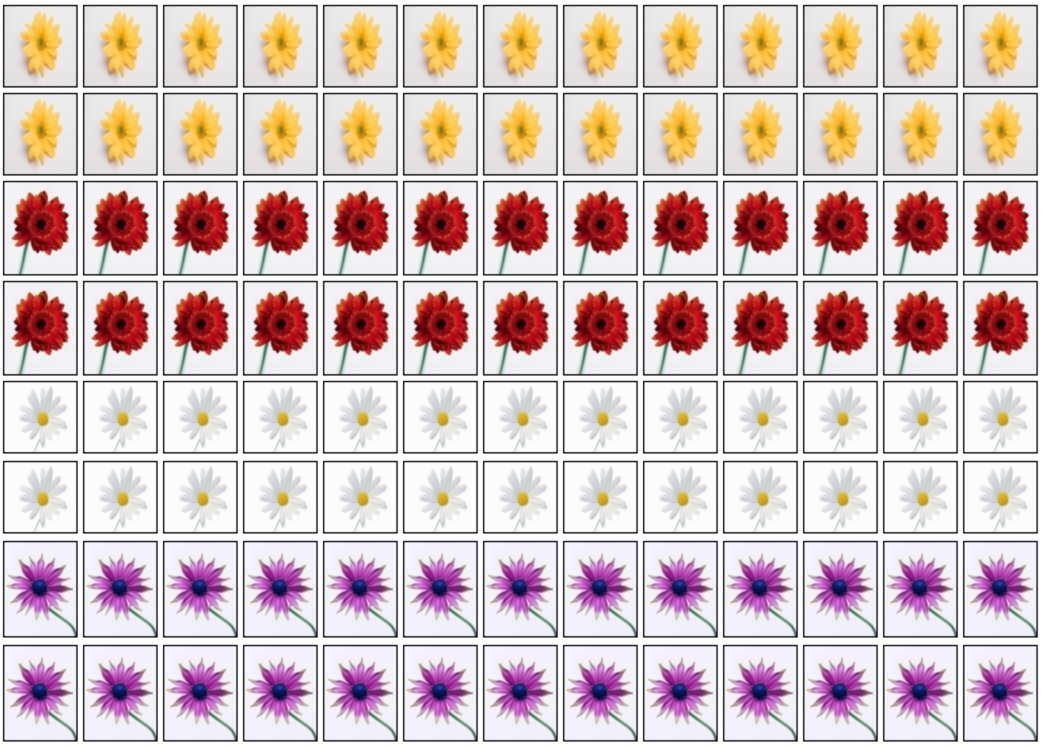
a) Unión Repetida de Conjuntos

3.- Juanito tiene 6 amigos y compró una torta de $20.00 para cada uno de ellos ¿Cuánto pagó por las tortas?

4.- El profesor de educación física guarda en su salón la misma cantidad de balones para jugar futbol, basquetbol y voleibol y tiene 45 balones en total ¿Cuántos balones tiene de cada deporte?

b) Esquema Rectangular

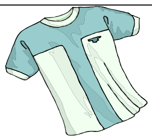
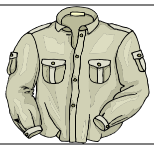
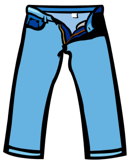
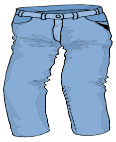
5.- El maestro albañil tiene 620 mosaicos con la figura de una margarita de cuatro colores diferentes como se muestra en el ejemplo de abajo: amarillo, rojo, blanco y morado. Si tiene que pegar en una pared rectangular la misma cantidad de mosaicos de cada color. ¿Qué cantidad de mosaicos de cada color tiene que pegar?



6.- En el desfile del 16 de septiembre, los soldados conformarán 25 hileras. Si en cada una de las hileras hay 30 soldados. ¿Cuántos soldados hay en el desfile?

Producto Cartesiano de Dos Conjuntos

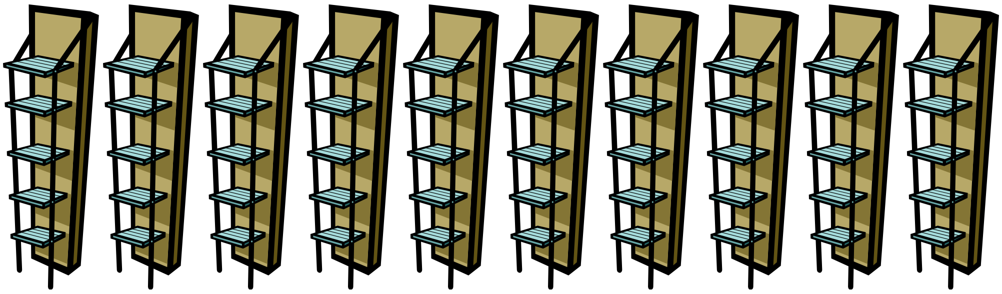
7.- Juan va a ir a una fiesta mexicana. Observa las ropas que tiene y responde cuántas combinaciones puede hacer. Auxíliate del recuadro de abajo. ¿Qué operación hiciste para obtener el resultado?

Procedimiento

Resultado

8.- Juan trabaja en una librería, le llegó una caja con 500 libros y los tiene que acomodar en 10 estantes diferentes. Si en cada estante tiene que colocar la misma cantidad de libros, ¿Cuántos libros puso en cada estante? Si deseas auxíliate de los dibujos para resolver el problema.

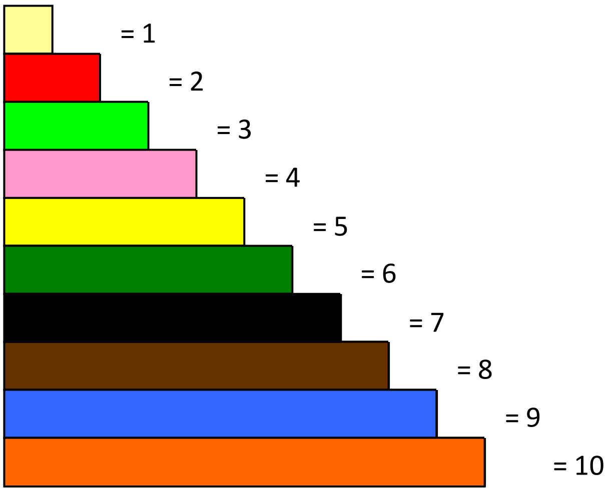


Procedimiento

Resultado

3. MODELO DE MEDIDA

9.- Observa y manipula la representación de los números del 1 al 10 con las correspondientes regletas de colores.



a) Representa el número 10 usando regletas iguales. ¿De cuántas maneras diferentes puedes representar el número 10?

b) Representa el número 10 con regletas distintas. ¿De cuántas maneras diferentes puedes representar el número 10?

c) Ahora arma la representación de los números 5, 13 y 47 usando regletas de diferentes colores. ¿De cuántas maneras diferentes puedes representar los números anteriores?

10.- Pedrito tiene una regleta de color azul y quiere dividirla en 3 partes iguales. Representa el resultado de la operación con números pero usando las regletas.

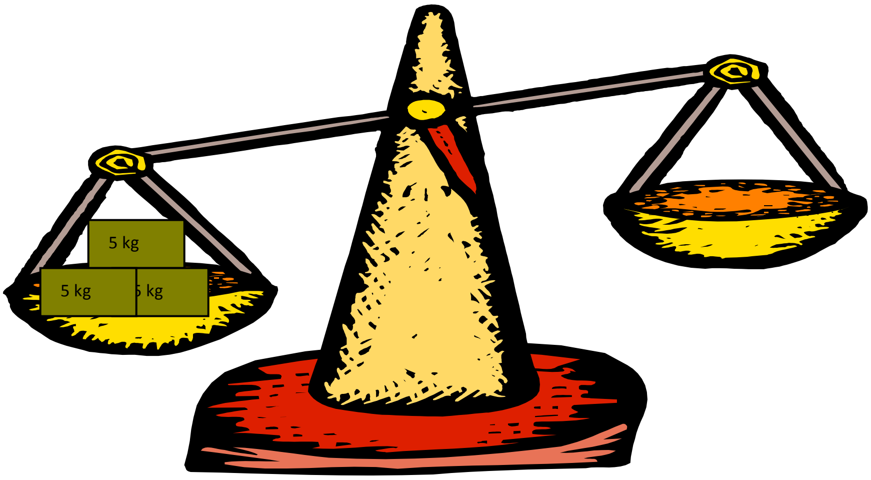
REPARTO

11.- Tania tiene 5 barras, cada barra pesa 3 kilos. Su hermano Mario tiene varias barras con pesos diferentes:

Una barra de 4 kilos
Una barra de 2 kilos
Una barra de 11 kilos
Una barra de 15 kilos

¿Qué barras va a utilizar Mario para tener el mismo peso que tiene su hermana Tania? Recuerda que la balanza tiene que quedar equilibrada.

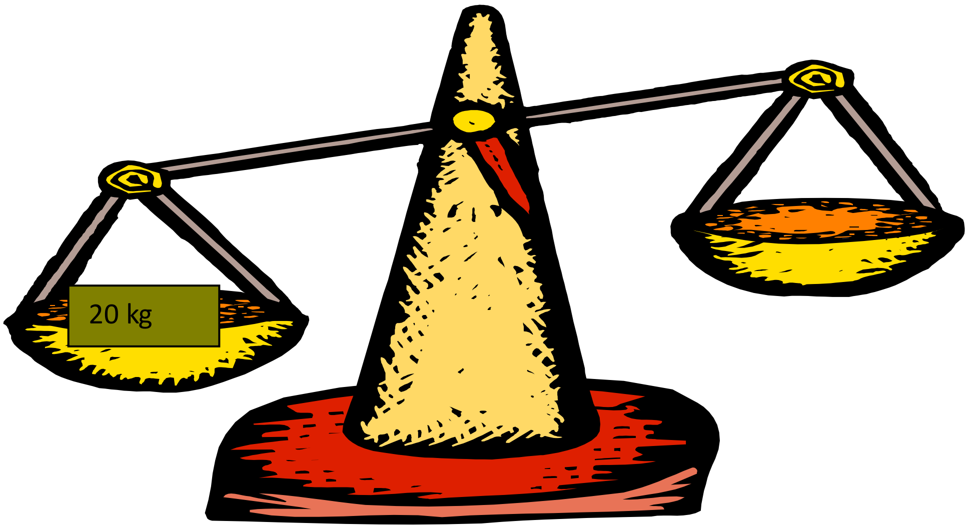
Utiliza el material que tienes para resolver el problema y representa lo que hiciste con números.



Procedimiento

Resultado

12.- En uno de los platos de la balanza que se muestra abajo hay una barra de 20 kilos ¿Cuántas barras tienes que colocar en el otro plato, si solo puedes utilizar las de 5 kilos? Utiliza el material para resolver el problema y representa lo que hiciste en una operación.



Procedimiento Resultado

4. MODELO NUMÉRICO

13.- Juanita tiene 1212 dulces y los quiere repartir entre sus 4 amigos, ¿Cuántos dulces le tocan a cada uno de sus amigos?

14.- En la tienda venden paquetes de galletas, cada paquete tiene 12 galletas y la caja de galletas tiene 49 paquetes ¿Qué cantidad de galletas habrá en total?

5. MODELO FUNCIONAL

15.- En la fiesta mexicana de la escuela, la directora va a repartir bolsas con 10 dulces a todos los niños de la primaria, tomando en cuenta la siguiente información ¿Cuántos dulces necesita en total?

Grado	Número de alumnos
Primero	30
Segundo	35
Tercero	28
Cuarto	29
Quinto	32
Sexto	32

16.- De la fiesta mexicana sobraron 120 dulces que se le van a dar a los 30 niños de preescolar año. ¿Cuántos dulces le tocan a cada niño?

ANEXO 6

PROGRAMA DE INTERVENCIÓN

SESIÓN 1

Duración 1 hora

TEMA	OBJETIVO	MATERIAL	ACTIVIDAD	EVALUACIÓN
Problemas de estructura multiplicativa en el modelo cardinal	Que el alumno inicie con la comprensión de los problemas de multiplicación en la idea de combinatorias.	Hoja de trabajo Muñecas recortables del ropa intercambiable Tijeras	1. Recortar la muñeca y la ropa y vestirla de todas las formas diferentes que se puedan utilizando toda la ropa.	Anotar en la hoja de trabajo cuantas combinaciones se pudieron hacer y la forma en la que se puede llegar al resultado sin utilizar la muñeca por equipo.

SESIÓN 2

Duración 1 hora

TEMA	OBJETIVO	MATERIAL	ACTIVIDAD	EVALUACIÓN
Problemas de estructura multiplicativa en el modelo cardinal	Que el alumno comprenda la idea de combinatoria en problemas de multiplicación.	Pizarrón Gises	1. Se simulará un salón de fiestas en el salón, se les pedirá a los niños que formen todas las parejas de baile posibles (de niño y niña), para lo cual tienen que organizarse y moverse, ya que tengan el resultado pasarán a escribirlo en el pizarrón. 2. Se les pedirá que se formen con sus equipos y que representen en un problema y una operación lo que se acaba de hacer y cada equipo comentará al resto del grupo lo que hizo.	Los alumnos exponen las conclusiones a las que llegaron con el ejercicio.

SESIÓN 3

Duración 1 hora

TEMA	OBJETIVO	MATERIAL	ACTIVIDAD	EVALUACIÓN
Problemas de estructura multiplicativa en el modelo cardinal	Que el alumno comprenda la idea de combinatoria en problemas de multiplicación.	Hojas de trabajo Lápices Gises Pizarrón	1. Por equipo resolver los problemas que aparecen en la hoja de trabajo 2. Escoger un integrante de cada equipo que explique la forma en la que resolvieron los problemas.	Por equipo elaborar 2 problemas uno de división y otro de multiplicación con la idea de combinatoria.

SESIÓN 5

Duración 1 hora

TEMA	OBJETIVO	MATERIAL	ACTIVIDAD	EVALUACIÓN
Problemas de estructura multiplicativa en el modelo cardinal	Que el alumno comprenda la idea de combinatoria en problemas de división. Que el alumno resuelva problemas de división.	Hojas de trabajo Lápices	1. Resolver los problemas de las hojas de trabajo elaborados por sus compañeros. 2. Discutir con el equipo que los elaboró los resultados a los que llegaron.	De forma individual se pregunta por qué los problemas se resuelven de esa forma y no con otra operación.

SESIÓN 5

Duración 1 hora

TEMA	OBJETIVO	MATERIAL	ACTIVIDAD	EVALUACIÓN
Problemas de estructura multiplicativa en el modelo cardinal	Que el alumno comprenda la idea de combinatoria en problemas de división. Que el alumno resuelva problemas de división.	Hojas de trabajo Lápices	1. Resolver los problemas de las hojas de trabajo de forma individual.	Llegar a una conclusión de la sesiones aplicadas en grupo.

ANEXO 7

MATERIAL SESIÓN 1

ANEXO 8

HOJAS DE TRABAJO

1, 4, 5 Y 6

DEL PROGRAMA DE INTERVENCIÓN

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

NOMBRE DE LOS INTEGRANTES DEL EQUIPO: ____________________________

ESCUELA: ___________________ **GRADO :** ________ **FECHA:** _____________

SESÍON 1

INSTRUCCIONES:

1) Con el material que se les proporciona ¿cuántas combinaciones diferentes se pueden hacer con la ropa que tienes?

2) Escriban cómo llegaron al número de combinaciones y expliquen ¿por qué lo hicieron así?

Datos: Número de vestidos: _____________________

Número de faldas: _____________________

Número de blusas o playeras: _____________________

Número de pares de zapatos: _____________________

Número de accesorios: _____________________

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

NOMBRE DE LOS INTEGRANTES DEL EQUIPO: ______________________

ESCUELA: _________________ **GRADO :** _______ **FECHA:** __________

SESÍON 4

INSTRUCCIONES:

1. Resuelvan los siguientes problemas. No olviden anotar el procedimiento y escribir por qué lo resolvieron de esa manera.

1). Para una fiesta de día de muertos, los alumnos de 5to A del CEPP-STUNAM van a adornar su salón. Se les ocurrió comprar 15 brujas, 6 murciélagos y 10 calacas. Si Quieren pegar 3 figuras juntas. De cuántas formas diferentes pueden cambiar sus adornos?

Procedimiento

Respuesta ___________________________

2). Carmen tiene 5 pares de zapatos de diferentes colores, 4 blusas y 6 pantalones y 2 sombreros. De cuantas formas diferentes puede cambiar Carme su ropa?

Procedimiento

Respuesta ___________________________

3). Alicia tiene una muñeca a la que se le puede intercambiar la ropa. Si puede hacer 45 combinaciones diferentes con 9 pantalones. Cuantas blusas tendrá?

Procedimiento

Respuesta ___________________________

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

NOMBRE DE LOS INTEGRANTES DEL EQUIPO: ______________________

ESCUELA: __________________ **GRADO :** _______ **FECHA:** ___________

SESÍON 5

INSTRUCCIONES:

1. Resuelvan los siguientes problemas. No olviden anotar el procedimiento y escribir por qué lo resolvieron de esa manera.

1) Tengo 2 pantalones de mezclilla y 3 camisas. (una verde otra morada y otra negra). De cuantas formas diferente me puedo vestir?

Procedimiento

Respuesta ___________________________

2) Si puedo vestirme de 6 formas diferentes con 2 pantalones de mezclilla. Cuántas camisas tengo?

Procedimiento

Respuesta ___________________________

3). Si puedo vestirme de 12 formas diferentes con 2 pantalones de mezclilla y 3 camisas (una verde, otra morada y otra negra) Cuantos pares de calcetas tengo?

Procedimiento

Respuesta ___________________________

4). Si con 2 pantalones de mezclillas, 3 camisas (una verde, otra morada y otra negra) y 2 pares de calcetas (blancos y negros) puedo vestirme de 36 formas diferentes. Cuantos pares de zapatos tengo?

Procedimiento

Respuesta ___________________________

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

NOMBRE DE LOS INTEGRANTES DEL EQUIPO: ______________________

ESCUELA: __________________ **GRADO:** _______ **FECHA:** ___________

SESÍON 6

INSTRUCCIONES:

1. Resuelvan los siguientes problemas elaborados por tus compañeros. No olviden anotar el procedimiento y escribir por qué lo resolvieron de esa manera.

1 Toño tiene 5 pantalones y 9 suéteres y 5 pares de calcetines y 5 calzones. Cuantas combinaciones se pueden hacer en total?

Procedimiento

Respuesta ____________________________

2 Ana tiene 2 blusas y 4 pantalones si puede hacer 72 combinaciones diferentes ¿Cuántos suéteres tiene?

Procedimiento

Respuesta ____________________________