



**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL**

**PROGRAMA EDUCATIVO DE PSICOLOGÍA EDUCATIVA**

**UNIDAD AJUSCO**

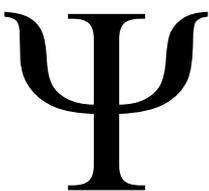
**T E S I S**

**“COMPARACIÓN DE LOS PROCESOS DE SOLUCIÓN A  
PROBLEMAS ARITMÉTICOS EN UNA SITUACIÓN DIALÓGICA  
Y UNA EVALUACIÓN FORMATO LÁPIZ-PAPEL”**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
LICENCIADA EN PSICOLOGÍA EDUCATIVA**

**P R E S E N T A N:**  
**LILIANA MARLENE CAMARILLO ESTRADA**  
**CECILIA ELIZABETH ESTAÑOL CRUZ**  
**MARIA ELENA ROJAS MARTÍNEZ**

**ASESOR:**  
**MTRO. CUITLÁHUAC I. PÉREZ LÓPEZ**



México, D. F. Octubre, 2009.

## **INDICE**

Resumen.....	1
Introducción.....	2
Justificación.....	4

## **CAPITULO I**

1 Participación de México en pruebas estandarizadas.....	6
1.1 Construcción de las pruebas estandarizadas .....	10
1.2 Ejemplos de reactivos utilizados en las pruebas aplicadas.....	13
1.3 Teoría para la construcción de reactivos.....	20
1.4 Análisis general de algunos reactivos presentados por INEE, PISA y TIMSS.....	27
2 Contenido y actividades en los programas de matemáticas.....	31
3 Razonamiento social.....	33
3.1 Cómo se observa el razonamiento social.....	43
4 Conocimiento matemático.....	48
5 Evaluación Nacional del Logro académico en Centros Escolares (ENLACE).....	56

## **CAPITULO II**

2 Método.....	61
2.1 Participantes.....	61
2.2 Tareas.....	61
2.2.1 Situación dialógica.....	61
2.2.2 Situación estandarizada.....	62
2.3 Instrumento.....	64
2.4 Procedimiento.....	68

### **CAPITULO III**

3 Análisis y recolección de Datos.....	70
3.1 Análisis de los procesos de solución a problemas aritméticos una situación estandarizada.....	73
3.2 Análisis de los procesos de solución a problemas aritméticos en una situación dialógica.....	85

### **CAPITULO IV**

Discusión.....	102
Conclusiones.....	106
Referencias.....	108

## **Resumen**

El propósito del trabajo es conocer la manera en la cual los alumnos, de un grupo de tercer grado de secundaria, resuelven problemas matemáticos en un formato lápiz y papel y en una situación dialógica.

En la situación estandarizada se describe cómo los estudiantes atendían al proceso de solución de los problemas matemáticos, bajo el supuesto de las habilidades y destrezas que deben poseer para llevar a cabo el proceso de resolución. En la situación dialógica se describen los recursos y apoyos sociales que el alumno utiliza y que se expresan a través del discurso en un contexto de interacción.

Las pruebas de evaluación objetiva arrojan información sobre la solución individual y cognitiva de los alumnos, sin embargo, no es el único tipo de indicador al que debe recurrir la evaluación. Dada la complejidad del proceso de evaluación se requiere de una aproximación más amplia. Consideramos que se deben diseñar situaciones evaluativas desde una perspectiva social, que tomen en cuenta el contexto en el cual se genera la construcción del conocimiento, sin limitar el uso de herramientas y/o apoyos sociales fundamentales en el proceso de enseñanza aprendizaje.

Con base en los resultados, se concluye que la evaluación objetiva del aprendizaje a gran escala es un instrumento indispensable, sin embargo no es suficiente para explicar el aprendizaje escolar. También es importante considerar los procesos y los recursos que utilizan los estudiantes como la interacción social que se presenta entre ellos y su papel en el proceso de aprendizaje y en la evaluación del mismo.

## **Introducción**

Las evaluaciones y comparaciones internacionales del desempeño académico presentan en la actualidad un auge en el sistema educativo, ya que los resultados de éstas influyen cada vez más en las políticas educativas y sobre todo en la opinión pública de los países participantes (Cortés, Backhoff y Organista, 2005).

En este tipo de evaluaciones los estudiantes mexicanos de primaria y secundaria han obtenido resultados que se encuentran por debajo del promedio internacional. Sin embargo es probable que los alumnos aprendan más de lo que se capta con las actividades de las evaluaciones masivas en las cuales participa.

El formato de los instrumentos utilizados es el que se conoce como formato estandarizado o pruebas objetivas. Están constituidas de varios reactivos, con opciones de respuesta. El formato de aplicación exige que los alumnos resuelvan los reactivos de forma individual.

Bajo estas condiciones los estudiantes no pueden exponer sus dudas tampoco recurrir a información que ya existe en la cultura, disponible en interacciones con maestros, libros de texto y sus iguales (Leach y Scott, 2003), apoyos sociales con los que los contenidos curriculares les fueron enseñados y que son evaluados en este tipo de pruebas.

En esta investigación se analizó y comparó el proceder de los estudiantes de 3ro de secundaria que trabajaron en una situación estandarizada y una situación dialógica.

En la primera se documentaron las cualidades del proceso seguido por los estudiantes al enfrentar y resolver algunos problemas matemáticos. En este sentido, la identificación del proceso de un problema se refiere a la percepción lograda por los estudiantes de los elementos o componentes clave que intervienen en su solución. Así un aspecto fundamental en el análisis de la información recabada fue describir el nivel en que los estudiantes atendían al proceso de solución de los problemas matemáticos, bajo el supuesto de las

habilidades y destrezas que deben poseer para llevar a cabo el proceso de resolución.

En la segunda, se describen los recursos y apoyos sociales que el alumno utiliza y que se expresan a través del discurso en un contexto de interacción. Es decir, la cuestión ya no es registrar si el estudiante resuelve o no un problema matemático, si no que interesa discutir las interacciones que tienen lugar durante el aprendizaje.

Es así que el propósito de la investigación es entender mejor los resultados que obtienen los estudiantes mexicanos en su participación en evaluaciones masivas, con el fin de dar respuesta a las siguientes preguntas.

- ¿Qué tipo de procedimientos de solución presentan los estudiantes cuando resuelven un problema aritmético en una situación dialógica?
- ¿Qué diferencias existen en la solución a problemas aritméticos en una situación dialógica y una evaluación en formato lápiz y papel?

Los estudiantes trabajaron de manera individual con 7 reactivos seleccionados de la prueba Enlace 2007 en un formato lápiz y papel, esto con la finalidad de describir la situación estandarizada dentro del salón de clases. Después estos mismos problemas de trabajaron en equipos de 5 personas, hubo interacción directa entre los estudiantes al trabajar cada reactivo, de esta manera fue posible observar que la selección de alguna estrategia o el uso de algún recurso matemático se acompañaba de un argumento o explicación, ofreciendo ventajas para mantener activo el proceso de resolución (Cortés et. al, 2005).

En el análisis y la comparación de lo registrado en cada formato de solución se concluye que, la evaluación del aprendizaje a gran escala es un instrumento indispensable para reconocer los aciertos y las deficiencias de un sistema educativo tan grande como el mexicano. Sin embargo es importante no dejar de lado los procesos y los recursos que utilizan los estudiantes como la interacción social que se presenta entre ellos y su papel en el proceso de aprendizaje y en la evaluación del mismo.

## **Justificación**

Las pruebas masivas TIMSS, PISA, ENLACE y las elaboradas por INEE reportan resultados similares en sus aplicaciones. En el caso de la prueba PISA en el área de matemáticas, México ocupa el lugar 37 de 40 países participantes. Los estudiantes mexicanos son clasificados como deficientes (Rodríguez, 2005). Igualmente, en las pruebas del INNE México obtuvo resultados por debajo del promedio internacional.

Por ello evaluar rendimiento escolar debería, no sólo considerar los resultados obtenidos por una prueba, sino también las condiciones y los procesos en que se desarrollan los aprendizajes dentro del salón de clase.

La evaluación en un formato lápiz y papel se limita a la fase de recolección de información, se categorizan los procesos que los alumnos realizan y los errores que cometen, sin tratar de comprender y explicar lo que ellos hacen, los procesos y estrategias dialógicas que emplean cuando aprenden conceptos. Bazán, Castañeda, Macotela y López, (2004) mencionan que la confusión de la evaluación radica en que, en lugar de evaluar el aprendizaje, lo que se hace es medirlo a través de la ejecución de los estudiantes en pruebas estandarizadas.

Sin duda la evaluación es necesaria en el proceso de enseñanza aprendizaje, siempre y cuando no se considere la aplicación de pruebas de aprovechamiento como producto final para obtener una calificación, debe servir además, para la toma de decisiones y la consideración de las habilidades y debilidades de los alumnos.

Por tanto después de haber revisado lo anterior este trabajo pretende dar respuesta a las siguientes preguntas de investigación.

¿Qué tipo de procedimientos de solución presentan los niños cuando resuelven un problema aritmético en una situación dialógica?

¿Qué diferencias existen en la solución a problemas aritméticos en una situación dialógica y una evaluación en formato lápiz y papel?

**Objetivo:**

- Conocer la manera en la cual los alumnos, de un grupo de tercer grado de secundaria, resuelven problemas matemáticos en un formato lápiz y papel y en una situación dialógica.

## **CAPÍTULO I**

### **1. Participación de México en pruebas estandarizadas**

En el año de 1995 participaron aproximadamente 500.000 estudiantes de primaria y secundaria en una evaluación internacional, para comprobar los niveles de conocimiento y comprensión del alumno en matemáticas y ciencias, conocida con el nombre de TIMSS, (*Third Internacional Mathematics and Science Study*). Tuvo como objetivo conocer el nivel de rendimiento de los alumnos, comparar los resultados entre diferentes países y tratar de explicar las diferencias observadas en función de las distintas características de los sistemas educativos.

Los resultados del TIMSS, aunque no fueron publicados en documentos oficiales, mostraron que el rendimiento académico en el área de matemáticas y ciencias de los estudiantes mexicanos está por debajo del promedio internacional. Un estudio de este tipo y de esta magnitud representa una oportunidad extraordinaria para comparar el currículo entre países, la forma de enseñar, los logros alcanzados y así favorecer la reflexión acerca del sistema educativo del país y su puesta en práctica (Backhoff, Andrade, Monroy, Tanamachi, Bouzas, Sánchez y Peón, 2005). Los resultados obtenidos por los estudiantes mexicanos ni siquiera fueron analizados para realizar un informe de uso interno para la Secretaría de Educación Pública (SEP por sus siglas) (Backhoff y Solano, 2003).

México participó en la primera evaluación realizada por el TIMSS en el año de 1995; los estudiantes seleccionados conformaron una muestra representativa a nivel nacional con alumnos de 9 y 13 años de edad (más de 20,000 y 24,000 respectivamente). La aplicación en nuestro país estuvo a cargo de la Secretaría de Educación Pública. Después de haber administrado y calificado las pruebas el gobierno mexicano retiró su participación en el estudio, por tanto no se publicaron los datos nacionales. La Asociación Internacional para la Evaluación del logro Educativo (IEA) eliminó la información de los resultados mexicanos, sin embargo, proporcionó una copia a la Dirección General de Evaluación Educativa (DGE) de la SEP (Backhoff y Solano, 2003).

Cinco años después, en el 2000, México a través de la DGE retomó sólo las preguntas de opción múltiple para realizar otro estudio, con una muestra de aproximadamente 20,000 estudiantes. Los resultados obtenidos en este estudio tampoco fueron publicados. El único análisis de los resultados fue realizado por el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) en el año 2003, aunque las bases de datos presentan información limitada (Backhoff y Solano, 2003).

Por ello el INEE realizó un estudio comparativo con el propósito de contrastar los aprendizajes logrados por los estudiantes de 6° de primaria y 3° de secundaria en comprensión lectora y matemáticas en los años 2000 y 2005, con el fin de conocer las tendencias del Sistema Educativo Nacional en este lapso (INEE, 2005 c). Poco después de la creación del INNE en 2002, diversos grupos sociales y medios de comunicación le pidieron a este instituto que difundiera información sobre los avances o retrocesos de la educación en México; petición motivada, en gran parte, por la publicación de los resultados de los estudios internacionales que ubican a México en los últimos lugares de los países participantes (Backhoff, et al, 2005).

El INEE decidió utilizar las Pruebas de Estándares Nacionales de comprensión lectora y matemáticas en el año 2000, para evaluar a los estudiantes de 6° de primaria y 3° de secundaria, ya que estas pruebas resultaban una mejor opción puesto que se habían aplicado a muestras nacionales estudiantiles y esto permitiría aplicarla cinco años después, considerando este tiempo suficiente para observar cambios importantes en el sistema educativo mexicano (Backhoff, et al, 2005).

Backhoff, et al., (2005) mencionan que con el ánimo de poder informar al público sobre los niveles nacionales de aprendizaje en los últimos años bajo las mejores condiciones posibles en un tiempo razonable, el INEE anunció en el 2004 que realizaría un estudio comparativo en el 2005 utilizando instrumentos procedimientos y muestras estudiantiles, comparables.

De acuerdo con los datos publicados en el área de matemáticas, los estudiantes no mejoraron en este lustro. En el año 2000 los estudiantes de 3° de secundaria obtuvieron un promedio de 500.10/800 puntos y en el año 2005 obtuvieron un promedio de 496.90/800 puntos, se observa entre ellos una diferencia negativa de -3.21 (INEE, 2005 b).

De esta manera el INEE encontró datos similares a los obtenidos en el TIMMS considerando que el rendimiento académico de los estudiantes de 3° de secundaria es bajo. En otras palabras, en ambas áreas; matemáticas y ciencias, no se muestra un cambio significativo. Con base en estos resultados se puede decir que los estudiantes tienen dificultades con respecto a la posesión de los conocimientos mínimos en el área de matemáticas.

Otro estudio que busca evaluar el rendimiento de los estudiantes es el realizado por la Organisation for Economic Cooperation and Development (OCDE, en español) el cual se denomina Programme for International Student Assessment (PISA). Éste centra su evaluación en la alfabetización lectora, matemáticas y el área científica; la iniciativa de esta evaluación comparativa transnacional corresponde a los países miembros de la OCDE y está diseñada para orientar sus políticas educativas.

El primer reporte publicado por PISA en el año 2003 muestra los resultados de la evaluación en el área de matemáticas, y en el caso de México da a conocer que ocupa el lugar 37 de 40 países evaluados con un promedio de 385/500. Los estudiantes mexicanos evaluados en este estudio son clasificados como deficientes, una proporción de 0.4 % de los alumnos clasifica en niveles satisfactorios, es decir, sólo ese porcentaje obtuvo entre 607 y 668 puntos (Rodríguez, 2005).

Las conclusiones obtenidas de los estudios realizados de TIMSS, PISA y los diseñados por el INEE no se pueden analizar de manera aislada, existen factores que influyen, y deben ser explicados a partir de la información de contexto, que permita comprender los puntajes. Evaluar la calidad de la educación

implica más que conocer los resultados obtenidos por una prueba, es necesario además considerar la calidad de las condiciones y los procesos en que se desarrollan los aprendizajes.

Rodríguez (2005) refiere que los resultados del PISA están relacionados con el estilo y grado de desarrollo de las sociedades en que los estudiantes se desenvuelven. Existen factores hipotéticamente condicionantes en la explicación de los resultados: actitudes hacia el aprendizaje, condición social de los estudiantes y características de los entornos escolares.

El primer factor consiste en el interés y disfrute de las matemáticas, ansiedad ante las matemáticas y estrategias de control. En México, 12% de la varianza observada en los resultados de matemáticas corresponde a dicho factor.

El segundo factor retoma la condición social de los estudiantes y explica las diferencias entre países, y con respecto al nivel de resultados alcanzados. El último factor se refiere al ambiente escolar, es decir, los países que cuentan con los recursos necesarios para mejorar la calidad educativa obtienen los mejores resultados.

El resultado de los estudiantes mexicanos en las pruebas, se deben a una combinación de factores causales; que se pueden agrupar en tres grandes niveles (INEE, 2005 g):

- Factores familiares, que está estrechamente vinculado con el medio socioeconómico, en el cual se asientan los hogares de los alumnos y que determinan en gran medida las características de cada niño o niña
- factores del entorno social en el cual se sitúa la escuela, como su carácter urbano o rural, su grado de marginalidad, su mayor o menor riqueza, la escolaridad promedio de sus habitantes.
- Factores escolares relacionados con el plantel, como son equipamiento de la escuela, existencia de biblioteca, acceso a

computadoras e Internet, trabajo de equipo de los maestros bajo la dirección del director. Igualmente aquellos relacionados con el aula, desde las características del maestro o maestros, edad, escolaridad, experiencia, hasta las prácticas de cada uno, asistencia, métodos de la enseñanza, etcétera.

Por sus dimensiones y condiciones del entorno demográfico, económico, social y cultural en donde se ubican los subsistemas que lo integra, el Sistema Educativo Mexicano es muy heterogéneo. Por ello los juicios sobre la calidad educativa nacional deben ser complementados y matizados con señalamientos precisos sobre la importancia de las diferencias entre sus partes.

### **1.1 Construcción de las pruebas estandarizadas**

En la construcción de las preguntas del proyecto internacional TIMSS, participaron expertos en todas las áreas educativas, incluyendo a los expertos en el análisis de políticas educativas, educación matemática, educación científica, diseño de currículo, supervisión de la investigación, construcción de pruebas, psicometría, encuestas, muestreo y análisis de datos (Backhoff, et al., 2005)

Acevedo (2005) menciona que existen tres niveles de currículo, el primer nivel es el currículo pretendido, esto quiere decir, que es lo que se planifica para la enseñanza como respuesta a las necesidades de la sociedad y de una comunidad educativa, ya que refleja los ideales y las tradiciones sociales y comunitarias. El segundo nivel es el currículo aplicado, que corresponde a lo que realmente se enseña dentro del aula, con quien lo imparte, o sea, el profesor, y cómo lo hace, su didáctica; por lo que en la práctica docente el comportamiento del profesor puede estar influido por su formación y experiencia, la naturaleza y estructura orgánica de la escuela, así como su interacción con los compañeros y las características del alumnado, entre otros factores. El tercer y último nivel se refiere al currículo logrado, que es básicamente lo que los estudiantes consiguen aprender y lo que piensan sobre las materias aprendidas. El rendimiento de los estudiantes depende de las características de cada alumno; su capacidad, actitud, intereses, motivación y esfuerzo; así como el contexto social y educativo en el que

tiene lugar el proceso de enseñanza-aprendizaje.

En la aplicación del TIMSS se utilizan cuestionarios de contexto con preguntas relacionadas con la estructura y el contenido del currículo pretendido en matemáticas y ciencias.

Para la realización de las preguntas relacionadas al currículo pretendido, en cada país participante se obtiene información a través de un análisis minucioso de las orientaciones de los documentos curriculares, de libros de texto y otros materiales de apoyo, así como de cuestionarios respondidos por expertos en educación y especialistas del currículo. Las preguntas relacionadas al currículo logrado, las contesta cada alumno participante y se relacionan con sus actitudes, creencias y experiencia.

Las pruebas desarrolladas en el TIMSS, se basan en dominios de currículo, que se refieren a los aprendizajes que el sistema educativo pretende alcanzar; y dominios cognitivos expresados por la apropiación de conocimientos, habilidades y actitudes que cada estudiante, de manera individual logra. Contienen preguntas cerradas de opción múltiple, algunas de respuesta abierta y otras de resolución de problemas. La mayoría de los ítems se centra en un contenido concreto, pero también se necesita que el alumno demuestre conocimientos o destrezas procedentes de otras áreas de contenidos ( Backhoff, et al, 2005)

La evaluación de PISA se centra en los procedimientos o destrezas, la comprensión de conceptos y la capacidad para responder a diversas situaciones reales en cada área evaluada. Además incluye la evaluación de habilidades como la comunicación, adaptación, flexibilidad, resolución de problemas, uso de las tecnologías, entre otras. Algunas preguntas son cerradas, por lo que los alumnos tienen que elegir entre varias opciones o dar respuestas relativamente simples que pueden compararse directamente con la respuesta correcta. Otro tipo de preguntas son las abiertas, y los alumnos tienen que dar respuestas mucho más elaboradas; así se puede evaluar las destrezas y habilidades de los alumnos (Acevedo, 2005).

El INEE centra su evaluación en asignaturas propiamente instrumentales, como matemáticas y español, ciencias naturales y sociales, identificando en cada caso la selección idónea de contenidos conforme al currículo nacional y al grado escolar a evaluar.

Las funciones del INEE son evaluar a los estudiantes mexicanos de lo que aprenden del currículo nacional. Proveer información del logro educativo del alumnado, así como de la calidad de los servicios. El propósito fundamental de la evaluación del aprendizaje es proporcionar un conocimiento general del rendimiento académico de los estudiantes a nivel estatal y nacional, así como de los factores más importantes que influyen en éste. El INEE planteó la necesidad de contar con instrumentos teóricos y técnicamente sólidos; idea que se consolidó con el desarrollo de una nueva generación de pruebas nacionales denominadas Exámenes de la Calidad y el Logro Educativo (Excale) (INEE, 2005 f).

La construcción de reactivos se basa en criterios establecidos por autores de libros de texto y docentes en ejercicio, examinados por expertos en educación y currículo. El Comité Constructor de Reactivos estableció las áreas temáticas o componentes, los temas y los subtemas que derivan en los contenidos curriculares y habilidades intelectuales a evaluar, así como la forma y número de reactivos con que serán evaluados. Los reactivos son revisados con base en su contenido (pertinencia curricular, grado de dificultad, etc), redacción (lenguaje utilizado y construcción sintáctica) y sesgos cultural y de género (características de contenido y redacción que favorezcan o perjudiquen a algún grupo social) (INEE, 2005 a).

## **1.2 Ejemplos de reactivos utilizados en las pruebas aplicadas**

Desarrollar pruebas es un proceso complejo y laborioso que requiere la distinción continua de tres componentes: el planteamiento de un problema o tarea, un formato de respuesta (como el cuadernillo en el que se capturan las respuestas de los estudiantes) y un sistema de calificación. La mayor parte de este continuo perfeccionamiento tiene que ver con la manera de plantear un problema, las palabras que se usan y la forma en que los estudiantes interpretan y responden a esos reactivos. Al final de ese proceso se alcanza un equilibrio delicado: cualquier modificación a la redacción del reactivo puede producir formas diferentes, no anticipadas ni deseadas, en las que los estudiantes pueden interpretar y responder el reactivo (INEE, 2005 a).

Solano y Backhoff (2005) mencionan que la manera en que un estudiante interpreta un reactivo es muy sensible a la forma en que está redactado. Por ejemplo, una sola palabra puede hacer una enorme diferencia en lo que los estudiantes creen que tienen que hacer para resolver un problema. Además, la combinación de las experiencias personales de los estudiantes y la manera en que se presenta la información de un reactivo puede determinar que el alumno lo interprete correcta o incorrectamente.

Cuando el estudiante contesta una pregunta tiene la probabilidad de contestar correctamente. Dicha probabilidad está dada por su propia habilidad o conocimiento, y por la dificultad de la pregunta. De esta manera, se espera que cuanto más hábil sea respecto a la dificultad de la pregunta tendrá más posibilidades de contestar correctamente. Aun cuando en el caso de que el estudiante domine el tema tratado, tendrá posibilidades de equivocarse por otros aspectos como son: ansiedad producida por el examen, problemas de salud, entre otros.

En un reporte del INEE (2005 e) se presenta algunos ejemplos de los reactivos que se incluyeron en las pruebas aplicadas en 2004. Se trata de reactivos fácil y difícil, tanto para primaria como para secundaria.

El siguiente es un ejemplo de un reactivo fácil de matemáticas para 6° de primaria, que mide una capacidad de imaginación espacial de poca complejidad.

**Un reactivo de dificultad baja en matemáticas de 6° grado de primaria**

29. Observa el dado que sólo tiene tres letras:



¿Con cuál de las siguientes plantillas se armó el dado?









Asignatura	Respuesta	Área temática	Ejecución esperada	Valor "p" por modalidad educativa					Nacional	
				U.P.	R.P.	C.C.	E.I.	Priv.	P	B
Matemáticas	■	Cuerpos geométricos	Imaginación espacial	0.85	0.81	0.75	0.68	0.92	0.84	320

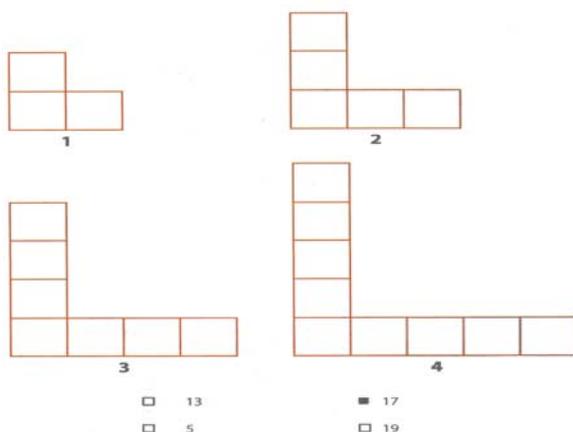
Fuente: INEE (2005 e). *Preguntas y sentido de las respuestas en las pruebas nacionales*. Pág. 5

Este reactivo corresponde al área temática de Geometría que evalúa la ubicación espacial, figuras y cuerpos geométricos. Se espera que el sujeto ubique espacialmente las plantillas mostradas e imagine la construcción de la figura geométrica. En una evaluación nacional llevada a cabo por el INEE en 2005, de 45, 087 estudiantes de 6°, provenientes de 3 mil 177 escuelas primarias, el 84% de estos estudiantes contestó correctamente este reactivo.

El siguiente ejemplo es un reactivo difícil para 6° de primaria, el cual mide la capacidad de generalizar en series de figuras geométricas.

**Un reactivo de dificultad alta en matemáticas de 6° grado de primaria**

88. Observa la secuencia de figuras. Si la secuencia continúa, ¿cuántos cuadritos tendrá la figura número 8?



Las pruebas de matemáticas se diseñan para evaluar las habilidades matemáticas que los estudiantes, en su proceso de formación, desarrollan al concluir los últimos grados de primaria y secundaria. Es decir, las pruebas se han centrado en la evaluación de las habilidades matemáticas del estudiante para la solución de problemas, tanto similares a los vistos en clase, como novedosos, que implican una generalización o transferencia de dichas competencias matemáticas.

Asignatura	Respuesta	Área Temática	Ejecución esperada	Valor "p" por modalidad educativa					Nacional	
				UP	UP	C.C.	E.I.	Priv.	P	B
Matemáticas		Figuras geométricas	Generalización	0.40	0.35	0.32	0.28	0.53	0.39	550

Fuente: INEE (2005 e). *Preguntas y sentido de las respuestas en las pruebas nacionales*. Pág. 6

En este reactivo se espera que el alumno imagine cómo van aumentando los cuadros para realizar la generalización de las figuras y obtener así el resultado correcto. En la evaluación nacional llevada a cabo por el INEE en 2005, de 45,087 estudiantes de 6°, provenientes de 3 mil 177 escuelas primarias, el 39% de los sujetos contestó correctamente.

En los dos reactivos anteriores se espera que el alumno domine la ubicación con respecto a su entorno, manipulación observación, dibujo y análisis de formas diversas. El alumno en 6° grado ya ha adquirido la estructuración del manejo e interpretación del espacio y de las formas.

El siguiente ejemplo es un reactivo de dificultad baja en matemáticas para alumnos de 3° grado de secundaria.

**Un reactivo de dificultad baja en matemáticas de 3° grado de secundaria**

94. El resultado de dividir un número en 2 partes iguales se expresa:

- n+2
- n - 2
- n + 2
- n/2

Asignatura	Respuesta	Área temática	Ejecución esperada	Modalidad educativa				Nacional	
				Gral.	Tec.	T.V.	Priv.	p	b
Matemáticas	<input checked="" type="checkbox"/>	Pre-álgebra	Comunicación	0.81	0.79	0.81	0.92	0.81	333

Fuente: INEE (2005 e). *Preguntas y sentido de las respuestas en las pruebas nacionales*. Pág. 10.

Lo que se espera que el sujeto haga para la resolución del reactivo es tener un manejo elemental del lenguaje aritmético. En la evaluación nacional llevada a cabo por el INEE en 2005, de 35 mil 350 estudiantes inscritos en mil 141 escuelas de 3° de secundaria, el 81 % de los alumnos lo responden correctamente.

El siguiente ejemplo es un reactivo de dificultad alta en matemáticas de 3° grado de secundaria.

**Un reactivo de dificultad alta en matemáticas de 3° grado de secundaria**

101. En esta bolsa hay 3 canicas azules y 3 canicas rojas.



Sin ver, voy sacando canicas de una en una. ¿Cuál es el menor número de canicas que debo sacar para tener la seguridad de tener dos del mismo color?

- 2
- 3
- 4
- 6

Fuente: INEE (2005 e). *Preguntas y sentido de las respuestas en las pruebas nacionales*. Pág. 11

Este reactivo es difícil porque la respuesta supone una inferencia para estimar la probabilidad correcta. Además, su redacción podría ser un factor que dificulte contestarlo. La frase “sin ver, voy sacando canicas” puede ser interpretada por el alumno de diversas formas, para lo que el alumno tendrá que quedarse con dudas sin poder preguntar a que se refiere “sin ver”, pues puede interpretarse de la siguiente manera: no ver la ilustración para poder resolver el reactivo.

Al igual que las pruebas realizadas por el INEE, se dieron a conocer los reactivos utilizados en el estudio PISA, en los cuales los estudiantes deben demostrar las capacidades que deben activarse para analizar, razonar y

comunicar ideas de manera efectiva mediante el planteamiento, la formulación y la resolución de problemas matemáticos.

PISA utiliza líneas principales para cubrir el área de matemáticas. Cada línea principal es un conjunto que engloba hechos y conceptos, los cuales cobran sentido en una amplia variedad de situaciones o contextos, que son los ámbitos en que se sitúan los problemas de matemáticas. Las situaciones incluyen la vida personal, la vida escolar, en el trabajo y los deportes, en la comunidad local y en la sociedad.

El siguiente ejemplo es un reactivo de conexiones de probabilidad, utilizado en PISA.

Un reportero de la TV mostró esta gráfica y dijo:

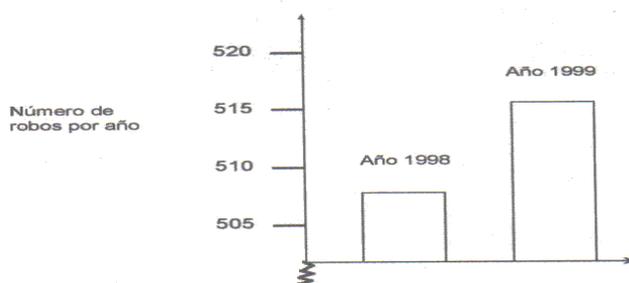
“la gráfica muestra que hay un incremento gigantesco en el número de robos entre 1998 y 1999”.

UNIDAD: Robos

**PREGUNTA 1: ROBOS**

M179009

Un reportero de la TV mostró esta gráfica y dijo:  
“La gráfica muestra que hay un incremento gigantesco en el número de robos entre 1998 y 1999”.



Fuente: INEE (2005 d) *PISA para docentes. La evaluación como oportunidad de aprendizaje.*

¿Consideras que la afirmación del reportero es una interpretación razonable de la gráfica? Explica tu respuesta.

En este reactivo se espera que el estudiante realice una conexión de ideas y procedimientos matemáticos para resolver el problema directo que no son de rutina, pero que incluye un escenario familiar o casi familiar. Considerándose la construcción de modelos, traducción, interpretación y solución del problema estándar; y la aplicación de métodos múltiples bien definidos.

Los siguientes ejemplos son reactivos de reproducción de la cantidad.

**TIPO DE CAMBIO**

Mei-Ling encontró que el tipo de cambio entre los dólares de Singapur y los rands de Sudáfrica era:

$$1SGD = 4.2 ZAR$$

Mei-Ling cambió 3000 dólares de Singapur a rands sudafricanos a este tipo de cambio.

¿Cuánto dinero en rands sudafricanos recibió Mei-Ling?

Respuesta.....(12 600 ZAR, no se requiere de las unidades)

**EXPORTACIONES**

En las graficas siguientes se muestra información sobre las exportaciones de Zedlandia, un país que utiliza el zed como moneda.

En las gráficas siguientes se muestra información sobre las exportaciones de Zedlandia, un país que utiliza el zed como moneda.



Fuente: INEE (2005 d) PISA para docentes. La evaluación como oportunidad de aprendizaje.

En los reactivos anteriores se espera que el estudiante demuestre una reproducción de cálculos simples o definiciones del tipo más familiar. Incluye el conocimiento y definición de hechos, la representación de problemas comunes, la realización de cálculos y procedimientos rutinarios. El porcentaje de repuesta de este reactivo de los estudiantes mexicanos se considera bajo, teniendo un porcentaje de 65.1 %, probablemente esto se puede explicar por que el ejemplo resulta poco familiar.

Cuando los estudiantes mexicanos se enfrentan a una situación de este tipo les resulta difícil resolver los problemas. Es una prueba que se les aplica en un formato lápiz y papel se deja de lado los recursos sociales a los que pudiera recurrir para exponer sus dudas y encontrar la manera de solucionarlas.

El siguiente ejemplo es un reactivo utilizado por la prueba del TIMSS para el nivel de secundaria.

*Si el precio de una lata de frijoles ha subido de 60 centavos a 75 centavos, ¿en qué porcentaje ha aumentado el precio?*

- A. 15%
- B. 20%
- C. 25%
- D. 30%

El siguiente ejemplo es un reactivo utilizado por la prueba del TIMSS para el nivel de primaria.

*Antonio leyó las primeras 78 páginas de un libro de 130 páginas ¿Qué operación aritmética debe usar Antonio para saber el número de páginas que le faltan de leer?*

- A.  $130 + 78 = \square$
- B.  $\square - 78 = 130$
- C.  $130 / 78 = \square$
- D.  $130 - 78 = \square$

En estos reactivos se infiere que el alumno debe saber aplicar las operaciones básicas; suma, resta, multiplicación y división y ser capaz de reconocer en qué problemas aplicar cada algoritmo correctamente.

### **1.3 Teoría para la construcción de reactivos**

En el aprendizaje académico existe una diversidad de procesos muy complejos. Algunos son de índole psicológica, como el pensamiento, el lenguaje, la atención y la memoria, que reflejan la operación de funciones cognitivas, junto con los procesos afectivos y de motivación que regulan y matizan el aprendizaje. Otros son de naturaleza educativa y se refieren a los contenidos, actividades, materiales y tareas, que prescriben los planes de estudio.

López y Castañeda (1990) menciona que los diferentes procesos educativos instruccionales y contextuales que intervienen en el aprendizaje, se ven reflejados en el proceso de evaluación. Para identificar la diversidad en la formación de los alumnos se requieren criterios, procedimientos e instrumentos que sean precisos al evaluar, para obtener en forma real e integral los distintos niveles de estructuración y complejidad en el razonamiento de los alumnos.

Dicha diversidad ha provocado que la evaluación del aprendizaje presente grandes cambios, mismos que alientan su desarrollo como un área necesariamente ligada a una teoría que sustente tanto los métodos de medición utilizados como la característica y propiedades a evaluar. Tales son los casos de la evaluación adaptativa y la modelización generativa de respuestas (Castañeda, 1993).

En la evaluación adaptativa las pruebas no se diseñan con un carácter fijo para todas las personas, es decir, los reactivos se seleccionan de un banco a partir de la información inicial, misma que se obtiene mediante el nivel de dominio de la habilidad o conocimiento que se pretende evaluar. Por su parte, la modelización generativa de respuestas supone una aproximación al diseño de pruebas desde la validación de constructos, donde los reactivos son generados conjuntamente con la estimación de los intereses de evaluación de cada ocasión.

Los instrumentos de evaluación académica aportan información sobre el conocimiento de hechos y conceptos, pero no pueden medir la capacidad de razonar. Debido a la diversidad y complejidad del aprendizaje académico, por varias décadas no se utilizaron pruebas alternativas seriamente para evaluar el

aprovechamiento escolar. Ahora una prueba debe imponer demandas cognitivas para los estudiantes y promover entre ellos el uso de las llamadas “habilidades intelectuales de orden superior”. Tales habilidades involucran la aplicación de conocimientos, el pensamiento crítico, la solución de problemas y la creatividad (Solano, 2004), como se muestra en el siguiente ejemplo:

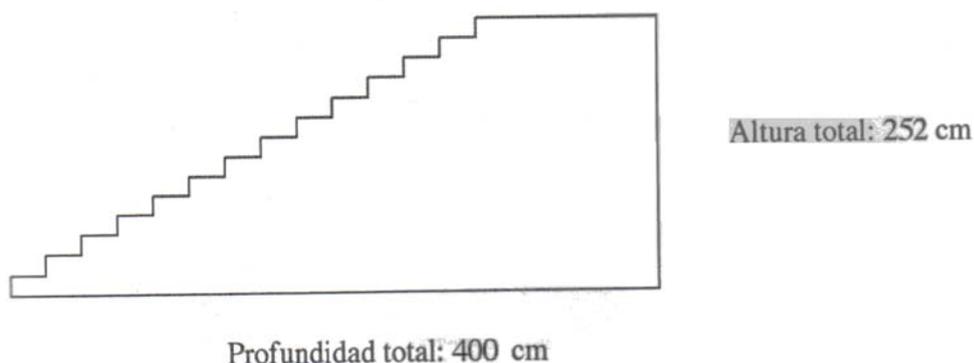
En la prueba de PISA 2005 se presenta el siguiente reactivo.

*En el diagrama de abajo se ilustra una escalera con 14 escalones que tiene una altura total de 252cm:*

**Pregunta 1: LA ESCALERA**

Profundidad total: 400 cm  
Altura total: 252 cm

En el diagrama de abajo se ilustra una escalera con 14 escalones que tiene una altura total de 252 cm:



*¿Cuál es la altura de cada uno de los 14 escalones?*

*Altura.....cm.*

Fuente: INEE (2005 d) PISA para docentes. La evaluación como oportunidad de aprendizaje.

El reactivo demanda que el alumno desarrolle cálculos simples utilizando operaciones básicas, en este caso el alumno debe dividir la altura total de la escalera entre el número de escalones: es decir  $252 / 14$ ; por tanto, debe poseer conocimientos y definiciones como la altura y la profundidad, la representación de problemas comunes, la realización de cálculos y procedimientos rutinarios.

En estudios como TIMSS, PISA y los realizados por el INEE se han diseñado y aplicado pruebas masivas, técnicamente llamadas a gran escala; estudios en los que México ha participado desde 1995 con el TIMSS, PISA-2000,

2003, 2006, e INEE 2005. Estos estudios han evaluado a los estudiantes por medio de instrumentos en un formato lápiz y papel.

Con la aplicación de estas pruebas se busca evidencia del cambio de los procesos de madurez, crecimiento y la influencia de distintas experiencias, así como de la educación que se imparte dentro de la escuela, el currículo y la instrucción, ya que la evaluación es la reunión sistemática de evidencias a fin de determinar si en realidad se producen ciertos cambios en los alumnos (Bloom citado en Garton y Pratt, 1992).

Sin embargo, la evaluación de los resultados del proceso de enseñanza-aprendizaje ha sido confundida con el uso exclusivo de pruebas estandarizadas. Bazán et al., (2004) mencionan que al menos, son cinco los elementos que debilitan la evaluación del aprendizaje escolar a través de la aplicación de instrumentos estandarizados, como son las pruebas a gran escala:

- Miden las ejecuciones de los niños en situaciones artificiales aplicando arbitrariamente estándares o criterios de desempeño; Entendiendo como situaciones artificiales, aquellas en las que se descontextualiza al niño y se le pide responder algo con lo que no está familiarizado y le resulta de poco interés.
- Omiten el uso de textos y elementos significativos para el alumno, no fomentan el desarrollo de la capacidad crítica y creativa, ni el manejo de relaciones abstractas. Lo que se cuestiona en este punto es que no se les permite a los alumnos recurrir a los apoyos sociales como son sus notas, libros de texto, las relaciones entre los sujetos y los contenidos que participan en el proceso educativo.
- Generan confusión de lo que es evaluación del desempeño académico con el uso y calificación de pruebas estandarizadas. Sin embargo la evaluación es un proceso de obtención de resultados para formar un juicio para la toma de decisiones.
- Reducen la práctica educativa a la elaboración, aplicación e interpretación de datos. Sin tomar en cuenta los factores que

influyen en el aprendizaje, no considerándolos para la efectividad de programas y políticas educativas.

- Sirven para determinar la promoción a grados o niveles educativos, o para determinar la aceptación o rechazo del aspirante. Los datos sólo se interpretan para la medición de un comportamiento y no como la evidencia del dominio de las actividades en el proceso de aprendizaje.

Entendiendo como situaciones artificiales, aquellas en las que se descontextualiza al estudiante y se le pide responder algo con lo que no está familiarizado, además de evaluar sin permitir o proporcionar un apoyo social. La escuela exige tempranamente al alumno que emplee un tipo de pensamiento desvinculado, es decir, ajeno a los intereses, significados e intenciones humanas que constituyen la construcción del aprendizaje del alumno. De esta manera se limita la evaluación a la fase de recolección de información, se categorizan los procesos que realiza y los errores que comete el alumno, sin tratar de comprender y explicar lo que él hace, los procesos y estrategias que emplea cuando asimila conceptos, y en cuestión a matemáticas cuando efectúa operaciones de cálculo o resuelve problemas algebraicos.

La confusión de la evaluación radica en que, en lugar de evaluar el aprendizaje, lo que se hace es medirlo a través de la ejecución de los estudiantes en pruebas estandarizadas, con una marcada incidencia de la tradición psicométrica. Por ejemplo, no se puede afirmar que se evalúa el aprendizaje de un estudiante con la ejecución en una prueba estandarizada de 20 ó 30 preguntas.

El desconcierto no apunta al uso de los instrumentos, sino a lo que se hace de los resultados. Tal es el caso de la SEP y los resultados de la prueba a gran escala llamada TIMSS, que no fueron publicados ni recuperados por dicha institución para analizarlos e indagar más sobre el nivel de aprendizaje de los alumnos participantes. Así como los problemas de validez ecológica de los instrumentos que, muchas veces, incluyen actividades muy ajenas a eventos significativos y familiares a las situaciones de aprendizaje, especialmente cuando

fueron elaborados para evaluar a niños de otros países o de conocimientos y habilidades de otras lenguas (Bazán et al., 2004).

Para garantizar una validez ecológica al momento de evaluar se debe elaborar y validar instrumentos tomando en cuenta tanto los planes como los programas de estudio y las actividades, las situaciones de evaluación implicadas en los libros de texto, así como los materiales de apoyo que se utilizan masivamente en el sistema educativo. Esto con base en una concepción global sobre la similitud entre las condiciones en las que el niño aprende, en las que ejercita estas competencias y las situaciones de evaluación, enfatizando la valoración del logro de los estudiantes mediante pruebas o situaciones basadas en el currículo ( Bazán et al., 2004; Carrasco, 2003; López y Rodríguez, 2003; Martínez y Schmelkes,1993, citados en Bazán et al., 2004).

En México la cobertura educativa del nivel básico ya no es el principal problema, se ha ido resolviendo gradualmente. La educación básica obligatoria, en el ciclo escolar 2005-2006 cubrió a 25 millones de alumnos, cifra equivalente a casi la cuarta parte de la población total de nuestro país y 77.4 por ciento de la matrícula del Sistema Educativo Nacional Escolarizado.

Para el ciclo 2006-2007 se estima un incremento en su cobertura en más de 212 mil alumnos. Desde hace una década el interés por parte de los especialistas de la educación se ha centrado en evaluar qué es lo que aprende la población escolar y cuáles son los aprendizajes básicos que forman parte del repertorio de los estudiantes. La evaluación del aprendizaje que realiza el INEE tiene la intención de proporcionar al país un conocimiento general del rendimiento escolar que logran los estudiantes en las asignaturas básicas del currículo nacional a través de las pruebas nacionales EXCALE (Exámenes de la Calidad y el Logro Educativo) (INEE, 2005 a).

Backhoff et al., (2006) refieren que los EXCALE se apoyan en el conocimiento acumulado durante más de 100 años de la psicometría, así como en la experiencia de aproximadamente 45 años de la aplicación de evaluaciones internacionales del logro educativo. Los trabajos que más influyeron en la elaboración de los EXCALE fueron los relacionados con: a) los fundamentos de las teorías clásicas de la medida y de respuesta al ítem, b) la experiencia y los

marcos de referencia de las pruebas nacionales de otros países para evaluar la calidad educativa, especialmente los de España y Estados Unidos, y C) de las pruebas internacionales de vanguardia, como el Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes realizado por la OCDE en el 2003 y el Tercer Estudio Internacional de evaluación de ciencias y matemáticas.

La construcción de los EXCALE está definida básicamente por los principios de las teorías clásicas de la medida y de respuesta al ítem. Respecto a la primera se adoptan los principios para la construcción y validación de pruebas criteriales alineadas al currículum; sobre la segunda, los principios básicos para la calibración y el escalamiento de pruebas educativas. De esta manera las pruebas nacionales EXCALE adoptan los siguientes criterios teóricos-metodológicos (INEE, 2005 a):

- 1) Ser de tipo criterial, por que se diseñan para conocer con precisión el grado de dominio que el estudiante tiene sobre un conjunto de contenidos específicos.
- 2) Estar alineada al currículo, por que se elaboran con una metodología *ad hoc* para evaluar con mucha precisión los contenidos curriculares (llámense habilidades, conocimientos, competencias, etcétera) que se definen en los planes y programas de estudios nacionales.
- 3) Tener un diseño matricial de reactivos, están diseñadas para evaluar una gran cantidad de contenidos curriculares, sin someter a los estudiantes a largas jornadas de resolución de pruebas.
- 4) Ser de respuesta seleccionada, con un diseño de opción múltiple (aunque en algunos casos también se utiliza la respuesta construida).
- 5) Utilizar un escalamiento basado en la teoría de respuesta al ítem, específicamente utilizando el modelo de un parámetro, conocido como modelo de Rasch. Uno de los principios fundamentales de esta teoría es la unidimensionalidad de las escalas; es decir, se debe de comprobar que los reactivos de las pruebas corresponden a

una sola dimensión, de lo contrario no es adecuado utilizar este modelo de escalamiento.

- 6) Definir niveles de logro para la interpretación de sus resultados, se interpretan de acuerdo con los estándares o niveles de logro que se definen para describir lo que los alumnos saben o son capaces de hacer con sus aprendizajes.
- 7) Utilizar los parámetros de la teoría Clásica de la medida y de la respuesta al ítem para evaluar la calidad de los EXCALE y aportar evidencias de su validez. Los EXCALE deberán ajustarse a rigurosos *estándares de calidad*; a) la definición clara de uso y cobertura, b) el uso de procedimientos rigurosos para su diseño y construcción , c) el uso de procedimientos estandarizados para su administración, d) la clara interpretación de resultados, y e) la exhibición de evidencias de validez y confiabilidad.

Al contemplar los diversos factores que intervienen en la construcción y validación de pruebas, es necesaria una crítica racional de los criterios en los que se apoya la cultura evaluativa para ayudar a una mejor toma de decisiones. La evaluación es un proceso social continuo pero rara vez se publica y se debate la información resultante. En este sentido Lacasa (1994) afirma que el proceso de evaluación está inmerso en un mundo de valores no siempre explícitos, debido a su complejidad, además de la diversidad de interpretaciones del propósito de la evaluación, lo que se va a evaluar y los evaluadores.

Desde el punto de vista de Loacker (Citado en Lacasa, 1994) la evaluación se divide en seis etapas:

- a) Determinar qué va a ser objeto de la evaluación
- b) Diseñar los medios, instrumentos y los criterios
- c) Evaluar
- d) Interpretar los resultados
- e) Proporcionar feedback
- f) Utilizar el feedback para mejorar el proceso de educación

El mismo autor propone que la evaluación debe cumplir con las siguientes funciones:

- a) Es un medio para clarificar lo que debe enseñarse
- b) Proporciona información mediante la que modificar las expectativas sobre el nivel y calidad del rendimiento de los alumnos
- c) Es un medio para lograr la participación activa del alumno en su proceso de aprendizaje
- d) Favorece la adaptación y reajustes de la enseñanza a las necesidades del alumno
- e) Genera información sobre la adecuación de estrategias instruccionales

Considerando estos puntos, la evaluación es necesaria en el proceso de enseñanza aprendizaje, siempre y cuando no se considere como producto final la aplicación de pruebas de aprovechamiento para obtener una calificación, si no que sirva para la toma de decisiones y consideración de las habilidades y debilidades de los alumnos.

#### **1.4 Análisis general de algunos reactivos presentados por INEE, PISA y TIMSS**

La construcción de este tipo de pruebas tiene el interés de indagar qué es lo que el alumno aprende dentro del sistema educativo. Los reactivos expuestos en las pruebas INEE, PISA y TIMSS muestran el tipo de conocimiento y comprensión que el alumno aprende del currículo nacional.

Los reactivos que presenta el INEE (2005 a) en la prueba EXCALE, indican el dominio que tienen los alumnos sobre un contenido específico, demostrando así el nivel de conocimiento y habilidad que tiene cada alumno para la resolución de problemas, comprensión de conceptos y análisis crítico.

El proyecto PISA busca evaluar específicamente la capacidad que tienen los estudiantes para responder a diversas situaciones reales en cada área evaluada. En el caso de matemáticas se refiere a la capacidad de analizar, razonar y comunicar favorablemente los aspectos de la reflexión, reproducción, y

conexión en la resolución de problemas matemáticos. A diferencia de PISA, las evaluaciones del INEE y TIMSS buscan evaluar áreas curriculares específicas.

El TIMSS clasifica los comportamientos a considerar en tres dominios cognitivos, a saber; en primer lugar menciona el conocimiento, así, cuanto más relevante sea el conocimiento que un estudiante tenga, mayor será su potencial para enfrentarse a situaciones planteadas cómo problema. El segundo se refiere a la aplicación, es decir la resolución de problemas, ya sea cuando se plantean en situaciones de la vida real, o que tengan que ver con preguntas puramente matemáticas en las que hay que utilizar, por ejemplo, expresiones numéricas o algebraicas, funciones, ecuaciones, figuras geométricas o conjuntos de datos estadísticos; y finalmente el razonamiento, al que considera como la capacidad de pensamiento lógico y sistemático. Incluye el razonamiento intuitivo e inductivo basado en patrones y regularidades que se pueden utilizar para llegar a soluciones de problemas no habituales. Los problemas no habituales son problemas que muy probablemente no resulten conocidos para los estudiantes.

Los tres tipos de evaluación plantean unas exigencias cognitivas que superan lo necesario para resolver problemas habituales, el reactivo que se muestra en la prueba a gran escala PISA (ver ejemplo1), plantea un problema de probabilidad con información ficticia que resulta poco familiar a los alumnos de acuerdo con los datos expuestos abajo; aún cuando el conocimiento y las destrezas requeridas para su solución se hayan aprendido con problemas contextualizados que se plantean en sus libros de texto (ver ejemplo 2).

### Ejemplo 1 PISA

*En las gráficas siguientes se muestra información sobre las exportaciones de Zedlandia, un país que utiliza el zed como moneda.*

*¿Cuál es el valor total (en millones de zeds) de las exportaciones de Zedlandia en 1998?*

En las gráficas siguientes se muestra información sobre las exportaciones de Zedlandia, un país que utiliza el zed como moneda.



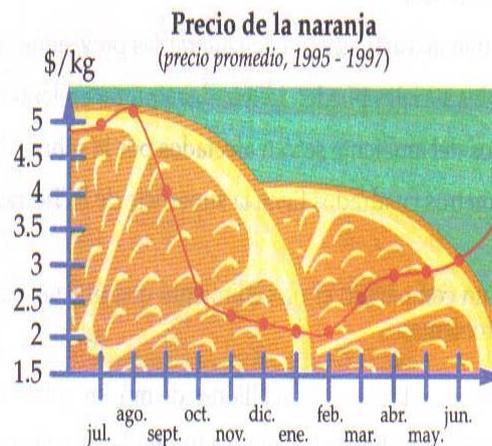
Fuente: INEE (2005 d) PISA para docentes. La evaluación como oportunidad de aprendizaje

Ejemplo2: tomado del libro de texto de tercer grado de secundaria en matemáticas.



Realiza en tu cuaderno los siguientes ejercicios.

- ▶ De acuerdo con un estudio de la Procuraduría Federal del Consumidor, durante los años 1995-1997 el precio promedio de la naranja veracruzana varió de un mes a otro. Hemos utilizado la información de la gráfica para anotar alguna información en la tabla. Complétala.



Mes	Jul.	Ago.	Sept.	Oct.	Nov.	Dic.	Ene.	Feb.	Mar.	Abr.	May.	Jun.
Precio	4.50	5.50	3.50	2.50	2.50	2.25	2.25	2.00	2.50	3.00	3.25	3.50
Tasa de cambio		+22 %	-36 %									

### EJEMPLO 3:

- Para trabajar en equipo. Con el paso del tiempo, la población mundial ha ido creciendo. Cada vez se ocupa más territorio, pero la superficie de la Tierra permanece igual: unos 140 billones de m<sup>2</sup>. La siguiente tabla muestra el crecimiento de la población del mundo en los últimos años. Discute con tus compañeros las preguntas que se plantean en relación con esta tabla. Primero completa la tabla.

Año	Población mundial	Tasa de cambio
1650	500 000 000	
1700	600 000 000	
1750	700 000 000	
1800	900 000 000	
1850	1 200 000 000	
1900	1 600 000 000	
1950	2 100 000 000	
2000	mas de 6 000 000 000	
2050		

- Predice los datos para el año 2050.*
- Representa estos datos en una gráfica.*
- ¿Cómo ha crecido la ocupación del planeta? Expresa por escrito tu interpretación de la tabla y la gráfica. Discútelas con tus compañeros de equipo.*
- ¿En qué periodos la tasa de crecimiento de la población ha experimentado cambios más notables? Consulta tus libros de Historia para buscar una explicación a este fenómeno.*
- ¿Qué acontecimientos actuales pueden alterar las previsiones para el futuro?*
- ¿Qué costumbres sociales pueden frenar, disminuir o acelerar el crecimiento.*
- ¿Qué elementos del ambiente se ven afectados por la sobrepoblación?*
- ¿Cuántos kilómetros cuadrados tiene la superficie de la Tierra?*

Con base en los ejemplos anteriores podemos afirmar que la exigencia cognitiva en los reactivos que evalúan las pruebas estandarizadas de aplicación masivas son mayores ya que los datos están fuera de su contexto y complican la comprensión del reactivo que es la primera fase en la resolución de problemas.

En PISA, los reactivos de probabilidad demandan que los estudiantes demuestren la reproducción de cálculos simples o definiciones del tipo más familiar, sin embargo los ejercicios son presentados en un formato diferente al cual el alumno ha aprendido los ejercicios de Probabilidad. En los libros de texto que proporciona la SEP para nivel básico se le pide al alumno que trabaje en

equipo en actividades de exploración, discusión y comparación de resultados permitiendo que recurra a sus apoyos sociales: notas, libros, interacción entre iguales y con su profesor.

Las preguntas de este dominio implican la transferencia de conocimiento y destrezas a nuevas situaciones; una de sus características es que suele haber interacciones entre destrezas de razonamiento.

Este tipo de pruebas ha sido aplicado de una manera masiva, cada evaluación da a conocer el lugar que los estudiantes mexicanos obtuvieron tanto nivel a nacional como internacional. Por ejemplo, en PISA México ocupa el lugar 37 de 40 países evaluados con un promedio de 385/500, en el TIMSS los estudiantes mexicanos ocupan los últimos lugares de los países participantes. Y en pruebas elaboradas por INEE los estudiantes mexicanos de 3° de secundaria tienen un promedio de 500.10/800 puntos y en el año 2005 obtuvieron un promedio de 496.90/800 (Backhoff, et al, 2005). Estos datos son el resultado de los conocimientos que el alumno expresa en las pruebas en un formato lápiz y papel.

## **2. Contenido y actividades en los programas de matemáticas**

De acuerdo con los planes y programas oficiales (SEP, 1993), los diferentes factores que intervienen para el logro educativo óptimo del estudiante en matemáticas son dos: a) un producto de las demandas sociales del quehacer humano y b) su proceso de construcción está sustentado en abstracciones sucesivas. En este sentido, el diálogo, la interacción y la confrontación de puntos de vista ayudan al aprendizaje y a la construcción de conocimientos.

En la descripción de los ejes temáticos para el área de matemáticas, se señala que una de las funciones de la escuela es brindar situaciones en las que los niños utilicen los conocimientos que ya tienen para resolver ciertos problemas y que, a partir de sus soluciones iniciales, comparen sus resultados y sus formas de solución para hacerlos evolucionar hacia los procedimientos y las conceptualizaciones propias de las matemáticas (SEP, 1993).

La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria y secundaria tiene como propósito general el desarrollo de las habilidades operatorias, comunicativas y de descubrimiento de los alumnos. Para ello, deben desarrollar sus capacidades para adquirir, entre otras; seguridad y destreza en el empleo de técnicas y procedimientos básicos a través de la solución de problemas; reconocer y analizar los distintos aspectos que componen un problema; reconocer situaciones análogas (es decir que, desde un punto de vista matemático, tienen una estructura equivalente); escoger o adaptar la estrategia adecuada para la resolución de un problema; comunicar estrategias, procedimientos y resultados de manera clara y concisa; predecir y generalizar resultados y finalmente, desarrollar de modo gradual el razonamiento deductivo.

En los ejemplos citados en la sección anterior, se puede encontrar preguntas relacionadas con ciertas áreas del currículo matemático, tanto en los ejemplos de 3° y de 6° de primaria, como en los de secundaria, el contenido corresponde a los ejes temáticos de geometría y la predicción y el azar. Los ejemplos que se refieren a la geometría, proponen la observación y el análisis de formas diversas, pretendiendo que el alumno estructure y enriquezca su manejo e interpretación del espacio de las formas. En cuanto a la predicción y el azar, los alumnos exploran situaciones donde el azar interviene y así se desarrolla gradualmente la noción de lo que es probable que ocurra en diversas situaciones.

Así, concluimos que los ejemplos están basados en la formalización de contenidos matemáticos y a su vez en la solución de problemas para la vida cotidiana. Sin embargo, la manera en la que los alumnos razonan los contenidos curriculares en las pruebas en un formato lápiz y papel, no se puede explicar únicamente mediante la estructura mental, puesto que no se debe dejar de lado el ambiente social y el aprendizaje que existen dentro del aula. Los factores que intervienen para el logro educativo óptimo del estudiante son producto de las demandas sociales del quehacer humano y su proceso de construcción está sustentado en abstracciones sucesivas, además de estar inmersas en el diálogo, la interacción y la confrontación de puntos de vista que ayudan al aprendizaje y a la construcción de conocimientos.

### **3. Razonamiento social**

Las pruebas de aprendizaje estandarizadas son parte integral del proceso de enseñar y aprender, su objetivo principal es mejorar el aprendizaje y contribuir a que las decisiones educativas sean efectivas. La información que proporcionan puede revelar varios aspectos del propio proceso educativo, resultando una fuente de retroalimentación importante (Gronlund, 1968), sin embargo no siempre se logran estos objetivos ni se considera la información resultante para mejorar el proceso educativo, formando alumnos que se limitan a cumplir con lo elemental.

La formación de los estudiantes requiere, por tanto, de condiciones para el aprendizaje que permitan el dominio de los conocimientos involucrados. De tal forma que se logre la adquisición de conocimientos y no se limiten a superar barreras para lograr los criterios mínimos de acreditación, aun cuando le impliquen un gran esfuerzo, particularmente cuando este esfuerzo no coincide con el logro de aprendizajes significativos, si no que se traduce en una carrera de obstáculos o pruebas de resistencia (Pinelo, 2005).

Uno de los obstáculos con los que se enfrentan los estudiantes, cuando resuelven un examen en un formato lápiz y papel, es no poder exponer sus dudas y no tener la oportunidad de recurrir a información que ya existe en la cultura, disponible en interacciones con maestros, libros de texto y sus iguales (Leach y Scott, 2003), apoyos sociales con los que les fueron enseñados los contenidos curriculares.

La actividad mental constructiva de los alumnos y la dinámica interna de los procesos de construcción de conocimiento constituye la esencia del aprendizaje escolar. Sin embargo, esta construcción individual del conocimiento que llevan a cabo los alumnos está inserta en, y no puede separarse de, la construcción colectiva que conducen los profesores y alumnos en un entorno específico, culturalmente organizado y con características propias, que es el aula (Coll, Onrubia, 2001).

Leach y Scott (2003) mencionan que no es posible explicar cómo la enseñanza permite que los estudiantes alcancen nuevas comprensiones

enfocándose en sus “estructuras mentales” aisladas de las situaciones en las que dichas estructuras son utilizadas. Anteriormente se enfocaba en la actividad mental individual, sin hacer referencia a características externas al individuo que quizás influyan en el cambio conceptual.

Cuando los estudiantes se enfrentan con situaciones en las que simplemente escuchan y siguen instrucciones para realizar una actividad determinada, se limitan las posibilidades de ejercicio de operaciones mentales, de comunicación de sus ideas y de estrategias espontáneas que les permitan probar soluciones e intercambiar puntos de vista, tal es el caso de los estudios de TIMSS, PISA, e INEE que utilizan un formato lápiz y papel, donde se especifican las instrucciones de lo que deben hacer los alumnos.

Ejemplo retomado del estudio PISA 2005:

Lee el siguiente artículo de periódico y responde las preguntas que aparecen después.

---

### ¿Una máquina copiadora de seres vivos?

5 Sin duda alguna, si hubieran existido elecciones para escoger al animal del año en 1997, ¡Dolly habría ganado! Dolly es la oveja escocesa que se ve en la fotografía.

10 Pero Dolly no es una oveja cualquiera. Es un clon de otra oveja. Un clon quiere decir: una copia. La clonación significa copiar “a partir de una copia maestra”. Los científicos lograron crear una oveja (Dolly) que es idéntica a otra oveja que hizo las veces de “copia maestra”.

15 Fue el científico escocés Ian Wilmut quien diseñó la “máquina copiadora” de ovejas. Tomó una pequeñísima parte de la ubre de una oveja adulta (oveja 1). De esa parte, retiró el núcleo y lo transfirió al óvulo de otra oveja (hembra) (oveja 2). Pero primero, eliminó de ese óvulo toda la materia que pudiera determinar características de la oveja 2 en el cordero producido por ese óvulo. Ian Wilmut implantó el óvulo manipulado de la oveja 2 en una tercera oveja hembra (oveja 3). La oveja 3 quedó preñada y tuvo una cría: Dolly.

20

25 Algunos científicos piensan que dentro de pocos años será posible clonar personas también. Pero muchos gobiernos han decidido prohibir por ley la clonación de personas.

Fuente: INEE (2005 d) *PISA para docentes. La evaluación como oportunidad de aprendizaje*

## PREGUNTA 2: CLONACIÓN

En la línea 14, se describió la parte de la ubre que se utilizó como “una pequeñísima parte”. A partir del texto del artículo, puedes concluir lo que se quiso decir con “una pequeñísima parte”.

Esa “pequeñísima parte” es

- A una célula.
- B un gen.
- C el núcleo de una célula.
- D un cromosoma.

Fuente: INEE (2005) d  
) PISA para docentes. La evaluación como oportunidad de aprendizaje

Por el contrario, en situaciones que permiten la interacción directa entre estudiantes es posible observar que la selección de alguna estrategia o el uso de algún recurso matemático se acompaña de un argumento o explicación, ofreciendo ventajas para mantener activo el proceso de resolución (Cortés et. al, 2005).

A continuación se presenta como ejemplo un diálogo tomado del libro *El lenguaje matemático en el aula* ( Pimm, 1990 pág.62), en el cual se muestra cómo el intercambio de ideas se utiliza para encontrar la solución a un problema. El diálogo se da durante una actividad en la que los alumnos tratan de encontrar el número de ladrillos que habrá en la base del decimoquinto modelo de una sucesión ordenada, habiéndose mostrado los tres primeros.



Diagrama

*Profesor: Lo dicen y tú no escuchas- ella está diciendo: « quito 1 »*

*Jenny: Ya lo veo-está bien 15 y 15 son 30, bueno- quitando 1, son 29 que es la otra respuesta que buscábamos.*

*Profesor: ¿Vale para todos los casos?*

*Jenny: Sí, sí.*

*Profesor: ¿Cómo vais a hallarlo?*

*Alumno: Haz otro como éste.*

*Profesor: (Dirigiéndose a Jenny) ¿Qué has hecho, pues?*

*Jenny: 15, ¿bien?*

*Profesor: Bien.*

*Jenny: Sumo 15.*

*Profesor: Sí.*

*Jenny: Da 30, ¿no?- quito 1.*

*Profesor: Concentraos, ¡ha hallado algo! ¿Vemos algo más? ¿De dónde viene el 15?*

*Jenny: Porque ése es el último número que nos diste, ¿no?*

*Alumno: 15, eso teníamos, 15.*

*Alumno: Dijiste el decimoquinto.*

*Profesor: Eso es, el decimoquinto.*

*Jenny: El último número era 29.*

*Profesor: ¿Qué es eso de que el último número era 29?*

*Alumno: Quito 1 de 30.*

*Profesor: ¿El decimoquinto es el número modelo?*

*Alumno: Sí.*

*Profesor: El 29 es... ¿Qué?*

*Alumno: Son los ladrillos que hay en la base.*

*Profesor: Los ladrillos que habrá en la base, que es lo que tratáis de hallar.*

*Alumno: Sí.*

*Profesor: Vamos a dejar que Jenny explique a todos lo que hacéis.*

*Jenny: Bueno.*

*Alumno: (Interrumpiendo) Se halla el doble y se quita 1.*

*Alumno: (Interrumpiendo) Lo suma y quita 1.*

*Jenny: (Se queja) Lo saben todos.*

*Profesor: ¿De qué se halla el doble y se quita 1?*

*Alumno: Del número que está ahí.*

*Profesor: ¿De qué número que está ahí?*

*Alumno: (Inaudible).*

*Profesor: Quiero que lo escribáis y, cuando lo hagáis, me lo decís.*

*Jenny: ¿Qué, «funciona»? (se ríe).*

*Profesor: (A Jenny) No estás diciendo a todos lo que tienen que escribir, ¿no? Déjalos que escriban por su cuenta. Escribe lo tuyo y deja a Marion que haga lo suyo.*

*(Alumno se refiere a la participación de cualquier alumno de la clase).*

En este diálogo podemos inferir que los participantes comparten sus ideas y las posibles respuestas del problema planteado (Ejemplo: *Jenny: Da 30, ¿no?-quito 1*), el profesor permite que la alumna describa el procedimiento general que utilizó para encontrar la solución (Ejemplo: *Jenny: Ya lo veo-está bien 15 y 15 son 30, bueno- quitando 1, son 29 que es la otra respuesta que buscábamos*). La interacción y la manera de dirigir la clase del profesor permiten enriquecer las ideas del grupo, pues los comentarios de la alumna son útiles para sus compañeros y viceversa (Ejemplo: *Profesor: Concentraos, ¡ha hallado algo! ¿Vemos algo más? ¿De dónde viene el 15? / Jenny: Porque ése es el último número que nos diste, ¿no? /Alumno: 15, eso teníamos, 15*).

El interés creciente en los contextos sociales de la cognición ubica al lenguaje como el medio que une lo cognoscitivo con lo social. El lenguaje se concibe como un vehículo para expresar el pensamiento, para expresar las representaciones que un individuo ha construido en su relación con el mundo físico, a diferencia de la psicología social e histórico-cultural, que considera el lenguaje como un medio para desarrollar el pensamiento (Candela, 1999).

Vigotsky (citado en Leach & Scott, 2003), en su concepción del lenguaje como instrumento, menciona que no sólo funciona como mediador de la actividad social, permitiendo que los participantes planifiquen, coordinen y revisen sus acciones mediante el habla externa, además; como medio en el que esas actividades se representan simbólicamente, también proporciona el instrumento que media en las actividades mentales asociadas en el discurso interno. El lenguaje cumple con una doble función: la primera como instrumento de comunicación o instrumento cultural, pues se emplea para compartir y desarrollar conjuntamente el conocimiento; y la segunda como instrumento psicológico, que se usa para organizar el pensamiento individual y para razonar, planificar y revisar las acciones (Mercer, 2001).

El razonamiento que llevan a cabo los estudiantes está vinculado al modo de cómo construyen y comparten conocimiento mediante el uso del lenguaje, éste es una herramienta para compartir y construir significados a través de procesos y representaciones mentales dentro de situaciones comunicativas.

Ejemplo:

*Secuencia. Reformulaciones y repeticiones.*

*Enseñ.: ¿Qué significa raza, Stephen?*

*Stephen: Pues una clase de perro.*

*Enseñ.: Los perros de una clase concreta. ¿Y qué más podemos averiguar de los perros al leer este texto, Joe?*

*Joe: Si es macho o hembra.*

*Enseñ.: Podemos saber si un perro es macho o hembra. ¿Qué más podemos encontrar - leed cuidadosamente-, Sally?*

*Sally: Lo que come.*

*Enseñ.: Lo que le gusta comer. ¿Qué más, Eleaonor?*

*Eleanor: Pues si vale para perro guardián.*

*Enseñ.: Si es un perro guardián o no- si sirve para ello-. ¿Y qué clase de perro sería un buen perro guardián, Joe?*

*Joe: Pues uno grande y feroz como un pastor alemán.*

*Enseñ.: Un perro grande y feroz como un pastor alemán. ¿Qué más podéis averiguar sobre los perros en este texto, Camilla?*

*Camilla: Lo que les gusta y lo que no.*

*Enseñ.: Lo que les gusta y lo que no. ¡Muy bien!*

*Tomado del libro Palabras y Mentes de Neil Mercer (2001, pág. 73)*

*(Enseñ, se refiere al profesor que es el que lleva la clase).*

En el fragmento anterior los alumnos y el profesor retoman una lectura para comentar sus conocimientos previos sobre un tema en específico (*¿Qué significa raza, Stephen?*) y ampliar el conocimiento colectivo, utilizando el lenguaje en el plano individual y social; el profesor estimula el uso de esta herramienta para optimizar el aprendizaje de los alumnos (*Podemos saber si un perro es macho o hembra. ¿Qué más podemos encontrar - leed cuidadosamente-, Sally? / Sally: Lo que come. / Enseñ.: Lo que le gusta comer. ¿Qué más, Eleaonor?*).

Planas (2004) refiere que el lenguaje es un conjunto de acciones e interacciones que se articulan en un contexto de prácticas sociales. El lenguaje del aula está constituido por prácticas comunicativas que generan la producción y transacción de intenciones y significados en interacciones social y culturalmente situadas. Y tiene que ver con relaciones sociales tales como quién se dirige a quién (por ejemplo, en el diálogo anterior *¿Qué significa raza, Stephen? Stephen: Pues una clase de perro* ») En qué circunstancias, (*en clase*), con qué contenidos (*lectura anterior sobre perros*), en qué momento, (*posterior a la lectura realizada*) por medio de qué registro lingüístico (*oral*), con qué propósitos, (*retomar y aclarar los conocimientos previos de los alumnos*) en medio de qué posibles malentendidos y con qué consecuencias.

Por su parte Mercer, (2001:45) alude que “el lenguaje está diseñado para ser algo más interesante que transmitir información con precisión de un cerebro a otro: permite que los recursos mentales de varios individuos se combinen en una inteligencia colectiva y comunicadora que permite a los interesados comprender mejor el mundo e idear maneras prácticas de tratar con él”.

Los productos del aprendizaje de contenidos curriculares son culturales. Dichos contenidos generalmente no pueden ser percibidos por individuos, ellos son validados por procesos complejos, empíricos y sociales, y son utilizados dentro de comunidades científicas para propósitos particulares (Leach y Scott, 2003). El contenido curricular puede ser aprendido sólo por algún proceso de transmisión social.

De esta forma, el lenguaje ocupa un lugar prioritario en la comprensión y explicación de los procesos de enseñanza aprendizaje, pues no sólo es posible representar el conocimiento y dar sentido a la experiencia y actividad, si no también convertirlo en instrumento para pensar y aprender de los otros y con los otros, para presentar a otros los conocimientos propios, experiencias, deseos, expectativas, contrastarlos con los suyos, representándolos de distintas maneras y, en ese sentido, negociarlos, y eventualmente modificarlos como resultado de contraste y negociación (Coll, Onrubia, 2001).

En consecuencia, no puede entenderse el empleo del lenguaje simplemente como transmisión de información entre personas. Cada vez que se habla con alguien se participa en un proceso de colaboración en el que se negocian significados y se movilizan conocimientos comunes (Mercer, 2001).

A continuación se presenta como ejemplo un diálogo tomado del libro *Palabras y Mentes* de Mercer (2001, pág.18) en el cual se muestra cómo el intercambio de ideas (Mercer se refiere a este proceso como plano intermental) se utiliza para encontrar la solución a un problema.

*Secuencia. Crucigrama.*

*Mary: Seguramente nos podrás ayudar con esta línea del crucigrama.*

*Joan: ¿Cuál? (La busca y luego la lee). Aquí: «material que contiene una pauta regular de pequeños agujeros».*

*Mary: Agujeros regulares. Y mira que lo hemos intentado.*

*Joan: He pensado que a lo mejor es el material ese para hacer tapices.*

*Tejido.*

*Mary: Tejido. Pues yo he pensado en encaje, que también tiene agujeros.*

*Joan: ¿Y bordado?*

*Tony: ¿Bordado?*

*Joan: Eso no cabe, ¿no? (comprueba). No. Oh, pues sí. (Todos miran el crucigrama.)*

*Tony: Bordado. Puede que sea bordado ¿no?.*

*Mary: ¿Bordado?.*

*Tony: A ver, un momento, dice material, no tiene que ser una tela, puede ser otra cosa.*

*Mary: ¿Un material de construcción?*

*Joan: ¿Tabla? ¿Algún tipo de tabla? ¿Un aglomerado?*

*Tony: No, ¡Es un tablero!*

*Mary: ¡Tablero! (que es la respuesta correcta.)*

En el ejemplo anterior se ilustra cómo a través del diálogo los interlocutores se apoyan para encontrar la palabra que corresponde a la línea del crucigrama;

Mary y Joan piden ayuda a Tony para resolverlo, (Mary: *Seguramente nos podrás ayudar con esta línea del crucigrama*). En primer lugar suponían que Tony podía aportar algo nuevo a sus intentos. Después de señalar la línea le explicaron las palabras que habían pensado y por qué se les habían ocurrido, (Joan: *He pensado que a lo mejor es el material ese para hacer tapices. Tejido. / Mary: Tejido. Pues yo he pensado en encaje, que también tiene agujeros*); de esta manera proporcionan la información pertinente que sirve de contexto para la actividad. Tony comenzó a externar sus ideas, (Tony: *Bordado. Puede que sea bordado ¿no?*) de tal modo que los diversos puntos de vista y los intentos por resolver los problemas ampliaron sus opciones.

En ocasiones parece que tratar de expresar los pensamientos en voz alta ayuda a las personas a aclarar y organizar esos pensamientos (Pimm, 1990). Esto puede darse incluso cuando se lee una pregunta en voz alta. En el fragmento anterior cuando Tony lee la línea se da cuenta de algo que no había sido considerado por Mary y Joan (Tony: *A ver, un momento, dice material, no tiene que ser una tela, puede ser otra cosa.*). Con este ejemplo se ilustra cómo el lenguaje es un instrumento útil para transferir información y hacer que alguien más entienda algo, a su vez funciona para organizar los propios pensamientos, aclarar significados y, por tanto, ayuda a alcanzar una mayor comprensión.

Los estudiantes aprenden las maneras de hablar y pensar acerca del mundo físico por el refuerzo social, pero no implica “lavado cerebral”. El individuo tiene un papel crítico para jugar a comprender las ideas presentadas, juzgando su plausibilidad y la productividad (Posner citado en Leach y Scott, 2003).

Es así, que entre profesores y, especialmente entre los alumnos, esta herramienta interviene como mediadora en la construcción de significados en el contexto del aula, pues es considerado como instrumento semiótico para crear, transformar y comunicar significados compartidos (Coll y Onrubia, 1995).

Por tanto, la dinámica en la clase escolar es muy compleja, con una diversidad de dimensiones socioculturales. El grupo escolar, en este sentido, es un contexto interactivo y específico, por lo que forma una base de interacción

lingüística en una importante dinámica del habla modulada por intenciones, interpretaciones, expectativas, dudas y cambios de ideas (Campos y Gaspar, 2004).

La interacción con los pares, en el contexto de la escuela, facilita el aprendizaje porque la necesidad de verificar el pensamiento surge en situaciones de discusión y la capacidad del niño para controlar su propio comportamiento nace en situaciones de juego. El proceso de enseñanza aprendizaje se convierte en una conversación didáctica, mediatizada por instrumentos instruccionales, en la que los participantes reconstruyen el conocimiento (Lacasa, 1994). Al compartir el conocimiento en situaciones de interacción los individuos alcanzan un nivel de comprensión diferente al que se produciría sin colaboración.

El producto de tal interacción social, lejos de ser una copia de lo que ya está inventado o disponible en el pensamiento de cada compañero, implica un proceso creativo en el que los esfuerzos por comunicarse impulsan a quienes participan en la interacción a desarrollar nuevas soluciones, utilizando medios sociales, de tal manera que cada uno de ellos aporta al proceso su propia comprensión de los valores y de los instrumentos de la cultura (Rogoff, 1993)

En trabajos realizados por Drummond, Fernández y Velez (2000) y Pérez (2005), se presentan evidencias sobre cómo es construido el conocimiento por los estudiantes en contextos de interacción a través del uso del lenguaje. En el estudio realizado por Drummond, los resultados ilustran que es posible mejorar las habilidades en habla exploratoria en niños en edad escolar, así como la promoción del habla exploratoria que puede mejorar el razonamiento y la solución de problemas en forma grupal e individual, también promueve que los estudiantes tengan mejores repertorios sociales y discursivo que les ayudan a participar competentemente como miembros de su comunidad. Por otra parte Pérez (2005) encuentra en su estudio que el habla acumulativa se presenta con mayor frecuencia durante los diálogos de los alumnos mediante el modelamiento por computadora. Se observó que los ambientes de modelamiento sustentados en el uso de la computadora favorecen, de una manera modesta, el razonamiento social y la construcción de argumentos.

### **3.1 Cómo se observa el razonamiento social**

En función de las situaciones de interacción, los individuos construyen versiones diversas sobre un contenido. Estas versiones se comparan, negocian y reconstruyen en el proceso mismo de la interacción y es en ese proceso interactivo donde se van definiendo los diversos significados para los alumnos (Candela, 1999). Por esta razón el análisis del discurso en el aula es un medio privilegiado para estudiar los procesos educativos cuando se intenta comprender los mecanismos y procedimientos con los que los participantes construyen los significados. El discurso es un sistema de comunicación, así como un reconocimiento del papel que el lenguaje juega en la enseñanza y el aprendizaje.

El aula se ha podido entender como un espacio cultural en el que se puede crear un contexto propicio para enseñar y aprender, construido por los participantes, a través del análisis del discurso. Dicho análisis permite comprender la forma en la que se negocian las estructuras de participación, así como los significados que se comunican y que llegan a compartirse en la situación escolar (Hernández, 2004).

Para Cazden (1991), el discurso en el ámbito educativo es el sistema de comunicación implantado por el profesor o profesora. La cognición se inicia en situaciones sociales en las que el niño comparte responsabilidad con un adulto en la producción de una ejecución completa. El niño hace lo que puede y el adulto hace el resto (Vigotsky ,1996)

La relación entre pensamiento y palabra no es un hecho, sino un proceso, un continuo ir y venir del pensamiento a la palabra y de la palabra al pensamiento, y en el la relación entre pensamiento y palabra sufre cambios que pueden ser considerados como desarrollo en sentido funcional. El pensamiento no se expresa simplemente en palabras, sino que existe a través de ellas (Vigotsky, 1996).

Se debe tomar en cuenta que el lenguaje combina lo cognoscitivo y lo social, aunque algunos análisis se centran en uno sólo de estos aspectos, no puede olvidarse la influencia que ejerce uno en otro. En la enseñanza en general,

la expresión oral es decisiva porque la instrucción procede a través del lenguaje y por que el aprendizaje se demuestra a través del mismo (Cazden, 1991).

Es decir, no hay forma de conocer exactamente lo que ocurre en el interior de la mente, pero una de las formas en que se puede aproximar es prestando atención a las discusiones entre estudiantes dentro del aula.

Hablar de discurso en clase es tanto como hablar de comunicación interindividual, pero la meta de toda educación es el cambio intraindividual y el aprendizaje del estudiante. Por lo que ha de considerarse el modo de cómo las palabras dichas en clase afectan a los resultados de esa educación, es decir, cómo el discurso observable en el aula afecta al inobservable proceso mental de cada uno de los participantes, y por ello a la naturaleza de lo que todos aprenden (Cazden, 1991).

En la discusión e intercambio de ideas entre iguales, el proceso por el que se llega a un acuerdo y se logra un consenso puede llevar a quienes interactúan a reconsiderar la propia perspectiva (Rogoff, 1993). Los iguales impulsan el progreso del desarrollo cognitivo de quienes participan en la interacción, a través de sus intentos de resolver una problemática o desacuerdos derivadas de diferencias en sus puntos de vista.

Rogoff (1993) señala que el proceso de transformación de la comprensión es el resultado de haber logrado la intersubjetividad y el pensamiento colectivo. La intersubjetividad se refiere a la toma de decisiones conjunta entre compañeros que tienen distinto nivel de destreza, se relaciona con la discusión como un medio para llegar a la comprensión compartida y un ejemplo del pensamiento colectivo sería una discusión grupal acerca de las características de un conjunto de obras de arte.

Millar (citado en Rogoff, 1993) considera la discusión como la forma más importante de intercambio social, que provoca un tipo de pensamiento colectivo de tal manera que hace progresar el conocimiento y el punto de vista que adoptan los individuos. La interacción con otras personas apoya a los niños en su

desarrollo, guiando su participación en actividades relevantes, contribuyendo a adoptar su comprensión a las nuevas situaciones, estructurando sus intentos de solucionar los problemas y asistiéndolos cuando han de aceptar responsabilidades en la resolución de problemas.

Los procesos de enseñanza y aprendizaje escolar se han visto como procesos comunicativos dirigidos a la construcción conjunta de significados compartidos entre profesores y alumnos. Este proceso, en el que el discurso de los participantes presenta un protagonismo inevitable, se lleva a cabo en el transcurso de la actividad conjunta que construyen profesores y alumnos en relación con los contenidos escolares (Rochera, Colomina, y Barbera, 2001).

La transferencia del conocimiento se reduce a explorar si los estudiantes que han aprendido un cierto conocimiento en un contexto determinado, pueden utilizarlo para enfrentar y resolver problemas que muestren diferencias notables con los estudiados inicialmente. Se presta atención no solamente a la estructura profunda de la solución o problema en estudio, sino también a la interacción social que se presenta entre los estudiantes durante el proceso de aprendizaje (Santos, 1997).

Candela (1999) menciona que las actitudes docentes, como la de retomar el conocimiento de los alumnos, aceptar versiones alternativas, devolver preguntas, pedir argumentos, aceptar cuestionamientos y buscar consensos en vez de imponer un punto de vista, contribuyen de manera significativa a mejorar la calidad de la interacción entre los docentes y sus alumnos en aspectos relacionados con la construcción del conocimiento científico. De esta manera lo que se busca con los aspectos anteriores es desarrollar los procesos de razonamiento, de confrontación de alternativas explicativas, de relación entre la teoría y la práctica, de vinculación del conocimiento cotidiano y el científico, de verbalización y, por tanto, de reestructuración de las ideas propias.

Dicho proceso se da en el aula, lugar que configura un espacio comunicativo en el que rige una serie de reglas que permiten que los participantes puedan comunicarse y alcanzar los objetivos que se proponen. Esas reglas

generan una estructura comunicativa típica dentro del aula cuyo exponente más conocido es la secuencia IRE identificada por Sinclair y Coulthard (1975); el profesor inicia el intercambio (I) a menudo mediante una pregunta el alumno responde (R) y se produce a continuación un comentario evaluativo (E) del profesor. El discurso que se da en el aula puede entonces analizarse como una cadena de secuencias de intercambios comunicativos IRE en torno a los contenidos o la tarea de aprendizaje (Coll y Solé, 2000 ).

El análisis del discurso surge en el ámbito de la lingüística a partir del trabajo de autores como Sinclair y Coulthard (1975). Se ha ido consolidando, sin embargo, como un terreno en el que confluyen diferentes disciplinas. El análisis del discurso en el aula se basa en una serie de premisas (Cherry- Wilkinson, citado en De la Mata, 1993).

- a) La interacción social en el aula requiere ser competente tanto en los aspectos estructurales, como funcionales del lenguaje. Exige no sólo ser capaz de usar ciertas estructuras lingüísticas, sino de ampliar diferentes recursos lingüísticos en los contextos y situaciones apropiados.
- b) El aula es un contexto comunicativo único. En él se requiere de un tipo de competencia muy específica. Este tipo de competencia incluye los modos de expresión oral y escrito.
- c) Los alumnos pueden diferir en su competencia comunicativa. El no conocer los medios usados habitualmente para la comunicación en el aula lleva consigo dificultades para participar con éxito en las interacciones sociales y, por tanto, para el aprendizaje.

Otra manera de analizar el razonamiento social es a través del uso de categorías de análisis utilizadas por Mercer.

- a) Habla de disputa, que se caracteriza por desacuerdo y breves intercambios y confrontaciones no argumentadas y refutaciones no elaboradas.

*Ejemplo de habla de disputa tomado de Pérez (2005)*

*S2 pero es positivamente en los autos... a ver si hay pocos autos...*

*hay más contaminación ... cámbialo positivo*

*S1 no se mueve*

*S2 haber cambia esto a positivo*

*S1 tampoco se va a mover*

*S2 ¿por qué?*

*S1 no sé*

b) Habla acumulativa, en la que se muestra una suma de opiniones e ideas sin argumentar y evitación de la confrontación.

*Ejemplo de habla acumulativa tomado de Pérez (2005).*

*S2 vamos a poner tener mantenimiento de la casa, necesitas dinero, no pero también, ¡ah! se me olvidó la idea, bueno si tienes hijos es el mayor tienes que gastar más en el mantenimiento de la casa, entonces sería que los hijos perjudican el mantenimiento de la casa.*

*S1 por que la maltratan y pintan en ella.*

*S2 entonces como sería, así (hace referencia a la relación entre la variable mantenimiento y la variable dinero).*

*S1 aja (expresión de aceptación).*

En el fragmento anterior los sujetos del estudio hablan de manera acumulativa y no presentan argumentos.

c) Habla exploratoria, que consiste en el involucramiento crítico pero constructivo en las ideas de los otros participantes.

*Ejemplo de habla exploratoria tomado de Pérez (2005).*

*S2 éste con éste, no salida, no entrada con salida, (.) salida con entrada.*

*S1 sí, así está bien.*

*S2 sí ahora*

*S1 no pero, pérate aquí, debemos de ponerle más porque es toda, a mayor cantidad de pasajeros aumenta el positivo de la masa.*

*S2 y esta reacciona al contrario con este, con más masa y más pasajeros aumenta (corrige) disminuye la posibilidad de vida.*

*S1 entonces,*

*S2 ése está bien, ése está perfecto, está bien.*

*S1 No, porque a mayor masa aumenta.*

*S2 No no, bájalo, la sobrevivencia exacto, está bien como está ahora, hay hay que pasarnos a Play (opción de ejecutar en el software VnR)*

En el fragmento anterior se observa cómo los sujetos razonan sobre el comportamiento del modelo VnR utilizado en el estudio de Pérez, (2005). El VnR es un programa de modelamiento computacional que permite a los estudiantes manipular distintas variables, con el objetivo de establecer relaciones de causalidad entre una y otra. Y así expresar, predecir y explicar el fenómeno sobre el cual está hecho el modelo.

Wells, (2001) también centra su investigación en el análisis del razonamiento social, a través de categorías para el análisis de la organización secuencial del discurso, mediante preguntas y respuestas a través de intercambios que constituye la unidad más adecuada para el análisis del discurso hablado.

#### **4 Conocimiento matemático**

El objetivo general en la enseñanza de las matemáticas es conceptualizar a las matemáticas como un objeto de conocimiento social y escolar. Analizando críticamente el papel de las matemáticas en el aprendizaje escolar, sus problemas principales y su relación con otros tipos de conocimientos (López y Moreno, 1996).

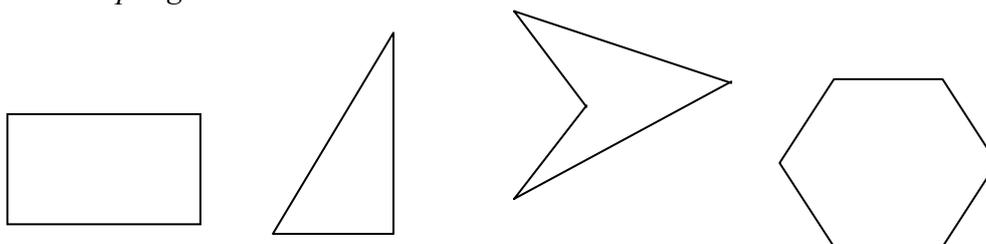
Las matemáticas constituyen un producto del conocimiento humano y un valioso Instrumento que ha permitido al hombre concebir y explicar la realidad para poder comunicarla. Al igual que el resto de las disciplinas científicas es producto del conocimiento humano, histórico y cultural acerca de la realidad, un conocimiento que ha evolucionado y se ha desarrollado con el tiempo. La educación matemática desempeña un papel relevante en la transmisión de los significados y valores compartidos en nuestra sociedad (Ortiz, 2004).

La escuela plantea la necesidad de enseñar las matemáticas, como un medio para que el niño ejercite su pensamiento y razonamiento y darle los

instrumentos para que resuelva problemas que se le han de presentar en la vida, pero sucede que el niño aprende a resolver problemas en abstracto y que nada tienen que ver con lo que vive en su realidad. Es a lo que Rivière (1990) refiere como descontextualizar los conceptos haciéndolos cada vez más abstractos, ver ejemplo:

Problema

*He ahí varios polígonos:*



*¿Cuántas diagonales tienen cada uno?*

*Sabiendo el número de lados de un polígono, ¿puedes averiguar el número de diagonales?*

Se planteó el problema a una niña de 13 años dando por supuesto que conocía el significado de lo que es una diagonal. Al revisar las respuestas el profesor se dio cuenta que lo que la alumna entendía por diagonal era diferente al significado de la palabra en el contexto de la clase de matemáticas, pues la alumna entendió como diagonal como cualquier lado inclinado de una figura en relación con la orientación natural de la página. En la clase el término diagonal se refería al eje de simetría.

En los procesos matemáticos se requiere un aprendizaje activo que surge con más facilidad en las discusiones con alumnos (Marín 2002). Es importante considerar que si la enseñanza se lleva a cabo de manera interactiva, también debe implementarse un modelo de evaluación que considere la enseñanza aprendizaje como un proceso y no como un producto, como se hace si se evalúa con un formato lápiz y papel.

Se trata, por tanto, de estudiar las matemáticas de forma interactiva en donde los alumnos participen continuamente. Así se logrará un mejor efecto e interés por aprender, ya que los alumnos se mantendrán atentos por medio de la

participación y dinamismo de la clase (De la Concha, 2003). Esto contradice la enseñanza basada en algoritmos que supone que los alumnos son sujetos pasivos que almacenan dichos procedimientos a través de la repetición.

El siguiente diálogo tomado del libro *El lenguaje matemático en el aula* (Pimm 1990, Pág.103) es un ejemplo que muestra cómo el profesor va guiando al grupo en el procedimiento para resolver una resta.

*P: Coge tu cuaderno, por favor. Quiero hacer contigo algunas de estas Restas... No molestéis...por favor. Ahora haremos estas dos, ¿de acuerdo?*

*A: Sí.*

*P: Bien, ¿recuerdas? Bueno, mm... comienza a hacerla y dime lo que vas haciendo.*

*A: Pongo uno ahí.*

*P: No. Empecemos por el principio. Seis menos siete. ¿Puedes hacerlo?*

*A: No.*

*P: No. ¿Por qué no puedes?*

*A: Porque... el número mayor está debajo.*

*P: De acuerdo. Porque seis es menor que siete, ¿no? Entonces, ¿qué hacemos? Vamos a...*

*A: Las... las unidades.*

*P: No. ¿Qué columna es ésta? La columna de las decenas. Bien. ¿Y qué hacemos ahí?*

*A: Tachamos ese uno ahí... y lo ponemos aquí.*

*P: Tomamos...*

*A: Emm... emm...emm...*

*P: Tomamos...*

*¿Qué tomamos de la columna de las decenas? Tomamos diez, ¿no? Diez. Bueno, toma diez de la columna de las decenas.*

*A: Pongo un uno aquí.*

*P: Sí, llevas el uno ahí. ¿Y dónde pones el diez que has cogido?*

*A: Ahí.*

*P: Lo pones en la columna de las unidades; bien.*

*¿Cuántas unidades tienes?*

*A: Veintiséis.*

*P: No. Pon diez en la columna de las unidades. No. No. Vamos a ver. Vas a la columna de las unidades y llevas diez. ¿En dónde pones el diez?*

*Lo ponemos en...la columna de las unidades, ¿no?*

*Como hemos hecho aquí, aquí, ahí y ahí.*

*Ahora, ¿cuántas unidades tienes en la columna de las unidades?*

*A: Dieciséis.*

*P: ¿Sabes de dónde vienen?*

*A: Diez... y seis.*

*P: Sí...¿Cuántas unidades hay en diez?*

*A: Nueve.*

*P: ¿cuántas unidades hay en diez?*

*¿Cuántas unidades hay en diez?*

*A: Dieciséis.*

*P: No.*

*(A otro niño) ¿Me puedes pasar un bloque de diez, y diez unidades También?... Y diez unidades, por favor.*

*No, coge y dame también diez unidades sueltas.*

El fragmento anterior es un ejemplo de cómo la interacción y el diálogo ayudan al aprendizaje y a la construcción de conocimientos (P: De acuerdo. Porque seis es menor que siete, ¿no? Entonces, ¿qué hacemos? Vamos a... / A: Las... las unidades) tal proceso es reforzado por la interacción con los compañeros y con el maestro (P: Lo pones en la columna de las unidades; bien).

La elaboración y desarrollo del conocimiento matemático no se puede separar, en este sentido, de la acción concreta sobre los objetos, de la intuición y de las aproximaciones inductivas ligadas a tareas, problemas y contextos particulares, ni tampoco de los instrumentos y tecnologías de representación culturalmente elaboradas como apoyo a la actividad matemática. Desde esta perspectiva, las matemáticas constituyen, también, una actividad cultural social e históricamente situada, influenciada por criterios mundanos de utilidad e

intencionalidad, y basada en prácticas cotidianas como contar, medir, localizar, diseñar jugar o explicar (Bishop, 1999).

Los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas reflejan y permiten abordar de manera especialmente adecuada temáticas básicas para la investigación psicoeducativa actual, como los procesos de resolución de problemas, los lenguajes formales y sistemas notacionales de representación que median el aprendizaje escolar, o la relación entre conocimiento específico, conocimiento procedimental y capacidades metacognitivas. Otra de estas razones remite, muy probablemente, a las dificultades habitualmente reconocidas y ampliamente documentadas, que muchos alumnos muestran para aprender matemáticas en la escuela; unas dificultades que resultan aún más urgentes de resolver ante los niveles en aumento de conocimiento matemático que parece requerir un entorno social y tecnológico cuya complejidad aumenta rápidamente (Coll, Palacios y Marchesi, 2001).

La enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se ha convertido en uno de los problemas más críticos en la escuela. Después varios años de escolaridad, muchos alumnos no saben resolver problemas sencillos ni aplicar formulas, algunos ni siquiera son capaces de hacer operaciones básicas sin ayuda de una calculadora (Saldaña, 1997). Esto es evidente en el estudio de PISA, pues el 38.1% de los estudiantes mexicanos son calificados como deficientes en matemáticas, es decir aquellos que ni siquiera alcanzan el primer grado en la jerarquía de valores (menos de 258 puntos). Más de dos terceras partes de los jóvenes de 15 años aún en la escuela cuentan, a lo mucho, con capacidades iniciales para enfrentar los desafíos cognitivos de la sociedad del conocimiento.

El conocimiento matemático, presenta serias dificultades al alumno a lo largo de su escolaridad. ¿A qué se debe esta dificultad?

Los docentes son los primeros en comprobar que muchos niños no solamente presentan fallos cuando resuelven las operaciones, sino que, además, no las utilizan correctamente cuando se les plantea un problema o se les quiere generalizar a otros contextos que no son propiamente escolares. Ello se debe quizá, a que se ha ofrecido un modelo de resolución que impide el uso del cálculo

mental y escrito, así como reflexionar sobre distintos recursos para llegar a otras formas de solución.

Aunado a ello, cuando el resultado de una operación es incorrecto se corrige usualmente de una manera superficial, es decir, atendiendo tan sólo el resultado y descuidando el procedimiento utilizado por el niño. Asimismo, el docente parece ser la única persona en el salón de clase con derecho a corregir, dejando de lado los apoyos que puedan brindar otros compañeros y los apoyos que puedan brindar otros compañeros así como la posibilidad de una validación empírica, es decir que la situación misma sea fuente de corrección (Bollás, 1996 ).

A los alumnos se les proporcionan pocas oportunidades de practicar la forma de dar explicaciones y justificaciones e, incluso, de expresar algo que ellos hayan percibido por su cuenta. En general, no suelen promoverse las explicaciones del alumno, ni se estimula a los miembros de una clase a escuchar con atención o tratar de enmendar o mejorar las contribuciones de los otros (Pimm, 1990).

La noción de discusión en clase de matemáticas se enfrenta con una dificultad general. Las matemáticas no se consideran a menudo como un tema apropiado para el discurso. Con seguridad, dice el argumento, hay respuestas correctas y erróneas para todo, con métodos claros que enseñar y aprender para hallar las correctas. Así, ¿cómo pueden discutirse las matemáticas si la opinión, informada o no, carece de lugar en ellas? (Pimm, 1990).

Muchos alumnos aplican procedimientos matemáticos, pero no saben por qué funcionan; dominan las habilidades de cálculo necesarias para resolver problemas escolares estándar, pero carecen de la comprensión para aplicar su conocimiento a situaciones nuevas; son capaces de manipular símbolos, pero no entienden el significado de los mismos ni de lo que están haciendo con ellos. Para estos alumnos, el aprendizaje matemático acaba consistiendo en la repetición mecánica de definiciones demostraciones y formulas o en la aplicación no menos mecánica de algoritmos, y las matemáticas acaban transformándose en una

actividad críptica y cerrada en sí misma, sin ningún significado y alejada por completo del mundo real (Coll, Palacios y Marchesi, 2001).

Las matemáticas utilizan un lenguaje abstracto, los conceptos básicos se apoyan totalmente en lo concreto, parten de lo real. Su dificultad deriva de una enseñanza desvinculada de la realidad, sin base en lo concreto. En muchas ocasiones se reduce a las matemáticas a procedimientos y formulas que deben ser aprendidas aun cuando no se comprendan. La mayoría de los alumnos no le encuentran lógica a la matemática, se van quedando con muchas lagunas de conocimientos, que les impiden seguir la secuencia y el incremento gradual en la dificultad que requiere esta disciplina.

El siguiente fragmento es un ejemplo de la dificultad que pueden enfrentar los alumnos al resolver problemas sin conocer algunos términos que manejan sus profesores.

El pensamiento numérico comprende el estudio de los diferentes sistemas cognitivos y culturales con que los seres humanos asignan y comparten significado utilizando diferentes estructuras numéricas (Rico, Castro, Coriat y Segovia, citados en Ortiz, 2004).

La lógica y las matemáticas no son simples actividades mentales realizadas en algún campo abstracto de pensamiento no incorporado, sino tipos de discurso que tienen formas, contextos y reglas de interpretación reconocibles. Según Walkerdine (Citado en Mercer, 2001) el razonamiento lógico y el razonamiento matemático no se producen sólo en contextos de discurso y comunicación, sino que son en sí mismos formas de discurso, relaciones entre declaraciones, que se producen dentro del aula.

En el salón de clases durante la clase de matemáticas se dan dos razones principales para que los alumnos hablen: para comunicarse con los demás y para hablar consigo mismos. Hay también otra justificación: para que el profesor pueda acceder a las intuiciones y formas de pensar de los alumnos.

Al hablar los pensamientos se exteriorizan notablemente, lo que permite que el propio hablante acceda a los mismos con mayor rapidez, así como la exposición de ellos a las observaciones de los demás (Pimm, 1990). La intervención de otros alumnos puede estimular al hablante para que reflexione sobre lo que dice.

Un aspecto del habla matemática de los alumnos consiste en la cantidad de frases modificadas de inmediato. Muchas formulaciones y revisiones habladas exigen una expresión aceptable y estable antes de que todos los participantes puedan darlas por buenas. La estabilidad y seguridad respecto a una determinada exposición o versión se pone de manifiesto, con frecuencia, por medio de la capacidad para repetir con exactitud lo que acaba de decirse. Muchos profesores coinciden en que, a menudo, con sólo pedir al alumno que trate de expresar las dificultades que experimenta en un momento concreto, cuando éste comienza a hacerlo, dice algo así: «¡ah!, ya lo veo. Muchas gracias por ayudarme» (Pimm, 1990).

Entre el pensamiento tácito y el expreso existe todo un universo de diferencias (Pimm, 1990). Una característica importante de hablar en voz alta consiste en que requiere el uso de palabras, mientras que el pensamiento privado permite que se prescindiera de ellas. Sólo cuando se descubre una dificultad para expresar lo que queremos decir, nos damos cuenta de que las cosas no son como pensamos. La articulación puede facilitar el proceso de reflexión al permitir un mejor acceso al pensamiento mismo.

Santos (1997) menciona que la transferencia del conocimiento se reduce a explorar si los estudiantes que han aprendido un cierto conocimiento en un contexto determinado pueden utilizarlo para enfrentar y resolver problemas que muestran diferencias notables con los estudiados inicialmente.

Entender la percepción lograda por los estudiantes de los problemas matemáticos implica reflexionar sobre la información dada en el tipo de pregunta o preguntas planteadas y los métodos o planes potenciales de solución. Por ejemplo al iniciar la resolución de un problema interesa identificar el tipo de

recursos matemáticos (definiciones, hechos básicos, procedimientos y algoritmos) que el estudiante utiliza para entender el enunciado y proponer algunas ideas o formas de solución. Así los argumentos matemáticos y explicaciones que el estudiante muestre durante la solución del problema aportan elementos útiles para analizar la transferencia de sus ideas, aun cuando no produzcan necesariamente soluciones terminales o correctas (Solano 1997).

Cuando los alumnos resuelven pruebas en un formato lápiz y papel no expresan la transferencia de ideas para dar solución a un determinado ejercicio pues se limita al alumno a dar respuesta con un determinado número de opciones como es caso de la prueba Enlace que se aplica a nivel nacional.

## **5. Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares (ENLACE)**

En este apartado se describe de manera parcial la creación y finalidad de la prueba ENLACE, se establece que el propósito de la prueba no es obtener los resultados altos o bajos, sin embargo el uso que se hace de la información es precisamente cuantitativo, los resultados se toman como único punto de referencia y no como un indicador del aprendizaje de los estudiantes, que debe acompañarse de un análisis del contexto social.

La Evaluación Nacional del Logro Académico de Centros Escolares (ENLACE), recientemente realizada por la SEP, no nació con la idea de evaluar escuelas, ni mucho menos de hacer ordenamientos de ellas.

Los resultados de esta prueba serán publicados con el único propósito de identificar a los centros escolares cuyos estudiantes obtuvieron calificaciones altas o bajas del país. Sin embargo la finalidad de la prueba no es obtener una lista de las escuelas con alta o baja puntuación.

Tal concepción de la evaluación, que no toma en cuenta las condiciones en las que operan las escuelas, la preparación docente y las características socioeconómicas, da como resultado obtener información sesgada y una imagen falsa de la realidad educativa del país. Más que ayudar a la transparencia y rendición de cuentas a la que aluden, distorsionan la opinión pública premiando o

castigando a quien no se merece mediante datos simplificados y fuera de contexto (Backhoff y Contreras,2007).

Backhoff y Contreras (2007) proponen cuatro principios fundamentales para la adecuada interpretación de los resultados de pruebas de aprendizaje a gran escala:

1 Los resultados de una prueba de logro escolar sólo deben utilizarse para los propósitos que fue diseñada. De lo contrario se corre el riesgo de hacer interpretaciones erróneas. El propósito de ENLACE es proporcionar información básica sobre el aprendizaje de los estudiantes de algunos grados de educación básica, con base en una muestra reducida de preguntas de español y matemáticas.

2 Las pruebas de logro académico evalúan tanto el aprendizaje adquirido por los estudiantes dentro de la escuela como fuera de ella. ENLACE evalúa competencias que los estudiantes adquieren en la escuela y también los conocimientos, habilidades y destrezas que el estudiante adquiere en el hogar y en su comunidad. No se puede atribuir a la escuela todo lo que el estudiante aprende, tampoco podemos calificar a una escuela de buena o mala sólo por el resultado de las pruebas de logro educativo aunque haya contribuido.

3 Las condiciones socioeconómicas de los estudiantes influyen de manera determinante en el logro académico. La situación socioeconómica y cultural de las familias tiene gran impacto en el aprendizaje escolar de los estudiantes. Dichas condiciones explican entre el 70% y 80% de los resultados de las pruebas de aprendizaje que se aplican nacional e internacionalmente. En las evaluaciones de gran escala que se han realizado en México los resultados de aprendizaje empatan con las condiciones socioeconómicas de los estudiantes. Los alumnos en condiciones sociales más favorecidas acuden a las mejores escuelas, mientras que los alumnos de estratos socioeconómicos más bajos acuden a los centros escolares que tienen las peores condiciones. Si no se toma en cuenta la conformación económica y cultural de los estudiantes que asisten a las escuelas,

se está omitiendo el factor de mayor peso en los resultados de las pruebas de logro educativo.

4 La interpretación de los resultados de las pruebas de gran escala debe considerar la imprecisión de la medición. Cualquier evaluación educativa se realiza con cierto grado de error, cuya magnitud depende, entre otras cosas, de la calidad del instrumento, de la forma en que se aplica, de la motivación de los estudiantes por responder la prueba, del grado en que se copien los estudiantes, de la forma en que se analizan los resultados, entre otros factores.

Además los autores antes citados mencionan otros argumentos sobre el ordenamiento de escuelas que deben tomarse en cuenta. Pueden estigmatizar y desanimar a estudiantes, profesores y directores de escuelas que están haciendo un gran esfuerzo y cuyos resultados no son los esperados. En consecuencia estas escuelas orientarán sus esfuerzos en mejorar su ubicación en el ordenamiento, sin, necesariamente, incrementar el aprendizaje de los alumnos.

Aunque las escuelas compartan la misma misión tienen diferentes objetivos, ponen diferentes énfasis curriculares, utilizan aproximaciones pedagógicas distintas y cuentan con diferente infraestructura. Ofrecen diferentes programas extracurriculares, según sus características y condiciones, algunas son competitivas por diseño y otras crean una atmósfera cooperativa.

Si las escuelas son diferentes, ¿por qué decir que una es mejor que otra con base en sólo un indicador? dejando fuera otros aspectos; siendo unos de los más importantes, su capacidad de adaptación a las características y necesidades educativas de sus estudiantes.

En la reciente aplicación de la prueba Enlace (2007) se encontraron situaciones que impiden que el alumno desarrolle lo que realmente sabe al momento de ser evaluado en este formato lápiz y papel.

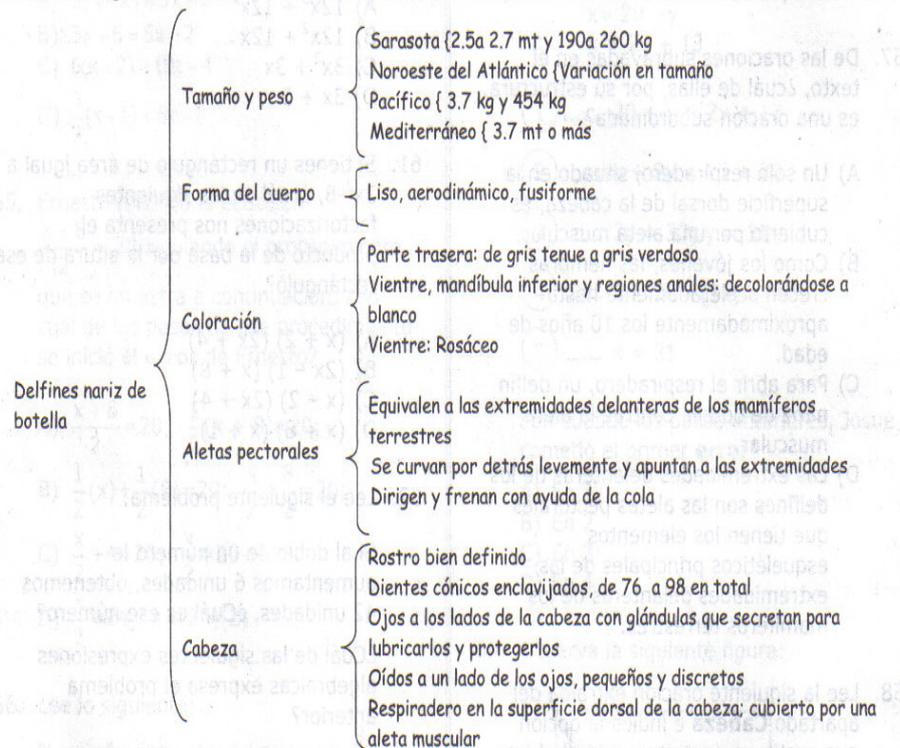
Al inicio de la jornada escolar el día de aplicación el coordinador de la aplicación dio instrucciones a los docentes del plantel que al momento de dar

inicio al examen, los alumnos no podían tener acceso a ningún apoyo social con la siguiente instrucción “para resolver la prueba sólo deberán utilizar su hoja de respuestas y lápiz. Durante la aplicación no se permitirá el uso de libros, cuadernos, calculadoras u otro material de consulta. No está permitido que copien, les repito, es muy importante que no copien, confíen en sus conocimientos” (SEP 2007: ENLACE) Por tanto debían permanecer de una manera solitaria al momento de resolver la prueba y sin realizar algún comentario, a menos que fuera el hecho de pedir permiso para salir al sanitario

Los cuadernillos que se les proporcionó a los alumnos de tercer grado de secundaria, no estuvieron exentos de errores de redacción, mismos que confundieron a los alumnos para dar una óptima respuesta.

### Ejemplo

Observa el siguiente cuadro sinóptico incompleto que se elaboró con base en la información que leíste.



¿Que información colocarías en el ESPACIO EN BLANCO para completar correctamente el cuadro?

El reactivo anterior confundió demasiado a los alumnos ya que la instrucción pide completar el espacio en blanco con las opciones que muestra en el examen, sin embargo en el cuadro no aparece ningún espacio en blanco. Esto llevó a los alumnos a preguntarle al profesor qué debían hacer pero todos los participantes en la evaluación tenían la instrucción de no resolver ninguna duda con respecto a las preguntas del examen.

Sholultz, Säljö y Wyndhamn (2001) mencionan que los exámenes escritos generalmente sirven como una fuente primera de información y así saber el aprendizaje de los contenidos curriculares que el alumno posee para realizar la evaluación hecha por sus profesores en la institución en la que pertenecen y la prueba masiva TIMSS .

Sin embargo, estos autores critican este tipo de evaluaciones por que se hace una evaluación individual y no se utilizan las diferentes actividades sociales que se desarrollan dentro del aula. Los autores realizan una exploración de cómo los estudiantes razonan en la ciencia elemental cuando trabajan con un formato lápiz y papel y cuando interactúan en formato de entrevista con un adulto, utilizando 2 problemas del estudio TIMSS, puesto que este tipo de situación genera un modo de razonamiento y sigue una consideración de comunicación como un intercambio transparente de mensajes donde el modo reclamante de decodificar la pregunta es evidente, de cualquier manera cuando un discurso se desarrolla en el formato de entrevista como una práctica comunicativa humana implica tanto el formato escrito y la forma particular de comunicar las ideas que se tienen para dar respuesta a una problemática .

Con esta perspectiva el objetivo de esta investigación es conocer la manera en la cual los alumnos, de un grupo de tercer grado de secundaria, resuelven problemas matemáticos en un formato lápiz y papel y en una situación dialógica.

## **CAPÍTULO II**

### **2. Método**

La investigación pertenece a un diseño descriptivo cualitativo ya que se realizaron observaciones sin manipular sucesos y contextos.

Los estudios descriptivos buscan especificar las propiedades, las características y los perfiles importantes de personas, grupos, comunidades o cualquier otro fenómeno que se someta a un análisis. Miden, evalúan o recolectan datos sobre diversos aspectos, dimensiones o componentes del fenómeno a investigar.

#### **2.1 Participantes**

Participaron 26 estudiantes de 3° de secundaria entre 14-15 años de edad en su clase de matemáticas.

El director de la institución sugirió al grupo 3B para realizar la investigación. El criterio por el cual el profesor eligió este grupo fue la colaboración que lo caracteriza, así como la disposición de la profesora que imparte matemáticas en ese grupo.

Este trabajo se realizó en una escuela secundaria pública, en el turno vespertino, ubicada en el Distrito Federal, delegación Iztapalapa. Con una población en su mayoría trabajadora de nivel socioeconómico medio.

#### **2.2 TAREAS**

##### **2.2.1 Situación dialógica**

La tarea que los alumnos realizaron fue la resolución de preguntas tomadas de la prueba ENLACE 2007. En esta situación de trabajo se les permitió a los estudiantes recurrir a los apoyos sociales con los que se les han enseñado los temas curriculares. Es decir, además de poder comentar con sus compañeros las posibles soluciones de los reactivos, tenían la libertad de revisar los apuntes tomados en clase, sus libros de texto y la posibilidad de exponer sus dudas ante la maestra.

Conformaron equipos de 5 integrantes. Se trabajó de esta manera porque así corresponde a la forma de trabajo de la profesora. Por tanto la formación de equipos fue determinada por el criterio de la profesora; con base en su experiencia y conocimiento del trabajo de los alumnos. El interés de la investigación fue observar lo que sucede dentro del salón de clases, por ello esta forma de selección de equipos no interfiere con el objetivo del proyecto.

### **2.2.2 Situación estandarizada**

Las observaciones realizadas durante la aplicación de la prueba Enlace efectuada en abril del 2000, se toman como referencia para comparar cómo los alumnos resuelven una prueba estandarizada.

La aplicación de esta prueba está dividida en seis sesiones de 45 minutos cada una. Se inicia a las 8: 00 am y finaliza a las 12:30 pm, por lo tanto se realizó en 2 días. El horario se adecuó al turno vespertino, empezando la aplicación con la jornada escolar.

La aplicación de la prueba Enlace fue organizada y supervisada por un coordinador, quien dio instrucciones a los docentes del plantel al momento de iniciar el examen. Una de las indicaciones fue que no podían tener acceso a ningún apoyo social con la siguiente instrucción “para resolver la prueba sólo deberán utilizar su hoja de respuestas y lápiz...” Sin embargo algunos alumnos no estaban familiarizados con el formato de la prueba, se les complicaba leer el cuadernillo donde tenían los reactivos para después rellenar los círculos en la hoja de respuestas provocando confusión en el momento de elegir una opción, pues volvían a la hoja de preguntas para confirmar el número de reactivo.

En el cuadernillo dirigido al profesor aplicador se le indica leer ante el grupo lo siguiente, “...Durante la aplicación no se permitirá el uso de libros, cuadernos, calculadoras u otro material de consulta. No está permitido que copien, les repito es muy importante que no copien confíen en sus conocimientos “(SEP 2007: Enlace).

Cuando el alumno se enfrenta al formato lápiz-papel se infiere que éste tiene que resolver los reactivos recurriendo a sus estructuras cognitivas para dar respuesta a la prueba no teniendo a su alcance las herramientas del plano social.

En el primer reactivo del instrumento de este proyecto, tomado de la prueba Enlace, los alumnos a nivel secundaria tenían que resolver el siguiente reactivo.

¿Cuál es el resultado de la siguiente operación?

$$(2x^3 + 6x^2 - 5x) (4x)$$

El alumno tiene que activar sus estructuras mentales para identificar que se trata de la multiplicación de un polinomio por un monomio, lo que implica tener la noción de que un polinomio es aquel que posee más de dos términos, y el monomio es aquel que sólo tiene un término.

Posteriormente el alumno tiene que multiplicar el monomio  $4x$  por cada uno de los términos del polinomio  $(2x^3 + 6x^2 - 5x)$  teniendo en cuenta en cada caso la regla de los signos, es decir  $(+) (+) = +$   $(-) (-) = +$   $(-) (+) = -$   $(+)(-) = -$ . Así como el tomar en cuenta las potencias, se infiere que el alumno sabe que la potencia indica las veces que se debe tomar como factor al número relativo. Para multiplicar 2 potencias de igual base (en este caso la base es X) se eleva dicha base a la potencia que resulte de la suma de los exponentes respectivos.

$$(2x^3 + 6x^2 - 5x) (4x)$$

Al multiplicar  $2x^3$  por  $4x$ , se multiplican los coeficientes numéricos  $(2) (4)$ , esto es igual a 8, por ser la misma base  $(x)$ , ésta sólo se eleva a la potencia que resulte de la suma de los exponentes respectivos  $(^3 + ^1)$  por tanto  $2x^3 (4x) = 8x^4$ . Para llegar al resultado el alumno tiene que realizar el mismo procedimiento para dar respuesta a la ecuación planteada que en este caso el resultado es:

$$8x^4 + 24x^3 - 20x^2$$

Se infiere que el alumno realiza la reunión de ideas y procedimientos matemáticos para resolver el problema planteado que ya no es de mera rutina, considerando la construcción de modelos, traducción, interpretación y solución del

problema estándar, y la aplicación de métodos múltiples bien definidos. Así como el manejo de diferentes métodos de representación de acuerdo con la situación, el objetivo y la decodificación e interpretación del lenguaje simbólico y formal al ser entendido con su relación con el lenguaje natural.

En este sentido se obliga al alumno a activar estructuras de conocimiento que le permiten dar respuesta a la prueba, siendo ésta un formato abstracto por las siguientes razones: en primer lugar, las preguntas que contiene el examen simbolizan palabras expresadas mediante el diálogo: en segundo lugar, como el profesor no puede intervenir la manera en que el significado de las preguntas se comunica es más abstracto que en el razonamiento social, porque el mensaje que el alumno debe comprender es únicamente mediante el formato lápiz-papel, sin la oportunidad de verificar la comprensión, ni de suministrar información adicional bajo demanda.

### **2.3 Instrumento**

En la situación de trabajo los alumnos resolvieron siete reactivos tomados de la prueba ENLACE 2007. El criterio de selección de estos reactivos fue la correspondencia a la temática vista en clase. Para entonces se había cubierto:

- Expresiones algebraicas y ecuaciones lineales
  - monomios y polinomios
  - fracciones algebraicas
  - ecuaciones lineales
  - sistemas de ecuaciones lineales
  
- Elementos de trigonometría
  - razones trigonométricas
  - tablas de las razones trigonométricas,
  - seno, coseno, tangente,
  - resolución de triángulos rectángulos

Temas curriculares a los que pertenecen los reactivos del instrumento.

El instrumento consta de siete reactivos, los cuales se presentan a continuación:

1. *¿Cómo se representa la expresión “la suma de un número más dos unidades elevadas al cuadrado y multiplicado por tres”?*

a)  $((x + 2)3)2^2$

b)  $3(x + 2)^2$

c)  $(x + (2)^3)^2$

d)  $(x(3) + 2)^2$

2. *¿Cuál es el resultado de la siguiente operación?*

$$(2x^3 + 6x^2 - 5x)(4x)$$

a)  $8x^2 + 24x - 20$

b)  $6x^4 + 10x^3 - x^2$

c)  $8x^4 + 24x^3 - 20x^2$

d)  $2x^6 + 6x^5 - 5x^4$

3. *Lean cuidadosamente las siguientes instrucciones para trazar una figura:*

*Traza un segmento horizontal de 10 cm al que le llamarás EJ.*

*Abre tu compás a 6cm, apóyate en el punto J y traza un arco que pase por arriba de EJ.*

*Con la misma cobertura del compás, apóyate en el punto E y traza otro arco que pase por debajo de EJ.*

Abre tu compás a 12cm y apoyándote en el punto E, traza un arco que intersecte al que está arriba de EJ y llama D a ese punto. Con esa misma abertura apóyate en el punto J y traza un arco que intersecte al que está debajo de EJ; llama R a ese punto.

Une con líneas rectas los puntos E y D; D y J; J y R; y R y E.

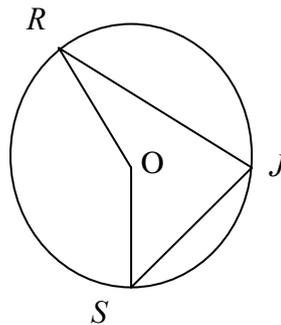
¿Cuál de las siguientes figuras resulta de llevar a cabo las instrucciones anteriores?

- a) Un rombo.
- b) Un trapecio.
- c) Un romboide.
- d) Un trapezoide.

4. En un triángulo, dos de sus ángulos internos miden  $25^\circ$  y  $50^\circ$  ¿cuánto mide el otro ángulo?

- a)  $75^\circ$
- b)  $105^\circ$
- c)  $130^\circ$
- d)  $285^\circ$

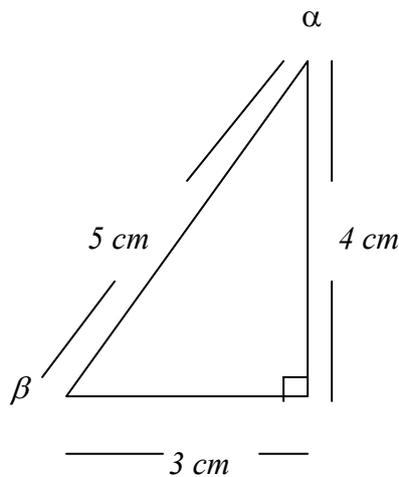
5. Observa la siguiente figura:



Si el  $\angle RJS$  mide  $68^\circ$ , ¿cuánto mide el  $\angle ROS$ ?

- a)  $34^\circ$
- b)  $46^\circ$
- c)  $108^\circ$
- d)  $136^\circ$

6. Observa el siguiente triángulo rectángulo:



¿Cuál Es la razón de la tangente del ángulo  $\beta$ ?

- a)  $\text{Tan}(\beta) = 3/4$
- b)  $\text{Tan}(\beta) = 4/3$
- c)  $\text{Tan}(\beta) = 3/5$
- d)  $\text{Tan}(\beta) = 4/5$

7. En un triángulo rectángulo un cateto mide 9 u, el otro cateto 40 u, ¿cuánto mide la hipotenusa?

- a) 31 u
- b) 40 u
- c) 41 u
- d) 80 u

La fuente de datos para la investigación fueron grabaciones de audio y video de las interacciones y discusiones de los estudiantes durante el ejercicio (alumno-alumno y alumno- maestra). Los aparatos de audio y video se colocaron en cada uno de los cinco equipos, es importante recalcar que las grabaciones de video se utilizaron como apoyo para capturar los comentarios de los estudiantes, y de esta

manera retomar elementos importantes como la utilización de recursos sociales (cuadernos, libros, material didáctico, etc.).

Para la interpretación de los diálogos de los alumnos se transcribieron las discusiones de cada equipo con base en el análisis de la organización secuencial propuesta por Wells (2001).

## **2.4 Procedimiento**

Los datos se recabaron a partir de las transcripciones de audio y video de cada sesión.

Se trabajó durante 9 sesiones. En las cuales se observaron las interacciones dentro del salón de clases. Utilizando una sesión mas para presentarnos en el grupo seleccionado, se les explicó a los alumnos que nuestra participación dentro del grupo consistiría en grabar en audio y video la interacción dialógica que se produce dentro del aula, es decir las preguntas que la profesora y los alumnos emitan al momento de resolver algún ejercicio matemático, y que ese material se analizaría sólo para obtener el resultado de las intervenciones dentro de la clase y no para evaluar qué tanto saben de la asignatura.

Además se elaboraron formatos dirigidos a los padres de familia pidiendo autorización para grabar a sus hijos durante clases.

### **1° Sesión**

Se observó la dinámica de trabajo durante la asignatura de matemáticas, para que los alumnos se familiarizaran con nuestra presencia.

### **2° Sesión**

En esta sesión se ingresó con la cámara de video para grabar la clase y así observar la comunicación que existe entre el profesor y sus alumnos, y de éstos entre sí.

En las sesiones 3°, 4°, 5° y 6°

Se realizó la observación de la dinámica de la clase. Se grabó con la cámara el trabajo de los alumnos durante la solución de ejercicios proporcionados por la profesora de la asignatura en relación con el tema que se había visto en clases anteriores.

En estas sesiones se hizo evidente la constante participación de los alumnos; exponían dudas, contestaban a requerimientos de la profesora, comentaban con sus compañeros y comparaban procedimientos. Por su parte, la profesora, siempre se mostró dispuesta a escuchar a sus alumnos y a resolver sus cuestionamientos.

7° Sesión

Se grabó una clase de trabajo en equipo, en donde los alumnos tenían que resolver de manera individual ejercicios proporcionados por la profesora de la asignatura.

8° y 9° Sesión

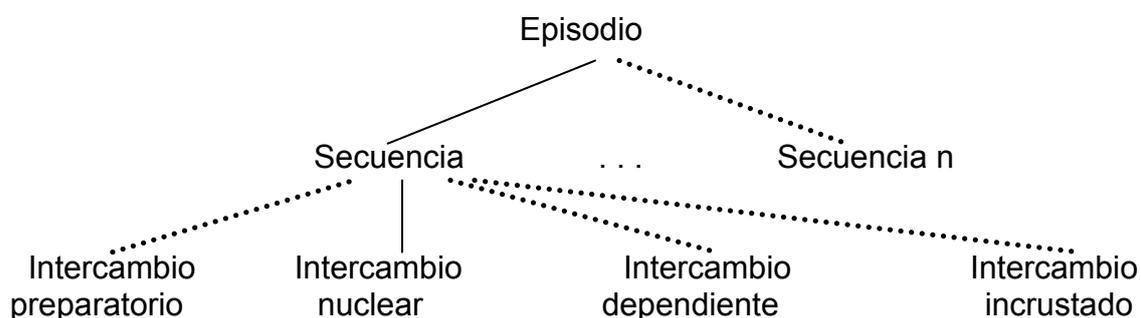
Se grabó en audio y video la dinámica de clase durante la resolución de los ejercicios proporcionados por las sustentantes de esta investigación. Los alumnos resolvieron en equipos de 5 integrantes el instrumento que consta de 7 reactivos tomados de la prueba ENLACE.

## CAPÍTULO III

### 3. Análisis de datos

Los datos derivados de las grabaciones de audio y video fueron analizados con base en las categorías para el análisis de la organización secuencial del discurso de Wells (2001).

Su propuesta establece que el intercambio constituye la unidad más adecuada para el análisis del discurso hablado con las siguientes categorías:



El análisis de los episodios se llevó a cabo en dos niveles. En el primer nivel, cada episodio se segmenta en secuencias, que se numeran consecutivamente. En el segundo nivel, cada secuencia se segmenta en intercambios.

El episodio es toda el habla que se produce en la realización de una actividad o de una de sus tareas constitutivas, es decir la conforman todas las interacciones producidas durante la realización de una tarea o una actividad conjunta. Cada Episodio se compone de secuencias, una secuencia es sólo un intercambio nuclear y cualquier otro intercambio vinculado (preparatorio, dependiente o incrustado). Por ejemplo, cuando un alumno realiza una pregunta dirigida al profesor o a un compañero y éstos dan respuesta a la interrogante.

A continuación se presenta a manera de ejemplo un episodio de discurso en las actividades de ciencias del aula de primaria tomado del libro *Indagación Dialógica* (Wells, 2001). El episodio ocurre en una clase combinada de cuarto y quinto curso, al principio de una de las lecciones de una unidad dedicada al

tiempo atmosférico, la profesora dirige una discusión con toda la clase y empieza haciendo referencia a unas preguntas escritas sobre el tema que los estudiantes ya han generado.

En el ejemplo, las codificaciones de los tipos de intercambio son:

Pre. Intercambio Preparatorio: Pedir la palabra en las sesiones de preguntas y respuestas con toda la clase (en este trabajo, con todo el equipo).

Nuc. Intercambio Nuclear: Pueden ser autónomos y aportar por sí solos nuevos contenidos.

Dep. Intercambio Dependiente: Algún aspecto del intercambio nuclear se desarrolla mediante una posterior especificación, ejemplificación, justificación, etc.

Inc. Intercambio Incrustado: Aborda problemas retomando el movimiento del intercambio actual (por ejemplo la necesidad de repetir o identificar un referente).

<i>Episodio 1</i>	<i>Intercambio</i>
<i>T: Aquí están todas vuestras ideas sobre cómo podemos aprender acerca del tiempo, las distintas cosas que podemos hacer.. Pero me pregunto cómo lo debemos hacer, si tenemos que dedicar un buen rato a trabajar con el tiempo ¿Qué deberíamos hacer todo ese rato? ¿Qué podemos hacer para aprender algo usando todas estas cosas?</i>	<i>Secuencia 1</i>
<i>[Se alzan varias manos, incluyendo la de Jenny]</i>	<i>Nuc.</i>
<i>T: ¿Jenny?</i>	<i>Inc.</i>
<i>J: Pues tendríamos que hacer unos grupos y entonces un grupo hace el tiempo con libros usando esas hojas pequeñas y entonces pues el otro grupo lo saca um de una película o de dispo-de diapositivas o de muchos sitios diferentes, de experimentos, y como hay varios grupos haciendo cosas pues entonces nos las contamos</i>	<i>Inc.</i>
<i>T: Muy bien</i>	<i>Nuc.</i>
<i>T: ¿Alguna otra idea?</i>	<i>Secuencia 2</i>
<i>[ se alzan varias manos, incluyendo la de Lindsey]</i>	<i>Nuc.</i>
	<i>Inc.</i>

Episodio 1	Intercambio
T: ¿Lyndsey?	Inc.
L: A lo mejor podríamos jugar a ** (inaudible)	Nuc.
T: Muy bien	
A lo mejor a alguien le gustaría hacer	Nuc
algunos juegos sobre el tiempo que os	Secuencia 3
ayudarán a aprender	Nuc.
Pues vale	
T: ¿Alguna idea más sobre cómo lo podemos hacer?	Nuc.
S: Pues podemos mirar periódicos y cosas así** -	
T: Muy Bien	Nuc.
S:-Para ver si podemos encontrar artículos o algo como	Dep.
revistas o algo	
T: Pues muy bien	
Me gustaría que empezara mirando el	
periódico y qué si veis algún artículo sobre	
el tiempo, pues que lo recortéis y lo	
traigáis..	Nuc.
Pero antes preguntad en casa si ya han	
acabado de leer el periódico.	
Muy buena idea, Salina	

### **3.1. Análisis de los procesos de solución a problemas aritméticos en una situación estandarizada**

Las pruebas estandarizadas a las que se enfrentan los alumnos mexicanos, tienen como objetivo predecir el rendimiento futuro y actual así como clasificar a éstos según su nivel de actitud, con más o menos precisión, suponiendo que el tipo de ejecución sin ayuda es el mejor formato para llevar a cabo la evaluación. (Pinelo, 2000)

En la resolución de contenido matemático de estas pruebas, la evaluación que se realiza se orienta a comprobar si el alumno cuenta con los conocimientos (procesos y estrategias) necesarios para resolver un problema, o si es capaz de transferirlas a otros problemas que han sido objeto de aprendizaje después de un periodo de instrucción.

Sin embargo, la manera más habitual de evaluar este procedimiento en las aulas no nos puede ofrecer información de este tipo. Lo común es proponer al alumno que resuelva problemas presentados en un formato lápiz y papel, con lo que se hace difícil observar el procedimiento que está utilizando; es decir, los recursos cognitivos a los que recurre el alumno al momento de tratar de dar respuesta.

El instrumento que se utilizó para esta investigación, consta de 7 reactivos que fueron presentados a los alumnos de tercer año de secundaria, tomados de la prueba enlace 2007. Éstos son de contenido algebraico (monomios y polinomios, ecuaciones) y de geometría (ángulos entre paralelas y una secante, triángulos, semejanza), en los cuales los alumnos tienen que realizar el procedimiento de las habilidades matemáticas, el establecimiento de tres tipos de competencias, como, la reproducción aplicar reglas, de conexión y de reflexión así como el manejo de cantidad espacio y forma.

Partimos del supuesto de que los alumnos deben hacer uso de habilidades y destrezas para llevar a cabo el proceso de resolución de los

reactivos. Dichas habilidades y destrezas se han adquirido durante el proceso de aprendizaje en los ciclos escolares que han cursado los alumnos.

El aprendizaje matemático no consiste en un proceso de incorporación de datos, reglas, etcétera a una mente en blanco, sino que implica un diálogo (Implícito o explícito) entre los conocimientos previos del alumno y los nuevos, que trata de enseñar el profesor. Incluso cuando los niños se incorporan por primera vez al sistema educativo formal, poseen ya un amplio repertorio de conocimientos matemáticos informales (De Vega, 1992).

Tomando en cuenta esa concepción interactiva del aprendizaje matemático se realiza el análisis y descripción de el proceso cognitivo. Es decir, se trata de la transformación de los estímulos sensoriales en pauta de información significativas y asimilables por los sistemas de memoria que debe llevar a cabo el alumno al momento de la ejecución de los mismos.

Reactivo tomado de la prueba ENLACE 2007.

1. *¿Cómo se representa la expresión “la suma de un número más dos unidades elevadas al cuadrado y multiplicado por tres”?*

e)  $((x + 2)3)2^2$

f)  $3(x + 2)^2$

g)  $(x + (2)^3)^2$

h)  $(x(3) + 2)^2$

Cuando el alumno lee la instrucción del reactivo anterior es razonable suponer que en su memoria se ha registrado una idea que representa dicho estímulo; lo más probable es que, tanto la instrucción y las posibles respuestas sean familiares y, por tanto, este en la memoria el proceso. Éste le permite saber que las cantidades desconocidas se representan por las últimas letras del alfabeto. Al leer “la suma de un número “aplica dicho conocimiento y representa a ese número con la letra “X”. La expresión dice que al número (X)

se le debe sumar 2 unidades, la palabra suma indica que debe utilizar el signo de operación + y llega a la siguiente representación:

$$X+2$$

De esta manera en la codificación de la expresión algebraica se generan varios códigos que corresponden a otros tantos aspectos o atributos informacionales; por ejemplo, en este caso la expresión algebraica debe ser elevada al cuadrado por lo que se infiere que el alumno sabe que debe utilizar la potencia indicada, ya que ésta señala las veces que debe tomar como factor el número base. En ésta expresión  $X+2$  debe ser elevada al cuadrado representada por el número  $^2$  quedando de la siguiente manera:

$$(X+2)^2$$

El último paso para que el alumno llegue a la representación de la expresión es multiplicar la expresión  $(X+2)^2$  por 3 la palabra “por” le indica al alumno que debe utilizar un signo de agrupación en este caso utilizará el paréntesis ordinario “( )”. Así  $3(X+2)^2$  indica que el resultado de la suma  $X+2$  debe elevarse al cuadrado y multiplicarse por 3.

Reactivo tomado de la prueba ENLACE 2007.

2. *¿Cuál es el resultado de la siguiente operación?*

$$(2x^3 + 6x^2 - 5x) (4x)$$

e)  $8x^2 + 24x - 20$

f)  $6x^4 + 10x^3 - x^2$

g)  $8x^4 + 24x^3 - 20x^2$

h)  $2x^6 + 6x^5 - 5x^4$

En este reactivo el alumno interpreta en un primer momento que se trata de la multiplicación de un polinomio con un monomio, pues esta es la representación que él visualiza e identifica; un monomio es aquel que sólo tiene un término ( $4x$ ), y un polinomio es aquel que posee mas de dos términos.

De esta manera el alumno evoca un recuerdo que no depende únicamente de la codificación de los signos de las operaciones básicas (suma, resta y paréntesis), sino también de las estrategias que el sujeto utiliza expresamente en la situación de recuerdo, por ejemplo; en esta operación el paréntesis ayuda al alumno a identificar el primer paso que consiste en la agrupación de los términos de la operación, es decir indica que término es el multiplicador.

Una vez diferenciados los términos el alumno tiene que multiplicar el monomio  $4x$  por cada uno de los términos del polinomio  $(2x^3 + 6x^2 - 5x)$  teniendo en cuenta en cada caso la regla de los signos, es decir  $(+) (+) = +$ ,  $(-) (-) = +$ ,  $(-) (+) = -$ ,  $(+)(-) = -$ . Así como el tomar en cuenta las potencias, se infiere que el alumno sabe que la potencia indica las veces que se debe tomar como factor al número relativo. Para multiplicar 2 potencias de igual base (en este caso la base es  $X$ ) se eleva dicha base a la potencia que resulte de la suma de los exponentes respectivos.

$$(2x^3 + 6x^2 - 5x) (4x)$$

Al multiplicar  $2x^3$  por  $4x$ , se multiplican los coeficientes numéricos  $(2) (4)$ , esto es igual a  $8$ , por ser la misma base  $(x)$ , ésta sólo se eleva a la potencia que resulte de la suma de los exponentes respectivos  $(^3 + ^1)$  por tanto  $2x^3 (4x) = 8x$ .

Para llegar al resultado el alumno tiene que realizar el mismo procedimiento para dar respuesta a la ecuación planteada que en este caso el resultado es:

$$8x^4 + 24x^3 - 20x^2$$

Los dos problemas presentados anteriormente requieren que el estudiante pueda traducir, para su resolución, conceptos del lenguaje común a términos algebraicos así como el proceso de reproducción. Ya que comprende el conocimiento de los hechos, la representación, la retención, memorísticas de las propiedades de rutina como son los algoritmos estándar, y el desarrollo de

destrezas y técnicas. De esta manera el alumno recurre a los conocimientos almacenados en la memoria, lo importante no es acumular datos si no la recuperación de lo que es relevante para la resolución de cada reactivo, y esto depende de cómo se codifica y se procesa la experiencia pasada.

Es decir la codificación y el procesamiento que realiza el alumno al dar respuesta a los reactivos dan lugar a una representación mental, en este caso simbólica. El alumno al leer “la suma de un número representa a ese número con el símbolo X y le atribuye el significado aprendido anteriormente, es decir en algebra una cantidad desconocida es representada con las últimas letras del abecedario

Reactivo tomado de la prueba ENLACE 2007.

*3. Lean cuidadosamente las siguientes instrucciones para trazar una figura:*

*Traza un segmento horizontal de 10 cm. al que le llamarás EJ.*

*Abre tu compás a 6cm, apóyate en el punto J y traza un arco que pase por arriba de EJ.*

*Con la misma cobertura del compás, apóyate en el punto E y traza otro arco que pase por debajo de EJ.*

*Abre tu compás a 12cm y apoyándote en el punto E, traza un arco que intersecte al que está arriba de EJ y llama D a ese punto. Con esa misma abertura apóyate en el punto J y traza un arco que intersecte al que está debajo de EJ; llama R a ese punto.*

*Une con líneas rectas los puntos E y D; D y J; J y R; y R y E.*

El alumno debe activar sus conocimientos previos para reconocer los términos de las instrucciones e instrumentos requeridos que ya deben serle familiares.

Por ejemplo debe saber a que se refiere la instrucción; traza un segmento horizontal de 10cm al que le llamas E J es así que el alumno debe tener la noción de que se llama segmento al conjunto de puntos comprendidos entre E y J, estos puntos son los extremos del segmento.

Un segmento se designa por las letras de sus extremos y con un trazo encima, el segmento se representa así EJ.

E \_\_\_\_\_ J

Posteriormente debe utilizar el siguiente método con un compás se toma la longitud sobre la regla (6 cm.) la punta metálica debe ser colocada en el punto J y trazar un arco que es una porción de circunferencia la cual debe pasar por arriba del segmento

E \_\_\_\_\_ J

El alumno lee las instrucciones e interpreta de manera visual la información y de esa manera debe recurrir al significado de términos como trazo, horizontal, arco e interceptar, que son palabras que podrían resultarle confusas o incluso ignorar su significado.

La probabilidad de evocar el significado no solo depende de las operaciones de codificación durante la fase de aprendizaje, sino también de los indicios ambientales y las estrategias que el alumno utilice expresamente en la situación de recuerdo (de Vega, 1992). Por tanto cada palabra de la instrucción representa una idea que debe interpretar para continuar el proceso de solución, por ejemplo; se indica que debe trazar un arco. Al leer ésta palabra el alumno debe saber que arco se define como la parte de una circunferencia que esta determinada por dos puntos de ella y se denota AB. Símbolo cuyo significado ha sido acordado y aprendido.

*¿Cuál de las siguientes figuras resulta de llevar a cabo las instrucciones anteriores?*

- e) Un rombo.*
- f) Un trapecio.*
- g) Un romboide.*

*h) Un trapezoide.*

Después de realizar cada punto señalado en las instrucciones, el alumno obtiene el trazo de una figura en su cuaderno, la identifica y elige la opción que corresponde con su trazo.

Reactivo tomado de la prueba Enlace 2007

*4. En un triángulo, dos de sus ángulos internos miden  $25^\circ$  y  $50^\circ$  ¿cuánto mide el otro ángulo?*

- a)  $75^\circ$*
- b)  $105^\circ$*
- c)  $130^\circ$*
- d)  $285^\circ$*

Para resolver el reactivo el alumno debe hacer uso del razonamiento viso-espacial y de interpretación e identificar que se trata de un objeto geométrico. Al leer “en un triángulo” activa el conocimiento que ha almacenado sobre esta figura, así pensará en un cuerpo delimitado por tres segmentos rectos (lados) que se cortan en tres puntos (vértices) y lo representará con una imagen.

Luego, se dice que dos de sus ángulos internos miden  $25^\circ$  y  $50^\circ$ . En primer lugar debe identificar e interpretar el concepto “ángulo” y saber que la figura formada por dos segmentos rectos no paralelos se llama ángulo; el punto donde se tocan los segmentos se denomina vértice y los segmentos reciben el nombre de lados del ángulo. El reactivo indica que dos de sus ángulos internos miden  $25^\circ$  y  $50^\circ$  respectivamente, por tanto infiere que falta saber el valor del otro ángulo y además se agrega la especificación “ ángulo interno” pues puede calcularse también la medida de los ángulos externos de un triángulo que también son tres .

El siguiente paso que el alumno podría realizar sería establecer que la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo suman  $180^\circ$ , por tanto recurre a sus conocimientos previos.

Una vez asociado la representación mental de triángulo el conocimiento sobre la suma de sus lados internos, el alumno recurre a las operaciones básicas. Así utilizaría el algoritmo de la suma para averiguar el resultado de agregar  $25^\circ$  a  $50^\circ$  y de esta manera obtener una cantidad que podrá restar a  $180^\circ$  y llegar al resultado.

Después de haber codificado la representación mental del triángulo y del proceso de la operación de suma, el alumno transforma toda esta información para realizar la operación

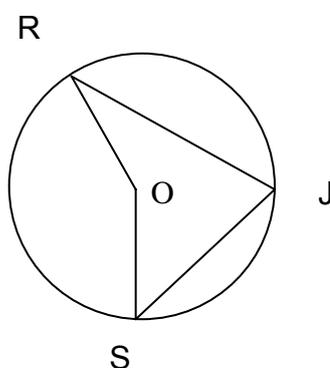
$$25^\circ + 50^\circ + X = 180^\circ$$

Por lo tanto, realiza la suma de  $25^\circ + 50^\circ$  que es igual a  $75^\circ$  y para saber cuanto mide el tercer ángulo se restan los  $75^\circ$  a  $180^\circ$ , de la siguiente manera:

$$180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$$

Reactivo tomado de la prueba ENLACE 2007.

5. *Observa la siguiente figura:*



5. Si el  $\angle RJS$  mide  $68^\circ$ , ¿cuánto mide el  $\angle ROS$ ?

- a)  $34^\circ$
- b)  $46^\circ$
- c)  $108^\circ$
- d)  $136^\circ$

La instrucción presentada anteriormente requiere que el alumno pueda traducir, para su resolución el proceso de reproducción pues el alumno codifica la información de manera visual, ya que comprende el conocimiento de los hechos, la representación, la retención, memorísticas de las propiedades de rutina como son los algoritmos estándar, y el desarrollo de destrezas y técnicas. Después se le pide al alumno que observe la figura y que calcule cuanto mide ángulo ROS De la misma manera el alumno tendrá que activar esquemas de conocimiento acerca de geometría y aritmética básica.

El alumno entonces recurrirá al manejo de habilidades de solución de problemas matemáticos simples, y sabrá que tendrá que realizar un trazo para juntar los ángulos ROS.

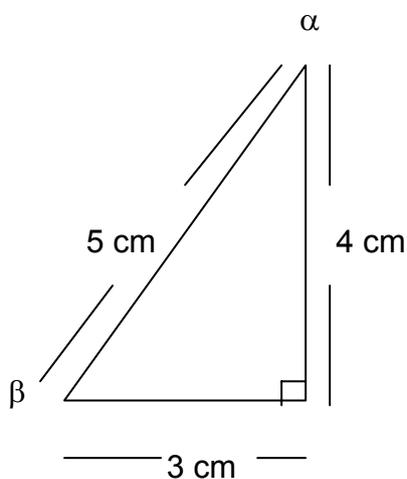
Después necesitará de la ayuda de un transportador para dar paso a la respuesta correcta, sin embargo, el alumno no cuenta con el apoyo del material, debido a que en las instrucciones dadas por el aplicador se dio la instrucción de no utilizar nada más que goma, lápiz y saca puntas.

Por lo cual el alumno estará limitado para dar una óptima respuesta, aún cuando sepa qué procedimiento seguir.

En este tipo de reactivos los alumnos tienen que aplicar el proceso de la comprensión del espacio y de la forma, en la que se genera la necesidad de buscar semejanzas y diferencias a partir del análisis de los componentes de la estructura y reconocimiento de las formas a representar; esto significa ser capaz de entender la posición relativa de los objetos.

Reactivo tomado de la prueba ENLACE 2007.

6. Observa el siguiente triángulo rectángulo



¿Cuál es la razón de la tangente del ángulo  $\beta$ ?

- e)  $\text{Tan}(\beta) = 3/4$
- f)  $\text{Tan}(\beta) = 4/3$
- g)  $\text{Tan}(\beta) = 3/5$
- h)  $\text{Tan}(\beta) = 4/5$

Quando el alumno lee la instrucción anterior establece una conexión e integración de información entre los componentes del problema, es así que el alumno observa la imagen del triángulo como un formato representacional decisivo para el proceso de solución del problema.

El alumno distingue en la imagen las razones trigonométricas para decodificar e interpretar el lenguaje simbólico. En este caso se infiere que el alumno realiza una conexión del teorema de Pitágoras en la aplicación de las razones trigonométricas recordando que éstas se utilizan para cada ángulo de un triángulo rectángulo, donde es posible identificar el cateto que está “enfrente” de ese ángulo o cateto opuesto y el cateto adyacente, que forma tal ángulo con la hipotenusa.

Una vez identificado la temática del reactivo, el alumno procede a observar la exigencia del mismo, en este caso contestar la interrogante planteada ¿Cuál es la razón de la tangente del ángulo B?, para la solución del problema el alumno sabe que para encontrar las razones trigonométricas debe contar con dos datos: con el valor de los catetos opuesto y adyacente. Por tanto al observar que le piden la razón de la tangente del ángulo B, el alumno sustituye valores en la razón:

$$\text{Tan} = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}} = \frac{4}{3}$$

Obteniendo como resultado la opción “b”.

Reactivo tomado de la prueba ENLACE 2007.

7.- En un triángulo rectángulo un cateto mide 9 u, el otro cateto 40 u, ¿cuánto mide la hipotenusa?

- e) 31 u
- f) 40 u
- g) 41 u
- h) 80 u

En este reactivo el alumno reconoce y extrae los datos incluidos en la instrucción anterior, identificando que un triángulo que tiene un ángulo recto (90°), se llama triángulo rectángulo y los dos lados que forman el ángulo recto se denominan catetos, y el tercer lado, el opuesto al ángulo recto, hipotenusa.

Por tanto para dar respuesta a la instrucción el alumno recurre al teorema de Pitágoras que consiste en; la suma de los cuadrados de los catetos es igual que el cuadrado de la hipotenusa.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

De esta manera en el proceso de solución del teorema de Pitágoras se generan varios códigos, el primero requiere que el alumno sustituya los valores de la instrucción en la fórmula.

$$c^2 = 9u^2 + 40u^2$$

El siguiente paso requiere que los valores de los catetos sean elevados al cuadrado por lo que se infiere que el alumno sabe que debe utilizar la potencia indicada ya que ésta señala las veces que debe tomar como factor el número base.

$$c^2 = 81u + 1600u$$

Después debe sumar los dos datos, la palabra suma indica que debe utilizar el signo + y llega a la siguiente representación:

$$c^2 = 81u + 1600u$$

$$c^2 = 1681u$$

El último proceso que el alumno debe seguir en el teorema de Pitágoras es en la potencia utilizada en "C" (hipotenusa) se elimina, convirtiéndose así en la raíz cuadrada del resultado de la suma de los catetos:

$$c = \sqrt{1681u}$$

Obteniendo como resultado  $c = 41 u$

En este tipo de reactivos los alumnos tienen que aplicar el proceso de la comprensión del espacio y de la forma donde se genera la necesidad de buscar semejanzas y diferencias a partir del análisis de los componentes de la estructura y reconocimiento de las formas a representar esto significa ser capaz de entender la posición relativa de los objetos.

### 3.2 Análisis de los procesos de solución a problemas aritméticos en una situación dialógica

El aula constituye un espacio en el que el conocimiento es construido conjuntamente por los participantes, es decir el enseñante y los estudiantes realizan actividades conjuntas que se negocian en un contexto determinado a través del discurso (Wells, 2001).

A continuación se presenta, a manera de ejemplo, el fragmento de una secuencia del discurso que se produce dentro del aula durante la clase de matemáticas de un grupo de tercer grado de secundaria. El diálogo muestra a la maestra de la asignatura dirigiendo una clase en la que se discute cómo se obtiene el ángulo semiinscrita.

***MAESTRA:** Recuerden el ángulo semiinscrita va a ser la mitad del arco, y ahora vamos con el último... el último traten de hacerlo ustedes a ver cuánto da. Éste es la mitad de este ángulo que viene siendo la mitad, si aquí ustedes tienen que fijarse bien donde les pongo y en base al diámetro siempre porque como es semiinscrita siempre tiene que estar basado en base al diámetro ya sea que le quitamos si... vamos a ver aquí tenemos medio círculo cuánto mide.*

***ESTUDIANTE:** Ciento ochenta.*

***MAESTRA:** Ciento ochenta más... fijense que mi ángulo lo rebasa y mide 90 grados tengo 90 grados, esto nos da 270 para encontrar mi ángulo yo debo de dividirlo entre 2. Entre 2 y esto me va a dar cuanto mide.*

***ESTUDIANTE:** Ciento treinta y cinco.*

***MAESTRA:** Esto es igual a 135 eso mide mi ángulo.... sí Miriam ¿sí o no a ver queda claro?*

En el episodio anterior la maestra trata de que los alumnos lleguen a entender de qué manera pueden obtener el valor del ángulo semiinscrita con base en un círculo que tiene valores numéricos representados con letras. Al momento de que la maestra da seguimiento a la resolución del ejercicio, los alumnos van expresando sus dudas a través del lenguaje realizando una doble función; mediando la participación en la actividad y, al mismo tiempo, proporcionando un medio en el que la actividad se representa y, en consecuencia, se hace disponible para reflexionar sobre ella obteniendo así, el valor del ángulo semiinscrita.

Es así que la profesora estimula el uso del lenguaje para promover el aprendizaje. La interacción y la manera de dirigir la clase permiten enriquecer las ideas del grupo, pues los comentarios de los alumnos son útiles para sus compañeros y para sí mismos.

A continuación se presenta el análisis del discurso derivado de la solución a problemas aritméticos, de los alumnos de tercer grado de secundaria, los cuales dieron respuesta a los reactivos del instrumento que fueron tomados de la prueba Enlace 2007, en una situación dialógica.

El análisis de los diálogos presenta evidencia de que cuando los alumnos dan solución a sus reactivos, gracias a la posibilidad de comentar el posible procedimiento, los equipos tienen los elementos para discutir sobre los valores y el tipo de proceso por el que cada uno llegaría a la opción correcta.

En el siguiente fragmento se presenta una secuencia dialógica de uno de los equipos del tercer grado de secundaria al dar respuesta al siguiente problema:

**Secuencia 1.** ¿Cómo se representa la expresión “la suma de un número más dos unidades elevadas al cuadrado y multiplicado por tres”?

i)  $((x + 2)3)^2$

j)  $3(x + 2)^2$

k)  $(x + (2)^3)^2$

l)  $(x(3) + 2)^2$

El alumno 1 lee las instrucciones del reactivo correspondiente:

Episodio	Intercambio
<i>Estudiante 1: Lee con atención las siguientes preguntas comenten y subrayen la respuesta que consideren correcta ¿Cómo se representa la expresión la suma de 1 número más 2 unidades elevadas al cuadrado y multiplicado por 3 unidades?</i>	
<i>Estudiante 2: Es con letra no</i>	Pre.
<i>Estudiante 1: A ver con letra</i>	Nuc.
<i>Estudiante 3: Ajá, con letra</i>	Inc.
<i>Estudiante 1: La suma de dos unidades ¿no? elevadas al cuadrado y multiplicadas por 3 unidades.</i>	Inc.  Dep.

En la secuencia anterior los alumnos dieron lectura en voz alta a la instrucción. Éstos al escuchar la pregunta, usan la información de manera progresiva para construir significados comunes acerca de conocimiento algebraico. Es decir, luego de compartir opiniones llegan a una nueva comprensión, que los alumnos consideran superior a la propia comprensión anterior.

En el fragmento se observa cómo los alumnos realizan la construcción social a través de la conversación particular que ofrece la base para identificar que las cantidades desconocidas se presentan por las últimas letras del alfabeto. En primer lugar, el estudiante 2 realiza una pregunta: “*es con letra ¿no?*”; así intenta obtener la aprobación de sus compañeros sobre su referente de la sustitución de cantidades por letras en expresiones algebraicas, por lo que el estudiante 1 trata de recordar realizando una observación: “*a ver con letra*”; siendo el estudiante 3 el que complementa y afirma: “*ajá; con letra*”.

En el siguiente fragmento los alumnos continúan, en la construcción social de la comprensión del reactivo.

Episodio	Intercambio
<i>Estudiante 2: ¿Cómo?</i>	Inc.
<i>Estudiante 3: Es una de dos unidades se ponen las dos en las dos unidades elevadas al cuadrado, la suma 2 vale 1 serían 3 al cuadrado.</i>	Nuc.
<i>Estudiante 4: Si en las dos unidades</i>	Dep.
<i>Estudiante 3: 3 por 3 igual a 9 y luego que más dice</i>	Inc.
<i>Estudiante 1: Multiplicado a los 3 por 3</i>	
<i>Estudiante 3: 3 por 3 igual a 27 no</i>	
<i>Estudiante 1: No, sería, o también podría ser ésta la suma de estas 2 unidades al cuadrado multiplicadas por 3 ¿no?</i>	Nuc.

Los alumnos realizan una discusión sobre cómo están entendiendo la pregunta del reactivo y de esa manera cada integrante expresa las posibles soluciones para que cada uno entienda lo que el otro dice y llegar así a una mayor comprensión de cómo se tiene que ir resolviendo el ejercicio.

En el siguiente fragmento se observa cómo los alumnos llegan a la fase de solución del reactivo, llegando a un acuerdo entre sus compañeros.

Episodio	Intercambio
<i>Estudiante 3: Sí</i>	Inc.
<i>Estudiante 5: Ése es el que tenemos que poner a</i>	Inc.
<i>Estudiante 1: Éste (haciendo referencia al numero 3) se multiplica por éstos (indicando la suma de un número mas dos unidades elevadas al cuadrado)</i>	Nuc.
<i>Estudiante 3: Ajá, éstos <math>(x+2)</math> se elevan al cuadrado</i>	Dep.
<i>Estudiante 1: Entonces la B ¿no?</i>	Inc.
<i>Estudiante 3: Sí</i>	Inc.
<i>Estudiante 1: ¿Sí están de acuerdo?</i>	Nuc.
<i>Estudiante 3: Sí</i>	Inc.
<i>Estudiante 1: Porque ésta (señalando la opción b) es la suma de estas dos unidades... de X más dos, están elevadas al cuadrado y aquí se multiplica por 3 entonces es la B.</i>	Dep.

Después de una serie de preguntas y aclaraciones los integrantes del equipo llegan a una comprensión de lo que se tenía que hacer con la pregunta planteada del ejercicio. La actividad de ir prediciendo de qué manera se pudiera resolver el reactivo llevó a cada integrante a una discusión de lo que había entendido de la pregunta. De esa manera cada uno fue expresando sus ideas y dudas sobre las expresiones algebraicas, lo que promovió construir un acuerdo de qué inciso era el correcto para la resolución del ejercicio.

A continuación se presenta la secuencia de uno de los equipos de tercer grado de secundaria al dar respuesta al reactivo número 2 del instrumento.

**Secuencia 2.-** ¿Cuál es el resultado de la siguiente operación?

$$(2x^3 + 6x^2 - 5x)(4x)$$

- i)  $8x^2 + 24x - 20$
- j)  $6x^4 + 10x^3 - x^2$
- k)  $8x^4 + 24x^3 - 20x^2$
- l)  $2x^6 + 6x^5 - 5x^4$

Episodio	Intercambio
<i>Estudiante 3: ¿Cuál es el resultado de la siguiente operación 2 X cúbica mas 6 X cúbica -- 5 X por 4 X sería primero se saca el resultado de éste no, y luego lo que salga X 4</i> <i>Estudiante 2: Se multiplica X 4</i> <i>Estudiante 1: A ver 2 X más 6 X cúbica son</i> <i>Estudiante 3: 7 X sumado a la 5 7 menos 5 X</i> <i>Estudiante 1: Serían 2 X a la tres</i>	Nuc. Inc. Inc.

En la secuencia anterior los alumnos comparten sus ideas y las posibles maneras de empezar a dar solución al ejercicio, utilizando estrategias espontáneas que les permiten probar soluciones e intercambiar sus puntos de vista. De esta manera están construyendo colectivamente una estrategia de solución.

Los alumnos continúan construyendo la estrategia de solución del reactivo en el siguiente fragmento.

Episodio	Intercambio
<i>Estudiante 3: 2 X a la cuatro</i>	Inc.
<i>Estudiante 3: Entonces serían 4 X 4X como</i>	Dep.
<i>Estudiante 1: 2 X a la cuatro 2 X 4 = 8X, no no no no es que ve los resultados, ve los resultados no es cierto se multiplica este este se multiplica por cada uno</i>	Nuc.
<i>Estudiante 3: Serían 8X a la 3</i>	Dep.
<i>Estudiante 1: 8X a la 4 más -----inaudible-----</i>	Inc.
<i>Estudiante 3: 24 X a la 3 menos 20 X a la 3</i>	Dep.
<i>Estudiante 4: 20 X a la 3</i>	

La interacción y la manera de ir revisando el posible procedimiento llevó al equipo a darse cuenta que los resultados de las posibles opciones de solución los llevan a la respuesta correcta, es así que el estudiante 1 comenta: *“ve los resultados, ve los resultados no es cierto se multiplica éste, éste se multiplica por cada uno”*; al notar este detalle se complementa y enriquecen las ideas del grupo, estudiante 3: *“serían 8X a la 3”*; la observación de este alumno fue útil para sus compañeros y viceversa, ya que se muestra cómo el intercambio de ideas se utiliza para encontrar la solución a un problema: estudiante 3: *“sí, aquí está, es la “C””*.

En los diálogos se observa cómo los argumentos, datos o apoyos se construyen dirigidos por la actividad discursiva. Un alumno proporciona una conclusión, estudiante 3: *“sí, aquí está, es la “C””*. Mientras que el otro un dato o un apoyo, estudiante 1: *“ve los resultados, ve los resultados no es cierto se multiplica éste, éste se multiplica por cada uno”*.

Ahora se muestra la discusión que se produjo de un equipo al resolver el reactivo número 3. El equipo fue verificando el procedimiento que debía llevar a cabo, ya que para poder dar respuesta a éste tenían que utilizar y manipular materiales que desde el primer momento les fueron proporcionados. En esta situación social de resolución de problemas el desarrollo del conocimiento matemático no se separa de los instrumentos de representación

culturalmente elaborados como apoyo a la actividad matemática, favoreciendo la construcción conjunta de soluciones más elaboradas y, al mismo tiempo, promoviendo las destrezas de los individuos al utilizar los instrumentos requeridos.

**Secuencia 3.** Lean cuidadosamente las siguientes instrucciones para trazar una figura:

Traza un segmento horizontal de 10 cm. al que le llamarás EJ.

Abre tu compás a 6 cm, apóyate en el punto J y traza un arco que pase por arriba de EJ. Con la misma cobertura del compás, apóyate en el punto E y traza otro arco que pase por debajo de EJ.

Abre tu compás a 12 cm y apoyándote en el punto E, traza un arco que intersecte al que está arriba de EJ y llama D a ese punto. Con esa misma abertura apóyate en el punto J y traza un arco que intersecte al que está debajo de EJ; llama R a ese punto.

Une con líneas rectas los puntos E y D; D y J; J y R; y R y E.

Episodio	Intercambio
<i>Estudiante 1: Lean cuidadosamente las instrucciones para trazar una figura traza un segmento horizontal de 10 cm. Al que llamarás eje; abre tu compás a 6 cm, apóyate en el punto eje y traza un arco que pase por arriba del eje E ¿Traen compás?</i>	Pre.
<i>Estudiante 3: Sí</i>	Inc.
<i>Estudiante 1: Pero éste se va ¿hacer aquí?, traza un segmento horizontal un segmento horizontal es la recta</i>	Nuc.
<i>Estudiante 2: Hay, me pasé</i>	Inc.
<i>Estudiante 3: Pero, sí está bien</i>	Inc.
<i>Estudiante 2: Pues no sé</i>	Inc.
<i>Estudiante 2: a 6 cm</i>	
<i>Estudiante 1: A ver vamos a trazarlo a 6 cm</i>	Dep.
<i>Estudiante 3: Primero hay que trazar la línea ¿cómo es horizontal?</i>	Dep.
<i>Estudiante 1: Acostada</i>	Nuc.
<i>Estudiante 4: De 10</i>	
<i>Estudiante 3: Es éste ¿verdad?</i>	Inc.
<i>Estudiante 1: ¿Sí es de 30?, sí</i>	Dep.
<i>Estudiante 2: Y luego el compás</i>	Inc.

<i>Estudiante 3: E J, E J entonces sería E J</i>	Dep.
<i>Estudiante 2: No,...es tu eje</i>	Inc.
<i>Estudiante 3: Pero aquí decía apóyate en el punto J</i>	Inc.
<i>Estudiante 1: Hay entonces es E J</i>	Inc.
<i>Estudiante 2: ¿Del eje?</i>	Inc.
<i>Estudiante 4: Vendría siendo aquí, para que pase así</i>	Inc.
<i>Estudiante 2: Pero éste no sería el eje o ¿sí?, no</i>	
<i>Estudiante 1: Es que no quedaría ¿o sí? Tiene que quedar un área así</i>	
<i>Estudiante 2: Si éste es el J va a quedar así</i>	
<i>Estudiante 1: Si ese es el J va a ser... a quedar igual</i>	
<i>Estudiante 3: Va a quedar igual aquí</i>	
<i>Estudiante 1: No le entendimos a este a ver vamos a trazar una línea horizontal</i>	Dep.
<i>Estudiante 2: Que mida 10 cm</i>	
<i>Estudiante 1: Que llamaremos eje E J que este va a ser el E y esta la J a bueno abre un compás de 6 cm apóyate en el punto eje y traza un arco que pase por arriba de E entonces vamos a poner el "este" (refiriéndose al compás) aquí y le vamos a dar el arco así como</i>	Dep.
<i>Estudiante 2: O lo vamos a poner del otro no o del otro lado bueno es lo mismo</i>	

En el fragmento anterior se observa como los alumnos utilizan el lenguaje para guiar las acciones de sus compañeros, regular las propias y ser guiados por el lenguaje de los demás y para poder explicarse así mismos y a los otros el significado de lo que están realizando. Por ejemplo, el estudiante 3 menciona: *"primero hay que trazar la línea ¿cómo es horizontal?"*; y el estudiante 1 contesta: *"acostada"*; donde estudiante 4 complementa: *"de 10"*.

Las observaciones y las discrepancias los llevan a construir puntos de vista a los que no hubieran podido llegar por sí solos. En este caso el estudiante 3 menciona : *"E J, E J entonces sería E J"*; el estudiante 2 no está de acuerdo con la opinión de su compañero y lo corrige: *"no ,...es tu eje"*, pero el estudiante 3 trata de defender su idea: *"pero aquí decía apóyate en el punto J"*; y el estudiante 1 apoya la opinión del alumno 3: *"hay entonces es E J"*, pero el alumno 2 no queda conforme y cuestiona: *"¿del eje?"*; el estudiante 4 interviene dando su opinión acerca de la posibilidad de cómo podría quedar: *"vendría siendo aquí, para que pase así"*.

Con la solución como meta, los alumnos estructuran de una manera conjunta su interacción, el estudiante 2 menciona: “*pero éste no sería el eje o ¿sí? No*”; avanzando de esta manera en una comprensión con ajustes en las expresiones del otro. Así, el estudiante 1 interviene: “*es que no quedaría ¿o sí? tiene que quedar un área así*”; y se va progresando en el desarrollo del procedimiento. Estudiante 2 da pie a la elaboración de la solución: “*si éste es el J va a quedar así*”; recibe la aprobación de su compañero, confirmando su idea, estudiante 1: “*si ese es el J va a ser... a quedar igual*”.

El hecho de poder ayudarse mutuamente, explicando al compañero el significado de las tareas, guiándolo y corrigiendo los errores, es un indiscutible factor facilitador y promotor del aprendizaje. El intercambio social permite que se desarrolle este tipo de pensamiento colectivo; el conocimiento de los alumnos progresa gracias a las explicaciones, guías, argumentos y correcciones de los otros.

**Secuencia 4.** En un triángulo, dos de sus ángulos internos miden  $25^\circ$  y  $50^\circ$  ¿cuánto mide el otro ángulo?

- a)  $75^\circ$
- b)  $105^\circ$
- c)  $130^\circ$
- d)  $285^\circ$

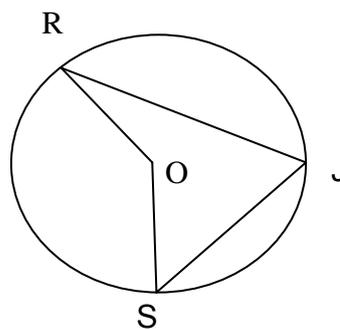
Episodio	Intercambio
<i>Estudiante 1: En un triángulo dos de sus ángulos internos miden <math>25^\circ</math> y <math>50^\circ</math> ¿Cuánto mide el otro ángulo? a) <math>75^\circ</math> b) <math>105^\circ</math> c) <math>130^\circ</math> d) <math>285^\circ</math></i>	Pre.
<i>Estudiante 2: Es la b</i>	Dep.
<i>Estudiante 1: Un triángulo, dos de sus ángulos internos miden <math>25^\circ</math> y <math>50^\circ</math> ¿Cuánto mide el otro ángulo? a) <math>75^\circ</math> b) <math>105^\circ</math></i>	
<i>Estudiante 3: ¿Cuánto miden los ángulos internos?</i>	Nuc.
<i>Estudiante 1: <math>25^\circ</math> y <math>50^\circ</math></i>	Inc.
<i>Estudiante 3: <math>75^\circ</math> es la a</i>	Inc.
<i>Estudiante 2: No, es la b</i>	Inc.
<i>Estudiante 1: <math>105^\circ</math></i>	Inc.

Estudiante 3: <i>¿Por qué es la b?</i>	Nuc.
Estudiante 2: <i>Porque mira, si la suma de los ángulos internos son <math>180^\circ</math> y esa suma da <math>75^\circ</math> más <math>105^\circ</math> da los <math>180^\circ</math></i>	Dep.
Estudiante 3: <i>¡Ah! Sí, es cierto tienes razón entonces los ángulos internos tienen que sumar <math>180^\circ</math> y como tenemos que dos de los datos dan <math>75^\circ</math> más los <math>105^\circ</math> nos da los <math>180^\circ</math>; eres muy inteligente.</i>	Dep.

En el diálogo anterior, para resolver el problema, los alumnos llevaron a cabo un proceso comenzando con el texto verbal. Donde el alumno 2; construye un diálogo interno del problema en términos de conjuntos y relaciones entre conjuntos, ya que da la respuesta sin dar explicaciones, estudiante 2: *“Es la b”*. Con base en este diálogo el alumno selecciona una operación aritmética formal apropiada para encontrar el elemento no conocido del problema; estudiante 2: *“Porque, mira, si la suma de los ángulos internos son  $180^\circ$ ”*. Posteriormente se ejecuta la operación seleccionada, estudiante 2: *“Esa suma da  $75^\circ$  más  $105^\circ$  da los  $180^\circ$ ”*. Hecho esto, el alumno comprendió y resolvió el problema, sustituyendo el elemento no conocido por el resultado de la acción ejecutada.

A continuación se presenta una secuencia del reactivo número 5.

5. Observa la siguiente figura:



Si el  $\angle RJS$  mide  $68^\circ$ , ¿cuánto mide el  $\angle ROS$ ?

- a)  $34^\circ$
- b)  $46^\circ$
- c)  $108^\circ$
- d)  $136^\circ$

Episodio	Intercambio
<i>Estudiante 1: Observa la siguiente figura véanla (todos observan la hoja de examen).</i>	Pre.
<i>Estudiante 2: Ay no entiendo... ah, pues aquí está (revisa su cuaderno y lo hojea) ¿cuándo fue que lo vimos? El martes sí, yo lo hice ¿Cuándo fue? Ay tú me viste.</i>	Inc.
<i>Estudiante 3: Es éste (toma su cuaderno).</i>	Inc.
<i>Estudiante 1: Es lo mismo.</i>	Inc.
<i>Estudiante 2: ¿Cuál es la pregunta?</i>	Dep.
<i>Estudiante 3: Observa la siguiente figura .</i>	Inc.
<i>Estudiante 2: ¡No!, la pregunta.</i>	Inc.
<i>Estudiante 3: Ah, sí.</i>	Inc.
<i>Estudiante 4: No quieres una escuadra para que te apoyes mejor.</i>	Inc.

En la construcción social que se desarrolla en el equipo, a los alumnos se les permite recurrir a herramientas culturales (Wells, 2001) como son sus notas, libros de texto, las relaciones entre los sujetos y los contenidos que participan en el proceso educativo.

El equipo continúa con el procedimiento para solucionar el problema.

Episodio	Intercambio
<i>Estudiante 5: ¡Ah! ya sé cuánto güey.</i>	
<i>Estudiante 3: Yo digo que la A.</i>	Inc.
<i>Estudiante 5: Porque ROS mide 68° ¿Cuánto mide el de ...</i>	
<i>Estudiante 3: ROS ... y cuanto mide...</i>	Inc.
<i>Estudiante 5: 68° entonces si RJS mide 68° no va a medir lo mismo si te das cuenta resto esto, esto es un espacio más de RJ entonces faltaría medir la S</i>	Nuc.
<i>Estudiante 3: ¿Cuánto es RS?</i>	Inc.
<i>Estudiante 5: ¿Cuánto es la mitad de 68°?</i>	Inc.
<i>Estudiante 3: 68 ... sería 34</i>	Dep.

En el diálogo anterior se observa que, durante el proceso de resolución, cada integrante va complementando las aportaciones del otro añadiendo información propia. Uno de los alumnos sostiene que el inciso correcto es el a: “yo digo que la A”, mientras que otro añade la información: “porque ROS mide 68°”, complementando y apoyando la idea propuesta de que se debe obtener la

mitad del ángulo ROS. *Estudiante 5: “¿Cuánto es la mitad de 68°?”*. Una vez consensuado que se debe obtener la mitad de ese ángulo el estudiante 3 responde: “68 ... sería 34”.

La discusión del equipo continúa y se desarrollan las siguientes ideas.

Episodio	Intercambio
<i>Estudiante 5: No creo que 34 mide de S a O ¿de O a R?</i>	
<i>Estudiante 3: Que te explique la maestra, a ver... haz algo 34.</i>	
<i>Estudiante 5: Sí, sí es 34.</i>	
<i>Estudiante 1 y 2: ¿Por qué 34?</i>	Nuc.
<i>Estudiante 5: Pues por que la mitad de 68 es 34, RJ mide...</i>	Dep.
<i>Estudiante 2: 68 ¿no? ¿Cuánto Mide ROS?</i>	Inc.
<i>Estudiante 3: Es la mitad.</i>	Inc.
<i>Estudiante 2: ¿Cuál mitad? , es que no me acuerdo como mide (empieza a buscar en su cuaderno) híjole.</i>	Inc.
<i>Estudiante 3: Es la mitad.</i>	Inc.
<i>Estudiante 5: Se supone que el punto R esta pasando por...</i>	
<i>Estudiante 3: Es 34.</i>	
<i>Estudiante 2: ¿Por qué?</i>	Nuc.
<i>Estudiante 5: Si porque se supone que el punto R está pasando por el punto O que es la mitad, y luego se divide hacia el punto S que... no me entendí.</i>	Dep.
<i>Estudiante 2: A ver opciones... a) 34</i>	Inc.
<i>Estudiante 3: ¡Que es 34!</i>	Inc.
<i>Estudiante 2: ¿Por qué?</i>	Dep.
<i>Estudiante 5: Porque es la mitad, porque pasa por el punto.</i>	Nuc.
<i>Estudiante 2: Bueno si es A.</i>	Inc.

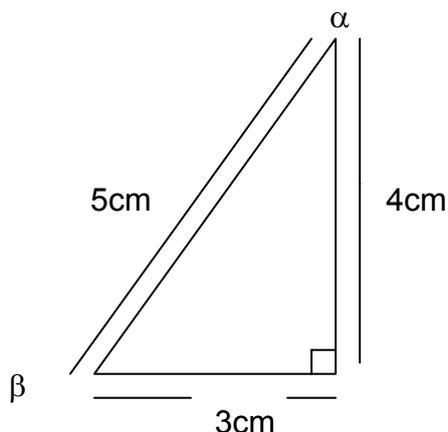
Al insistir en sus puntos de vista los alumnos, mediante una construcción conjunta del argumento, comprenden mejor ellos mismos el problema e intentan que lo entiendan sus compañeros. Por ejemplo el estudiante 5 dice: “no creo que 34 mide de S a O ¿de O a R?” mientras que los estudiantes 1 y 2 preguntan: “ ¿ Por qué 34?”; las frases expresadas por los alumnos en las que cuestionan a sus compañeros son características del razonamiento conjunto y reciben como respuesta la explicación del estudiante 5 : “pues porque la mitad de 68 es 34”...

La discusión es una forma importante de intercambio social, que provoca un tipo de pensamiento colectivo de tal manera que hace progresar el conocimiento y el punto de vista que adoptan los individuos. En un fragmento de la secuencia anterior se observa cómo se va dando el progreso del conocimiento a través de la discusión, es así que el estudiante 3 asegura : “es la mitad”, mientras que el estudiante 5 intenta dar una explicación: “se supone que el punto R esta pasando por...” este alumno es interrumpido por su compañero que insiste en defender su postura, estudiante 3: “es 34”, pero el estudiante 2 no queda conforme con la respuesta y realiza una pregunta: “¿por qué?”. De esta manera obliga al estudiante 5 a explicar y defender su opinión, estudiante 5 : “sí, porque se supone que el punto R está pasando por el punto O que es la mitad, y luego se divide hacia el punto S que... no me entendí”, luego de la discusión el estudiante 2 opta por revisar las opciones de respuesta estudiante 2: “a ver opciones... a) 34”.

En la discusión, los alumnos que colaboran entre sí, tienen que expresar y defender su opinión como el alumno 3: “¡que es 34!”; el estudiante 2 sigue sin estar de acuerdo: “¿por qué?” , por tanto el estudiante 5 se ve obligado a utilizar nuevos criterios de manera convincente: “porque es la mitad, porque pasa por el punto”; aunque no todos los integrantes del equipo llegaron a la misma respuesta, después de la discusión eligieron, por acuerdo, la opción a); estudiante 2: “Bueno sí, es A”.

A continuación se presenta un fragmento de diálogo entre un equipo que se enfrasca en una discusión de cómo se resuelve el ejercicio planteado.

**Secuencia 6.** Observa el siguiente triángulo rectángulo:



¿Cuál Es la razón de la tangente del ángulo  $\beta$ ?

- i)  $\text{Tan}(\beta) = 3/4$
- j)  $\text{Tan}(\beta) = 4/3$
- k)  $\text{Tan}(\beta) = 3/5$
- l)  $\text{Tan}(\beta) = 4/5$

Episodio	Intercambio
<i>Estudiante 1: Observa el siguiente triángulo rectángulo.</i>	Pre.
<i>Estudiante 2: ¿Cuál es la razón de la tangente del ángulo? ¡ah, no mames!</i>	
<i>Bueno eso no es el ángulo.</i>	Inc.
<i>Estudiante 1: Eso... ¿Cuál es la tangente del ángulo?</i>	Nuc.
<i>Estudiante 2: Mmmm ... ya,ya,ya, ¿cómo se hace esto? ¿cómo se hace esto? [hojean cuaderno].</i>	Inc.
<i>Estudiante 3: ¿Cuál es la tangente?</i>	Dep.
<i>Estudiante 2: No lo tenemos aquí. Eso no nos lo han dado.</i>	Inc.
<i>Estudiante 2: ¿Sí? ¿ya nos lo dieron?</i>	Inc.
<i>Estudiante 1: ¿Cuándo?</i>	Inc.
<i>Estudiante 4: Si nos lo dio.</i>	Inc.
<i>Estudiante 2: Ah, sí, la tangente</i>	Inc.
<i>Estudiante 5: Éste es el círculo</i>	Inc.
<i>Estudiante 2: Ajá es el círculo</i>	Inc.
<i>Estudiante 2: ¿Cómo se saca la tangente?</i>	Nuc.
<i>Estudiante 3: Es la C.</i>	Inc.
<i>Estudiante 1 y 2: ¿Por qué?</i>	Dep.

<i>Estudiante 3: Porque sí jajaja... porque son 3/5.</i>	Nuc.
<i>Estudiante 2: Yo digo que la tangente es la que por ejemplo...</i>	Dep.
<i>Estudiante 3: Aquí está, aquí está.</i>	Inc.
<i>Estudiante 5: Pasa por 5, 3...b 3/5 .</i>	Inc.
<i>Estudiante 3: 3/5.</i>	Inc.
<i>Estudiante 5: Es esto (señala en el dibujo de la hoja).</i>	Inc.
<i>Estudiante 3: Pero fíjense cuál.</i>	Inc.
<i>Estudiante 2: ¿Cuál es la tangente, coseno, caseno o quién sabe que más?</i>	Dep.
<i>Estudiante 1: Cuando lo vimos .</i>	
<i>Estudiante 2: No hemos visto eso .</i>	
<i>Estudiante 1: Lo vieron cuando nosotras no venimos.</i>	
<i>Estudiante 2: Entonces ¿cuál es?</i>	Dep.
<i>Estudiante 5 Es la C .</i>	
<i>Estudiante 5: ¿Cuál es la tangente güey?</i>	
<i>Estudiante 2: Es ésa.</i>	
<i>Estudiante 1: Sí es ésa.</i>	
<i>Estudiante 3: Sí.</i>	

Aunque no se llega a determinar si es correcta o no la respuesta dada por los alumnos, éstos discuten sobre si el tema se había dado en clase ya que no recordaban de qué manera se podría resolver. Se puede observar que gracias a la interacción social que se presenta, recuerdan y ayudan a que los demás recapitulen y ubiquen en qué momento obtuvieron esos conocimientos para poder aplicarlos en esta nueva situación.

En las primeras líneas, el estudiante 2 intenta encontrar el procedimiento adecuado: "... ¿Cómo se hace esto? ¿Cómo se hace esto?" [Hojean cuaderno], mientras que el estudiante 3 lanza directamente la pregunta: "¿Cuál es la tangente?". Estudiante 2 expresa: "No lo tenemos aquí. Eso no nos lo han dado", éste utiliza una herramienta social que constituye su cuaderno para apoyarse en la búsqueda del proceso de solución.

En la discusión en curso los alumnos tienen que interpretar y buscar aportaciones anteriores en sus apuntes para poder comparar la comprensión propia de la pregunta con los conocimientos adquiridos en clases anteriores; el estudiante 2: "¿Sí? ¿Ya nos lo dieron?". De esta manera enriquecen la comprensión común alcanzada. Estudiante 3 señala: "Aquí está, aquí está" y

el estudiante 5 intenta explicar al equipo lo q ha comprendido: “Pasa por 5, 3...b 3/5, es esto” (señala en el dibujo de la hoja) el equipo a su vez cuestiona y aprueba la versión que da el estudiante 5: “Es la C”. Estudiante 2: “Es ésa”, estudiante 1: “Sí es ésa”, estudiante 3: “Sí”.

7. En un triángulo rectángulo un cateto mide 9 u, el otro cateto 40 u, ¿cuánto mide la hipotenusa?

- i) 31 u
- j) 40 u
- k) 41 u
- l) 80 u

Episodio	Intercambio
<p>Estudiante 1: En un triángulo rectángulo un cateto mide 9 u, el otro cateto 40 u, ¿cuánto mide la hipotenusa? A) 31u, b) 40 u, c) 41u, d) 80 u.</p> <p>Estudiante 2: ¿9 por 9? [Comienza a escribir en la hoja de los reactivos]</p> <p>Estudiante 3: 81.</p> <p>Estudiante 2: 40 por 40.</p> <p>Estudiante 1: 160.</p> <p>Estudiante 2: Igual a.</p> <p>Estudiante 1: A 241, raíz cuadrada de 241.</p> <p>Estudiante 3: ¿De cuanto?</p> <p>Estudiante 1: De 241. Se buscan mitades.</p> <p>Estudiante 2: 6 para 21, 6 llevo 2, 4 por 2: 8 y 2</p> <p>Estudiante 1: Como que es 41 ¿no?</p> <p>Estudiante 4: Como que es 40.</p> <p>Estudiante 1: Es 41.</p> <p>Estudiante 3: Pero entonces... ¿cómo haces la raíz cuadrada?</p> <p>Estudiante 1: Según tienes que sacar mitades. No hay 46, ¿de dónde sacaste 46?</p> <p>Estudiante 3: No primero la raíz cuadrada.</p> <p>Estudiante 1: ¿Cuánto es la raíz cuadrada de 241?</p> <p>Estudiante 2: 241 mmm.</p> <p>Estudiante 1: 241.</p> <p>Maestra: 15 es de 225.</p> <p>Estudiante 2: Algo está mal aquí.</p> <p>Maestra: A ver... la raíz cuadrada. Ya separamos de 2 en 2 de izquierda a</p>	<p>Pre.</p> <p>Dep.</p> <p>Dep.</p> <p>Nuc.</p> <p>Nuc.</p> <p>Dep.</p> <p>Inc.</p> <p>Nuc.</p> <p>Inc.</p> <p>Inc.</p> <p>Nuc.</p> <p>Inc.</p> <p>Nuc.</p>

<i>derecha, buscamos un número que multiplicado por sí mismo sea cercano a 2.</i>	
<i>Estudiante 4: 6 por 6.</i>	Dep.
<i>Estudiante 1 y 2: Ajá.</i>	Inc.
<i>Maestra: 1 por 1, para 2. Se recorre el 41, se duplica. Se separa de 2 en 2, ahora de izquierda a derecha... de 2 en 2 de izquierda a derecha, se divide 14 entre 2.</i>	Nuc.
<i>Estudiante 3: A 7.</i>	Dep.
<i>Maestra: A 7.</i>	
<i>Estudiante 3: Es 14, a 9 se pasa 25.</i>	Dep.
<i>Estudiante 2: Ah, ya.</i>	Inc.
<i>Estudiante 3: Pues ensayo y error.</i>	Inc.
<i>[Estudiante 2 comienza a resolver la raíz cuadrada]</i>	Inc.
<i>Estudiante 1: 81, 41 ves es 41 ya acabamos.</i>	Nuc.

En las secuencias anteriores, la interacción social implica el uso del discurso en eventos comunicativos. En la interacción social los alumnos construyen significados, generan consensos y comparten conocimientos de los procesos que utilizan para dar solución a los reactivos.

Todo discurso tiene una estructura que remite como mínimo a una iniciación, un desarrollo y una conclusión (Wells, 2001). Cuando los alumnos manifiestan una idea, su esfuerzo se centra en el decir y producir significado para y con los demás. La interacción social propicia que el discurso exprese las ideas que los sujetos piensan y en este acto se manifiestan los procesos psicológicos que los alumnos dominan.

## **CAPÍTULO IV**

### **Discusión**

En esta investigación se realizó la descripción de una situación estandarizada y una situación dialógica de un proceso de evaluación, con el objetivo de comparar la manera en la cual los alumnos resuelven ejercicios aritméticos. El propósito de dicha comparación no es buscar cuál situación es mejor o peor sino describir y explicar los procesos (tanto cognitivos como discursivos) que los alumnos han aprendido y aplican en una situación de resolución de problemas matemáticos.

En la situación estandarizada los estudiantes son evaluados de manera individual y sin el uso de elementos significativos como apoyos sociales, notas o libros de texto; se describe el proceso cognitivo que los estudiantes deben realizar para dar solución al problema planteado; este proceso se ve como un logro individual y como el producto final. Con base en los datos obtenidos en las observaciones, es evidente que cuando los alumnos se enfrentan con un problema y deben resolverlo en un formato lápiz y papel, la evaluación del estudiante se limita a la fase de recolección de información, se categorizan los procesos que los alumnos realizan y los errores que cometen.

En la situación estandarizada los alumnos hacen uso de habilidades y destrezas para llevar a cabo el proceso de resolución de los reactivos, para llegar a la solución de los problemas matemáticos se demanda a los alumnos que realicen cálculos, procedimientos rutinarios y recurran a estrategias. Sin embargo, la calidad de la respuesta solución correcta o incorrecta nos proporciona muy poca información sobre las operaciones mentales del sujeto.

Esto no es suficiente para explicar cómo los estudiantes llevan a cabo el proceso de solución, además debe hacerse referencia a la interacción social que existe en el salón de clase.

Observamos que cuando los alumnos respondieron los reactivos asignados de modo individual, se les limitaba en la utilización de recursos materiales y sociales, así mismo mostraron comportamientos que no se toman

en cuenta regularmente, mirar a su alrededor, a sus compañeros o a su profesor, golpear la banca con el lápiz, etc.

Este tipo de comportamientos nos hacen inferir que los alumnos trataban de recordar los procedimientos o aclarar alguna duda, dudas que no eran atendidas por el profesor, ya que las instrucciones prohibían cualquier interacción durante la aplicación.

En las observaciones registradas durante la situación, dialógica se consideró la posibilidad de interactuar con sus compañeros y su profesor. Fue evidente que cuando un alumno exteriorizaba sus pensamientos todo el equipo tenía acceso a esas ideas. Sucedió, entonces, que al explicar a otro sus pensamientos expresarlos oralmente ayudaba, a los alumnos, a reflexionar sobre lo que se exponía aclarar los diferentes significados e incluso alcanzar una mayor comprensión. Por ejemplo observamos que el ejercicio 5 se llevó a cabo con un Intercambio en donde los alumnos explican y reflexionan sobre el ejercicio.

*Estudiante 3: Es 34*

*Estudiante 2: ¿Por qué?*

*Estudiante 5: Si porque se supone que el punto R está pasando por el punto O que es la mitad, y luego se divide hacia el punto S que...*

*Estudiante 3: ¡que es 34!*

*Estudiante 2: ¿por qué?*

*Estudiante 5: porque es la mitad, porque pasa por el punto.*

Aunque la solución de cada reactivo se construyó en conjunto, los integrantes que daban seguimiento al proceso se apropiaron del conocimiento de una manera independiente, lo anterior era evidente ya que explicaban con argumentos sus respuestas, lo que permitía que cada uno se implicara en discusiones o conversaciones que les obligaba a negociar sus propios criterios de solución y defenderlos ante sus compañeros.

En el ejemplo anterior los alumnos recurren en distintas ocasiones a las frases “¿por qué?”, para cuestionar, “porque” para dar respuesta o “si” de modo condicional, gracias a la incidencia de estas frases podemos afirmar que

se lleva a cabo un intercambio que les permite llegar al proceso de solución dentro de una discusión crítica y constructiva.

Éste tipo de frases expresadas por los alumnos son características del razonamiento conjunto. Mercer (2000) encontró que con mucha frecuencia los alumnos se apoyan de estas frases para expresar sus ideas, asociando su frecuente aparición con el habla exploratoria.

Según Mercer es posible observar y analizar el razonamiento cuando un diálogo está teniendo lugar, a través de tres categorías analíticas; una de ellas es el habla exploratoria descrita anteriormente. La segunda categoría propuesta es denominada habla acumulativa, en la cual los participantes aceptan el punto de vista de los otros de un modo no-crítico a través de la repetición, confirmación y elaboración. La tercer categoría es el habla de disputa, en ella los participantes no aceptan el punto de vista de los otros. El desacuerdo y la toma de decisiones individualizada lo caracterizan.

En el análisis de los datos de nuestra investigación pudimos observar que los tipos de habla de mayor incidencia fueron el de disputa y acumulativa. Esto es, que la mayor parte del tiempo los alumnos rechazaban las conclusiones de sus compañeros, sin poner nueva alternativa o se aceptaban las ideas sin revisarles críticamente..

Estos intercambios son un referente muy útil de la construcción de conocimientos que se genera cotidianamente en el aula. Durante la resolución de problemas matemáticos en una situación dialógica los estudiantes van compartiendo conocimientos, evalúan la información pertinente y consideran las alternativas. Lo que no se puede observar cuando los alumnos se enfrentan a un formato lápiz y papel de forma individual.

Las pruebas estandarizadas son parte integral del proceso de enseñar y aprender, su objetivo principal es mejorar el aprendizaje y contribuir a que las decisiones educativas sean efectivas. La información que proporcionan puede

revelar varios aspectos del propio proceso educativo, resultando una fuente de retroalimentación importante (Gronlund, 1968).

El aprendizaje es un proceso continuo, permanente, que se da dentro del ambiente cotidiano creado por las interacciones propias del aula. Si la evaluación tiene como objetivo el aprendizaje, entonces debería darse en las condiciones propias en las que éste se genera y no crear ambientes o situaciones artificiales, diferentes a las que se dieron durante el proceso de enseñanza y alejadas de la realidad en la que más adelante los estudiantes se desenvolverán.

Los factores que intervienen para el logro educativo óptimo del estudiante son producto de las demandas sociales del quehacer humano y su proceso de construcción está sustentado en abstracciones sucesivas, además de estar inmersas en el diálogo, la interacción y la confrontación de puntos de vista que ayudan al aprendizaje y a la construcción de conocimientos.

Las calificaciones o evaluaciones de los instrumentos objetivos arrojan información con respecto a la solución individual, pero no es suficiente para explicar los procesos que se llevan a cabo cotidianamente. En esta perspectiva consideramos que estas estrategias de evaluación centradas en el producto no nos informan necesariamente sobre lo que los alumnos están haciendo cuando se centran a la resolución de un enunciado matemático.

Los instrumentos objetivos arrojan información sobre la solución individual y cognitiva de los alumnos, sin embargo, no es el único tipo de indicador al que debe recurrir la evaluación, dado la complejidad del proceso evaluar se requiere de una aproximación más amplia. Consideramos que se deben diseñar situaciones evaluativas desde una perspectiva social, que tomen en cuenta el contexto en el cual se genera la construcción del conocimiento, sin limitar el uso de herramientas y/o apoyos sociales fundamentales en el proceso de enseñanza aprendizaje.

## Conclusiones

- Las pruebas estandarizadas son importantes ya que son un referente de gran utilidad en el proceso de evaluación. Sin embargo, dada la complejidad de lo que evalúan no son suficientes y por ello deberían complementarse con situaciones evaluativas donde se desarrolle la comunicación de ideas y de estrategias espontáneas que permiten a los alumnos probar soluciones e intercambiar puntos de vista.
- Con base en los datos recabados de las observaciones realizadas, en un proceso de evaluación individual se limita el apoyo del maestro para responder las dudas de sus alumnos, apoyo fundamental en el aprendizaje. Si consideramos que las dudas pueden surgir sobre el formato, o por una palabra no inteligible para el alumno, responder o aclarar dichas dudas no estaría influenciando en que la respuesta fuera correcta.
- El discurso es de gran importancia. Si bien es vital para la interacción dentro del aula, no es objeto de una consideración especial al evaluar ya que se utiliza el formato lápiz y papel como único instrumento de evaluación, sin tomar en cuenta que el discurso ofrece un medio para pensar juntos y para crear conjuntamente conocimiento.
- Debido a que en el proceso de enseñanza-aprendizaje la interacción discursiva es decisiva, porque las instrucciones proceden en gran medida, a través del lenguaje hablado y el aprendizaje, se demuestra a través del mismo, al planear una evaluación, se debe considerar el diseño de situaciones de solución más cercano a la manera en que se construyen en un salón de clases.
- El análisis de los diálogos en la práctica educativa aporta información fundamental sobre las formas de ayuda, las intervenciones didácticas y las condiciones concretas de la interacción en el aula que propician o dificultan la construcción del conocimiento. Esta información es relevante

en la elaboración de propuestas que pretendan mejorar los procesos de enseñanza y evaluación.

- Incluir la capacidad de interacción de los alumnos en las evaluaciones significa, entre otras cosas, reconocer que las interacciones tienen lugar en el aprendizaje, así como la contribución del conocimiento.
- Al destacar la actividad dialógica no se pretende demeritar la funcionalidad de las evaluaciones estandarizadas. Como se ha expuesto en el marco teórico es necesario encontrar el equilibrio adecuado entre los formatos de evaluación individual y la consideración de las interacciones del grupo entero, entre grupos pequeños y en solitario puesto que cada uno tiene sus propias ventajas y complementa a los demás.
- Es importante adoptar una orientación social, pues se considera que la comprensión personal se desarrolla de una manera más eficaz mediante las interacciones discursivas con los demás.
- La evaluación, al igual que la enseñanza-aprendizaje, es un proceso continuo de indagación donde el conocimiento que se evalúa ha sido construido por los estudiantes y se transforma continuamente por la forma en que el enseñante y los estudiantes comprenden en el contexto de actividad conjunta. Los profesores deben elaborar situaciones complementarias a los instrumentos objetivos de evaluación que tomen en cuenta las interacciones que se dan o propician al momento de dar la clase.

## REFERENCIAS

Acevedo, J. (2005). TIMMS Y PISA. Dos proyectos internacionales de evaluación del aprendizaje escolar en ciencias. *Revista eureka sobre enseñanza y divulgación de las ciencias* vol. 2 n° 3 pp. 282- 301.

Bazán, R. A., Castañeda, F. S., Macotela, F. S. y López, V. M. (2004). Evaluación del desempeño en lectura y escritura. Aportes empíricos a la noción de componentes lingüísticos en el cuarto grado de primaria. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*. Vol. IX, núm. 023 pp. 841-861.

Backhoff, E., Andrade, E., Roy, L. Tanamachi, M., Bouzas, A., Sánchez, A. y Peón, M., (2005) *Estudio Comparativo de la Educación Básica de México: 2000- 2005*. México, INEE.

Backhoff, E., y Contreras, L. (2007). Metodología para elaborar exámenes criteriosales alineados con el currículo. En: *Educación, aprendizaje y cognición, teoría en la práctica*. México, Manual Moderno.

Backhoff, E., y Solano, G. (2003) Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y ciencias Naturales (TIMSS): *Resultados de México en 1995 y 2000*. México, INEE.

Backhoff, E., Sánchez, A., Peón, M., Monroy, L. y Tanamachi, M. (2006) Diseño y desarrollo de los exámenes de la calidad y el logro educativos. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*. Vol. 11, num. 29 pp. 617-637.

Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona, Paidós.

Bollás, P. (1996). "Procedimientos infantiles en la resolución de operaciones de adición y sustracción". En: Hernández, A. et al. *Antología y programa del curso consejo y educación*. México. UPN. Pp. 94-98.

Campos, M. y Gaspar, S. (2004). Análisis de la intertextualidad y la argumentación en el contexto educativo. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*. Núm. 21 Vol. IX. Pp. 425-449.

Candela, A. (1999). *Ciencia en el aula. Los alumnos entre la argumentación y el consenso*. México, Paidós.

Castañeda, S. (1993). Un marco de trabajo neurocomputacional para el estudio de la estructuración del conocimiento a partir de lo leído. *Revista Latina de pensamiento y lenguaje*. Vol. 1 núm. 2, Pp. 2001-232.

Cazden, B. C. (1991). *El discurso en el aula. El lenguaje de la enseñanza y el aprendizaje*. Madrid, Paidós.

Coll, C. y Onrubia, J. (2001). Estrategias discursivas y recursos semióticos en la construcción de sistemas de significados compartidos entre profesor y alumnos. *Investigación en la escuela 2001*. Barcelona. pp. 21-31

Coll, C. y Onrubia, J. (1995). El análisis del discurso y la construcción de significados compartidos en el aula. *Signos, teoría y práctica de la educación*. N° 14. Pp. 4-19.

Coll, C. Palacios, J. y Marchesi, A. (2001) *Compilación de Desarrollo Psicológico y educación 2. Psicología de la educación escolar*. Madrid, Alianza.

Coll, C. y Solé, I. (2000). Los profesores y la concepción constructivista. En: Coll, c. Martín, E., Mauri, T., Miras, M., Onrubia, J. , Solé, I. & Zabala, A. *El constructivismo en el aula*. Barcelona, Graó. Pp. 7- 23.

Cortés, J., Backhoff, E., Organista, J. (2005) Análisis de estrategias de cálculo estimativo en escolares de secundaria considerados buenos estimadores. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*. Año/ vol. 10, Núm. 025.

De la Concha, Z. G. (2003). Cómo motivar el aprendizaje de las matemáticas. *Revista en línea. Rompan filas*. Año 12 núm. 69

De la Mata, B. M. (1993). Interacción social, discurso y aprendizaje en el aula. En: *Investigación en la escuela*. núm. 21 pp. 21-29.

De Vega, M, (1992). *Introducción a la psicología cognitiva*. Madrid, Patria.

Drummond, S., Fernández, M. y Velez, M. (2000). Habla exploratoria, razonamiento conjunto y solución de problemas en niños de primaria. En: *La psicología social en México*. Vol. VIII, México: Asociación Mexicana de Psicología social. Pp. 403-410.

Garton, A. y Pratt, L. (1991). *Aprendizaje y proceso de alfabetización: el desarrollo del lenguaje hablado y escrito*. Barcelona: Paidós. Pp. 79-99.

Gronlund, N. (1968). *Elaboración de test de aprovechamiento*. México, Trillas.

Hernández, G (2004). Las exposiciones de los alumnos en clase: un análisis desde el discurso expositivo experto. *Revista estudios de Lingüística aplicada*. núm. 39.

Instituto Nacional para la Evaluación de la educación (2006). *El aprendizaje del español, las matemáticas y la expresión escrita en la educación básica en México*. México. INEE.

Instituto Nacional para la Evaluación de la educación (2005 a). *Excale, exámenes de la Calidad y el Logro Educativos. Proceso de construcción y características básicas*. México. INEE.

Instituto Nacional para la Evaluación de la educación (2005 b). *La calidad de la educación básica en México. Informe anual 2005*. México. INEE.

Instituto Nacional para la Evaluación de la educación (2004). *La calidad de la educación básica en México. Resultados de evaluación educativa 2004*. México. INEE.

Instituto Nacional para la Evaluación de la educación (2005 c). *Panorama Educativo de México. Indagación del sistema educativo nacional*. México. INEE.

Instituto Nacional para la Evaluación de la educación (2005 d) *PISA para docentes. La evaluación como oportunidad de aprendizaje*. México. INEE.

Instituto Nacional para la Evaluación de la educación (2006). *Políticas y sistemas de evaluación educativa en México. Avances, logros y desafíos*. México. INEE.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (2005 e). *Preguntas y sentido de las respuestas en las pruebas nacionales*. México. INEE.

Instituto Nacional para la Evaluación de la educación (2005 f). *¿Qué es el INEE? Sus fines y estrategias al servicio de la sociedad*. México. INEE.

Instituto Nacional para la Evaluación de la educación (2005 g). *Resultados de logro educativo. Factores que lo explican*. México. INEE.

Jiménez, A. y Díaz, J. (2003) *Discurso de aula y argumentación en la clase de ciencias: cuestiones teóricas y metodológicas*. *Revista Enseñanza de las ciencias*, 21, (3).

Lacasa, P. (1994). *Aprender en la escuela, aprender en la calle*. España, Visor.

López, M. Y Castañeda, S. (1990) Criterios metodológicos para la evaluación de programas instruccionales asistidos por computadora. *Revista Mexicana de Psicología*. Vol. 7 Núm. 1 y 2. pp 173-178.

López, J. y Moreno, M. (1996). Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias (TIMSS). *Revista de educación*. Vol. 3. Núm. 11 pp. 315-336.

Leach, J. y Scott, P. (2003) *Individual and Sociocultural Views of Learning in Science Education*. *Science & Education* 12 pp. 91-113

Marín S, (2002). *Matemáticas y aprendizaje de las matemáticas en equipos cooperativos (A. M. E. C.)\_Revista campo abierto numero 22.*

Mercer, N. (2001). *Palabras y mentes. Cómo usamos el lenguaje para pensar juntos.* Barcelona, Paidós.

Ortiz, J, (2004) *Pensamiento numérico y algebraico. Revista PARADIGMA, Vol. 25 numero 1.*

Pérez, C. (2005, septiembre). Análisis desde una perspectiva social del modo en como razona un grupo de estudiantes de secundaria sobre un sistema complejo diseñado con el software de modelamiento VnR. Presentado en el I Congreso de Tecnologías de la Información y la Comunicación en la Enseñanza de las Ciencias TICEC05. La Plata, Argentina.

Pimm, D. (1990) *El lenguaje matemático en el aula.* Madrid, ministerio de educación y cultura: Morata.

Pinelo, F. (2005) *La evaluación en el proceso enseñanza –Aprendizaje desde la perspectiva del alumno REMO: volumen III número 6.*

Planas, N. (2004). *Análisis discursivo de interacciones sociales en un aula de matemáticas multiétnica.* Revista de educación, num., 334

Rochera, J., Colomina, R. y Barberá, E. (2001). Optimizar los aprendizajes de los alumnos a partir de los resultados de la Evaluación en matemáticas. *Investigación en la escuela.* pp. 33-44

Rodríguez, G.R. (2005). *México en los resultados PISA 2003. Una interpretación no catastrofista. Revista Mexicana de Investigación Educativa.*

Rogoff, B. (1993). *Apéndices del pensamiento: el desarrollo cognitivo en el contexto social.* Barcelona, Paidós.

Saldaña, G, (1997). *La enseñanza de las matemáticas una encuesta y una propuesta.*\_Revista investigación y práctica educativa.

Santos, T. L. (1997). La transferencia del conocimiento y la formulación o rediseño de problemas en el aprendizaje de las matemáticas. *Revista Mexicana de Investigación Educativa.* Vol. 2, núm. 3 pp. 11-30

Schoultz, J., Säljö, R. y Wyndhamn, J. (2001). Conceptual knowledge in talk and text: What does it take to understand a science question? *Instructional Science* 29. pp. 213-236.

Secretaría de Educación Pública (1993). *Plan y programas de estudio Educación Básica. Primaria.* México, SEP.

Secretaría de Educación Pública (2007). *Manual para el coordinador de aplicación.* México, SEP.

Sinclair, J. y Coulthard, M. (1975). *To word an Analysis of discourse: The English used by teacher an pupils*. Oxford: oxford university Press.

Solano, G. (2004). Pruebas prácticas en la evaluación del aprovechamiento escolar: métodos, ventajas y posibilidades. En: S. Castañeda, *Cognición y pensamiento: teoría y práctica en la investigación educativa*. México: Manual Moderno.

Vigotsky, L. S. (1996). *Pensamiento y lenguaje: teoría del desarrollo cultural de las funciones psíquicas*. México. Quinto sol.

Wells, G. (2001). Categorías para el análisis de la organización secuencial del discurso. *Indagación dialógica*. Buenos Aires, Paidós Ibérica.