UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

LICENCIATURA EN PEDAGOGÍA
UNIDAD AJUSCO

ANÁLISIS Y PROPUESTA DE MATERIAL DIDÁCTICO PARA EL ESTUDIO DE SISTEMAS DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS EN SEGUNDO GRADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIADA EN PEDAGOGÍA

PRESENTAN

KEILA MARCIAL GILES

Y

MARGARITA LETICIA RAMÍREZ SÁNCHEZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. RODRIGO CAMBRAY NÚÑEZ

NOVIEMBRE DE 2009

TABLA DE CONTENIDOS

AGRADECIMIENTOS

A mis padres y hermanos:

- Quiero compartir este logro con cada uno de ustedes ya que reconozco que su cariño, comprensión y apoyo fue fundamental para conseguirlo.

Keila Marcial Giles.

- Agradezco a mis padres, Juan Ramírez Osorio y Sara Sánchez Zamora los grandes sacrificios y esfuerzos que hicieron para brindarme una mejor educación. Con gran admiración reconozco el ejemplo de vida que me han heredado.

Margarita Leticia Ramírez Sánchez.

- Agradecemos de manera especial al Dr. Rodrigo Cambray Núñez sus valiosas aportaciones para la elaboración de este proyecto. Además, reconocemos que en gran medida nuestros conocimientos han sido enriquecidos gracias a su experiencia y formación profesional.
- Agradecemos al Mtro. Arturo Bazán Zurita el incondicional apoyo intelectual y moral que nos brindo para la evolución de este proyecto.
- Agradecemos al Mtro. Enrique Vega Ramírez, ya que su manera de enseñanza en el campo de Educación Matemática contribuyo a realizar este tipo de propuesta.
- Agradecemos al Mtro. Leobardo Rendón García sus acertadas observaciones y aportaciones para la mejora de esta tesis.

Keila Marcial y Leticia Ramírez.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

En este trabajo de tesis se presenta el diseño de una propuesta que incorpora materiales didácticos (manipulables y no manipulables) para promover y apoyar la formación, el tratamiento y la conversión de los registros de representación semiótica, de acuerdo con la teoría de Duval, así como la diversificación, la coordinación y la diferenciación, a fin de que los estudiantes de segundo grado de educación secundaria comprendan y resuelvan sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Como esta propuesta está destinada fundamentalmente a estudiantes de segundo grado de educación secundaria (13-15 años), fue necesario comenzar la investigación con la revisión de los programas de matemáticas de 2006 en México con el objetivo de ubicar los contenidos, las habilidades, los conocimientos y las orientaciones didácticas en relación al tema de sistemas de ecuaciones lineales.

La primera pregunta que surge en esta investigación es: ¿Qué materiales didácticos ayudan al estudiante a comprender y resolver los sistemas de ecuaciones lineales? En la búsqueda de la respuesta se revisaron diversas publicaciones educativas (Socas *et al*., 1996; Alonso *et al*., 1993; Segura, 2004; etcétera), en las cuales se discuten dificultades y errores que los estudiantes presentan en el aprendizaje del álgebra, particularmente con ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales. Al haber una variedad de estos materiales, fue necesario clasificarlos de acuerdo con el tema y explicarlos de manera general.

Cabe aclarar que por la relación observada en los temas de ecuaciones de primer grado y de sistemas de ecuaciones lineales, se anexaron en esta tesis contenidos, conocimientos, habilidades y orientaciones didácticas que se contemplan para ecuaciones en los programas de 2006.

Al hacer la revisión de las publicaciones se identificó que sólo algunas de ellas realizan propuestas de material didáctico para contrarrestar determinadas dificultades y errores. El análisis de estos textos también permitió distinguir los conceptos inherentes al tema de sistemas de ecuaciones lineales, para lo cual fue necesario buscar el significado de cada uno.

Una vez realizadas las tareas mencionadas hasta este punto, nuestro interés fue canalizado a investigar sobre la teoría de los registros de representación semiótica planteada por Duval, básicamente a causa de que la investigación de Segura (2004) hacía mención de ésta. Al analizar y comprender dicha teoría, surgieron dos nuevas preguntas en relación a los materiales que se identificaron:

- ¿Cuáles materiales didácticos promueven la diversificación, la coordinación y la diferenciación de registros de representación semiótica de sistemas de ecuaciones lineales?
- ¿Cuáles materiales didácticos promueven la formación, el tratamiento y la conversión de registros de representación semiótica de sistemas de ecuaciones lineales?

Estas dos preguntas implicaron la descripción de los materiales seleccionados y su resolución. En este proceso se percibieron algunas recomendaciones y limitaciones que los propios autores mencionan, lo cual conllevó anexar o modificar algunas actividades que les dieran seguimiento.

También se consideró necesario organizar los materiales de acuerdo con el tema (ecuaciones y sistemas de ecuaciones) respetando la secuencia de cada material, con excepción del de Alonso y sus colaboradores (1993).

Para complementar las respuestas de estas dos preguntas se analizaron todos los materiales en base a la teoría de registros de representación semiótica.

En resumen, las preguntas que guiaron nuestra investigación fueron:

- ¿Qué materiales didácticos ayudan al estudiante a comprender y resolver el tema sistemas de ecuaciones lineales?
- ¿Cuáles materiales didácticos promueven la diversificación, la coordinación y la diferenciación de registros de representación semiótica de sistemas de ecuaciones lineales?
- ¿Cuáles materiales didácticos promueven la formación, el tratamiento y la conversión de registros de representación semiótica de sistemas de ecuaciones lineales?

En el capítulo I se presenta el planteamiento, la justificación, los objetivos y las preguntas de investigación que estructuran esta propuesta.

En el capítulo II se describen los contenidos en relación a las ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales de los programas de estudio (2006) en primero y segundo grados de educación secundaria, como punto de apoyo para la búsqueda de material didáctico. Además, se describen trabajos de investigación que se han realizado en torno al tema de ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales. Así mismo, se explican tanto algunos errores, dificultades y conceptos en relación a ambos temas, como la teoría de registros de representación de Duval.

En el capítulo III se incluye la descripción de algunos de los materiales didácticos encontrados para la enseñanza de los temas de ecuaciones y sistemas de ecuaciones.

En el capítulo IV se discuten las actividades de los materiales de esta propuesta; cada material se analiza bajo la teoría de Duval de los registros de representación.

Los materiales de la propuesta a los que se hace referencia en los capítulos III y IV se incluyen en los anexos. Cabe señalar que al final del capítulo IV se incluye el cuadro 4.4 para indicar al lector qué conceptos o cuestiones relacionados con la resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas están implicados en las actividades de esta propuesta presentadas en cada uno de los anexos.

En el capítulo V se presentan algunas conclusiones y recomendaciones de este trabajo de investigación.

CAPÍTULO II

REVISIÓN DE LA LITERATURA

Contenidos en relación a las ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones lineales contemplados en los programas de estudio de educación secundaria de 2006

En este apartado se revisarán los contenidos, conocimientos y habilidades que se desean desarrollar en los estudiantes y algunas orientaciones didácticas que los programas de matemáticas (educación secundaria de 2006) contemplan para el tema de sistemas de ecuaciones lineales. Todo esto con el objetivo de tenerlos presentes en la búsqueda de los materiales que formarán parte de esta propuesta.

Es necesario señalar que aunque este trabajo está dirigido al tema de sistemas de ecuaciones lineales, es indispensable que se tomen en cuenta aspectos relacionados con el tema de ecuaciones lineales.

Contenidos de primer grado

Cuadro 2.1

Eje	Tema	Subtema	Contenidos
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Significado y uso de las literales	Ecuaciones	Ecuaciones del tipo: $x+a=b$; $ax=b$; $ax+b=c$, con a, b y c números naturales o decimales
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Significado y uso de las literales	Relación funcional	Relaciones funcionales de la forma: $y=kx$
Manejo de la información	Representación de la información	Gráficas	Relación de proporcionalidad en el plano cartesiano
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Significado y uso de las literales	Relación funcional	Diferentes representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) de una misma situación

Conocimientos, habilidades y orientaciones didácticas

En el manejo del tema ecuaciones lineales se espera que los estudiantes puedan resolver problemas que conlleven la formulación y resolución de ecuaciones de la forma $x + a = b; ax = b; ax + b = c$, utilizando las propiedades de la igualdad con números naturales o decimales (SEP, 2006, p. 43).

En las orientaciones didácticas se rescata la idea de que las ecuaciones son una herramienta básica para resolver problemas cuando éstos ya no pueden resolverse mediante procedimientos aritméticos. Esto implica que los estudiantes reconozcan el valor que se desconoce en el problema, lo simbolicen con una literal, formulen la ecuación correspondiente, comprendan que la ecuación es una expresión algebraica que sintetiza las relaciones entre los datos y la cantidad desconocida del problema y sepan resolver la ecuación (SEP, 2006, p. 43).

Para facilitar la traducción del problema al lenguaje algebraico y resolverlo, una de las recomendaciones es plantear actividades que conlleven el uso de procedimientos informales, a fin de familiarizar a los estudiantes con las propiedades de la igualdad (SEP, 2006, p. 43).

En el contenido de funciones se contempla que los estudiantes analicen dos cantidades relacionadas y las representen mediante una tabla y una expresión algebraica de la forma $y = kx$, asociando los significados de las variables con las cantidades que intervienen en dicha relación. Antes de que los estudiantes representen algebraicamente una relación se recomienda que primero la identifiquen y después la expresen verbalmente, a fin de dar mayor sentido a este proceso de simbolización. El uso de tablas también apoya esta simbolización al permitirles descubrir las regularidades que se presentan (SEP, 2006, p. 52).

Además de representar las relaciones de proporcionalidad con tablas y ecuaciones, se espera que los estudiantes expliquen las características de alguna gráfica que represente una relación de proporcionalidad en el plano cartesiano. Para ello deben vincular los diferentes tipos de representación (tabular, algebraico y gráfico) y ver las posibilidades que brinda el método gráfico para calcular valores (SEP, 2006, p. 54).

Para seguir con la vinculación de estas tres representaciones los estudiantes también deben analizar las características que existen entre ellas con respecto a una misma situación. Dentro de las orientaciones didácticas se recomienda plantear a los estudiantes problemas que permitan dicha vinculación (SEP, 2006, p. 58).

Contenidos de segundo grado

Cuadro 2.2

Eje	Tema	Subtema	Contenidos
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Significado y uso de las operaciones	Operaciones combinadas	Jerarquía de operaciones y paréntesis
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Significado y uso de las literales	Ecuaciones	Ecuaciones del tipo $ax + bx + c = dx + ex + fy$ con paréntesis en uno o en ambos miembros de la igualdad con coeficientes enteros o fraccionarios, positivos o negativos

(continúa)

Cuadro 2.2 (continuación)

Eje	Tema	Subtema	Contenidos
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Significado y uso de las literales	Ecuaciones	Ecuaciones del tipo $ax+bx+c=dx+ex+fy$ con paréntesis en uno o en ambos miembros de la igualdad con coeficientes enteros o fraccionarios, positivos o negativos
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Significado y uso de las literales	Relación funcional	Relaciones funcionales de la forma $y=ax+b$
Manejo de la información	Representación de la información	Gráficas	Gráficas de relaciones lineales
Manejo de la información	Representación de la información	Gráficas	Comportamiento de gráficas lineales de la forma $y=mx+b$ cuando cambia el valor de m o el de b
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Significado y uso de las literales	Ecuaciones	Sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes enteros

Cuadro 2.2 (concluye)

Eje	Tema	Subtema	Contenidos
Manejo de la información	Representación de la información	Gráficas	Representación gráfica de un sistema de ecuaciones lineales con coeficientes enteros

Conocimientos, habilidades y orientaciones didácticas

En el desarrollo del primer contenido los estudiantes deben utilizar la jerarquía de las operaciones y los paréntesis en cálculos numéricos, en ecuaciones o al operar con expresiones algebraicas. Se sugieren realizar distintos cálculos con ayuda de una calculadora que jerarquice operaciones y otra que no, a fin de que el estudiante comprenda por qué obtuvo distintos resultados (SEP, 2006, p. 77).

Al abordar el segundo contenido se espera que los estudiantes formulen y resuelvan problemas que impliquen ecuaciones lineales de la forma $ax + bx + c = dx + ex + fy$ con paréntesis en uno o en ambos miembros de la igualdad, utilizando coeficientes enteros o fraccionarios, positivos o negativos (SEP, 2006, p. 85).

En las orientaciones didácticas se estipula que los estudiantes pueden consolidar su técnica de resolución mediante las propiedades de la igualdad para después transponer correctamente los términos. Con el objetivo de apoyar esto se recomiendan actividades con el modelo de la balanza, pero haciendo notar las limitaciones de éste (SEP, 2006, p. 85).

Para seguir con los contenidos de funciones lineales, se desea que los estudiantes reconozcan en situaciones problemáticas (relacionadas con alguna disciplina) la presencia de cantidades que varían una en función de la otra, y representen esta relación en forma tabular o mediante una ecuación de la forma $y = ax + b$. Con el objetivo de desarrollar estos conocimientos y habilidades se recomienda trabajar en la determinación de intervalos en los que las variables toman valores, o donde la función sea ascendente o descendente, positiva o negativa, u otras propiedades de la relación (SEP, 2006, p. 86).

El cuarto contenido continúa con las relaciones funcionales pero ahora con su representación gráfica, por lo que se requiere que el estudiante construya e interprete gráficas de relaciones lineales asociadas a diversos fenómenos para que tenga una idea más clara de ellos (SEP, 2006, p. 89).

Finalmente, para el contenido de funciones lineales, en los programas (SEP, 2006, p. 90) se pretende que los estudiantes sean capaces de:

- Analizar el comportamiento de las gráficas lineales de la forma $y = mx + b$ cuando cambia el valor de *b*, permaneciendo constante *m*.
- Anticipar el comportamiento de las gráficas lineales de la forma $y = mx + b$ cuando se cambia el valor de *m* permaneciendo constante *b*.

Con el propósito de desarrollar estas dos habilidades se hacen algunas recomendaciones. Para la primera se sugiere que los estudiantes tabulen o grafiquen diferentes ecuaciones lineales; esto les permitirá reconocer la relación entre los diversos valores de *m* y la inclinación de las rectas. En relación a la segunda también se sugieren las mismas actividades pero para que relacionen la inclinación y posición de las rectas que se obtienen cuando cambia el valor de *b* y se mantiene constante *m*. El uso de la calculadora graficadora es un recurso de gran utilidad en este tipo de actividades (SEP, 2006, p. 90).

Después de trabajar con ecuaciones se pretende que los estudiantes logren simbolizar con algunas letras los valores desconocidos de un problema y utilizarlos para formular y resolver un sistema de ecuaciones con coeficientes enteros. Para este contenido se recomienda partir de “problemas sencillos, que faciliten la apropiación gradual de los procedimientos para plantear y resolver ecuaciones simultáneas”, con la intención de que los estudiantes reconozcan que la estrategia general de dichos procedimientos de resolución algebraica consiste en la reducción del sistema hasta obtener alguna ecuación con una sola incógnita (SEP, 2006, p. 101).

Una vez que los estudiantes se apropien de los distintos métodos de resolución algebraica no es conveniente que se encasillen en uno solo o que utilicen todos para un mismo problema, sino que aprendan a elegir el más adecuado (SEP, 2006, p. 101).

En el último de los contenidos se busca que los estudiantes finalmente representen en un plano cartesiano un sistema de ecuaciones lineales con coeficientes enteros e interpreten el punto en común de ambas rectas como la solución del sistema. Esto les permitirá reconocer las ventajas de la representación gráfica; por ejemplo, diferenciar cuándo un sistema tiene o no solución (SEP, 2006, p. 102).

Investigaciones en relación al aprendizaje del álgebra

1.- “La ecuación lineal con dos variables: Entre la unicidad y el infinito” (Panizza *et al*., 1999) es el reporte de una investigación que busca identificar las condiciones de apropiación del álgebra elemental, basándose en la teoría de situaciones didácticas en matemáticas de Brousseau, la ingeniería didáctica de Artigue y en diversas investigaciones de las que retoman algunos elementos relativos a la ruptura cognitiva y esenciales en la actividad algebraica.

Su investigación comprueba que a partir de diversas tareas los alumnos formulan una concepción errónea sobre lo que es una ecuación al considerarla como una igualdad numérica y que las letras son números a develar, lo cual les permite afirmar que estos alumnos presentarán dificultades posteriores en el tratamiento de objetos algebraicos (se refiere a ecuaciones con dos o más variables y ecuaciones de grado mayor que 1) con infinitas soluciones o con algunas soluciones. Por otra parte, mencionan que el trabajo realizado alrededor de la ecuación de la recta no es suficiente para que el alumno establezca una relación entre los puntos de la recta y las soluciones de la ecuación correspondiente.

2.- En el artículo “Sistemas de ecuaciones lineales: Una secuencia didáctica” (Segura, 2004) se tiene como propósito facilitar el aprendizaje de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales a partir de la construcción y aplicación de una secuencia didáctica para promover, mediante diferentes actividades, el desarrollo de:

a) comportamientos matemáticos apoyándose en la teoría de situaciones didácticas en matemáticas de Brousseau, desde la que se observan distintas actividades tendientes a desarrollar las fases de acción, formulación y validación; y

b) comportamientos cognitivos basándose en la teoría de registros de representaciones semióticas de Duval, la cual encierra situaciones que implican un trabajo en diferentes registros de representación semiótica y de pasaje entre ellos.

Algunos de los resultados que se obtuvieron fueron:

Durante el desarrollo de la secuencia la mayoría de los alumnos pasaron por las fases de acción, formulación y validación.

Posterior a la experimentación con la secuencia quedaron subsanados algunos fenómenos concernientes a los sistemas de ecuaciones lineales detallados en algunas investigaciones como:

- La desarticulación entre los sistemas de ecuaciones lineales y su solución.

En la secuencia realizada se partió de la solución de un sistema de ecuaciones evitando así que los alumnos identificaran la solución como el resultado escrito a la derecha del signo igual.

- El trabajo con los tres registros de representación facilita que el alumno identifique al objeto en todos los registros, ya que se emplean en forma indistinta para simbolizarlos.

Sin embargo, plantea la necesidad de trabajar más en “la comprensión de enunciados que se modelen con un sistema de ecuaciones lineales, teniendo en cuenta la coordinación y los fenómenos de no-congruencia entre representaciones del registro verbal que requieran de una conversión a una representación en el algebraico” (Segura, 2004, p. 74).

3.- En el artículo “El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica” (Kieran y Filloy, 1989) se describen algunas de las contribuciones principales de la investigación a un cuerpo creciente de conocimientos sobre los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje del álgebra en la educación secundaria.

Los autores discuten los intentos continuados de los investigadores para desarrollar “una teoría de la enseñanza/aprendizaje” del álgebra. El artículo concluye señalando algunas posibles tendencias futuras en el aprendizaje y la enseñanza del álgebra escolar.

En cuanto a los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje del álgebra en educación secundaria, se centran en áreas de investigación como:

El marco de referencia aritmético; variables, expresiones y ecuaciones; resolución de ecuaciones; funciones y sus gráficas; enfoques que usan computadoras.

El marco de referencia aritmético: los estudiantes que comienzan a estudiar álgebra siguen usando los métodos que les funcionaban en aritmética. Este marco da cuenta de su forma de ver el signo igual, de sus dificultades con la concatenación y con algunas convenciones de notación del álgebra, su falta de habilidad para expresar formalmente los métodos y los procedimientos que usan para resolver problemas, y también da cuenta de su interpretación de las variables.

Otra de las áreas de investigación es el tema de las variables, en donde se ha encontrado que la mayoría de los estudiantes tratan las letras en expresiones y ecuaciones como incógnitas específicas más que como números generalizados o como variables.

En cuanto a las expresiones algebraicas, se observa que los estudiantes no aceptan las expresiones algebraicas como solución de un problema; además, no pueden asignar significado a expresiones que carecen de un signo igual y de un segundo miembro.

En lo referente a ecuaciones, se encuentra que los estudiantes casi nunca las usan para representar problemas aritméticos verbales y, si se les pide una ecuación, resuelven primero el problema y luego intentan dar con la ecuación; no conciben la idea de que en una ecuación se pueden tener términos con literales en ambos miembros del signo igual y tienen una concepción ingenua de que una ecuación es un hecho numérico ligeramente disfrazado con la falta de algún componente.

Muchas investigaciones en torno a cómo enfocan los estudiantes la resolución de ecuaciones han encontrado tres maneras: a) intuitivo, b) sustitución por tanteo, y c) formal. Otras investigaciones se han centrado en modelos concretos y en la estructura de las ecuaciones para su resolución.

Otra área de investigación se refiere a las funciones y gráficas. Algunos resultados muestran que los estudiantes tienen problemas para comprender el significado de las representaciones gráficas de las funciones. En otras investigaciones referentes al tema de funciones se recomienda favorecer la comprensión por parte de los estudiantes de los procesos y algoritmos, antes de traducirlos a definiciones estructurales.

La última área se refiere a los enfoques mediante computadoras; se examina el cuerpo de investigación relacionado con el uso de computadoras, y se revisan los estudios sobre el aprendizaje del concepto de variable y la identificación de puntos en el espacio mediante números, cuando se usan computadoras.

En el apartado de algunas consideraciones teóricas se desarrollan temas como las nuevas tendencias e influencias correlacionadas; componentes de los modelos teóricos locales; sistemas matemáticos de signos; y una teoría de la producción de sistemas matemáticos de signos.

El artículo concluye mencionando algunas áreas de investigación en álgebra potencialmente fructíferas en el futuro; por ejemplo, el desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes y el papel de las computadoras en el aprendizaje de los conceptos algebraicos.

4.- *El uso de la calculadora graficadora y la resolución de problemas algebraico-verbales en el estudio de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas* (Ramírez, 1997) es una propuesta didáctica en el estudio de las matemáticas en la que se plantea el uso de la tecnología (como la calculadora graficadora) en el salón de clase como herramienta de apoyo; para ello el autor cita diferentes investigaciones sobre el uso de las calculadoras graficadoras en las tareas de matemáticas; por ejemplo, Demana (1990) y Martínez (1994), entre otros.

5.- *El tablero con fichas, un modelo de enseñanza para la resolución de ecuaciones lineales* es una investigación aplicada a un grupo de estudiantes de segundo grado de educación secundaria en la que se utilizó un modelo de enseñanza semántico o concreto (tablero con fichas) para la resolución de ecuaciones lineales, con la finalidad de que el alumno posteriormente logre apropiarse de manera más asequible del modelo sintáctico-viético, lo cual le permitirá construir de manera más completa sus conocimientos (Pinzón, 1997). Algunos de los fundamentos teóricos para la elaboración de dicha propuesta son Freudenthal (1985), Socas *et al.* (1989), López de Medrano (1992) y Rojano (1985).

Entre los resultados que ofrece esta investigación se plantea que los alumnos adquieren el lenguaje algebraico, transfieren del modelo concreto al lenguaje algebraico, se apropian del concepto de ecuación, abandonan el modelo concreto y resuelven ecuaciones sintácticamente.

6.- Panizza *et al*. (1995), en "Los primeros aprendizajes algebraicos. El fracaso del éxito" (citado en Segura, 2004), reportan los resultados de una investigación que tiene como marco de referencia la teoría de situaciones de Brousseau, la ingeniería didáctica y la dialéctica medio-objeto de Douady. Retoman cuestiones relacionadas con la concepción de ecuación como igualdad numérica, la concepción de solución, y la desarticulación entre el objeto sistemas de ecuaciones lineales y su conjunto solución.

Los resultados obtenidos en una encuesta arrojaron que los alumnos identifican a la ecuación como el procedimiento para resolverla. En relación a la solución, puntualizaron que gran parte de los estudiantes la relacionan con el resultado escrito a la derecha del signo igual.

7.- Pérez Donoso (1998), en “Pasajes de registros. Ecuaciones” (citado en Segura, 2004), realiza una investigación enmarcada en la teoría de situaciones de Brousseau y los registros de representación de Duval, reportando los resultados que obtuvieron al aplicar un cuestionario de repuestas múltiples que contenía ítems sobre sistemas de ecuaciones lineales.

En sus conclusiones afirman que los alumnos tienen una tendencia hacia el uso del registro algebraico para resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales, y evaden los problemas dados en el registro verbal. De la misma forma ocasionalmente recurren al pasaje del registro gráfico al algebraico y frecuentemente del algebraico al gráfico para resolver un problema que implique ecuaciones.

8.- Sessa (1998), en su trabajo “Los efectos de un tratamiento aritmético de los sistemas de ecuaciones lineales. Análisis de un caso en un libro de texto” (citado en Segura, 2004), describe cuatro libros de texto haciendo un análisis detallado de uno de ellos sobre sistemas de ecuaciones lineales. Dicho análisis se basa en la relación aritmética-álgebra de Chevallard y las leyes de Duval acerca del tratamiento en el registro algebraico y su relación con otros de representación semiótica.

Identifica que cada uno de los libros ofrece diferentes alternativas para tratar los sistemas de ecuaciones lineales.

La investigación ahonda en dos textos escolares que funcionan como referencias fundamentales para los profesores (Panizza *et al*., 1995; citado en Segura, 2004) porque son de los más utilizados en la enseñanza media y hace hincapié en sus definiciones, conceptos, registros de representación privilegiados, pasajes más recurrentes y su articulación.

En suma, se comprobó que los dos textos dan un peso dominante al trabajo en el registro algebraico, el pasaje entre registros es tomado en un sentido (Registro Verbal-Registro Algebraico, Registro Algebraico-Registro Grafico), sin considerar su sentido inverso, y no toma en cuenta la coordinación (o articulación) entre registros.

9.- La propuesta didáctica del módulo 6 para ecuaciones de primer grado (Cedillo *et al*., 2006a) es parte de la serie de enseñanza de las matemáticas en la que se expone el trabajo realizado en diversas actividades con estudiantes de 2° de educación secundaria (13 - 14 años de edad) y docentes.

Los contenidos se organizan de la siguiente manera:

a) El tema se inicia con la proyección de un video, el cual presenta la información relevante del problema que será desarrollado en las sesiones de trabajo con los estudiantes.

b) Una propuesta didáctica para ecuaciones de primer grado que detalla:

- La presentación y objetivos del tema.
- Los materiales de las sesiones de trabajo con los estudiantes.
- Los materiales de las sesiones de trabajo con los docentes.
- Lo que aprendieron los estudiantes.
- Las recomendaciones para la enseñanza.
- La ampliación del tema de ecuaciones.

Los objetivos del tema son que el alumno: identifique las letras como representantes de números, reconozca la equivalencia entre los lados derecho e izquierdo [*sic*] de una ecuación y desarrolle métodos para resolver ecuaciones, a partir de sus conocimientos aritméticos.

Los resultados que dicha propuesta arrojó muestran que cada uno de los objetivos se lograron; sin embargo, queda pendiente trabajar un poco más con aspectos referentes al signo igual y al orden operacional implicado en el uso de los paréntesis en diversas expresiones aritméticas y algebraicas.

Cabe mencionar que dicha propuesta de enseñanza tiene como propósito poner en práctica los preceptos del constructivismo social, empleando la técnica del aprendizaje cooperativo, así como un enfoque del aprendizaje basado en la resolución de problemas.

10.- En “Sistemas de ecuaciones lineales: una propuesta didáctica para el bachillerato” (Preisser, 1989), la autora sintetiza y precisa los elementos del tipo de educación que se pretende en el Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH). También ubica las finalidades de la enseñanza de las matemáticas en el plan de estudios de este colegio y establece particularmente las del tema de sistemas de ecuaciones lineales en el mismo contexto educativo. Todo el trabajo anterior lo concreta en su propuesta que se desarrolla en 17 sesiones para las que se estructuran guiones de clase.

Dificultades y errores

Sistemas de ecuaciones

Según Alonso *et al.* (1993, p. 115), los estudiantes tienen una concepción vaga sobre lo que es un sistema de ecuaciones lineales y su solución; comentando a la vez que probablemente esto ocurre a causa de la dificultad que tienen para sostener toda la información, "esto es, reducen el campo de información que se les da" (Alonso *et al.*, 1993, p. 115). En la resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas está presente esta dificultad cuando se observa que los estudiantes cometen diversos errores; por ejemplo, "no tienen en cuenta los primeros miembros del sistema ni, por supuesto, el signo de igualdad" (Alonso *et al*., 1993, p. 111). Otras veces suelen prescindir de algunas de las incógnitas o ecuaciones (Alonso *et al*., 1993, p. 113). A pesar de esto, los estudiantes obtienen un resultado que reconocen como solución, sin hacer uso de la comprobación, aun cuando sus resultados sean contradictorios; es decir, los estudiantes presentan la dificultad para articular "el objeto sistema de ecuaciones lineales y su conjunto solución" (Panizza *et al.*, 1995; citado en Segura, 2004, p. 52).

En los problemas de sistemas de ecuaciones lineales los estudiantes presentan dificultad en el pasaje del registro verbal al algebraico (Pérez Donoso, 1998; citado en Segura, 2004, p. 52); es decir, cometen errores "en la traducción de la información al lenguaje de las ecuaciones" (Alonso *et al*., 1993, p. 113). En otros de los pasajes de registros semióticos los estudiantes también tienen dificultades, ya que pocas veces "efectúan la representación y resolución gráfica de un sistema de ecuaciones lineales" (Ramírez, 1997, p. 103).

Los errores anteriores (no tienen en cuenta los primeros miembros del sistema ni el signo de igualdad, prescinden de incógnitas o ecuaciones, y en la traducción de la información al lenguaje de las ecuaciones) están estrechamente relacionados con algunas nociones que los estudiantes no tienen muy claras, como “el concepto de equivalencia [de sistemas], la independencia de informaciones, y el manejo de la información contradictoria” (Alonso *et al*., 1993, pp. 115-116).

En la resolución de sistemas los estudiantes utilizan técnicas que carecen del sentido de equivalencia (causa de diversos errores) porque no tienen clara la idea fundamental de que para resolverlo “se puede sustituir un sistema de ecuaciones por otro más sencillo, con tal de que tenga las mismas soluciones que aquél. O, lo que es lo mismo, que sea equivalente a él” (Alonso *et al*., 1993, p. 115).

Otra cuestión poco clara para los estudiantes es la independencia de informaciones, pues “tienen dificultades en separar las informaciones independientes o en designar con distintas letras, incógnitas diferentes” (Alonso *et al*., 1993, p. 115), ya que no son “conscientes de que cuando […] hay una dependencia de informaciones es porque no tienen suficiente información en el problema o porque no han sabido utilizar la información disponible” (Alonso *et al*., 1993, p. 115).

Finalmente, en la información contradictoria los estudiantes no recurren frecuentemente al “análisis de la información inicial o de sus cálculos, sino que únicamente prescinden de la información sin tratar de enfrentar el problema para esclarecer el origen de la contradicción o el significado de la incompatibilidad que obtienen” (Alonso *et al*., 1993, p. 116).

Ecuaciones

Un hecho muy frecuente en la resolución de ecuaciones es que los estudiantes tienen dificultad para concebir lo que es tanto una ecuación como su conjunto solución; algunas veces relacionan la idea de ecuación con la de incógnita, o bien consideran que encontrar la solución consiste únicamente en aplicar una serie de reglas para conseguir un número, que para ellos no tiene que ver nada con la ecuación planteada (Alonso *et al*., 1993, pp. 90-91).

Los estudiantes presentan dificultades con el signo igual, ya que en la resolución de ecuaciones transfieren el sentido que tenía en aritmética al álgebra, pues persiste la idea de que es “un mandato operacional” (Alonso *et al*., 1993, p. 91), es decir, “es la señal de hacer algo, antes que un símbolo de la equivalencia entre los lados izquierdo y derecho [*sic*] de una ecuación” (Kieran, 1980; citado en Kieran y Filloy, 1989, p. 230).

Cuando el estudiante da énfasis a la noción de operador y no a la de equivalencia, presenta un esquema de cuasi-igualdad, por lo que realiza las operaciones alguna vez sin importar dónde (Kieran, 1982; citado en Pinzón, 1997, p. 14); “mezcla el igual operacional, propio de la aritmética, con el igual como equilibrio específico de la ecuación, propio del álgebra” (Alonso *et al*., 1993, p. 91), o bien “efectúan operaciones en el primer miembro de la ecuación sin modificar el segundo” (Socas *et al*., 1996, p. 105).

En esta dificultad también ocurre que “los estudiantes [conciben] el signo igual como un mero separador entre la secuencia de operaciones y el resultado les lleva a violar las propiedades simétrica y transitiva de la igualdad” (Kieran y Filloy, 1989, p. 230).

Otra de las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes se relaciona con algunas convenciones de notación del álgebra. Por ejemplo, la concatenación "es usada en aritmética para notación posicional y además expresa adición […]. Sin embargo, en álgebra la concatenación denota multiplicación" (Matz, 1982; citado en Pinzón, 1997, p. 13). Al no complementar el sentido de concatenación, los estudiantes suelen incurrir en diversos errores, como interpretar que en $2x = 26$ se tiene que $x = 6$; en tal interpretación está presente el valor posicional y la adición. Por lo contrario, hay casos donde el valor posicional no está presente; por ejemplo, al interpretar que en $7x = 14$ se tiene que $x = 7$.

También el uso de paréntesis y el orden en que se efectúan las operaciones son convenciones que los estudiantes consideran innecesarias en la resolución de ecuaciones. Al tener los estudiantes la idea arraigada de realizar las operaciones de izquierda a derecha, no alcanzan a entender que los paréntesis repercuten en el orden jerárquico en el que se deben efectuar las operaciones (Kieran y Filloy, 1989, p. 230).

Dentro de las convenciones de notación, los estudiantes, además de presentar dificultades para "expresar respuestas algebraicas […] no son capaces de aceptarlas como solución de un problema" (Kieran y Filloy, 1989, pp. 230-231) por carecer del signo igual y un miembro de la derecha [*sic*] (Kieran 1983; citado en Kieran y Filloy, 1989, p. 231).

Para Kieran y Filloy otra de las dificultades que presentan los estudiantes es la "falta de habilidad para expresar formalmente los métodos y procedimientos que usan para resolver problemas" (Kieran y Filloy, 1989, p. 230), ya que no son muy específicos sobre sus procedimientos y no prestan atención al método que utilizan (Kieran y Filloy, 1989, p. 230).

En la resolución de ecuaciones algunas de las dificultades que se presentan con el signo menos son: la aplicación de la operación inversa de la sustracción; el reconocimiento de las propiedades que corresponden a la sustracción, ya que se le atribuyen propiedades de otras operaciones; y finalmente, la confusión del signo menos, propio de la operación, con el menos asociado a un coeficiente (Alonso *et al*., 1993, pp. 91-92).

La dificultad que los estudiantes presentan con los números racionales provoca que cometan una serie de errores como prescindir del denominador o bien tomarlo en cuenta sólo en el caso de los términos que están junto al signo igual (Alonso *et al.*, 1993, p. 93).

Álgebra

Los símbolos utilizados en álgebra “son un recurso que permite denotar y manipular abstracciones” (Socas *et al.*, 1996, p. 97); sin embargo, los estudiantes no alcanzan a observar la relación que tienen los símbolos con lo que representan (Alonso *et al.*, 1993, p. 14); tal dificultad aparece a causa de que utilizaron esos símbolos en aritmética de manera distinta.

Dentro del contexto de enseñanza-aprendizaje del álgebra “una de las mayores dificultades con que se encuentra un [estudiante] al iniciar los estudios formales está en el uso y significado de las letras” (Alonso *et al.*, 1993, p. 15). Esta dificultad genera que los estudiantes cometan el error de tratar a la letra como si fuera un objeto, porque además de manipular las expresiones con símbolos literales sin ninguna relación con los conjuntos numéricos a los que representan, también trasladan el sentido en el que utilizaban a las letras en aritmética, es decir, como una etiqueta que acompaña a un número; por ejemplo, 7*m* significa 7 *metros*. Algunos estudiantes designan a la literal tomando en cuenta la letra inicial del objeto que varía; por ejemplo, utilizan *k* para designar el número de *kilogramos* y, cuando realizan la lectura de una expresión como 26*k*, leen "veintiséis *kilogramos*", en vez de veintiséis *veces el número de kilogramos* (Alonso *et al.*, 1993, pp. 16-17).

Además "cuando los [estudiantes] interpretan letras que representan números hay una tendencia a considerar las letras como valores únicos y específicos, […] más que como números generalizados o como variables" (Socas *et al.*, 1996, p. 99). Por otra parte, los estudiantes no suelen tener claro el significado de las literales, ya que cuando generalizan relaciones solamente realizan un cambio de símbolos (de números a letras) más que un cambio de su significado, a causa de que el estudiante también presenta dificultades con el concepto de variable: no llega a entender que el valor de una variable es independiente de la letra utilizada, por lo que no acepta que dos letras distintas representen un mismo valor (Alonso *et al.*, 1993, pp. 19-20).

Algunos de los símbolos de operación que se manejan en aritmética siguen presentes en álgebra pero con un significado distinto, lo cual genera que los estudiantes sean incapaces de mantener operaciones indicadas, porque no tienen claro que "en aritmética los signos de operación indican una acción que se va a realizar con números, y que da como resultado otro número […] (y en cambio) en álgebra tienen un carácter de representación, ya que indican operaciones que no siempre tienen por qué realizarse" (Alonso *et al.*, 1993, p. 20).

De igual manera, otro de los símbolos de operación que comparten la aritmética y el álgebra es el signo igual. A pesar de esto, el uso y significado que se le atribuye es distinto. En aritmética por lo regular tiene un "carácter unidireccional, a la izquierda se indica la operación y a la derecha se pone el resultado […] algunas veces también se utiliza para relacionar procesos que dan el mismo resultado" (Alonso *et al.*, 1993, p. 22) o bien "para unir la secuencia de pasos que conduce a un resultado final" (Socas *et al.*, 1996, p. 98). Sin embargo, en álgebra en ocasiones se sigue utilizando como en aritmética, pero otras veces puede denotar ecuaciones con un sentido bidireccional o identidades.

Los múltiples usos que se le dan al signo igual en álgebra es la causa de la dificultad que tienen los estudiantes para tener claro el concepto, así como la dificultad en la percepción de las estructuras subyacentes (superficiales o sistémicas) en las expresiones algebraicas. "La estructura superficial se refiere a la forma de expresión, ordenación de sus términos y orden de ejecución de sus operaciones […] y la estructura sistémica se refiere a las propiedades de las operaciones como: conmutatividad, asociatividad, distributividad, etc." (Kieran y Filloy, 1989; citado en Pinzón, 1997, p. 8). Por ejemplo, cuando aplican incorrectamente alguna de las propiedades los estudiantes generan una serie de errores.

En algunos de los convenios de notación del álgebra, como la concatenación y el uso de paréntesis, los estudiantes presentan diversas dificultades y errores (véase el apartado de ecuaciones).

Finalmente, una cuestión de singular importancia es que los estudiantes tienen dificultades para reconocer el objetivo de la actividad y la naturaleza de las respuestas en álgebra. El objetivo de la actividad del estudiante en aritmética consiste en encontrar soluciones numéricas concretas; sin embargo, en álgebra el objetivo radica en la obtención de relaciones y procesos y en la formulación de los mismos en expresiones generales simplificadas. A diferencia de la naturaleza de la respuesta que a los estudiantes se les exige en aritmética (solución única y numérica) en álgebra el resolver determinado problema adecuadamente no implica necesariamente la obtención de una solución numérica, no siendo éste su objetivo inmediato (Socas *et al.*, 1996, p. 99).

Conceptos implicados en los temas de ecuaciones lineales y de sistemas de ecuaciones lineales

En el tratamiento de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es necesaria, por parte del profesor, la comprensión y vinculación de diversos conceptos para el diseño de actividades que lleven a los estudiantes a la apropiación de los mismos.

Actualmente, varios autores e investigadores han elaborado definiciones del álgebra. Por ejemplo, Socas *et al*., comentan que el álgebra "es, en esencia, la doctrina de las operaciones matemáticas considerada formalmente desde un punto de vista general con abstracción de los números concretos" (1996, p. 39).

También se ha definido al álgebra como la parte de las matemáticas en la que se generaliza la aritmética (De Bary, 1978, p. 15), siendo su objeto de estudio, en su surgimiento, las operaciones con distintas clases de números.

En un diccionario se dice que el álgebra es “el estudio de una estructura algebraica dada” (Bouvier y George, 2000, p. 24); sin embargo, en otro diccionario se hace notar que “el término álgebra se ha extendido a asociaciones con estructuras no algebraicas” (De Bary, 1978, p. 24).

Así, con base en estas citas nos damos cuenta de que la conceptuación del álgebra evolucionó conforme cambió su objeto de estudio: primero se consideró como generalización de las operaciones, extendiéndose más tarde incluso al estudio de estructuras no algebraicas.

Por otra parte, el álgebra se ha definido a partir de sus métodos y estructura; por ejemplo, Socas *et al.* mencionan que “El álgebra se caracteriza por sus métodos, que conlleva el uso de letras y expresiones literales sobre las que se realizan operaciones” (1996, p. 38). En lo que se refiere a su estructura, el álgebra se compone de “un conjunto determinado de símbolos que representan números […]; un conjunto determinado de operaciones que se pueden efectuar con los símbolos, y que son las seis operaciones algebraicas [adición, sustracción, multiplicación, división, radicación, potenciación]; y por las propiedades o leyes de las operaciones” (Lehmann, 1979, p. 8).

Algunas de las siguientes concepciones han sido elaboradas bajo un marco educativo (se habla de marco educativo cuando hacemos referencia a los libros y artículos que son dirigidos a maestros y estudiantes), las cuales nos permiten tener una visión más amplia. Por ejemplo, en el libro de Baldor de *Álgebra*, se define como “la rama de la matemática que estudia la cantidad considerada del modo más general posible” (Baldor, 2000, p. 5). Esta conceptuación del álgebra es similar a la que mencionan Socas *et al*.: “es en gran parte aritmética generalizada” (1996, p. 100).

Según Socas *et al*., en el planteamiento de Piaget sobre los estadios se dice que bajo el término `álgebra´ se entiende todo lo concerniente al desarrollo de las habilidades y manipulación de las letras y otros símbolos que pueden representar objetos, incógnitas, números generalizados o variables (1996, p. 81). Los mismos autores mencionan que el álgebra es "el desarrollo de habilidades para manipular letras y otros símbolos que pueden significar cosas diferentes, y también como construcción de operaciones, expresiones o entidades abstractas a través de relaciones bien definidas" (Socas *et al*., 1996, p. 110).

En el desarrollo del álgebra se ha tenido necesidad de generar un lenguaje propio que permita una mejor comunicación de ideas abstractas; es decir, un lenguaje "mediante símbolos y términos técnicos para elaborar fórmulas que se aplican en las ciencias físicas, en la economía, etc. Utiliza expresiones algebraicas donde se combinan números, letras, signos de agrupación y de operación" (*Guía de estudio*, 2003, p. 72). Una expresión algebraica es una "sucesión de letras, o de letras y números, a veces separados por los signos del cálculo, que indica las operaciones que se han de efectuar" (De Galiana, 1998, p. 577).

En el tratamiento de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas se deben abordar conceptos como el de *igualdad*, *ecuación*, *solución* y *resolución* de una ecuación, entre otros, que se explican a continuación.

Una igualdad "es la expresión de que dos cantidades o expresiones algebraicas tienen el mismo valor" (Baldor, 2000, p. 122) sin olvidar que el signo igual en una ecuación condicionada "no conexiona identidades, sino que obliga a la incógnita a tomar un valor para que la expresión sea verdadera" (Socas *et al*., 1996, p. 98). Sin embargo "en álgebra el signo igual denota ecuaciones e identidades" (Socas *et al*., 1996, p. 14).

Además del concepto de igualdad, es importante identificar los diferentes papeles que desempeñan las letras en álgebra; básicamente, representan números y son llamadas literales. En una ecuación se encuentran presentes una o varias cantidades desconocidas llamadas incógnitas; éstas "son representadas por las últimas letras del alfabeto: *x, y, z, u, v*" (*Guía de estudio*, 2003, p. 80).

La conceptuación anterior coincide con algunos libros de consulta, por ejemplo, al considerar a la incógnita como "la letra o letras desconocidas en una ecuación y por lo tanto es la magnitud que se pretende encontrar" (Santamaría, 1999, p. 209). De igual manera, las letras en las ecuaciones son interpretadas como variables. Algunos autores coinciden en que una variable es "una representación de un conjunto de valores no especificados y se observa una relación sistemática entre dos conjuntos de valores" (Socas *et al*., 1996, p. 31).

El estudio del álgebra ha estado ligado con el estudio de las ecuaciones. Una ecuación, según Baldor, es "una igualdad en la que hay una o varias cantidades desconocidas llamadas incógnitas y que sólo se verifica o es verdadera para determinados valores de las incógnitas" (Baldor, 2000, p. 122). Otros autores la definen como "una igualdad entre dos expresiones algebraicas que sólo se cumple para algunos valores de las incógnitas" (Briseño y Verdugo, 1997, p. 54). Y afirman que "las ecuaciones son expresiones algebraicas que consisten de un miembro izquierdo y uno derecho [*sic*] conectados mediante un signo de igualdad" (Cedillo *et al*., 2006a, p. 57).

Naturalmente, al hablar del concepto de ecuación se deben abordar dos definiciones: solución y resolución de la ecuación. En primera instancia, podemos considerar como solución de una ecuación a aquellos "valores de las incógnitas que verifican o satisfacen la ecuación, es decir, que sustituidos en lugar de las incógnitas convierten la ecuación en identidad" (Baldor, 2000, p. 124). Las soluciones de una ecuación también son conocidas como raíces. Por otra parte, la resolución de una ecuación consiste en "hallar las raíces o soluciones de una ecuación; o sea, el valor o valores de las incógnitas que la satisfagan" (*Guía de estudio*, 2003, p. 81).

Dentro de las ecuaciones lineales o de primer grado podemos encontrar ecuaciones que contienen sólo una incógnita (con exponente 1). Una expresión general de una ecuación de este tipo es "$ax + b = c$, donde x es la incógnita y a, b y c son números conocidos" (Socas *et al*., 1996, p. 45). También existen ecuaciones de primer grado con dos variables, conocidas como ecuaciones indeterminadas: "Toda ecuación de primer grado con dos variables es una ecuación indeterminada, tiene infinitas soluciones; pero si fijamos la condición de que las soluciones sean enteras y positivas, el número de soluciones puede ser limitado en algunos casos" (Baldor, 2000, p. 311).

Otro concepto fundamental dentro de este trabajo es el de sistema de ecuaciones que, desde las perspectivas de Briseño y de Baldor, se puede concebir como la colección o "reunión de dos o más ecuaciones con dos o más incógnitas" (Baldor, 2000, p. 320; Briseño y Verdugo, 1997, p. 60).

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas tiene la forma

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= c \\ dx + ey &= f \end{aligned}\right\}$$, siendo *a, b, c, d, e* y *f* números reales dados.

Este tipo de sistemas se clasifican en compatibles e incompatibles. Se dice que un sistema es compatible porque tiene solución; puede ser determinado o indeterminado. Un sistema compatible determinado es aquel que tiene una sola solución; gráficamente ocurre que cada ecuación del sistema representa una línea recta y ambas se intersecan en un solo punto. Un sistema compatible indeterminado es aquel que tiene una infinidad de soluciones; gráficamente ocurre que las dos ecuaciones del sistema representan una misma recta –cualquier punto de esta línea recta satisface simultáneamente a ambas ecuaciones–.

Los sistemas de ecuaciones incompatibles son aquellos que "no tienen solución, es decir, cuando en la representación gráfica se tienen dos líneas rectas paralelas" distintas (*Guía de estudio*, 2003, p. 87).

Finalmente, es necesario ocuparnos del concepto de función. Una función "es una relación tal que ninguno de sus primeros elementos de los pares ordenados se repite" (Buendía y Moreno, 2006, p. 57); es decir, "[c]uando un conjunto de valores de una variable son apareados con los de otra variable, establecemos una relación matemática, si a cada valor de la variable independiente podemos asociarle un único valor de la variable dependiente con la que se relaciona, tenemos una clase de relación llamada función" (Cedillo *et al*., 2006b, p. 63).

Teoría de Duval de los registros de representación

Cuando un sujeto aprende matemáticas, en particular, se apoya en diversas representaciones (mental, computacional y semiótica) para generar actividades cognitivas como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas, la comprensión de textos, etcétera.

Las representaciones mentales "permiten mirar el objeto en ausencia total de significante perceptible […] cubren un dominio más amplio que el de las imágenes" (Duval, 1999, p. 35); es decir, son el conjunto de imágenes, concepciones, ideas, creencias, etc., que un sujeto puede tener sobre un objeto, sobre una situación y sobre aquello que está asociado con dicho objeto o situación. Estas representaciones ocurren de manera consciente en el sujeto y cumplen una función de objetivación.

Por otra parte, las representaciones computacionales son "aquellas cuyos significantes, de naturaleza homogénea, no requieren de la mirada al objeto y permiten una transformación algorítmica de una serie de significantes en otra serie"; estas representaciones internas no ocurren de manera consciente; igualmente, "expresan la información externa en un sistema de manera tal que la hace direccionable, recuperable y combinable en el interior de ese sistema" (Duval, 1999, p. 36). Estas representaciones "están necesariamente ligadas a un código, con un soporte físico u orgánico, son transferibles a otro código o a un lenguaje más complejo" (Duval, 1999, p. 38). "Las representaciones computacionales presentan entonces la ventaja de ser transformables por un proceso de compilación" (Desclés *et al.,* 1990; citado en Duval, 1999, p. 38).

Según Duval, las representaciones semióticas son producciones constituidas por un sistema particular de signos: el lenguaje, la escritura algebraica o los gráficos cartesianos pueden ser convertidas en representaciones "equivalentes" en otro sistema semiótico (1999, p. 27). Entendiendo por sistema semiótico el conjunto de signos y reglas que representan objetos, donde los signos son las unidades elementales del sistema y las reglas ordenan las asociaciones de signos (Duval, 1999; citado en Segura, 2004, p. 53). Estas representaciones cumplen la función de objetivación, expresión y transformación intencional (Duval, 1999, p. 34); son representaciones conscientes y externas, pues permiten una mirada al objeto a través de la percepción de estímulos que tienen el valor de significantes (Duval, 1999, p. 34).

La producción de las representaciones semióticas está sometida al respeto de reglas "sintácticas" de formación y de transformación de unidades significantes, mientras que las representaciones mentales dependen de procesos físicos o psicológicos análogos a los que están en juego en la percepción (Duval, 1999, p. 37). Al ser de distinta naturaleza las representaciones mentales de un sujeto y las representaciones semióticas que produce para expresar aquéllas, las funciones de objetivación y de expresión que cumplen estos dos tipos de representación son independientes, puesto que

> [l]a objetivación que corresponde a la formación de representaciones mentales nuevas se acompaña de una producción de representaciones semióticas que con frecuencia puede ser insuficiente, inaceptable o incomprensible desde el punto de vista de la expresión. A la inversa, la producción de representaciones semióticas puede ser satisfactoria desde el

> punto de vista de expresión y no corresponder a ninguna objetivación para el sujeto que las reproduce sólo por imitación, y no las produce para una objetivación. (Duval, 1999, p. 35)

Así, las representaciones semióticas pueden ser aprehendidas bajo el aspecto de representante (forma/imagen) o bien bajo el aspecto de lo que es representado (contenido, lenguaje u objeto), mientras que las representaciones mentales se limitan a lo que es representado (Duval, 1999, p. 36). Aunque la naturaleza de las representaciones mentales y semióticas sea distinta y no exista una correspondencia entre ellas, sí persiste una interacción: “el desarrollo de las representaciones mentales está ligado a la adquisición y a la interiorización de sistemas y de representaciones semióticas” (Vigotski, 1962; citado en Duval, 1999, p. 36).

Las representaciones semióticas son de naturaleza diferente a la de las representaciones mentales, así como la de las representaciones computacionales, tomando en cuenta el tipo de transformación (cuasi-instantánea e intencional) de cada una. Las representaciones computacionales son representaciones internas a un sistema e independientes de la visión del objeto; en cambio, las representaciones semióticas son conscientes e inseparables de la visión del objeto.

En las representaciones computacionales se llevan a cabo transformaciones cuasi-instantáneas, pueden presentarse antes de haber observado el objeto y su papel es producir las informaciones y significaciones que son percibidas de manera inmediata y consciente por un sujeto; estas transformaciones, aunque se llevan a cabo fuera del campo de atención, producen los datos necesarios para la visión del objeto. Otra de sus características es que se pueden realizar simultáneamente, porque cuando hay que integrar mayor número de unidades informacionales los tiempos de reacción no se prolongan; además, resultan de una larga práctica y dominio (Duval, 1999, p. 38-39), es decir, son insensibles a la cantidad de elementos que han de integrarse.

Por otra parte, las representaciones semióticas presentan transformaciones intencionales, las cuales requieren del tiempo de un control consciente y se dirigen sólo a los datos previamente observados; a diferencia de las transformaciones cuasi-instantáneas, necesitan siempre la visión del objeto y sólo pueden efectuarse una después de la otra, aumentando así rápidamente el tiempo de reacción al integrar más unidades informacionales (Duval, 1999, p. 39), es decir, son sensibles a la cantidad de elementos que han de integrarse.

Dado que toda actividad cognitiva se basa en su complementariedad, la adquisición de transformaciones cuasi-instantáneas pasa necesariamente por una fase de transformaciones intencionales, y viceversa (Duval, 1999, p. 39). Una vez tratados los diferentes tipos de representaciones (mental, computacional y semiótica), sus vínculos, diferencias y algunas de sus transformaciones, es indispensable que hablemos de los registros de representación semiótica, ya que en ellos se relaciona todo lo anterior.

Los registros de representación semiótica "constituyen los grados de libertad de los que puede disponer un sujeto para objetivarse él mismo una idea aún confusa, un sentimiento latente, para explorar las informaciones o, simplemente para comunicarlas a un interlocutor" (Duval, 1999, p. 29); es decir, es el medio por el cual un estudiante analiza o expresa alguna información.

Según Duval (1999), son tres los registros de representación semiótica: Registro Algebraico (RA), Registro Gráfico (RG) y Registro de la Lengua Natural, que de acuerdo con otros autores llamaremos Registro Verbal (RV); dichos registros se diferencian por la naturaleza de sus significantes, el sistema de reglas que autoriza su asociación y el número de dimensiones en que puede efectuarse esta asociación.

A pesar de la particularidad que tiene cada registro de representación semiótica, es necesario reconocer que la actividad conceptual implica la coordinación de registros semióticamente heterogéneos (coordinación-diversificación), ya que permite a un sujeto no confundir "el representante y lo representado, o la representación y el contenido conceptual que esta representación expresa o ilustra" (diferenciación) (Duval, 1999, p. 60).

En la diversificación de registros es posible que un registro permita llevar a cabo distintos tratamientos de una manera más económica y más potente que otro registro; a pesar de ello, es necesario que el sujeto trabaje con al menos dos de los tres registros, ya que "toda representación es cognitivamente parcial en relación con lo que ella representa y […] las representaciones de registros diferentes no presentan los mismos aspectos de un mismo contenido conceptual" (Duval, 1999, p. 67).

No basta con la diversificación de los registros, sino que también hace falta una coordinación entre ellos, que a veces se ve afectada por los fenómenos de no-congruencia entre las representaciones producidas (fenómenos que surgen cuando no se cumplen todos los criterios de congruencia). La coordinación implica el cumplimiento de tres criterios de congruencia que se hacen en el pasaje de una representación a otra: "El primero es la posibilidad de una correspondencia «semántica» de los elementos significantes: a cada unidad significante simple de una de las representaciones se puede asociar una unidad significante elemental. Se considera como unidad significante elemental toda unidad que depende del «léxico» de un registro” (Duval, 1999, p. 50). Las unidades significantes pueden ser tanto palabras o símbolos como reagrupamientos de palabras o de símbolos (Duval, 1999, p. 73). El siguiente ejemplo ilustra este criterio de congruencia.

En un triángulo rectángulo la diferencia entre los dos ángulos agudos es 20º. ¿Cuál es la medida de cada uno? (La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º.)

Cuadro 2.3a

Registro verbal	Correspondencia semántica	Registro algebraico
La diferencia entre los dos ángulos agudos es 20º	$\longleftrightarrow$	A – B = 20

Cuadro 2.3b

Unidades significantes		Unidades significantes
La diferencia	$\longleftrightarrow$	– (sustracción)
Dos ángulos agudos	$\longleftrightarrow$	A, B
Es	$\longleftrightarrow$	= (igualdad)
20º	$\longleftrightarrow$	20

Cuadro 2.3c

Registro verbal	Correspondencia semántica	Registro algebraico	Correspondencia semántica	Registro verbal
La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º	⟷	A + B + C = 180		
El triángulo es rectángulo				
Uno de los ángulos del triángulo rectángulo es de 90º	⟷	C = 90		
		A + B + 90 = 180 (sustitución)		
		A + B = 90 (eliminación)	⟷	La suma de los dos ángulos A y B es 90°

Cuadro 2.3d

Unidades significantes		Unidades significantes
La suma	⟷	+ (adición)
ángulos interiores de un triángulo rectángulo	⟷	A, B, 90
Es	⟷	= (igualdad)
180º	⟷	180

En este ejemplo observamos un caso de correspondencia entre las unidades significantes elementales constitutivas de cada uno de los dos registros (verbal y algebraico), lo cual permite el cumplimiento del primer criterio de congruencia: *la posibilidad de correspondencia semántica de los elementos significantes*. Veamos ahora el mismo ejemplo en donde se presenta un caso de no congruencia.

En un triángulo rectángulo la diferencia entre los dos ángulos agudos es 20º. ¿Cuál es la medida de cada uno? (La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º.)

Cuadro 2.4a

Registro verbal	Correspondencia semántica	Registro algebraico
La diferencia entre los dos ángulos agudos es 20º	⟷	A – B = 20

Cuadro 2.4b

Unidades significantes		Unidades significantes
La diferencia	⟷	– (sustracción)
Dos ángulos agudos	⟷	A, B
Es	⟷	= (igualdad)
20º	⟷	20

Cuadro 2.4c

Registro verbal	Correspondencia semántica	Registro algebraico		Registro verbal
La suma de los ángulos interiores de un triángulo rectángulo es 180º	No hay correspondencia	A + B = 90	⟷	La suma de los dos ángulos A y B es 90°

Cuadro 2.4d

Unidades significantes		Unidades significantes
La suma	⟷	+ (adición)
ángulos interiores de un triángulo rectángulo	No hay correspondencia	
Es	⟷	= (igualdad)
180º	No hay correspondencia	
	No hay correspondencia	90
	No hay correspondencia	A, B

Podemos observar que no todas las unidades significantes que existen en el registro verbal corresponden al algebraico y viceversa, ya que algunas unidades significantes del registro algebraico no son reflejadas en el registro verbal. Por lo que no existe una correspondencia semántica término a término.

Como segundo criterio tenemos “la univocidad «semántica» terminal: a cada unidad significante elemental de la representación de salida, le corresponde una única unidad significante elemental en el registro de la representación de llegada” (Duval, 1999, p. 50). Para este caso analicemos el siguiente ejemplo.

Compré 5 cuadernos y 4 plumones por 63 pesos, cada cuaderno costó el doble de cada plumón. ¿Cuánto cuesta cada cosa?

x: precio de cada cuaderno

y: precio de cada plumón

Cuadro 2.5

Registro verbal (salida)	Registro algebraico (llegada)	Comparación entre la codificación de cada uno de los registros
Compré 5 cuadernos y 4 plumones por 63 pesos	$5x+4y=63$	Mismo orden Mismos rasgos semánticos
Cada cuaderno cuesta el doble de cada plumón	$x=2y$	Mismo orden Mismos rasgos semánticos

Al realizar la conversión del lenguaje verbal al algebraico vemos que sí se presenta la univocidad semántica, puesto que a una unidad significante elemental de la representación de salida le corresponde una unidad significante elemental en el registro de la representación de llegada. Ahora veamos el mismo ejemplo, de modo que no se respete este criterio de congruencia.

Compré 5 cuadernos y 4 plumones por 63 pesos, cada cuaderno costó el doble de cada plumón. ¿Cuánto cuesta cada cosa?

x: precio de cada cuaderno

y: precio de cada plumón

Cuadro 2.6

Registro verbal (salida)	Registro algebraico (llegada)	Comparación entre la codificación de cada uno de los registros
Compré 5 cuadernos y 4 plumones por 63 pesos	$5x + 4y = 63$ (conmutatividad de adición)	Mismo orden Mismos rasgos semánticos
	$4y + 5x = 63$	Orden inverso Mismos rasgos semánticos
Cada cuaderno cuesta el doble de cada plumón	$x = 2y$ (reflexividad de la igualdad)	Mismo orden Mismos rasgos semánticos
	$2y = x$	Orden inverso Mismos rasgos semánticos

En este ejemplo no existe univocidad semántica terminal, ya que cada uno de los registros verbales se les atribuyen dos ecuaciones equivalentes, pues los enunciados del registro verbal sólo son congruentes con una expresión del registro algebraico.

Finalmente "[e]l tercer criterio es relativo a la organización de las unidades significantes. Las organizaciones respectivas de las unidades significantes de las dos representaciones comparadas, conducen a que las unidades en correspondencia semántica sean aprehendidas en el mismo orden en las dos representaciones. Este criterio de correspondencia en el orden del arreglo de las unidades que componen cada una de las dos representaciones es pertinente sólo cuando éstas tienen el mismo número de dimensiones" (Duval, 1999, pp. 50-51). Para ello, veamos el siguiente ejemplo.

Los $\frac{3}{7}$ de la edad de A aumentados en los $\frac{3}{8}$ de la edad de B suman 15 años, y los $\frac{2}{3}$ de la edad de A disminuidos en los $\frac{3}{4}$ de la de B equivalen a 2 años. Hallar ambas edades.

Cuadro 2.7

Registro verbal	Registro algebraico
Los $\frac{3}{7}$ de la edad de A aumentados en los $\frac{3}{8}$ de la edad de B suman 15 años	$\frac{3}{8}$B + $\frac{3}{7}$A = 15
Los $\frac{2}{3}$ de la edad de A disminuidos en los $\frac{3}{4}$ de la de B equivalen a 2 años	$\frac{3}{4}$B - $\frac{2}{3}$A = 2

Aquí se respeta el orden del arreglo de las unidades que componen a cada una de las dos representaciones, por lo que se cumple el tercer criterio de congruencia. En caso de que no se presentara este orden, se afectaría de manera determinante la solución del sistema.

Los $\frac{3}{7}$ de la edad de A aumentados en los $\frac{3}{8}$ de la edad de B suman 15 años, y los $\frac{2}{3}$ de la edad de A disminuidos en los $\frac{3}{4}$ de la de B equivalen a 2 años. Hallar ambas edades.

Cuadro 2.8

Registro verbal	Registro algebraico
Los $\frac{3}{7}$ de la edad de A aumentados en los $\frac{3}{8}$ de la edad de B suman 15 años	$\frac{3}{7}$A + $\frac{3}{8}$B = 15
Los $\frac{2}{3}$ de la edad de A disminuidos en los $\frac{3}{4}$ de la de B equivalen a 2 años	$\frac{2}{3}$A - $\frac{3}{4}$B = 2

Es necesario que un sujeto disponga de varios registros de representación (diversificación) y que a su vez los coordine, para que pueda establecer la diferencia entre el representante y el representado (Duval, 1999, pp. 66-67).

En el anexo Y se presenta un ejercicio de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que incluye los tres criterios de congruencia entre dos registros de representación semiótica (el verbal y el algebraico).

Estas tres fases (coordinación, diversificación y diferenciación) son relativas a la semiosis –aprehensión o producción de una representación semiótica (Duval, 1999, p. 14)– y necesarias para que un sujeto pueda lograr la noesis –los actos cognitivos como la aprehensión conceptual de un objeto, la discriminación de una diferencia o la comprensión de una inferencia (Duval, 1999, p. 14)– de manera más asequible. Bajo las tres se pueden abordar tratamientos lógicos y matemáticos, como es el caso: sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Además de que el estudiante realice las tres fases debe pasar por tres actividades cognitivas fundamentales de la representación ligadas a la semiosis (formación, tratamiento y conversión).

Podemos decir que “[f]ormar una representación semiótica es recurrir a un(os) signo(s) para actualizar o para sustituir la visión de un objeto. […], los signos utilizados pertenecen a un sistema semiótico ya constituido y ya utilizado por otros” (Duval, 1999, p. 41), lo cual implica “una selección en el conjunto de los caracteres y de las determinaciones que constituyen lo que se «quiere» representar” (Duval, 1999, p. 40).

Ahora bien, el tratamiento “es una transformación que se efectúa en el interior de un mismo registro, aquel en que se utilizan las reglas de funcionamiento: un tratamiento, pues, no moviliza más que un solo registro de representación” (Duval, 1999, p. 31); tal transformación produce otra u otras representaciones en el mismo registro; es decir, corresponde a su expansión informacional (Duval, 1999, p. 43). En esta diversificación de representaciones es necesario establecer también una coordinación entre ellas para que el sujeto no confunda al objeto con su representación y viceversa.

En cambio, la conversión es “una transformación que hace pasar de un registro a otro; requiere pues su coordinación por parte del sujeto que la efectúa” (Duval, 1999, p. 31); dicha transformación es externa, puesto que genera una representación en un registro diferente al de la representación inicial. La conversión implícita o explícita de representaciones es el medio por el cual se puede comprender el contenido representado y no solo quedar en el conocimiento de su representante; así [como] para conocer solo al "representante (punto de vista formal) y explorar las posibilidades de transformación dadas por las reglas de tratamiento del registro del que el representante proviene" (Duval, 1999, p. 67).

La no-congruencia "conduce a fracasos en la actividad cognitiva de conversión. Y estos fracasos perduran a pesar de los aprendizajes que hayan requerido de tratamientos en los diferentes registros" implicados (Duval, 1999, p. 53). Estos fracasos revelan un encerramiento de los registros de representación, es decir, los estudiantes "no reconocen el mismo objeto a través de las representaciones que pueden darse en sistemas semióticos diferentes" (Duval, 1999, p. 16), por ejemplo, un enunciado en lenguaje verbal y su escritura algebraica.

El aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales queda limitado cuando la formación y el tratamiento de representación solo trabaja o privilegia únicamente un solo registro, y aun cuando se realiza la movilización de varios registros de manera simultánea o sucesiva, se debe considerar que esto no significa que el sujeto los coordine. Este tipo de aprendizaje permite determinado grado de comprensión mono-registro (comprensión que no permite ninguna transferencia) que es satisfactoria a corto plazo. Por ello es necesario que en el tema de sistemas de ecuaciones lineales exista una comprensión fundada en la coordinación de registros (comprensión integrativa), ya que esto permitirá al sujeto realizar una transferencia que le será más significativa.

Es necesario tener presente que la ejecución de tareas y ejercicios de conversión no suelen favorecer la coordinación de los registros de representación, ya que “la actividad de conversión presupone la discriminación de unidades significantes que se deben pone en correspondencia en el registro de partida y en el de llegada” (Duval, 1999, p. 73). Cabe mencionar que “de un registro a otro cambia la naturaleza de las unidades significantes que se deben identificar y el modo de discriminación” (Duval, 1999, p. 73). La discriminación de las unidades significantes de una representación depende de la aprehensión de un campo de variaciones posibles relativo a la significancia de un registro y da la posibilidad de aprehender lo que ella representa (Duval, 1999, p. 74).

Finalmente es necesario retomar un modelo cognitivo de representación (véase la figura 2.1) que esta centrado en la función de objetivación para que el estudiante acceda a los sistemas de ecuaciones lineales, ya que en dicho modelo están presentes las actividades cognitivas (formación, tratamiento y conversión) y las fases (coordinación, diversificación y diferenciación). Figura 2.1.

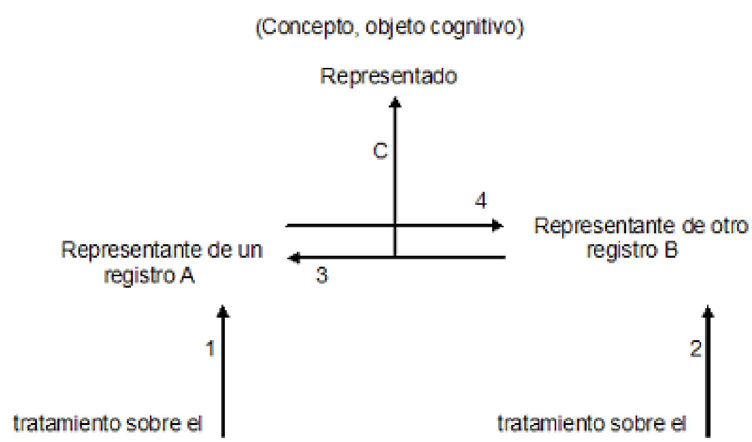


Figura 2.1. Modelo de la representación centrada en la función de objetivación (Duval, 1999, p. 65)

Las flechas 1 y 2 corresponden a las transformaciones internas a un registro. Las flechas 3 y 4 corresponden a las transformaciones externas, es decir, a las conversiones por cambio de registro. La flecha C corresponde a lo que llamaremos comprensión integrativa de una representación: supone una coordinación de dos registros. Este esquema considera el caso más simple de la coordinación entre dos registros. No hay flechas entre los tratamientos propios a cada registro, ya que cada uno tiene tratamientos que le son propios (Duval, 1999, p. 66). Además, en este modelo se dan dos relaciones de convertibilidad: "una relación a partir de cada representante. Es una relación superficial que es suficiente para la función de expresión o para la de tratamiento (flechas 3 y 4)" y "una relación a partir de la relación de convertibilidad de los representantes. Esta relación, propia al sujeto de conocimiento (flecha C), es necesaria para la función de objetivación" (Duval, 1999, p. 65).

El modelo precedente permite visualizar dos planos: el de los conocimientos construidos (mediante la formación y el tratamiento de representaciones semióticas) y el funcionamiento cognitivo que permite esta construcción.

> La construcción de conocimientos producidos, no más en el marco elemental de la ejecución de tareas (respuesta a preguntas, resolución de problemas, resúmenes), pueden expresarse quedándose en un solo registro de representación. Pero el funcionamiento cognitivo que permite formar, movilizar o reconocer las representaciones pertinentes, y que permite así conducir y controlar la actividad hasta su término, implica más registros, al menos en los sujetos humanos. Tal funcionamiento

cognitivo implica que lo representado sea diferenciado del representante. (Duval, 1999, p. 66)

CAPÍTULO III

MATERIALES PARA LA ENSEÑANZA DE ECUACIONES LINEALES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Alonso y colaboradores

En el libro Ideas y actividades para enseñar álgebra (Alonso *et al*., 1993) se retoman algunos de los principales problemas que surgen en la iniciación al lenguaje algebraico, relacionados con el simbolismo, la generalización, la traducción del lenguaje ordinario al algebraico, las ecuaciones, los sistemas de ecuaciones lineales y las destrezas algebraicas. Cada una de estas cuestiones se aborda en torno a las dificultades de los alumnos, a los problemas subyacentes a ellas y a sus posibles soluciones. Tales problemas fueron identificados a través de investigaciones recientemente publicadas, trabajos previos y experiencias docentes de Alonso y sus colaboradores (Alonso *et al*., 1993, p. 11).

A continuación se exponen algunas de las actividades y sugerencias planteadas en el libro de Alonso *et al.* (1993), a fin de utilizarlas como referencia para el propósito de esta tesis.

Ecuaciones lineales

En cuanto a las dificultades que tienen los alumnos con las ecuaciones, ofrecen diferentes alternativas. Por ejemplo, las cadenas y los caminos son algunas actividades para facilitar la comprensión del concepto de ecuación (véase el anexo B2).

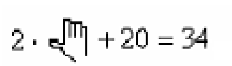
Este tipo de actividades, además de ayudar a comprender el concepto de ecuación (a partir del de solución), contribuye a entender las operaciones y sus inversas. Los caminos son ejercicios que también colaboran con dicho concepto, igualmente permite aproximarse al sentido de equilibrio del signo igual en una ecuación y al sentido de solución como un conjunto de valores (Alonso *et al*., 1993, p. 97). Ejercicios similares a éstos se pueden encontrar en el libro *Iniciación al álgebra* de Socas y sus coautores (1996, pp. 129-131). En dicho libro se manejan como diagramas numéricos y tienen como fin traducir el lenguaje aritmético al lenguaje algebraico; usar letras como números generalizados y como incógnitas específicas, y dar respuestas abiertas en forma de expresiones algebraicas sencillas. Las edades recomendadas para realizar este tipo de ejercicios son de 11 a 13 años.

Socas y sus colaboradores también proponen distintas formas de presentar un diagrama, a manera de “esquemas ilustrativos de diferentes relaciones cuantitativas que representan el recorrido de esas relaciones bajo órdenes de cálculo” (Socas *et al*., 1996, p. 175; dichos ejemplos se encuentran expuestos en las páginas 175-177, 194 y 197).

Socas y coautores en *Iniciación al álgebra* (1996) plantean ejemplos de caminos (pp. 194-195) trabajándolos de manera que primero se presenta el enunciado verbal, después el modelo (camino) y finalmente la expresión simbólica.

El trabajo con ecuaciones algebraicas, a partir de identidades aritméticas, ayuda a la asimilación del concepto intuitivamente antes de formalizarlo simbólicamente y consolida el concepto de solución como número que hace cierta la identidad. Por ejemplo, “Si en una identidad aritmética se tapa un número con el dedo, es posible definir una ecuación como una identidad aritmética que tiene un número oculto. Después, en lugar de tapar el número, se pueden usar cuadrados vacíos, y pasar así, gradualmente, a remplazar el cuadrado por una letra, que de momento se llamará desconocida por su parecido con el número oculto” (Alonso *et al*., 1993, p. 98).

$2 \cdot 7 + 20 = 34$



$2 \cdot \square + 20 = 34$

$2a + 20 = 34$

(Confróntese con los incisos 1 y 2 de la actividad 7, en el anexo D.)

También en una misma identidad aritmética se pueden obtener muchas ecuaciones si se tapa un número diferente en la identidad:

$$2 \cdot 5 + 5 = 20 - 5$$

puede dar lugar a

$$2b + 5 = 20 - 5\,,$$

$$2 \cdot 5 + c = 20 - 5\,,$$

$$2 \cdot 5 + 5 = d - 5\,,$$

$$2 \cdot 5 + 5 = 20 - e\,.$$

Cabe aclarar que este tipo de ejercicios puede generar la idea errónea de que todas las ecuaciones tienen solución (Alonso *et al*., 1993).

También se cuenta con “la posibilidad de usar varias veces la misma letra, partiendo de una identidad en la que un mismo número puede estar escrito varias veces” (Alonso *et al*., 1993, p. 98). Por ejemplo,

$$9 \cdot 3 - 7 = 6 \cdot 7 - 22$$

daría lugar a

$$9 \cdot 3 - a = 6 \cdot a - 22 \, .$$

En este proceso quizá se llegue a construir ecuaciones sin solución que no tengan su origen en una identidad como

$$2b + 8 = 2b + 9 \, .$$

(Confróntese con el inciso *3)* de la actividad 7, en el anexo D.)

Las balanzas y los tableros ayudan a consolidar la ecuación como equilibrio (con la incógnita en ambos lados), ya que traduce el concepto de igualdad a una situación concreta, aspecto que permite observar la propiedad simétrica del igual. Además, en ambas actividades se trabaja el concepto de ecuación como la relación entre algo desconocido y algo conocido (véanse los anexos A2, F2 y G2).

La balanza como elemento autocorrector permite desprenderse gradualmente de él mismo a través de la experiencia constante, en la que se da sentido a las operaciones algebraicas.

También podemos encontrar el trabajo con balanzas en *Iniciación al álgebra* de Socas y sus colaboradores (1996) en las páginas 172-173 y 191-192. Dicho modelo permite implementar algunas reglas de manipulación de las igualdades: “[s]i se suma o se resta el mismo número a los dos [lados] de una ecuación ésta no varía, [l]o mismo ocurriría si multiplicáramos por un número uno de los [lados] de la ecuación, deberíamos multiplicar por el mismo número el otro." (Socas *et al*., 1996, p. 173). Estas dos reglas se trasladan al modelo, pues si se agrega o se quita la misma cantidad en ambos platillos, la balanza se mantiene en equilibrio.

Algunas de las limitaciones de la balanza y del tablero surgen cuando se utilizan los números racionales o bien al trabajar el concepto de ecuaciones equivalentes a partir de la multiplicación y división en ambos lados.

En estos materiales interviene el *método de hacer lo mismo a ambos lados*, el cual se basa en transformar una ecuación en otra más sencilla con la misma solución (equivalente), método que consolida el concepto de ecuaciones equivalentes, en el que se basan las técnicas de resolución. Para ayudar a reforzar dicho concepto, Alonso y sus coautores recomiendan ejercicios como los que se incluyen en el anexo C1. Los ejercicios de este tipo son difíciles de resolver, aunque al descubrir el procedimiento, se puede llegar a construir una gran diversidad de ecuaciones equivalentes.

Es necesario corroborar la solución independientemente del método que se utilice para resolver la ecuación, ya que reforzará tanto el concepto de ecuación como el de solución.

Sistemas de ecuaciones lineales

Partiendo de los errores y dificultades que conllevan los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, también se concreta en el libro de Alonso *et al*. (1993) una serie de actividades que pretende contrarrestarlos. Las actividades que se incluyen en el anexo K2 sirven para desarrollar "el concepto de ecuación como condición o restricción, ligado al concepto de variable, como campo de posibilidades"; asimismo ayudan a tomar conciencia "de que el número buscado o incógnita no es más que un valor particular de una variable, y que una ecuación supone la condición que obliga a seleccionar algún valor particular de la variable" (Alonso *et al*., 1993, p. 121).

En la resolución de sistemas de ecuaciones uno de los aspectos que más inquieta al estudiante es el algoritmo de resolución (procedimientos y automatismos) mediante el dominio de reglas operatorias, es decir, prevalece más el sentido de «cómo se hace» sobre el «porqué se hace». Por ello, es necesario utilizar técnicas de resolución, a partir de un contexto que posibilite la visualización de lo que ocurre en la estructura del procedimiento. Con actividades como las del anexo O2 se pretende lograr dichos objetivos. Estas actividades también facilitan la comprensión de lo que es un sistema equivalente "al sustituir una ecuación lineal por una combinación lineal" (Alonso *et al*., 1993, p. 123); esta equivalencia permite reducir el número de incógnitas para encontrar la solución.

Una actividad similar para la resolución de sistemas de ecuaciones se encuentra en las páginas 203 y 204 del libro *Iniciación al álgebra* de Socas y sus coautores (1996). Las actividades 4 y 5 (véase el anexo O2) permiten trabajar con sistemas de ecuaciones sin la necesidad de plantearlas de forma algebraica; sin embargo, es preciso realizar esta simbolización, para lo cual se recomienda la actividad 6.

Actividad 6

"He pensado dos números que llamo x e y. La siguiente ecuación da una pista para averiguarlos:

$x+2y=47$.

¿Sabes ya cuáles son?

Te daré otra pista:

$x+4y=81$.

Cuando hayas adivinado los números, no se lo digas a nadie. Construye tú otra ecuación que proporcione una nueva pista. Coloca, encima de las pistas, las dos ecuaciones originales y pregunta:

- ¿Hay algún par de ecuaciones que sean la misma?
- ¿Hay alguna ecuación que se pueda obtener de otra o de otras?" (Alonso *et al.*, 1993, p. 124).

Además del método de reducción, también los métodos de sustitución e igualación permiten realizar la reducción de sistemas a una sola ecuación con una sola incógnita; sin embargo, algunas de sus diferencias son la forma de dar sentido a las acciones que realiza cada uno.

La actividad incluida en el anexo M2, propuesta por Alonso *et al.,* (1993), sirve para el aprendizaje del método de sustitución en la resolución de los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, mediante la manipulación de objetos concretos. (Confróntese con el anexo M1.)

A fin de complementar la noción de sistema de ecuaciones, el concepto de solución y los procedimientos de resolución, se propone la resolución de sistemas mediante el método de igualación, en relación a la idea de función, como se muestra en el siguiente ejemplo.

“Actividad 9

En el colegio quieren comprar una fotocopiadora. Tienen ofertas de varias casas comerciales:

- La casa «Buenacopia» cobra una cantidad fija de 600 pesetas a la semana, y otra, variable, de 2,6 pesetas por cada fotocopia.
- La casa «Copiaprisa» no cobra cantidad fija, pero las fotocopias salen a 3,2 pesetas cada una.

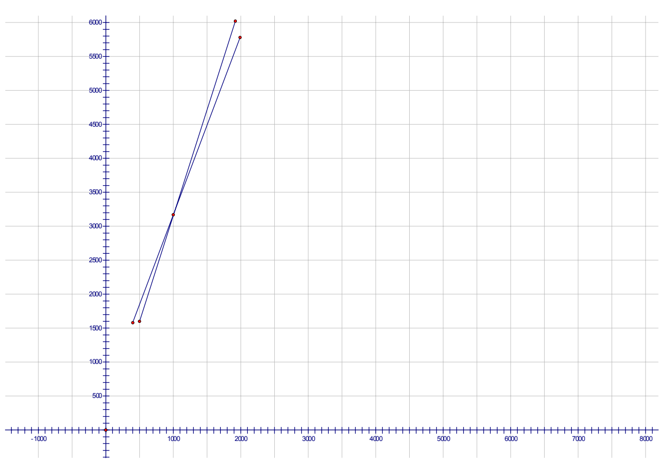
¿Con cuál conviene quedarse?” (Alonso *et al*., 1993, p. 129)

Este es un problema abierto ya que su respuesta depende del número de fotocopias semanales que produzca cada centro.

Se recomienda ordenar los cálculos en forma de tabla para debates posteriores. Con la ayuda de la tabla se les pide ahora buscar una expresión general del costo semanal de cada fotocopiadora en relación al número de fotocopias. Y finalmente se plantea la pregunta: ¿Cuántas fotocopias hay que hacer para que el coste sea el mismo en las dos casas?

Otro método que puede dar un nuevo sentido a la resolución de un sistema es la representación grafica.

A partir de las tablas o expresiones algebraicas se obtiene lo siguiente.



Anexo a la gráfica se establecen las siguientes interrogantes:

- Si se hacen 200 fotocopias semanales, ¿qué casa conviene más? ¿Y si se hacen 3,000? Señala sobre las rectas los puntos correspondientes. ¿Qué posición ocupan entre sí?
- ¿Hay alguna cantidad de fotocopias que cueste lo mismo con una casa que con la otra? ¿Dónde está en la gráfica? ¿Cómo calcularla exactamente?” (Alonso *et al*., 1993, p. 131)

La resolución gráfica es un método paralelo al de igualación, pues se basa en los mismos principios. Además, dicho método es de gran utilidad para concretar y visualizar información.

En el aprendizaje de las matemáticas una opción de gran riqueza es el uso de materiales didácticos en forma de juegos, ya que provocan en el alumno un gran interés y despiertan una actitud positiva (Alonso *et al*., 1993).

Alonso y sus coautores se interesan por aquellos juegos que exigen utilizar conocimientos matemáticos, fundamentalmente los que aclaren conceptos y ayuden a mejorar destrezas algebraicas. Dichos juegos procuran reunir las siguientes cualidades: ser sencillos, oportunos al nivel del estudiante, con objetivos específicos, atractivos y motivadores, que incorporen estructuras de juegos ya conocidos. Juegos individuales que faciliten la interiorización de conceptos, juegos colectivos y asequibles económicamente.

El juego de adivinar números permite introducir al estudiante en el cálculo literal y el álgebra. Algunos ejemplos se muestran a continuación.

Ejemplo 1

1.- Piensa un número.

2.- Multiplícalo por 2.

3.- Añade 5 al resultado.

4.- Multiplica lo que has obtenido por 5.

5.- Añade 10 al resultado.

6.- Multiplica el resultado por 10.

7.- Dime lo que te sale y te diré, rápidamente, tu número inicial.

Ejemplo 2

1.- Piensa un número.

2.- Súmale 2.

3.- Eleva el resultado al cuadrado.

4.- Réstale cuatro veces tu número inicial.

5.- Dime lo que te sale y te diré, rápidamente, tu número inicial.

Ejemplo 3

1.- Piensa un número.

2.- Elévalo al cuadrado.

3.- Resta tu número al resultado.

4.- Divide ahora por tu número inicial menos 1.

5.- ¿Cuánto te da? ¿Por qué?

Las actividades anteriores pueden provocar en primera instancia sorpresa en el estudiante haciéndolo para el interesante; sin embargo, es necesario inducirlo a explicar el funcionamiento de los juegos a través de expresiones algebraicas.

Los círculos mágicos favorecen el trabajo con sistemas de ecuaciones, ya que su estructura permite en la circunferencia sumar el mismo número en todas las expresiones, conocido como “el número mágico” (Alonso *et al.,* 1993, p. 190). En el anexo Q se incluyen las actividades 29 y 30 relacionadas con los círculos mágicos.

Por último, se utilizan las balanzas para la resolución de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas como pasatiempo. La balanza es una actividad para iniciar el estudio de los sistemas; ésta les permite a los estudiantes manipular objetos para poder hallar sus pesos. Posteriormente simbolizan dichas situaciones y resuelven los sistemas simbólicamente. (Véase el anexo N2 y confróntese con el anexo N1.)

Otros sistemas de ecuaciones ilustrados gráficamente con el modelo de la balanza se encuentran en las páginas 174-175 y 193 de *Iniciación al álgebra* de Socas y sus coautores (1996).

Pinzón

En el “Tablero con fichas, un modelo de enseñanza para la resolución de ecuaciones lineales” (Pinzón, 1997), se propone la aplicación de una secuencia didáctica en la cual se utiliza un modelo concreto que se retoma del libro iniciación al álgebra de Socas y coautores (1996).

Para llevar a cabo su investigación, Pinzón consideró necesario cambiar los colores de las fichas amarillas y negras, por rojas y azules; además de tomar en cuenta la regla de eliminación propuesta por Socas, «parejas de la misma forma y distinto color en un mismo lado del tablero, se neutralizan y se eliminan» (1996, p. 183), agrega dos más.

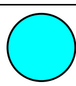
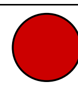
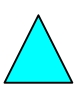
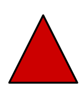
Las reglas propuestas en el fichero (Pinzón, 1997, p. 22) son las siguientes:

1.- Al pasar una ficha de un lado a otro cambia de color.

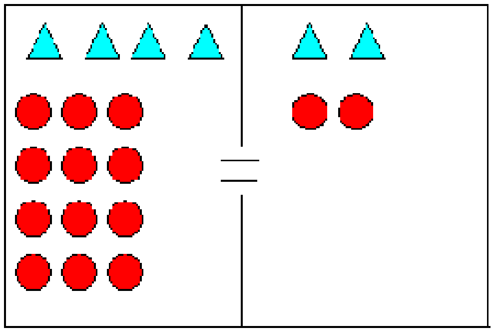
2.- Dos fichas de la misma figura y [de] diferente color, colocadas en el mismo lado, se anulan (se hace cero).

3.- Si se le quitan o ponen fichas a un lado o se cambian de color, también se le debe hacer lo mismo al otro lado.

El modelo “[e]s un rectángulo de los 65 cm por 41 cm dividido en dos partes iguales, lado izquierdo y lado derecho, con un signo igual en medio” (Pinzón, 1997, p. 22). También utiliza fichas de 2 figuras y 2 colores: el triángulo azul para representar la x positiva y el triángulo rojo para la x negativa; además, utiliza la figura del círculo de color azul o rojo; el primer color para representar una unidad positiva y el segundo para una unidad negativa.

 Unidad positiva	 Unidad negativa
 x positiva	 x negativa

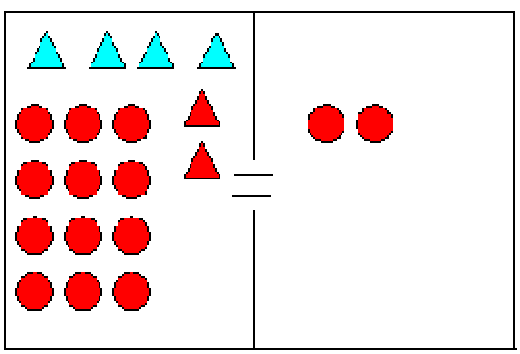
Para trabajar con el fichero es necesario representar en él la ecuación que se tenga que resolver, por ejemplo: $4x-12=2x-2$.



Una vez representada, se resuelve mediante el siguiente procedimiento: Se pasan las x al lado izquierdo y los números al lado derecho; después se anulan en ambos lados (si es que se puede aplicar la regla 2) y finalmente se obtiene el valor de x.

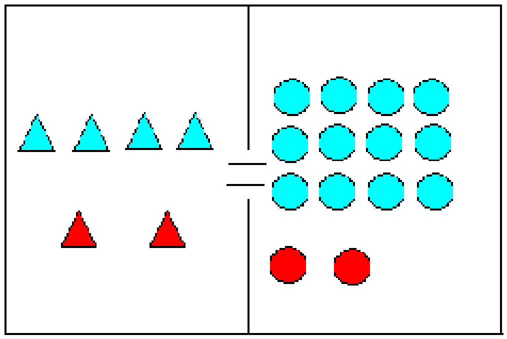
Ejemplo de resolución

1.- Pasar las x al lado izquierdo.



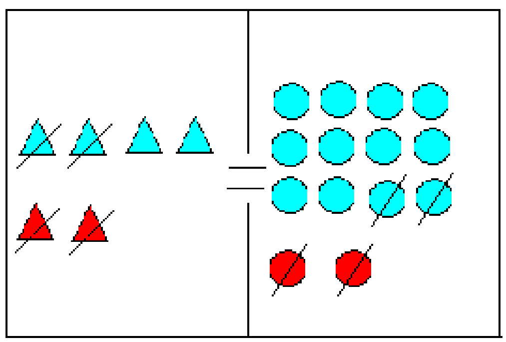
$4x-2x-12=-2$.

2.- Y los números al lado derecho.



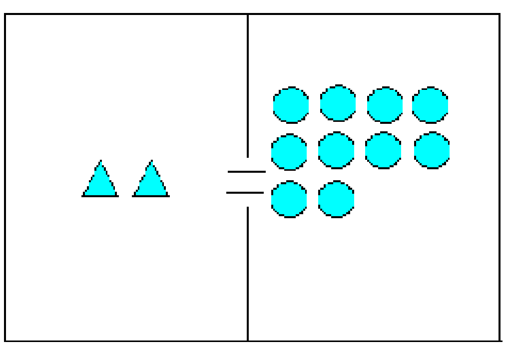
$4x - 2x = 12 - 2$.

3.- Anular en ambos lados



$4x - 2x = 12 - 2$.

4.- Y obtenemos que $2x = 10$.



$2x = 10$.

$x = 5$ (se realiza la repartición).

Al trabajar con el tablero con fichas es necesario registrar por escrito las ecuaciones algebraicas que se obtengan, ya que permitirá comprender mejor las transformaciones, además de facilitar la adquisición del concepto de ecuación, ecuación equivalente e igualdad.

Una vez implementada la secuencia didáctica de Pinzón y después de un exhaustivo análisis de entrevistas y procesos de resolución de los estudiantes, llega a las siguientes conclusiones.

Los estudiantes llegan a resolver ecuaciones lineales utilizando el tablero con fichas logrando sucesivamente desprenderse de él para resolverlas de forma sintáctica. Además, adquieren el lenguaje algebraico, transfieren del modelo concreto al lenguaje algebraico y se apropian del concepto de ecuación.

El tablero con fichas también contribuye a la distinción de la incógnita respecto del coeficiente, esencialmente el 1, previene la concatenación de términos no semejantes y genera esquemas o estructuras en los estudiantes.

A pesar de superar mediante el tablero con fichas algunas dificultades que presentan los estudiantes en el tema de ecuaciones, existen cuestiones que requieren de investigación, tales como la incompatibilidad numérica, las soluciones fraccionarias y la aplicación del modelo en un grupo escolar.

Finalmente, es necesario especificar que aunque el cero no es simbolizado en el tablero mediante alguna ficha de color específico, sí se podría presentar (según Pinzón) su concepto mediante la suma ($-1+1=0$) de un círculo rojo (unidad negativa) y un círculo azul (una unidad positiva). (Confróntese con la actividad 8, en el anexo E1.)

Cedillo y colaboradores

En la serie “Enseñanza de las matemáticas. Módulo 6. Ecuaciones de primer grado” (Cedillo *et al*., 2006a), se expone una propuesta cuyos objetivos primordiales, son que el estudiante:

1.- Identifique las letras como representantes de números.

2.- Reconozca la equivalencia entre los lados derecho e izquierdo [*sic*] de una ecuación.

3.- Desarrolle métodos para resolver ecuaciones, a partir de sus conocimientos aritméticos (p. 34).

Para el cumplimiento de sus objetivos desarrollaron dos sesiones de trabajo. En la primera sesión un grupo de estudiantes observaron una cápsula de video que trata algunas situaciones en las que se hace uso de las matemáticas (p. 36).

En el video una de las situaciones tratadas es el de la telefonía celular, la cual se retoma para el desarrollo de la primera sesión de trabajo y para ello se considera el siguiente enunciado:

“Una compañía telefónica ofrece teléfonos celulares que operan con tarjetas de diferentes precios, y cobra $6.00 por minuto (o fracción)” (Cedillo *et al*., 2006a, p. 36).

Después del enunciado se plantea la siguiente situación:

Si te regalan un teléfono celular de dicha compañía con una tarjeta de $200.00 que te da un crédito de $300.00:

1.- ¿A lo más cuántos minutos puedes hablar con este crédito?

2.- ¿Cuánto gastas de tu crédito de $300 si haces una llamada de 5 minutos?

3.- ¿Cuánto gastas de tu crédito de $300 si hablas 17 minutos?

4.- Si tu crédito está en $120.00, ¿a lo más cuántos minutos has usado de tu crédito de $300? (p. 36)

A continuación se plantean preguntas que se trabajarán en equipo (véase el anexo C1).

Al término de las preguntas anteriores los estudiantes dieron a conocer sus respuestas y las compararon.

Para el desarrollo de otras cuestiones se realizaron algunos cambios al enunciado inicial quedando:

"La compañía telefónica ha cambiado las condiciones del cobro de las llamadas,
ahora cobrará por el tiempo que dure la llamada, es decir, las fracciones de minuto
las va a cobrar por lo que corresponda manteniendo la tarifa de $6.00 por minuto"
(Cedillo *et al.*, 2006a, p. 38).

Se les pide a los estudiantes que retomen el enunciado para resolver en equipo varias interrogantes (véase el anexo C2). Una vez contestados las interrogantes anteriores, los estudiantes escribieron sus respuestas en el pizarrón y las compararon con las de sus compañeros con la ayuda del docente (Cedillo *et al*., 2006a, p. 38).

La siguiente actividad consistió en plantear un problema tomando en cuenta la ecuación $4.5x+30=156$, para después exponerlo ante sus compañeros (véase el inciso *16)* del anexo C2).

En la segunda sesión el docente analizó junto con el grupo lo que se trabajó en la sesión anterior. Posteriormente se les presentaron a los estudiantes otras actividades (Cedillo *et al*., 2006a, pp. 39-40; véase el anexo J2)

Algunos de los resultados que obtuvieron de la primera sesión fueron los esperados. Los primeros cuatro incisos (véase el anexo J2) fueron resueltos por los estudiantes de manera aritmética y para los siguientes se construyeron diversas fórmulas (Cedillo *et al*., 2006a, pp. 41-42).

En la segunda sesión se observó que los estudiantes resolvieron distintas ecuaciones (tanto las construidas por ellos como las propuestas por el docente) sin recurrir necesariamente a métodos formales, es decir, a través de las operaciones inversas (deshacer operaciones) y el uso de hechos numéricos, tal método se debe en gran parte a que los estudiantes fueron capaces de visualizar una ecuación en partes y como un todo, hecho que rebasó las expectativas de los logros que se pretendieron en un principio (Cedillo *et al*., 2006a, pp. 54-55). En esta sesión también lograron la construcción de ecuaciones; sin embargo, cuando se les presentaron ecuaciones con paréntesis no respetaban el orden de las operaciones. Ante tal situación fue necesaria la intervención del docente para que reconsideraran la forma de operar en la ecuación y lograran superar el problema gradualmente (Cedillo *et al*., 2006a, p. 51).

Los estudiantes en ambas sesiones aparentemente reconocieron que las letras simbolizan números y que el signo igual denota equivalencia entre el primer miembro y el segundo de una ecuación. No obstante, en la escritura de algunos cálculos y expresiones matemáticas utilizaron el signo igual como conector y no como equivalencia (Cedillo *et al*., 2006a, pp. 55-56).

Esta propuesta didáctica contribuye a que los estudiantes sean capaces de ofrecer la mayor parte del contenido de la clase y de proyectar una gran seguridad en el uso de sus propios métodos (Cedillo *et al*., 2006a, p. 57).

Algunas recomendaciones de Cedillo y sus coautores (2006a, pp. 56-57) son:

- Conviene que los estudiantes sean familiarizados con las ecuaciones y sus contenidos esenciales (noción de incógnita y equivalencia) antes de abordar términos formales (ecuación, lado izquierdo y derecho de una ecuación [*sic*], incógnita y solución de una ecuación, entre otros).
- En cuanto a los estudiantes que en algunos casos utilizaron el signo igual como conector y no como equivalencia, se recomienda atenderse más adelante, ya que esto no representa obstáculo para el desarrollo de las sesiones.
- Ante el error de los estudiantes de no respetar el orden de las operaciones en una ecuación que contenía paréntesis, fue necesaria la intervención del docente; sin embargo, es conveniente que se incluyan otras

actividades que conlleven la utilización de paréntesis y cálculos en los que intervenga el orden operacional.

- Invitar al estudiante a formular argumentos para ratificar sus respuestas.
- El docente debe aprovechar los métodos que el propio estudiante formula y la seguridad que les da al utilizarlos para introducir progresivamente el uso de reglas convencionales en la resolución de ecuaciones.

Preisser

En el número E. 29 de la revista del Seminario de Enseñanza y Titulación, Preisser publicó una propuesta de instrumentación didáctica para la enseñanza de los sistemas de ecuaciones en el bachillerato. Esta propuesta didáctica se desarrolla a partir de guiones de clase, los cuales describen las actividades que deben llevarse a cabo en 17 sesiones. Además, incluye consideraciones de carácter general y algunas especificaciones sobre la estructura y el manejo del contenido de los guiones de clase (Preisser, 1989, p. 47).

En las consideraciones generales señaló la selección para el tratamiento y el enfoque metodológico de la resolución de problemas, con lo que pretende fomentar una participación efectiva del estudiante en el proceso de su aprendizaje (aprendizaje por descubrimiento). Ante esta postura se requiere que el docente sea un guía y coordinador del trabajo individual o colectivo que realizarán los estudiantes (Preisser, 1989, p. 48).

Además de las nociones intuitivas que el estudiante puede generar, se pretende que también logre determinado grado de formalización. También se espera que en las sesiones comprenda y enriquezca los conceptos fundamentales del tema, así como los métodos de resolución; finalmente, se busca apoyar la eliminación de algunas dificultades que los estudiantes enfrentan en el estudio de sistemas de ecuaciones lineales, tales como el concepto de simultaneidad y la solución de un sistema, la representación simbólica de los problemas verbales y el manejo de los algoritmos algebraicos (Preisser, 1989, pp. 48-49).

En las especificaciones sobre la estructura y el manejo del contenido de los guiones de clase se describen los puntos básicos que contendrá cada sesión, tales como propósitos, descripción de la actividad, problemas y situaciones que tienen que desarrollarse y algunas sugerencias dirigidas al docente.

El contenido de las primeras 9 sesiones que se retomarán (Preisser, 1989, pp. 53-54) se anuncian a continuación. (Confróntese con las actividades 19, 31-37, en los anexos K1 y R-X)

1.- En las tres primeras sesiones se trabajan:

- Los conceptos de *ecuaciones indeterminadas* y su *solución*, *sistemas de ecuaciones* y su *solución*, *simultaneidad*, *ecuaciones equivalentes*, *sistemas compatibles*, *incompatibles*, *determinados* e *indeterminados*.
- Método gráfico de resolución para sistemas de 2 x 2 (2 ecuaciones con 2 incógnitas), y la interpretación gráfica del número de soluciones de un sistema de 2 x 2.
- Se redactan, analizan, modifican y resuelven problemas que parten de, o dan lugar a, un sistema de 2 x 2.

2.- Las sesiones 4, 5 y 6 están destinadas a:

- Generar y manejar el concepto de *sistemas equivalentes*.
- Introducir una estrategia general de resolución que se manejará a lo largo del tema.
- Obtener el tipo de transformaciones que se pueden llevar a cabo para construir sistemas equivalentes más simples.
- Obtener y manejar el método algebraico de resolución llamado de "suma y resta".
- Interpretar, de acuerdo con el número de soluciones de un sistema, los resultados algebraicos que se obtienen según el caso.
- Plantear y resolver un problema que recoja muchos de los conceptos y permita crear variantes de él.

3.- En la sesión 7 se tiene:

- La introducción de literales en lugar de algunos de los términos numéricos; con ello se obtiene una pequeña generalización de un problema ya visto, e incluso se formula el problema inverso.
- Se muestran otras posibilidades de aplicación de los sistemas de ecuaciones.

4.- En las sesiones 8 y 9 se trabajan:

- Los métodos de sustitución e igualación, a partir de la estrategia general ya manejada para suma y resta.
- Alternativas para simplificar algunos pasos de los procedimientos.
- La elaboración de un resumen de lo que se ha visto hasta este momento.

Sesión 1

Propósitos

Se pretende familiarizar a los estudiantes en actividades que conlleven el diseño y la resolución de problemas que incorporen varias incógnitas. Este tipo de actividades permitirán un primer acercamiento a conceptos como *ecuación indeterminada*, *solución de una ecuación indeterminada*, *simultaneidad*, *sistemas de ecuaciones*, y *solución de un sistema* (Preisser, 1989, p. 56).

Desarrollo

1) Trabajo grupal

Se plantea un problema a los estudiantes, que puede ser resuelto sin la necesidad de implementar operaciones algebraicas, para ello se les comenta lo siguiente.

Se comenzará el estudio de un nuevo tema, y se cambiará la manera de evaluar, para el desarrollo de la clase será más frecuente y relevante el trabajo en equipo; además, tendrán que entregar un trabajo extraclase. Por tanto, la calificación se dividirá en un examen, fichas de trabajo en equipo y un trabajo extraclase (Preisser, 1989, p. 56).

La primera cuestión que deberán resolver es “determinar los pesos o puntos, en escala del 0 al 10, asignados a cada uno de esos tres aspectos; por lo que se les pide analizar el problema y formular relaciones entre sus elementos” (Preisser, 1989, pp. 56-57).

Los estudiantes pueden llegar a concluir que los tres componentes deben sumar 10, o tal vez formulen una ecuación como $E + F + T = 10$, en la que cada letra simboliza respectivamente el puntaje máximo de cada elemento que debe calificarse (Preisser, 1989, p. 57).

Después de un tiempo considerable y para continuar con la clase, podrían plantearse las siguientes preguntas a fin de introducir a los estudiantes a conceptos tales como *ecuación indeterminada y su solución* (Preisser, 1989, p. 57):

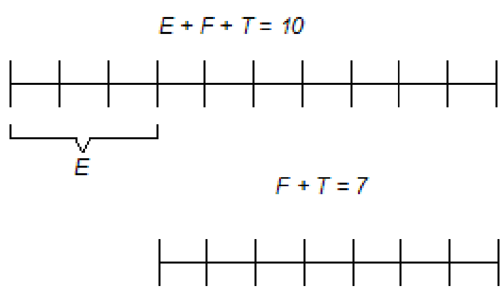
- ¿Qué tipo de solución tiene esta ecuación?
- ¿Qué clase de números, dentro del contexto del problema, hay que considerar?
- Si como ven hay varias posibilidades, ¿cuáles ternas de números son soluciones de ella? ¿Cuáles no?
- ¿Qué ejemplos pueden dar en cada caso?
- ¿En qué se diferencia esta ecuación de las anteriormente vistas?
- ¿Recuerdan algún caso similar?.

Una vez que los estudiantes obtengan las diversas soluciones, se les comentará que es necesario determinar sólo una terna de todas las que propusieron, así que se les plantean las siguientes cuestiones (Preisser, 1989, p. 57):

- ¿Cómo saber cuál de todas ellas es la solución buscada?
- ¿Qué necesitaría para poder decidir?

Ante tales interrogantes probablemente los estudiantes soliciten información adicional, por lo que se les comunicará una nueva condición: “La suma de los puntajes máximos asignados a las fichas de trabajo y al trabajo extraclase es 7 puntos de la calificación”. Dicha restricción puede ayudarles a concluir que el examen tiene como valor máximo 3 puntos, teniendo así una de las tres cantidades solicitadas; aun cuando lleguen a esta inferencia se les solicitará plantear una ecuación que represente la nueva condición y argumentar por qué el valor del examen es 3 (Preisser, 1989, p. 57).

A los estudiantes que no puedan inferir el valor del examen, se les puede mostrar el siguiente diagrama (Preisser, 1989, p. 57).



Continuando con las actividades, Preisser (1989, p. 58) recomienda plantear las siguientes cuestiones:

- ¿La ecuación $F + T = 7$ es indeterminada?
- ¿Cuáles serían todas sus soluciones en el contexto del problema si F y T fuesen enteros?
- En base a la respuesta de la pregunta anterior, ¿cuáles serían todas las posibles ternas que resolvieran el problema?
- ¿Se redujo el número de posibilidades?
- ¿Es lo mismo la solución (2, 5, 3) que (5, 2, 3)?

Como ya se obtuvo uno de los 3 valores buscados (examen), se les pedirá determinar los 2 faltantes (fichas y el trabajo extraclase), por lo que es conveniente preguntarles: ¿Qué necesitarían para poder hacerlo? (Preisser, 1989, p. 58).

Si los estudiantes requieren más información, se les dicta una segunda condición: "La diferencia entre los puntajes máximos de *F* y *T* es un punto (donde *F* es el mayor)". Esta nueva restricción les ayudará a resolver el problema sin necesidad de plantear la ecuación correspondiente; sin embargo, deberán hacerlo para seguir consolidando el concepto de *sistema de ecuaciones* y *su solución*, y con ello poner "énfasis en la satisfacción simultánea de las condiciones y en la necesidad de contar con tantos «datos» (ecuaciones) como incógnitas" (Preisser, 1989, p. 58).

Retomando la ecuación $F - T = 1$, se puede preguntar si ésta es indeterminada. Para ello, se les sugiere "listar las parejas de números enteros, del 1 al 9, que serían soluciones de la misma" (Preisser, 1989, p. 58).

Antes de estipular las tareas extraclase, se les mencionará que deberán redactar en el transcurso del tema diversos problemas (Preisser, 1989, p. 58).

2) Tarea para casa

a) Grafica en un solo plano cartesiano las diferentes soluciones que pertenecen a las ecuaciones $F + T = 7$ y $F - T = 1$ utilizando dos colores para distinguir los puntos de cada ecuación (Preisser, 1989, p. 58).

b) Elabora un problema que incorpore dos cantidades desconocidas y simbolízalo con las ecuaciones correspondientes (Preisser, 1989, p. 58).

Sesión 2

Propósitos

Primordialmente en esta sesión se busca consolidar los conceptos de la primera, poniendo atención especial a la noción de *sistemas de ecuaciones*, *solución de un sistema* y *simultaneidad*. También se vincularán estos conceptos con el significado gráfico de la solución de un sistema de dos ecuaciones con dos variables (sistema de 2 x 2) (Preisser, 1989, p. 59).

Adicional a esto se pretende promover "la capacidad para recordar problemas e ilustrar que un sistema de ecuaciones puede representar a un conjunto de problemas con diversos enunciados" (Preisser, 1989, p. 59).

Desarrollo

1) Revisión de la tarea

El inciso *a)* de la tarea servirá para repasar lo que es la gráfica de una ecuación lineal y también para abordar los conceptos que deben desarrollarse en esta sesión; el docente se puede apoyar de algunas cuestiones para estos dos fines:

- ¿Por qué la solución que se había obtenido para *F* y *T* está representada como el punto común de las dos series de puntos?
- ¿Cómo explicarse que cualquiera de los otros puntos no es solución del problema?
- ¿Qué tipo de ecuaciones se están manejando?
- ¿Cuántas y cuáles son las variables en cada una?

- Si tuviera un problema que diera lugar a dos ecuaciones con dos variables, ¿les serviría obtener su gráfica para encontrar la solución? (Preisser, 1989, p. 59).

Una vez trabajados estos aspectos, es conveniente mencionarles que un conjunto de ecuaciones de este tipo, sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas también es denominado *sistema de ecuaciones lineales*. Así mismo, se puede aprovechar el momento para que formulen su definición. Quizás logren explicarlo como "un conjunto de ecuaciones de primer grado, que deben satisfacerse simultáneamente por todas y cada una de las variables que están contenidas en ellas" (Preisser, 1989, p. 59).

En relación al inciso *b),* puede ser posible que algunos estudiantes hayan inventado problemas que no precisamente den lugar a un sistema de 2 x 2 sino a dos ecuaciones con una sola incógnita; ante esto el docente debe realizar algunas observaciones y revisar el inciso anterior para que los estudiantes den un nuevo sentido al planteamiento de diversos problemas (Preisser, 1989, p. 60).

Si llegaran a formular correctamente algunos problemas, éstos se pueden retomar y discutir para ver si realmente cumplen con las condiciones que dan origen a un sistema de 2 x 2 (Preisser, 1989, p. 60).

2) Trabajo en equipos (Ficha 1)

Para esta sesión se les pide que, utilizando el sistema $\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 2 \end{cases}$,

a) Encuentren su solución.

b) Formulen un problema que dé origen a este sistema (Preisser, 1989, p. 60).

3) Trabajo grupal

La forma de resolución de algunos estudiantes puede ser a partir del método del tanteo hasta que logren encontrar los números que satisfagan ambas ecuaciones, en su mayoría quizá lo hagan a través del método grafico. Conviene explicar ambos modos de resolución haciendo hincapié en las desventajas del primer método (Preisser, 1989, p. 60).

En la revisión del segundo inciso podrían leerse y corregirse (si se requiere) los diferentes enunciados obtenidos, destacando que un sistema sirve para representar diferentes situaciones. Además se debe destacar la importancia que tienen la matemáticas en el campo de investigación de otras asignaturas (Preisser, 1989, p. 60).

Preisser (1989, p. 61) sugiere también plantear en los problemas formulados anteriormente diversas variantes, ya sea en el contexto, en el enunciado del problema o bien en su representación algebraica. Por ejemplo, si se cambia alguna de las dos ecuaciones que forman el sistema, esta modificará las condiciones del problema; o si se cambian las condiciones, por ende también las ecuaciones.

4) Tarea para casa

a) Encuentra con ayuda del método gráfico la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 4 - x \\ 2x + 2y = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y \\ x - y = 4 \end{cases}$$

b) Formula un problema que origine un sistema de 2 x 2 y simbolízalo. Escribe en una hoja aparte tu nombre y la redacción del problema, y entrégaselo al docente.

Sesión 3

Propósitos

En esta sesión se pretende que los estudiantes consoliden su capacidad para formular problemas. Además, se busca introducirlos en definiciones de *ecuaciones equivalentes*, *sistemas compatibles*, *incompatibles*, *determinados* e *indeterminados* (Preisser, 1989, p. 62).

Desarrollo

1) Revisión de la tarea

Los estudiantes muestran gran confusión al abordar el inciso *a)* de la tarea, pues afirman que no pudieron resolver o que no les salieron los dos sistemas finales; esto sucede por tratarse de sistemas con características especiales: el segundo es compatible e indeterminado y el tercero es incompatible. Es importante aclararles que no se equivocaron y que en esta sesión se profundizará en el comportamiento de dichos sistemas (Preisser, 1989, p. 62).

Ahora bien, conviene acordarse nuevamente del significado de sistema de ecuaciones y el papel que juega la simultaneidad para que examinen las ecuaciones de los sistemas anteriores, a fin de hacerles notar que un sistema compatible indeterminado proporciona la misma información (tiene muchas soluciones que se cumplen simultáneamente) y que un sistema incompatible expone información contradictoria, por lo que no pueden satisfacerse a la vez (no tienen ninguna solución en común) (Preisser, 1989, p. 62).

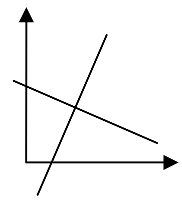
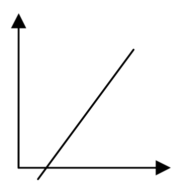
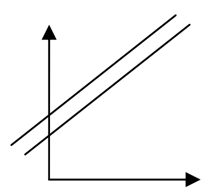
Para esta explicación podríamos auxiliarnos del comportamiento que muestran las gráficas, dando énfasis al número de soluciones de cada sistema y a las consecuencias que se tienen al plantear problemas que terminen en sistemas de este tipo (Preisser, 1989, pp. 62-63).

2) Trabajo grupal

Para dar comienzo a este apartado, Preisser (1989) indica la siguiente actividad: A partir de la ecuación $x + 3y = 5$, ¿cómo formularías un sistema con muchas soluciones? ¿Qué harías para obtener otro sin solución? (Preisser, 1989, p. 63).

Después de contestar estas preguntas construye y anota en tu cuaderno un sistema de 2 x 2 del tipo que quieras. Forma una ronda en la cual leerás tu sistema, y otro compañero dirá cuántas soluciones tiene y por qué (p. 63).

Luego de ejercitarlos en este tipo de actividades, a manera de resumen se podrá realizar un esquema similar al siguiente en el que se recuperen las características y comportamientos de los diferentes casos de sistemas de 2 x 2 (p. 63).

		Situación gráfica	Características	Ejemplo
	1.- Única solución		Dos ecuaciones diferentes y no contradictorias	$\begin{cases} x+y=5 \\ 2x-y=4 \end{cases}$
Sistema de 2 x 2	2.- Muchas soluciones		Dos ecuaciones equivalentes, siendo una múltiplo de la otra	$\begin{cases} x+y=4 \\ 2x+2y=8 \end{cases}$
	3.- Ninguna solución		Dos ecuaciones contradictorias, una establece un resultado diferente del que correspondería a un múltiplo de $x+y=4$	$\begin{cases} x-y=0 \\ x-y=4 \end{cases}$

3) Trabajo en equipos (Ficha 2)

Formar equipos para resolver los diversos problemas entregados anteriormente en una hoja, es necesario que el estudiante que inventó el problema no sea integrante del equipo (Preisser, 1989, p. 64).

De acuerdo con el ejercicio asignado, se les pedirá:

- Simbolizar el problema y encontrar su solución.
- Modificar los datos del problema para obtener un sistema indeterminado y otro incompatible, los cuales deberán también simbolizar (Preisser, 1989, p. 64).

4) Trabajo grupal

Se elegirán las hojas de 2 o 3 equipos para leer tanto los enunciados del problema original como las otras dos versiones de cada uno. Esto se hará en el orden deseado sin decir a qué tipo de sistemas corresponde para que el resto del grupo trate de clasificarlos (Preisser, 1989, p. 64).

5) Tarea para casa (Preisser, 1989, p. 64).

a) Revisar lo de esta sesión.

b) Por equipos, para la siguiente clase, traer:

- Una cartulina de $49\frac{1}{5}$ por $26\frac{1}{3}$ centímetros.
- Tijeras.
- Algo para pegar ("diurex", "maskintape", "pritt" o engrapadora).

Sesión 4

Propósitos

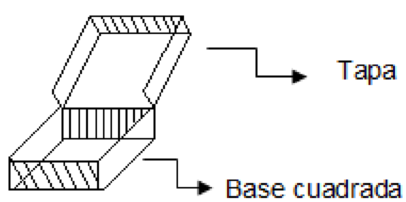
Se espera que los estudiantes comiencen a familiarizarse con la noción de *sistemas equivalentes* y con las transformaciones o cambios que pueden hacerse a un sistema de ecuaciones para obtener otro equivalente que sea más sencillo de resolver. También se tienen otras expectativas, como promover la necesidad de utilizar el método algebraico ante las limitaciones del método gráfico, e ilustrar a partir del planteamiento y la resolución de un problema que las matemáticas pueden ser útiles cuando se formulan problemas correctamente (Preisser, 1989, p. 65).

Desarrollo

1) Trabajo grupal

Se les plantearía lo siguiente:

Con el pedazo de cartulina que trajeron construyan una caja con tapa y base cuadrada, como la que a continuación se muestra. Analiza su estructura y elabora un esquema de la caja desdoblada antes de armarla (Preisser, 1989, p. 65).

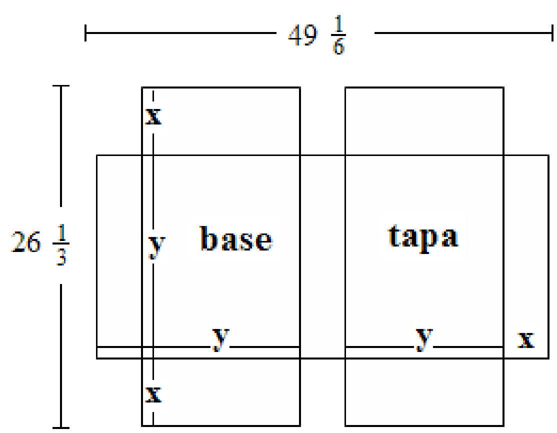


El docente será el encargado de guiar a los estudiantes para que identifiquen cuántas y cuáles partes deberán tomar en cuenta a lo ancho y largo de la cartulina. Al dibujar el esquema de la caja desdoblada quizás surja en ellos la necesidad de conocer la medida del lado de la base y la altura para armarla (Preisser, 1989, p. 66).

Ahora los estudiantes se enfrentarán a un problema al desconocer dos cantidades. Para ello Preisser sugiere plantearles las siguientes interrogantes (1989, p. 66):

- ¿Podrán servirnos los sistemas de ecuaciones para determinar esas dos cantidades?
- ¿Cómo buscar las relaciones entre ellas?
- ¿Podrá sernos de utilidad el croquis?
- ¿Se pueden representar en él las cantidades desconocidas?.

A continuación se muestra el esquema de la caja desdoblada (Preisser, 1989, p. 66).



Al realizar la simbolización de las dos cantidades desconocidas y ubicarlas en el esquema, los estudiantes pueden llegar a formular el sistema correspondiente al problema; por ejemplo:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 49\frac{1}{6} \\ 2x + y = 26\frac{1}{3} \end{cases}$$

o bien

$$\begin{cases} 3x + 2y = \frac{295}{6} \\ 2x + y = \frac{79}{3} \end{cases}$$

(Preisser, 1989, p. 66).

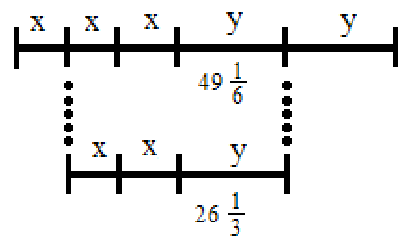
2) Trabajo en equipos (Ficha 3)

El docente les pedirá que resuelvan por equipos el sistema de ecuaciones obtenido, a partir del método gráfico. Para esta actividad se destinarán aproximadamente 10 minutos, ya que ese lapso de tiempo será suficiente para que perciban las principales dificultades y limitaciones de dicho método (Preisser, 1989, pp. 66-67).

3) Trabajo grupal

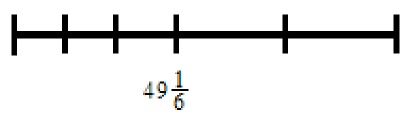
Como en la aplicación del método gráfico los estudiantes tuvieron dificultad para localizar puntos y para determinar las coordenadas del punto de intersección, el docente los invitara a encontrar otra forma de resolver el problema; podrá trazar el siguiente diagrama que representa las condiciones de cada ecuación y que permite visualizarlas conjuntamente (Preisser, 1989, p. 67).

$$\begin{cases} 3x + 2y = 49\frac{1}{6} \\ 2x + y = 26\frac{1}{3} \end{cases}$$



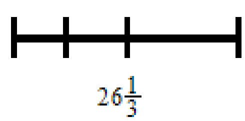
Con lo anterior se observa que un pedazo del segmento que representa a la primera ecuación es el segmento que representa a la segunda. Esto llevaría a interrogarse sobre cuál es la medida y cuáles son las partes que conforman el segmento restante, lo que implica plantear una tercera ecuación, $x + y = 22\,{}^{5}\!/_{6}$ o bien $x + y = {}^{137}\!/_{6}$, que resulta de restar la segunda ecuación a la primera. Si comparamos el diagrama de la tercera con los anteriores, se observa lo siguiente (Preisser, 1989, p. 67):

$$3x + 2y = 49\frac{1}{6}$$

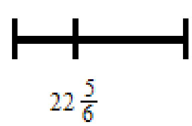


$-$

$$2x + y = 26\frac{1}{3}$$



$$x + y = 22\frac{5}{6}$$



El diagrama anterior ayuda a los estudiantes a establecer que una parte del segmento que representa la segunda ecuación es el de la tercera y el sobrante representa el valor de x. Por lo tanto, $x = 26\frac{1}{3} - 22\frac{5}{6} = 3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ (Preisser, 1989, p. 68).

Antes de buscar el valor de y es recomendable hacer hincapié en que para poder determinar el trozo sobrante, x , fue necesario "quitar" al segmento mayor el menor, aspecto que en relación a sus respectivas ecuaciones equivaldría a restar la tercera de la segunda (Preisser, 1989, p. 68).

Al obtener el valor de x es probable que los estudiantes sustituyan este valor para encontrar y e incluso puede que lo hagan en la ecuación más sencilla. Si ninguno de estos casos se presenta, el docente será el encargado de orientarlos para que puedan hacerlo (Preisser, 1989, p. 68).

Es conveniente hacerles notar que se utilizó la segunda y la tercera ecuaciones para encontrar el valor de x puesto que para resolver el sistema $\begin{cases} 3x+2y=49\frac{1}{6} \\ 2x+y=26\frac{1}{3} \end{cases}$ se utilizó otro, $\begin{cases} 2x+y=26\frac{1}{3} \\ x+y=22\frac{5}{6} \end{cases}$, que está formada por la segunda ecuación del primero y por una tercera que resulta de la resta del primer sistema. También es importante resaltar que este tipo de procedimiento es una buena estrategia para simplificar los sistemas (Preisser, 1989, p. 68).

Para obtener el valor de y bastaría con formar un nuevo sistema y restar ambas ecuaciones; este sistema se conforma a partir de la resta del segundo sistema, obteniendo $\begin{cases} x+y=22\frac{5}{6} \\ x=3\frac{1}{2} \end{cases}$ (Preisser, 1989, p. 68).

Los siguientes cuestionamientos permiten un acercamiento a la definición tanto de *sistemas equivalentes* como de *simultaneidad*. Esta última noción ahora se aborda con un referente físico: la forma en que se distribuyen el largo y el ancho de la cartulina en términos de x y y (Preisser, 1989, p. 68).

- ¿Será la solución del último la que resuelve el primer sistema?

- ¿Cómo podríamos corroborarlo?

- ¿Qué pasará con la cajita si sólo satisface una o ninguna de las dos ecuaciones originales? (Preisser, 1989, p. 68).

4) Trabajo en equipos

- Verifica que $x = 3\frac{1}{2}$ y $y = 19\frac{2}{6}$ son solución del sistema original.

- Traza el croquis en la cartulina con las medidas obtenidas y arma la caja.

5) Tarea para casa

a) Tomando en cuenta que las medidas de la cartulina serán 39 cm por 21 cm, traza un croquis a escala, forma los tres sistemas que utilizaras para encontrar la solución y escríbela.

b) Indaga si los sistemas que se te presentan a continuación tienen o no la misma solución; argumentar tus respuestas (Preisser, 1989, p. 69).

$$\begin{cases} 4x + 2y = 14 \\ 3x + y = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + y = 9 \\ x + y = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 5 \\ 2x = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 2y = 10 \\ 2x = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 2y = 10 \\ 2y = 6 \end{cases}$$

Sesión 5

Propósitos

Se busca principalmente reforzar la noción de *sistemas equivalentes* y desarrollar estrategias generales para derivar el método de suma y resta. Igualmente, se pretende que los estudiantes lleguen a obtener la representación de una ligera generalización del problema que se estuvo trabajando la clase anterior (Preisser, 1989, p. 70).

Desarrollo

1) Revisión de la tarea

Al analizar el sistema del inciso *a)* de la tarea y el ejercicio realizado en clase, se observó que la diferencia entre ambos radicaba en los valores de x y y, lo cual se debía al cambio de medidas de ancho y largo de la cartulina (Preisser, 1989, p. 70).

Por lo anterior, se deduce que para asignarle el valor correcto a x y y para armar cualquier caja de este tipo bastaría con sustituir los valores a y ℓ en el sistema $\begin{cases} 3x + 2y = \ell \\ 2x + y = a \end{cases}$ o en alguno equivalente (Preisser, 1989, p. 70).

Con este tipo de análisis los estudiantes podrían comprender que la resolución de un problema particular les permitirá resolver toda una “familia” de ellos, procedimiento que se utiliza frecuentemente en matemáticas para llegar a la generalización (Preisser, 1989, p. 70).

La segunda actividad de la tarea (para casa) pudo haber sido resuelta de dos maneras: resolviendo el más sencillo para luego remplazar la solución en los otros, o investigando las relaciones entre las ecuaciones que forman cada uno de los sistemas (Preisser, 1989, pp. 70-71).

Al notar que todos los sistemas de la segunda tarea tienen la misma solución, podría hacerse el comentario de que por esa característica éstos son llamados *sistemas equivalentes*, y que cuatro de esos sistemas parten del original, ya una de las ecuaciones es retomada y la otra es el resultado de restar dos ecuaciones de uno de los sistemas, o bien es un múltiplo de otra de las ecuaciones (Preisser, 1989, p. 71).

Las dos maneras anteriores de obtener una nueva ecuación permiten construir sistemas equivalentes más sencillos de resolver que el original, ya que algunos tienen una ecuación con dos variables, y otra, con una sola variable (Preisser, 1989, p. 71).

Esta estrategia permite conseguir una ecuación con una sola variable. Es necesario cuestionar a los estudiantes sobre este aspecto, así que se les pregunta si reconocen alguna estrategia general ya manejada en el curso. Si logran o no recordar la respuesta, se les comentará que esta estrategia consiste en "reducir una situación desconocida (o más difícil) a otra que ya se conoce (o es más fácil)" (Preisser, 1989, p. 71).

2) Trabajo grupal

Retomando el inciso *a)* de la tarea, se invita a los estudiantes a examinar cómo lograron conseguir el último sistema que integra una ecuación con una incógnita. Para apoyar este análisis se plantean las siguientes cuestiones (Preisser, 1989, p. 71):

- ¿Por qué al restar las ecuaciones del segundo sistema se pudo eliminar una de las variables?
- ¿Cuál era el coeficiente de la variable eliminada en cada una de ellas?
- ¿Cuál era el signo de esos coeficientes?

Terminando las interrogantes se puede establecer una regla general: Para eliminar en un sistema una de las dos variables y poder así obtener una ecuación con una incógnita, se restan las dos ecuaciones pero con la condición de que la variable que se vaya a eliminar tenga el mismo signo y coeficiente en ambas (Preisser, 1989, pp. 71-72).

Ya asentada esta regla, se propone a los estudiantes aplicarla en la resolución algebraica del sistema resuelto anteriormente por el método gráfico (Preisser, 1989 p. 72):

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 2. \end{cases}$$

Preisser (1989, p. 72) recomienda seguir manejando sistemas equivalentes pero escribiendo la variable eliminada con coeficiente cero, como las que a continuación se muestran.

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 2 \end{cases} \quad \sim \quad \begin{cases} x - y = 2 \\ 0x - 2y = 10 \end{cases} \quad \sim \quad \begin{cases} x - y = 2 \\ 0x + y = 5 \end{cases}$$

Para promover otra manera de simplificar sistemas, se les pide que en lugar de restar las ecuaciones ahora las sumen, pero continuando con la escritura del coeficiente cero de la incógnita eliminada (Preisser, 1989, p. 72).

$\begin{cases} x+y=12 \\ x-y=2 \end{cases}$ ~ $\begin{cases} x+y=12 \\ 2x+0y=14 \end{cases}$ o bien ~ $\begin{cases} x-y=2 \\ 2x-0y=14 \end{cases}$ ~ $\begin{cases} x+y=12 \\ x+0y=7 \end{cases}$

Al realizar el método de suma y resta se diversifican las posibilidades para simplificar sistemas de 2 x 2; además, a través de ambas operaciones obtenemos el valor de x y el de y sin necesidad de sustituir el valor de alguna variable para poder encontrar el otro (Preisser, 1989, p. 72).

Con ayuda del docente los estudiantes llegarán a concluir que para conseguir en un sistema una ecuación con una incógnita se debe simplificar dicho sistema y para ello la variable que se elimine debe tener el mismo coeficiente en las dos ecuaciones; después éstas se sumarán o restarán según los signos de ellos sean distintos o iguales (Preisser, 1989, p. 72).

3) Tarea para casa (Preisser, 1989, p. 73)

a) En un mismo sistema de coordenadas grafica con colores distintos los siguientes sistemas equivalentes.

$\begin{cases} x+y=12 \\ x-y=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x-y=2 \\ 0x-2y=10 \end{cases}$ $\begin{cases} x+0y=7 \\ 0x+y=5 \end{cases}$

b) Resuelve por medio del método de suma y resta (de reducción) los sistemas que a continuación se muestran, anotando los sistemas equivalentes de cada uno.

$$\begin{cases} F + T = 7 \\ F - T = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a + 2b = 5 \\ a - 2b = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2m + n = 10 \\ m - 2n = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x + 3y = 60 \\ 2x + y = 21 \end{cases}$$

Sesión 6

Propósitos

Reforzar el método de suma y resta en la resolución de un sistema de 2 x 2; así mismo, se espera que los estudiantes logren resolver sistemas en los que los coeficientes de cada una de las variables no son iguales y no es uno múltiplo del otro. Aunado a esto los estudiantes deben llegar a interpretar las igualdades resultantes con la aplicación de este método cuando resuelven sistemas con ninguna o muchas soluciones (Preisser, 1989, p. 74).

Desarrollo

1) Revisión de la tarea

En el inciso *a)* de la tarea se pretende reafirmar la noción de *sistemas equivalentes*, al visualizar de manera gráfica dicho concepto:

Para cada uno de esos sistemas de 2 x 2, tenemos dos líneas que, aunque distintas (de un sistema a otro), se intersecan todas en el mismo punto, el cual representa geométricamente la solución de un sistema (Preisser, 1989, p. 74).

Es decir, se ilustra el concepto de *sistemas equivalentes* como aquellos que tienen la misma solución y también que el método de suma y resta permite obtener las diversas rectas que pasan por un mismo punto (solución) y que son fáciles de manipular algebraicamente (Preisser, 1989, p. 74).

En general en el inciso *b)* los estudiantes no tuvieron dificultad para resolver los sistemas dados, en los dos últimos algunos estudiantes operaron con restas o sumas sucesivas de forma similar a como se resolvió inicialmente el problema de la caja (Preisser, 1989, p. 74).

Comparando los procedimientos de diversos estudiantes se debe especificar que también "el sistema se puede simplificar con una sola suma o resta, si antes igualamos los coeficientes de alguna de las variables; para ello, basta sustituir una de las ecuaciones por otra equivalente a ésta que tenga el coeficiente deseado" (Preisser, 1989, p. 74). Lo importante en esta sesión es averiguar las formas de conseguir esas ecuaciones equivalentes (Preisser, 1989, p. 75).

Preisser (1989, p. 75) recomienda mencionar que tanto el primero como el último sistema están relacionados con problemas ya vistos anteriormente.

2) Trabajo grupal

Se recomienda que los estudiantes resuelvan algunos ejercicios como los que a continuación se muestran, con el propósito de señalar que la ecuación equivalente idónea para reducir una variable, se obtiene a partir de la multiplicando de una de las ecuaciones por el coeficiente que tiene esa variable en la otra ecuación (Preisser, 1989, p. 75).

$$\begin{cases} 2x+3y=2 \\ x+3y=\dfrac{3}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} 2r+5s=13 \\ 4r-2s=-10 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2u-5t=6 \\ 6u+3t=-4 \end{cases}$$

Después de resolver casos similares a los anteriores, se propone el siguiente sistema (Preisser, 1989, p. 75):

$$\begin{cases} 2a - 5b = 1 \\ 3a - 3b = 0. \end{cases}$$

Puede suceder que en la resolución del sistema algunos estudiantes utilicen una variante de la regla, la cual es conveniente explicar. Para ejemplificar dicha variante podríamos decirles lo siguiente: si se desea igualar los coeficientes de *a*, se puede multiplicar por $\frac{3}{2}$ la primera ecuación, o bien $\frac{2}{3}$ la segunda. Si realizáramos la multiplicación inicial obtendríamos el sistema (Preisser, 1989, p. 75)

$$\begin{cases} 3a - 15b = \dfrac{3}{2} \\ 3a - 3b = 0. \end{cases}$$

Algunos estudiantes elegirán manejar fracciones, o bien decidirán eliminarlas, a partir de la estrategia que emplearon anteriormente en ecuaciones con una incógnita, obteniendo el sistema (Preisser, 1989, p. 76)

$$\begin{cases} 6a + 15b = 3 \\ 3a - 3b = 0. \end{cases}$$

Es necesario comunicarles que redujeron el sistema original a otro de la forma en que se venían manejando, por lo que a partir de aquí es factible resolverlo como en ejercicios anteriores (Preisser, 1989, p. 76).

Es posible que ningún estudiante utilice esta forma de multiplicar y sólo retome el método anterior (producto cruzado de coeficiente). Ante esto el docente debe explicar por qué funciona este procedimiento, realizando la observación de que la primera multiplicación permite reducir el sistema a la situación anterior (Preisser, 1989, p. 76).

3) Trabajo en equipos (Preisser, 1989, p. 76):

a) Expliquen el procedimiento para resolver un sistema de 2 x 2 mediante el método de suma y resta.

b) Resuelvan los siguientes sistemas con ayuda del método de suma y resta, y expliquen los resultados que obtengan.

$$\begin{cases} 7x+4y=5 \\ 2x-3y=-16 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+3y=5 \\ x-\frac{3}{2}y=\frac{5}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x-2y=5 \\ 12x-6y=-10 \end{cases}$$

4) Trabajo grupal (Preisser, 1989, p. 76):

a) Verifiquen que en el resumen se describa tanto la estrategia como la regla general y las recomendaciones pertinentes para obtener ecuaciones equivalentes que contengan los coeficientes adecuados.

b) Los tres sistemas anteriores son de diferente tipo, ya que el primero tiene una solución, el segundo muchas, y el último no tiene solución.

Si los estudiantes no distinguen a simple vista el tipo de sistema al cual pertenece cada uno, tal vez los identifiquen si multiplican por el coeficiente apropiado, pues aquí se refleja el caso que se abordó en la tercera sesión (Preisser, 1989, p. 76).

Es conveniente que también resuelvan los sistemas con ayuda del método de suma y resta e interpreten las ecuaciones obtenidas, a partir del comportamiento de estos sistemas; esto es necesario para que los estudiantes concluyan dos cosas: la igualdad 0 = 0 obtenida en el segundo sistema siempre se cumple y el resultado de 0 = 5 en el tercero es una contradicción. Cabe mencionar que estos aspectos se abordarán más adelante (Preisser, 1989, p. 77).

5) Tarea para casa

a) Complementar el cuadro sinóptico que resume el comportamiento de los sistemas de 2 x 2 de acuerdo con el número se soluciones, anexando la información que brinda este método de suma y resta (Preisser, 1989, p. 77).

b) Resuelve el sistema planteado para la construcción de la caja (sesión 4), estableciendo nuevos valores del ancho y largo de la cartulina. Las operaciones que se originen con los términos independientes sólo deben ser indicadas, no deben realizarse (Preisser, 1989, p. 77).

Sesión 7

Propósitos

En esta sesión, además de introducir el uso de literales en lugar de algunos términos numéricos, resolviendo el sistema formado, se planteará y resolverá, para casos particulares y en general, el problema inverso al que se formuló en la construcción de la caja. Finalmente, se mostrarán otras posibilidades de aplicación de los sistemas de ecuaciones (Preisser, 1989, p. 78).

Desarrollo

1) Revisión de la tarea

Verifique que en el inciso *a)* de la tarea los estudiantes hayan anexado de manera correcta la nueva información al cuadro sinóptico (Preisser, 1989, p. 78).

El inciso *b)* de la tarea permitirá el desarrollo de la mayor parte de esta sesión, ya que al inicio de ésta se retomarán los diversos sistemas propuestos por los estudiantes, a fin de dejar más claro que los distintos valores asignados tanto al ancho como al largo de la cartulina permitieron formar una variedad de sistemas de ecuaciones que se representan en la forma (Preisser, 1989, p.78)

$$\begin{cases} 3x + 2y = \ell \\ 2x + y = a. \end{cases}$$

Una vez presentado este sistema, se les pedirá que resuelvan con el método de suma y resta este caso general de cualquiera largo (ℓ) y ancho (a), por lo que manipularán ambas literales para los términos independientes (Preisser, 1989, p. 78).

2) Trabajo grupal

Después de que los estudiantes resuelven el problema anterior en el pizarrón, deberán comparar las fórmulas que obtuvieron para x y y con el resultado de las operaciones que dejaron indicadas en la tarea del inciso *b)* (Preisser, 1989, p. 79).

Solo uno o dos integrantes del grupo expondrán junto a las fórmulas de x y y sus resultados como a continuación se muestra (Preisser, 1989, p. 79).

Fórmulas	Caso 1	Caso 2
$x = 2a - \ell$	$x = 2(14) - 26$	$x = 2(15) - 25$
$y = 2l - 3a$	$y = 2(26) - 3(14)$	$y = 2(25) - 3(15)$

En esta actividad se observará que las fórmulas generales obtenidas para x y y son un modelo o representación de diversas situaciones. Así mismo, se plantearán las siguientes preguntas, enmarcadas en el contexto del problema con el fin de que los estudiantes consideren tanto la importancia que tiene interpretar los resultados obtenidos como visualizar los números que pueden ser o no soluciones del problema (Preisser, 1989, p. 79).

- ¿Pueden ser a y ℓ cualquier pareja de números?
- ¿Son acordes al contexto del problema $a = 5$ y ℓ $=15$?
- ¿Pueden x y y ser cualquier tipo de números?

Preisser (1989, p. 79) propone plantear la siguiente situación: Si deseo regalar un objeto que tiene base cuadrada de 11 cm de lado por 2.5 cm de altura en una cajita con un moño, ¿cómo sabré cuál es el ancho y largo que debo asignar a un pedazo de cartulina para construir yo misma la cajita adecuada? Toma en cuenta que para que no se maltrate el objeto la base de la cajita deberá tener 12 cm de lado y 3 cm de altura ¿Cómo puede plantear y resolver la situación?

Si los estudiantes identifican de qué se trata el problema, cómo y a partir de qué se puede resolver, el docente los guiará para que establezcan la relación que existe entre dicho problema y el anterior; pero si no logran identificar una estrategia, se les plantearán las siguientes preguntas (Preisser, 1989, p. 80):

- ¿Qué es lo que ahora conozco y qué lo que necesito saber?
- ¿Cómo o a partir de qué puedo encontrar a y ℓ conociendo los valores de x y y?
- ¿Qué relación tiene este problema con el que vimos inicialmente para construir una cajita?
- ¿Qué ventajas tiene esta nueva formulación para fines prácticos?

Ahora se les pedirá resolver el sistema $\begin{cases} x = 2a - \ell \\ y = 2\ell - 3a \end{cases}$, tomando en cuenta que $x = 3$ y $y = 12$ (Preisser, 1989, p. 80).

Así, tenemos que $\begin{cases} 2a - \ell = 3 \\ 2\ell - 3a = 12; \end{cases}$ Por lo que $a = 15$ y $\ell = 35$.

Ya resuelto el problema, el docente hará saber al grupo que un problema que da lugar a un sistema de ecuaciones puede también formularse de manera inversa (como se hizo en el caso anterior), convirtiendo las variables originales en datos de la nueva situación y los términos independientes en incógnitas. Esta situación, permite la creación de nuevos problemas o analizarlos desde otro punto de vista (Preisser, 1989, p. 80).

La siguiente actividad se retoma por que en ella se pueden implementar los sistemas de ecuaciones y además por que está relacionada con el concepto de *función* (Preisser, 1989, p.80).

Si se conoce tanto la regla de correspondencia de una función como el conjunto de valores que ésta puede tomar, únicamente faltaría determinar las parejas de números que están relacionados mediante dicha regla; pero si sucede lo contrario, es decir, si lo que se conoce es el conjunto de parejas asociadas por alguna relación, faltaría estipular la regla de correspondencia (Preisser, 1989, p. 80).

Se ejemplificará la situación anterior con la finalidad de que los estudiantes amplíen su panorama para formular problemas y conozcan un campo más de aplicación de los sistemas de ecuaciones, para ello se les expondrá el siguiente ejercicio (Preisser, 1989, pp. 80-81).

Existen varios tipos de escalas para medir la temperatura ambiental y personal, las más conocidas son la escala Celcius y la Fahrenheit; ambas miden la temperatura en grados pero asignan diferentes valores.

	Celcius	Fahrenheit
Punto de congelación del agua	0°	32°
Punto de ebullición del agua	100°	212°

Ya conocidos los datos y sabiendo que la regla de correspondencia es una función lineal se plantean las siguientes preguntas (Preisser, 1989, p. 81):

- ¿Cómo se puede determinar esta regla de correspondencia?
- ¿Cuál es el valor en la escala Fahrenheit para 37°C, valor que determina en grados Celcius el inicio de fiebre en una persona?

Se recordará a los estudiantes que $y = ax + b$ es la forma general de las funciones lineales. El docente deberá guiar a los estudiantes para que logren identificar que los datos nos dan valores posibles para x y y y que a y b son cantidades desconocidas, por lo cual nuevamente utilizarán los sistemas de ecuaciones (Preisser, 1989, p. 81).

Los estudiantes junto con el docente podrían llegar a formular el sistema que plantea la situación,

$$\begin{cases} 0a + b = 30 \\ 100a + b = 212 \end{cases}$$

con el cual se obtendrá la solución a la situación anterior y con ella la contestación a las dos preguntas que recientemente se plantearon (Preisser, 1989, p. 81).

No se tiene la intención de ahondar en este problema; sólo ha sido retomado con la finalidad de ejemplificar una de tantas posibilidades de aplicación de los sistemas de ecuaciones (Preisser, 1989, p. 81).

3) Tarea para casa

a) Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones (Preisser, 1989, p. 82):

$$\begin{cases} y = 1 \\ x - 3y = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2y \\ 3x + 3y = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y = 6 \\ y = 4 - x \end{cases}$$

Sesión 8

Propósitos

Tanto ésta como la próxima sesión pretenden examinar los métodos de sustitución e igualación a través de la estrategia general que se ha utilizado anteriormente para resolver sistemas, que consiste en “Simplificar el sistema [de] 2 x 2 de tal manera que se obtenga una ecuación en una sola incógnita” (Preisser, 1989, p. 83).

Con lo anterior se desea que los estudiantes recuerden ambos métodos, los interpreten como caminos alternos para conseguir un solo fin y no como simples recetas aisladas. Si no los recuerdan, esta sesión les servirá para que visualicen otras alternativas de aplicación de la estrategia general (Preisser, 1989, p. 83).

En esta sesión se pretende que con la ayuda de algunos ejemplos los estudiantes identifiquen el procedimiento en el que basa la aplicación del método de sustitución, además de que lo ubiquen como otra manera de manejar la estrategia general (Preisser, 1989, p. 83).

Desarrollo

1) Revisión de la tarea

Las actividades de la tarea por una parte servirán para obtener el método de sustitución y por la otra, para que los estudiantes reflexionen sobre los algoritmos de resolución (Preisser, 1989, p. 83).

En el inciso *a)* de la tarea no se especifica la manera en que deberán resolverse los tres sistemas, ya que se desea ver qué algoritmos de resolución utilizan los estudiantes (Preisser, 1989, p. 83).

El sistema propuesto en la tarea de la sesión anterior,

$$\begin{cases} y = 1 \\ x - 3y = 5, \end{cases}$$

puede sugerir la forma de resolver los otros sistemas, y permite tratar el nuevo concepto de *solución de un sistema* (Preisser, 1989, p. 84).

Quizá gran parte de los estudiantes lo resolvieron sustituyendo directamente el valor de y en la segunda ecuación, ya que así lo hacían en el método de suma y resta para obtener uno de los dos valores. Tal vez otra manera de resolución sería la siguiente (Preisser, 1989, p. 84).

$$\begin{cases} 3y = 3 \\ x - 3y = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3y = 3 \\ x - 0y = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 1 \\ x = 8 \end{cases}$$

Se observa una persistencia hacia el método de suma y resta.

Independientemente de cuál de los dos métodos sea el utilizado, es probable que al comprobar la solución, sólo sustituyan en la segunda ecuación, por lo que se considera necesario recordar nuevamente el concepto de *solución de un sistema* (Preisser, 1989, p. 84).

Es pertinente mencionar que los dos métodos utilizados son correctos, destacando que en matemáticas usualmente existe más de un camino para llegar a la solución (Preisser, 1989, p. 84).

Es probable que también en la tarea los últimos dos sistemas hayan sido resueltos por medio del método de suma y resta así como por el método de sustitución; luego, es conveniente exponerlos en el pizarrón para que los estudiantes observen que por ambos caminos se obtiene una ecuación con una sola incógnita, la cual permite encontrar la solución. También deben reconocer que lo único que varía de un método a otro es la forma de obtener esa ecuación (Preisser, 1989, p. 84).

2) Trabajo en equipos (ficha No. 5)

Se les pedirá analizar la nueva forma de resolver los sistemas (método de sustitución), para que describan el procedimiento que les permitió obtener una ecuación con una sola incógnita. Para facilitarles la realización de esta actividad, Preisser (1989, p. 85) recomienda plantear los ejercicios que a continuación se muestran.

a) Responde los siguientes cuestionamientos:

En los tres sistemas, aparece una ecuación escrita de manera distinta a como se estaban trabajando.

- ¿Cuál es en cada sistema?
- ¿En qué consiste esa diferencia?
- ¿Qué significa que una variable esté despejada en una ecuación?
- ¿Cómo se utilizó este hecho para obtener una ecuación con una sola incógnita?
- ¿Cómo son los siguientes sistemas?
- ¿Por qué?

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3x + 3y = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2y \\ 3x + 3y = 9 \end{cases}$$

- Para poder resolver el sistema del inciso *a)* por medio del nuevo método, ¿Qué es lo primero que se haría?

¿Cómo se utilizaría ahora lo que se obtuvo?

¿Para qué?

b) Explica el procedimiento que debe seguirse en este nuevo método de resolución de un sistema de 2 x 2.

c) Con ayuda del método descrito con anterioridad, resuelve los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} 3x = 6 \\ x - 2y = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

3) Trabajo grupal

Como las preguntas anteriores se enfocan en la obtención del procedimiento del método de sustitución, este apartado se centrará también en esto (Preisser, 1989, p. 86).

Quizá los estudiantes no hayan precisado en su escrito que la sustitución se efectúa en la ecuación que no se utilizó para el despeje, regla necesaria para resolver el sistema. Por lo cual conviene aclarar a partir de un ejemplo en el que se haga lo contrario (Preisser, 1989, p. 86).

Después de todas estas actividades, Preisser (1989, p. 86) recomienda que se diga el nombre del método que han estado manejando; nombre que tal vez lleguen a mencionar si se les pregunta.

4) Tarea para casa (1989, p. 86)

a) Resuelve por medio del método de sustitución los siguientes dos sistemas.

$$\begin{cases} 2x+3y=6 \\ x-5y=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+5y=13 \\ 4x-2y=-10 \end{cases}$$

b) Resuelve los siguientes sistemas con ayuda de un método distinto a los anteriores; para ello es necesario que analices la configuración de cada uno.

$$\begin{cases} x=5 \\ x=y+1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=x+4 \\ y=2x \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x+1=2y \\ 2x+2=2y \end{cases}$$

Sesión 9

Propósitos

Esta sesión pretende desarrollar y concluir los fines de la sesión 8. Ahora se trabajará el método de igualación a fin de obtener su procedimiento. Además, se recapitulará todo lo trabajado en las sesiones anteriores (Preisser, 1989, p. 87).

Desarrollo

1) Revisión de la tarea

En el inciso *a)* de la tarea se debe supervisar que los estudiantes no tengan dificultad o errores en la aplicación del método de sustitución. Aprovechando este momento se puede comentar sobre qué variable y ecuación conviene elegir para el despeje, a fin de realizar los cálculos más sencillos (Preisser, 1989, p. 87).

Para aclarar esto, Preisser (1989, p. 87) recomienda comentar a los estudiantes que en el sistema $\begin{cases} 2x+5y=13 \\ 4x+2y=-10 \end{cases}$ se pueden evitar las fracciones a partir de distintos caminos, como los que a continuación se muestran.

a) Simplificar la segunda ecuación para poder:

- Despejar “ y ” y sustituirla en la otra ecuación.
- Despejar $2x$ de cualquiera de las dos ecuaciones y sustituir el resultado en la otra.

b) Despejar $2x$ en la primera ecuación y multiplicar el resultado por 2 para sustituirlo en la segunda ecuación.

c) Multiplicar por 2 la primera ecuación, despejar $4x$ y sustituir lo obtenido en la otra.

Etcétera.

El desarrollo de estas actividades ayuda a ampliar las estrategias del álgebra y a enriquecer la manipulación algebraica (Preisser, 1989, p. 88).

En el inciso *b)* de la tarea seguramente los estudiantes resolverán los sistemas por medio del método de igualación, ya que tanto la experiencia que obtuvieron de las actividades anteriores como los sistemas presentados les sirvieron de guía (Preisser, 1989, p. 88).

Los estudiantes tendrán que escribir la resolución de los sistemas en el pizarrón mientras el docente les hace preguntas y comentarios que permitan puntualizar el procedimiento de igualación. Esto también los ayudará a identificar este método como un caso más de la aplicación de la estrategia general (Preisser, 1989, p. 88).

Es necesario que el docente cuestione a los estudiantes sobre su manera de proceder a fin de entenderla y obtener información sobre los logros o fallas del tipo de enseñanza que se desea ofrecer (Preisser, 1989, p. 88).

Preisser (1989, p. 88) sugiere recordar en el tercer sistema que la variable elegida para despejar no siempre tiene que estarlo totalmente.

2) Trabajo grupal

En este apartado se recuperarán los comentarios y observaciones que surgieron en la resolución de los sistemas del inciso *b)* de la tarea, con el fin de volver a resaltar el uso de la estrategia general y resumir el procedimiento de igualación para obtener una ecuación con una variable (Preisser, 1989, pp. 88-89).

Si es necesario, el docente puede plantear más ejemplos de sistemas similares y distintos a los vistos y también plantear algunas interrogantes para conseguir una síntesis más completa del procedimiento (Preisser, 1989, p. 89).

El desarrollo de las sesiones 8 y 9 son suficientes para abordar estos dos métodos de resolución (sustitución e igualación), puesto que no se desea profundizar en ellos y además porque en las nueve sesiones se han resuelto una diversidad de sistemas de 2 x 2 (Preisser, 1989, p. 89).

3) Exposición del docente

Es conveniente ahora que el docente presente en un esquema los contenidos de sistemas de ecuaciones lineales que se han estado manejando hasta el momento, a fin de que los estudiantes tengan una visión general de lo visto. El esquema puede ser un cuadro sinóptico que será escrito en el pizarrón mientras se realiza la exposición (Preisser, 1989, p. 89).

Preisser (1989, p. 89) no especifica lo que deberá contener la exposición, ya que la autora considera conveniente dejarlo al criterio del docente.

El siguiente esquema propuesto por Preisser (1989, pp. 90-91) muestra un ejemplo sobre el resumen de las sesiones.

A. Aspectos que se han tratado sobre Sistemas de ecuaciones lineales

I.- En general: Definición.
II.- En particular para sistemas de 2 x 2

a) Conceptos relacionados:

i. *Ecuaciones indeterminadas*
ii. *Ecuaciones equivalentes*
iii. *Simultaneidad*
iv. *Solución del sistema.*

b) Clasificación de acuerdo con el número de soluciones:

i. Una solución
ii. Muchas soluciones
iii. Ninguna solución

Para cada una de las tres situaciones se cuenta con:

- Características de la estructura del sistema
- Una interpretación gráfica
- Una interpretación de los resultados al aplicar un método algebraico.

c) Métodos de Resolución

i. Usando diagramas
ii. Método gráfico
iii. Tres métodos algebraicos basados en una estrategia general. Estos son:
  - Suma y resta (o reducción)
  - Sustitución
  - Igualación.

B. Actividades realizadas en torno a problemas

a) Redacción de problemas.
b) A partir de un problema se construye el sistema que lo resuelve.
c) A partir de un sistema dado, se formuló un problema que le da contexto.
d) Dentro del contexto de algunos problemas se analizó:
   i. El tipo de números que pueden ser solución o no del mismo.
   ii. Las características de las condiciones que llevarían a que el problema no tenga solución, o posea muchas de ellas.

e) A través de un problema específico, se ha ilustrado:

   i. Una forma de hacerlo más general
   ii. La manera de plantear el problema inverso.

4) Tarea para casa (Preisser, 1989, p. 91)

- Estudiar los métodos de suma y resta, sustitución e igualación.

CAPÍTULO IV

ANÁLISIS DE MATERIALES Y PROPUESTA DIDÁCTICA

En el estudio de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas intervienen algunos conceptos clave; por lo que es necesario abordar y aclarar algunos de ellos, tales como *ecuación, solución, resolución, igualdad, incógnita, ecuaciones equivalentes, variable, sistemas de ecuaciones, compatibilidad e incompatibilidad de un sistema,* etcétera. En este capítulo se trabajan dichos conceptos a partir de una propuesta que integra los diferentes materiales seleccionados para ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales. Cabe aclarar que se realizaron algunas modificaciones y nuevas aportaciones a las propuestas originales de los autores, a fin de facilitar el estudio de dichos temas.

Propuesta para el estudio de ecuaciones lineales

Actividades introductorias

Consideramos importante al igual que otros autores (Alonso *et al*. (1993), Socas *et al*. (1996), Pinzón (1997); entre otros) trabajar con actividades lúdicas que permitan manipular diversas situaciones en las que se observen las transformaciones y la estructura de las ecuaciones. Por ello se propone iniciar con material físico como la balanza, ya que permite la manipulación de objetos (véanse los anexos A2 y A1).

El tipo de actividades como las planteadas en el anexo A2 y A1 permitirá a los estudiantes comenzar a familiarizarse con el concepto de ecuación y el de igualdad a través de la noción de equilibrio y la de equivalencia, sin comenzar directamente con cuestiones algebraicas (lenguaje y reglas).

Otro aspecto relevante que debe trabajarse antes de introducirnos meramente en el álgebra es la relación entre una operación y su inversa. Para ello se propone utilizar cadenas de diferente estructura a modo de juego (véanse los anexos B2 y B1).

Es importante que al término de cada actividad se muestren al grupo las distintas maneras de resolución de los estudiantes para que todos visualicen y comprendan las estrategias y razonamientos de sus compañeros, a fin de enriquecer los propios.

Además de favorecer la comprensión de las operaciones y sus inversas, estas actividades ayudan a introducir el concepto de ecuación como la condición que cumple un número desconocido, que es preciso determinar (Alonso *et al*., 1993, p. 96). Ejercicios similares se presentan en *Iniciación al álgebra*, de Socas y sus coautores (1996, pp. 175-177, 194 y 197).

Los caminos son un modelo que también nos permite observar y entender el sentido de equilibrio (véanse los anexos B2 y B1). Una vez realizado el ejercicio de manera individual, es conveniente compartir ante el grupo las estrategias utilizadas y las relaciones establecidas para encontrar el número inicial que permitió llegar por los dos caminos a la meta. Para abordar los caminos, en *Iniciación al álgebra*, Socas y sus coautores (1996) proponen algunas actividades con ellos (pp. 129-131 y 194-195).

Para continuar trabajando con actividades introductorias se incluyen otras como las que se plantean en la propuesta didáctica para ecuaciones de primer grado de Cedillo y sus coautores (2006a).

Las actividades de esta propuesta pretenden que el estudiante: identifique las letras como representantes de números, reconozca el signo igual como equivalencia entre dos expresiones y desarrolle métodos para resolver ecuaciones, a partir de sus conocimientos aritméticos (véase los anexos C2 y C1).

Al término de estos incisos los estudiantes deberán exponer y comparar sus respuestas. Para la segunda parte de esta actividad Cedillo y sus coautores modificaron el enunciado inicial, quedando así:

La compañía telefónica ha cambiado las condiciones del cobro de las llamadas, y ahora cobrará por el tiempo que dure la llamada, es decir, las fracciones de minuto las va a cobrar por lo que corresponda manteniendo la tarifa de $6.00 por minuto. (Cedillo *et al*., 2006a, p. 38)

A continuación se plantean algunas preguntas que deberán ser contestadas en equipo, y al término deberán ser expuestas y comparadas ante el grupo (véase el anexo C2).

Para seguir manejando el concepto de ecuación, otra opción consiste en trabajar con ecuaciones algebraicas a partir de identidades aritméticas en las que ya intervenga el uso de literales. (Es necesario utilizar diferentes letras desde un principio para evitar que el estudiante se encasille en la idea de que únicamente la letra x juega el papel de incógnita.) Los ejercicios de la actividad

7 (véase anexo D) están estructurados de manera tal que conlleven el uso de literales.

Es importante que el docente aclare a los estudiantes que en álgebra los números que se desconocen en las ecuaciones son llamados incógnitas y se simbolizan por lo regular con las últimas letras del alfabeto, x, y, z, u, v ; no obstante, se deben realizar ejercicios en los que la incógnita se represente por cualquier letra, para que el estudiante no tenga dificultades cuando se represente a la incógnita de una manera distinta. Por ejemplo,

$2 \cdot f + 5 = 20 - 5$

$2 \cdot 5 + g = 20 - 5$

$2 \cdot 5 + 5 = h - 5$

$2 \cdot 5 + 5 = 20 - i$.

De igual manera, se puede trabajar con identidades que tengan un número varias veces, lo cual conducirá a formular expresiones algebraicas que tengan la misma letra en ambos lados del signo igual, por ejemplo (Alonso *et al*., 1993, pp. 98-99),

$$9 \cdot 3 - 7 = 6 \cdot 7 - 22$$

daría lugar a

$$9 \cdot 3 - c = 6 \cdot c - 22 .$$

Cuando un estudiante parte de identidades aritméticas para la construcción de ecuaciones, puede asociar la idea errónea de que “si toda identidad tiene solución entonces toda ecuación también la tiene”, sin tomar en cuenta que algunas ecuaciones no tienen solución.

Al inventar ecuaciones que no precisamente parten de una identidad se llega a cometer el error de crear expresiones como $2b+8=2b+9$, las cuales no tienen solución (Alonso *et al*., 1993, p. 99). Para ello se proponen actividades como la del inciso *3)* del anexo D, que lleven al estudiante a reflexionar sobre la estructura de una ecuación.

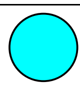
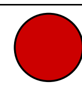
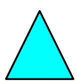
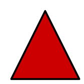
El trabajo con identidades también ayuda a consolidar “el concepto de solución como número que hace cierta la identidad” (Alonso *et al*., 1993, p. 98). Así como las balanzas, cadenas y caminos, en esta actividad también es necesario tener presente el sentido de equilibrio, que persiste en toda ecuación al ser ésta una igualdad entre dos expresiones algebraicas en las que hay una o varias cantidades desconocidas, la cual es verdadera sólo con determinados valores.

Para finalizar con las actividades introductorias se propone utilizar el tablero con fichas; ya que es un modelo de enseñanza para la resolución de ecuaciones lineales que permite cubrir conceptos y aspectos esenciales como el concepto del signo igual y el de ecuación, los símbolos, la concatenación y algunas reglas algebraicas, que los estudiantes deben manipular de la mejor manera posible antes de abordar sistemas de ecuaciones lineales (dos ecuaciones con dos incógnitas).

El modelo propuesto por Pinzón expone el uso de 3 reglas para la resolución de una ecuación. La primera expresa que al pasar una ficha de un lado a otro cambia de color; la segunda enuncia que dos fichas de la misma figura y [de] diferente color colocadas en el mismo lado se anulan (se hacen cero), y la última establece que si se le quitan o ponen fichas a un lado o se cambian de color, también se le debe hacer lo mismo al otro lado (Pinzón, 1997, pp. 22-23).

El modelo “[e]s un rectángulo de los 65 cm por 41 cm dividido en dos partes iguales, lado izquierdo y lado derecho, con un signo igual en medio” (Pinzón, 1997, p. 22). También utiliza fichas de 2 figuras y 2 colores: el triángulo azul para representar la x positiva y el triángulo rojo para la x negativa; además, utiliza la figura del círculo de color azul o rojo; el primer color para representar una unidad positiva y el segundo para una unidad negativa.

Cuadro 4.1

 Unidad positiva	 Unidad negativa
 *x* positiva	 *x* negativa

Antes de que el estudiante realice las siguientes actividades el docente les deberá ejemplificar el procedimiento que debe seguirse en la realización de la actividad 8 con una ecuación distinta (véase el anexo E1).

A los estudiantes podemos pedirles diferentes maneras de resolución, como las que se exponen en las actividades 9-11 (véase el anexo E2).

Para resolver una ecuación con ayuda del fichero, Pinzón (1997) recurre a un solo procedimiento que rescata las reglas 1 y 2, pero se puede constatar que existe una amplia gama de procedimientos diferentes.

Ahora bien se tienen que tomar en cuenta algunas de las limitaciones que reconoce la autora en la utilización de su modelo como lo es la simbolización del cero y la representación de ecuaciones con números grandes.

Pinzón reconoce que “[e]l único número que no se puede simbolizar en este modelo, es el cero; sin embargo, es posible presentar su concepto (con dos círculos: uno rojo y otro azul, o sea, $-1+1=0$).” (Pinzón, 1997, p. 91), pero no consideramos eficaz la idea de presentar su concepto a partir de la utilización de ambas fichas (roja y azul), ya que la acción $-1+1$ no explicaría en sí la conceptualización del cero; por lo cual recomendamos dejar el espacio vacío en el tablero cuando se ocupe el cero.

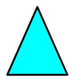
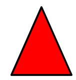
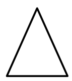
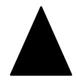
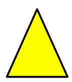
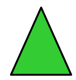
En cuanto a la representación de ecuaciones con números grandes, se ve la necesidad de manipular mayor cantidad de fichas, lo cual dificulta su manejo por el tamaño del tablero. Por tal motivo se anexarán otros colores a fin de trabajar ecuaciones con cantidades grandes.

En los cuadros 4.2 y 4.3 se muestran los colores de las fichas correspondientes al valor que representa cada una (según los cambios realizados).

Cuadro 4.2

POSITIVA (+)	NEGATIVA (-)
UNIDAD	UNIDAD
DECENA	DECENA
CENTENA	CENTENA

Cuadro 4.3

POSITIVA (+)		NEGATIVA (-)	
	x		$-x$
	$10x$		$-10x$
	$100x$		$-100x$

Para el manejo de estos colores especifiquemos lo siguiente: cada 10 fichas de color azul se cambiarán por 1 blanco, cada 10 fichas blancas se cambiaran por 1 ficha amarilla, esto en cuanto a las fichas que representan unidades y *x* con signo positivo. Para las negativas, tenemos que 10 de color rojo se cambian por 1 negro y 10 negras por 1 verde.

Por tanto, las reglas propuestas en el fichero (Pinzón, 1997, p. 22) quedarán de la siguiente manera:

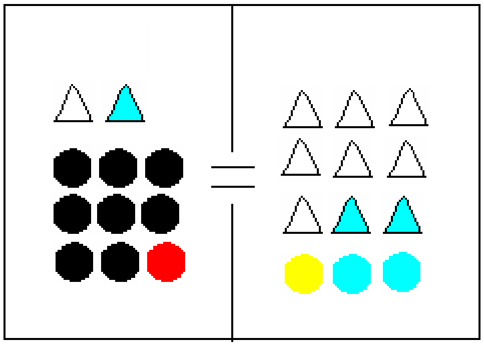
1.- Al pasar una ficha de color azul, blanco o amarillo de un lado del tablero al otro, ésta cambia por 1 rojo, negro o verde según el color que le corresponda, ya sean círculos o triángulos.

2.- Dos fichas de la misma figura y de diferente color (azul con rojo, blanco con negro y amarillo con verde) colocadas en el mismo lado, se anulan (se hace cero).

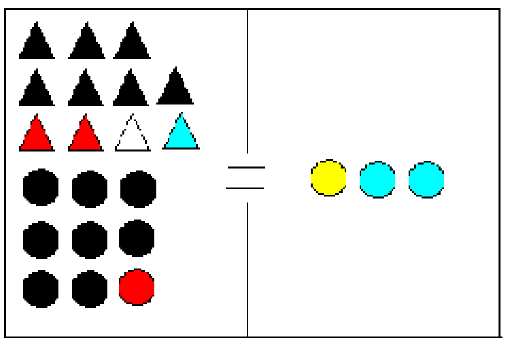
3.- Si se le quitan o ponen fichas a un lado o se cambian de color, también se le debe hacer lo mismo al otro lado.

Por ejemplo, para resolver la ecuación $11x-81=72x+102$ en el fichero se procede de la siguiente manera.

1) Representamos la ecuación $11x - 81 = 72x + 102$.

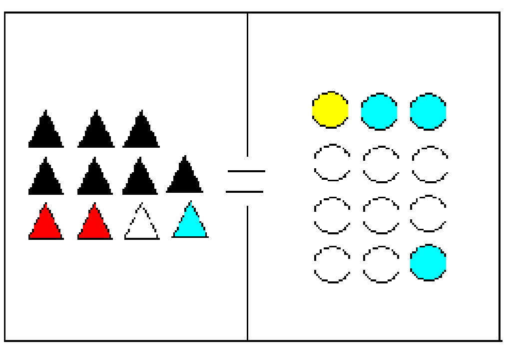


2) Pasar las x al lado izquierdo (regla 1).



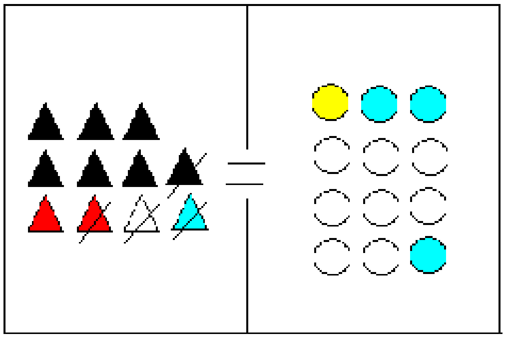
$11x - 72x - 81 = 102$.

3) Y las unidades negativas al lado derecho (regla 1).



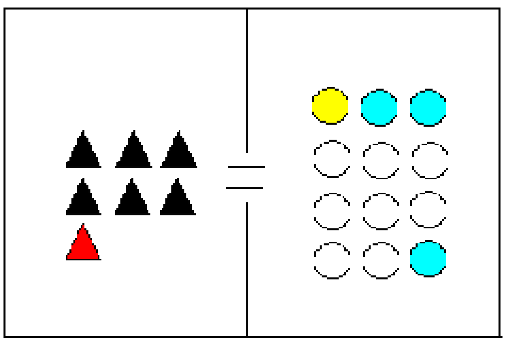
$11x - 72x = 102 + 81$.

4) Anular en ambos lados (regla 2).



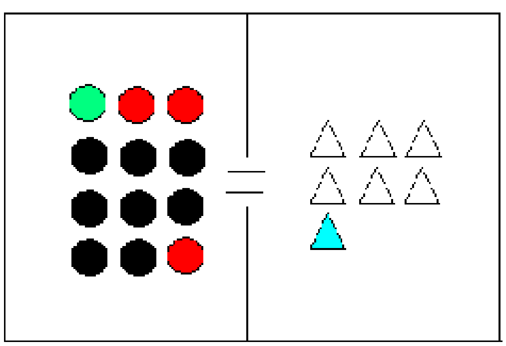
$11x - 72x = 102 + 81$.

5) Y obtenemos.



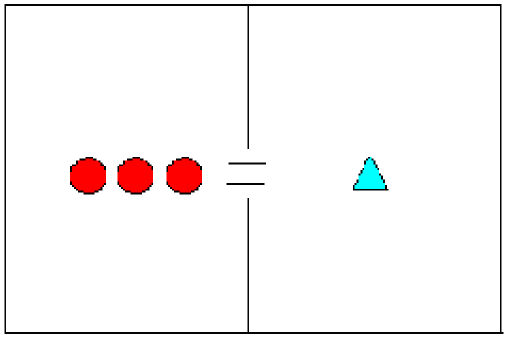
$-61x = 183$.

6) Al obtener un resultado negativo procedemos a utilizar la regla 1.



$-183 = 61x$.

7) Y hacemos la repartición.



$-3 = x$.

Una vez que el estudiante se ha familiarizado con diversos aspectos que giran en torno al tema de ecuaciones, es conveniente que se retome el uso de balanzas (véase el anexo F1) con un panorama más amplio que incluya tanto la simbolización de la situación de igualdad mediante ecuaciones (con una incógnita) como la resolución de las mismas. Dicha resolución se realiza mediante la balanza y el álgebra, por lo que se requiere que el estudiante ya tenga la noción de algunos métodos formales para resolución de una ecuación.

Actividades algebraicas

Ejercicios como los de la actividad 13 (véanse los anexos F2 y F1) ayudan al estudiante a descubrir la importancia de utilizar un método algebraico para resolver ecuaciones con una incógnita, puesto que le será difícil determinar el valor de la incógnita cuando se trate de resultados con números decimales. También se pueden consultar los ejercicios propuestos en el texto *Iniciación al álgebra* (Socas *et al.,* 1996, pp. 172- 173 y 191-192).

Es opcional trabajar con actividades similares a las de la balanza, como los tableros; ambas "permiten trabajar la ecuación como equilibrio, la propiedad simétrica del igual y el concepto de ecuación como relación entre algo desconocido y algo conocido” (Alonso *et al*., 1993, p. 100). En los anexos G2 y G1 se exponen dos actividades (14 y 15) con diferentes tableros.

Tanto las balanzas como los tableros permiten trabajar con ecuaciones equivalentes. La actividad de los anexos H2 y H1 persigue el mismo propósito.

Antes de iniciar con dicha actividad el docente deberá aclarar a los estudiantes que las ecuaciones equivalentes “son las que se obtienen una de la otra” (Baldor, 2000, p. 319).

Para que el estudiante concrete algunos de los aspectos más relevantes en torno al tema de ecuaciones (igualdad, solución y resolución de una ecuación, etcétera), se presenta la actividad del anexo H1.

De acuerdo con el proceso de revisión y de resolución de los ejercicios de la actividad 16 (véase el anexo I), se recomienda proporcionar más tiempo a los estudiantes para que establezcan relaciones entre las ecuaciones equivalentes. Según Alonso y sus coautores, por lo regular los estudiantes tienden a resolver más que a analizar y buscar transformaciones. Sin embargo, es de suma importancia que lo hagan para lograr comprender de manera más significativa el concepto de ecuaciones equivalentes y con ello tengan la posibilidad de construirlas (1993, p.107).

El trabajo con ecuaciones en las actividades de los anexos H1 e I requiere de su comprobación para consolidar aún más el concepto de ecuación y el de solución. La comprobación permitirá al estudiante autocorregirse en cada uno de los ejercicios en caso de ser necesario (Alonso *et al*., 1993, p. 107).

A causa de la diversidad de errores que los estudiantes presentan en la resolución de ecuaciones con paréntesis, se proponen las actividades del anexo J1 que contribuyen a contrarrestarlos, de acuerdo con las recomendaciones de Cedillo y sus colaboradores (2006a). Para abordar el orden de las operaciones en una ecuación con paréntesis, se elaboraron cuatro actividades en base a los resultados de los estudiantes reportados en el módulo 6 (Cedillo *et al.,* 2006a).

En el tipo de ejercicios como el *4)* de la actividad 18 (véase el anexo J1), algunos estudiantes podrían llegar a confundirse y pensar que ambas ecuaciones están resueltas correctamente o que la resolución y comprobación “A” está bien; es ahí donde deberá intervenir el docente para explicarles en ambos ejemplos la manera de ejecutar las operaciones y, si es posible, puede auxiliarse de la calculadora para que los estudiantes observen y tengan aún más claro cuál es el orden en el que se deben ejecutar las operaciones cuando en una expresión intervienen paréntesis.

El ejercicio *5)* de la actividad 18 (véase el anexo J1) implica la utilización de paréntesis para denotar multiplicación, en lugar de ocupar el signo “por” ($\times$), ya que en la escritura de las ecuaciones intervendrá la literal x como incógnita; permitirá que el estudiante se familiarice más con la simbología del álgebra.

Una vez realizadas las actividades que se han recomendado para abordar algunos aspectos que intervienen en el tema de sistemas de ecuaciones lineales (véanse los anexos correspondientes a la propuesta: A1 a J1), es pertinente trabajar ahora con actividades propias al tema.

Propuesta para el estudio de sistemas de ecuaciones lineales

Actividades introductorias

En el siguiente apartado se introduce el trabajo de sistemas de ecuaciones lineales mediante una serie de actividades que van aumentando su grado de complejidad.

En el anexo K1 se incluye una actividad que contribuye a observar mediante un contexto una de las técnicas de resolución de sistemas de ecuaciones. Dicha actividad tiene como propósito introducir a los estudiantes al diseño y la resolución de problemas con varias incógnitas, para que tengan un primer acercamiento a las siguientes definiciones (Preisser, 1989, p. 56):

- Ecuación indeterminada
- Solución de una ecuación indeterminada
- Simultaneidad
- Sistema de ecuaciones
- Solución de un sistema

Se iniciará la sesión con el planteamiento de un problema que no necesariamente implica el uso de operaciones algebraicas, ya que se puede resolver aritméticamente (Preisser, 1989, p. 56).

Aprovechando las respuestas de los incisos *1)* a *4)* de la actividad 19 (véase el anexo K1), Preisser (1989, p. 57) recomienda al docente plantearles algunas preguntas a los estudiantes (véase anexo K1, a partir del inciso *5)*) con la finalidad de acercarlos a los conceptos de ecuación indeterminada y su solución. Cabe aclarar que no se retoman tal cual las preguntas propuestas por la autora, sino que fueron reformuladas.

Al finalizar la actividad 19 (véase el anexo K1), el docente deberá hacer una recapitulación, auxiliándose de las respuestas de los estudiantes, para introducir el concepto de sistemas de ecuaciones y su solución, remarcando la importancia de la satisfacción simultánea de las condiciones que se les otorgarán y la necesidad de contar con el mismo número de ecuaciones como incógnitas.

La finalidad de la actividad 20 (véase el anexo L) es que se observe mediante un contexto una de las técnicas de resolución de sistemas de ecuaciones. Esta actividad contextualizada permite a los estudiantes darse cuenta de cómo y en qué consiste la combinación lineal de dos ecuaciones, antes de manipular símbolos algebraicos (Alonso *et al*., 1993, p. 122).

Probablemente sea más laborioso para algunos estudiantes encontrar el costo de 1 pantalón y el del par de calcetines (véase el inciso *3)* de la actividad 20, en el anexo L). Se recomienda que el docente realice su intervención a fin de hacerles notar la importancia de utilizar métodos algebraicos para facilitar la resolución de diversos problemas. Para ello se sugiere trabajar con los mismos ejercicios pero mediante una resolución algebraica. Adicionalmente podría retomarse el ejercicio propuesto en *Iniciación al álgebra* (Socas *et al.,* 1996, pp. 203-204).

La actividad 21 (véase el anexo M1) permite trabajar con el método de sustitución para la resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas; al realizarlas, los alumnos observarán la estructura del método antes de trabajarlo simbólicamente. La actividad 21 permite al estudiante abordar el método de sustitución de manera concreta, al conseguir reproducir las acciones que se llevan a cabo cuando se resuelve el sistema de manera formal (Alonso *et al*., 1993, p. 127).

En las actividades 22 a 25 se presentan cuatro casos de equilibrio con balanzas (véase el anexo N1), similares a la actividad 21. Con ellas se pretende que los alumnos manipulen los diferentes objetos hasta conseguir sus respectivos pesos y sus relaciones. Además, se trata de que los estudiantes simbolicen las distintas situaciones que van apareciendo. Todo ello para que posteriormente se llegue a la resolución de sistemas simbólicamente (Alonso *et al*., 1993, p. 193).

Para el estudio de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas, en *Iniciación al álgebra* Socas y sus coautores (1996, pp. 174-175 y 193) proponen también el trabajo con balanzas. Es importante que después de que el estudiante visualice concretamente el método de sustitución con ayuda de la balanza se aborde dicho método de manera algebraica (véase el anexo O1).

Actividades algebraicas

En el desarrollo de la actividad 26 (véase el anexo O1), el docente puede invitar a los estudiantes a escribir en el pizarrón los diferentes sistemas que formaron, para que todo el grupo los resuelva, con la finalidad de ejercitarlos en el algoritmo de sustitución. Esta actividad anterior ayuda a consolidar tanto el concepto de ecuaciones equivalentes como el de sistemas equivalentes.

Para dar continuidad a esta propuesta, se plantea la actividad 27 (véase el anexo P) para que los estudiantes relacionen la resolución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas con la idea de *función* expresada en forma tabular. Además, se pretende que resuelvan el sistema mediante el método de igualación para complementar la noción tanto de sistemas de ecuaciones como de solución de un sistema y los métodos de resolución (Alonso *et al*., 1993, pp. 128-129).

Posiblemente los estudiantes respondan, a la pregunta del inciso *4)* de la actividad 27 (véase el anexo P), que el costo bajo o alto depende del número de fotocopias. El costo es alto en Maxicopia cuando el número de fotocopias es menor a 1000 y es bajo cuando son mayores a 1000. En Copiaexpress es más caro cuando el número de fotocopias es mayor a 1000 y más barato cuando es menor.

Los estudiantes pueden apoyarse en el uso de su tabla para responder la pregunta del inciso *5)* de la actividad 27 (véase el anexo P), y observarán que son 1000 las fotocopias que se tendrían que hacer.

En la actividad 28 (véase el anexo P) se persiguen los mismos propósitos que en la 27; además, da mayor énfasis a la utilidad que tienen los métodos formales del álgebra para resolver problemas que están fuera del alcance de los métodos aritméticos y otras estrategias.

El juego de los círculos mágicos es un buen elemento para abordar y presentar de manera distinta los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. En este juego “[l]as expresiones situadas en cada una de las circunferencias deben sumar el mismo número”, y dicho número es llamado número mágico (Alonso *et al*., 1993, p. 190). También se puede utilizar para repasar los métodos formales de resolución ya vistos (sustitución e igualación).

En el anexo Q se incluyen dos actividades, la 29 y la 30, sobre el juego de los círculos mágicos.

Actividades con métodos formales e informales

Para consolidar consolidar los conceptos de *ecuación indeterminada, solución de una ecuación indeterminada, sistema de ecuaciones*, *solución de un sistema* y *simultaneidad* poniendo singular atención en los tres últimos, además de vincular estos conceptos con el significado gráfico de la solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (sistema de 2 x 2), se propone la actividad 31 (véase el anexo R). Adicionalmente, con esta actividad se promueve "la capacidad para redactar problemas, e ilustrar que un sistema de ecuaciones puede representar a un conjunto de problemas con diversos enunciados" (Preisser, 1989, p. 59).

Con ayuda de los ejercicios 10 a 14 de la actividad 31 (véase el anexo R), el docente debe comentar al grupo que a veces es más rápido encontrar la solución de algún sistema mediante el método gráfico, ya que en ocasiones el determinar todas las parejas de números que satisfacen a cada ecuación implica más tiempo. Por ejemplo, en el ejercicio *13)*, si en el sistema $\begin{cases} x+y=50 \\ x-y=10 \end{cases}$ se realizaran las combinaciones con enteros positivos del 1 al 49 en ambas ecuaciones, se tendrían que hacer aproximadamente 88 parejas de números para hallar la solución del sistema. En estos casos conviene mejor aplicar el método gráfico, como se muestra en el ejercicio *13)*.

Respecto al inciso *14)*, el docente junto con el grupo revisará y corregirá los enunciados que elaboraron. En esta revisión es necesario que el docente les haga ver que un mismo sistema de ecuaciones puede representar y solucionar diferentes situaciones (Preisser, 1989, p. 60).

Tomando en cuenta las sugerencias de Preisser para realizar algunas variaciones, ya sea en el contexto, en el enunciado del problema (condiciones) o en su representación matemática, se proponen los ejercicios *15)* al *20)* de la actividad 31 (véase el anexo R).

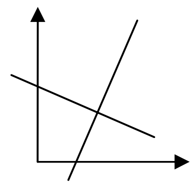
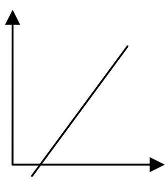
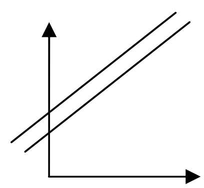
Es probable que en el ejercicio *21)* de la actividad 31 (véase el anexo R) los estudiantes muestren confusión en el comportamiento de los 2 últimos sistemas. Ante esto el docente les deberá aclarar que estos sistemas son distintos a los vistos, ya que uno de ellos, $\begin{cases} y = 4 - x \\ 2x + 2y = 8, \end{cases}$ pertenece a los sistemas compatibles indeterminados y el otro, $\begin{cases} x = y \\ x - y = 4, \end{cases}$ a los incompatibles (Preisser, 1989, p. 62). Les recordará el concepto de *sistema de ecuaciones* y el papel de la *simultaneidad* para que examinen las ecuaciones de los sistemas anteriores y puedan así entender que un sistema compatible indeterminado proporciona la misma información (muchas soluciones) y un sistema incompatible expone información contradictoria, por lo cual no pueden satisfacerse a la vez (no tienen solución en común) (Preisser, 1989, p. 62).

Para enriquecer esta explicación se puede analizar el comportamiento gráfico que tienen los sistemas, poniendo énfasis en el número de soluciones de cada uno y en las consecuencias que se originan al plantear problemas que impliquen alguno de estos sistemas (Preisser, 1989, pp. 62-63).

Con el desarrollo de la actividad 32 (véase el anexo S) se pretende que los estudiantes consoliden su capacidad para formular problemas. Además, se busca introducirlos en definiciones, como *ecuaciones equivalentes*, *sistemas* *compatibles*, *incompatibles*, *determinados e indeterminados* (Preisser, 1989, p. 62). Los ejercicios de la actividad 32 se proponen para que el estudiante analice el comportamiento de los sistemas compatibles indeterminados e incompatibles. En la resolución gráfica de los problemas el docente debe aclarar al grupo que en las situaciones planteadas únicamente se utilizarán las soluciones de sistemas con números enteros positivos y mayores que cero, ya que se han retomado de un contexto real. No obstante, les explicará que a estos sistemas compatibles indeterminados en general les corresponde una diversidad de soluciones, donde se incluye todo tipo de números que permitan satisfacer la ecuación (negativos, positivos, enteros, fraccionarios, etcétera). Los ejercicios *1)* a *5)* de la actividad 32 (véase el anexo S) corresponden a sistemas compatibles indeterminados. En los ejercicios *6)* a *8)* de la misma actividad, sobre sistemas incompatibles, los estudiantes considerarán números enteros positivos y negativos, incluyendo el cero, en su resolución gráfica; además, el docente resaltará que los sistemas incompatibles no tienen solución en común, puesto que se componen de ecuaciones independientes que proporcionan información contradictoria.

Por ejemplo, el sistema $\begin{cases} x + y = 5 \\ x + y = 6 \end{cases}$ podría traducirse de la siguiente manera: El precio de un lápiz más el de una pluma es de 5 pesos. Si sumamos el precio de un lápiz con el de una pluma el costo total es de 6 pesos.

Después de desarrollar los ejercicios *1)* a *9)* de la actividad 32 (véase el anexo S), se deberá elaborar un esquema similar al siguiente en el que se recuperaran las características y el comportamiento de los diferentes casos de sistemas de 2 x 2 (Preisser, 1989, p. 63).

		Situación gráfica	Características	Ejemplo
	1.- Única solución		Dos ecuaciones diferentes y no contradictorias	$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$
Sistema de 2 x 2	2.- Muchas soluciones		Dos ecuaciones equivalentes, siendo una múltiplo de la otra	$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$
	3.- Ninguna solución		Dos ecuaciones contradictorias, una establece un resultado diferente del que correspondería a un múltiplo de $x + y = 4$	$\begin{cases} x \quad y = 0 \\ x - y = 4 \end{cases}$

Una vez hecho el esquema, el docente deberá formar equipos en base al número de estudiantes del grupo y repartirá a cada equipo un problema de los planteados en el inciso *22)* de la actividad 31 (véase el anexo R); es necesario que el estudiante que inventó el problema no sea integrante del equipo (Preisser, 1989, p. 64).

De acuerdo con el problema que se les asigne, responderán los incisos *10)* al *14)* de la actividad 32 (véase el anexo S).

En la actividad 33 (véase el anexo T) se muestra la aplicación de los sistemas compatibles determinados en la construcción de una caja con el objetivo de que los estudiantes comiencen a familiarizarse con la noción de sistemas equivalentes y con las transformaciones o cambios posibles que pueden hacerse a un sistema de ecuaciones para obtener otro equivalente que sea más sencillo de resolver. También se tienen otras expectativas, por ejemplo: promover la necesidad de utilizar el método algebraico e ilustrar a partir del planteamiento y resolución de un problema que las matemáticas pueden ser útiles cuando se formulan problemas correctamente (Preisser, 1989, p. 65).

Ante la dificultad de los estudiantes para localizar puntos y determinar coordenadas con números fraccionarios en el plano cartesiano, el docente los invitará a resolver el sistema planteado en el ejercicio *6)* con ayuda de los diagramas de los ejercicios *8)* a *13)* (véase el anexo T) (Preisser, 1989, p. 67). El docente pondrá énfasis en que el procedimiento planteado en estos ejercicios permite simplificar los sistemas a fin de que sea más sencillo resolverlos. Los primeros 15 incisos de la actividad 33 se plantean para que los estudiantes trabajen con el concepto de *simultaneidad* de manera más evidente, pues cada una de las ecuaciones tiene un referente físico (el ancho y el largo de la cartulina) (Preisser, 1989, p. 68).

El ejercicio *16)* de la actividad 33 (véase el anexo T) lo deberán resolver en equipo. Una vez que resuelvan el ejercicio *17)*, se les hará notar que el sistema obtenido y el del inciso *6)* es el mismo, además de que la única diferencia entre ellos es el valor de x y el de y, ya que se cambiaron las medidas del ancho y el largo de la cartulina (Preisser, 1989, p. 70). Apoyándose en lo anterior, se les ayudará a deducir que para poder armar cualquier caja como la propuesta en el inciso *16)* se debe utilizar el mismo sistema, $\begin{cases} 3x+2y=\ell \\ 2x+y=a \end{cases}$, en el que se deberán sustituir los valores de a y ℓ. Incluso se hará hincapié en que ese mismo sistema se puede aplicar a otras situaciones distintas a la construcción de una caja y que se puede resolver *a través* de otro sistema más simple (Preisser, 1989, p. 70).

En la resolución del ejercicio *18)* de la actividad 33 (véase el anexo T) es necesario que el docente observe si los estudiantes utilizan un sistema más sencillo para luego remplazar la solución en los otros, o mediante la búsqueda de las relaciones entre las ecuaciones que forman a cada uno de los sistemas (Preisser, 1989, pp. 70-71). Una vez que los estudiantes hayan notado que todos los sistemas tienen la misma solución, podría hacerse el comentario de que por esa característica éstos son llamados sistemas equivalentes, y que cuatro de esos sistemas parten del original, ya que una de las ecuaciones es retomada y la otra es el resultado de restar dos ecuaciones de uno de los sistemas, o bien es un múltiplo de otra de las ecuaciones (Preisser, 1989, p. 71). Además, el docente también les deberá mencionar que este método permite obtener una nueva ecuación para la construcción de sistemas equivalentes más fáciles de resolver, pues se llega a obtener una ecuación con una sola incógnita. Debe poner énfasis en que la estrategia general que se ha manejado consiste en reducir una situación desconocida (difícil) a otra que ya se conoce (fácil) (Preisser, 1989, p. 71).

Se plantea la actividad 34 (véase el anexo U) principalmente para reforzar la noción de sistemas equivalentes y desarrollar estrategias generales para derivar el método de suma y resta. Igualmente, pretende que los estudiantes lleguen a obtener la representación de una primera generalización del problema que se trabajó en actividad 33 (véase el anexo T).

Después de responder el inciso *11)* de la actividad 34 (véase el anexo U), el docente debe comentar a los estudiantes que al utilizar el método de suma y resta se diversifican las posibilidades para simplificar sistemas de 2 x 2, pues mediante ambas operaciones, auxiliadas por la división, se obtienen el valor de *x* y el de *y* sin necesidad de sustituir el valor de alguna variable para poder encontrar el otro (Preisser, 1989, p. 72).

Con el inciso *13)* de la actividad 34 (véase el anexo U) se pretende reafirmar la noción de *sistemas equivalentes* al visualizar de manera gráfica dicho concepto: "para cada uno de esos sistemas [de] 2 x 2, tenemos dos líneas que aunque distintas (de un sistema a otro) se [intersecan] todas en el mismo punto; punto que representa geométricamente la solución de un sistema" (Preisser, 1989, p. 74). Es decir, se ilustra el concepto de sistemas equivalentes como aquellos que tienen la misma solución y también que el método de suma y resta permite obtener las diversas rectas que pasan por un mismo punto (solución) y que son fáciles de manipular algebraicamente (Preisser, 1989, p. 74).

En la revisión del ejercicio *14)* de la actividad 34 (véase el anexo U) el docente hará notar a los estudiantes que los primeros dos sistemas tienen en sus respectivas ecuaciones los mismos coeficientes y por tanto puede aplicarse el método de suma y resta sin complicaciones para determinar el valor de *x* y *y*, y que como en los últimos dos sistemas el coeficiente entre sus ecuaciones no es el mismo, primero se deben igualar entre sí dichos coeficientes de alguna de las incógnitas, a partir de la multiplicación o división de una de las ecuaciones, para después poder simplificar el sistema a través de una sola suma o resta y así encontrar el valor de *x* y el de *y* (Preisser, 1989, p. 74).

Con la actividad 35 (véase el anexo V) se reforzará el método de suma y resta en la resolución de un sistema de 2 x 2; así mismo, los estudiantes lograrán resolver sistemas en los que los coeficientes de cada una de las incógnitas no sean iguales y no sea múltiplo uno del otro; aunado a esto, los estudiantes deberán llegar a interpretar las igualdades obtenidas, con la aplicación de dicho método cuando resuelvan sistemas con ninguna o muchas soluciones (Preisser, 1989, p. 74).

Una vez resuelto el ejercicio *1)*, el docente deberá mencionar a los estudiantes que la estrategia que se acaban de utilizar se conoce como "el producto cruzado de coeficiente". Los ejercicios *2)* y *3)* deberán resolverse en equipo.

El docente deberá verificar que en el resumen los estudiantes describan tanto la estrategia de resolución del ejercicio *2)* como la regla general y las recomendaciones pertinentes para obtener ecuaciones equivalentes que contengan los coeficientes adecuados (Preisser, 1989, p. 76).

Al resolver los sistemas planteados en el ejercicio *3)*, los estudiantes se darán cuenta de que los tres son de diferente tipo, ya que el primero tiene una solución, el segundo muchas (i. e., una infinidad) y el último no tiene solución (Preisser, 1989, p. 76).

En la actividad, 36 (véase el anexo W), además de introducir el uso de literales en lugar de algunos términos numéricos, resolviendo el sistema formado, se planteará y resolverá, para casos particulares y en general, el problema inverso al que se formuló en la construcción de la caja (véase la actividad 33 en el anexo T). Finalmente, se mostrarán otras posibilidades de aplicación de los sistemas de ecuaciones (Preisser, 1989, p. 78). El inciso *4)* de la actividad 35 (véase el anexo V) permitirá el desarrollo de su mayor parte, ya que al inicio se retomarán los diversos sistemas propuestos por los estudiantes, a fin de dejar más claro que los distintos valores asignados tanto al ancho como al largo de la cartulina permiten formar una variedad de sistemas de ecuaciones que se representan en la forma (Preisser, 1989, p.78). Se observará que las fórmulas generales obtenidas en el inciso *1)* para x y y son un *modelo* o representación de diversas situaciones (Preisser, 1989, p. 79).

Después de que se determinen los valores de a y ℓ y se verifique el resultado (incisos *4)* y *5)* de la actividad 36; véase el anexo W), el docente comentará con el grupo que un problema que da lugar a un sistema de ecuaciones puede también formularse de manera inversa, convirtiendo las variables originales en datos de la nueva situación y los términos independientes en incógnitas. Esta situación, permite la creación de nuevos problemas, así como su análisis desde otro punto de vista (Preisser, 1989, p. 80).

El inciso *6)* de la actividad 36 (véase anexo W) servirá para obtener el método de sustitución y para que los estudiantes reflexionen sobre los algoritmos de resolución. No se especifica la manera en que deberán resolverse los tres sistemas, ya que se desea ver qué algoritmos de resolución utilizan los estudiantes (Preisser, 1989, p. 83).

El primer sistema propuesto,

$$\begin{cases} y = 1 \\ x - 3y = 5, \end{cases}$$

puede sugerir la forma de resolver los otros dos sistemas así como permitir la introducción del concepto de *solución de un sistema* (Preisser, 1989, p. 84).

Es posible que la mayoría de los estudiantes lo resuelvan sustituyendo directamente el valor de *y* en la segunda ecuación, ya que así se hacía en el método de suma y resta para obtener uno de los dos valores. Partiendo del método de suma y resta también se puede resolver este sistema, según se muestra a continuación (Preisser, 1989, p. 84).

$$\begin{cases} 3y = 3 \\ x - 3y = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3y = 3 \\ x - 0y = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 1 \\ x = 8 \end{cases}$$

El propósito de la actividad 37 (véase el anexo X) es examinar los métodos de sustitución e igualación a través de la estrategia general que se ha utilizado en actividades previas para resolver sistemas, que consisten en "Simplificar el sistema de 2 x 2 de tal manera que se obtenga una ecuación con una sola incógnita" (Preisser, 1989, p. 83).

También se espera que con la ayuda de algunos ejemplos los estudiantes identifiquen las bases del método de sustitución, además de que lo ubiquen como otra manera de manejar la estrategia general (Preisser, 1989, p. 83).

En el inciso *9)* de la actividad 37 se debe supervisar que los estudiantes no tengan dificultad o errores en la aplicación del método de sustitución; se puede comentar sobre qué incógnita y ecuación conviene elegir para el despeje, a fin de que los cálculos sean más sencillos (Preisser, 1989, p. 87).

En el inciso 10) de la actividad 37 (véase el anexo X) seguramente los estudiantes resolverán los sistemas por medio del método de igualación, ya que tanto la experiencia que obtuvieron de las actividades anteriores como los sistemas presentados les sirvieron de guía (Preisser, 1989, p. 88).

Los estudiantes tendrán que escribir la resolución de los sistemas en el pizarrón mientras el docente les hace preguntas y comentarios que permitan puntualizar el procedimiento de igualación. Esto también los ayudará a identificar este método como un caso más de la aplicación de la estrategia general (Preisser, 1989, p. 88).

En el tercer sistema se sugiere recordar a los estudiantes que la incógnita no siempre tiene que estar totalmente despejada para poder aplicar el método de igualación (Preisser, 1989, p. 88).

Finalmente es importante que se recuperen los comentarios y observaciones que surgieron en la resolución de los sistemas del inciso *10)*, con el fin de volver a resaltar el uso de la estrategia general y resumir el procedimiento de igualación para obtener una ecuación con una incógnita (Preisser, 1989, pp. 88-89).

Si es necesario, el docente puede plantear más ejemplos de sistemas similares y distintos a los vistos y también plantear algunas interrogantes para conseguir una síntesis más completa del procedimiento (Preisser, 1989, p. 89).

Análisis de materiales de ecuaciones lineales y de sistemas de ecuaciones lineales bajo la teoría de Duval

Los materiales que se recopilaron para el aprendizaje de ecuaciones lineales permiten abordar los conceptos de igualdad, ecuación, incógnita, ecuaciones equivalentes, solución y resolución de una ecuación, y algunos aspectos como símbolos, concatenación, reglas algebraicas y métodos de sustitución.

Para el aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales tratan algunos conceptos como variable, ecuación, incógnita, ecuaciones equivalentes, función, sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, su solución y resolución, simultaneidad, ecuaciones indeterminadas y su solución, sistemas equivalentes, sistemas compatibles e incompatibles, y sistemas determinados e indeterminados.

Estos materiales también toman en cuenta otros aspectos que giran en torno al tema sistemas de ecuaciones lineales: técnicas de resolución, combinación lineal de dos ecuaciones, simbolización, condiciones de un problema, estrategia general de resolución, construcción de sistemas equivalentes (método de suma y resta, y producto cruzado); análisis y modificación de problemas y de sistemas, resolución de sistemas a partir de los métodos de: suma y resta, sustitución, igualación y gráfico. Además, se trabaja la interpretación gráfica de los sistemas.

Los conceptos y aspectos de ambos temas se desarrollan a partir de actividades que implican el uso de métodos aritméticos, modelos físicos manipulables (balanza y fichero) y registros de representación semiótica.

Para que los estudiantes realicen la actividad conceptual con ecuaciones y sistemas de ecuaciones, además de que tengan distintos registros de representación semiótica (diversificación), deben lograr una coordinación mediante los tres criterios de congruencia; esto les permitirá distinguir entre lo representado y su representante (diferenciación) (Duval, 1999, p. 60).

Es necesario que el sujeto trabaje con los tres registros, porque “toda representación es cognitivamente parcial en relación con lo que ella representa

[ya] que las representaciones de registros diferentes no representan los mismos aspectos de un mismo contenido conceptual" (Duval, 1999, p. 67).

Cabe aclarar que en los análisis de los materiales de ecuaciones se observó la ausencia de actividades relacionadas con el plano cartesiano (registro gráfico), reduciéndose la posibilidad de una mayor diversificación de registros.

En cuanto al tema de sistemas de ecuaciones lineales, Alonso *et al*. (1993) y Socas *et al*. (1996) en sus actividades trabajan los registros algebraico y verbal. En la propuesta de Preisser (1989) se observa el trabajo en los tres registros de representación.

No basta con la diversificación de los registros, también es necesaria la coordinación entre ellos, lo cual implica el cumplimiento de tres criterios de congruencia: correspondencia semántica de los elementos significantes, univocidad semántica terminal y organización de las unidades significantes.

Es importante verificar la presencia de la coordinación entre los registros de representación semiótica que abordan todos los materiales (para ecuaciones y sistemas), lo cual conlleva a vigilar que se cumplan los tres criterios de congruencia.

La variedad de materiales que se plantean para ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales tienen el potencial para que el estudiante no confunda el representado con su representante (registros de representación semiótica y modelos manipulables).

Estas tres fases (coordinación, diversificación y diferenciación) son relativas a la *semiosis* y necesarias para que el sujeto pueda lograr la *noesis* de manera más asequible. Se entiende como *semiosis* a toda aquella aprehensión o producción de una representación semiótica, y como noesis a los actos cognitivos (como la aprehensión conceptual de un objeto, la discriminación de una diferencia o la comprensión de una inferencia) (Duval, 1999, p. 14).

Además de que el estudiante transite por las tres fases anteriores, debe pasar por tres actividades cognitivas fundamentales de la representación ligadas a la semiosis: formación, tratamiento y conversión.

Podemos decir que "[f]ormar una representación semiótica es recurrir a un(os) signo(s) para actualizar o para sustituir la visión de un objeto […], los signos utilizados pertenecen a un sistema semiótico ya constituido y ya utilizado por otros" (Duval, 1999, p. 41), lo cual implica "una selección en el conjunto de los caracteres y de las determinaciones que constituyen lo que se «quiere» representar" (Duval, 1999, p. 40).

En los materiales recabados para ecuaciones lineales –Pinzón (1997), Cedillo *et al*. (2006a), Alonso *et al*. (1993) y Socas *et al*. (1996)– se proponen actividades que implican la formación de ecuaciones lineales; sin embargo, ninguno de éstos contiene actividades que traten de la formación de enunciados que conlleven a ecuaciones lineales.

En las actividades para sistemas de ecuaciones de Alonso *et al*. (1993) y Socas *et al*. (1996) sólo se trabaja la formación en el registro algebraico a causa de que son introductorias al tema. La propuesta de Preisser (1989) plantea diversas actividades que permiten la formación en los registros verbal y algebraico.

El *tratamiento* "es una transformación que se efectúa en el interior de un mismo registro, aquel en que se utilizan las reglas de funcionamiento: un tratamiento, pues, no moviliza más que un solo registro de representación" (Duval, 1999, p. 31); tal transformación produce otra u otras representaciones en el mismo registro; es decir, corresponde a su expansión informacional (Duval, 1999, p. 43). Esta diversificación de representaciones ayuda al sujeto a no confundir al objeto con su representación y viceversa.

En los materiales que se encontraron para ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales se observa un tratamiento exhaustivo al interior del registro algebraico con diversas representaciones, lo cual permite que el estudiante no confunda a la ecuación y sistemas de ecuaciones con sus respectivas representaciones y viceversa. Es preciso señalar que a diferencia de las ecuaciones, en los sistemas está presente el tratamiento del registro verbal y gráfico (Preisser, 1989).

La *conversión* es “una transformación que hace pasar de un registro a otro; requiere pues su coordinación por parte del sujeto que la efectúa” (Duval, 1999, p. 31); dicha transformación es externa, puesto que genera una representación en un registro diferente al de la representación inicial.

Algunas de las actividades que se abordan para ambos temas pretenden lograr la conversión de distintos registros; sin embargo, es necesario tener presente que la ejecución de tareas y ejercicios de conversión no suelen favorecer la coordinación de los registros, ya que “la actividad de conversión presupone la discriminación de unidades significantes que se deben poner en correspondencia en el registro de partida y en el de llegada” (Duval, 1999, p. 73). Por ello es indispensable que en los materiales se lleve a cabo dicha discriminación en la conversión de los pasajes de registros.

Los materiales dirigidos al tema de ecuaciones tratan de promover la conversión del registro verbal al algebraico. Las actividades de sistemas propuestos por Alonso *et al*. (1993) y Socas *et al*. (1996) pretenden lograr la conversión del registro verbal al algebraico. En los materiales de Preisser (1989), además del pasaje anterior, se realiza del algebraico al verbal y pasajes entre los tres registros: verbal-algebraico-gráfico y algebraico-verbal-gráfico.

Es importante mencionar que aunque en ambos temas se realizan distintos pasajes de conversión, se identificó que en las actividades no existe alguna estructura que ayude al estudiante a discriminar las unidades significantes para hacer una correspondencia entre el registro de salida y el de llegada.

Para finalizar este capítulo, se incluye el cuadro 4.4. En éste se indican los principales conceptos y cuestiones relacionados con los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas de esta propuesta, así como los anexos en los que están las actividades correspondientes

Cuadro 4.4. Conceptos y cuestiones relacionados con el aprendizaje de la resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Conceptos y cuestiones	Anexos
Conceptos de ecuación, igualdad e incógnita	A1, B1, C1, C2, D, E1, E2 e I
Concepto de solución	D
Concatenación, símbolos y reglas algebraicas	E1 y E2
Relación de una operación y su inversa	B1
Concepto de ecuaciones equivalentes	F1, G1, H1 y S
Ecuaciones con paréntesis	J1
Concepto de ecuación indeterminada y su solución	K1 y R
Concepto de simultaneidad	K1, R y T
Concepto de sistemas de ecuaciones y su solución	K1 y R
Combinación lineal de dos ecuaciones	L
Concepto de función	P
Método de sustitución	M1, N1, Q y X
Método de igualación	P, Q y X
Método gráfico	R, S, T y U
Conceptos de sistemas compatibles, incompatibles, determinados e indeterminados	S
Concepto de sistemas equivalentes	T y U
Método de suma y resta	U, V y W
Producto cruzado de coeficientes	V

CAPÍTULO V

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Conclusiones

De acuerdo con el análisis de los materiales y su resolución, éstos pueden subsanar o evitar algunas dificultades en sistemas de ecuaciones lineales, ecuaciones y álgebra en general, como se muestra en el cuadro 5.1.

Cuadro 5.1

Sistemas de ecuaciones lineales	Ecuaciones	Álgebra
Concepto de igualdad	Concepto de igualdad	Concepto de igualdad
Concepto de sistemas de ecuaciones lineales	Concepto de ecuación	Convenios de notación: concatenación, uso de paréntesis y orden en que se efectúan las operaciones

(continúa)

Cuadro 5.1 (concluye)

Sistemas de ecuaciones lineales	Ecuaciones	Álgebra
Articulación entre el sistema y su conjunto solución	Articulación entre la ecuación y su conjunto solución	Observación de la relación entre los símbolos con los que se representan
Pasajes de registros	Convenios de notación: concatenación, uso de paréntesis y orden en que se efectúan las operaciones	Uso y significado de letras
Representación y resolución gráfica	Expresión formal de métodos y procedimientos que usan los estudiantes para resolver problemas	Concepto de variable
Dificultad para sostener toda la información		Reconocimiento del objetivo de la actividad así como de la naturaleza de las respuestas en álgebra

Sin embargo, quedan pendientes algunas actividades que ayuden a contrarrestar o evitar las diversas dificultades que los estudiantes presentan con el signo menos: aplicación de la operación inversa de la sustracción, reconocimiento de las propiedades que corresponden a la sustracción y distinción entre el menos de la operación y el asignado a un coeficiente.

El análisis de los materiales y su resolución también pueden desarrollar las siguientes habilidades (SEP, 2006):

- Resolver problemas que conlleven la formulación y resolución de ecuaciones con una incógnita, utilizando las propiedades de la igualdad con números enteros positivos.
- Analizar dos cantidades relacionadas y las representen mediante una tabulación y una ecuación con dos variables, asociando el significado de cada una con las cantidades que intervienen en dicha relación.
- Utilizar la jerarquía de las operaciones y los paréntesis en la resolución de cálculos numéricos en ecuaciones o al operar con expresiones algebraicas.
- Simbolizar con algunas letras los valores desconocidos de un problema y utilizarlas para formular y resolver un sistema de ecuaciones con coeficientes enteros.
- Representar en un plano cartesiano un sistema de ecuaciones lineales con coeficientes enteros e interpretar el punto en común de ambas rectas como solución del sistema, así como diferenciar cuándo un sistema tiene o no solución.

Además, los materiales analizados se complementan, ya que cada uno aborda de manera diferente registros de representación.

Recomendaciones

Para enriquecer el trabajo con los registros de representación pueden ser útiles otros materiales didácticos propuestos en diversas publicaciones educativas. Entre ellos señalamos los siguientes.

- "El uso de la calculadora graficadora y la resolución de problemas algebraico-verbales en el estudio de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas" (Ramírez, 1997). Dicha investigación asegura que la calculadora es una herramienta de apoyo para resolver sistemas de ecuaciones lineales de forma gráfica; no obstante, también en sus actividades plantea las representaciones verbal y algebraica, de manera que relacionan estas tres.

  Es preciso señalar que esta propuesta no se incluyó en nuestra investigación, ya que no abordamos actividades con el uso de la tecnología; sin embargo, sería interesante que los estudiantes las experimentaran.
- En "Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica" (Segura, 1999) se recomiendan actividades para el trabajo y pasaje de los tres registros de representación semiótica, a fin de facilitar la comprensión y la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. No se integran las actividades de este trabajo porque no encontramos su secuencia, sólo encontramos su reporte de investigación.
- Los libros de texto para secundaria (SEP, 2009) y otros como el de Baldor (2000) pueden utilizarse para ampliar el trabajo con sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. En esta propuesta no se incluyeron éstos, ya que

consideramos suficiente el trabajo con los métodos formales que se plantean en los materiales seleccionados.

Con base en los resultados y recomendaciones que incluyen los materiales, y también tomando en cuenta las vivencias obtenidas en la resolución de todas las actividades, hacemos las siguientes sugerencias:

- Antes de trabajar algún método formal de resolución de sistemas de ecuaciones lineales deben realizarse actividades que permitan resoluciones aritméticas y el uso de modelos (manipulables y no manipulables), ya que facilitan la comprensión de algunas reglas algebraicas y de conceptos inherentes al tema.
- Se realice una serie de tratamientos, formaciones y conversiones en los registros de representación semiótica para evitar o subsanar dificultades y errores que los estudiantes presentan en el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales.
- Se trabaje con actividades que incluyan los tres registros de representación (verbal, algebraico y gráfico) y su vinculación, ya que cada uno de ellos permite apreciar y comprender diferentes aspectos de los sistemas de ecuaciones lineales.

Referencias bibliográficas

Alonso F, C. Barbero, I. Fuentes, A. Azcárate, J. Dozagarat, S. Gutiérrez, M. Ortiz, V. Rivire y C. Veiga. (1993). *Ideas y actividades para enseñar algebra*. Madrid: Síntesis.

Baldor, A. (2000). *Álgebra*. México: Publicaciones Cultural.

Briseño, L. y J. Verdugo. (1997). *Matemáticas 3*. México: Santillana.

Bouvier, A. y M. George. (2000). *Diccionario de Matemáticas*. Madrid: Akal.

Buendía, E. y S. Moreno. (2006). *La llave del éxito en matemáticas 2*. México: Libudí.

Cedillo, T., V. Cruz, E. Vega y R. Cambray. (2006a) *Álgebra. Ecuaciones de primer grado* [Módulo 6 de la serie "Enseñanza de las matemáticas"]. México: SEP/UPN/ILCE/BID.

Cedillo, T., V. Cruz, E. Vega y R. Cambray. (2006b) *Álgebra. Lectura y construcción de graficas cartesianas* [Módulo 7 de la serie "Enseñanza de las matemáticas"]. México: SEP/UPN/ILCE/BID.

De Bary, C. (1978). *Las matemáticas*. Madrid: Mensajero Bilbao.

De Galiana, T. (1998). *Diccionario ilustrado de las ciencias, tomo I*. México: Larousse.

Demana, F., Waits, B. (1990). Enhancing mathematics teaching and learning through technology. *Teaching and Learning Mathematics in the 1990s,* pp. 212-222. (Citado en: Ramírez, 1997)

Desclés, J. P. (1990). *Langages applicatifs, langues naturelles et cognition*. Paris: Hermés. (Citado en: Duval, 1999)

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Santiago de cali: Peter Lang.

Freudenthal, H. (1985). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Reidle, Dordrecht, Holanda. (Citado en: Pinzón, 1997)

Guía de Estudio resuelta para preparar el examen de selección para ingresar al nivel superior, Licenciatura. (2003). México: (s/ed.)

Kieran, C. (1980). "The interpretation of the equal sign: Symbol for an equivalence relation vs an operator symbol", en: R. Karplus (comp.), *Proceedings of the Psychology of Mathematics Education,* University of California, Berkley, vol. 1, pp. 163-169. (Citado en: Kieran y Filloy, 1989)

Kieran, C. (1982). *The learning of algebra: A teaching experiment.* Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Nueva York (ERIC Document Reproduction Service, No. ED 216 884). (Citado en: Pinzón, 1997)

Kieran, C. (1983). Relationships between novices´ views of algebraic letters and their use of symmetric and asymmetric equation-solving procedures, en: J. C. Bergeron y N. Herscovics (eds.), *Proceedings of the Fifth Annual Meeting of PME-NA,* Vol. 1, pp. 161-168. Montréal: Université de Montréal. (Citado en: Kieran y Filloy, 1989)

Kieran, C. y E, Filloy. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias 7(3)*, pp. 229-240.

Lehmann, C. H. (1979). *Algebra*. México: Limusa.

López, S. (1992). *Modelos matemáticos*. México: Trillas. (Citado en: Pinzón, 1997)

Martínez, A. (1994). Funciones y graficadores: Resultados, experiencias y preguntas. *Perspectivas en educación matemática*, pp. 97-108. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN. México. (Citado en: Ramírez, 1997)

Matz, M. (1982). *Towards computational theory of algebraic competence intelligent tutoring systems.* Academic Press, Massachusetts Institute of Technology. (Citado en: Pinzón, 1997)

Panizza, M., P. Sadovsky y C. Sessa. (1995). Los primeros aprendizajes algebraicos. Comunicación. *Revista de Educación Matemática*, pp. 95-96. (Citado en: Segura, 2004)

Panizza, M., P. Sadovsky y C. Sessa. (1999). La ecuación lineal con dos variables: Entre la unicidad y el infinito. *Enseñanza de las Ciencias 17(3)*, pp. 453-61.

Pérez, L. (1998). *Pasaje de registros: Ecuaciones.* Universidad Católica de Valparaíso, Chile. [Tesis de maestría inédita] (Citado en: Segura, 2004)

Pinzon, I. (1997). *El tablero con fichas, un modelo de enseñanza para la resolución de ecuaciones lineales. Un estudio con alumnos de secundaria*. México: CINVESTAV-IPN. [Tesis de maestría inédita]

Preisser, Ma. del R. (1989). Sistemas de ecuaciones lineales: Una propuesta didáctica para el bachillerato. *Revista del seminario de enseñanza y titulación num. E. 29*. México: CCH-UNAM.

Ramírez, M. (1997). *El uso de la calculadora gráficadora y la resolución de problemas algebraicos-verbales, en el estudio de sistemas de* *ecuaciones lineales con dos incógnitas*. [Tesis de maestría inédita. México: CINVESTAV-IPN.

Rojano, T. (1985). *De la aritmética al álgebra (estudio clínico con niños de 12 a 13 años de edad).* México: Cinvestav- IPN. [Tesis de doctorado] (Citado en: Pinzón, 1997)

Santamaría, C. (1999).*Diccionario de matemáticas de primaria y secundaria*. Madrid: Escuela Española.

Segura, S. (2004). Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 7(1)*, pp. 49-78.

SEP [Secretaría de Educación Pública]. (2006). *Plan y programas de estudio. Educación básica. Secundaria*. México: SEP.

Sessa, C. (1998). *Los efectos de un tratamiento aritmético de los sistemas de ecuaciones lineales. Análisis de un caso en un libro de texto.* Buenos Aires, Argentina: Universidad de Buenos Aires. (Citado en: Segura, 2004)

Socas M., M. Camacho, M. Palarea y J. Hernández. (1989). *Iniciación al álgebra*. Colección Matemáticas: Cultura y aprendizaje. Madrid: Síntesis. (Citado en: Pinzón, 1997)

Socas M., M. Camacho, M. Palarea y J. Hernández. (1996). *Iniciación al algebra*. México: Síntesis.

Tutor Interactivo Plus. (s/a). *Enciclopedia general para la enseñanza*, vol. 2. Barcelona: Océano.

Vygotsky, L. (1995). *Pensamiento y lenguaje*. Barcelona: Paidós.

Anexo A1. Balanzas (propuesta)

Actividad 1

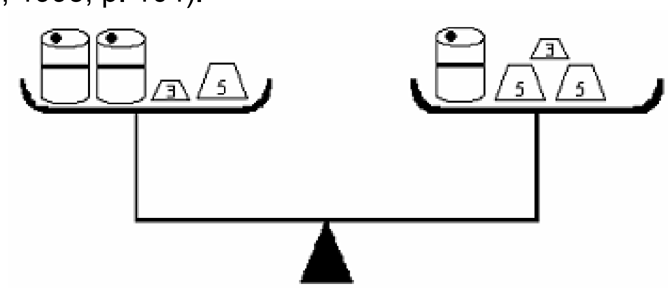
Material:

- Una balanza de dos platillos
- 4 pesas de 3 kg
- 6 pesas de 5 kg
- 4 pesas de 4 kg
- 6 botes o embases que pesen 5 kg cada uno. Cabe aclarar que el peso de los botes no debe ser visible (Alonso *et al*., 1993, p. 104). (Modificado)

Desarrollo de la actividad

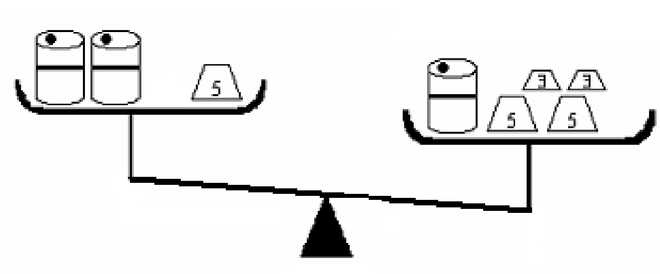
Para un mejor desarrollo de la actividad el docente tendrá que organizar al grupo en equipos según el número de integrantes. Ya organizado el grupo, se colocará la balanza con las pesas y los botes en un lugar visible.

La balanza deberá estar en equilibrio, como se muestra a continuación (Alonso *et al*., 1993, p. 104).

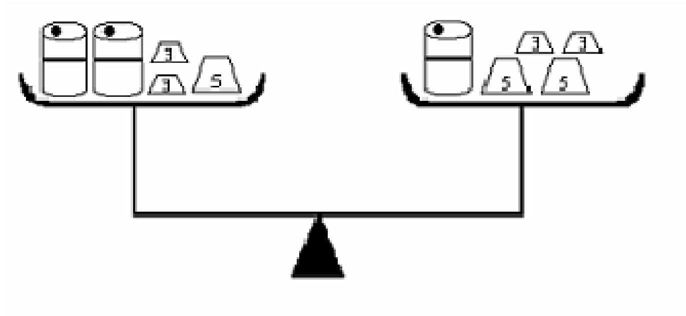


Una vez que el docente hace hincapié en que la balanza está en equilibrio, les plantea a los estudiantes las siguientes preguntas, dando tiempo considerable para que respondan; después de cada pregunta un integrante de algún equipo pasará a realizar la acción correspondiente para corroborar ante el grupo si la balanza se mantiene o no en equilibrio.

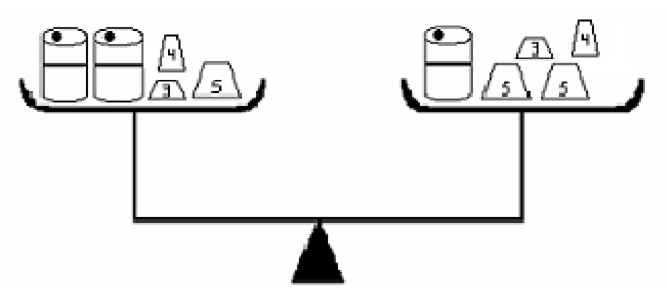
1) Si se pasan 3 kg del platillo izquierdo al platillo derecho, ¿la balanza sigue en equilibrio? (Alonso *et al*., 1993, p. 104)
Respuesta: No.



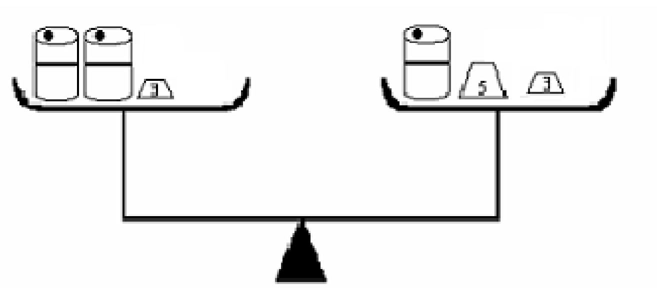
2) Ahora que la balanza está en desequilibrio, ¿cómo la pondrías en equilibrio sin mover las pesas de 3 kg? (Nuevo)
Respuesta: Agregar 2 pesas de 3 kg al platillo izquierdo.



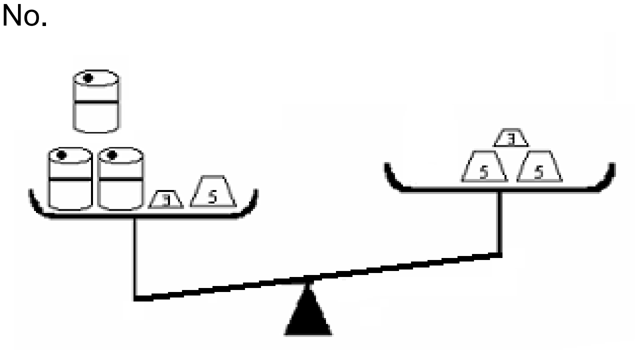
3) Partiendo de la primera balanza, ¿qué sucede si se añaden 4 kg a cada platillo? (Alonso *et al*., 1993, p. 104)
Respuesta: La balanza sigue en equilibrio.



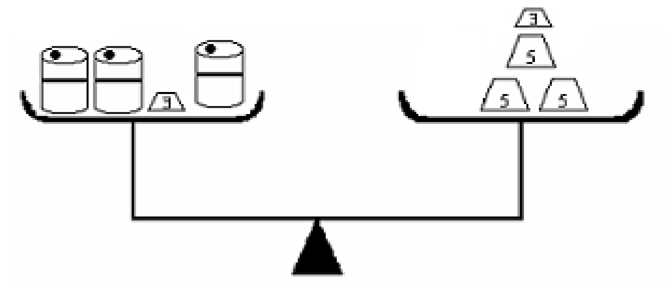
4) Teniendo nuevamente la balanza inicial, ¿qué sucede si se quitan 5 kg de cada platillo? (Alonso *et al*., 1993, p. 104)
Respuesta: La balanza sigue en equilibrio.



5) Y si pasamos en la balanza inicial un bote del platillo derecho al platillo izquierdo, ¿la balanza está o no en equilibrio? (Alonso *et al*., 1993, p. 104)
Respuesta: No.

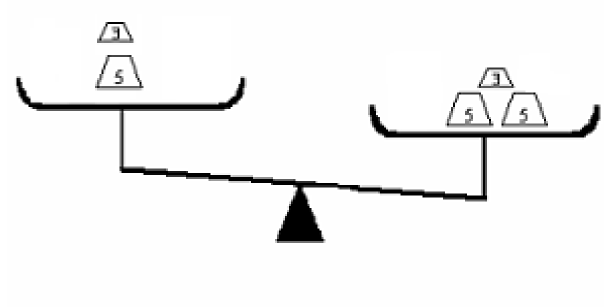


6) ¿Cómo volverías a poner en equilibrio la balanza sin mover los botes? (Nuevo) Respuesta: Mover una pesa de 5 kg del platillo izquierdo al platillo derecho, ya que 1 bote es igual a una pesa de 5 kg.

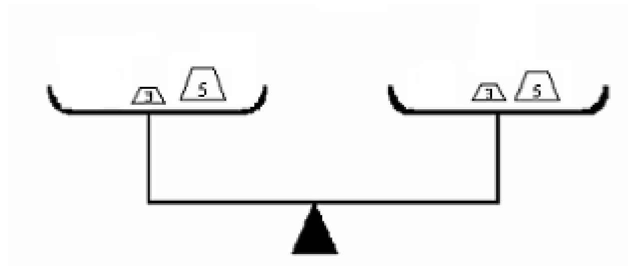


7) Al hacer la inferencia (un bote es igual a una pesa de 5 kg), ¿qué otras posibles respuestas darías? (Nuevo)
Respuesta:
- Quitar dos botes al platillo izquierdo.
- Quitar una pesa y un bote del platillo izquierdo.
- Meter dos botes al platillo derecho.
- Meter dos pesas de 5 kg al platillo derecho.
- Meter un bote y una pesa de 5 kg al platillo derecho.
- Regresar el bote al platillo derecho.

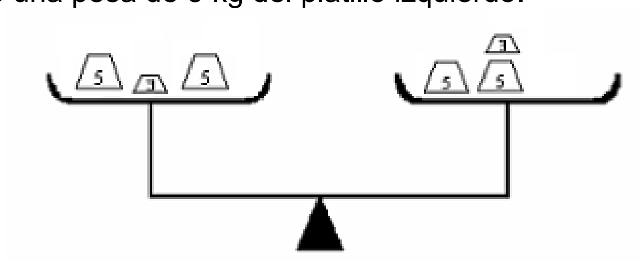
8) Si quitas dos botes del platillo izquierdo y un bote del platillo derecho, ¿qué pasa con la balanza inicial? (Alonso *et al*., 1993, p. 104)
Respuesta: Pierde el equilibrio.



9) ¿Cómo pondrías de nuevo en equilibrio la balanza sin poner de nuevo los botes? (Nuevo)
Respuesta:
- Quitando una pesa de 5 kg del platillo derecho.

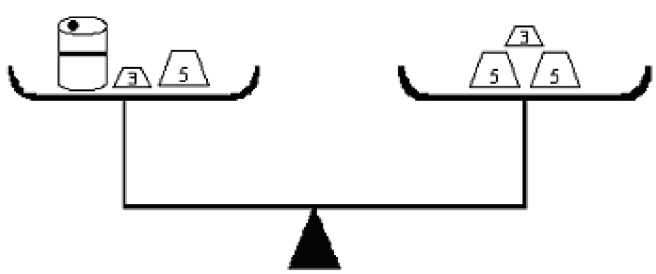


- Agregando una pesa de 5 kg del platillo izquierdo.



10) ¿Qué sucede si se quita un bote de la balanza inicial en cada platillo? (Alonso *et al*., 1993, p. 104)

Respuesta: La balanza está equilibrada.



11) Estructuren enunciados que mantengan en equilibrio la balanza inicial. (Nuevo)

Respuesta:

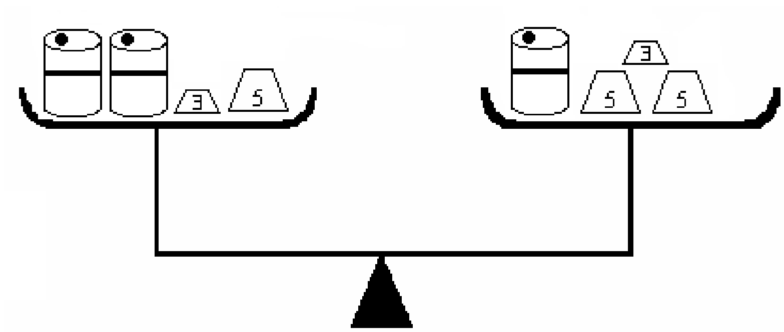
La balanza está en equilibrio si

- se quita un bote de cada platillo.
- se quita un bote del platillo izquierdo y una pesa de 5 kg del platillo derecho.
- se quitan dos botes del platillo izquierdo y un bote más una pesa de 5 kg del platillo derecho.
- se quitan dos botes del platillo izquierdo y dos pesas de 5 kg del platillo derecho, etcétera.

Anexo A2. Balanzas

"La balanza está en equilibrio.
¿Cuál de las siguientes acciones la mantendría en equilibrio?

a) Pasar 3 kg del platillo izquierdo al platillo derecho.
b) Añadir 4 kg a cada platillo.
c) Quitar 5 kg de cada platillo.
d) Pasar un bote del platillo derecho al platillo izquierdo.
e) Quitar dos botes del platillo izquierdo y un bote del derecho.
f) Quitar un bote de cada platillo." (Alonso *et al*., 1993, p. 104)

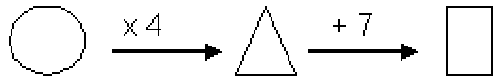


Anexo B1. Cadenas y caminos (propuesta)

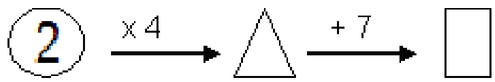
Cadenas

Actividad 2

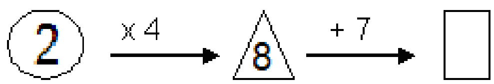
1) Piensa un número y realiza las operaciones indicadas a continuación (Alonso *et al*., 1993, p. 96).



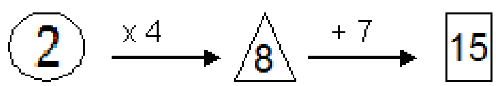
Escribe el número pensado en el círculo (Alonso *et al*., 1993, p. 96)
Respuesta:



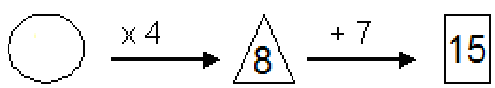
Escribe el resultado parcial, en el triángulo (Alonso *et al*., 1993, p. 96).
Respuesta:

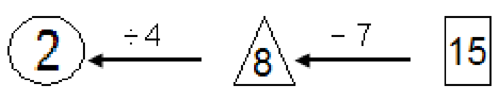


Escribe el resultado final, en el rectángulo (Alonso *et al*., 1993, p. 96).
Respuesta:



2) Muestra el esquema a tu compañero, tapando el número pensado para que él haga otra cadena que, partiendo del número final, le lleve a acertar el número pensado por ti (Alonso *et al*., 1993, p. 97).





Actividad 3
El docente debe formar equipos de tres personas. En cada uno de los equipos, un alumno piensa un número entero positivo, lo duplica y le suma 5 unidades, pasando el resultado a otro alumno de su grupo, quien multiplicará por 5 el número entregado, pasando su resultado al tercero. Finalmente, éste le añade al resultado un nuevo número entero positivo y el resultado final lo comunica al docente para que adivine el número correspondiente de cada equipo. (Puig 1960; citado en Alonso *et al*., 1993)
Respuesta:
- Alumno A: 2 x 2 = 4 + 5 = 9.
- Alumno B: 9 x 5 = 45.
- Alumno C: 45 + 1 = 46.
- Docente:
  Si el número final es 46, el inicial es 2.

Una vez que el docente descubra el número desconocido de cada equipo les pedirá que descubran y escriban el "truco" que hace posible adivinar el número (Puig 1960; citado en Alonso *et al*., 1993)

Respuesta:
Se puede saber el número pensado con la técnica de retroceso; es decir, realizando las operaciones a la inversa. Al resultado final se le quitan las unidades necesarias para que termine en 5; por decir, a 46 le quito 1 y obtengo 45; en este caso 45 se divide entre 5 y al número obtenido se le restan 5 unidades, y finalmente se divide este resultado entre 2 para obtener el número inicial. Esto aplica para cualquier número entero positivo que se haya pensado, lo cual se puede observar en la siguiente tabla.

Número pensado	Número duplicado	Súmale 5	Multiplícalo por 5	Súmale Otro número	Resultado final
1	2	7	3**5**	2	37
2	4	9	4**5**	1	46
3	6	11	5**5**	3	58
3	6	11	5**5**	2	57
3	6	11	5**5**	1	56
4	8	13	6**5**	1	66
5	10	15	7**5**	8	83

Actividad 4 (Alonso *et al*., 1993, p. 153)
1) Elige un número.
   Respuesta: 7
2) Multiplícalo por 2.
   Respuesta: 7 x 2 = 14
3) Suma 5 unidades al resultado.
   Respuesta: 14 + 5 = 19
4) Multiplica lo que has obtenido por 5.
   Respuesta: 19 x 5 = 95
5) Suma 10 unidades al resultado.
   Respuesta: 95 + 10 = 105

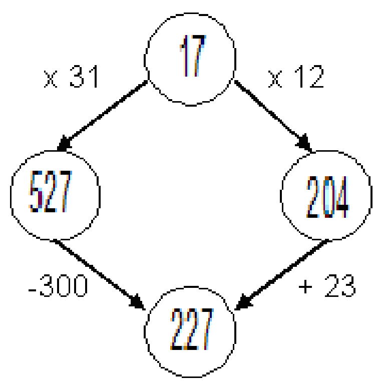
6) Multiplica el resultado por 10.
Respuesta: 105 x 10 = 1050
7) Dime lo que te sale y te diré, rápidamente, tu número inicial.
Para obtener el número inicial se opera de manera similar al ejemplo 2.

Caminos
Actividad 5

«Este es el juego de los caminos. Si deseas colocar un número en la “salida” *S* y sigues las flechas haciendo las operaciones que indican, obtendrás un número que puedes escribir en la “meta” *M*. Este resultado será distinto según el camino que elijas. Pero hay un número que, puesto en *S*, dará, por cualquiera de los dos caminos, el mismo resultado en *M*. ¿Cuál es? Coloca en la tabla tus ensayos.» (Alonso *et al*., 1993, p. 97)
Respuesta:

S	*M*	
	x 12 + 23	x 31 – 300
11	155	41
12	167	72
13	179	103
14	191	134
15	203	165
16	215	196
17	227	227
18	239	258
19	251	289
20	263	320

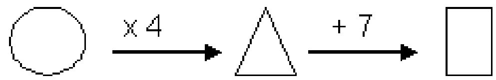
De acuerdo con la tabla anterior, el número buscado es 17.



Anexo B2. Cadenas y caminos

Cadenas

1.- «Piensa un número y haz las operaciones siguientes:



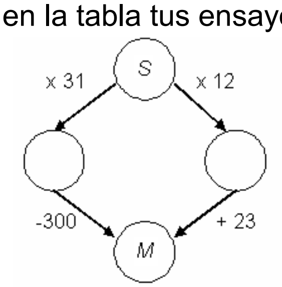
Escribe: El número pensado, en el círculo.
El resultado parcial, en el triángulo.
El resultado final, en el rectángulo.

Enséñaselo a tu compañero, tapando el número pensado, para que él haga otra cadena que, partiendo del número final, le lleve a aceptar el número pensado, por ti.» (Alonso *et al*., 1993, pp. 96-97)

2.- «Agrupo a los niños de tres en tres. En cada grupo, un alumno piensa un número dígito, lo duplica y le añade 5 unidades, pasando el resultado a otro alumno de su grupo. Este multiplica por 5 el número entregado y pasa el resultado al tercero. Finalmente, ése le añade al resultado un nuevo dígito pensado por él y me comunica el resultado final. Con el resultado de cada grupo "adivino" los correspondientes números de cada grupo […]» (Puig, 1960; citado en: Alonso *et al*., 1993, p. 97)

Caminos

«Este es el juego de los caminos. Si deseas colocar un número en la "salida" *S* y sigues las flechas haciendo las operaciones que indican, obtendrás un número que puedes escribir en la "meta" *M*. Este resultado será distinto según el camino que elijas. Pero hay un número que, puesto en *S*, daría, por cualquiera de los dos caminos, el mismo resultado en *M*.
¿Cuál es?
Coloca en la tabla tus ensayos.»



S	*M*	
	1C	*2C*

Anexo C1. Resolución de ecuaciones a partir de conocimientos aritméticos (propuesta)

Actividad 6

"Una compañía telefónica ofrece teléfonos celulares que operan con tarjetas de diferentes precios, y cobra $6.00 por minuto (o fracción)" (Cedillo *et al*., 2006a p. 36).

Aunado al enunciado, se les plantea la siguiente situación para que contesten una serie de preguntas.

Si adquieres un teléfono celular de dicha compañía con una tarjeta de $200 que te da un crédito de $300: (Cedillo *et al*., 2006a, p. 36)

1) ¿Cuántos minutos puedes hablar con este crédito? (Cedillo *et al*., 2006a, p. 36) Respuesta:

$$300 \div 6 = 50$$

Con 300 pesos de crédito puedo hablar 50 minutos

2) ¿Cuánto gastas de tu crédito de $300 si realizas una llamada de 5 minutos? (Cedillo *et al*., 2006a p. 36)
Respuesta:

$$5 \times 6 = 30$$

Se gastan 30 pesos por 5 minutos.

3) ¿Cuánto gastas de tu crédito de $300 si realizas una llamada de 17 minutos? (Cedillo *et al*., 2006a, p. 36)
Respuesta:

$$17 \times 6 = 102$$

Se gastan 102 pesos por 17 minutos.

4) Si tu crédito es de $120, ¿cuántos minutos has usado de tu crédito de $300? (Cedillo *et al*., 2006a, p. 36)
Respuesta:

$$300 - 120 = 180$$
$$180 \div 6 = 30$$

Se utilizaron 30 minutos.

Las siguientes preguntas serán resueltas en equipo.

5) Elabora una fórmula que te permita establecer cuánto gastaste de tu crédito en una llamada si conoces el número de minutos que hablaste (Cedillo *et al*., 2006a, p. 37). Recuerda especificar lo que significan las letras que utilices. (Nuevo)
Respuesta:
x: costo de la llamada
n: minutos utilizados

$$x = 6n$$

6) Rescribe la fórmula que obtuviste en el inciso 5), considerando que el gasto por la llamada fue de: (Cedillo *et al*., 2006a, p. 37)
a) $150

Respuesta:

$$x = 6n$$
$$150 = 6n$$
$$\frac{150}{6} = \frac{6n}{6}$$
$$25 = n.$$

Con \$150 pesos puedo hablar 25 minutos.

b) \$240

Respuesta:

$$x = 6n$$
$$240 = 6n$$
$$\frac{240}{6} = \frac{6n}{6}$$
$$40 = n.$$

Con \$240 pesos puedo hablar 40 minutos.

7) Completa la siguiente tabla y escribe las operaciones que realizaste (Cedillo *et al*., 2006a, p. 37). (Modificado)

Respuesta:

Minutos hablados	Crédito que queda de los 300 pesos
5	270
10	240
17	198
40	60
45	30

Primera fila (lado derecho):

$5 \times 6 = 30$

$300 - 30 = 270$

Segunda fila (lado derecho):

$10 \times 6 = 60$

$300 - 60 = 240$

Tercera fila (lado derecho):

$17 \times 6 = 102$

$300 - 102 = 198$

Cuarta fila (lado izquierdo):

$$\frac{300-60}{6} = 40$$

Quinta fila (lado izquierdo):

$$\frac{300-30}{6} = 45$$

8) Elabora una fórmula que te permita establecer cuánto crédito te queda de los \$300, si conoces el número de minutos que hablaste (Cedillo *et al*., 2006a, p. 37). Determina lo que significa cada letra que utilices. (Nuevo)

Respuesta:
n : minutos gastados
y : crédito restante

$$300 - 6n = y$$

9) Rescribe la formula que elaboraste en el inciso 8), considerando que el crédito que te queda de $300 es de: (Cedillo *et al*., 2006a, p. 37)
a) $30
Respuesta:

$$\begin{aligned} 300 - 6n &= y \\ 300 - 6n &= 30 \\ 300 - 30 &= 6n \\ 270 &= 6n \\ \frac{270}{6} &= n \\ 45 &= n. \end{aligned}$$

b) $252
Respuesta:

$$\begin{aligned} 300 - 6n &= y \\ 300 - 6n &= 252 \\ 300 - 252 &= 6n \\ 48 &= 6n \\ \frac{48}{6} &= n \\ 8 &= n. \end{aligned}$$

Anexo C2 (continuación de la actividad 6)

Utiliza la fórmula que elaboraste en el inciso *5)* para responder las siguientes preguntas (Cedillo *et al*., 2006a, p. 38).

10) ¿Cuánto tiempo hablaste si la llamada tuvo un costo de \$45? (Cedillo *et al*., 2006a, p. 38)

Respuesta: $x = 6n$

$$45 = 6n$$
$$\frac{45}{6} = n$$
$$7.5 = n.$$

11) ¿Cuánto tiempo hablaste si el costo de la llamada fue de \$69? (Cedillo *et al*., 2006a, p. 38)

Respuesta: $x = 6n$

$$69 = 6n$$
$$\frac{69}{6} = n$$
$$11.5 = n.$$

12) ¿Cuánto tiempo hablaste si el costo de la llamada fue de \$31.50? (Cedillo *et al*., 2006a, p. 38)

Respuesta: $x = 6n$

$$31.5 = 6n$$
$$\frac{31.5}{6} = n$$
$$5.25 = n.$$

Utiliza la fórmula que elaboraste en el inciso *8)*, para contestar las siguientes preguntas (Cedillo *et al*., 2006a, p. 38).

13) ¿Cuántos minutos hablé si mi crédito de \$300 ahora bajó a \$243? (Cedillo *et al*., 2006a, p. 38)

Respuesta: $300 - 6n = y$

$$300 - 6n = 243$$
$$300 - 243 = 6n$$
$$57 = 6n$$
$$\frac{57}{6} = n$$
$$9.5 = n.$$

14) ¿Cuántos minutos hablé si mi crédito de \$300 ahora bajó a \$165? (Cedillo *et al*., 2006a, p. 38)

Respuesta: $300 - 6n = y$

$$300 - 6n = 165$$
$$300 - 165 = 6n$$
$$135 = 6n$$

$$\frac{135}{6} = n$$
$$22.5 = n.$$

15) ¿Cuántos minutos hablé si mi crédito de \$300 ahora bajó a \$7.50? (Cedillo *et al*., 2006a, p. 38)

Respuesta: $300 - 6n = y$

$$300 - 6n = 7.5$$
$$300 - 7.5 = 6n$$
$$292.5 = 6n$$
$$\frac{292.5}{6} = n$$
$$48.75 = n.$$

16) Construyan en equipo un problema que origine la ecuación $4.5x + 30 = 156$ para que posteriormente lo expongan (Cedillo *et al*., 2006a, p. 38).

Respuesta:

Si multiplico mi edad por 4.5 y si le sumo tu edad da como resultado 156 años en total.

Actividad 7

1) Determina el número que hace falta (Alonso *et al*., 1993, p. 98). (Modificado)

Respuesta:

$5 \cdot \boxed{\mathbf{9}} + 10 = 55$

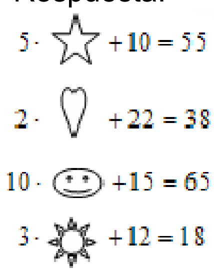
$2 \cdot \boxed{\mathbf{8}} + 22 = 38$

$10 \cdot \boxed{\mathbf{5}} + 15 = 65$

$3 \cdot \boxed{\mathbf{2}} + 12 = 18$

2) Si tuvieras que poner algún símbolo para representar el número desconocido, ¿qué utilizarías? (Nuevo)

Respuesta:



3) Sin resolver, determina cuáles de las siguientes igualdades tienen o no solución. (Nuevo)

Respuesta:

$6x + 14 = 6x + 10$ (No)

$8 \cdot 10 - q = 10 \cdot q$ (Sí)

$6 \cdot 14 + z = 62 - 8$ (Sí)

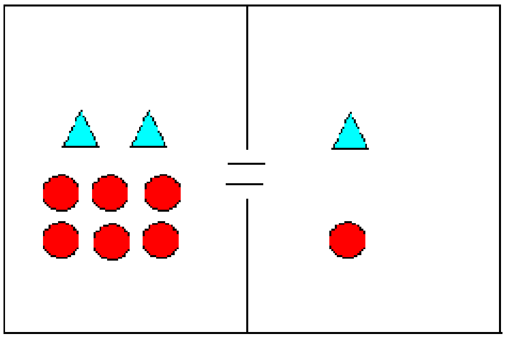
$w + 9 - 2 = w + 12$ (No).

Anexo E1. Tablero con fichas (propuesta)

Actividad 8

1) Representa la ecuación $2x-6=x-1$.

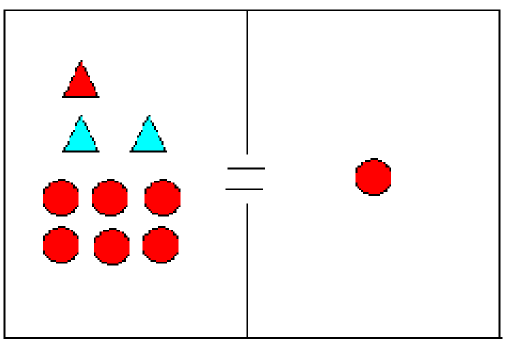
Respuesta:



2) Resuelve con ayuda de la regla 1 y 2 la ecuación y simboliza cada situación que vas obteniendo.

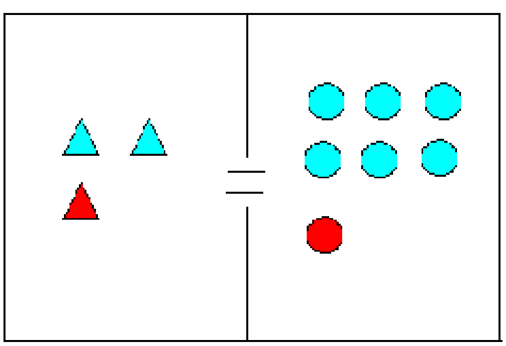
Respuesta:

- Pasamos las x al lado izquierdo y quedan como se muestra en la siguiente figura (recordemos que al pasar las fichas de un lado a otro cambia de color).



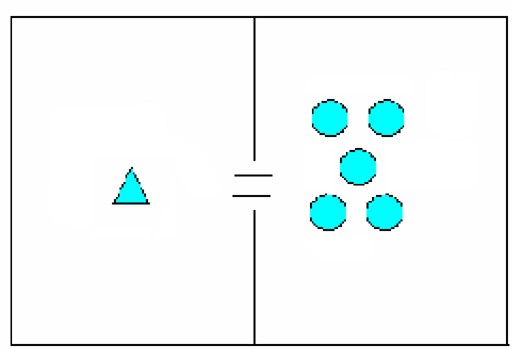
$2x-x-6=-1$.

- Pasamos las unidades al lado derecho y quedan así.



$2x-x=6-1$.

- Ahora anulamos y nos queda como sigue (aplicación de la regla número 2).



$x = 5$.

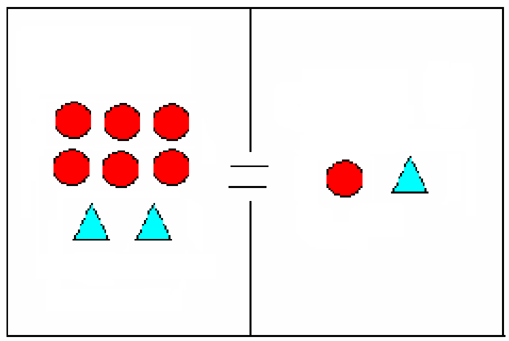
- Por último, anotamos el resultado, que es $x = 5$.

Anexo E2. Tableros con fichas (propuesta)

Actividad 9

1) Representa la ecuación $2x-6=x-1$.

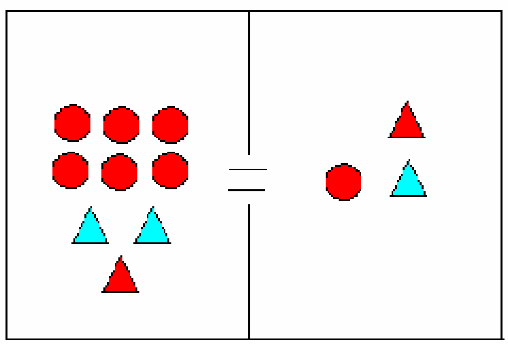
Respuesta:



2) Resuelve con ayuda de la regla 3 (agregando) y 2 la ecuación. Inicia eliminando una *x* en ambos lados. No olvides simbolizar cada situación que vas obteniendo.

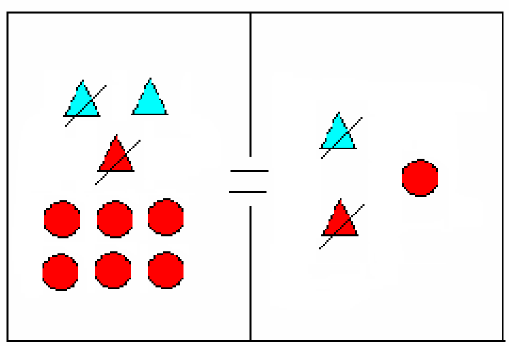
Respuesta:

- Agregamos -*x* (regla 3) en ambos lados.



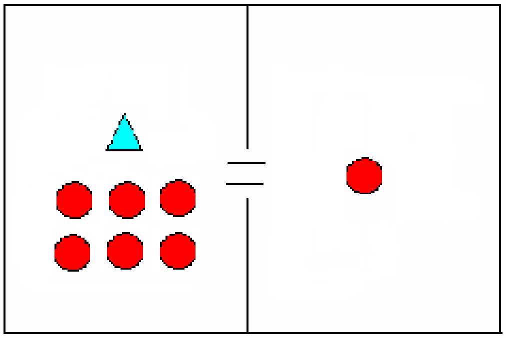
$2x-x-6=x-x-1$.

- Ahora anulamos (regla 2).



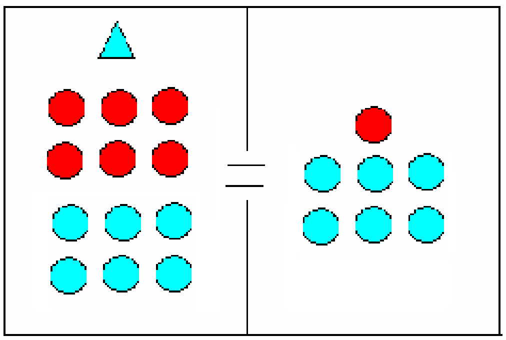
$2x-x-6=x-x-1$.

- Y queda de la siguiente manera.



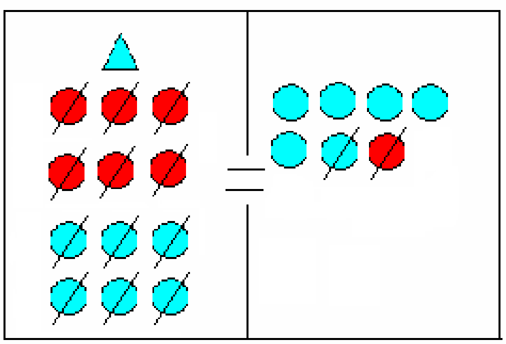
$x-6=-1$.

- Ahora agregamos unidades positivas (regla 3) en ambos lados.



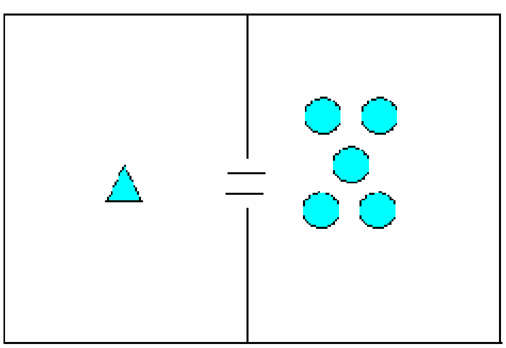
$x-6+6=-1+6$.

- Anulamos (regla 2).



$x-6+6=-1+6$.

- Finalmente obtenemos.

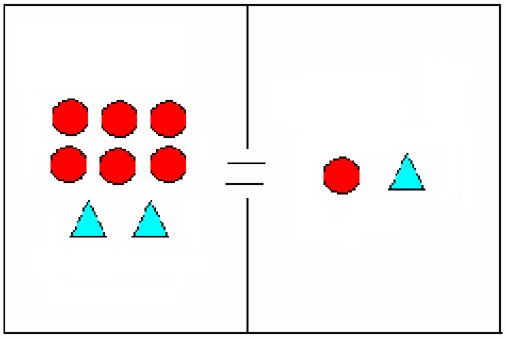


$x=5$.

Actividad 10

1) Representa la ecuación $2x-6=x-1$.

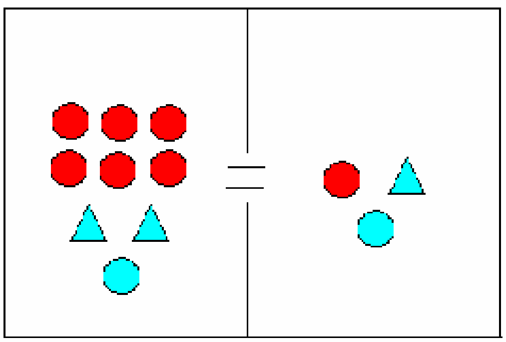
Respuesta:



2) Resuelve la ecuación con ayuda de la regla 3 (agregando) y 2. Inicia eliminando una unidad negativa de cada lado. No olvides simbolizar cada situación que vas obteniendo.

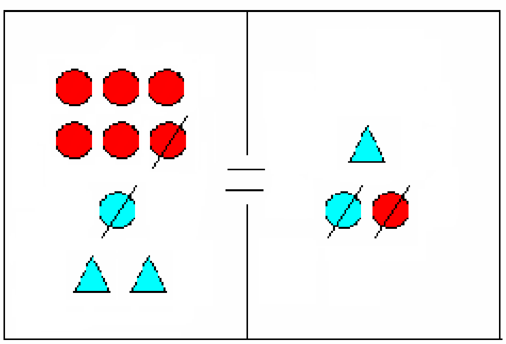
Respuesta:

- Agregamos una unidad positiva en ambos lados (regla 3).



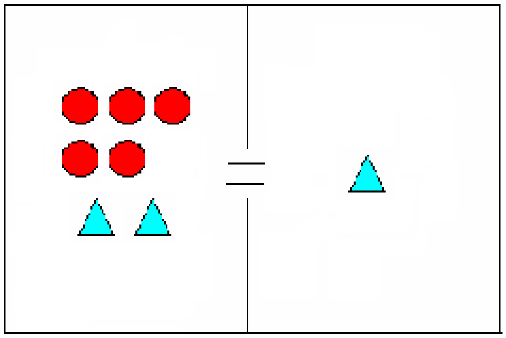
$2x-6+1=x-1+1$.

- Anulamos (regla 2).



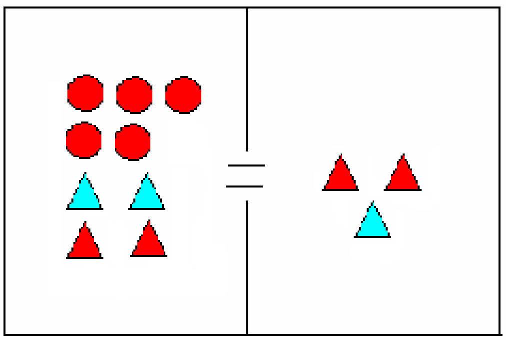
$2x-6+1=x-1+1$.

- Y nos queda de la siguiente manera.



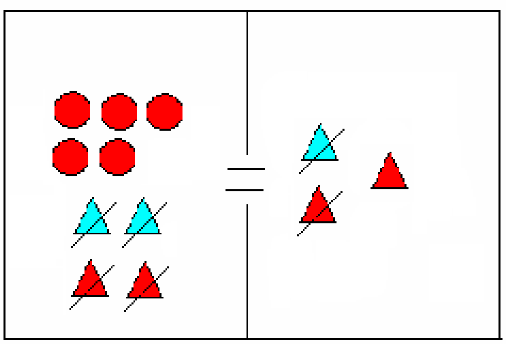
$2x - 5 = x$.

- Agregamos dos -*x* en ambos lados (regla 3).



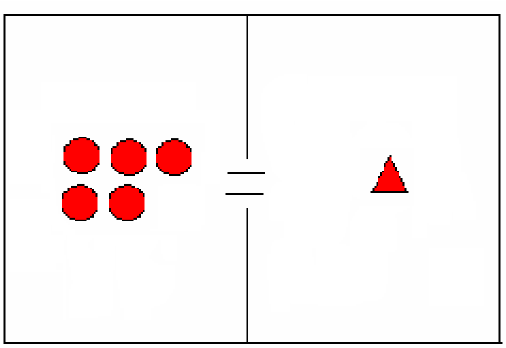
$2x - 2x - 5 = x - 2x$.

- Anulamos (regla 2).



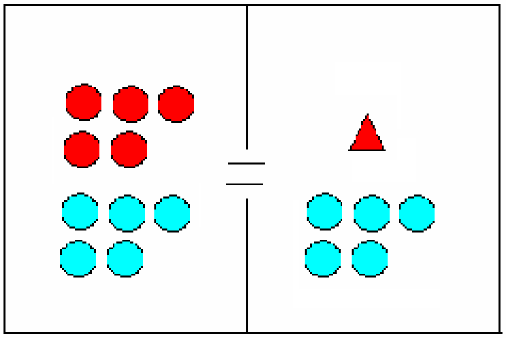
$2x - 2x - 5 = x - 2x$.

- Y obtenemos.



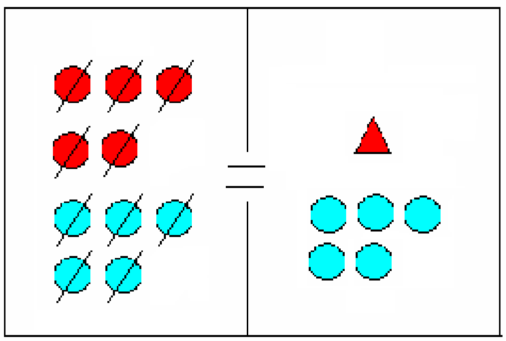
$-5 = -x$.

- Se agregan unidades positivas (regla 3) en ambos lados.



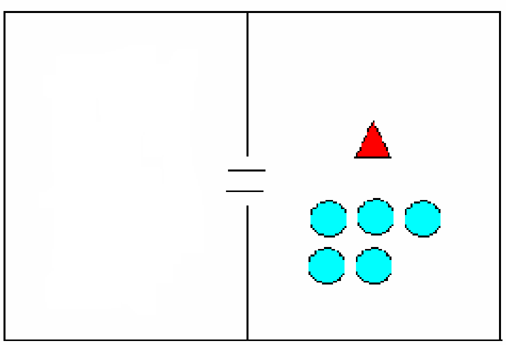
$-5+5=-x+5$.

- Anulamos (regla 2).



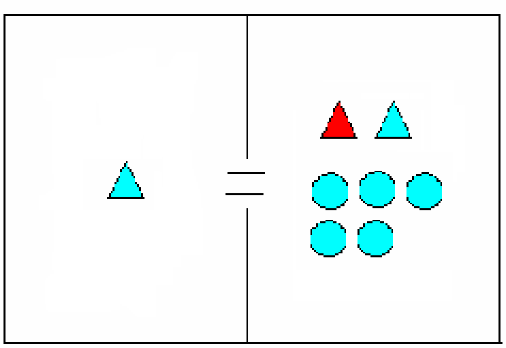
$-5+5=-x+5$.

- Y obtenemos.



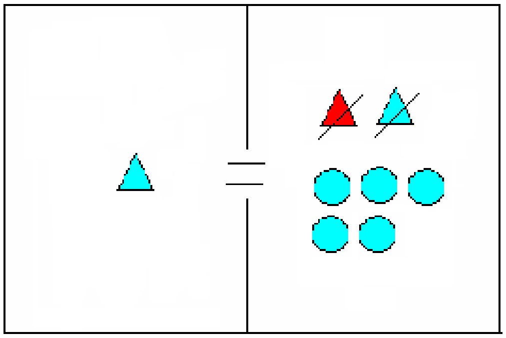
$0=-x+5$.

- Agregamos una *x* (regla 3) en ambos lados.



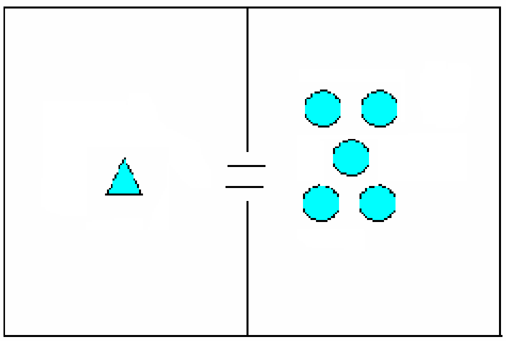
$x=-x+x+5$.

- Anulamos (regla 2).



$x = -x + x + 5$.

- Y obtenemos.

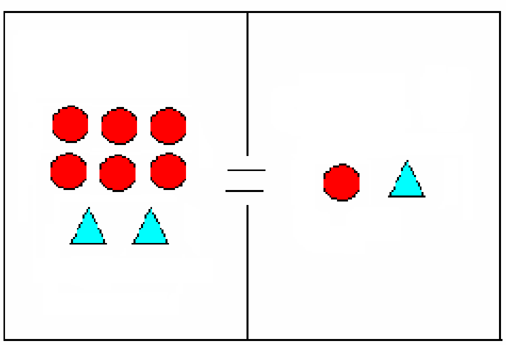


$x = 5$.

Actividad 11

1) Representa la ecuación $2x - 6 = x - 1$.

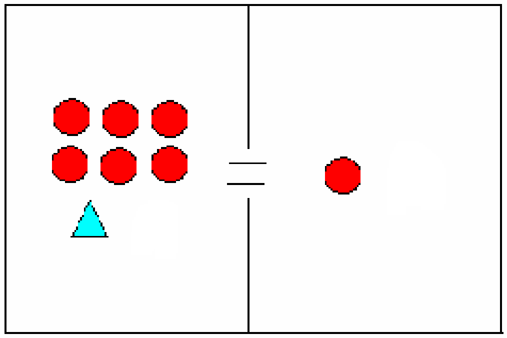
Respuesta:



2) Resuelve con ayuda de la regla 3 (quitando una *x* en ambos lados) y 1. No olvides simbolizar cada situación que vas obteniendo.

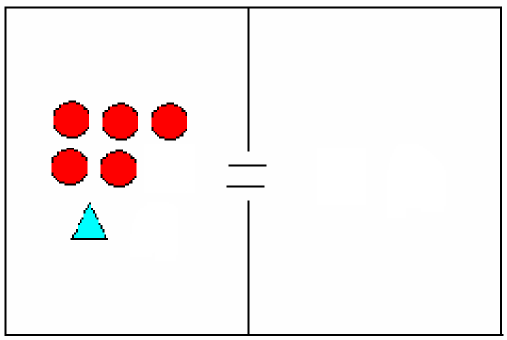
Respuesta:

- Se quita una *x* (regla 3) en ambos lados.



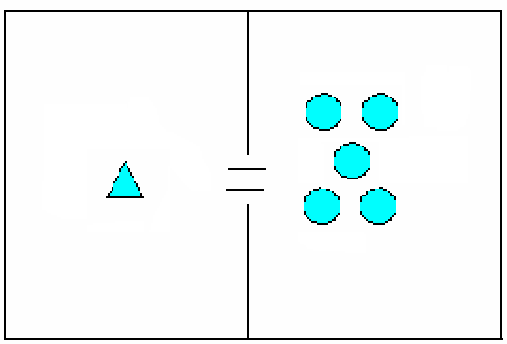
$x - 6 = -1$.

- Se quita una unidad negativa (regla 3) en ambos lados.



$x - 5 = 0$.

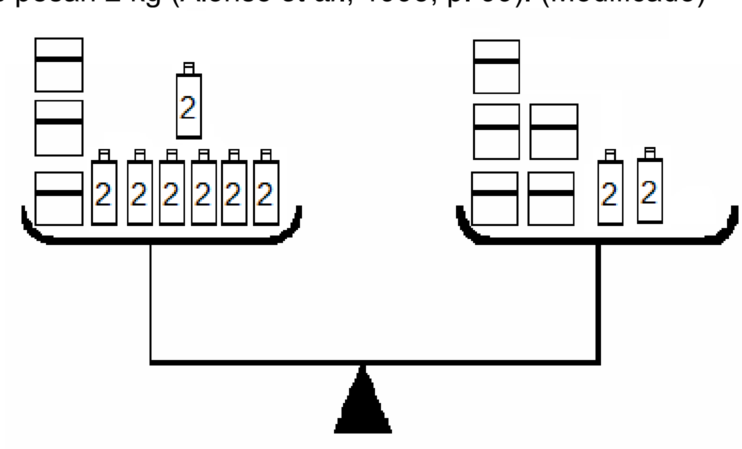
- Se trasladan las unidades negativas (regla 1) de un lado a otro.



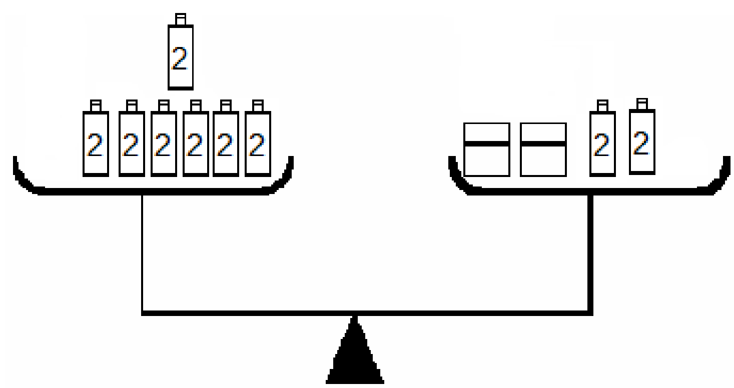
$x = 5$.

Anexo F1. Balanzas y simbolización (propuesta)

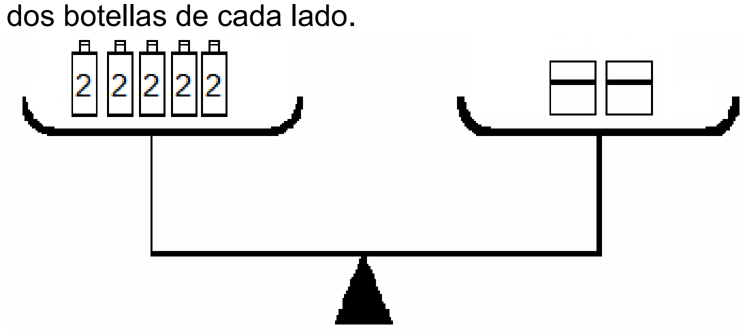
Actividad 12
La siguiente balanza está en equilibrio. El peso de todas las cajas es el mismo. Las botellas pesan 2 kg (Alonso *et al*., 1993, p. 99). (Modificado)



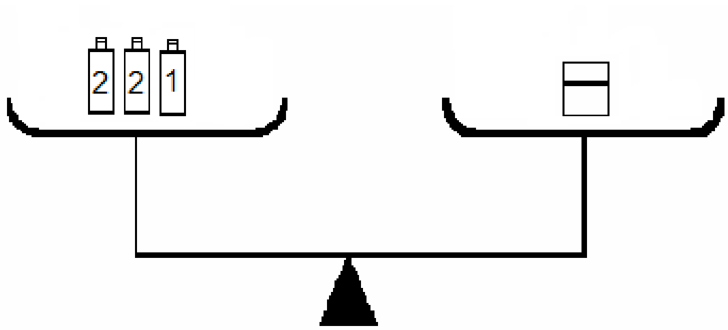
1) Observa la balanza y determina cuánto pesa cada caja, sin utilizar algún método algebraico y dibuja las diferentes situaciones de la balanza (Alonso *et al*., 1993, p. 99).
Respuesta:
a) Quito tres cajas de cada lado.



b) Quito dos botellas de cada lado.



c) Se realiza la repartición correspondiente.

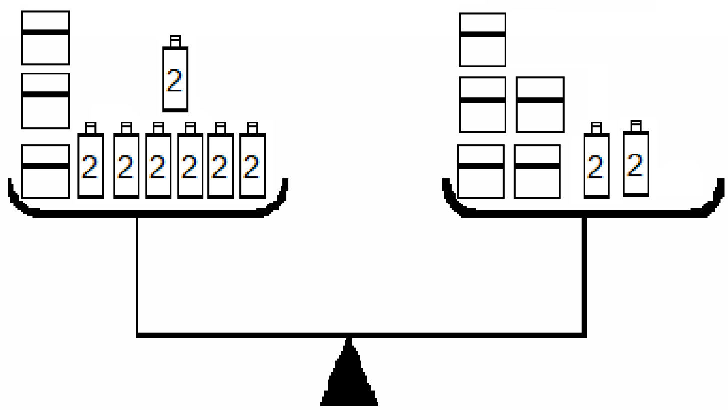


Así, cada caja pesa 5 kg.

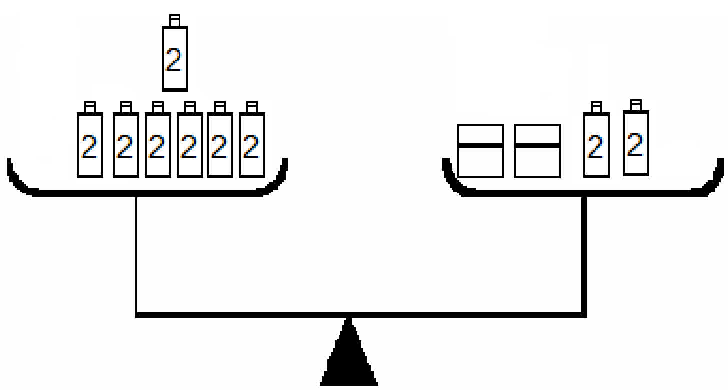
2) Ahora simboliza la situación de igualdad presentada en cada una de las balanzas anteriores mediante una ecuación. Recuerda especificar lo que significa la letra que utilices. (Nuevo)

Respuesta:

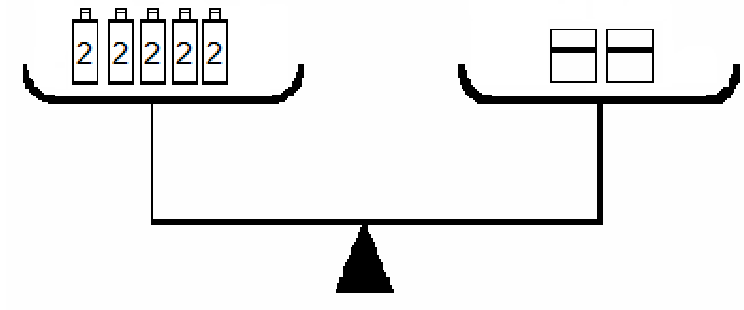
a) $3x+14=5x+4$ (x : peso de la caja)



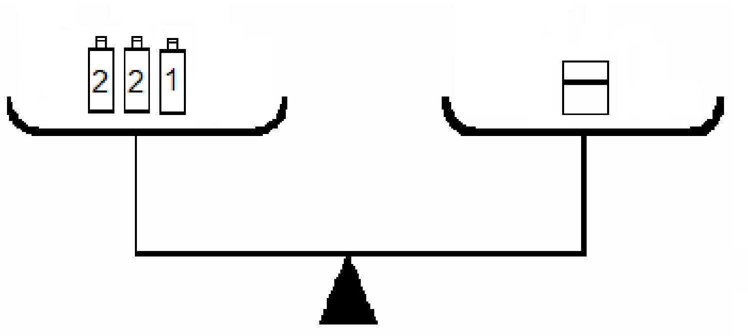
b) $14=2x+4$



c) $10 = 2x$



d) $5 = x$



3) Recupera la primera ecuación y resuélvela algebraicamente a fin de corroborar el valor de la incógnita (el peso de la caja) que obtuviste al inicio. Ahora realiza la comprobación correspondiente sustituyendo el valor de *x* en la ecuación y verifica que se cumpla la igualdad. (Nuevo)

Respuesta del inciso *a*):

$3x + 14 = 5x + 4$

$3x + 14 - 4 = 5x + 4 - 4$

$3x + 10 = 5x$

$3x + 10 - 3x = 5x - 3x$

$10 = 2x$

$\frac{10}{2} = x$

$x = 5$.

Comprobación:

$3x + 14 = 5x + 4$

$3(5) + 14 = 5(5) + 4$

$15 + 14 = 25 + 4$

$29 = 29$.

4) Resuelve todas las ecuaciones con las que simbolizaste tu procedimiento de las balanzas y observa qué hay en común entre ellas. (Nuevo)

Respuesta *b*):

$14 = 2x + 4$

$14 - 4 = 2x + 4 - 4$

$10 = 2x$

$\frac{10}{2} = x$

$x = 5$.

Respuesta *c*):

$10 = 2x$

$\frac{10}{2} = x$

$x = 5$.

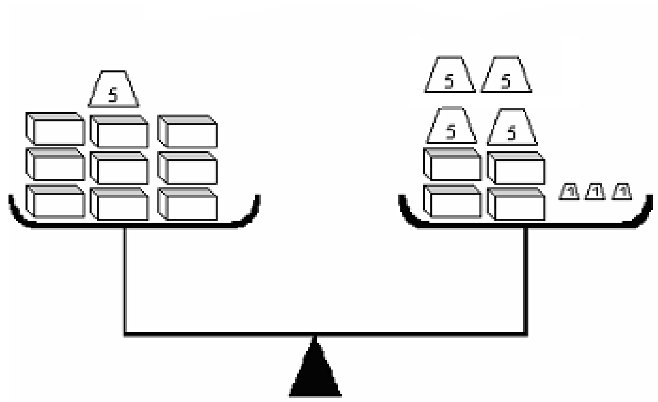
Respuesta *d*):

$x = 5$.

Todas las ecuaciones son equivalentes y por lo tanto tienen la misma solución.

Actividad 13

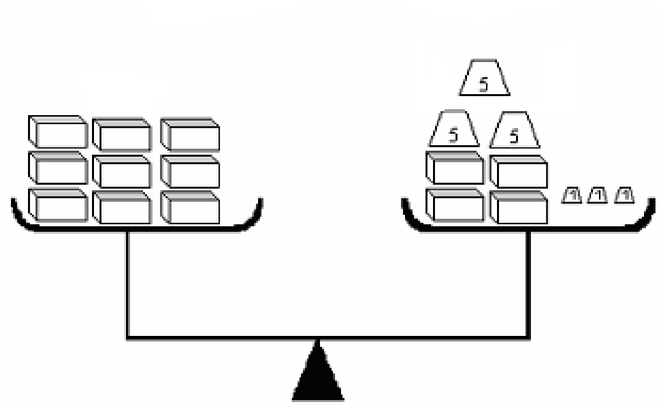
La balanza que a continuación se muestra está en equilibrio (Alonso *et al*., 1993, p. 103).



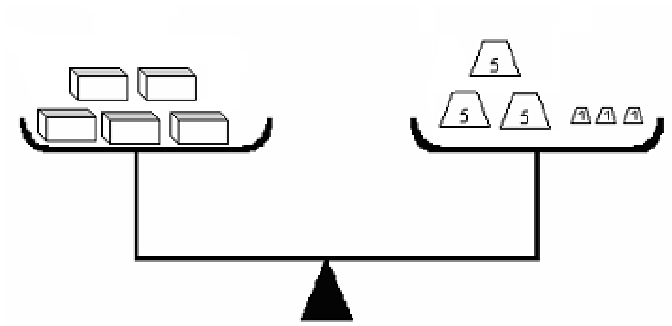
1) ¿Puedes averiguar cuánto pesa cada ladrillo sin utilizar algún método algebraico? (Alonso *et al*., 1993, p. 103) (Modificado)

Respuesta:

a) Quitamos una pesa de 5 kg en cada lado.

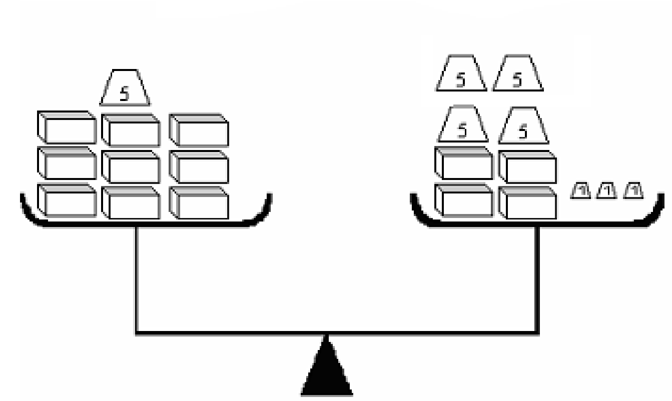


b) Quitamos 4 ladrillos de cada lado.



Es difícil determinar con exactitud el peso de cada ladrillo, ya que no se obtiene algún número entero.

2) Escribe la ecuación que representa la situación de la balanza inicial. Recuerda especificar lo que significa la letra que utilices (Alonso *et al.,* 1993, p. 103).
Respuesta:
a) $9x+5=4x+23$ (x : peso del ladrillo)



3) Resuelve la ecuación anterior mediante algún método algebraico a fin de averiguar el peso de un ladrillo; no olvides comprobar que la igualdad se cumpla, sustituyendo el valor de *x* en la ecuación (Alonso *et al.,* 1993, p. 103). (Modificado)
Respuesta:
a)

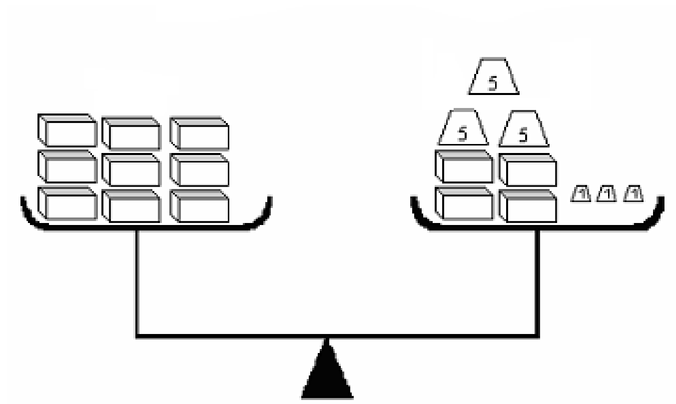
$$
\begin{aligned}
9x+5 &= 4x+23 \\
9x+5- &= 4x+23-5 \\
9x &= 4x+18 \\
9x-4x &= 4x-4x+18 \\
5x &= 18 \\
x &= \frac{18}{5} \\
x &= 3.6\,.
\end{aligned}
$$

Comprobación:

$$9x+5=4x+23$$
$$9(3.6)+5=4(3.6)+23$$

$$32.4 + 5 = 14.4 + 23$$
$$37.4 = 37.4$$

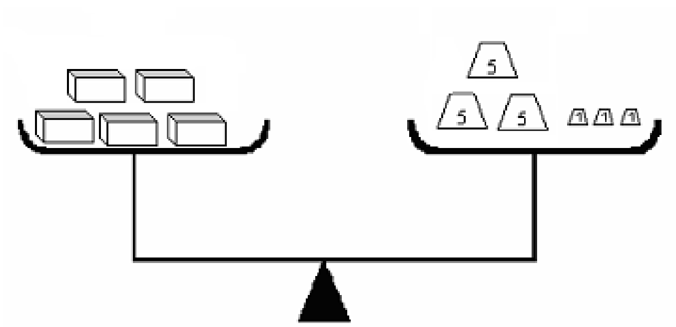
4) Representa y resuelve todas las ecuaciones de las balanzas que obtuviste y observa qué hay en común entre ellas. (Nuevo)



Respuesta:

b)

$$9x = 4x + 18$$
$$9x - 4x = 4x - 4x + 18$$
$$5x = 18$$
$$x = \frac{18}{5}$$
$$x = 3.6$$



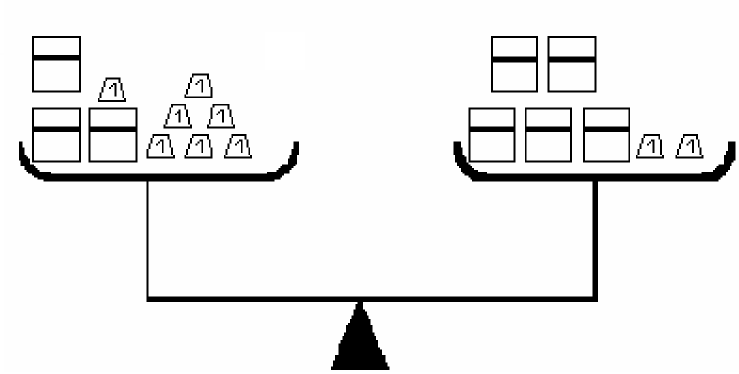
c)

$$5x = 18$$
$$x = \frac{18}{5}$$
$$x = 3.6$$

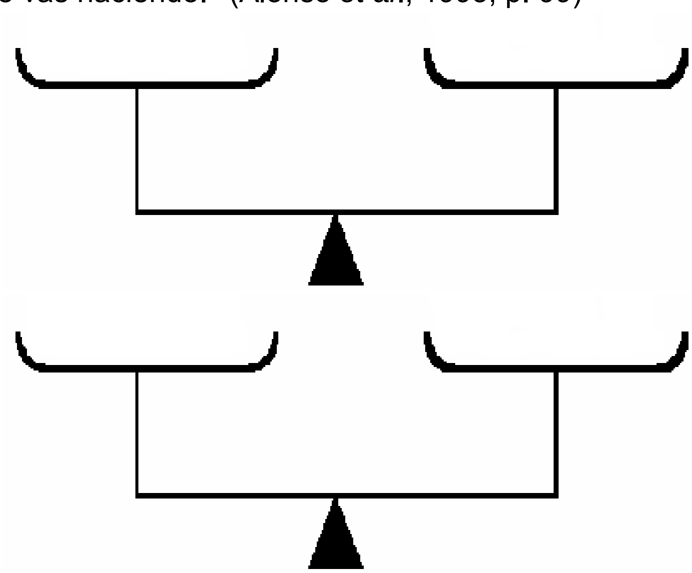
Todas las ecuaciones son equivalentes y por lo tanto tienen la misma solución.

Anexo F2. Balanzas y simbolización

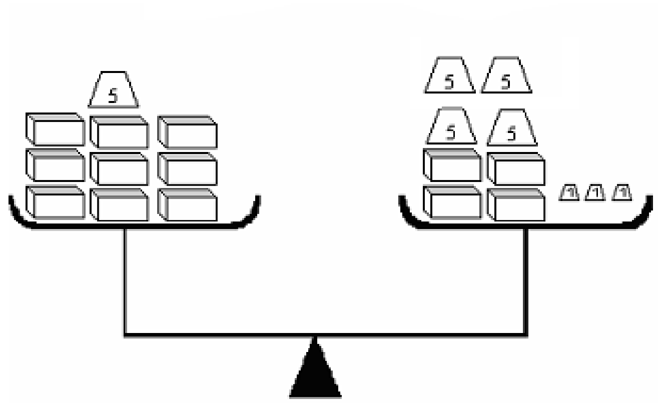
“La balanza está en equilibrio. Las cajas pesan lo mismo. Las pesas son de 1 kg.



¿Cuánto pesa cada caja?
Sobre una tira de balanzas dibuja los pasos que das.
Escribe lo que vas haciendo.” (Alonso *et al*., 1993, p. 99)

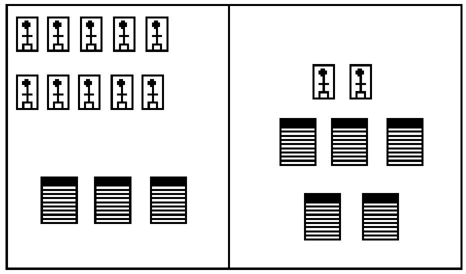


“Los ladrillos de esta balanza en equilibrio pesan todos lo mismo.
Escribe en símbolos esta situación.
Averigua cuánto pesa un ladrillo.
No olvides decir lo que significa el símbolo que utilizas.” (Alonso *et al*., 1993, p. 103)


5
5
5
5
5
1
1
1

Anexo G1. Tableros (propuesta)

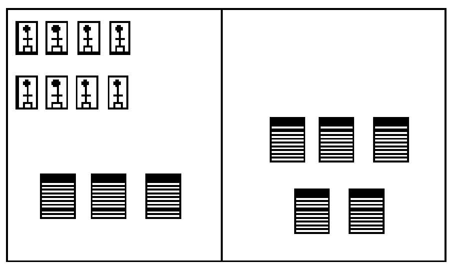
Actividad 14
El tablero tiene la misma cantidad de estampas en ambos extremos. La ilustración siguiente muestra sobres cerrados (los rayados) y estampas sueltas (Alonso *et al*., 1993, p. 100).



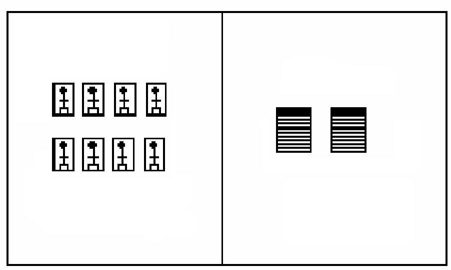
1) ¿Cuántas estampas tiene cada sobre? Dibuja los pasos que consideres necesarios para saber el número de estampas que contiene cada sobre (Alonso *et al*., 1993, p. 103).

Respuesta:

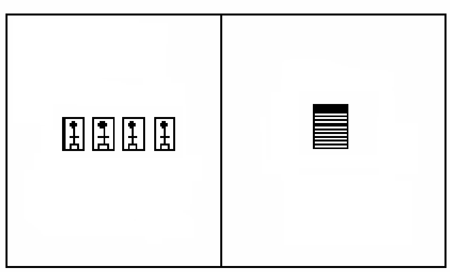
a) Quito 2 estampas en cada lado.



b) Quito 3 sobres en cada lado.



c) Se realiza la repartición correspondiente.

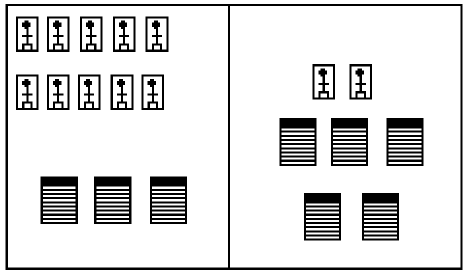


Cada sobre contiene 4 estampas.

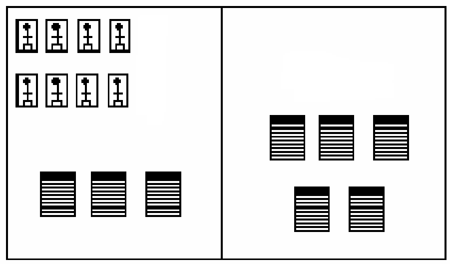
2) Escribe las ecuaciones correspondientes a cada uno de los tableros que hiciste. No olvides especificar el significado de la letra. (Nuevo)

Respuesta:

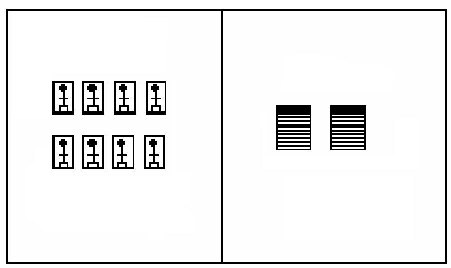
a) $3x+10=5x+2$ (x : número de estampas que contiene cada sobre)



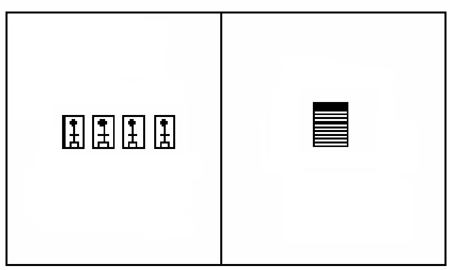
b) $3x+8=5x$



c) $8=2x$



d) $4=x$



3) Resuelve la ecuación inicial del ejercicio mediante el método algebraico y comprueba si se cumple la igualdad en la ecuación, sustituyendo el valor que obtengas para *x*. (Nuevo)

Respuesta:

$$3x+10=5x+2$$
$$3x-3x+10=5x-3x+2$$
$$10=2x+2$$
$$10-2=2x+2-2$$
$$8=2x$$
$$\frac{8}{2}=x$$

$$4 = x\,.$$

Comprobación:

$$3x + 10 = 5x + 2$$
$$3(4) + 10 = 5(4) + 2$$
$$12 + 10 = 20 + 2$$
$$22 = 22\,.$$

4) Resuelve todas las ecuaciones con las que simbolizaste tu procedimiento de los tableros y observa qué hay en común entre ellas. (Nuevo)

Respuesta:

b)

$$3x + 8 = 5x$$
$$3x - 3x + 8 = 5x - 3x$$
$$8 = 2x$$
$$\frac{8}{2} = x$$
$$x = 4\,.$$

c)

$$8 = 2x$$
$$\frac{8}{2} = x$$
$$x = 4\,.$$

d)

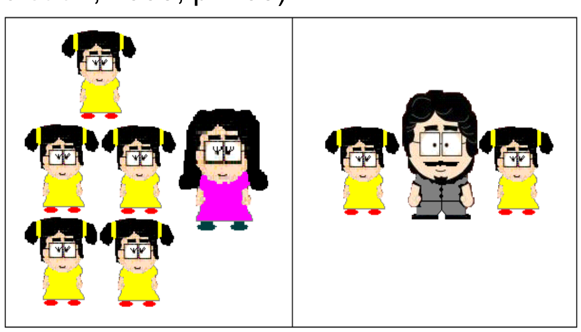
$$x = 4\,.$$

Todas las ecuaciones son equivalentes y por lo tanto tienen la misma solución.

Actividad 15

"A la izquierda de este tablero hay una foto de la madre con sus hij[a]s (las quintillizas). A la derecha [hay] otra foto del padre con dos de las quintillizas.

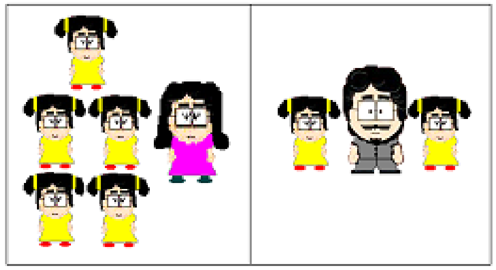
La madre tiene 37 años y el padre 46, y la suma de las edades de las personas de la foto de la izquierda es igual a la suma de las edades de las personas de la derecha" (Alonso *et al*., 1993, p. 103).



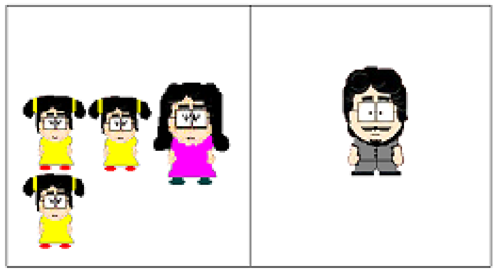
1) Determina la edad de cada quintilliza dibujando en tableros las situaciones que vas obteniendo (Alonso *et al.,* 1993, p. 103). (Modificado)

Respuesta:

a) Ésta es mi situación inicial.



b) Quito dos niñas de cada lado.

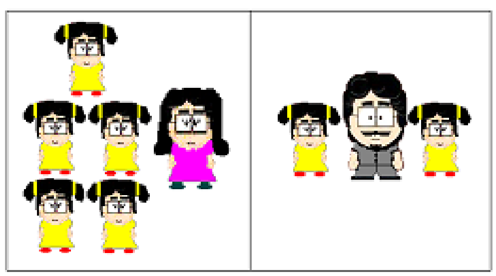


Como es un poco complicado determinar su edad sin hacer uso del álgebra, se les sugiere a los estudiantes lo siguiente.

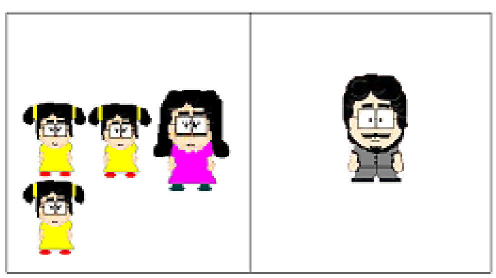
2) Representa las situaciones anteriores mediante ecuaciones, especificando lo que significa la letra que utilices. (Nuevo)

Respuesta:

a) $5x+37=2x+46$ (x: edad de cada una de las quintillizas)



b) $3x+37=46$



3) Resuelve la primera ecuación y comprueba que se cumpla la igualdad de la ecuación, sustituyendo el valor obtenido de la incógnita (Alonso *et al.,* 1993, p. 103). (Modificado)

Respuesta:

a)

$$5x+37=2x+46$$

$$5x - 2x + 37 = 2x - 2x + 46$$
$$3x + 37 = 46$$
$$3x + 37 - 37 = 46 - 37$$
$$3x = 9$$
$$x = \frac{9}{3}$$
$$x = 3.$$

Comprobación:

$$5x + 37 = 2x + 46$$
$$5(3) + 37 = 2(3) + 46$$
$$15 + 37 = 6 + 46$$
$$52 = 52.$$

4) Resuelve todas las ecuaciones con las que simbolizaste tu procedimiento en los tableros y observa qué hay en común entre ellas. (Nuevo)

Respuesta:

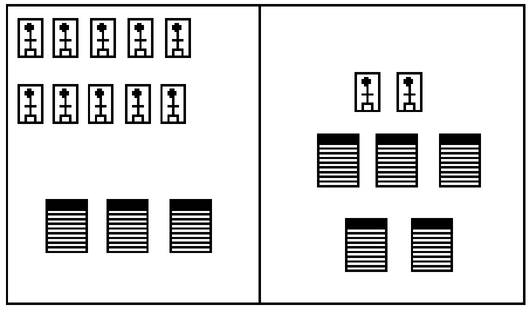
b)

$$3x + 37 = 46$$
$$3x + 37 - 37 = 46 - 37$$
$$3x = 9$$
$$x = \frac{9}{3}$$
$$x = 3.$$

Las dos ecuaciones son equivalentes y por lo tanto tienen la misma solución.

Anexo G2. Tableros

«Aquí tiene dibujados cromos sueltos y sobres de cromos sin abrir (los rayados), de dos amigos.

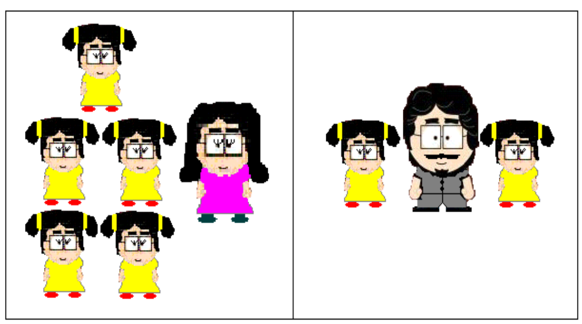


En total tienen los mismos cromos.
¿Cuántos cromos hay en cada sobre?
Sobre una tira de tableros dibuja los pasos que vas dando para averiguarlo y, al lado, escribe lo que haces.» (Alonso *et al*., 1993, p. 100)

"A la izquierda de este tablero hay una foto de la madre con sus hijos (las quintillizas). A la derecha otra foto del padre con dos de las quintillizas.

La madre tiene 37 años y el padre 46, y la suma de las edades de las personas de la foto de la izquierda es igual a la suma de las edades de las personas de la derecha.

Escribe esta situación de igualdad en forma de ecuación y, operando con ella, calcula la edad de cada quintilliza." (Alonso *et al*., 1993, p. 103)



Anexo H1. Elaboración y reconocimiento de ecuaciones equivalentes (propuesta)

Actividad 16

1) Construye dos ecuaciones equivalentes a: (Alonso *et al*., 1993, p. 107) (Modificado)

a) $4w+1=33-4w$

Respuesta:

$8w+2=66-8w$ (Se obtiene al multiplicar la ecuación inicial por 2)

$12w+3=99-12w$ (Se suman las dos ecuaciones anteriores).

b) $6m-40=32$

Respuesta:

$3m-20=16$ (Se divide la ecuación anterior entre 2)

$1.5m-10=8$ (Se divide entre 2 la ecuación anterior).

c) $48z-30=70-2z$

Respuesta:

$24z-15=35-z$ (Se divide la ecuación anterior entre 2)

$72z-45=105-3z$ (Se suman las dos ecuaciones anteriores).

d) $8+10y=4y-6$

Respuesta:

$2+2.5y=y-1.5$ (Se divide entre 4 la ecuación anterior)

$6+7.5y=3y-4.5$ (Se resta la ecuación anterior a la primera).

2) Determina sin resolver si las siguientes ecuaciones son o no equivalentes entre sí (Alonso *et al*., 1993, p. 107). (Modificado)

$4x=28$	$76x=152$
$38x+\frac{9}{3}=79$	$14x-36=76-2x$
$3x-18=10-x$	$76x+6=158$
$21x+6=158-55x$	$7x-18=38-x$.

Respuesta:

a) $38x+\frac{9}{3}=79$ puede ser escrita como $38x+3=79$, que multiplicada por 2 da $76x+6=158$.

b) Ahora al descomponer $76x+6=158$ se obtiene $21x+6=158-55x$.

c) Pero si busco dejar en la ecuación $76x+6=158$ los términos en x en el primer miembro y los términos independientes en el segundo, resulta $76x=158-6$, que finalmente da $76x=152$.

Por lo tanto, las ecuaciones

$38x+\frac{9}{3}=79$,

$76x+6=158$,

$21x+6=158-55x$, y

$76x = 152$ son equivalentes.

a) $4x = 28$ se descompone en $3x - 18 = 10 - x$, es decir resto x y 18 a cada miembro.

b) $7x - 18 = 38 - x$ resulta de la suma miembro a miembro de $4x = 28$ y $3x - 18 = 10 - x$.

c) $14x - 36 = 76 - 2x$ es el doble de la ecuación $7x - 18 = 38 - x$.

Entonces, las ecuaciones

$4x = 28$,

$3x - 18 = 10 - x$,

$7x - 18 = 38 - x$, y

$14x - 36 = 76 - 2x$ son equivalentes.

Anexo H2. Elaboración y reconocimiento de ecuaciones equivalentes

1.- Escribe dos ecuaciones equivalentes a (Alonso *et al*., 1993, p. 107)

a) $3m - 20 = 16$

b) $4 + 5x = 2x - 3$

2.- Clasifica, sin resolver, las siguientes ecuaciones, según sean o no equivalentes (Alonso *et al*., 1993, p. 107)

$2 + 4x = 5$	$2x + 1 = \frac{5}{2}$	$3x + 4 = 6x + 3$
$4x = 3$	$6x = 3x + 1$	$2x = x + \frac{1}{3}$
$12x = 6x + 2$	$4 = 4x + 1$	

3.- Escribe tres ecuaciones que tengan por solución $x = 4$. (Alonso *et al*., 1993, p. 107)

Anexo I. Elaboración y resolución de ecuaciones (propuesta)

Actividad 17

1) Inventa 6 ecuaciones cuya solución sea $x=3$ (Alonso *et al*., 1993, p. 107). (Modificado)

Respuesta:

$2x-11=10-5x$ $\quad$ $6x-11=31-8x$ $\quad$ $10x-16=47-11x$

$4x-5=16-3x$ $\quad$ $4x=21-3x$ $\quad$ $8x=42-6x$

2) Despeja la incógnita de tres ecuaciones de la actividad anterior y comprueba si se cumple la igualdad. (Nuevo)

Respuesta:

a) $6x-11=31-8x$

$$6x+8x-11=31-8x+8x$$
$$14x-11=31$$
$$14x-11+11=31+11$$
$$14x=42$$
$$x=\frac{42}{14}$$
$$x=3.$$

Comprobación:

$$6x-11=31-8x$$
$$6(3)-11=31-8(3)$$
$$18-11=31-24$$
$$7=7.$$

b) $4x-5=16-3x$

$$4x+3x-5=16-3x+3x$$
$$7x-5=16$$
$$7x-5+5=16+5$$
$$7x=21$$
$$x=\frac{21}{7}$$
$$x=3.$$

Comprobación:

$$4x-5=16-3x$$
$$4(3)-5=16-3(3)$$
$$12-5=16-9$$
$$7=7.$$

c) $2x-11=10-5x$

$$2x+5x-11=10-5x+5x$$
$$7x-11=10$$
$$7x-11+11=10+11$$
$$7x=21$$
$$x=\frac{21}{7}$$

$$x = 3.$$

Comprobación:

$$\begin{aligned} 2x - 11 &= 10 - 5x \\ 2(3) - 11 &= 10 - 5(3) \\ 6 - 11 &= 10 - 15 \\ -5 &= -5. \end{aligned}$$

Anexo J1. Orden de las operaciones (propuesta)

Actividad 18

1) Realiza lo que se te pide a continuación en base a la igualdad $18+5(38)=208$.

Verifica si te da como resultado 208 en ambas formas de operar sobre la igualdad. (Nuevo)

Respuesta:

a) Suma 18 más 5 y luego multiplica el resultado por el número que está entre paréntesis.	b) Multiplica 5 por 38 y luego súmale 18.
$18+5(38)=208$ $23(38)=208$ $874\neq 208$	$18+5(38)=208$ $18+190=208$ $208=208$.

2) Un estudiante, al resolver y comprobar la siguiente ecuación se equivocó en uno de sus dos procedimientos. Identifica cuál es y corrígelo. (Nuevo)

$$35+7(x-15)=70$$

Él procede de la siguiente manera

a) Busca el valor para x operando de manera inversa.

$7(x-15)=70-35$

$7(x-15)=35$

b) Ahora busca un número que multiplicado por 7 me dé 35.

$\frac{35}{7}=5$

c) Tomando en cuenta que el número que resulte de la resta indicada entre los paréntesis debe ser 5, averigua cuál es el número al que restándole 15 da 5. $15+5=20$

Luego, $x=20$.

d) Sustituye el valor de x en la ecuación.

$35+7(20-15)=70$

$42(20-15)=70$

$840-630=70$

$210\neq 70$.

Respuesta:

Se equivocó en el orden de las operaciones del inciso *d)*, ya que primero debe multiplicar por 7 los dos términos ubicados en el paréntesis y luego realizar la suma correspondiente.

3) Resuelve las siguientes ecuaciones y comprueba las soluciones. (Nuevo)

$48-9(y-8)=30$

$15+3(x-1)=15$

$42-8(x-1)=10$

$50+2(y-3)=58$.

4) Observa los diferentes procedimientos de resolución y las comprobaciones de la ecuación $34-2(x-1)=18$, y determina cuál es correcta. (Nuevo)

Resolución A

$$
\begin{aligned}
34-2(x-1)&=18\\
32(x-1)&=18\\
32x-32&=18\\
32x&=18+32\\
32x&=50\\
x&=\frac{50}{32}\\
x&=1.5625
\end{aligned}
$$

Comprobación:

$$
\begin{aligned}
34-2(x-1)&=18\\
34-2(1.5625-1)&=18\\
32(.5625)&=18\\
18&=18
\end{aligned}
$$

Resolución B

$$
\begin{aligned}
34-2(x-1)&=18\\
34-2x+2&=18\\
36-2x&=18\\
36&=18+2x\\
36-18&=2x\\
18&=2x\\
\frac{18}{2}&=x\\
9&=x
\end{aligned}
$$

Comprobación:

$$
\begin{aligned}
34-2(x-1)&=18\\
34-2(9-1)&=18\\
34-18+2&=18\\
18&=18
\end{aligned}
$$

5) Encuentra el número que falta en las siguientes expresiones algebraicas (Cedillo *et al*., 2006a, p. 40) y verifica el resultado. (Nuevo)

a) $4(x+12)+7=87$	*b)* $10+3(y-8)=31$
c) $34-2(a-1)=18$	*d)* $7(b+3)-5=51$
e) $22+\frac{p+8}{3}=28$	*f)* $\frac{q-3}{4}+13=16$

Respuesta:

Resolución del inciso *a)*

$$
\begin{aligned}
4(x+12)+7&=87\\
4(x+12)+7-7&=87-7\\
4(x+12)&=80\\
4x+48&=80\\
4x+48-48&=80-48\\
4x&=32\\
\frac{4x}{4}&=\frac{32}{4}\\
x&=8.
\end{aligned}
$$

Comprobación:

$$4(x+12)+7=87$$
$$4(8+12)+7=87$$
$$32+48+7=87$$
$$87=87\,.$$

Resolución del inciso *b)*

$$10+3(y-8)=31$$
$$10-10+3(y-8)=31-10$$
$$3(y-8)=21$$
$$3y-24=21$$
$$3y-24+24=21+24$$
$$3y=45$$
$$\frac{3y}{3}=\frac{45}{3}$$
$$y=15\,.$$

Comprobación:

$$10+3(y-8)=31$$
$$10+3(15-8)=31$$
$$10+45-24=31$$
$$31=31$$

Resolución del inciso *c)*

$$34-2(y-1)=18$$
$$34-2y+2=18$$
$$36-2y=18$$
$$36-36-2y=18-36$$
$$-2y=-18$$
$$\frac{-2y}{-2}=\frac{-18}{-2}$$
$$y=9\,.$$

Comprobación:

$$34-2(y-1)=18$$
$$34-2(9-1)=18$$
$$34-18+2=18$$
$$18=18\,.$$

Resolución del inciso *d)*

$$7(x+3)-5=51$$
$$7x+21-5=51$$
$$7x+16=51$$
$$7x+16-16=51-16$$
$$7x=35$$
$$\frac{7x}{7}=\frac{35}{7}$$
$$x=5\,.$$

Comprobación:

$$7(x+3)-5=51$$
$$7(5+3)-5=51$$
$$35+21-5=51$$
$$51=51.$$

Resolución del inciso *e)*

$$22+\frac{x+8}{3}=28$$
$$22-22+\frac{x+8}{3}=28-22$$
$$\frac{x+8}{3}=6$$
$$3\left(\frac{x+8}{3}\right)=6(3)$$
$$x+8=18$$
$$x+8-8=18-8$$
$$x=10.$$

Comprobación:

$$22+\frac{x+8}{3}=28$$
$$22+\frac{10+8}{3}=28$$
$$22+\frac{18}{3}=28$$
$$22+6=28$$
$$28=28.$$

Resolución del inciso *f)*

$$\frac{y-3}{4}+13=16$$
$$\frac{y-3}{4}+13-13=16-13$$
$$\frac{y-3}{4}=3$$
$$4\left(\frac{y-3}{4}\right)=3(4)$$
$$y-3=12$$
$$y-3+3=12+3$$
$$y=15.$$

Comprobación:

$$\frac{y-3}{4}+13=16$$
$$\frac{15-3}{4}+13=16$$
$$\frac{12}{4}+13=16$$

$$3+13=16$$
$$16=16.$$

6) Elabora un escrito para explicar en forma clara a un compañero el método para resolver ecuaciones como las que acabas de resolver (Cedillo *et al*., 2006a, p. 40).
Respuesta:
Cuando tengas una ecuación con paréntesis, multiplica la expresión dentro de los paréntesis por el número o signo ubicado a la izquierda afuera del paréntesis. Después debes realizar operaciones con suma, resta, multiplicación, división, etcétera, en ambos lados del signo igual para despejar a la incógnita.

Para enriquecer la clase, los estudiantes deberán escribir en el pizarrón la manera de resolución de algunas de las ecuaciones que hicieron en el inciso *5)*.

7) Construye 4 ecuaciones como la que has resuelto pero con solución 20 y explica en el pizarrón tu procedimiento (Cedillo *et al*., 2006a, p. 40).
Respuesta:
Primera ecuación:

$$\frac{x-2}{6}+5=8$$

Esta ecuación se obtiene del siguiente procedimiento.

$$\frac{20-2}{6}$$
$$\frac{18}{6}=3$$
$$3+5=8.$$

Segunda ecuación:

$$18+5(x+18)=208$$

La ecuación anterior se obtiene de la siguiente manera:

$$5(20+18)=100+90$$
$$5(20+18)=190$$
$$18+5(20+18)=208.$$

Tercera ecuación:

$$5(x+10)+19=169$$

El procedimiento que se sigue para obtenerla es:

$$5(20+10)+19=169$$
$$5(30)=150$$
$$150+19=169.$$

Cuarta ecuación:

$$108+\frac{x+44}{8}=116$$

Para obtenerla se procedió de la siguiente forma:

$$108+\frac{20+44}{8}$$

$$108+\frac{64}{8}$$

$$108+8=116.$$

Anexo J2. Resolución de ecuaciones

1.- En las siguientes expresiones encuentra el número que falta.

a) $b + 1.03 = 24.7$ $b =$	b) $m - 1.67 = 30.25$ $m =$	c) $p - 12.22 = 4.05$ $p =$
d) $4.8 - r = 3.5$ $r =$	e) $\frac{5.2}{n} = 4$ $n =$	f) 5 x $b - 1 = 29$ $b =$
g) $k - 1.5 = 6.2$ $k =$	h) 2 x $c = 1$ $c =$	i) 3 x $a + 1 = 121$ $a =$

2.- ¿Hay alguna forma que les permita verificar que sus respuestas son correctas? Discutan esto con sus compañeros y anoten el método que les parezca más eficaz.

3.- Una alumna dice que el número que falta en 4 x $d + 2 = 4$ es 0.5. ¿Están de acuerdo con ella? ¿Por qué?

4.- Encuentra el número que falta en cada una de las siguientes expresiones y comprueba si es verdadero.

a) $4(x + 12) + 7 = 87$	b) $10 + 3(y - 8) = 31$
c) $34 - 2(a - 1) = 18$	d) $7(b + 3) - 5 = 51$
e) $22 + \frac{p + 8}{3} = 28$	f) $\frac{q - 3}{4} + 13 = 16$

5.- Escribe cómo le explicarías en forma clara a un compañero el método para resolver ecuaciones como las que acabas de resolver.

Después de cada uno de estos incisos los estudiantes mostrarían el procedimiento que les permitió resolver algunas de las ecuaciones.

En esta sesión de trabajo el docente invitó a los estudiantes a formar ecuaciones similares a las que han resuelto, cuya solución sea 20, para después exponerlas y explicarlas ante el grupo (Cedillo *et al.*, 2006, p. 40).

Anexo K1. Procedimientos aritméticos (propuesta)

Actividad 19

1) Lee el siguiente problema:

La calificación global de la asignatura es 10; está conformada por tres elementos: examen, fichas de trabajo en equipos y un trabajo extraclase (Preisser, 1989, pp. 56).

2) Simboliza el problema con la letra inicial (minúscula) de cada aspecto que se evaluará (Preisser, 1989, p. 57). (Modificado)

Respuesta: $e + f + t = 10$

3) Determina cuántos puntos se asignaron a cada aspecto, utilizando una escala del 1 al 8 con números enteros positivos (Preisser, 1989, pp. 56-57). (Modificado)

Respuesta: Se proponen las siguientes combinaciones:

$e + f + t = 10$

8 + 1 + 1 = 10	6 + 3 + 1 = 10	3 + 6 + 1 = 10	1 + 1 + 8 = 10
7 + 1 + 2 = 10	6 + 1 + 3 = 10	3 + 1 + 6 = 10	1 + 8 + 1 = 10
7 + 2 + 1 =10	6 + 2 + 2 = 10	3 + 4 + 3 = 10	1 + 2 + 7 = 10
	5 + 4 + 1 = 10	3 + 3 + 4 = 10	1 + 7 + 2 = 10
	5 + 1 + 4 = 10	3 + 5 + 2 = 10	1 + 3 + 6 = 10
	5 + 2 + 3 = 10	3 + 2 + 5 = 10	1 + 6 + 3 =10
	5 + 3 + 2 = 10	2 + 1 + 7 = 10	1 + 4 + 5 = 10
	4 + 5 + 1 = 10	2 + 7 + 1 = 10	1 + 5 + 4 = 10
	4 + 1 + 5 = 10	2 + 4 + 4 = 10	
	4 + 3 + 3 = 10	2 + 6 + 2 = 10	
	4 + 4 + 2 = 10	2 + 2 + 6 = 10	
	4 + 2 + 4 = 10	2 + 5 + 3 = 10	
		2 + 3 + 5 = 10	

4) Complementen sus ternos de números con los que obtuvieron los demás. Para ello deberán escribirlos en el pizarrón, cuidando que no se repita el mismo orden de los ternos. (Nuevo)

5) ¿Cuántas ternas de números obtuvieron? (Nuevo)

Respuesta: 36

6) ¿Son todas soluciones del problema? (Preisser, 1989, p. 57) ¿Por qué? (Nuevo)

Respuesta:

Sí, ya que cumplen las siguientes condiciones:

- La calificación global de los tres elementos es 10.
- Las combinaciones presentan números enteros positivos.

7) ¿Cuáles ternos de números no serían soluciones del problema? (Preisser, 1989, p. 57) ¿Por qué? (Nuevo)

Respuesta:

6 + 3 + 5 = 14

5 + 2 + 6 = 17

1 + 6 + 5 = 12

Etcétera.

Los tres ejemplos anteriores no son soluciones ya que no cumplen con uno de los requisitos (no suman 10).

Necesitamos determinar una solución de todas las encontradas; para ello, debes

8) anexar la siguiente información al problema y resolver los incisos.

La suma de los puntajes asignados a las fichas de trabajo y al trabajo extraclase es de 7 puntos (Preisser, 1989, p. 57).

9) Simbolicen esta nueva situación (Preisser, 1989, p. 57).

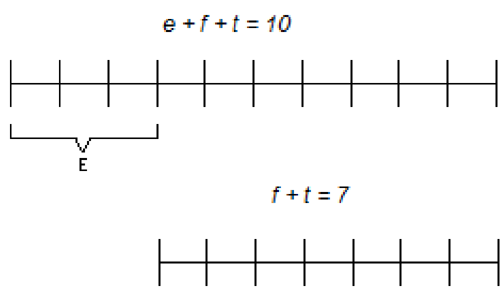
Respuesta: $f + t = 7$

10) Determina el valor del examen y justifica tu respuesta (Preisser, 1989, p. 57).

Respuesta:

El valor del examen es de 3 puntos, puesto que los tres aspectos suman 10: $e + f + t = 10$.

Para dejar más clara esta información a los estudiantes, el docente puede auxiliarse de los siguientes diagramas: (Preisser, 1989, p. 57)



11) ¿La ecuación $f + t = 7$ tiene solución única? (Preisser, 1989, p. 58)

Respuesta: No

12) ¿Cuáles son todas las soluciones de $f + t = 7$ en el contexto del problema? (Preisser, 1989, p. 58)

Respuesta:

$f + t = 7$	3 + 4 = 7
4 + 3 = 7	1 + 6 = 7
6 + 1 = 7	2 + 5 = 7
5 + 2 = 7	

A partir de éstas,

13) ¿cuáles serían todos los posibles ternos que resolverían el problema? (Preisser, 1989, p. 58)

Respuesta:

$$e + f + t = 10$$
$$3 + 4 + 3 = 10$$
$$3 + 6 + 1 = 10$$
$$3 + 5 + 2 = 10$$
$$3 + 3 + 4 = 10$$
$$3 + 1 + 6 = 10$$
$$3 + 2 + 5 = 10$$

14) ¿Se redujo el número de posibilidades con respecto a los ternos obtenidos en el inciso *3)* del primer apartado? (Preisser, 1989, p. 58)
Respuesta: Sí, de 36 se redujo a 6 posibilidades.

15) ¿Es lo mismo la solución $2 + 5 + 3 = 10$ que $5 + 2 + 3 = 10$? (Preisser, 1989, p. 58) ¿Por qué? (Nuevo)
Respuesta: No, porque aunque suman lo mismo, los puntos otorgados a los tres aspectos son diferentes. Por ejemplo, si la fórmula obtenida es $t + f + e = 10$, la primera solución da un valor de 2 para t y la segunda un valor de 5.

Como ya estableciste el valor del examen (e),
16) encuentra los valores de las fichas (f) y el trabajo extraclase (t) con ayuda de la información que a continuación se te da.
La diferencia entre el valor de f y t es 1 punto (donde f es el mayor) (Preisser, 1989, p. 58).
Respuesta:

$f + t = 7$	
$4 + 3 = 7$	$4 - 3 = 1$
$6 + 1 = 7$	$6 - 1 = 5$
$5 + 2 = 7$	$5 - 2 = 3$
$3 + 4 = 7$	$3 - 4 = -1$
$1 + 6 = 7$	$1 - 6 = -5$
$2 + 5 = 7$	$2 - 5 = -3$

La combinación 4, 3 es la única que cumple con esta condición y la otra condición ($f + t = 7$).

17) Plantea la ecuación correspondiente a la nueva condición (Preisser, 1989, p. 58).
Respuesta: $f + t = 7$

18) Rescribe la información de los incisos 1, 8 y 16, así como sus respectivas ecuaciones. (Nuevo)
Respuesta:
- La calificación global es 10; está conformada por: examen, fichas de trabajo en equipos y trabajo extraclase.
  $e + f + t = 10$
- La suma de los puntos de las fichas de trabajo y el trabajo extraclase es 7.
  $f + t = 7$
- La diferencia entre el valor de f y t es un punto (donde f es el mayor).
  $f - t = 1$

19) Escribe las 2 ecuaciones que te permitieron obtener la única solución del problema. (Nuevo)

Respuesta:

$f + t = 7$

$f - t = 1$

Si separamos la ecuación $f - t = 1$ del sistema $\begin{cases} f + t = 7 \\ f - t = 1 \end{cases}$,

20) ¿cuáles serían las soluciones de dicha ecuación si utilizamos números enteros positivos del 1 al 9? (Preisser, 1989, p. 58)

Respuesta:

$f - t = 1$	5 – 4 = 1
9 – 8 = 1	4 – 3 = 1
8 – 7 = 1	3 – 2 = 1
7 – 6 = 1	2 – 1 = 1
6 – 5 = 1	

Una "ecuación de primer grado con dos incógnitas es una ecuación indeterminada, tiene infinitas soluciones; pero si fijamos la condición de que las soluciones sean enteras positivas, el número de soluciones puede ser limitado en algunos casos" (Baldor, 2000, p. 311).

21) Por lo tanto, la ecuación $f - t = 1$ es una ecuación <u>indeterminada</u> (Preisser, 1989, p. 58).

Anexo K2. Concepto de sistemas de ecuaciones

Actividad 1
"Encontrar tres números enteros positivos que sumen 78. Escribir, con palabras o con símbolos, las posibilidades de elección que hay para el primer número, después, las que hay para el segundo, y finalmente, las que hay para el tercero." (Alonso *et al*., 1993, p. 117)

Actividad 2
"Lo mismo que la actividad 1, pero, con una nueva condición: el primer número debe ser doble del segundo." (Alonso *et al*., 1993, p. 119)

Actividad 3
"La misma actividad 2, con una nueva condición: el tercer número tiene que ser 3 unidades mayor que el primero." (Alonso *et al*., 1993, p. 120)

Anexo L. Combinación lineal de dos ecuaciones (propuesta)

Actividad 20 (Alonso *et al*., 1993, p. 122; modificado)

1) El lunes mi mamá compró 3 pantalones y 4 pares de calcetines por 327 pesos, y el miércoles pagó por 1 pantalón y 2 calcetines 121 pesos. ¿Cuánto pagará, en cada caso, si compra…

Respuesta:

… 6 pantalones y 8 pares de calcetines?	654
… 4 pantalones y 6 pares de calcetines?	448
… 2 pantalones y 2 pares de calcetines?	206

2) Con los datos que obtuviste anteriormente determina para los siguientes valores la cantidad de pantalones y pares de calcetines correspondientes. (Nuevo)

Respuesta:

2	pantalones	4	pares de calcetines = 242 pesos
4	pantalones	4	pares de calcetines = 412 pesos
7	pantalones	10	pares de calcetines = 775 pesos
5	pantalones	6	pares de calcetines = 533 pesos
2	pantalones	3	pares de calcetines = 224 pesos
5	pantalones	8	pares de calcetines = 569 pesos
8	pantalones	12	pares de calcetines = 896 pesos
9	pantalones	12	pares de calcetines = 981 pesos

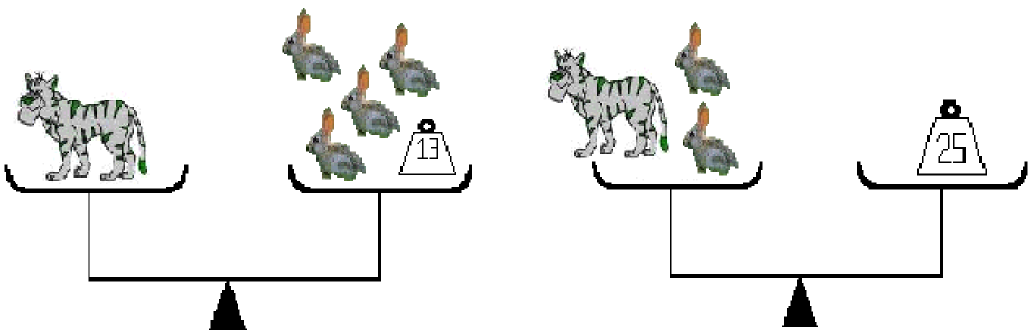
3) Ahora determina el valor de:

1 pantalón y 1 par de calcetines
1 pantalón
1 par de calcetines

Anexo M1.Modelo de la balanza (propuesta)

Actividad 21
Podemos representar un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante dos balanzas que se encuentran en equilibrio. Cada una de ellas contiene tigres y conejos, además de pesas de diferentes pesos

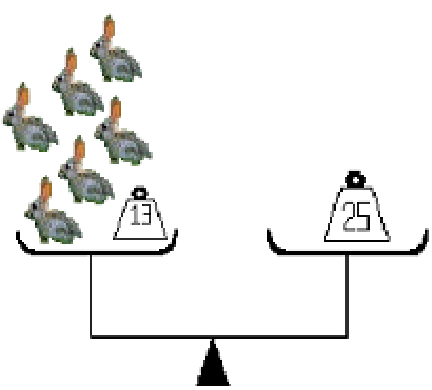
1) ¿Puedes determinar cuánto pesa el tigre, así como el peso del conejo, manipulando los objetos de las balanzas? Todos los tigres tienen el mismo peso, y todos los conejos tienen el mismo peso (Alonso *et al*., 1993, p. 127).



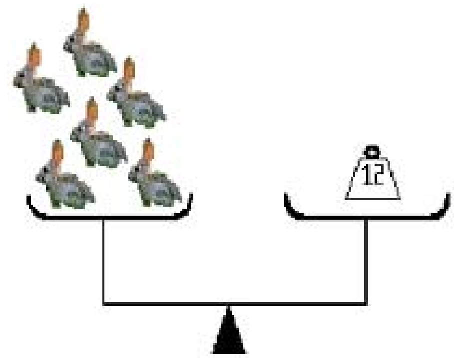
2) Para resolver este problema ahora utiliza una nueva balanza en equilibrio en la que no haya tigres. (Nuevo)

Respuesta:

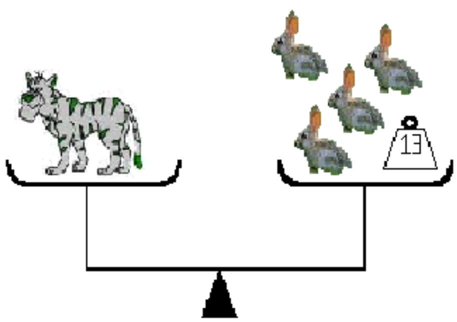
En la segunda balanza se sustituye el peso del tigre por cuatro conejos y una pesa de 13 kg.

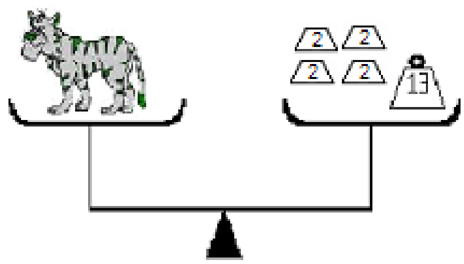


Ahora bien, para encontrar el valor de cada conejo se quitan 13 kg de cada lado.



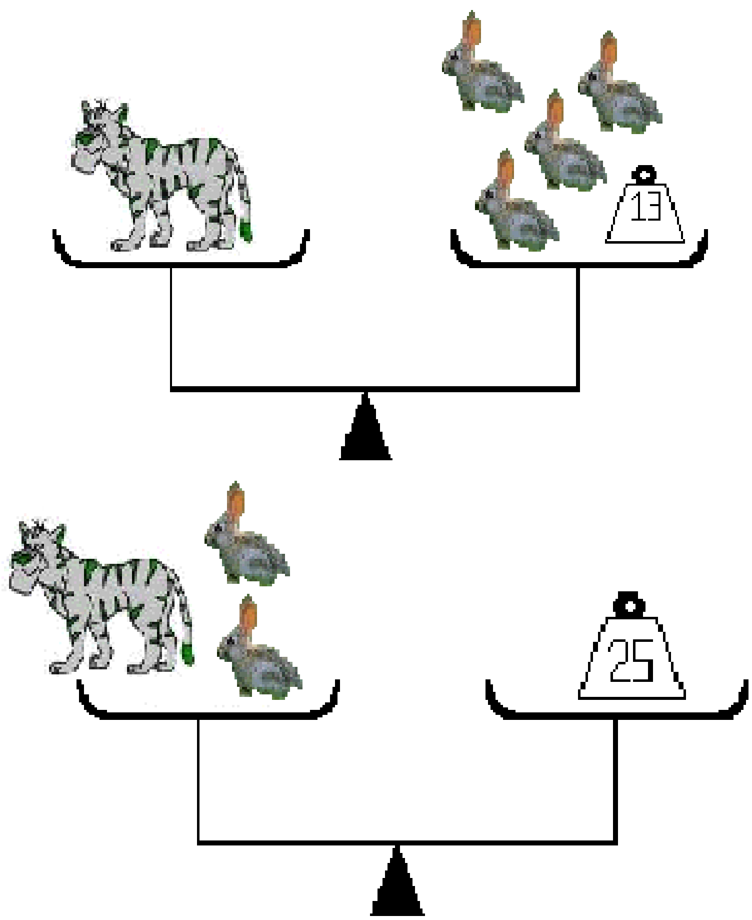
Se hace la repartición y a cada conejo le corresponde un peso de 2 kg.
En la primera balanza se sustituye el peso de los conejos y se suma la pesa de 13 kg, obteniéndose así que un tigre pesa 21 kg.





Anexo M2. El método de sustitución

"*Actividad 8*
Estas balanzas están en equilibrio. En cada una de ellas hay tigres y conejos. También hay pesas, cuyos números expresan kilogramos. ¿Sabrías averiguar cuánto pesan cada tigre y cada conejo, manipulando con las balanzas, sin utilizar otras pesas que las que se dan? Los tigres pesan todos lo mismo y los conejos también tienen todos el mismo peso." (Alonso *et al*., 1993, p. 127)

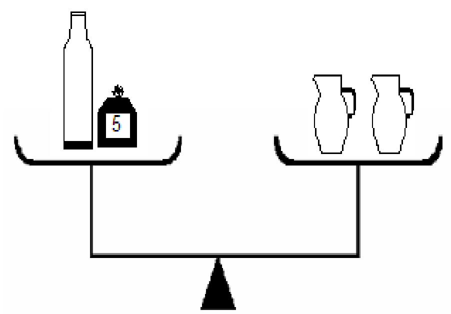


Anexo N1. Balanzas (propuesta)

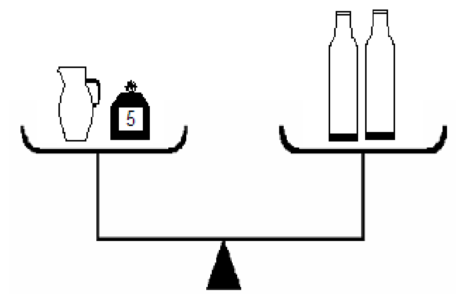
Actividad 22
Las dos balanzas que a continuación se muestran se encuentran equilibradas por botellas y jarras, así como por pesas de 5 kg. ¿Cuánto pesa cada jarra y cada botella?

1) Completa su simbolización y especifica lo que significa cada letra (Alonso *et al*., 1993, p. 194). (Modificado)
Respuesta:

x : botellas
y : jarras

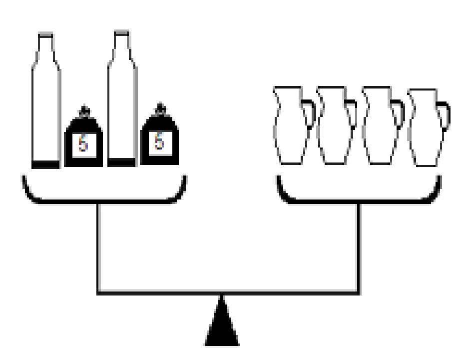


$\underline{\ x\ } + 5 = \underline{\ 2\ }\ y$



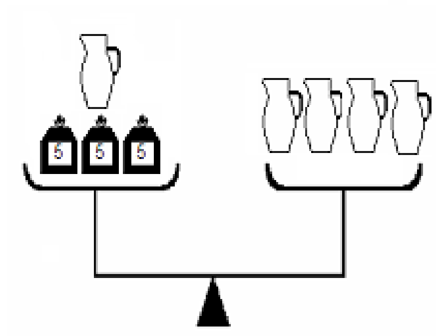
$\underline{\ y\ } + 5 = \underline{\ 2\ }\ x$

2) Para resolver este problema, crea una nueva balanza a partir de la primera (Alonso *et al*., 1993, p. 194). Dibuja las situaciones que vas obteniendo.
Respuesta:



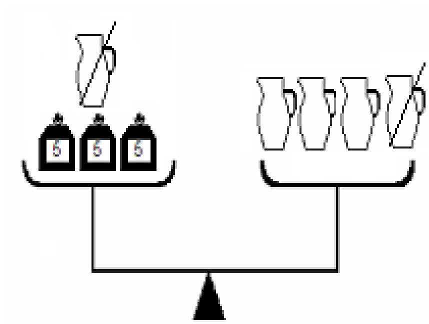
$\underline{\ 2\ }\ x + 10 = \underline{\ 4\ }\ y$

Se sustituyen las dos botellas por una jarra y una pesa de 5 kg, a partir del equilibrio de la segunda balanza (Alonso *et al*., 1993, p. 194).

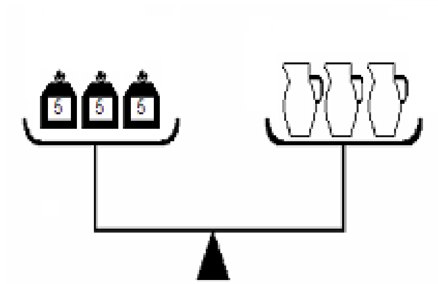


$$y + 5 + \underline{\ 10\ } = 4\,\underline{\ y\ }$$

Se quita una jarra de cada lado y se obtiene el peso de cada jarra, 5 kg (Alonso *et al*., 1993, p. 194).}



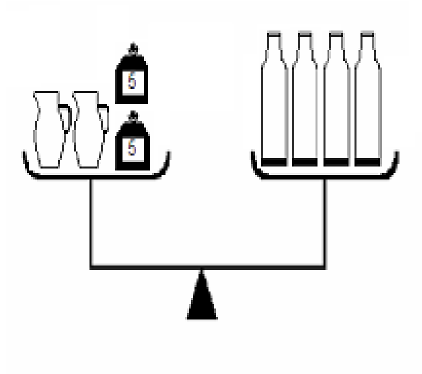
$$y - \underline{\ y\ } + 15 = 4y - \underline{\ y\ }$$



$$\underline{15\ } = \underline{\ 3\ }\,y$$

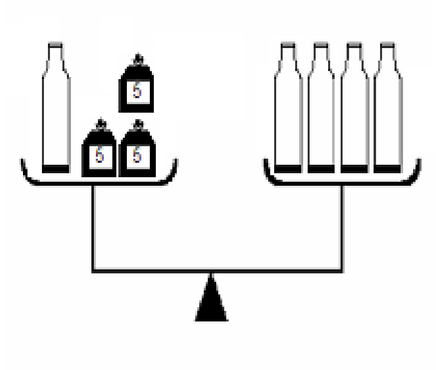
Para obtener el peso de las botellas podemos proceder de la misma manera (Alonso *et al*., 1993, p. 194).

Se crea una nueva balanza a partir de la segunda.



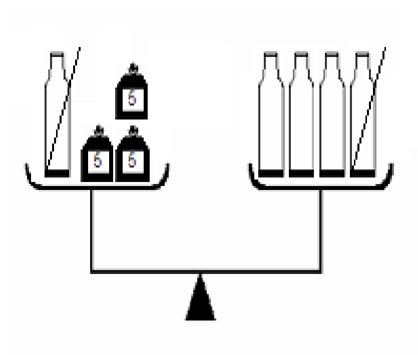
$$2\,\underline{\;y\;} + 10 = \underline{\;4\;}\,x$$

Se sustituyen las dos jarras por una botella y una pesa de 5 kg utilizando el equilibrio de la primera balanza.

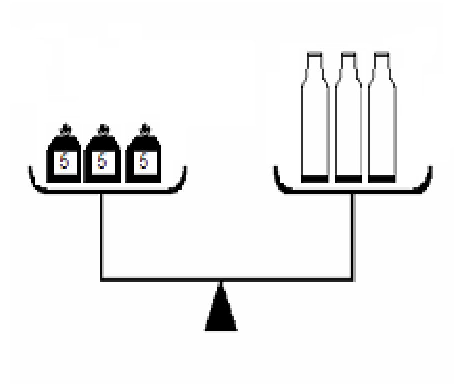


$$\underline{\;x\;} + 5 + \underline{\;10\;} = \underline{\;4\;}\,x$$

Se quita una botella de cada lado para obtener el peso de la botella.



$$x - \underline{\;x\;} + 15 = 4x - \underline{\;x\;}$$



$\underline{\ 15\ } = \underline{\ 3\ }\ x$

Se hace la repartición y a cada botella le corresponde el valor de 5 kg.

3) Transcribe en orden las ecuaciones de todas tus balanzas y observa sus transformaciones. (Nuevo)
Respuesta:

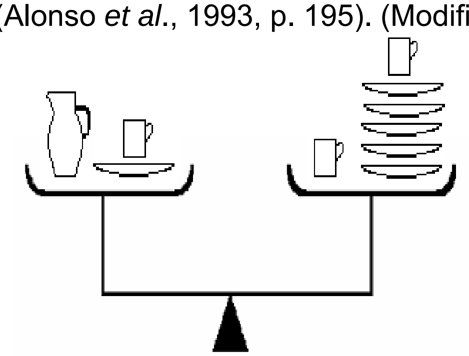
$$\begin{cases} x+5=2y \\ y+5=2x \end{cases}$$

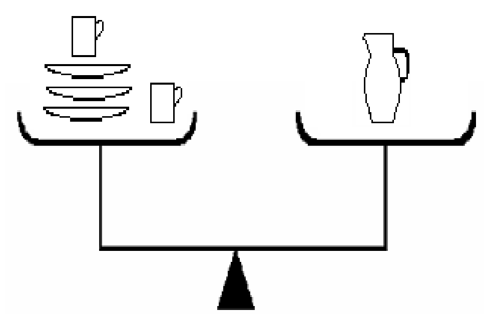
$$2x+10=4y$$
$$y+5+10=4y$$
$$y-y+15=4y-y$$
$$15=3y$$

$$2y+10=4x$$
$$x+5+10=4x$$
$$x-x+15=4x-x$$
$$15=3x$$

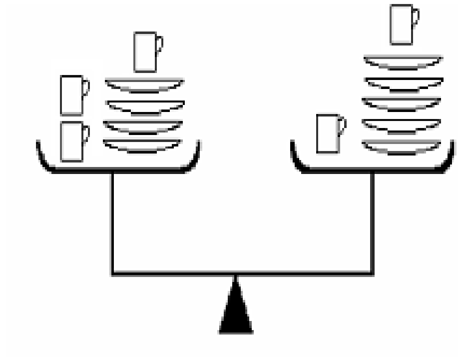
Actividad 23

Determina a partir de las siguientes balanzas cuántos platos debes poner en una nueva balanza para equilibrarla con una jarra. También determina con cuántos se equilibra con una taza. Dibuja las situaciones que vas obteniendo (Alonso *et al*., 1993, p. 195). (Modificado)

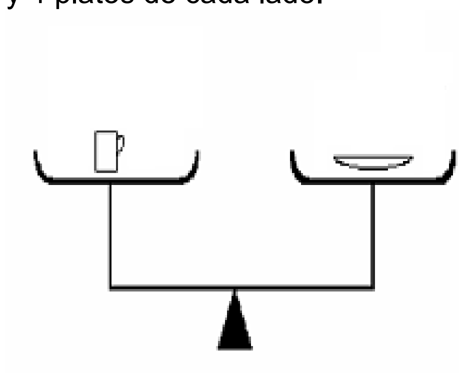




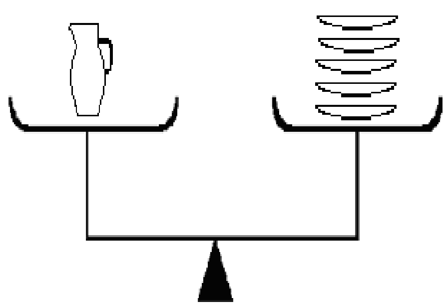
Respuesta:
Se sustituye en la primera balanza el peso de la jarra por 2 tazas y 3 platos, a partir de la segunda balanza.



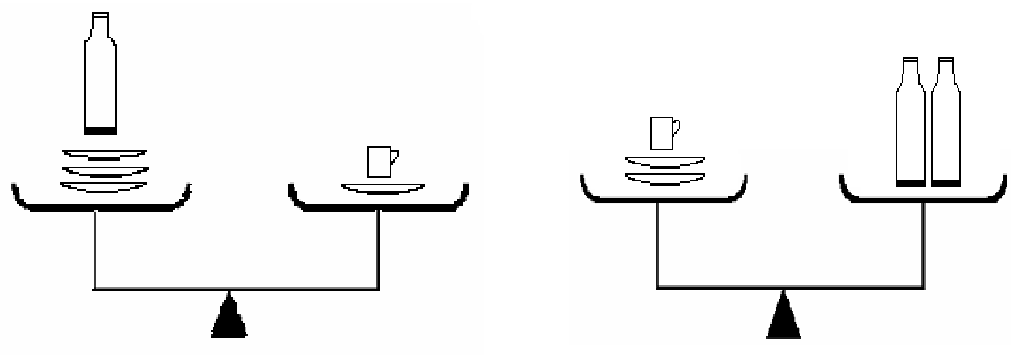
Se eliminan 2 tazas y 4 platos de cada lado.



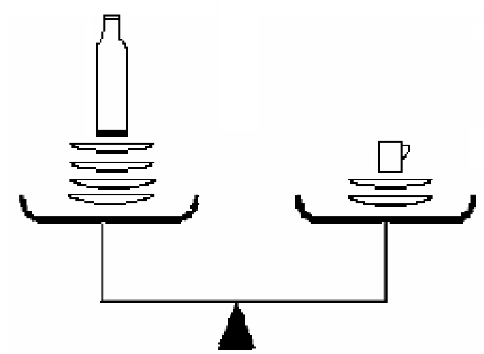
Como un plato es igual a una taza, se elimina en la primera balanza 1 plato y 1 taza del lado izquierdo, y del derecho, 2 tazas. Se obtiene así que una jarra es igual a 5 platos.



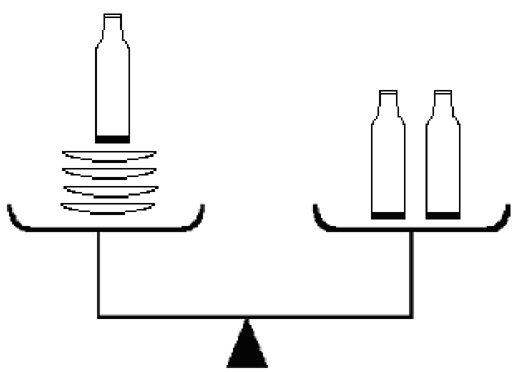
Actividad 24
En base a las dos balanzas que a continuación se muestran, especifica cuántos platos debes poner en una nueva balanza para equilibrarla con una botella. También determina con cuántos se equilibra con una taza. Dibuja las situaciones que vas obteniendo (Alonso *et al*., 1993, p. 196). (Modificado)



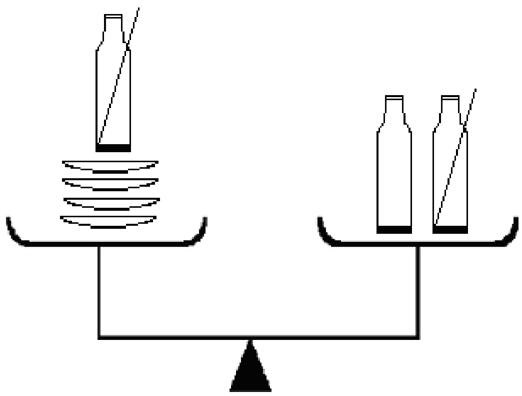
Respuesta:
Como no se puede sustituir directamente un peso en otro, se aumenta 1 plato de cada lado de la primera balanza.

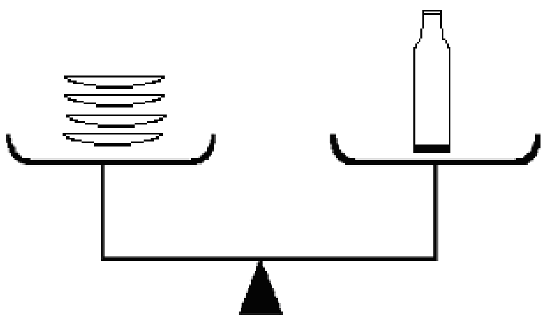


Ahora se sustituye en mi nueva balanza 1 taza con 2 platos por 2 botellas, a partir de la segunda balanza.

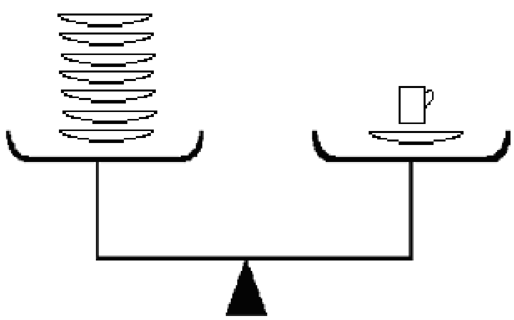


Se elimina 1 botella de cada lado, resulta que 4 platos es igual a 1 botella.

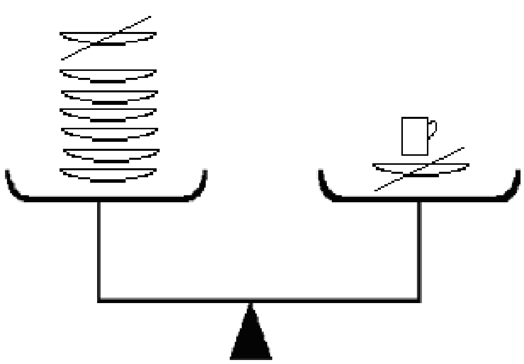


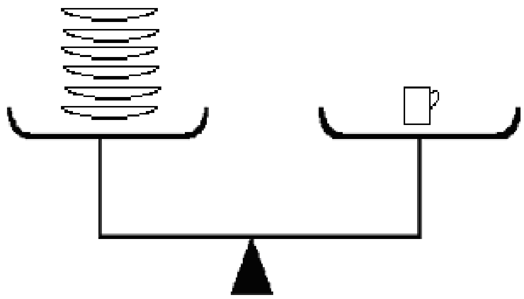


Como 4 platos es igual a 1 botella, sustituyo el valor de la botella en la primer balanza.

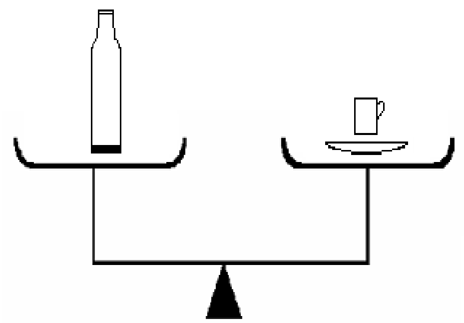


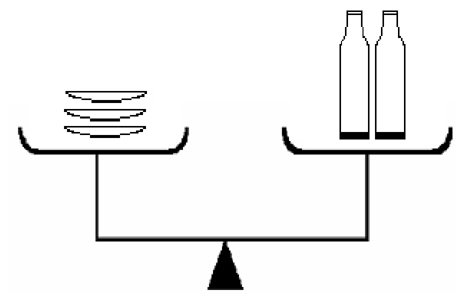
Se elimina 1 plato de cada lado, y se obtiene que 6 platos es igual a 1 taza.



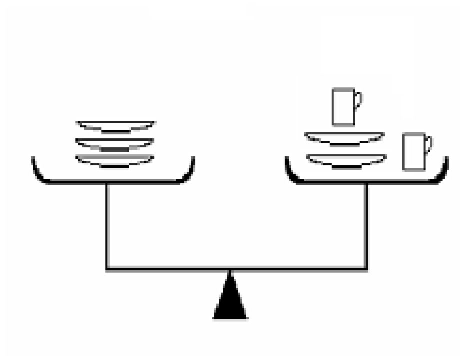


Actividad 25
Analiza estas dos balanzas e indica cuántas tazas se requieren para equilibrar una nueva balanza con una botella y cuántas tazas para equilibrarla con un plato. Dibuja las situaciones que vas obteniendo (Alonso *et al*., 1993, p. 196). (Modificado)

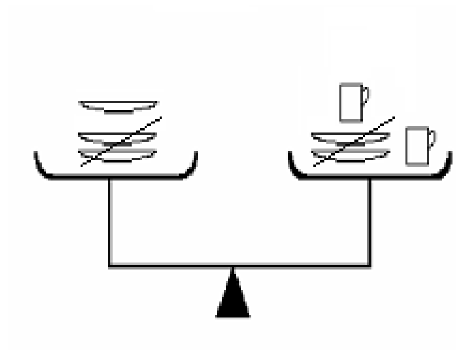




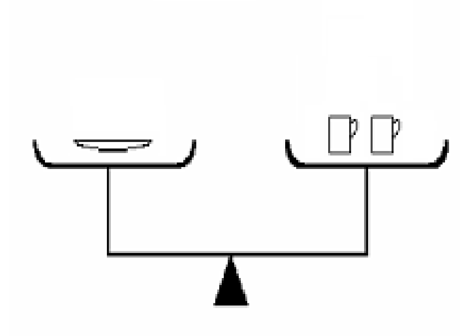
Respuesta:
Se sustituye en la segunda balanza 2 botellas por 2 tazas y 2 platos, a partir de la primera balanza.



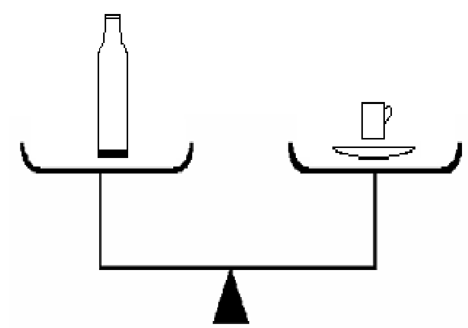
Se eliminan 2 platos de cada lado.



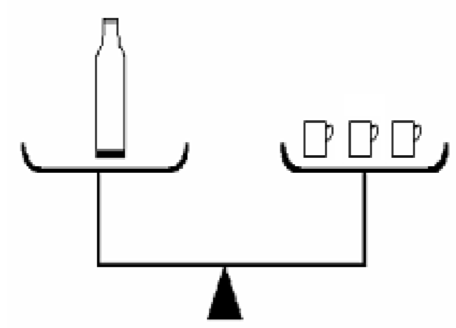
Se obtiene así que el valor de 1 plato equivale a 2 tazas.



Como ya se tiene el valor de un plato, se sustituye en la primera balanza 1 plato por 2 tazas.

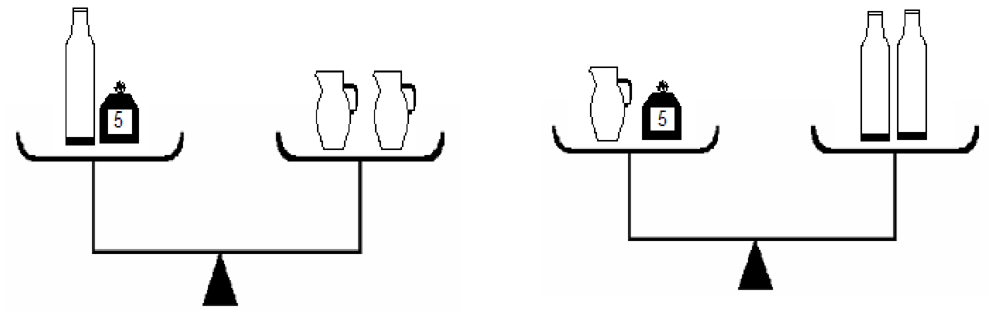


Se obtiene finalmente que 1 botella es igual a 3 tazas.



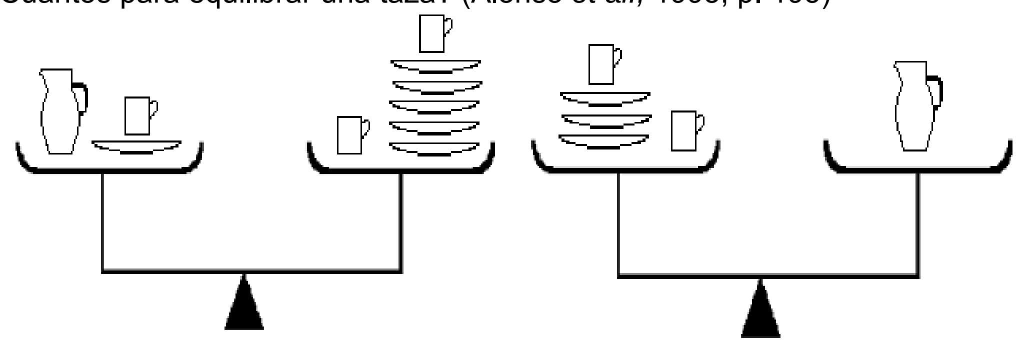
Anexo N2. Balanzas

Balanza 1
Estas balanzas están en equilibrio. En cada una de ellas hay botellas y jarras. También hay pesos, cuyos números indican hectogramos. Determina cuánto pesa cada botella y cada jarra (Alonso *et al.,* 1993, p. 194).



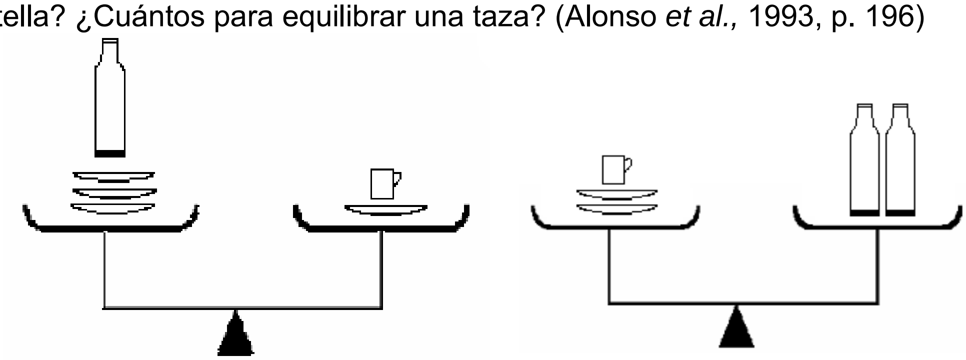
Solución:
Una jarra pesa 5 kg y una botella 5 kg.

Balanza 2
Observa estas balanzas. ¿Cuántos platos hacen falta para equilibrar una jarra? ¿Cuántos para equilibrar una taza? (Alonso *et al.,* 1993, p. 195)



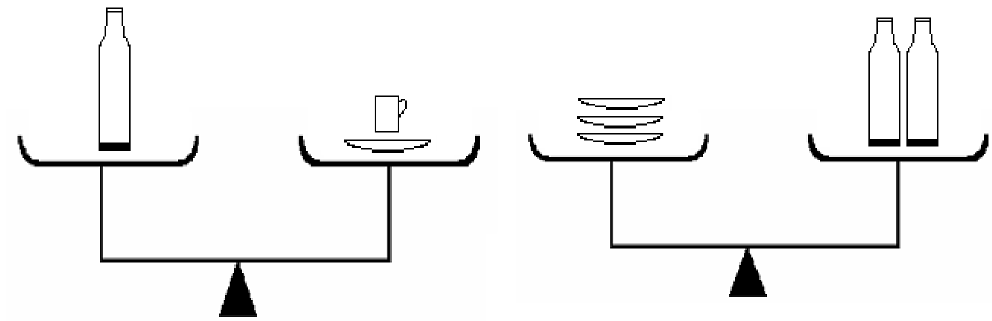
Solución:
Un plato pesa igual que una taza y una jarra igual que cinco platos.

Balanza 3
Observa estas balanzas. ¿Cuántos platos hacen falta para equilibrar una botella? ¿Cuántos para equilibrar una taza? (Alonso *et al.,* 1993, p. 196)



Solución:
4 platos equilibran una botella y 6 platos una taza.

Balanza 4
Observa estas balanzas. ¿Cuántas tazas se necesitan para equilibrar una botella? ¿Cuántas para equilibrar un plato? (Alonso *et al.,* 1993, p. 196)



Solución:
Un plato se equilibra con dos tazas, y una botella con tres tazas.

Anexo O1. Método de sustitución (propuesta)

Actividad 26
Expresa algebraicamente las siguientes situaciones; forma un sistema de dos ecuaciones y resuélvelo mediante el método de sustitución. No olvides especificar lo que simbolizan las letras que utilices y comprobar en la ecuación el valor obtenido (Alonso *et al*., 1993, p. 122). (Modificado)

a) 3 pantalones y 4 pares de calcetines cuestan 327 pesos
b) 1 pantalón y 2 pares de calcetines cuestan 121 pesos
c) 6 pantalones y 8 pares de calcetines cuestan 654 pesos
d) 4 pantalones y 6 pares de calcetines cuestan 448 pesos
e) 2 pantalones y 2 pares de calcetines cuestan 206 pesos

Respuesta:
Simbolización de las situaciones
a) $3x+4y=327$
b) $x+2y=121$
c) $6x+8y=654$
d) $4x+6y=448$
e) $2x+2y=206$

x: costo de un pantalón
y: costo de un par de calcetines

Para encontrar el valor de x y el de y, se establece el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x+4y=327 \\ x+2y=121. \end{cases}$$

Se despeja x en la segunda ecuación,

$$x+2y=121$$
$$x+2y-2y=121-2y$$
$$x=121-2y,$$

y se sustituye x en la primera ecuación para obtener y:

$$3x+4y=327$$
$$3(121-2y)+4y=327$$
$$363-6y+4y=327$$
$$363-363-6y+4y=327-363$$
$$-6y+4y=-36$$
$$-2y=-36$$
$$y=\frac{-36}{-2}$$
$$y=18.$$

Se sustituye ahora el valor de y en cualquiera de las dos primeras ecuaciones (o bien en donde x está despejada):

$$x=121-2y$$
$$x=121-2(18)$$
$$x=121-36$$

$$x = 85$$

Luego sustituyendo los valores de x y y obtenidos, se realiza la comprobación en cada ecuación.

$$3x + 4y = 327$$
$$3(85) + 4(18) = 327$$
$$255 + 72 = 327$$
$$327 = 327$$

$$x + 2y = 121$$
$$85 + 2(18) = 121$$
$$121 = 121$$

Anexo O2. Algoritmos de resolución de un sistema de ecuaciones lineales

Actividad 4
“Un ferretero vende bombillas y pilas. Si
3 bombillas y 4 pilas cuestan 327 pesetas, y
1 bombilla y 2 pilas cuestan 121 pesetas,
¿cuánto costarán:
6 bombillas y 8 pilas?
4 bombillas y 6 pilas?
2 bombillas y 2 pilas?

Actividad 5
“Es la misma situación que se plantea en la actividad anterior. Calcular el valor de:
1 bombilla y 1 pila
1 pila
1 bombilla.”

Anexo P. Método de igualación (propuesta)

Actividad 27

Afuera de la escuela existen dos centros de fotocopiado: Maxicopia y Copiaexpress. Maxicopia cobra un precio fijo de 600 pesos a la semana y 2.6 pesos por cada fotocopia, y Copiaexpress cobra 3.2 pesos por fotocopia (Alonso *et al*., 1993, p. 129). (Modificado)

1) Si en una semana yo requiero 5 fotocopias, ¿en cuál centro es más barato comprar? (Nuevo)

Respuesta:

Maxicopia

$$600 + 2.6\ (5) = 613$$

Copiaexpress

$$3.2\ (5) = 16$$

Es más barato comprar las 5 fotocopias en Copiaexpress.

2) ¿En qué centro es más barato sacar 50 fotocopias semanales? (Nuevo)

Respuesta:

Maxicopia

$$600 + 2.6\ (50) = 735$$

Copiaexpress

$$3.2\ (50) = 160$$

Es más barato sacar en Copiaexpress 50 fotocopias.

3) Si el número de fotocopias semanales fuera de 2000, 3000 y 5000, ¿en cuál conviene hacerlas? (Nuevo)

Respuesta:

Maxicopia

$$600 + 2.6\ (2000) = 5800$$
$$600 + 2.6\ (3000) = 8400$$
$$600 + 2.6\ (5000) = 13600$$

Copiaexpress

$$3.2\ (2000) = 6400$$
$$3.2\ (3000) = 9600$$
$$3.2\ (5000) = 16000$$

En estos tres casos conviene sacar las fotocopias en Maxicopia.

4) ¿Por qué crees que a veces es más barato y otras veces más caro sacar fotocopias en cualquiera de los dos centros de fotocopiado? Completa la siguiente tabla y observa detenidamente qué es lo que pasa en ambos centros (Alonso *et al*., 1993, p. 129). (Modificado)

Respuesta:

	Costo Maxicopia	*Costo Copiaexpress*
N° de fotocopias semanales		
1	*602.6*	*3.2*
2	*605.2*	*6.4*
3	*607.8*	*9.6*
4	610.4	12.8
5	613	16
10	626	32
50	735	160
100	860	320
200	1120	640
300	1380	960
500	1900	1600
1000	3200	3200
2000	5800	6400
5000	13600	16000
6000	16200	19200
7000	18800	22400

Ya que observaste la tabla, contesta la pregunta anterior.

5) ¿Cuántas fotocopias debemos sacar para que el costo sea igual en los dos centros de fotocopiado? (Alonso *et al*., 1993, p. 130)

6) Simboliza mediante una ecuación el costo que tiene semanalmente cada centro de fotocopiado, en función del número de fotocopias. Recuerda especificar qué significa cada letra que utilices (Alonso *et al*., 1993, p. 130). (Modificado)
Respuesta:

$$\begin{cases} x = 2.6y + 600 \\ x = 3.2y \end{cases}$$

x : costo de fotocopias semanales
y : número de fotocopias

7) Ahora contesta nuevamente la pregunta del inciso *5)*, pero a partir del método de igualación, es decir, iguala las dos ecuaciones entre sí, ya que el costo debe ser el mismo en ambos centros. Resuelve la ecuación que resulte (Alonso *et al*., 1993, p. 130).
Respuesta:

$$2.6y + 600 = 3.2y$$
$$2.6y - 2.6y + 600 = 3.2y - 2.6y$$

$$600 = 0.6y$$
$$\frac{600}{0.6} = y$$
$$1000 = y \text{ .}$$

8) Ahora obtén el valor de x sustituyendo el de y en la primera ecuación.
(Nuevo)
Respuesta:

$$x = 2.6y + 600$$
$$x = 2.6(1000) + 600$$
$$x = 2600 + 600$$
$$x = 3200 \text{ .}$$

9) Comprueba en el sistema $\begin{cases} x = 2.6y + 600 \\ x = 3.2y \end{cases}$ los dos valores obtenidos.

(Nuevo)
Respuesta:

$$x = 2.6y + 600$$
$$3200 = 2.6(1000) + 600$$
$$3200 = 2600 + 600$$
$$3200 = 3200$$

$$x = 3.2y$$
$$3200 = 3.2(1000)$$
$$3200 = 3200 \text{ .}$$

Actividad 28 (Nuevo)
Si se multiplica un número por 3 y se le suman 55 unidades, se obtiene el mismo resultado que si ese mismo número se multiplica por 6.
1) Trata de resolver este problema completando la siguiente tabla.

Respuesta:

	Situación A	*Situación B*
Número buscado		
1	*58*	*6*
2	*61*	*12*
3	64	18
4	67	24
5	70	30
6	73	36
7	76	42
8	79	48
9	82	54
10	85	60
11	88	66
12	91	72
13	94	78
14	97	84
15	100	90
16	103	96
17	106	102
18	109	108
19	112	114
20	115	120
21	118	126
22	121	132

Entre el 18 y el 19 se encuentra el número aludido, los estudiantes tratarán de encontrarlo sin imaginar la infinidad de números que se encuentran entre esos dos números.

2) Ahora encuentra el número con ayuda del método de igualación y comprueba su valor en el sistema. Al simbolizar el sistema, no olvides especificar lo que representa cada letra que utilices. (Nuevo)

Respuesta:

$$\begin{cases} x = 3y + 55 \\ x = 6y \end{cases}$$

x : total de la cantidad.

y : número buscado.

Se igualan las dos ecuaciones:

$$3y + 55 = 6y$$
$$3y - 3y + 55 = 6y - 3y$$

$$55 = 3y$$
$$\frac{55}{3} = y$$
$$18.33\bar{3} = y\,.$$

Como el número buscado es $y = \frac{55}{3}$, ahora se sustituye en la primera ecuación para obtener el valor de x:

$$x = 3y + 55$$
$$x = 3\left(\frac{55}{3}\right) + 55$$
$$x = \frac{165}{3} + 55$$
$$x = 55 + 55$$
$$x = 110\,.$$

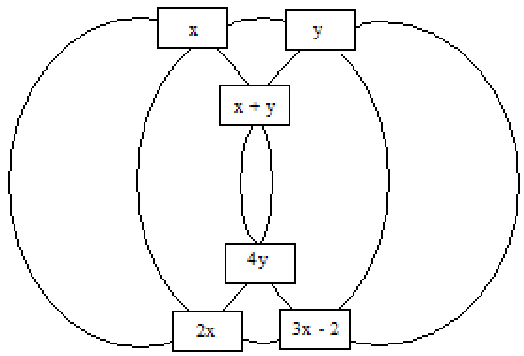
Se comprueba en el sistema de ecuaciones, sustituyendo x y y:

$$x = 3y + 55$$
$$110 = 3\left(\frac{55}{3}\right) + 55$$
$$110 = \frac{165}{3} + 55$$
$$110 = 55 + 55$$
$$110 = 110\,.$$
$$x = 6y$$
$$110 = 6\left(\frac{55}{3}\right)$$
$$110 = \frac{330}{3}$$
$$110 = 110\,.$$

Anexo Q. El juego de los círculos mágicos (propuesta)

Actividad 29

En el siguiente ejercicio de círculos mágicos se plantean sistemas de ecuaciones con coeficientes enteros. Todos los círculos contienen expresiones y en cada una de ellas existe 1 o 2 números desconocidos (x y y) (Alonso *et al*., 1993, p. 190).



1) En las tres circunferencias existe un número mágico que cuando sumas las expresiones aparece. Si ese número fuera 30, ¿cómo escribirías un sistema con 2 de las circunferencias? (Alonso *et al*., 1993, p. 191).

Respuesta:

$$x+(x+y)+4y+2x=30$$
$$4x+5y=30$$
$$(x+y)+y+4y+(3x-2)=30$$
$$4x+6y-2=30$$

Uno de los sistemas sería

Respuesta:

$$\begin{cases} 4x+5y=30 \\ 4x+6y-2=30. \end{cases}$$

2) Resuelve el sistema (Alonso *et al*., 1993, p. 191).

$$\begin{cases} 4x+5y=30 \\ 4x+6y-2=30. \end{cases}$$

Respuesta:

En la primera ecuación del sistema se despeja x:

$$4x+5y=30$$
$$4x+5y-5y=30-5y$$
$$4x=30-5y$$
$$\frac{4x}{4}=\frac{30-5y}{4}$$

$x=\frac{30-5y}{4}$

Se sustituye x en términos de y en la segunda ecuación:

$4x+6y-2=30$

$4\left(\frac{30-5y}{4}\right)+6y-2=30$

$(30-5y)+6y-2=30$

$30-5y+6y-2=30$

$30+y-2=30$

$28+y=30$

$28-28+y=30-28$

$y=2$

Se retoma la ecuación en que está despejada x y se sustituye y:

$x=\frac{30-5y}{4}$

$x=\frac{30-5(2)}{4}$

$x=\frac{30-10}{4}$

$x=\frac{20}{4}$

$x=5.$

Así, $x=5$ y $y=2.$

3) Comprueba el resultado. (Nuevo)

Respuesta:

$$\begin{aligned} 4x+5y&=30\\ 4(5)+5(2)&=30\\ 20+10&=30\\ 30&=30 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 4x+6y-2&=30\\ 4(5)+6(2)-2&=30\\ 20+12-2&=30\\ 30&=30 \end{aligned}$$

4) Forma otro sistema utilizando la tercera circunferencia y sustituye los valores de x y y (Alonso *et al*., 1993, p. 196).

Respuesta:

Al sumar la tercera circunferencia obtengo

$x+y+2x+(3x-2)=30$

$6x+y-2=30.$

Para formar un nuevo sistema se retoma la ecuación

$4x+5y=30$.

El sistema formado es

$$\begin{cases} 6x+y-2=30\\ 4x+5y=30. \end{cases}$$

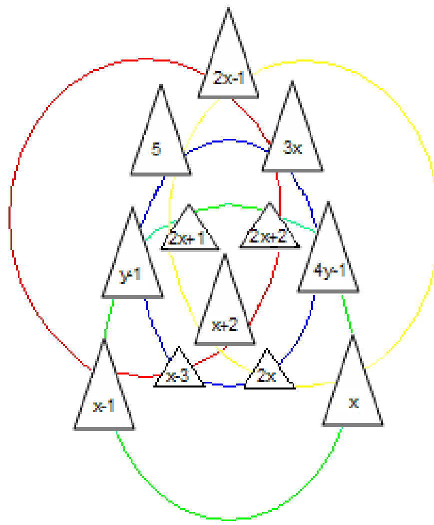
Se comprueba el sistema sustituyendo el valor de $x = 5$ y el de $y = 2$:

$$6x + y - 2 = 30 \qquad\qquad 4x + 5y = 30$$
$$6(5) + 2 - 2 = 30 \qquad\qquad 4(5) + 5(2) = 30$$
$$30 + 2 - 2 = 30 \qquad\qquad 20 + 10 = 30$$
$$30 = 30 \qquad\qquad 30 = 30$$

Actividad 30

Los círculos mágicos siguientes contienen un sistema que se puede resolver mediante el método de sustitución, ya que una de sus ecuaciones tiene sólo a la incógnita x.

Si observas las circunferencias, notarás en cada una de ellas letras que ocultan números; estos números, junto con las expresiones de cada círculo mágico, permiten obtener el mismo valor (Alonso *et al.*, 1993, p. 192).



1) Plantea la expresión de la circunferencia amarilla y la de la roja: (Nuevo)

Circunferencia amarilla

Respuesta:

$$x + 2x + (x + 2) + (2x + 1) + 5 + (2x - 1)$$
$$8x + 7$$

Circunferencia roja

$$(x + 2) + (x - 3) + (x - 1) + (2x - 1) + 3x + (2x + 2)$$
$$10x - 1$$

2) ¿Qué puedes hacer para que el valor de x sea el mismo en las dos expresiones? (Nuevo)

Respuesta: Igualarlas entre sí

$$8x + 7 = 10x - 1$$
$$8x - 8x + 7 = 10x - 8x - 1$$
$$7 = 2x - 1$$
$$7 + 1 = 2x - 1 + 1$$
$$8 = 2x$$
$$\frac{8}{2} = \frac{2x}{2}$$

$4 = x$

3) Sustituye el valor que encontraste para x en las expresiones simplificadas de las circunferencias amarilla y roja. (Nuevo)
Respuesta:
$x = 4$

Amarilla	Roja
$8x+7$	$10x-1$
$8(4)+7$	$10(4)-1$
$32+7$	$40-1$
39	39

4) ¿Cuál es la suma de cada circunferencia? Respuesta: 39 (Alonso *et al*., 1993, p. 192).

5) Completa las expresiones siguientes de las circunferencias verde y azul. (Nuevo)
Respuesta:
Circunferencia verde:
$x+(\underline{2x}+2)+(2x+\underline{1})+(\underline{x}-1)+(\underline{4y}-1)+(\underline{y}-1)=39$
Circunferencia azul:
$(\underline{4y}-1)+\underline{2x}+(\underline{x}-3)+(\underline{y}-1)+5+\underline{3x}=39$

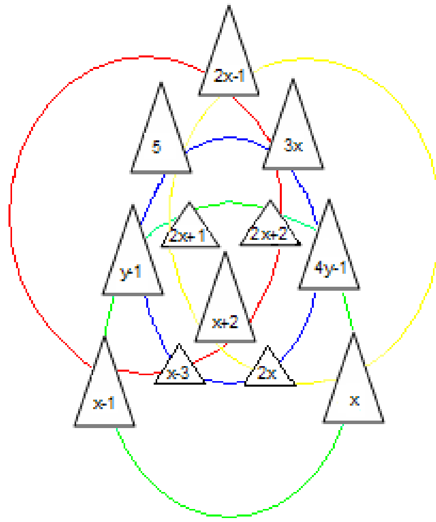
6) Simplifica ambas ecuaciones. (Nuevo)
Respuesta:
Circunferencia verde:
$6x+5y=39$
Circunferencia azul:
$6x+5y=39$

7) Sustituye el valor de x en alguna de las dos ecuaciones y obtén el valor de y (Alonso *et al*., 1993, p. 192).
Respuesta:
$x = 4$

$$\begin{aligned} 6x+5y&=39\\ 6(4)+5y&=39\\ 24+5y&=39\\ 24-24+5y&=39-24\\ 5y&=15\\ \frac{5y}{5}&=\frac{15}{5}\\ y&=3. \end{aligned}$$

Así, $x = 4$ y $y = 3$.

8) Completa en las circunferencias los valores de x y y. (Nuevo)
Respuesta:



9) Realiza las operaciones de todas las circunferencias para obtener el mismo resultado (Alonso *et al*., 1993, p. 192).

Respuesta:

Circunferencia amarilla

$x+2x+(x+2)+(2x+1)+5+(2x-1)$

$4+2(4)+(4+2)+(2(4)+1)+5+(2(4)-1)$

$4+8+6+(8+1)+5+(8-1)$

$20+9+5+7$

39

Circunferencia roja

$(x+2)+(x-3)+(x-1)+(2x-1)+3x+(2x+2)$

$(4+2)+(4-3)+(4-1)+(2(4)-1)+3(4)+(2(4)+2)$

$6+1+3+(8-1)+12+(8+2)$

$10+7+12+10$

39

Circunferencia verde

$$x+(2x+2)+(2x+1)+(x-1)+(4y-1)+(y-1)=39$$
$$4+(2(4)+2)+(2(4)+1)+((4)-1)+(4(3)-1)+(3-1)=39$$
$$4+(8+2)+(8+1)+3+(12-1)+2=39$$
$$4+10+9+3+11+2=39$$
$$39=39$$

Circunferencia azul

$$(4y-1)+2x+(x-3)+(y-1)+5+3x=39$$
$$(4(3)-1)+2(4)+(4-3)+(3-1)+5+3(4)=39$$
$$(12-1)+8+1+2+5+12=39$$
$$11+8+1+2+5+12=39$$
$$39=39$$

Anexo R. Sistema de ecuaciones, solución de un sistema y simultaneidad (propuesta)

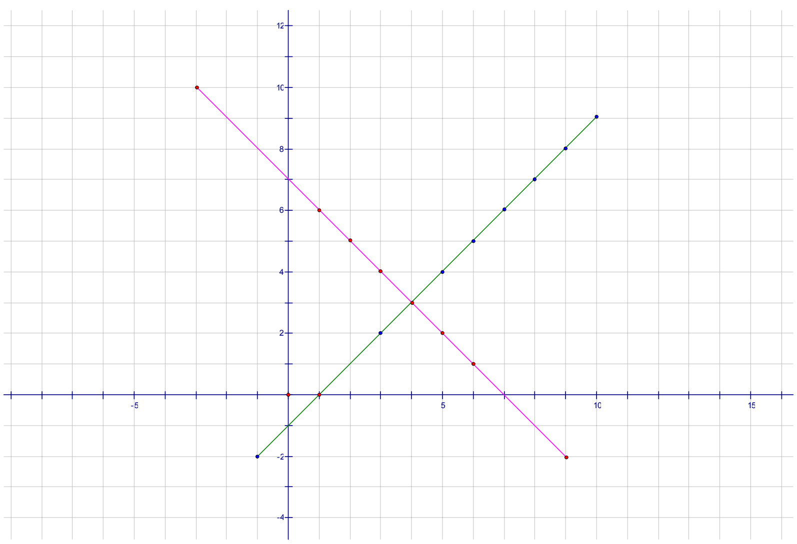
Actividad 31

Resuelve los siguientes cuestionamientos.

1) Grafica en un solo plano cartesiano las diferentes soluciones que pertenecen a las ecuaciones $f + t = 7$ y $f - t = 1$ utilizando dos colores para distinguir los puntos de cada ecuación. (Preisser, 1989, p. 58)

Respuesta:

$f + t = 7$	$f - t = 1$
$4 + 3 = 7$	$9 - 8 = 1$
$6 + 1 = 7$	$8 - 7 = 1$
$5 + 2 = 7$	$7 - 6 = 1$
$3 + 4 = 7$	$6 - 5 = 1$
$1 + 6 = 7$	$5 - 4 = 1$
$2 + 5 = 7$	$4 - 3 = 1$
	$3 - 2 = 1$
	$2 - 1 = 1$



2) ¿Qué información nos proporciona el punto que comparten las dos series de puntos representados en el plano? (Preisser, 1989, p. 59) (Modificado)
Respuesta: Es la solución común de ambas ecuaciones (4, 3).

3) ¿Por qué los otros puntos no son solución del problema? (Preisser, 1989, p. 59)
Respuesta: Porque cada uno de esos puntos es solución de una o de la otra ecuación, pero no de ambas.

4) Completa la siguiente afirmación.
Para que las ecuaciones $f + t = 7$ y $f - t = 1$ tengan una solución común se deben satisfacer simultáneamente; es decir, los valores de f y t en ambas ecuaciones deben ser <u>iguales</u> porque $f = \underline{4}$ y $t = \underline{3}$. (Nuevo)

5) ¿Cuántas y cuáles son las variables en cada ecuación? (Preisser, 1989, p. 59)
Respuesta: 2, *f* y *t*.

6) Si tuvieran un problema que diera lugar a dos ecuaciones con dos variables, ¿les serviría obtener su grafica y así encontrar la solución? (Preisser, 1989, p. 59)
Respuesta: Sí.

7*)* ¿Qué característica tiene el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} f+t=7 \\ f-t=1? \end{cases}$ (Nuevo)
Respuesta:
- Tiene 2 ecuaciones.
- Ambas ecuaciones tienen las mismas incógnitas: *f* y *t*.
- Las dos ecuaciones tienen una solución en común.

8) Con ayuda de la respuesta anterior, completa la siguiente definición de sistema de ecuaciones lineales (Preisser, 1989, p. 59).
Un <u>sistema</u> de ecuaciones lineales es una colección de <u>dos</u> <u>ecuaciones</u> de primer grado con <u>dos</u> incógnitas cada una. Ambas <u>ecuaciones</u> tienen una <u>solución</u> en común que las satisface <u>simultáneamente</u>.

9) Elabora un problema que incorpore dos cantidades desconocidas y simbolízalo con las ecuaciones correspondientes. No olvides mencionar lo que representa cada literal.

Respuesta:
La calificación de mi compañera y la mía suman 6. La calificación de ella menos la mía da como resultado 2.
x : calificación de mi compañera
y : calificación mía

$$\begin{cases} x+y=6 \\ x-y=2. \end{cases}$$

El docente revisará que la redacción del problema dé lugar a un sistema de 2 x 2 (Preisser, 1989, p. 60).
Las siguientes actividades serán resueltas en equipo.

10) Encuentren la solución del sistema lineal $\begin{cases} x+y=12 \\ x-y=2 \end{cases}$ realizando las combinaciones respectivas con números enteros positivos del 1 al 11 (Preisser, 1989, p. 60). (Modificado)

Respuesta:

$x+y=12$	$x-y=2$
1 + 11 = 12	
2 + 10 = 12	
3 + 9 = 12	3 – 1 = 2
4 + 8 = 12	4 – 2 = 2
5 + 7 = 12	5 – 3 = 2
6 + 6 = 12	6 – 4 = 2
7 + 5 = 12	7 – 5 = 2
8 + 4 = 12	8 – 6 = 2
9 + 3 =12	9 – 7 = 2
10 + 2 = 12	10 – 8 = 2
11 + 1 = 12	11 – 9 = 2

Una vez resuelta, el docente les preguntará cuántas combinaciones obtuvieron de la primera ecuación del sistema lineal $\begin{cases} x+y=12 \\ x-y=2. \end{cases}$

11) ¿Cuántas combinaciones con números enteros positivos del 1 al 13 creen que tenga la primera ecuación del sistema lineal $\begin{cases} x+y=14 \\ x-y=2? \end{cases}$ (Nuevo)

Respuesta: 13

$x+y=14$

13 + 1 = 14
12 + 2 = 14
11 + 3 = 14
10 + 4 = 14
9 + 5 = 14
8 + 6 = 14
7 + 7 = 14
6 + 8 = 14
5 + 9 = 14
4 + 10 = 14
3 + 11 = 14
2 + 12 = 14
1 + 13 = 14

Si otro compañero realizara todas las posibles combinaciones con números enteros positivos (del 1 al 49) en la primera ecuación del sistema lineal $\begin{cases} x+y=50 \\ x-y=10, \end{cases}$

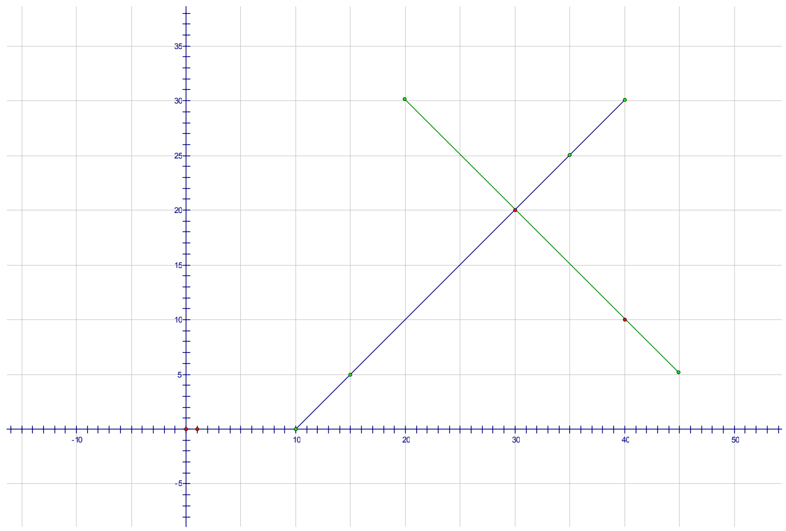
12) ¿Podrían saber cuántas son en total sin escribirlas? Observen qué es lo que pasa en los dos ejercicios anteriores. (Nuevo)
Respuesta: Sí (49)

13) Encuentren la solución del sistema anterior mediante el método grafico. Recuerden que basta determinar dos pares de coordenadas para que

puedan trazar cada una de las rectas que representan las ecuaciones del sistema. (Nuevo)
Respuesta:

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ x - y = 10 \end{cases}$$

$x + y = 50$	$x - y = 10$
(40, 10)	(15, 5)
(30, 20)	(35, 25)



Entonces:

$x = 30$

$y = 20$

14) Formulen un problema que dé origen al sistema lineal $\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 2. \end{cases}$ (Preisser, 1989, p. 60).

Respuesta:

La edad de mi hermano más la mía es 12 y la diferencia entre los años que él tiene y los míos es 2. Determina ambas edades.

15) Plantea tres problemas diferentes en diversos contextos para el sistema $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1. \end{cases}$ (Nuevo)

Respuesta:

- Salí con mi papá a jugar boliche; entre los dos hicimos 5 chuzas. Sin embargo, la diferencia entre sus chuzas y las mías es 1. ¿Podrás determinar cuántas anotó cada uno?
- Si tomamos tu dinero y el mío, en total tenemos 5 pesos, pero si le resto mi dinero al tuyo te queda 1 peso. ¿Cuánto tiene cada quien?
- El precio de unas galletas más el de un caramelo suman 5 pesos. La diferencia entre ambos costos es de 1 peso. ¿Cuánto cuesta cada artículo?

Si modificamos la segunda condición del siguiente problema:
“El precio de unas galletas más el de un caramelo suman 5 pesos. La diferencia entre ambos costos es de 1 peso”, $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1, \end{cases}$ como
“El precio de unas galletas más el de un caramelo suman 5 pesos. La diferencia entre ambos costos es de tres pesos”.

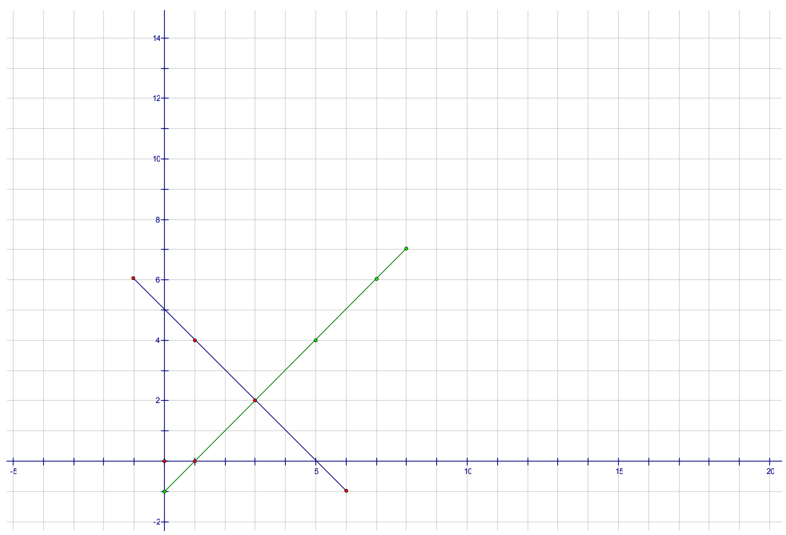
16) Formula el sistema correspondiente. (Nuevo)
Respuesta:

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=3 \end{cases}$$

17) Resuelve ambos sistemas por el método gráfico. (Nuevo)
Respuesta:

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1. \end{cases}$$

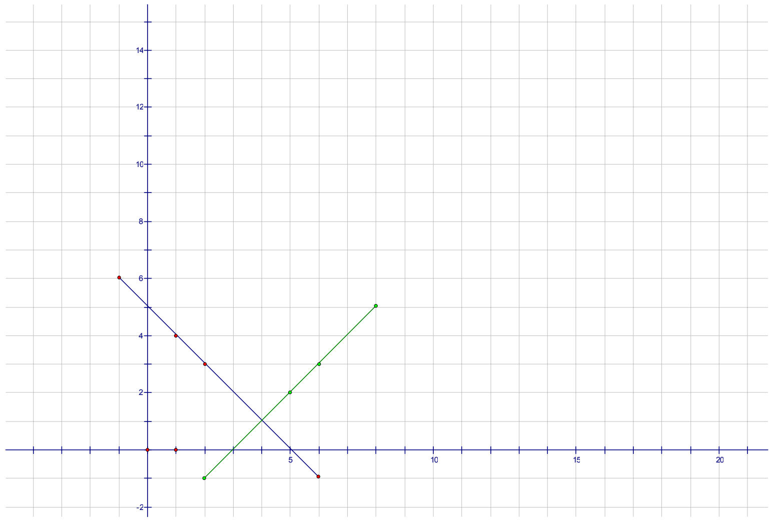
$x+y=5$	$x-y=1$
(1, 4)	(7, 6)
(3, 2)	(5, 4)



Entonces:
$x=3$
$y=2$

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=3 \end{cases}$$

$x+y=5$	$x-y=3$
(2, 3)	(6, 3)
(1, 4)	(5, 2)



Entonces:

$x = 4$

$y = 1$

18) ¿El valor de x y el de y en ambos sistemas es el mismo? (Nuevo)

Respuesta: No

19) Lee el siguiente problema; observa el sistema con que se representa. (Nuevo)

Fui al supermercado y pedí 1 kg de tortillas y 1 kg de azúcar. Cuando pasé a caja me cobraron 16 pesos por ambos productos. Quisiera saber el costo de cada cosa. Lo único que recuerdo es que la diferencia entre el precio de las tortillas y el del azúcar es de 2 pesos.

El problema se representa con el sistema $\begin{cases} x + y = 16 \\ x - y = 2. \end{cases}$ (Nuevo)

Si modificamos la segunda ecuación del sistema anterior, quedando

$$\begin{cases} x + y = 16 \\ x - y = 6, \end{cases}$$

20) ¿de qué manera cambiarías la redacción del problema anterior para dar origen a este nuevo sistema? (Nuevo)

Respuesta:

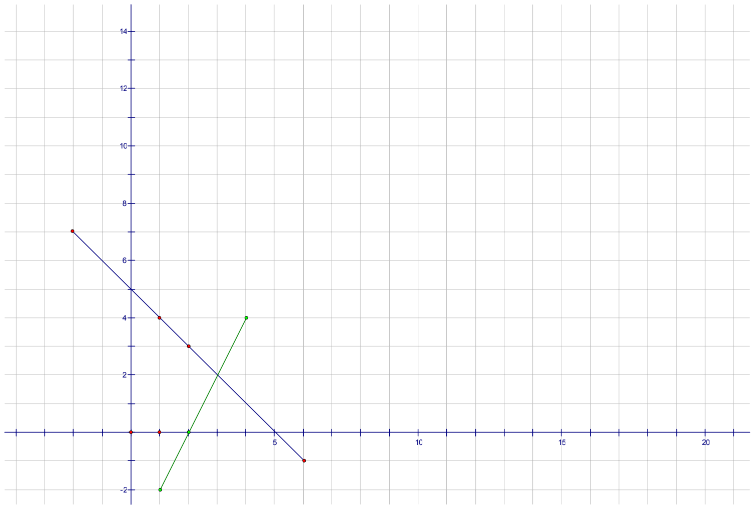
Fui al supermercado y pedí 1 kg de tortillas y 1 kg de azúcar. Cuando pasé a caja me cobraron 16 pesos por ambos productos. Quisiera saber el costo de cada cosa. Lo único que recuerdo es que la diferencia entre el precio de las tortillas y el del azúcar es de 6 pesos.

21) Encuentra con ayuda del método gráfico la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones.

Respuesta:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$

$x+y=5$	$2x-y=4$
(2, 3)	(4, 4)
(1, 4)	(2, 0)



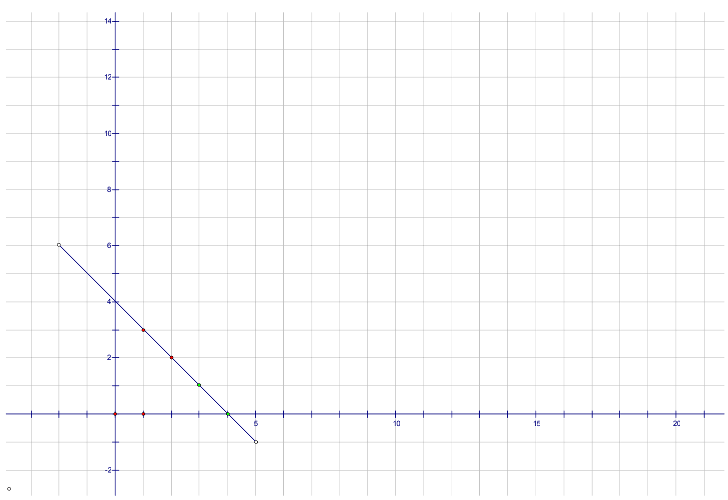
Entonces:

$x=3$

$y=2$

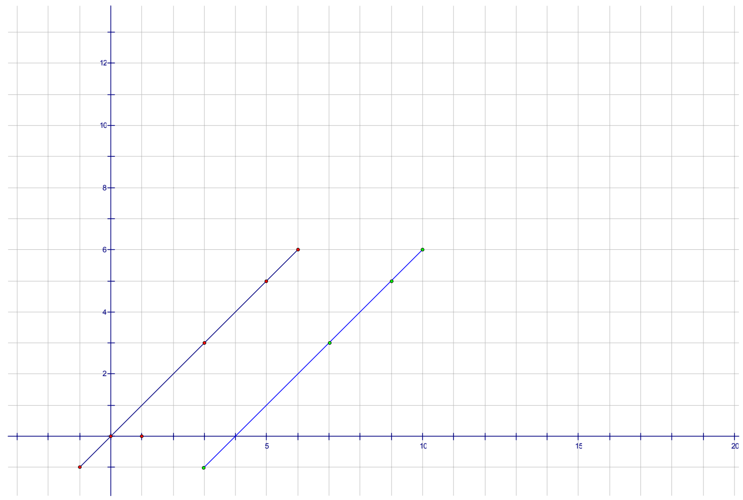
$$\begin{cases} y=4-x \\ 2x+2y=8 \end{cases}$$

$y=4-x$	$2x+2y=8$
(2, 2)	(3, 1)
(1, 3)	(4, 0)



$$\begin{cases} x=y \\ x-y=4 \end{cases}$$

$x = y$	$x - y = 4$
(5, 5)	(7, 3)
(3, 3)	(9, 5)



22) Formula un problema que origine un sistema de 2 x 2 y simbolízalo. Escribe en una hoja aparte tu nombre y la redacción del problema, y entrégaselo al docente.

Respuesta:

La maestra de matemáticas mencionó que obtuve 18 puntos en total al sumar la calificación de mi examen y mis tareas. Si resto al puntaje del examen el de las tareas obtengo 2. ¿Qué calificación logré en cada actividad?

x: Examen

y: Tarea

$$\begin{cases} x + y = 18 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$x = 10$

$y = 2$

Anexo S. Ecuaciones equivalentes y sistemas compatibles, incompatibles, determinados e indeterminados (propuesta)

Actividad 32

Si sumamos las canicas de mi primo y las mías el resultado es 4, y el doble de la cantidad de cada uno suman 8. (Nuevo)

Este problema se simboliza mediante el sistema $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x+2y=8. \end{cases}$

1) Observa el sistema y determina qué operación realizarías en la primera ecuación para obtener la segunda. (Nuevo)

Respuesta: Multiplicar por 2 la primera ecuación (o bien sumarla dos veces).

2) Analiza los siguientes sistemas y especifica qué operación harías para obtener la segunda ecuación de cada uno. (Nuevo)

a) $\begin{cases} x+y=10 \\ 3x+3y=30 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2x+2y=12 \\ x+y=6 \end{cases}$

Respuesta: En el primer sistema se multiplica por 3 la primera ecuación o se suma tres veces y en el segundo se divide entre 2 la primera ecuación.

3) Plantea un problema que represente a cada uno de los dos sistemas anteriores. (Nuevo)

Respuesta:

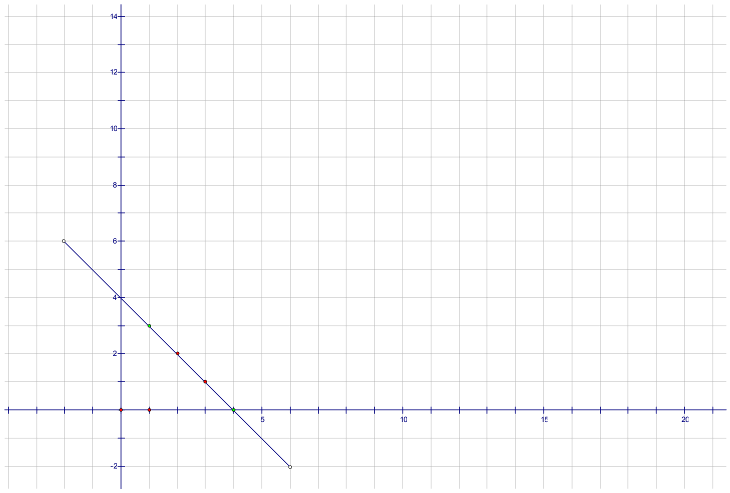
- Ahorrando el dinero que me dan el sábado y el domingo sumarían 10 pesos; si me propongo juntar lo de 3 sábados más lo de 3 domingos tendré 30 pesos.
- Si sumo el doble de mis juguetes más el doble de tus juguetes tendremos 12; luego, mis juguetes más los tuyos suman 6.

4) Grafica los 3 sistemas anteriores y observa sus comportamientos. (Nuevo)

Respuesta:

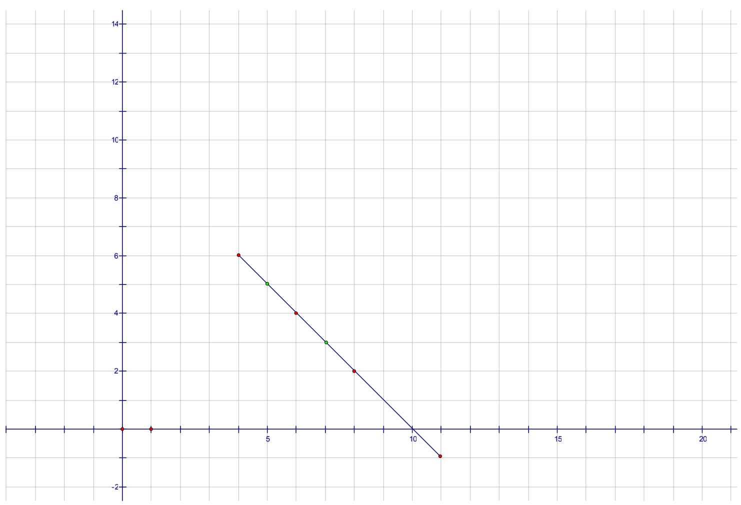
$$\begin{cases} x+y=4 \\ 2x+2y=8 \end{cases}$$

$x+y=4$	$2x+2y=8$
(3, 1)	(1, 3)
(2, 2)	(4, 0)



$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 3x + 3y = 30 \end{cases}$$

$x + y = 10$	$3x + 3y = 30$
(6, 4)	(5, 5)
(8, 2)	(7, 3)



$$\begin{cases} 2x + 2y = 12 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

$2x + 2y = 12$	$x + y = 6$
(4, 2)	(1, 5)
(3, 3)	(2, 4)

5) A partir de la ecuación $x+3y=5$ formula un sistema con muchas soluciones (compatible indeterminado) (Preisser, 1989, p. 63).

Respuesta: $\begin{cases} x+3y=5 \\ 2x+6y=10 \end{cases}$

6) Observa el sistema $\begin{cases} x-y=3 \\ x-y=6. \end{cases}$ ¿Qué es lo que cambia de la primera ecuación para obtener la segunda? (Nuevo)

Respuesta: El resultado.

7) ¿Qué es lo que cambia en la primera ecuación para obtener la segunda en el sistema $\begin{cases} x+y=6 \\ 2x+2y=4? \end{cases}$ (Nuevo)

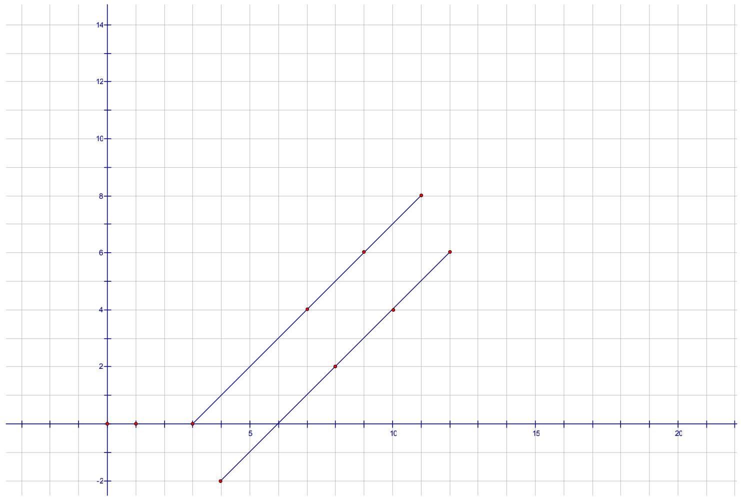
Respuesta: Los coeficientes y el resultado

8) Grafica cada uno de los dos sistemas anteriores y observa cómo las rectas muestran que las ecuaciones son independientes. (Nuevo)

Respuesta:

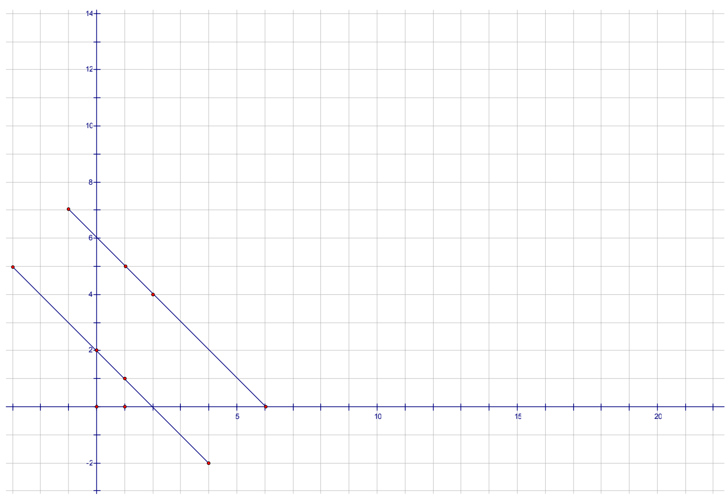
$$\begin{cases} x-y=3 \\ x-y=6 \end{cases}$$

$x-y=3$	$x-y=6$
(9, 6)	(10, 4)
(7, 4)	(8, 2)



$$\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$$

$x + y = 6$	$2x + 2y = 4$
(2, 4)	(1, 1)
(1, 5)	(0, 2)



9) Construyan y anoten en su cuaderno un sistema de 2 x 2 del tipo que quieran (con única solución, muchas soluciones o ninguna solución). Formen una ronda en la cual deberán leer su sistema y otro compañero dirá cuántas soluciones tiene y por qué (Preisser, 1989, p. 63).

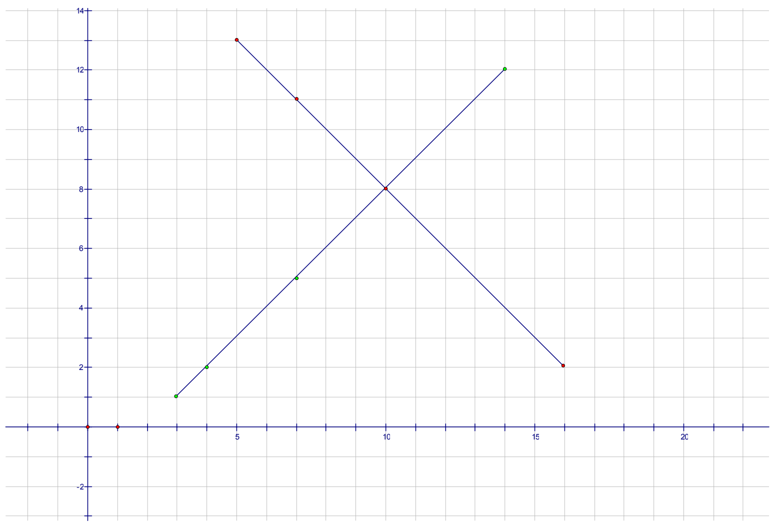
El docente formará equipos y entregará uno de los problemas del inciso *22)* de la actividad 31(véase el anexo R) a cada equipo; en seguida responderán los siguientes ejercicios.

10) Representen mediante un sistema el problema que les tocó y encuentren su solución gráficamente (Preisser, 1989, p. 64). (Modificado)
Respuesta:

La maestra de matemáticas mencionó que obtuve 18 puntos en total al sumar la calificación de mi examen y mis tareas. Si resto al puntaje del examen el de las tareas obtengo 2. ¿Qué calificación logré en cada actividad?

$$\begin{cases} x+y=18 \\ x-y=2 \end{cases}$$

$x+y=18$	$x-y=2$
(10, 8)	(4, 2)
(7, 11)	(7, 5)



Entonces:

$x=10$

$y=8$

11) Modifiquen el problema anterior para obtener un sistema compatible indeterminado y otro incompatible (Preisser, 1989, p. 64).

Respuesta:

- Sistema compatible indeterminado

La maestra de matemáticas mencionó que obtuve 18 puntos en total al sumar la calificación de mi examen y mis tareas. Si sumo el doble de la calificación de mi examen con el doble de calificación de las tareas obtengo 36. ¿Qué calificación logré en cada actividad?

- Sistema incompatible

La maestra de matemáticas mencionó que obtuve 18 puntos en total al sumar la calificación de mi examen y mis tareas. La suma de ambas calificaciones es 20.

12) Escriban el sistema correspondiente a cada caso (Preisser, 1989, p. 64).

Respuesta:

- Sistema compatible indeterminado

$$\begin{cases} x+y=18 \\ 2x+2y=36 \end{cases}$$

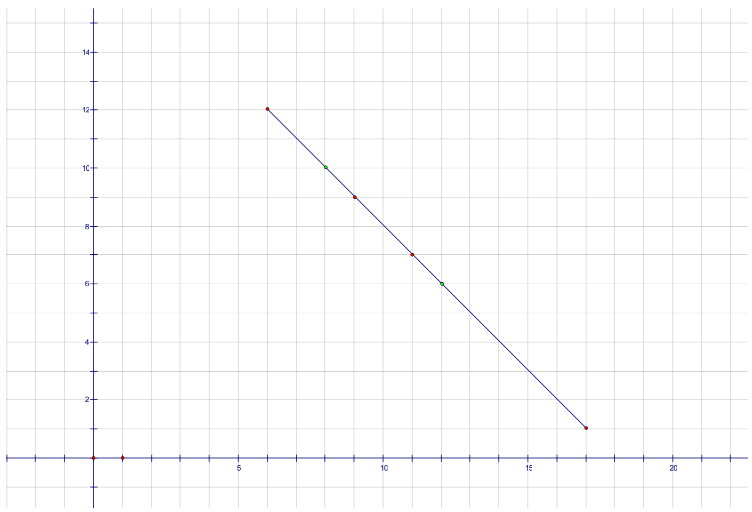
- Sistema incompatible

$$\begin{cases} x+y=18 \\ x+y=20 \end{cases}$$

13) Grafiquen ambos sistemas. (Nuevo)
Respuesta:

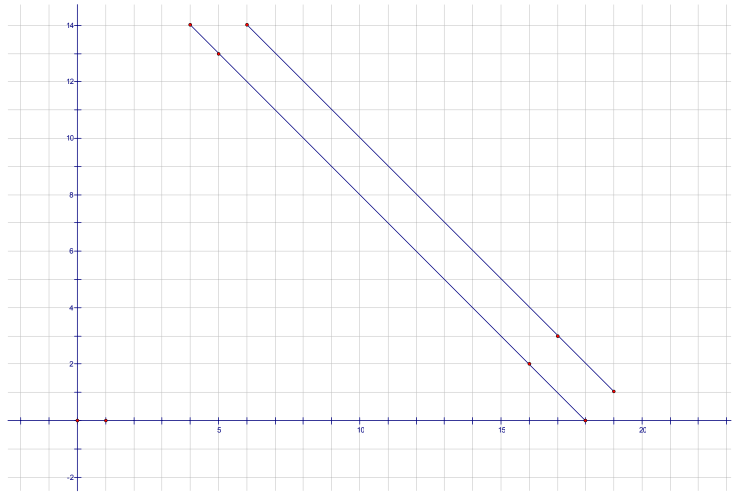
$$\begin{cases} x+y=18 \\ 2x+2y=36 \end{cases}$$

$x+y=18$	$2x+2y=36$
(11, 7)	(12, 6)
(9, 9)	(8, 10)



$$\begin{cases} x+y=18 \\ x+y=20 \end{cases}$$

$x+y=18$	$x+y=20$
(5, 13)	(6, 14)
(16, 2)	(17, 3)

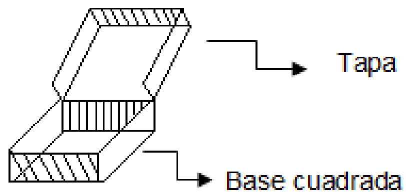


14) Elijan las hojas de 2 o 3 equipos para leer tanto los enunciados del problema original como las otras dos versiones de cada uno, sin decir a qué tipo de sistemas corresponde, para que el resto del grupo los clasifique (Preisser, 1989, p. 64).

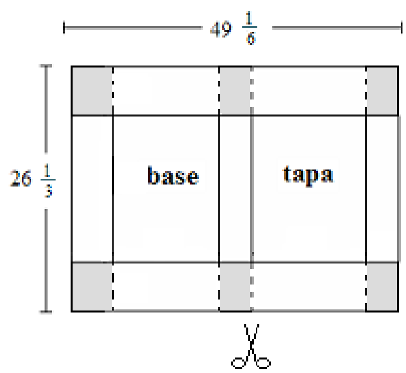
Anexo T. Aplicación de los sistemas compatibles determinados (propuesta)

Actividad 33
Para el desarrollo de esta actividad el docente les pedirá a los estudiantes una cartulina de $49\frac{1}{6}$ cm por $26\frac{1}{3}$ cm, tijeras, resistol blanco y cinta adhesiva.

1) Con el pedazo de cartulina que trajeron construirán una caja con tapa y base cuadrada, como la que a continuación se muestra (Preisser, 1989, p. 65).



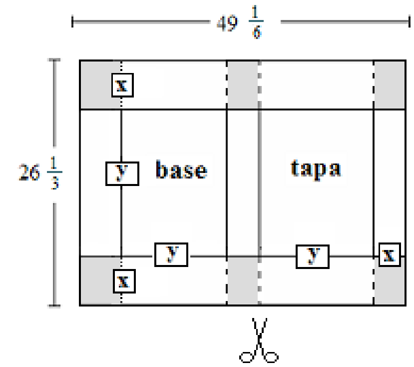
2) Observa el esquema de la caja desdoblada (Preisser, 1989, pp. 65-66). (Modificado)



Las partes sombreadas servirán de unión, así que no cortes más allá de las partes punteadas.

3) ¿Qué es lo que faltaría determinar para poder armar la caja? (Preisser, 1989, p. 66)
Respuesta: Las medidas del lado de la base y la altura.

4) Simboliza en el esquema (completando los recuadros) las medidas desconocidas utilizando letras del abecedario (Preisser, 1989, p. 66). (Modificado)
Respuesta:



5) ¿Podrán servirnos los sistemas de ecuaciones para determinar las dos cantidades desconocidas? (Preisser, 1989, p. 66)
Respuesta: Sí.

6) Las relaciones de las cantidades desconocidas se pueden representar mediante un sistema de 2 x 2. Completa este sistema (Preisser, 1989, p. 66). (Modificado)

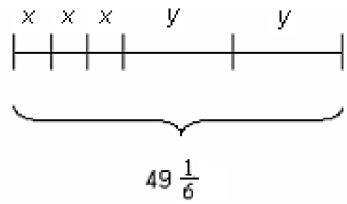
$$\begin{cases} \underline{3}\ \underline{x} + \underline{2}\ \underline{y} = 49\ 1/6 \\ \underline{2}\ \underline{x} + \quad \underline{y} = 26\ 1/3 \end{cases}$$

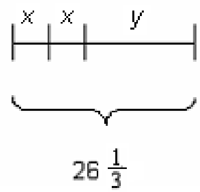
El siguiente inciso deberá ser resuelto en equipo.
7) Resuelvan el sistema de ecuaciones obtenido anteriormente, mediante el método gráfico (Preisser, 1989, p. 66).

A esta actividad el docente le deberá destinar poco tiempo, ya que lo importante es que los estudiantes se percaten de la dificultad y limitaciones del método gráfico para determinar soluciones que no son enteras (Preisser, 1989, p. 67).

8) Observa los diagramas que representan las ecuaciones del sistema

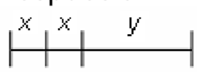
$$\begin{cases} 3x + 2y = 49\dfrac{1}{6} \\ 2x + y = 26\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$3x + 2y = 49\frac{1}{6}$ $\longrightarrow$ 

$2x + y = 26\frac{1}{3}$ $\longrightarrow$ 

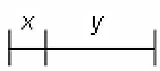
9) Dibuja el segmento que está presente en los dos diagramas anteriores con sus respectivas letras. (Nuevo)

Respuesta:



10) Resta el segundo segmento al primero y dibuja el segmento que resulta con sus respectivas letras. (Nuevo)

Respuesta:



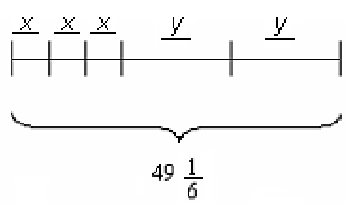
11) Representa mediante una ecuación el segmento anterior. (Nuevo)

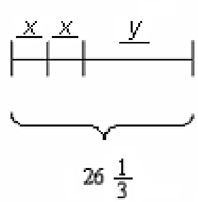
Respuesta:

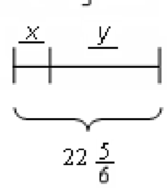
$$x + y = 22\frac{5}{6}$$

12) Completa lo que falta (Preisser, 1989, p. 67). (Modificado)

$$\begin{array}{r} \underline{3}\,\underline{x} + \underline{2}\,\underline{y} = 49\frac{1}{6} \\ - \quad \underline{2}\,\underline{x} + \underline{y} = 26\frac{1}{3} \\ \hline \underline{x} + \underline{y} = 22\frac{5}{6} \end{array}$$



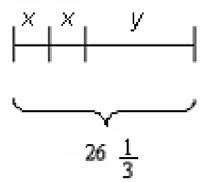




13) Encuentra el valor de *x* y el de *y* mediante un procedimiento similar al anterior. (Nuevo)

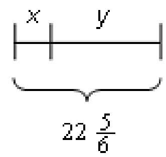
Respuesta:

$$2x + y = 26\tfrac{1}{3}$$

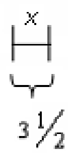


$$-$$

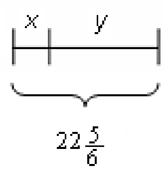
$$\underline{x + y = 22\tfrac{5}{6}}$$



$$x = 3\tfrac{1}{2}$$

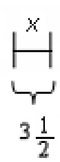


$$x + y = 22\tfrac{5}{6}$$

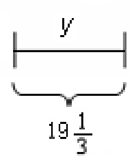


$$-$$

$$\underline{x = 3\tfrac{1}{2}}$$



$$y = 19\tfrac{1}{3}$$



14*)* Comprueba si la solución del sistema $\begin{cases} x + y = 22\dfrac{5}{6} \\ x = 3\dfrac{1}{2} \end{cases}$ es la misma que la del primer sistema, $\begin{cases} 3x + 2y = 49\dfrac{1}{6} \\ 2x + y = 26\dfrac{1}{3} \end{cases}$. Es decir, sustituye los valores de *x* y *y* en el sistema y realiza las operaciones (Preisser, 1989, p. 68). (Modificado)

Respuesta:

Comprobación de $\begin{cases} x+y=22\frac{5}{6} \\ x=3\frac{1}{2} \end{cases}$:

$$x+y=22\frac{5}{6}$$

$$3\frac{1}{2}+19\frac{1}{3}=22\frac{5}{6}$$

$$22\frac{5}{6}=22\frac{5}{6}$$

$$x=3\frac{1}{2}$$

$$3\frac{1}{2}=3\frac{1}{2}$$

Comprobación de $\begin{cases} 3x+2y=49\frac{1}{6} \\ 2x+y=26\frac{1}{3} \end{cases}$:

$$3x+2y=49\frac{1}{6}$$

$$3\left(3\frac{1}{2}\right)+2\left(19\frac{1}{3}\right)=49\frac{1}{6}$$

$$10\frac{1}{2}+38\frac{2}{3}=49\frac{1}{6}$$

$$49\frac{1}{6}=49\frac{1}{6}$$

$$2x+y=26\frac{1}{3}$$

$$2\left(3\frac{1}{2}\right)+19\frac{1}{3}=26\frac{1}{3}$$

$$7+19\frac{1}{3}=26\frac{1}{3}$$

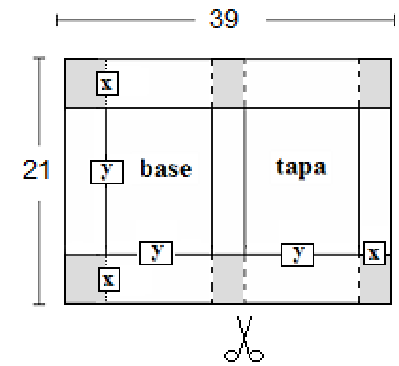
$$26\frac{1}{3}=26\frac{1}{3}$$

15) ¿Qué pasa con la caja si los valores de *x* y *y* sólo satisfacen una o ninguna de las dos ecuaciones del sistema original? (Preisser, 1989, p. 68)
Respuesta: No se puede construir.

16) Tracen en una cartulina el esquema de la caja desdoblada con las medidas de *x* y *y*, y ármenla (Preisser, 1989, p. 69). [Realicen este ejercicio en equipo.]

17) Traza un croquis a escala de la caja desdoblada considerando que las medidas son 39 cm de largo y 21 cm de ancho. Plantea el sistema de esta nueva situación y simplifícalo hasta hallar el valor de *x* y el de *y* (Preisser, 1989, p. 69).

Respuesta:



$$\begin{cases} 3x + 2y = 39 \\ 2x + y = 21 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 3x + 2y = 39 \\ -\quad 2x + \;\; y = 21 \\ \hline x + \;\; y = 18 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2x + y = 21 \\ -\quad x + y = 18 \\ \hline x \quad = 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} x + y = 18 \\ -\quad x \quad = 3 \\ \hline y = 15 \end{array}$$

18) Determinen si los siguientes sistemas tienen o no la misma solución y argumenten su respuesta (Preisser, 1989, p. 69).

$$\begin{cases} 4x + 2y = 14 \\ 3x + y = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + y = 9 \\ x + y = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 5 \\ 2x = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 2y = 10 \\ 2x = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 2y = 10 \\ 2y = 6 \end{cases}$$

Respuesta: Todos los sistemas tienen la misma solución, ya que son equivalentes; es decir, se obtienen uno de otro, como se muestra a continuación.

Si se restan las ecuaciones del sistema $\begin{cases} 4x + 2y = 14 \\ 3x + y = 9, \end{cases}$ obtenemos el sistema

$\begin{cases} 3x + y = 9 \\ x + y = 5 \end{cases}$:

$$
\begin{array}{r}
- \begin{array}{r} 4x + 2y = 14 \\ 3x + \ \ y = \ 9 \end{array} \\
\hline
x + \ \ y = \ 5
\end{array}
$$

Si se restan entre sí las ecuaciones del sistema $\begin{cases} 3x + y = 9 \\ x + y = 5, \end{cases}$ obtenemos otro:

$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x = 4. \end{cases}$

$$
\begin{array}{r}
- \begin{array}{r} 3x + y = 9 \\ x + y = 5 \end{array} \\
\hline
2x \qquad = 4
\end{array}
$$

Al multiplicar por 2 la primera ecuación del sistema $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x = 4 \end{cases}$, formamos el sistema $\begin{cases} 2x + 2y = 10 \\ 2x = 4. \end{cases}$

$$2(x + y = 5)$$

El sistema $\begin{cases} 2x + 2y = 10 \\ 2y = 6 \end{cases}$ se obtiene de restarle $2x = 4$ a la primera ecuación:

$$
\begin{array}{r}
- \begin{array}{r} 2x + 2y = 10 \\ 2x \qquad = \ 4 \end{array} \\
\hline
2y = \ 6
\end{array}
$$

Anexo U. Método de suma y resta (propuesta)

Actividad 34

1) Analiza y describe cómo se obtuvo el último sistema del inciso *18)* de la actividad 33 (Preisser, 1989, p. 71).

Respuesta:

El sistema $\begin{cases} 2x+2y=10 \\ 2y=6 \end{cases}$ se forma tomando la primera ecuación y la que resulta de la resta del sistema previo:

$$-\begin{array}{r} 2x+2y=10 \\ \underline{2x \quad\;\; = 4} \\ 2y=6. \end{array}$$

2) ¿Por qué al restar las ecuaciones del segundo sistema se pudo eliminar una de las variables? (Preisser, 1989, p. 71)

Respuesta: Porque una literal tiene el mismo coeficiente en ambas ecuaciones.

3) ¿Cuál era el coeficiente de la variable que se tenía que eliminar en cada una de ellas? (Preisser, 1989, p. 71)

Respuesta: 1.

4) ¿Cuál era el signo de esos coeficientes? (Preisser, 1989, p. 71)

Respuesta: Positivo.

5) Completa la siguiente regla general para simplificar un sistema (Preisser, 1989, p. 71). (Modificado)

Para eliminar en un _sistema_ una de las variables y poder así obtener una ecuación con una _incógnita_, se restan las dos _ecuaciones_, con la condición de que la variable que se elimine tenga el mismo _signo_ y el mismo coeficiente en ambas (Preisser, 1989, p. 72).

6) Simplifica y resuelve el sistema $\begin{cases} x+y=12 \\ x-y=2 \end{cases}$ con ayuda de la regla anterior, obteniendo así dos sistemas equivalentes (Preisser, 1989, p. 72). Al restar las literales con el mismo coeficiente y signo debes poner el 0 junto a la letra, por ejemplo:

$$-\begin{array}{r} x+3y=40 \\ \underline{x+\;\; y=20} \\ 0x+2y=20. \end{array}$$

Respuesta:

$$-\begin{array}{r} x+\;\; y=12 \\ \underline{x-\;\; y=\;\;2} \\ 0x+2y=10 \end{array} \qquad -\begin{array}{r} 0x\;+2y=10 \\ \underline{x\;-\;\;y=\;\;2} \\ -x\;+3y=\;\;8 \end{array} \qquad -\begin{array}{r} x-\;\;y=2 \\ \underline{-x+3y=8} \\ 2x-4y=-6 \end{array}$$

Los sistemas equivalentes son

$$\begin{cases} 0x + 2y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x - y = 2 \\ -x + 3y = 8. \end{cases}$$

7) ¿Alguna resta dio directamente el valor de *y*? (Nuevo)
Respuesta: No.
Si se realiza alguna otra operación sólo en la segunda ecuación del sistema equivalente $\begin{cases} x - y = 2 \\ 0x + 2y = 10, \end{cases}$ se puede despejar *y*: $\begin{cases} x - y = 2 \\ 0x + y = 5 \end{cases}$

8) ¿Cuál es la operación realizada? (Nuevo)
Respuesta: División entre 2.

9) ¿Pudieron obtener directamente, sólo restando como en el inciso *6)*, el valor de *x*? (Nuevo)
Respuesta: No.

10) ¿Qué pasaría si en vez de restar las ecuaciones del sistema inicial las sumaras? Realiza dicha operación y obtén dos sistemas equivalentes (Preisser, 1989, p. 72).
Respuesta:

$$+\begin{array}{r} x + y = 12 \\ x - y = 2 \\ \hline 2x - 0y = 14 \end{array} \qquad +\begin{array}{r} 2x - 0y = 14 \\ x - y = 2 \\ \hline 3x - y = 16 \end{array} \qquad +\begin{array}{r} x - y = 2 \\ 3x - y = 16 \\ \hline 4x + 0y = 18 \end{array}$$

Los sistemas equivalentes son

$$\begin{cases} 2x - 0y = 14 \\ x - y = 2 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - y = 16. \end{cases}$$

Si se realiza alguna otra operación sólo en la segunda ecuación del sistema equivalente $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 0y = 14, \end{cases}$ puedo obtener a *x* despejada: $\begin{cases} x - y = 2 \\ x - 0y = 7. \end{cases}$

11) ¿Cuál es la operación realizada? (Nuevo)
Respuesta: División entre 2.

12) Completa la versión final de la regla para simplificar sistemas.
Al simplificar un <u>sistema</u> para obtener una <u>ecuación</u> con una <u>incógnita</u>, se requiere que la variable que se elimine tenga el mismo <u>coeficiente</u> en ambas ecuaciones; éstas se <u>sumarán</u> o se restarán dependiendo si los signos de los coeficientes son distintos o <u>iguales</u> (Preisser, 1989, p. 72). (Modificado)

13) En un mismo sistema de coordenadas grafica con colores distintos el sistema original y sus sistemas equivalentes que obtuviste en el inciso *6)*. (Preisser, 1989, p. 73).

Respuesta:

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

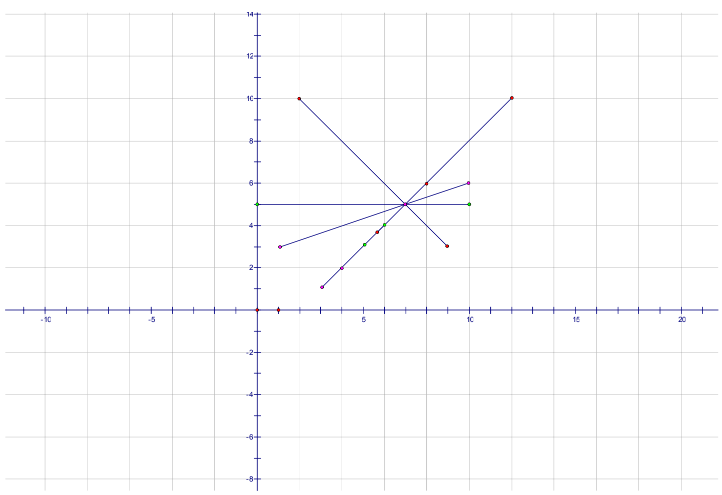
$x + y = 12$	$x - y = 2$
(9, 3)	(8, 6)
(2, 10)	(12, 10)

$$\begin{cases} 0x + 2y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$0x + 2y = 10$	$x - y = 2$
(0, 5)	(6, 4)
(10, 5)	(5, 3)

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ -x + 3y = 8 \end{cases}$$

$x - y = 2$	$-x + 3y = 8$
(6, 4)	(-1, 3)
(3, 1)	(-7, 5)



14) Resuelve por medio del método de suma y resta (también llamado de reducción) los sistemas que a continuación se muestran; anota dos sistemas equivalentes a cada uno, y escribe el coeficiente 0 que resulte de alguna operación.

$$\begin{cases} f+t=7 \\ f-t=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a+2b=5 \\ a-2b=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2m+n=10 \\ m-2n=21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x+3y=60 \\ 2x+y=21 \end{cases}$$

Respuesta:

Resolución del sistema $\begin{cases} f+t=7 \\ f-t=1 \end{cases}$:

$$-\begin{array}{r} f+t=7 \\ f-t=1 \\ \hline 0f+2t=6 \end{array} \qquad (0f+2t=6)\div 2 \longrightarrow 0f+t=3$$

$$+\begin{array}{r} f+t=7 \\ f-t=1 \\ \hline 2f-0t=8 \end{array} \qquad (2f-0t=8)\div 2 \longrightarrow f-0t=4$$

Los sistemas equivalentes que se originan en base a estas operaciones son $\begin{cases} f+t=7 \\ 0f+t=3 \end{cases}$ y $\begin{cases} f+t=7 \\ f-0t=4. \end{cases}$

Resolución del sistema $\begin{cases} a+2b=5 \\ a-2b=1 \end{cases}$:

$$-\begin{array}{r} a+2b=5 \\ a-2b=1 \\ \hline 0a+4b=4 \end{array} \qquad (0a+4b=4)\div 4 \longrightarrow 0a+b=1$$

$$+\begin{array}{r} a+2b=5 \\ a-2b=1 \\ \hline 2a-0b=6 \end{array} \qquad (2a-0b=6)\div 2 \longrightarrow a-0b=3$$

Los sistemas equivalentes que se originan en base a estas operaciones son $\begin{cases} a-2b=1 \\ 0a+b=1 \end{cases}$ y $\begin{cases} a-2b=1 \\ a-0b=3. \end{cases}$

Resolución del sistema $\begin{cases} 2m+n=10 \\ m-2n=0 \end{cases}$:

$$(m - 2n = 0)(2) \longrightarrow 2m - 4n = 0$$

$$\begin{array}{rl} & 2m + \ \ n = 10 \\ - & \underline{2m - 4n = \ \ 0} \\ & 0m + 5n = 10 \end{array} \qquad (0m + 5n = 10) \div 5 \longrightarrow 0m + n = 2$$

$$(2m + n = 10)(2) \longrightarrow 4m + 2n = 20$$

$$\begin{array}{rl} & 4m + 2n = 20 \\ + & \underline{\ m - 2n = \ \ 0} \\ & 5m - 0n = 20 \end{array} \qquad (5m - 0n = 20) \div 5 \longrightarrow m - 0n = 4$$

Los sistemas equivalentes que se originan en base a estas operaciones son $\begin{cases} 2m + n = 10 \\ 0m + n = 2 \end{cases}$ y $\begin{cases} 4m + 2n = 20 \\ m - 0n = 4. \end{cases}$

Resolución del sistema $\begin{cases} 5x + 3y = 60 \\ 2x + y = 21 \end{cases}$:

$$\begin{array}{rl} & 5x + 3y = 60 \\ - & \underline{2x + \ \ y = 21} \\ & 3x + 2y = 39 \end{array} \qquad (2x + y = 21)(2) \longrightarrow 4x + 2y = 42$$

$$\begin{array}{rl} & 4x + 2y = 42 \\ - & \underline{3x + 2y = 39} \\ & x + 0y = \ \ 3 \end{array} \qquad (x + 0y = 3)(5) \longrightarrow 5x + 0y = 15$$

$$\begin{array}{rl} & 5x + 3y = 60 \\ - & \underline{5x + 0y = 15} \\ & 0x + 3y = 45 \end{array} \qquad (0x + 3y = 45) \div 3 \longrightarrow 0x + y = 15$$

Los sistemas equivalentes que se originan en base a estas operaciones son $\begin{cases} 3x + 2y = 39 \\ x + 0y = 3 \end{cases}$ y $\begin{cases} 2x + y = 21 \\ 0x + y = 15. \end{cases}$

Anexo V. Producto cruzado (propuesta)

Actividad 35

1) Resuelve los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} 2x+3y=2 \\ x+3y=\dfrac{3}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+5y=13 \\ 4x-2y=-10 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-5y=6 \\ 6x+3y=-4. \end{cases}$$

Para ello,

- multiplica la primera ecuación por el coeficiente de *x* de la segunda;
- multiplica la segunda ecuación por el coeficiente de *x* de la primera;
- resta o suma (según convenga) ambas ecuaciones que resulten de cada multiplicación para que puedas eliminar a *x* y obtener el valor de *y*;
- ahora repite estos tres pasos con el coeficiente de *y* a fin de obtener el valor de *x* (Preisser, 1989, p. 75). (Modificado)

Respuesta:

$$\begin{cases} 2x+3y=2 \\ x+3y=\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Despejando a *y*,

$$(2x+3y=2)\ (1) \longrightarrow 2x+3y=2$$

$$\left(x+3y=\frac{3}{2}\right)(2) \longrightarrow 2x+6y=3$$

$$\begin{array}{r} 2x+3y=2 \\ -\ \ 2x+6y=3 \\ \hline 0x-3y=1 \end{array}$$

$$(0x-3y=1)\div 3 \longrightarrow 0x-y=\frac{1}{3}$$

$$\longrightarrow \left(0x-y=\frac{1}{3}\right)(-1)$$

$$\longrightarrow 0x+y=-\frac{1}{3}$$

Despejando a *x*,

$$(2x+3y=2)\ (3) \longrightarrow 6x+9y=6$$

$$\left(x+3y=\frac{3}{2}\right)(3) \longrightarrow 3x+9y=\frac{9}{2}$$

$$\begin{array}{r} 6x+9y=6 \\ -\ \ 3x+9y=\frac{9}{2} \\ \hline 3x-0y=\frac{3}{2} \end{array}$$

$$\left(3x-0y=\frac{3}{2}\right)\div 3 \longrightarrow x-0y=\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} 2x + 5y = 13 \\ 4x - 2y = -10 \end{cases}$$

Despejando a *y*,

$$(2x + 5y = 13)\ (4) \longrightarrow 8x + 20y = 52$$

$$(4x - 2y = -10)\ (2) \longrightarrow 8x - 4y = -20$$

$$\begin{array}{rl} & 8x + 20y = 52 \\ - & 8x - 4y = -20 \\ \hline & 0x + 24y = 72 \end{array}$$

$$(0x + 24y = 72) \div 24 \longrightarrow 0x + y = 3$$

Despejando a *x*,

$$(2x + 5y = 13)\ (2) \longrightarrow 4x + 10y = 26$$

$$(4x - 2y = -10)\ (5) \longrightarrow 20x - 10y = -50$$

$$\begin{array}{rl} & 20x - 10y = -50 \\ - & 4x + 10y = 26 \\ \hline & 24x + 0y = -24 \end{array}$$

$$(24x + 0y = -24) \div 24 \longrightarrow x + 0y = -1$$

$$\begin{cases} 2x - 5y = 6 \\ 6x + 3y = -4 \end{cases}$$

Despejando a *y*,

$$(2x - 5y = 6)\ (6) \longrightarrow 12x - 30y = 36$$

$$(6x + 3y = -4)\ (2) \longrightarrow 12x + 6y = -8$$

$$\begin{array}{rl} & 12x - 30y = 36 \\ - & 12x + 6y = -8 \\ \hline & 0x - 36y = 44 \end{array}$$

$$(0x - 36y = 44) \div 36 \longrightarrow 0x - y = \frac{44}{36}$$

$$\longrightarrow (0x - y = \frac{44}{36})\ (-1)$$

$$\longrightarrow 0x + y = -\frac{44}{36}$$

$$\longrightarrow 0x + y = -\frac{11}{9}$$

Despejando a *x*,

$$(2x-5y=6)\ (3) \longrightarrow 6x-15y=18$$

$$(6x+3y=-4)\ (5) \longrightarrow 30x+15y=-20$$

$$\begin{array}{rl} & 30x+15y=-20 \\ + & 6x-15y=\ 18 \\ \hline & 36x+0y\ =\ -2 \end{array}$$

$$(36x+0y=-2)\div 36 \longrightarrow x+0y=-\frac{2}{36}$$

$$\longrightarrow x+0y=-\frac{1}{18}$$

2) Expliquen con sus propias palabras el procedimiento para resolver un sistema de ecuaciones lineales de 2 x 2 mediante el método de suma y resta (Preisser, 1989, p. 76).

Respuesta:

- Multiplica la primera ecuación por el coeficiente de *x* de la segunda.
- Multiplica la segunda ecuación por el coeficiente de *x* de la primera.
- Resta o suma (según convenga) ambas ecuaciones que resultaron de cada multiplicación, para que puedas eliminar a *x* y obtener el valor de *y*.
- Si no se utiliza el producto cruzado, sólo se suman o restan las ecuaciones del sistema (según convenga) para eliminar alguna de las incógnitas, utilizando en este procedimiento algunas estrategias de multiplicación o división.

3) Resuelvan los siguientes sistemas con la ayuda del método de suma y resta (apoyándote del producto cruzado) (Preisser, 1989, p. 76).

$$\begin{cases} 7x+4y=5 \\ 2x-3y=-16 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+3y=5 \\ x+\frac{3}{2}y=\frac{5}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x-2y=5 \\ 12x-6y=10 \end{cases}$$

Respuesta:

$$\begin{cases} 7x+4y=5 \\ 2x-3y=-16 \end{cases}$$

Despejando *y*,

$$(7x+4y=5)\ (2) \longrightarrow 14x+8y=10$$

$$(2x-3y=-16)\ (7) \longrightarrow 14x-21y=-112$$

$$\begin{array}{rl} & 14x+\ 8y=10 \\ - & 14x-21y=-112 \\ \hline & 0x+29y=122 \end{array}$$

$$(0x+29y=122)\div 29 \longrightarrow 0x+y=\frac{122}{29}$$

Despejando *x*,

$$(7x+4y=5)\ (3) \longrightarrow 21x+12y=15$$

$$(2x-3y=-16)\ (4) \longrightarrow 8x-12y=-64$$

$$\begin{array}{rl} & 21x+12y=15 \\ + & 8x-12y=-64 \\ \hline & 29x-0y\ \ =-49 \end{array}$$

$$(29x-0y=-49)\div 29 \longrightarrow x-0y=-\frac{49}{29}$$

$$\begin{cases} 2x+3y=5 \\ x+\frac{3}{2}y=\frac{5}{2} \end{cases}$$

Despejando *y*,

$$(2x+3y=5)\ (1) \longrightarrow 2x+3y=5$$

$$(x+\tfrac{3}{2}y=\tfrac{5}{2})\ (2) \longrightarrow 2x+3y=5$$

$$\begin{array}{rl} & 2x+3y=5 \\ - & 2x+3y=5 \\ \hline & 0x+0y=0 \end{array}$$

Despejando *x*,

$$(2x+3y=5)\ (\tfrac{3}{2}) \longrightarrow 3x+\tfrac{9}{2}\ y=\tfrac{15}{2}$$

$$(x+\tfrac{3}{2}\ y=\tfrac{5}{2})\ (3) \longrightarrow 3x+\tfrac{9}{2}\ y=\tfrac{15}{2}$$

$$\begin{array}{rl} & 3x+\frac{9}{2}\ y=\frac{15}{2} \\ - & 3x+\frac{9}{2}\ y=\frac{15}{2} \\ \hline & 0x+0y\ \ =0 \end{array}$$

$$\begin{cases} 4x-2y=5 \\ 12x-6y=10 \end{cases}$$

Despejando *y*,

$$(4x-2y=5)\ (12) \longrightarrow 48x-24y=60$$

$$(12x-6y=10)\ (4) \longrightarrow 48x-24y=40$$

$$\begin{array}{rl} & 48x-24y=60 \\ - & 48x-24y=40 \\ \hline & 0x-0y \neq 20 \end{array}$$

Despejando *x*,

$$(4x-2y=5)\ (6) \longrightarrow 24x-12y=30$$

$$(12x-6y=10)\ (2) \longrightarrow 24x-12y=20$$

$$\begin{array}{rl} & 24x-12y=30 \\ - & 24x-12y=20 \\ \hline & 0x-0y \neq 10 \end{array}$$

4) Resuelve por medio del método de suma y resta el sistema planteado para la construcción de la cajita en el inciso *6)* de la actividad 33, estableciendo nuevos valores del ancho y el largo de la cartulina. Las operaciones que se originen con los términos independientes sólo deben ser indicadas, no deben realizarse (Preisser, 1989, p. 77).

Respuesta:

$$\begin{cases} 3x+2y=32 \\ 2x+y=18 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} & 3x+2y=32 \\ - & 2x+\ y=18 \\ \hline & x+\ y=32-18 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & 2x+\ y=18 \\ - & x+\ y=32-18 \\ \hline & x+0y=18-(32-18) \end{array}$$

$$(x+y=32-18)\ (2) \longrightarrow 2x+2y=64-36$$

$$\begin{array}{rl} & 2x+2y=64-36 \\ - & 2x+\ y=18 \\ \hline & 0x+\ y=(64-36)-18 \end{array}$$

Anexo W. Resolución de sistemas compatibles determinados: un problema inverso (propuesta)

Actividad 36

1) Resuelve con el método de suma y resta el sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y = \ell \\ 2x + y = a \end{cases}$$

que se ocupa para cualquiera largo (ℓ) y ancho (a); es decir, usando literales para los términos independientes (Preisser, 1989, p. 78).

Respuesta:

$$\begin{cases} 3x + 2y = \ell \\ 2x + y = a \end{cases}$$

$$(2x + y = a)\,(3) \longrightarrow 6x + 3y = 3a$$

$$\begin{array}{rl} - & 6x + 3y = 3a \\ & 3x + 2y = \ell \\ \hline & 3x + y = 3a - \ell \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} - & 3x + 2y = \ell \\ & 3x + y = 3a - \ell \\ \hline & 0x + y = 2\ell - 3a \longrightarrow y = 2\ell - 3a \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} - & 3x + 2y = \ell \\ & 2x + y = a \\ \hline & x + y = \ell - a \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} - & 2x + y = a \\ & x + y = \ell - a \\ \hline & x + 0y = 2a - \ell \longrightarrow x = 2a - \ell \end{array}$$

2) Compara las fórmulas que obtuviste para x y y con el resultado de las operaciones que se dejaron indicadas en el inciso *4)* de la actividad 35 (véase el anexo V1) completando la siguiente tabla. (Nuevo)

FORMULA	CASO ELEGIDO	RESULTADO DE LAS OPERACIONES INDICADAS
$\underline{x = 2a - \ell}$	$x = 2\underline{(18)} - \underline{32}$ $x = \underline{36} - \underline{32}$ $x = \underline{4}$	$x = \underline{4}$
$\underline{y = 2\ell - 3a}$	$y = 2\underline{(32)} - 3\underline{(18)}$ $y = \underline{64} - \underline{54}$ $y = \underline{10}$	$y = \underline{10}$

3) Lee el siguiente enunciado.
Si deseo regalar un objeto que tiene base cuadrada de 11 cm de lado por 2.5 cm de altura en una cajita con un moño, ¿cómo sabré cuál es el ancho y el largo que debo asignar a un pedazo de cartulina para construir yo misma la cajita adecuada? Toma en cuenta que para que no se maltrate el objeto, la base de la cajita deberá tener 12 cm de lado y 3 cm de altura (Preisser, 1989, p. 79).
La situación anterior puede ser representada mediante el sistema

$$\begin{cases} 2a - \ell = x \\ 2\ell - 3a = y, \end{cases}$$

donde $x = 3$ y $y = 12$ (Preisser, 1989, p. 80).

4) Encuentra los valores de a y ℓ sustituyendo los de x y y en el sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y = \ell \\ 2x + y = a \end{cases}$$ (Preisser, 1989, p. 80). (Modificado)

Respuesta:

$$\begin{cases} 3x + 2y = \ell \\ 2x + y = a. \end{cases}$$

Los valores conocidos son x = 3 y y = 12.

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= \ell \\ 3(3) + 2(12) &= \ell \\ 9 + 24 &= \ell \\ 33 &= \ell \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x + y &= a \\ 2(3) + 12 &= a \\ 6 + 12 &= a \\ 18 &= a \end{aligned}$$

5) Comprueba que se cumplan las igualdades en ambos sistemas. (Nuevo)
Respuesta:

$$\begin{cases} 3x + 2y = \ell \\ 2x + y = a \end{cases} \qquad \begin{cases} 2a - \ell = 3 \\ 2\ell - 3a = 12 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= \ell \\ 3(3) + 2(12) &= 33 \\ 9 + 24 &= 33 \\ 33 &= 33 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2a - \ell &= 3 \\ 2(18) - 33 &= 3 \\ 36 - 33 &= 3 \\ 3 &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x + y &= a \\ 2(3) + 12 &= 18 \\ 6 + 12 &= 18 \\ 18 &= 18 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2\ell - 3a &= 12 \\ 2(33) - 3(18) &= 12 \\ 66 - 54 &= 12 \\ 12 &= 12 \end{aligned}$$

6) Resuelve y comprueba los siguientes sistemas de ecuaciones (Preisser, 1989, p. 82). (Modificado)

$$\begin{cases} y = 1 \\ x - 3y = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2y \\ 3x + 3y = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y = 6 \\ y = 4 - x \end{cases}$$

Respuesta:

$$\begin{cases} y = 1 \\ x - 3y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x - 3y &= 5 \\ x - 3(1) &= 5 \\ x - 3 &= 5 \\ x - 3 + 3 &= 5 + 3 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

Comprobación:

$$\begin{aligned} x - 3y &= 5 \\ 8 - 3(1) &= 5 \\ 8 - 3 &= 5 \\ 5 &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = 2y \\ 3x + 3y = 9 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 3x + 3y &= 9 \\ 3(2y) + 3y &= 9 \\ 6y + 3y &= 9 \\ 9y &= 9 \\ \frac{9y}{9} &= \frac{9}{9} \\ y &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 2y \\ x &= 2(1) \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Comprobación:

$$\begin{aligned} x &= 2y \\ 2 &= 2(1) \\ 2 &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x + 3y &= 9 \\ 3(2) + 3(1) &= 9 \\ 6 + 3 &= 9 \\ 9 &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ y = 4 - x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2x + y &= 6 \\ 2x + (4 - x) &= 6 \\ 2x + 4 - x &= 6 \\ 2x + 4 - 4 - x &= 6 - 4 \\ 2x - x &= 2 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 4 - x \\ y &= 4 - 2 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Comprobación:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 6 \\ 2(2) + (2) &= 6 \\ 4 + 2 &= 6 \\ 6 &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 4 - x \\ 2 &= 4 - 2 \\ 2 &= 2 \end{aligned}$$

Anexo X. Métodos de sustitución e igualación (propuesta)

Actividad 37

Resuelvan los siguientes cuatro incisos en equipo.

1) Observen que en el sistema $\begin{cases} y = 8 \\ x - 3y = 26 \end{cases}$ una de las ecuaciones tiene una incógnita ya despejada; sustituyan su valor en la otra ecuación y así obtengan la solución del sistema. Comprueben el resultado. (Nuevo)

Respuesta:

$$x - 3y = 26$$
$$x - 3(8) = 26$$
$$x - 24 = 26$$
$$x - 24 + 24 = 26 + 24$$
$$x = 50$$

Comprobación:

$$x - 3y = 26$$
$$50 - 3(8) = 26$$
$$50 - 24 = 26$$
$$26 = 26$$

2) Resuelvan el mismo sistema mediante el método de suma y resta. (Nuevo)

Respuesta:

$$\begin{cases} y = 8 \\ x - 3y = 26 \end{cases}$$

$$(y = 8)\ (3) \longrightarrow 3y = 24$$

$$\begin{array}{r} 3y = 24 \\ +\quad x - 3y = 26 \\ \hline x - 0y = 50 \end{array}$$

3) Describan los pasos de este nuevo método de resolución de un sistema de 2 x 2 (Preisser, 1989, p. 85).

Respuesta:

- Despeja *x* o *y* en alguna de las ecuaciones que forman el sistema. Si ya está despejada, se pasa al siguiente punto.
- Sustituye en la ecuación no utilizada la incógnita despejada para obtener el valor de *x* y el de *y*.
- Realiza la comprobación del resultado.

4) Con ayuda del método descrito antes, resuelvan y comprueben los siguientes sistemas (Preisser, 1989, p. 85).

$$\begin{cases} 3x = 6 \\ x - 2y = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Respuesta:

$$\begin{cases} 3x = 6 \\ x - 2y = 8 \end{cases}$$

Despeje de *x* en la primera ecuación

$$3x = 6$$
$$\frac{3x}{3} = \frac{6}{3}$$
$$x = 2$$

Sustitución de *x* en la segunda ecuación para obtener *y*

$$x - 2y = 8$$
$$2 - 2y = 8$$
$$2 - 2 - 2y = 8 - 2$$
$$-2y = 6$$

$$-\frac{2y}{2} = \frac{6}{2}$$
$$-y = 3$$
$$(-y = 3)(-1)$$
$$y = -3$$

Comprobación:

$$x - 2y = 8$$
$$2 - 2(-3) = 8$$
$$2 - (-6) = 8$$
$$2 + 6 = 8$$
$$8 = 8$$

$$3x = 6$$
$$3(2) = 6$$
$$6 = 6$$

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Despeje de *x* en la segunda ecuación

$$x + y = 3$$
$$x + y - y = 3 - y$$
$$x = 3 - y$$

Sustitución de *x* en la primera ecuación para obtener *y*

$$2x + y = 3$$
$$2(3 - y) + y = 3$$
$$6 - 2y + y = 3$$
$$6 - y = 3$$
$$6 - 3 - y = 3 - 3$$

$$3 - y = 0$$
$$3 - y + y = 0 + y$$
$$3 = y$$

Sustitución de *y* para obtener *x*

$$x = 3 - y$$
$$x = 3 - 3$$
$$x = 0$$

Comprobación:

$$2x + y = 3$$
$$2(0) + 3 = 3$$
$$0 + 3 = 3$$
$$3 = 3$$

$$x + y = 3$$
$$0 + 3 = 3$$
$$3 = 3$$

5) Teniendo el sistema $\begin{cases} 3x = 6 \\ x - 2y = 8 \end{cases}$, si se despeja *x* en la primera ecuación obtenemos que $x = 2$. Sustituye este valor en la ecuación que utilizaste. (Nuevo)

Respuesta:

$$\begin{aligned} 3x &= 6 \\ 3(2) &= 6 \\ 6 &= 6 \end{aligned}$$

6) ¿Con esta sustitución pudiste obtener el valor de *y* para resolver el sistema? (Nuevo)

Respuesta: No.

7) Para resolver el sistema, ¿en cuál ecuación te conviene hacer la sustitución cuando despejas en la primera ecuación? (Nuevo)

Respuesta: En la segunda.

8) Para resolver el sistema, ¿en cuál ecuación te conviene sustituir cuando despejas en la segunda ecuación? (Nuevo)

Respuesta: En la primera.

9) Resuelve por medio del método de sustitución los siguientes dos sistemas y comprueba el resultado (Preisser, 1989, p. 86). (Modificado)

$$\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ x - 5y = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 5y = 13 \\ 4x - 2y = -10 \end{cases}$$

Respuesta:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ x - 5y = 3 \end{cases}$$

Despeje de *x* en la segunda ecuación

$$\begin{aligned} x - 5y &= 3 \\ x - 5y + 5y &= 3 + 5y \\ x &= 3 + 5y \end{aligned}$$

Sustitución de *x* en términos de *y* en la primera ecuación para encontrar *y*

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 6 \\ 2(3 + 5y) + 3y &= 6 \\ 6 + 10y + 3y &= 6 \\ 6 + 13y &= 6 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 6 - 6 + 13y &= 6 - 6 \\ 13y &= 0 \\ \frac{13y}{13} &= \frac{0}{13} \\ y &= 0 \end{aligned}$$

Sustitución del valor de *y* para hallar *x*

$$\begin{aligned} x &= 3 + 5y \\ x &= 3 + 5(0) \\ x &= 3 + 0 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Comprobación:

$$2x+3y=6 \qquad x-5y=3$$
$$2(3)+3(0)=6 \qquad 3-5(0)=3$$
$$6+0=6 \qquad 3-0=3$$
$$6=6 \qquad 3=3$$

$$\begin{cases} 2x+5y=13 \\ 4x-2y=-10 \end{cases}$$

Despeje de *y* en términos de *x* la primera ecuación

$$2x+5y=13$$
$$2x-2x+5y=13-2x$$
$$5y=13-2x$$
$$\frac{5y}{5}=\frac{13-2x}{5}$$
$$y=\frac{13-2x}{5}$$

Sustitución de *y* en la segunda ecuación para hallar *x*

$$4x-2y=-10$$
$$4x-2\left(\frac{13-2x}{5}\right)=-10$$
$$4x-2(2.6-0.4x)=-10$$
$$4x-5.2+0.8x=-10$$
$$4.8x-5.2=-10$$
$$4.8x-5.2+5.2=-10+5.2$$
$$4.8x=-4.8$$
$$\frac{4.8x}{4.8}=\frac{-4.8}{4.8}$$
$$x=-1$$

Sustitución del valor encontrado de *x* para hallar *y*

$$y=\frac{13-2x}{5}$$
$$y=\frac{13-2(-1)}{5}$$
$$y=\frac{13+2}{5}$$
$$y=\frac{15}{5}$$
$$y=3$$

Comprobación:

$$2x+5y=13 \qquad 4x-2y=-10$$
$$2(-1)+5(3)=13 \qquad 4(-1)-2(3)=-10$$
$$-2+15=13 \qquad -4-6=-10$$
$$13=13 \qquad -10=-10$$

10) Resuelve los siguientes sistemas con ayuda de un método distinto a los anteriores; para ello es necesario que analices la configuración de cada uno (Preisser, 1989, p. 86).

$$\begin{cases} x=5 \\ x=y+1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=x+4 \\ y=2x \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x+1=2y \\ 2x+2=2y \end{cases}$$

Respuesta:

$$\begin{cases} x = 5 \\ x = y + 1 \end{cases}$$

Igualación de *x* para obtener *y*

$$x = y + 1$$
$$5 = y + 1$$
$$5 - 1 = y + 1 - 1$$
$$4 = y$$

Comprobación:

$$x = y + 1$$
$$5 = 4 + 1$$
$$5 = 5$$

$$\begin{cases} y = x + 4 \\ y = 2x \end{cases}$$

Igualación de *y* para obtener *x*

$$y = x + 4$$
$$2x = x + 4$$
$$2x - x = x - x + 4$$
$$x = 4$$

Sustitución de *x* para obtener *y*

$$y = 2x$$
$$y = 2(4)$$
$$y = 8$$

Comprobación:

$$y = x + 4$$
$$8 = 4 + 4$$
$$8 = 8$$

$$y = 2x$$
$$8 = 2(4)$$
$$8 = 8$$

$$\begin{cases} 3x + 1 = 2y \\ 2x + 2 = 2y \end{cases}$$

Igualación de *y* para obtener *x*

$$2x + 2 = 3x + 1$$
$$2x - 2x + 2 = 3x - 2x + 1$$
$$2 = x + 1$$
$$2 - 1 = x + 1 - 1$$
$$1 = x$$

Sustitución de *x* para obtener *y*

$$3x + 1 = 2y$$
$$3(1) + 1 = 2y$$
$$3 + 1 = 2y$$
$$4 = 2y$$
$$\frac{4}{2} = \frac{2y}{2}$$
$$2 = y$$

Comprobación:

$$\begin{aligned} 3x+1 &= 2y \\ 3(1)+1 &= 2(2) \\ 3+1 &= 4 \\ 4 &= 4 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 2x+2 &= 2y \\ 2(1)+2 &= 2(2) \\ 2+2 &= 4 \\ 4 &= 4 \end{aligned}$$

Anexo Y. Coordinación entre el registro verbal y el algebraico (propuesta)

Actividad 38

1) Simboliza el siguiente problema y especifica lo que significan las letras empleadas. (Nuevo)

El doble de goles anotados por el América más el doble de los que anotó el Cruz Azul es igual a 150. La diferencia entre los goles del primer y segundo equipos es de 5.

Respuesta:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 150 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

x: goles del América

y: goles del Cruz Azul

Para saber si tu simbolización es correcta, realiza lo que a continuación se te pide.

2) Escribe la primera condición del problema en el recuadro del registro verbal y su respectiva ecuación en el otro recuadro (registro algebraico). (Nuevo)

Respuesta:

Registro verbal	Correspondencia semántica	Registro algebraico
El doble de goles anotados por el América más el doble de los que anotó el Cruz Azul es igual a 150	$\longleftrightarrow$	$2x + 2y = 150$

Con ayuda del siguiente inciso el estudiante puede descubrir si hay correspondencia entre los elementos que conforman al enunciado y los que estructuran la ecuación que ha elaborado.

3) En el siguiente cuadro los elementos del primer enunciado ya están separados, sólo debes escribir su simbolización correspondiente. (Nuevo)

Respuesta:

Elementos del registro verbal	Correspondencia	Elementos del registro algebraico
El doble de goles anotados por el América	$\longleftrightarrow$	$2x$
Más	$\longleftrightarrow$	+ (adición)
el doble de goles anotados por el Cruz Azul	$\longleftrightarrow$	$2y$
es igual a	$\longleftrightarrow$	= (igualdad)
150	$\longleftrightarrow$	150

4) Escribe la segunda condición del problema en el recuadro del registro verbal y su respectiva ecuación en el otro recuadro (registro algebraico). (Nuevo)

Respuesta:

Registro verbal	Correspondencia semántica	Registro algebraico
La diferencia de goles del primer y segundo equipos es de 5.	$\longleftrightarrow$	$x-y=5$

5) En el siguiente cuadro los elementos de la segunda ecuación ya están separados; debes completar el recuadro del registro verbal con los elementos correspondientes del enunciado. (Nuevo)
Respuesta:

Unidades significantes	Correspondencia semántica	Unidades significantes
La diferencia	$\longleftrightarrow$	$-$ (sustracción)
Goles del primer equipo	$\longleftrightarrow$	x
Goles del segundo equipo	$\longleftrightarrow$	y
es	$\longleftrightarrow$	= (igualdad)
5	$\longleftrightarrow$	5

6) Escribe ambas condiciones del problema, así como sus respectivas ecuaciones en el recuadro correspondiente y compáralas asegurándote de que tengan el mismo orden de escritura y el mismo número de elementos. (Nuevo)

Respuesta:

Registro verbal (salida)	Registro algebraico (llegada)	Comparación entre los elementos de cada uno de los registros
Primera condición: El doble de goles anotados por el América más el doble de los que anotó el Cruz Azul es igual a 150	Primera ecuación $2x+2y=150$	Mismo orden Mismo número de elementos
Segunda condición: La diferencia entre los goles del primer y segundo equipos es de 5	Segunda ecuación $x-y=5$	Mismo orden Mismo número de elementos

Un estudiante simbolizó el problema anterior mediante dos sistemas:

$$\begin{cases} 2a+2b=150 \\ b-a=5 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} 2a+2b=150 \\ a-b=5, \end{cases}$$

donde a representa el número de goles del América, y b, el número de goles del Cruz Azul.

Para saber si ambas simbolizaciones son consistentes con el problema, observemos el siguiente cuadro.

<table>
<tr><th>Registro verbal</th><th>Correspondencia</th><th>Registro algebraico</th><th>Correspondencia</th><th>Registro verbal</th></tr>
<tr><td rowspan="2">El doble de goles anotados por el América más el doble de los que anotó el Cruz Azul es igual a 150; la diferencia entre los goles del primer y segundo equipos es de 5</td><td>$\longrightarrow$</td><td>$\begin{cases} 2a + 2b = 150 \\ b - a = 5 \end{cases}$</td><td>No hay correspondencia de regreso</td><td>El doble de goles anotados por el Cruz Azul más el doble de los que anotó el América es igual a 150; la diferencia entre los goles del segundo y primer equipos es de 5</td></tr>
<tr><td>$\longrightarrow$</td><td>$\begin{cases} 2a + 2b = 150 \\ a - b = 5 \end{cases}$</td><td>$\longrightarrow$</td><td>El doble de goles anotados por el América más el doble de los que anotó el Cruz Azul es igual a 150; la diferencia entre los goles del primer y segundo equipos es de 5.</td></tr>
</table>

Por lo tanto al problema planteado le corresponde sólo el sistema $\begin{cases} 2a + 2b = 150 \\ a - b = 5 \end{cases}$, ya que $\begin{cases} 2a + 2b = 150 \\ b - a = 5 \end{cases}$ no es consistente con él.

7) Si el estudiante hubiera obtenido el sistema $\begin{cases} 2a+2b=150 \\ b-a=5 \end{cases}$ en lugar de $\begin{cases} 2a+2b=150 \\ a-b=5, \end{cases}$ ¿tendrían ambos sistemas la misma solución? Resuélvelos y comprueba. (Nuevo)

Respuesta:

Resolución del sistema $\begin{cases} 2a+2b=150 \\ b-a=5 \end{cases}$:

Despeje de b en la segunda ecuación

$$b-a=5$$
$$b-a+a=5+a$$
$$b=5+a$$

Sustitución de b en la primera ecuación para obtener el valor de a

$$2a+2b=150$$
$$2a+2(5+a)=150$$
$$2a+10+2a=150$$
$$4a+10=150$$
$$4a+10-10=150-10$$
$$4a=140$$
$$\frac{4a}{4}=\frac{140}{4}$$
$$a=35.$$

Sustitución de a para obtener el valor de b

$$b=5+a$$
$$b=5+35$$
$$b=40$$

Comprobación del sistema $\begin{cases} 2a+2b=150 \\ b-a=5 \end{cases}$:

$$2a+2b=150$$
$$2(35)+2(40)=150$$
$$70+80=150$$
$$150=150$$
$$b-a=5$$
$$40-35=5$$
$$5=5.$$

Resolución del sistema $\begin{cases} 2a+2b=150 \\ a-b=5 \end{cases}$:

Despeje de b en la segunda ecuación

$$a-b=5$$
$$a-a-b=5-a$$
$$-b=5-a$$
$$-b=5-a \quad (-1)$$
$$b=-5+a$$

Sustitución de b en la primera ecuación para obtener el valor de a

$$2a+2b=150$$
$$2a+2(-5+a)=150$$
$$2a-10+2a=150$$
$$4a-10=150$$
$$4a-10+10=150+10$$

$$4a=160$$
$$\frac{4a}{4}=\frac{160}{4}$$
$$a=40$$

Sustitución de a para obtener el valor de b

$$b=-5+a$$
$$b=-5+40$$
$$b=35$$

Comprobación del sistema $\begin{cases}2a+2b=150\\a-b=5\end{cases}$:

$$2a+2b=150$$
$$2(40)+2(35)=150$$
$$80+70=150$$
$$150=150$$

$$a-b=5$$
$$40-35=5$$
$$5=5.$$

El docente aclarar al grupo que los sistemas $\begin{cases}2a+2b=150\\b-a=5\end{cases}$ y $\begin{cases}2a+2b=150\\a-b=5\end{cases}$ no tienen la misma solución y por lo tanto corresponden a problemas diferentes, como lo muestra la siguiente tabla.

Registro algebraico	Registro verbal
$\begin{cases}2a+2b=150\\b-a=5\end{cases}$	El doble de goles anotados por el América más el doble de los que anotó el Cruz Azul es igual a 150; la diferencia entre los goles del segundo y primer equipos es de 5
$\begin{cases}2a+2b=150\\a-b=5\end{cases}$	El doble de goles anotados por el América más el doble de los que anotó el Cruz Azul es igual a 150; la diferencia entre los goles del primer y segundo equipos es de 5