UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

MAESTRÍA EN DESARROLLO EDUCATIVO
LÍNEA: EDUCACIÓN MATEMÁTICA

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE TRIGONOMETRÍA:

ESTRATEGIAS DE ALUMNOS DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRA EN DESARROLLO EDUCATIVO

PRESENTA:

XÓCHITL YARASETH REYES CRUZ

DIRECTOR DE TESIS

DR. RODRIGO CAMBRAY NÚÑEZ

MAYO DE 2009

TABLA DE CONTENIDOS

RESUMEN

Las estrategias de resolución de problemas de trigonometría empleadas por alumnos de educación secundaria en México constituyen el tema y el motivo de la investigación para esta tesis de maestría. Se deseaba conocer cómo diseñan un plan para resolver un problema de trigonometría, cómo lo llevan a cabo, y si es que los alumnos se interesan en verificar la estrategia que emplearon para resolver determinado problema.

Esta investigación se enfocó en conocer el tipo de estrategias empleadas por los alumnos en la resolución de los problemas de trigonometría planteados, y en reconocer los conceptos y conocimientos matemáticos puestos en práctica al resolver problemas.

Se hizo una revisión de la literatura dando prioridad a los documentos oficiales publicados por la SEP. En particular, se compararon el Plan de estudios de 2006 y el Plan de estudios de 1993. Se revisaron los problemas de trigonometría propuestos en el *Libro para el maestro* y las actividades propuestas en el *Fichero de Actividades Didácticas.* Se realizó una selección de problemas de trigonometría organizándolos en una secuencia de actividades, la cual se probó con un grupo piloto; se le hicieron ajustes y finalmente se aplicó con un grupo de trabajo. Luego de la aplicación de la secuencia de actividades con el grupo de trabajo se llevaron a cabo cinco entrevistas a través de problemas de trigonometría y se describieron las estrategias encontradas.

Las conclusiones obtenidas son el resultado de la aplicación de la secuencia de actividades y de las entrevistas con los alumnos en la resolución de problemas de trigonometría.

AGRADECIMIENTOS

- Agradezco a mis papás, Ezequiel Reyes Lazo y Xóchitl N. Cruz García, y a mis hermanas, Ixshel Donají e Ireldi, el cariño de siempre y el apoyo que me brindaron durante la realización de mis estudios de maestría en la Universidad Pedagógica Nacional.
- Agradezco al Dr. Rodrigo Cambray Núñez dirigir mi tesis y el valioso tiempo que dedicó a orientarme, guiarme y apoyarme en el desarrollo de esta investigación.
- Agradezco al Conacyt el apoyo económico brindado como auxiliar de investigación en el marco del proyecto No. 57044 "Los Sistemas algebraicos computarizados como herramienta para fortalecer la enseñanza-aprendizaje del álgebra de la escuela secundaria".
- Agradezco al Dr. Tenoch Esaú Cedillo Ávalos permitirme colaborar como auxiliar de investigación en el proyecto bajo su responsabilidad, “Los Sistemas algebraicos computarizados como herramienta para fortalecer la enseñanza-aprendizaje del álgebra de la escuela secundaria", así como su asesoría en esta tesis.
- Agradezco a la Universidad Pedagógica Nacional haberme dado la oportunidad de formarme en la investigación en educación en la línea de educación matemática, y permitirme llegar a ser Maestra en Desarrollo Educativo.
- Agradezco a la Secretaría de Educación Pública otorgarme *beca-comisión* durante cinco semestres para hacer mis estudios de maestría y la realización de esta tesis.
- Agradezco al Dr. Eugenio Díaz Barriga Arceo, al Dr. Gonzalo López Rueda y a la Dra. Mariana Luisa Sáiz Roldán; por haber revisado detenidamente este trabajo, por sus observaciones y los consejos para mejorar esta tesis.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

El problema de investigación

El problema de investigación de esta tesis es determinar qué estrategias utilizan alumnos de educación secundaria en la resolución de problemas de trigonometría. En general, se espera conocer el nivel de desarrollo de los alumnos en la resolución de problemas, desde diseñar un plan, hasta llevarlo a cabo y verificarlo. También se espera reconocer el tipo de estrategias empleadas en la resolución de problemas de trigonometría planteados, así como el uso de conceptos y conocimientos matemáticos.

En el desarrollo de esta investigación acerca de las estrategias que emplean alumnos de educación secundaria en México al resolver problemas de trigonometría, se retomó el enfoque de enseñanza de las matemáticas propuesto por la Secretaría de Educación Pública [SEP] y los temas de geometría para tercer grado de educación secundaria.

La educación secundaria fue reformada y declarada componente fundamental y etapa de cierre de la educación básica obligatoria en 1993, año en que entró en vigor un nuevo Plan de estudios. En el enfoque didáctico incluido en el *Libro para el maestro* (Alarcón *et al.*, 2001), propuesto para el estudio, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria, se expresa que la resolución de problemas tiene un papel esencial, pues con ello se pretende “provocar el interés por su estudio [de las matemáticas] y lograr aprendizajes significativos proponiendo situaciones interesantes, que impliquen un reto y que en su proceso de resolución [los estudiantes] logren ir aprendiendo y consolidando diversas nociones, así como el uso de procedimientos convencionales y de distintos recursos como tablas y gráficas, al tiempo que se apropian del lenguaje matemático” (Alarcón *et al.,* p. 16).

La SEP dio a conocer en 2006 la “Reforma a la Educación Secundaria” [RES]. Por tal motivo se publicó en el *Plan de estudios* 2006 el nuevo programa y el enfoque de matemáticas (SEP, 2006). El contenido del enfoque didáctico planteado en el Plan 2006 no cambió con respecto al propuesto en el plan anterior. Lo que se plantea es continuar y reforzar la didáctica de las matemáticas bajo la perspectiva de la resolución de problemas.

En el documento del enfoque de matemáticas del Plan 2006 se menciona que “El conocimiento de reglas y algoritmos, fórmulas y definiciones sólo es importante en la medida en que los alumnos lo pueden usar, de manera flexible, para solucionar [resolver] problemas” (SEP, 2006, p. 11). Se trata entonces de que los profesores analicen y propongan problemas interesantes y bien articulados. La finalidad de este enfoque didáctico consiste en que los alumnos aprovechen lo que ya saben, avanzando a su vez en el uso de técnicas y razonamientos cada vez más eficaces.

La metodología didáctica basada en el enfoque del Plan 2006 pretende que las actividades de estudio dentro del salón de clases despierten el interés de los alumnos y los lleven a reflexionar, a encontrar diferentes formas de resolver problemas y a dar argumentos que validen sus resultados.

El uso de la resolución de problemas, analizado desde el enfoque de enseñanza propuesto por la SEP, es un recurso importante para alcanzar los propósitos de la enseñanza de las matemáticas en educación secundaria, entre ellos: ver lo general en lo particular (por ejemplo, al usar ecuaciones con una o dos incógnitas en la resolución de problemas) y manejar información al analizar, organizar, representar e interpretar datos provenientes de diversas fuentes.

En este enfoque, valiéndose de la resolución de problemas, se asienta nuevamente que el proceso de aprendizaje puede hacerse significativo si está más apoyado en el razonamiento que en la memorización. Su eje principal es la construcción de significados de distintos conceptos que se utilizan en matemáticas, mediante el uso de situaciones problemáticas que tengan sentido para los alumnos, permitiéndoles generar conjeturas y comunicarlas.

A partir de lo descrito en los párrafos anteriores, acerca del enfoque propuesto en los programas de matemáticas en educación secundaria y la didáctica de las matemáticas bajo la perspectiva de la resolución de problemas, aunado al interés personal por la resolución de problemas tanto en el desempeño como profesora de matemáticas en una escuela de educación secundaria como por la preocupación por la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en general, resulta importante en la labor docente conocer las estrategias que los alumnos emplean al resolver problemas.

La trigonometría en particular es el tema de investigación en esta tesis de maestría por la relevancia que conlleva ser el último de los temas de geometría en los programas de matemáticas para secundaria, además de ser parte del plan de estudios en bachilleratos y preparatorias de nuestro país.

Descripción de cada capítulo

Esta investigación se reporta dividida en cinco capítulos: el primero es esta "Introducción"; el segundo, "Literatura", el tercero, "Metodología"; el cuarto, "Resultados", y el quinto, "Conclusiones".

El Capítulo I contiene una introducción al problema de esta investigación y en él se describen datos y situaciones propuestas en los documentos oficiales como el Plan y Programa de Estudios de 1993 y 2006, el *Fichero de Actividades Didácticas* [FAD] para matemáticas, así como el Enfoque (didáctico) y problemas propuestos en el *Libro para el Maestro* [LM] de matemáticas, publicados por la SEP.

En el Capítulo II se describe la revisión de la literatura que fue útil en esta investigación: se incluyó literatura referente a la resolución de problemas en matemáticas; se revisó la terminología sobre "resolución de problemas" y "solución de problemas"; se determinó, con la ayuda de la literatura, qué es la resolución de problemas y lo que se reporta de diversas investigaciones acerca de las estrategias que los alumnos emplean. En este capítulo también se incluye una sección en la que se describe la diferencia entre problemas que se resuelven mediante el teorema de Pitágoras y aquellos que se resuelven con el uso de la trigonometría. De esta sección surgió un apéndice (apéndice 2.1), en el que los problemas de aplicación del teorema de Pitágoras contenidos en el *Libro para el Maestro* se resuelven mediante una estrategia distinta (empleando métodos diferentes al teorema de Pitágoras). En este mismo capítulo se describen tres investigaciones acerca de la enseñanza de la trigonometría en la educación secundaria. La primera de ellas forma parte del módulo de geometría del proyecto "Tecnología y

Educación a Distancia en América Latina y el Caribe”, de la serie “Enseñanza de las matemáticas”. La segunda investigación es sobre la historia de las matemáticas en la enseñanza de la trigonometría y el teorema de Pitágoras. La tercera investigación es “Construcción de significados para las razones trigonométricas mediante un aparato virtual diseñado con Cabri”, de la sede de la Universidad Pedagógica Nacional en el estado de Sonora.

El Capítulo III, Metodología, se dividió en 3 apartados principales para describir los pasos que se siguieron en esta investigación. En la primera parte se presenta una revisión de los documentos oficiales publicados por la SEP, como el Plan de estudios de 2006, que se comparó con el Plan de estudios de 1993. Se revisaron los problemas de trigonometría propuestos en el *Libro para el Maestro* y las actividades propuestas en el *Fichero de Actividades Didácticas*. En la segunda parte del Capítulo III se describe cómo se realizó una selección de problemas de trigonometría. Dichos problemas se organizaron formando una secuencia de actividades, la cual se probó con un grupo piloto; se le hicieron ajustes y finalmente se aplicó con un grupo de trabajo. En la última parte del Capítulo III se describe la puesta en práctica de la secuencia de actividades con el grupo de trabajo y la aplicación de entrevistas a través de problemas de trigonometría. Cabe señalar que las entrevistas con los alumnos constituyeron el instrumento mediante el cual se conocieron cercanamente las estrategias empleadas por los alumnos para resolver problemas de trigonometría.

En el Capítulo IV, Resultados, se reporta lo obtenido del análisis de los documentos oficiales, la selección, aplicación y ajustes de la secuencia de problemas de trigonometría, y, finalmente, los resultados obtenidos con el grupo de trabajo (tanto los de la puesta en práctica de la secuencia de actividades como los obtenidos en las entrevistas).

En el Capítulo V se presentan las conclusiones de la aplicación de la secuencia de actividades en el grupo de trabajo. También se presentan las conclusiones sobre las estrategias que emplearon los alumnos participantes como sujetos en esta investigación al resolver los problemas de trigonometría después de haber revisado los resultados obtenidos en las entrevistas. Las conclusiones mostradas en este capítulo están relacionadas con las preguntas que orientaron esta investigación:

- ¿Qué características deben tener los problemas de trigonometría en la educación secundaria para que se favorezca “la reflexión y la búsqueda de nuevas explicaciones o procedimientos que aproximen a los alumnos hacia la formalización de conocimientos matemáticos”?
- ¿Cómo favorecen los problemas de trigonometría descritos en el *Libro para el maestro* “la reflexión y la búsqueda de nuevas explicaciones o procedimientos que aproximen a los alumnos hacia la formalización de conocimientos matemáticos”?
- ¿Qué estrategias emplean los alumnos de secundaria al resolver los problemas de trigonometría propuestos en esta investigación?
- ¿Qué aprendizajes se generan en los alumnos de secundaria con sus procesos de resolución de los problemas de trigonometría propuestos en esta investigación?

CAPÍTULO II

LITERATURA

En este capítulo se describe la revisión de la literatura que fue útil en esta investigación. Se presenta esta descripción en cuatro apartados principales: el primero, “Acerca de la resolución de problemas”, se subdividió en tres partes; el segundo es “Estrategias de los alumnos en la resolución de problemas”; el tercer apartado es “Diferencia entre los problemas que pueden resolverse con el teorema de Pitágoras y los que se resuelven con el uso de la trigonometría”; y el cuarto apartado es “Investigaciones acerca de la enseñanza de la trigonometría en educación secundaria”.

Acerca de la resolución de problemas

¿Qué es un problema de matemáticas?

Antes de pretender dar a resolver problemas de matemáticas a los alumnos, conviene comprender lo que representan (los problemas matemáticos) en la educación secundaria, no con la intención de dar una definición, sino para reconocer las características ideales hacia el logro de los propósitos de la enseñanza de las matemáticas en la educación secundaria.

En el enfoque del Plan de estudios de 1993 se describe que un problema de matemáticas es una ocasión que debe representar al alumno algo más que el ejercicio de procedimientos aprendidos. Se destaca que la intención no sea de carácter evaluativo simplemente, al contrario, se pretende que sea una situación que resulte interesante al alumno y que a su vez esté en relación con los propósitos de enseñanza.

Un problema de matemáticas en la escuela alude a una “situación didáctica que debe ser modelada para encontrar la repuesta a una pregunta que se deriva de la misma situación” (Parra, 1996, p. 14). En otras palabras, un problema debe dar oportunidad de utilizar las nociones conocidas para descubrir o asimilar nuevos conocimientos, los cuales a su vez servirán para resolver nuevos problemas.

Luceño (1999) afirma que un problema es “toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarla”, y añade que “la vía para pasar de una situación o planteamiento inicial a la nueva situación exigida, tiene que ser desconocida; cuando es conocida deja de ser un problema” (p. 13). Una idea más concreta de “un verdadero problema en matemáticas puede definirse como una situación que es nueva para el individuo a quien se pide resolverla” (NCTM, 1970, p. 11). Para Sánchez y Fernández (2003, p. 132) un problema matemático es “un problema que requiere conocimientos matemáticos para resolverlo y para el cual no existe un camino directo o inmediato para obtener su solución o soluciones”.

Valiente (2000) define un problema de matemáticas como “el enfrentamiento con situaciones novedosas y desconocidas” (p. 40). Sin embargo, Comellas y Serra (2000, p. 87) van más allá al referir que “un problema no puede ser un ejercicio cerrado para aplicar mecánicamente una técnica acabada de aprender, sino que debe ser auténticamente una situación problemática”.

La situación alude a una diferencia entre los tipos de problemas ideales o útiles para la clase de matemáticas de acuerdo con el enfoque didáctico; con esto, “un problema rico enseña a no desanimarse, a intentar otros caminos, a colaborar en grupo, al abordar la situación desde diferentes ángulos —incluso desde fuera de las matemáticas— obliga a contextualizar los conceptos aprendidos" (Comellas y Serra, 2000, p. 88).

Para Peralta (1995, p. 81) un buen problema matemático será el que:

- Represente un desafío a las capacidades deseables matemáticas.
- No deje bloqueado de entrada a quien lo va a resolver, es decir, que esté a la altura de las posibilidades de aquel a quien se le propone.
- Tenga interés por sí mismo, independientemente de que esté relacionado con otras materias o con la vida cotidiana o que tenga utilidad práctica.
- Estimule en quien lo resuelva el deseo de proponerlo a su vez a otras personas.
- No sea un problema de <<trampa>>.

La NCTM (1970) también considera la existencia de determinadas condiciones para valorar si una situación es un verdadero problema para el individuo (p. 12):

1.- El individuo tiene un propósito deseado y claramente definido que conoce conscientemente.

2.- El camino para llegar a esa meta está bloqueado, y los patrones fijos de conducta del individuo, sus respuestas habituales, no son suficientes para romper ese bloqueo.

3.- Tiene que haber deliberación. El individuo toma consciencia del problema, lo define más o menos claramente, identifica varias hipótesis (soluciones) posibles y comprueba su factibilidad.

Un problema de matemáticas debe ser contextualizado con la realidad de los alumnos, por tanto es importante que cumpla con determinadas características. Como lo citan Sánchez y Fernández (2003), la resolución de problemas “facilita el conocimiento de las destrezas básicas [de los alumnos], los conceptos fundamentales [de las matemáticas] y la relación entre ambos” (p. 123).

Acerca de la función de los problemas de matemáticas en clase, Mendoza (2004) comentó que “son principalmente una vía para abordar contenidos nuevos; sin embargo, no tienen ese sentido en las clases observadas” (p. 98), ya que se emplean más los problemas para ejercitar, en los que no se propone nada nuevo y en general no se relacionan con el contexto de los alumnos que los resuelven.

¿Resolución de problemas o solución de problemas?

El término *solución* en el contexto de las matemáticas está definido por el diccionario de la Real Academia Española como “cada una de las cantidades que satisfacen las condiciones de un problema o de una ecuación” (*Diccionario de la lengua española,* 2001). También se define *solución* como la “acción y efecto de resolver una duda o dificultad”. Bajo estos términos el sentido de la expresión “solución de problemas” en el enfoque de matemáticas del Plan 2006 (SEP, 2006, p. 11) se entiende como el proceso para hallar la solución del problema. (*Solucionar* significa resolver un asunto, hallar solución o término a un negocio.)

En el caso del término *resolución,* trasladado al ámbito de las matemáticas, también se refiere a hallar la solución de un problema; *resolución* (del latín *resolutĭo*, -*ōnis*) es la acción y efecto de resolver o resolverse; *resolver* (del latín *resolvĕre*; de *re*, y *solvĕre*, soltar, desatar) es tomar determinación fija y decisiva; resumir, epilogar, recapitular; hallar la solución de un problema; desatar una dificultad o dar solución a una duda; decidirse a decir o hacer algo (*Diccionario de la lengua española,* 2001).

En general, la expresión “resolución de problemas” se utiliza para expresar el proceso para llegar a la solución de un problema. En el caso de los libros traducidos del inglés al español, hay un tratamiento indistinto de los términos solución y resolución (de problemas) para describir el proceso de hallar la solución de un problema (*e. g.*, NCTM, 1970; Stodolsky, 1999; Polya, 1991). Como se verá más adelante, el uso de la resolución de problemas en las matemáticas es definido por la función didáctica con que trabaja cada autor y en ninguno de los casos se refiere al resultado de un problema.

La expresión “solución de problemas” citada en este documento por los diferentes autores consultados se expresa como sinónimo de la expresión “resolución de problemas”, que es parte del interés de esta investigación.

¿Qué es la resolución de problemas?

La resolución de problemas, según Ortiz (2001, p. 59), es vista como una búsqueda que conlleva un proceso, que detona actitudes de reto y poder en los sujetos; dinamiza y reorganiza las ideas referidas a la temática del problema; requiere exploración del entorno del problema, permitiendo una formulación más precisa del mismo, y que pone en marcha un conjunto de acciones para su solución reestructurando las concepciones implicadas y conformando una respuesta posible.

La resolución de problemas en el ámbito escolar puede expresarse como una capacidad general, vinculada a las capacidades y habilidades cognitivas. Parra (1996) se refiere a la resolución de problemas como “la coordinación de experiencias previas, conocimiento e intuición, en un esfuerzo para encontrar una solución que no se conoce" (p. 15).

La enseñanza de las matemáticas por medio de la resolución de problemas "permite que los alumnos desarrollen una gran habilidad y destreza para aplicar los conocimientos que en alguna forma ya traían, un interés incrementado por la serie de actividades que con ese carácter se desarrollan en el aula o fuera de ella y una gran capacidad para establecer los vínculos entre los datos en el problema diseñado" (Valiente, 2007, p. 57).

Para que realmente suceda todo lo esperado en relación con el aprendizaje de las matemáticas, la NCTM (1970) pone énfasis en que "al estudiante se le debe dar también la oportunidad de que realmente resuelva problemas" (p. 12). Dichos problemas pueden utilizarse de acuerdo con tres modelos propuestos por Charnay (1994):

1.- El problema como criterio del aprendizaje (modelo llamado "normativo").

2.- El problema como móvil del aprendizaje (modelo llamado "iniciativo").

3.- El problema como recurso de aprendizaje (modelo llamado "apropiativo").

En cualquier caso, "si deseamos llegar a ser hábiles en la [re]solución de problemas, tenemos que resolver problemas" (NCTM, 1964/1970, p. 12).

Kilpatrick (citado en: Sánchez y Fernández, 2003, p. 123) también resume el uso de la resolución de problemas en tres direcciones:

1.- Los problemas se analizan como vehículo para lograr algunas metas curriculares.

2.- La resolución de problemas se considera como una de tantas habilidades que se deben enseñar en el currículo.

3.- La resolución de problemas se ve como un arte en el sentido de simular la actividad matemática dentro del aula.

Sin embargo, el propósito de la reforma a la enseñanza de las matemáticas, que solicita que los alumnos planteen problemas y los resuelvan, es uno de los cambios escasamente logrados. Pocos son los casos en que tal actividad se realiza, según los datos obtenidos por Mendoza (2004, p. 100).

La resolución de problemas es un proceso en el cual se combinan los conocimientos, reglas, técnicas y destrezas, y constituye la auténtica esencia de las matemáticas, así como la forma más elevada del aprendizaje (Peralta, 1995, p. 82).

Estrategias de los alumnos en la resolución de problemas

A grandes rasgos, quienes hemos resuelto problemas matemáticos podemos mencionar que es un proceso en el que se realizan diversas acciones, desde explicar el problema, hasta encontrar a través de observaciones y operaciones (mentales o escritas) lo que llamamos la solución, donde lo más importante es validarla, para asegurar que es verdadera para el problema que resolvemos.

Sin embargo, en el proceso intervienen diversas estrategias de resolución al permitir que los alumnos construyan sus propios caminos. Para el profesor es fundamental conocer los procedimientos que han seguido sus alumnos (cada uno de ellos), pues le permite replantear el problema, hacerles preguntas que les permitan validar su resultado o rechazarlo, además de que es el momento en el que se puede reconocer el nivel de relaciones y aplicaciones de los alumnos en cuanto a lo que ya conocen.

A continuación se describen las estrategias en la resolución de problemas de matemáticas reportadas por Santos (1993) y Valiente (2000). Santos (1993) menciona algunas estrategias en la resolución de problemas de matemáticas planteados a alumnos de primaria:

a).- El método pictórico.

b).- El método de ensayo y error:

  - Método de intercambio
  - Método de conteo
  - La construcción de una lista

c).- El método de correspondencia.

d).- El método semialgebraico.

e).- El método algebraico.

En general, para resolver un problema Valiente (2000, p. 42) señala los siguientes pasos:

- Entender el enunciado.
- Determinar los datos y las incógnitas.
- Establecer si los datos son suficientes.
- Analizar el enunciado para ver si es un caso particular, límite general o ambiguo.
- Redactar el problema en forma distinta.

- Reducir el problema a otro más sencillo si es posible.

- Estudiar si se pueden dar ejemplos o contraejemplos.

- Elegir un código de referencia simbólico para vincular datos con incógnitas.

- Establecer un plan de resolución.

- Apoyarse en un boceto cuando ello sea posible.

- Analizar si se tienen los recursos matemáticos para resolverlos.

- Hacer una estimación del resultado al que se debe llegar.

- Hacer ensayos con los datos del problema.

- Establecer hipótesis.

- Usar el ensayo y error.

- Realizar los cálculos necesarios.

- Analizar si el resultado tiene sentido para los datos proporcionados.

- Comprobar el resultado.

- Dar el resultado en forma completa.

- Representar gráficamente tanto el problema como su solución.

- Ver si ese problema se puede cumplir en otros contextos.

No siempre resulta sencillo ubicar el camino que siguieron los alumnos al resolver un problema, pues mucho de ello puede no quedar escrito o mostrado evidentemente. ¿Qué hacer para conocer las estrategias de los estudiantes? Lo más natural será observar, preguntar, revisar los apuntes de los alumnos al resolver el problema.

Davis (1984; citado en: Santos, 1996, p. 101) describe una entrevista a través de un problema, donde se pide al alumno describir sus ideas, para facilitar la toma del tiempo de verbalización y profundidad de dichas ideas.

Santos (1996, p. 103) menciona que además de una entrevista es primordial determinar el tipo de problema que se debe plantear al alumno para que se presenten cualidades mostradas por ellos, como son:

- Nivel de desarrollo de las fases de entendimiento, diseño de un plan y su implantación, y de la visión retrospectiva.
- El tipo de estrategias usadas en la resolución del problema.
- La presencia de conceptos y conocimientos matemáticos.
- El tipo de control y automonitoreo usado por el estudiante al resolver el problema.
- Las influencias del entrevistador.

George Polya estudió la importancia de los problemas dentro de las matemáticas, y elaboró un procedimiento para ayudar a la resolución de problemas. Él distinguió las cuatro fases siguientes como las que se necesitan para resolver un problema (Polya, 1944/1965):

1.- Comprender el problema.

2.- Concebir un plan: Determinar la relación entre los datos y la incógnita. De no encontrarse una relación inmediata, puede considerar problemas auxiliares. Obtener finalmente un plan de solución.

3.- Ejecución del plan.

4.- Examinar la solución obtenida (o visión retrospectiva).

Peralta (1995) escribió algunas observaciones respecto del método de Polya: “En cuanto al procedimiento de resolución de problemas, es efectivamente un excelente plan sumamente detallado para cumplir ese objetivo. Hay que tener en cuenta que la actividad creadora es algo muy personal y, en consecuencia, muy variada, por lo que no admite normas rígidas” (p. 90).

En la figura 1.1 siguiente, realizada por Luceño (1999, p. 18) se resumen las fases de resolución de problemas según el modelo descrito de Polya.

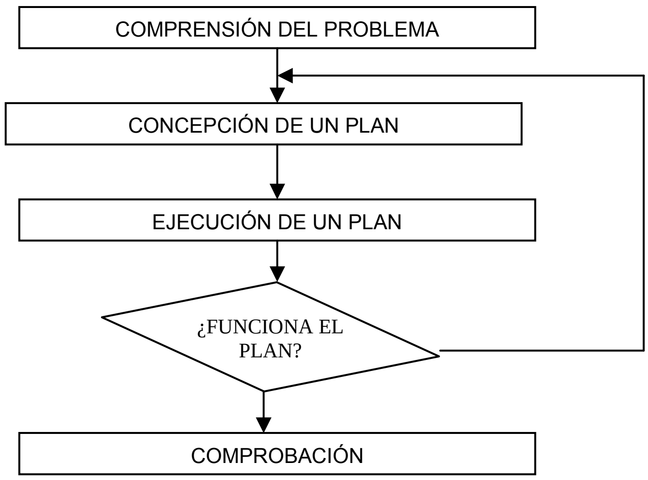


Figura 1.1 Método diseñado por G. Polya que conduce a la solución de problemas

Por otra parte, Stodolski (1991) menciona que para que los alumnos realicen tareas y actividades (como la resolución de problemas) deben cumplirse algunos requisitos previos respecto del contenido, así como de los procedimientos que implican; hace notar que “Greeno (1978) ha demostrado que los alumnos deben conocer determinados patrones de solución antes de tener éxito con la resolución de problemas geométricos” (p. 141), por mencionar un área de las matemáticas.

El resolver problemas es una cuestión práctica, como por ejemplo nadar. La habilidad práctica se adquiere mediante la imitación y la práctica. “Al tratar de resolver problemas, hay que observar e imitar lo que otras personas hacen en casos semejantes, y así aprendemos problemas ejercitándolos al resolverlos” (Polya, 1944/1965, p. 27).

La importancia del estudio de la resolución de problemas radica en las actividades propuestas a los alumnos. La variedad de propuestas que se proporcionen en clase, evitando los problemas tipo, dará cuenta de las diferentes estrategias que pueden emplearse. “La capacidad de usar información […] es realmente mucho más importante que la simple posesión de la información” (NCTM, 1964/1970, p. 15).

Mendoza (2004) considera dos tipos de problemas según su función (p. 72):

a).- Problemas en los cuales es necesario construir la solución (problemas para descubrir).

b).- Problemas en los cuales hay que aplicar un modelo de resolución ya conocido (problemas para aplicar).

Habrá que privilegiar el uso de los problemas para descubrir, para evitar que los problemas en trigonometría se reduzcan a la simple aplicación de fórmulas o la identificación de datos para realizar un tipo de operación sin ir más allá de la memoria.

Como lo propone Peralta (1995, p. 47), “se debe propiciar el éxito en el descubrimiento como elemento de motivación” a través de los problemas. Al determinar un problema para la clase de matemáticas, el alumno debe participar activamente en todo el proceso de resolución.

Problemas que se resuelven con el teorema de Pitágoras y aquellos que se resuelven mediante la trigonometría

En la organización de los problemas que se proponen a los alumnos para su resolución en los temas de trigonometría en la educación secundaria, deben diferenciarse los problemas que pueden resolverse con ayuda del teorema de Pitágoras de los que se resuelven con el uso de las razones trigonométricas, dado que tienen características diferentes aun cuando en ambos casos se trate de triángulos rectángulos.

En los problemas que se plantean para ser resueltos mediante el teorema de Pitágoras se dan las medidas de dos lados de un triángulo rectángulo. Estos problemas esencialmente consisten en calcular la longitud del tercer lado. Aunque existen situaciones problemáticas muy variadas para ser presentadas a los alumnos, su esencia radica en utilizar los dos lados conocidos para determinar el tercer lado del triángulo.

En el *Libro para el maestro* (Alarcón *et al.*, 2001, p. 228) se muestra el siguiente "problema 3", en el que se presenta un triángulo rectángulo formando parte de un rectángulo, y puede resolverse con el teorema de Pitágoras directamente. En este problema primero se debe determinar cuáles lados son catetos y cuál es la hipotenusa para luego hacer el despeje de la incógnita (lado desconocido). En general, en el *Libro para el maestro* se plantean situaciones en las que está implicado un triángulo rectángulo del que hay que encontrar un lado cuando se conocen (o puedan hacerse trazos y operaciones para conocer) dos lados (véase la figura 2.1).

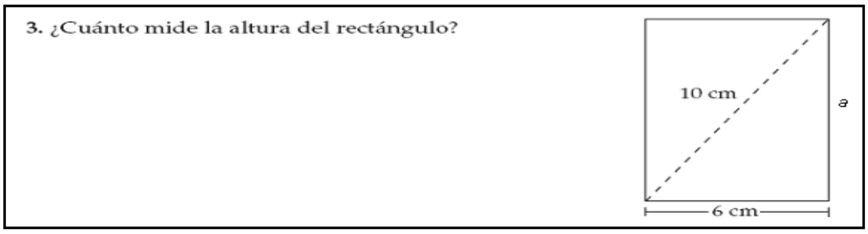
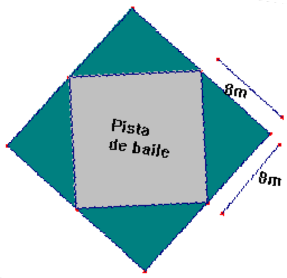


Figura 2.1 ¿Cuánto mide la altura del rectángulo?

En el programa de matemáticas de 2006 se propone el siguiente problema como ejemplo de utilización del teorema de Pitágoras (SEP, 2006, p. 132).

> En un salón de fiestas se dejó como pista de baile una superficie cuadrada que será cubierta con madera. ¿Cuántos metros cuadrados de madera se necesitarán para cubrir el piso de la pista de baile?



El esquema de la pista de baile proporciona la siguiente información: en las esquinas se tienen triángulos rectángulos isósceles, siendo sus lados catetos de 8 m y el área que se busca es el cuadrado que se forma sobre la hipotenusa de dichos triángulos.

El teorema de Pitágoras hace referencia a la igualdad del área trazada sobre la hipotenusa, con la suma de los cuadrados trazados sobre los catetos (de un triángulo rectángulo). De modo que en este problema el área que se busca cubrir con madera es el cuadrado de la hipotenusa, y ésta es la única incógnita cuyo valor debe determinarse con el teorema de Pitágoras ($c^2 = a^2 + b^2$, siendo a y b las longitudes de los catetos y c la de la hipotenusa):

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 8^2 + 8^2$$

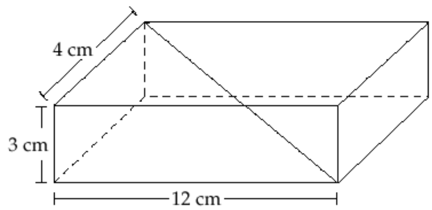
$$c^2 = 64 + 64$$

$$c^2 = 128.$$

Con la aplicación de la fórmula encontramos que la superficie que debe cubrirse con madera mide 128m^2. Para este problema no es necesario conocer la longitud de la hipotenusa, pues el área que se busca se encuentra directamente con la fórmula.

En el estudio de los sólidos también se encuentran situaciones en las que se aplica el teorema de Pitágoras para resolver distintos problemas. A continuación se presenta un ejemplo propuesto en el *Libro para el maestro* (Alarcón *et al.*, 2001, p. 231). En el dibujo que acompaña a la pregunta del problema aparecen las dimensiones de un paralelepípedo. La diagonal por la que se pregunta va de un vértice en la cara superior al vértice opuesto en la cara inferior.

¿Cuánto mide la diagonal?



Una estrategia para calcular la longitud de la diagonal indicada consiste en trazar la diagonal que une los vértices *C* y *B* (véase la figura 2.2), con ello se forma el triángulo rectángulo *ECB*. Se desconocen la longitud de la diagonal *EB* y la del segmento *CB*. Por otra parte, el segmento *CB* pertenece a otro triángulo rectángulo, al *CAB*, las longitudes de cuyos catetos se conocen: *CA* = 4 cm y *AB* = 12 cm.

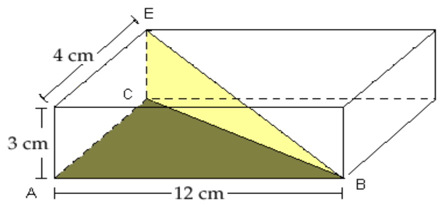


Figura 2.2 Triángulos auxiliares para encontrar la diagonal del paralelepípedo

Este ejemplo se resuelve encontrando un lado en dos triángulos rectángulos, utilizando en ambos casos el teorema de Pitágoras. Al principio se tienen dos datos del triángulo *CAB*, por ello conviene empezar por encontrar su hipotenusa *CB*. En este caso podemos denotar como $a = AC = 4$ cm y $b = AB = 12$ cm. Así, la hipotenusa es $c = CB$. Aplicando la fórmula del teorema de Pitágoras,

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 4^2 + 12^2$$

$$c^2 = 16 + 144$$

$$c^2 = 160$$

$$c = \sqrt{160} = CB$$

Al obtener la medida del lado *CB* es posible, empleando nuevamente el teorema de Pitágoras, encontrar la diagonal *EB* en el triángulo rectángulo *ECB*. Dicho triángulo tiene ahora dos lados conocidos que son los catetos *EC* = 3 cm y *CB* = $\sqrt{160}$ que son *a* y *b* respectivamente en la fórmula del teorema de Pitágoras.

Sustituyendo los valores conocidos en la fórmula del teorema de Pitágoras, se obtiene:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 3^2 + (\sqrt{160})^2$$

$$c^2 = 9 + 160 = 169$$

$$c = \sqrt{169} = 13.$$

El segmento *EB* es la hipotenusa, *c*. Cabe resaltar que para obtener la medida de la diagonal, en los dos triángulos auxiliares se requiere determinar la medida de la hipotenusa, y en el caso del segmento *CB* no es necesario determinar la raíz cuadrada de 160 ($\sqrt{160}$), ya que ese mismo segmento es un cateto del triángulo *ECB.* Finalmente, la diagonal del paralelepípedo es de 13 cm.

Por otra parte, en los problemas que se resuelven mediante trigonometría están implicados lados y ángulos de un triangulo. En particular, en la educación secundaria sólo se incluyen problemas sobre triángulos rectángulos. Principalmente se proponen los tipos de problemas ilustrados en el cuadro 2.1, obtenidos del análisis de los documentos oficiales (*Libro para el Maestro*, *Fichero de Actividades Didácticas* y el Programa de matemáticas de 2006).

Cuadro 2.1 Tipos de problemas de trigonometría para tercer grado de educación secundaria

DATOS CONOCIDOS / TIPO DE PROBLEMA		No. 1	No. 2	No. 3
LL (lado - lado)	1	Ángulo recto	L: Cateto A	L: Cateto B
	2	Ángulo recto	L: Cateto (A ó B)	L: Hipotenusa
AL (ángulo – lado)	3	Ángulo recto	A: Ángulo agudo	L: Cateto adyacente
	4	Ángulo recto	A: Ángulo agudo	L: Cateto opuesto
	5	Ángulo recto	A: Ángulo agudo	L: Hipotenusa

En el problema de *resolución de un triángulo rectángulo* (que consiste en determinar las medidas de los tres lados y de los tres ángulos interiores) en que están dados dos de sus lados (tipo de problema *LL*; véase el cuadro 2.1), se puede determinar el tercer lado usando el teorema de Pitágoras. Una segunda opción, no tan directa, es empezar por determinar uno de los ángulos agudos utilizando la razón tangente si se tienen los dos catetos, o utilizando alguna de las razones seno o coseno si se tienen un cateto y la hipotenusa. También se puede determinar el tercer lado mediante razones trigonométricas empleando uno de los lados conocidos si se tiene la amplitud de uno de los ángulos agudos.

En los problemas del tipo *AL* (véase el cuadro 2.1), cuando están dados uno de los ángulos agudos y uno de los lados de un triángulo rectángulo, mediante las razones trigonométricas se puede determinar la medida de otro de los lados; luego, mediante el teorema de Pitágoras o de las razones trigonométricas se determina la longitud del tercer lado (dependerá de quien resuelva el problema planteado). Es decir, para encontrar el tercer lado de un triángulo rectángulo conociendo dos lados y un ángulo agudo, no necesariamente se utiliza una razón trigonométrica.

En el caso de que los alumnos utilicen el teorema de Pitágoras para determinar la longitud del tercer lado de un triángulo rectángulo en la resolución de problemas de trigonometría, será conveniente llegar a conocer el porqué de la estrategia que utilicen. Es posible que conociendo dos lados y un ángulo no se percaten de la utilidad de tener la amplitud de uno de los ángulos agudos, o considerar que es más fácil resolverlo utilizando el teorema de Pitágoras. Tal vez sólo sea porque no han tenido práctica al resolver problemas utilizando las razones trigonométricas. Será interesante conocer la conclusión a la que llegan los alumnos al resolver diferentes problemas en los que puedan decidir la estrategia de resolución.

Investigaciones acerca de la enseñanza de la trigonometría en educación secundaria

Hay muy pocas investigaciones educativas relacionadas con el aprendizaje de cuestiones de trigonometría, particularmente publicadas en español, tanto en la educación secundaria como en los niveles medio y superior. De las investigaciones encontradas sobre la enseñanza de la trigonometría, 5 se dirigen a la educación secundaria. La primera de ellas es una propuesta didáctica (Cedillo *et al.*, 2006) que se incluyó en el modulo 9, “Medición y razones trigonométricas” del proyecto “Tecnología y Educación a Distancia en América Latina y el Caribe”, de la serie *Enseñanza de las matemáticas*. Entre los objetivos de esta propuesta está el que los alumnos reconocieran que no hay variación en las razones de dos lados correspondientes de triángulos rectángulos semejantes, que aplicaran el teorema de Pitágoras para calcular longitudes de lados de triángulos rectángulos y que emplearan los términos seno, coseno y tangente al referirse a las razones respectivas de los lados de un triángulo rectángulo con respecto a uno de sus ángulos agudos.

La segunda investigación es “La historia de las matemáticas en la enseñanza de la trigonometría. El teorema de Pitágoras” (Massa, 2007), obtenida de la Internet. Su origen es el Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad Politécnica de Cataluña. En esa publicación se propone que la historia de las matemáticas sea una herramienta para la enseñanza y el aprendizaje de la trigonometría. En una de sus conclusiones se menciona que “el uso de casos históricos es uno de los recursos que se puede utilizar para mejorar la transmisión y adquisición de los contenidos matemáticos y también para actuar de revulsivo en aquellos casos en los que el alumno no esté suficientemente motivado” (p. 8).

Una tercera investigación es “Construcción de significados para las razones trigonométricas mediante un aparato virtual diseñado con Cabri” (San Martín y Soto, s/a) de la sede de la Universidad Pedagógica Nacional en el estado de Sonora, México. Dicha investigación se enfocó en los niveles medio y medio superior. En México la educación secundaria es parte del nivel básico de educación a partir de la reforma de 1993; antes de ese año se le consideraba nivel medio. Sin embargo, en la investigación citada se abordan los contenidos de trigonometría en educación secundaria asumiendo que “la mayoría de las dificultades asociadas al estudio de la trigonometría (en el nivel medio y medio superior) se derivan de la existencia en el estudiante de una carencia inicial de significados para las definiciones de las razones trigonométricas básicas” (p. 1).

En la cuarta investigación, el artículo “Aprendizaje significativo de las definiciones de seno, coseno y tangente de un ángulo agudo”, San Martín (s/a) reporta cómo concurren la utilización de un prototipo didáctico manipulativo y el uso de calculadoras científicas en tercer grado de educación secundaria.

En el reporte “Un registro de representación semiótica de naturaleza geométrica para la trigonometría” (San Martín, 2006) se incluye una recopilación de resultados del desarrollo de un registro de representación semiótica para la trigonometría elemental que satisface y permite las tres actividades cognoscitivas fundamentales que postula Duval, a saber: formación, tratamiento y conversión de representaciones. En esa investigación se analiza la trigonometría que se enseña en educación secundaria y en bachillerato.

Se encontró una investigación educativa que aborda la enseñanza de la trigonometría en educación media: “Una propuesta para la enseñanza de las funciones trigonométricas”. En ésta, Sanabria (2006) parte de los polígonos de Arquímedes para definir las *funciones* trigonométricas sobre un conjunto discreto; prueba sus propiedades en dicho conjunto y aborda la medida de ángulos en radianes. La propuesta de Sanabria (2006) es complementada con un software de Java (juegos) que ayuda al estudiante en la compresión de las *funciones* trigonométricas. No reporta el nombre del software empleado. Su propuesta es aplicable a alumnos de nivel bachillerato.

Finalmente, se encontraron 2 investigaciones educativas relacionadas con el aprendizaje de la trigonometría de educación superior. La primera es “Aplicación del programa *winplot* a la enseñanza de algunos tópicos de trigonometría y cálculo diferencial", reportada por Hernández y Mora (s/a), quienes describen alternativas para la visualización de características particulares de las *funciones* trigonométricas (periodicidad y amplitud) y de nociones importantes del cálculo diferencial, como el teorema del valor medio (y el teorema de Rolle), puntos máximos y mínimos (relativos y absolutos), mediante el uso del programa *winplot* (software gratuito para graficar). La segunda es el reporte de investigación de Araya, Monge y Morales (2007), "Comprensión de las razones trigonométricas: Niveles de comprensión, indicadores y tareas para su análisis", en el que describen un estudio de la comprensión de la trigonometría valiéndose de análisis de tareas aplicadas a tres estudiantes del Bachillerato en Enseñanza de la Matemática en la Universidad de Costa Rica.

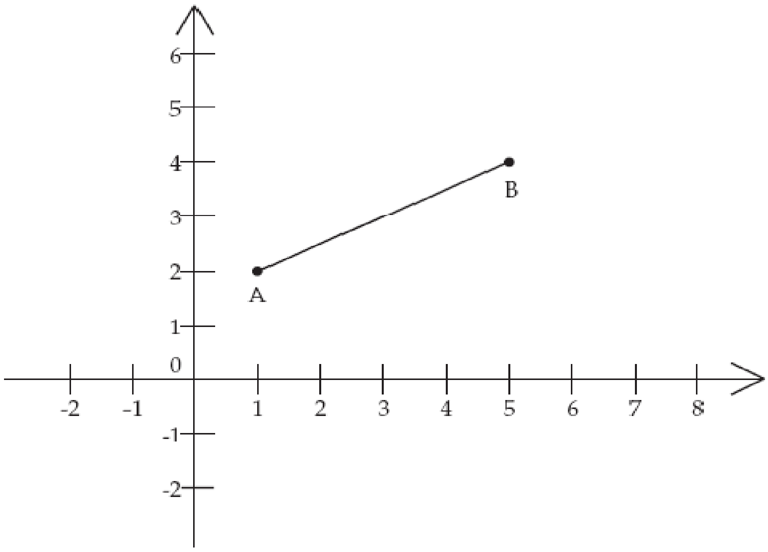
En el desarrollo de la investigación para esta tesis no resultaron relevantes los enfoques de Sanabria (2006) y Hernández y Mora (s/a), ya que se enfocan al concepto de *función* en la trigonometría, además de ser propuestas aplicables en educación media y superior.

En 6 de las investigaciones anteriores se habla del concepto de *razón* en trigonometría, pero con respecto a esta tesis, en ellas el enfoque difiere al proponer una secuencia que provoca el aprendizaje o mejora la enseñanza. En la investigación para esta tesis la secuencia de problemas de trigonometría propuesta se enfocó en conocer las estrategias de los alumnos en la resolución de problemas de trigonometría, sin reparar en el concepto de *función*.

Apéndice 2.1. Problemas de aplicación del teorema de Pitágoras resueltos con otro método

En el *Libro para el Maestro* (Alarcón *et al.*, 2001, p. 228) se muestran los siguientes problemas, los cuales, aunque la intención es resolverlos usando el teorema de Pitágoras, pueden resolverse usando distintos métodos. Aquí se muestran algunos.

1. ¿Cuál es la longitud del segmento AB?

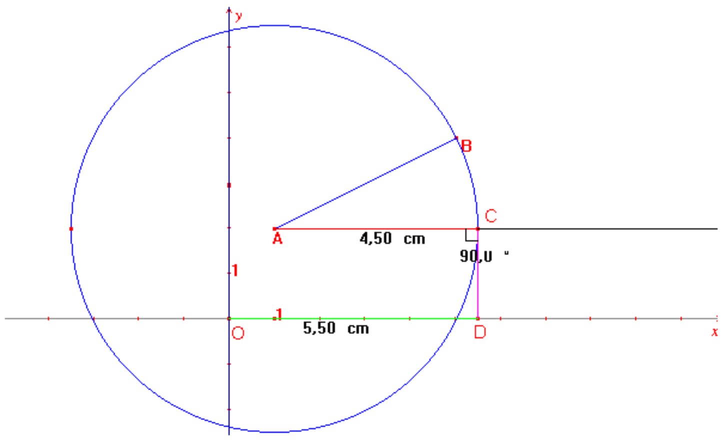


Para este problema se tiene la intención de que el alumno identifique un triángulo rectángulo, deduzca las medidas de los lados (catetos) y con ellos utilice el teorema de Pitágoras para obtener la medida del segmento *AB*, que en ese contexto será la hipotenusa.

Este problema está señalado como un ejemplo de aplicación del teorema de Pitágoras. Sin embargo, es posible que sea resuelto por otros métodos. En este problema se tiene como dato visual precisamente por el que se pregunta en el problema, y. lo que ayudará a calcular la medida del segmento *AB* está oculto, tanto en el trazo (no son visibles) como numéricamente (la longitud debe deducirse de la figura en el plano respecto a los ejes). Probablemente quien ya haya experimentado resolver suficientes triángulos rectángulos pueda ver aquel que ayuda a resolver este problema (aunque éste no aparezca de manera explícita). Otra situación interesante es que el ángulo recto, para formar el triángulo rectángulo, puede tener su vértice en el punto de coordenadas (1, 4) o en (5, 2).

Al proponer a los alumnos este primer problema de aplicación del teorema de Pitágoras sin ningún antecedente y con libertad para resolverlo usando una estrategia propia, puede ocurrir que lo resuelvan mediante medición directa o copiando el segmento dado sobre uno de los ejes coordenados a partir del origen.

Una forma ingeniosa de resolver este problema se muestra en la figura siguiente, en la que primero se trazó un vector paralelo al eje *x*, a partir del extremo *A* del segmento dado. Después, utilizando el compás se trazó la circunferencia con centro en *A* y radio *AB*. La circunferencia se interseca con el vector en el punto *C.* De este modo se copió el segmento *AB* sobre el vector paralelo al eje *x.* Para determinar la longitud del segmento *AB* se trazó una perpendicular al eje *x* desde el punto *C*. Dicha perpendicular se interseca con el eje *x* en el punto *D*. La longitud del segmento *OD* es 5.5 cm; la del segmento *AC* es una unidad menos: el segmento *AC* mide 4.5 cm.



La estrategia de resolución seguida en este caso es distinta a la intención del planteamiento del problema. Sin embargo, también es válida.

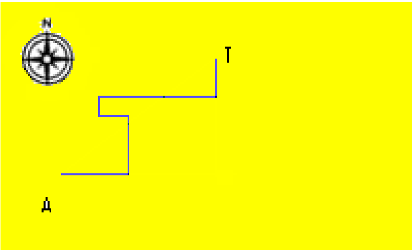
En el problema número 4 también se presenta una situación interesante, ya que no hay un triángulo rectángulo explícito ni la posible medida de sus lados. El problema es el siguiente.

4. Instrucciones para encontrar el tesoro. A partir del árbol caminar:

– 35 pasos hacia el este
– 30 pasos hacia el norte
– 15 pasos hacia el oeste
– 10 pasos hacia el norte
– 60 pasos hacia el este
– finalmente, 20 pasos hacia el norte

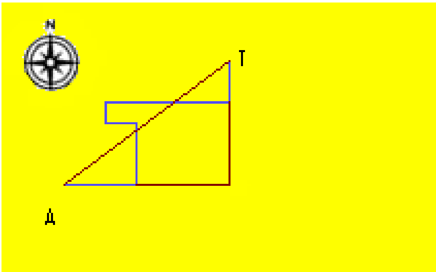
¿A cuántos pasos del árbol, en línea recta, está el tesoro?

Siguiendo las instrucciones, se obtiene el esquema de la figura siguiente. Iniciando en el punto *A*, que le corresponde al árbol, avanzando en las direcciones de las seis indicaciones, se llega al punto *T* del tesoro.



Mapa de instrucciones para ir del árbol en *A* hacia el tesoro en *T*

Hay distintas formas de abordar este problema. Para ser muy prácticos, ayudándose de una hoja cuadriculada o un juego de escuadras graduadas, se puede construir esta misma figura a escala y medir directamente la distancia desde el punto *A* donde está el árbol hasta el punto *T* en donde se encuentra el tesoro. Sin suponer que haciendo trazos auxiliares se determina un triángulo rectángulo para aplicar el teorema de Pitágoras.



Triángulo rectángulo en el mapa del tesoro

El objetivo de este problema es la posibilidad de que el alumno visualice el triángulo rectángulo formado en la figura anterior. Sin embargo, no deja sentir la necesidad de trazarlo para poder resolverlo. Por otra parte, la medida de los catetos debe obtenerse mediante sumas y restas organizando las longitudes horizontales y verticales e indicar para cada caso su signo positivo o negativo y así obtener finalmente una medida que puede aplicarse en la fórmula del teorema de Pitágoras.

En el cuadro siguiente se muestra cómo puede obtenerse el valor de la hipotenusa conociendo las longitudes de los catetos sin aplicar directamente la fórmula del teorema de Pitágoras. Al estar familiarizado con el triángulo rectángulo con catetos de 3 y 4 unidades e hipotenusa de 5 unidades, se puede saber también que hay triángulos cuyos lados correspondientes son múltiplos de éste (con lados 3, 4 y 5), es decir, con medidas del doble, triple, etcétera, y por tanto semejantes con una misma razón entre sí.

Razón entre las partes homólogas del triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5 con el triángulo rectángulo en el mapa del tesoro

TRIÁNGULO RECTÁNGULO	MAPA DEL TESORO (X)	TRIÁNGULO CON LADOS 3, 4 Y 5 (Y)	RAZÓN X/Y
CATETO MAYOR	HORIZONTAL 35 – 15 + 60 = 80	4	80 / 4 = 20
CATETO MENOR	VERTICAL 30 + 10 + 20 = 60	3	60 / 3 = 20
HIPOTENUSA	AT	5	AT / 5 = 20 AT = (20) (5) AT = 100

En el cuadro se muestra cómo se obtiene la longitud *AT* de la hipotenusa por medio de la razón *AT*/5 = 20. Usualmente no se espera que un alumno resuelva por medio de una situación así, pero plantear triángulos obtenidos del mismo terno pitagórico podría generar que este u otros problemas se resuelvan de esta manera.

Los ejemplos tomados del *Libro para el Maestro* incluidos en este capítulo coinciden en el objetivo de provocar su resolución aplicando el teorema de Pitágoras, aun cuando no siempre sea la única estrategia de resolución de dichos problemas. Esta situación hace evidente la importancia de planear con mucho cuidado los problemas que se planteen a los alumnos, para que se obtengan respuestas apegadas a los objetivos que originan cada actividad.

CAPÍTULO III

METODOLOGÍA

En el presente capítulo se describe el proceso metodológico seguido en la investigación de esta tesis. El capítulo se dividió en tres apartados: el primero de ellos es “Revisión de documentos oficiales”; este apartado contiene la revisión de 4 documentos emitidos por la Secretaría de Educación Pública en México con relación a los temas de trigonometría en educación secundaria y su enseñanza. El segundo apartado es “Selección, aplicación y ajustes de una secuencia de problemas de trigonometría”, el cual se presenta en tres partes. El tercer apartado de este capítulo es “Aplicación de la secuencia de actividades y entrevistas”, presentado en dos partes.

Revisión de documentos oficiales

Programa de matemáticas en el Plan de estudios de 1993

En los temas de geometría de tercer grado de educación secundaria (del plan y programas de estudios de 1993) se considera la enseñanza de “Elementos de trigonometría” (SEP, 1994, p. 51):

- Razones trigonométricas de un ángulo agudo: seno coseno y tangente.

- Valores del seno, el coseno y la tangente para los ángulos de 30°, 45° y 60°. Uso de tablas y calculadora para los otros ángulos agudos.
- Resolución de triángulos rectángulos y su aplicación a la solución de problemas: cálculo de distancias inaccesibles; del lado y el apotema de polígonos regulares; etcétera.

Los elementos previos a la enseñanza de los elementos de trigonometría, señalados en el programa (Plan de estudios de 1993) de tercer grado de educación secundaria incluyen:

- Criterios de congruencia de triángulos (LLL, LAL y ALA), aplicaciones en la justificación de construcciones geométricas.
- Círculo: rectas y segmentos en el círculo, ángulos central, inscrito y semiinscrito en una circunferencia, algunas construcciones con regla y compás.
- Semejanza: Teorema de Tales en el triángulo (criterios de semejanza), aplicaciones al cálculo de distancias inaccesibles, aplicaciones de la semejanza al estudio de homotecias en el dibujo a escala. Escala sobre magnitudes lineales, efecto en el área y volumen de una figura o sólido geométrico.
- Teorema de Pitágoras: demostración por diversos métodos, aplicaciones al cálculo de longitudes y distancias. Calculo de la diagonal de cubos y paralelepípedos; la altura de la arista y [el] apotema de pirámides rectas.

En el diagrama de la figura 3.1 están señalados los temas previos y los que se contemplan en el programa de matemáticas de tercer grado de educación secundaria del plan de 1993 en relación con la trigonometría.

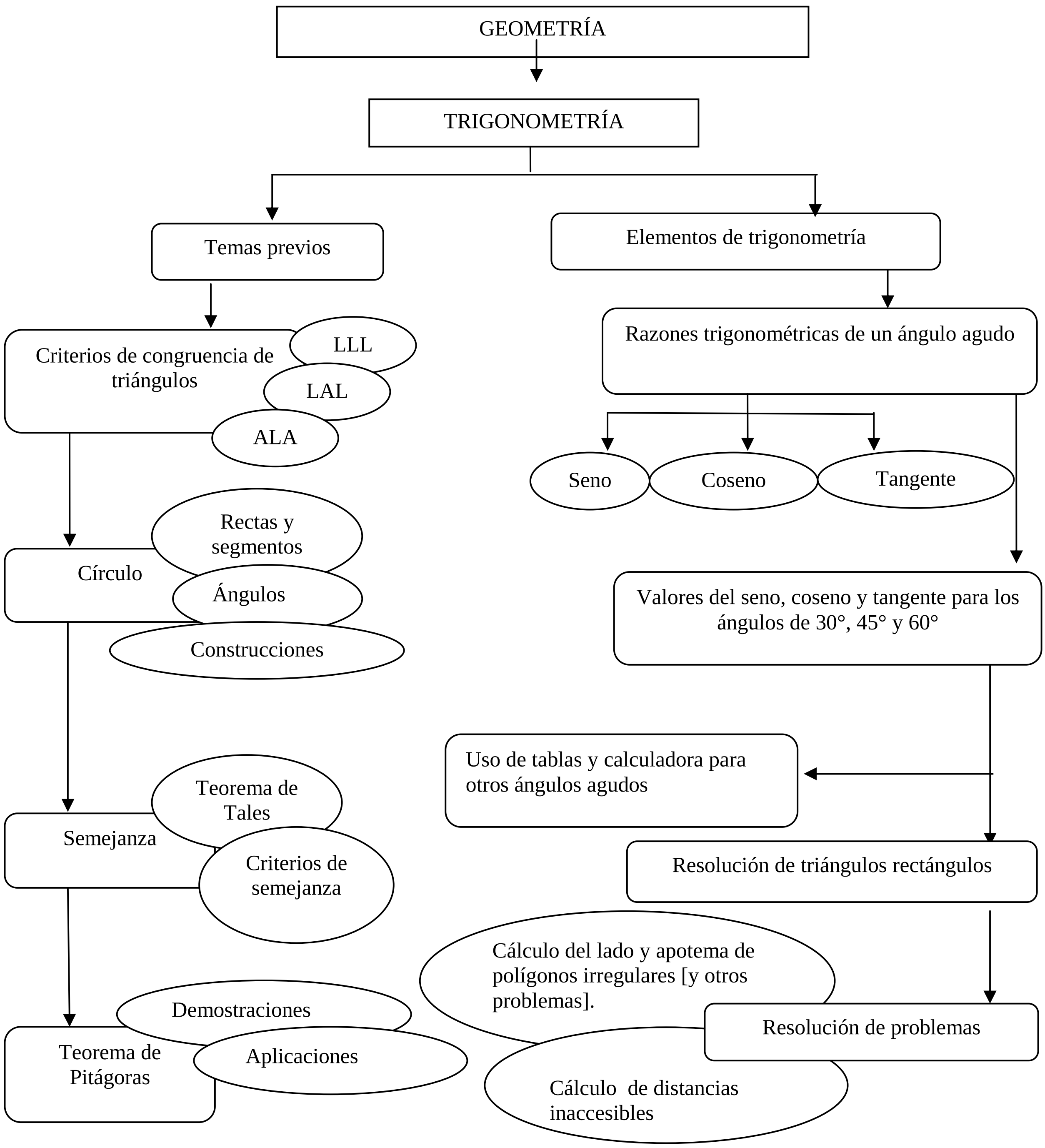


Figura 3.1 La trigonometría en la educación secundaria en el Plan de estudios de 1993

Programa de matemáticas en el Plan de estudios de 2006

Dentro del eje temático “Forma, espacio y medida” del programa de tercer grado de educación secundaria (del plan de estudios 2006) están señalados para su enseñanza los tres siguientes temas de trigonometría:

1.- Razones trigonométricas,
2.- Resolución de triángulos rectángulos, y
3.- Significado de las razones trigonométricas en triángulos rectángulos.

En los temas “Formas geométricas” y “Medida” se encuentran ubicados los subtemas señalados como antecedente a la enseñanza de la trigonometría en el programa de matemáticas de tercer grado de educación secundaria (Plan 2006) y son:

1.- Figuras planas: Aplicaciones de la congruencia de triángulos.
2.- Rectas y ángulos: Posiciones relativas de una recta y una circunferencia. Ángulos central e inscrito de una circunferencia.
3.- Semejanza: Semejanza de figuras. Criterios de semejanza de triángulos y su aplicación al resolver problemas. Estudio del teorema de Tales.
4.- Cuerpos geométricos: Cuerpos con caras curvas (esferas, conos y cilindros). Secciones planas en cilindros, esfera[s] y conos.
5.- Estimar, medir y calcular: Cálculo de ángulos inscritos y centrales, arcos, sectores circulares y corona circular. Volumen de cilindros y conos. Aplicación del teorema de Pitágoras.

En el diagrama de la figura 3.2 está señalado el eje temático, los temas y subtemas previos a la enseñanza de la trigonometría, así como los elementos de trigonometría contenidos en el programa de matemáticas de tercer grado de educación secundaria en el Plan de estudios de 2006.

Temas de trigonometría en el Libro para el maestro

Problemas de trigonometría

A pesar de lo establecido en el enfoque de la enseñanza de las matemáticas, la escuela ha confinado la enseñanza de la geometría y la trigonometría a los aspectos métricos (aritméticos), caracterizándose, a la vez, por una fuerte tendencia a la resolución automática de problemas (Afonso, 2003). En el aspecto algebraico, se ha puesto mayor énfasis en la resolución de ecuaciones y sistemas, y se ha relegado a un segundo plano su interés geométrico (Abrate, 2006).

Para tener una idea clara del tipo de problemas que se espera que los alumnos de educación secundaria resuelvan con respecto a la trigonometría, es necesario conocer, por principio, cuáles problemas de trigonometría se proponen en el *Libro para el maestro* y cómo se aborda la trigonometría y el estudio de los polígonos regulares. También es relevante, por el enfoque didáctico del plan de estudios, conocer las actividades sobre los temas de geometría propuestas en el fichero de actividades didácticas publicado por la SEP.

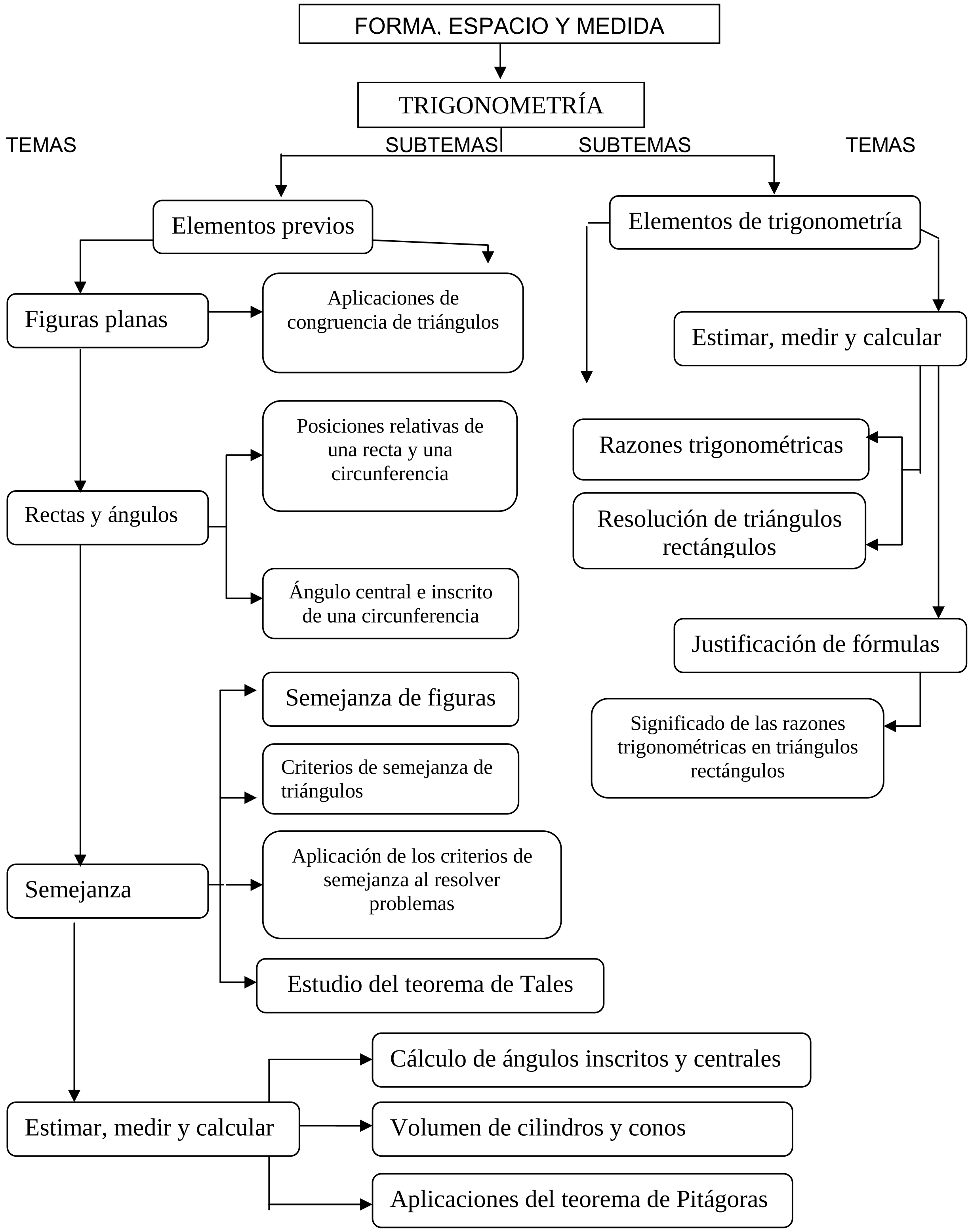


Figura 3.2 La trigonometría en la educación secundaria en el Plan de estudios de 2006

Las características de los problemas de trigonometría presentados en el *Libro para el maestro* de matemáticas deben ser acordes con las características señaladas en las tareas del profesor y con el tipo de problemas que deben plantear a sus alumnos (Alarcón, 1994, pp. 26-27). Para mostrar algunas de las numerosas oportunidades para utilizar las razones trigonométricas al plantear y resolver problemas, en el *Libro para el maestro* se proponen nueve ejemplos (Alarcón, 1994, pp. 237-240).

La trigonometría y el estudio de los polígonos regulares

En el estudio de los polígonos regulares también se pueden plantear problemas interesantes de trigonometría. En el *Libro para el maestro* se proponen seis ejemplos, los cuales se muestran en el capítulo IV de este documento.

Temas de trigonometría en el fichero de actividades didácticas de matemáticas publicado por la SEP

En los temas del *Fichero de Actividades Didácticas* de matemáticas (SEP, 2000) están señaladas para el tercer grado de educación secundaria dos temas relacionados con la trigonometría, designados como temas 16 y 17. El propósito esencial de este fichero es dar ejemplos claros sobre posibles formas de abordar los temas centrales del programa de matemáticas. A causa de este propósito, las actividades permiten su adaptación a las necesidades, formas de trabajo, condiciones en que se labora y posibilidades de aprendizaje de los alumnos (p. 3).

Selección, aplicación y ajustes de una secuencia de problemas de trigonometría

En el enfoque didáctico publicado en el *Libro para maestro* de matemáticas del plan de estudios de 1993 (Alarcón, 2001), la resolución de problemas implica que el profesor desempeñe tareas que propicien el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria: "Se pretende que el profesor seleccione y plantee problemas de acuerdo con los propósitos y deje que los estudiantes los resuelvan sin indicarles caminos preestablecidos" (p. 17).

Las tareas del profesor en la propuesta didáctica (del enfoque) comprenden los aspectos siguientes:

- Le corresponde seleccionar y en su caso adecuar los problemas y actividades que propondrá a los alumnos.
- Plantea los problemas.
- Organiza y coordina el trabajo en el aula.
- Propone nuevos problemas o contraejemplos, es decir, problemas que contradigan las hipótesis de los estudiantes, favoreciendo la reflexión y la búsqueda de nuevas explicaciones o procedimientos que los aproximen hacia la formalización de los conocimientos matemáticos.
- Contribuye a aclarar confusiones.
- Promueve y coordina la discusión sobre las ideas que tienen los estudiantes acerca de las situaciones que se plantean, mediante preguntas que les permitan conocer el porqué de sus respuestas.

- Participa como fuente de información y para vincular los conceptos y procedimientos propios de los estudiantes con el lenguaje convencional y formal.

Con estas tareas del profesor, al enfrentar a los estudiantes a la resolución de problemas, se espera propiciar que construyan, apliquen y profundicen los conocimientos adquiridos anteriormente, haciendo con ello que dichos aprendizajes sean significativos.

En esta investigación se dio énfasis a la aplicación y análisis de la resolución de problemas en tercer grado de educación secundaria en los temas de trigonometría. Se trabajó con varios alumnos de un grupo de secundaria para conocer:

- Qué tipo de conocimientos necesitan los alumnos para la resolución de problemas de trigonometría.
- Qué estrategias usan los alumnos de educación secundaria en la resolución de problemas de trigonometría.
- Qué tipo de conocimientos y conceptos matemáticos presentan los alumnos durante la resolución de problemas de trigonometría.

Después de conocer las herramientas que proporciona la Secretaria de Educación Pública, en el *Libro para el maestro* y en el *Fichero de actividades didácticas*, se seleccionaron los problemas para la organización de una secuencia de actividades en clase.

Selección de una secuencia de actividades

En el enfoque didáctico para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la educación básica de México se pone énfasis en la resolución de problemas; así está planteado en el Plan de estudios de 1993 y en el Plan de estudios de 2006 vigente. Sin embargo, en los problemas relacionados con la trigonometría se observa en el *Libro para el maestro* (Alarcón *et al.*, 2001), en el *Fichero de Actividades Didácticas de Matemáticas* (SEP, 2000) y en la organización y secuencia de contenidos del Programa de matemáticas de 2006 (SEP, 2006) que no existe una secuencia en los problemas propuestos para favorecer la construcción de conceptos (sobre las razones trigonométricas), así mismo, no se observan problemas que permitan a los alumnos el desarrollo de estrategias propias para resolverlos.

Dado que los materiales de la SEP (*Libro para el maestro*, *Fichero de Actividades Didácticas de Matemáticas* y el Programa de estudios de 2006) son los recursos oficiales a los que deben recurrir los maestros para utilizarlos en la enseñanza, éstos influyen sobre el qué y cómo enseñar. En consecuencia, conviene analizar las estrategias que emplean los alumnos al resolver los problemas de trigonometría propuestos.

Para realizar dicho análisis es necesario seleccionar y organizar los problemas de los materiales de la SEP en una secuencia que propicie en los alumnos interés por su estudio para lograr aprendizajes significativos. Tomando en consideración que cuando en los materiales oficiales no haya un problema propuesto para trabajar alguno de los temas se deben proponer nuevas situaciones problemáticas: “El profesor podrá recurrir a estas situaciones y problemas cada vez que lo juzgue necesario y conveniente, sin limitarse a las sugerencias contenidas en este libro para el maestro” (Alarcón *et al.*, 1994, p. 15).

Aplicación de la secuencia de actividades en un grupo piloto

La secuencia de problemas que fueron seleccionados de trigonometría para un grupo de tercer grado de educación secundaria se aplicó en un grupo piloto, del 7 al 15 de enero de 2008, en la Escuela Secundaria Diurna No. 96 “Dr. Enrique Herrera Moreno”.

En total fueron 6 días de trabajo en la clase de matemáticas con los alumnos del grupo 3° “E”. El desarrollo de las actividades de la secuencia cada día permitió hacer los primeros ajustes en la extensión de dichas actividades, pues el tiempo de 50 minutos de esta asignatura no es suficiente para concluir en la forma prevista para esta investigación. En general, esta escuela secundaria —y en particular el grupo piloto— adolece, entre otras cuestiones importantes, de un constante y alto nivel de ausentismo, lo cual dificultó poner en práctica la secuencia como se había planeado. De los 9 problemas seleccionados en la secuencia sólo se resolvieron 7.

Ajustes a la secuencia de actividades

Después de poner en práctica en el grupo piloto de tercer grado de educación secundaria la secuencia de problemas seleccionados, se hicieron ajustes en cuanto al tiempo para desarrollar las actividades.

La secuencia de problemas seleccionados se planeó para seis días de trabajo, en vez de siete como en el grupo piloto. También se incluyó una actividad adicional en la que los alumnos repasaran contenidos de geometría, como la semejanza de triángulos y conceptos como los de hipotenusa, cateto adyacente y cateto opuesto.

Finalmente, de acuerdo con los resultados obtenidos de la secuencia de actividades en el grupo piloto, se eligieron tres de los problemas trigonométricos (en los que las respuestas de los alumnos permiten identificar con mayor detalle las estrategias que emplearon al resolverlos) con el fin de planear la entrevista a través de problemas de trigonometría, la cual da cuenta de las estrategias, herramientas, conocimientos y deficiencias al momento de resolver las situaciones planteadas.

Aplicación de la secuencia de actividades y entrevista

La aplicación de la secuencia de problemas de trigonometría seleccionados se llevó a cabo en la misma escuela secundaria en la que se trabajó con el grupo piloto. Las consideraciones a favor de continuar en la misma escuela fueron tanto el horario de la clase de matemáticas —de modo que la investigadora acudía después de los seminarios de cuarto semestre en los que participaba como estudiante de— como la facilidad otorgada por el profesor a cargo de los grupos de tercer grado para que ocupara el tiempo de sus clases.

Un contratiempo durante la aplicación de la secuencia de problemas de trigonometría, que ocurrió a mediados de marzo, fue el cambio de dirección en el plantel. La nueva directora no estuvo de acuerdo con que se hicieran videograbaciones durante la aplicación de las actividades con el grupo de trabajo. Fue necesario acudir a la dirección operativa y a la inspección de zona para que se autorizara la aplicación de la secuencia y se videograbaran los 6 días de actividades y las entrevistas con los alumnos que participaran en éstas (véase el anexo 1).

Aplicación de la secuencia de actividades en un grupo de trabajo

La secuencia de actividades se aplicó en un grupo de trabajo a finales de mayo de 2008. Antes de que se pudiera aplicar la secuencia con el grupo de trabajo, se obtuvo la autorización por escrito de la inspectora de la zona escolar a la que pertenece la Escuela Secundaria No. 96 “Dr. Enrique Herrera Moreno” (véase el anexo 2). El día lunes 26 de mayo se empezó con la secuencia de actividades y se concluyó el lunes 2 de junio de 2008.

La primera actividad, el día de inicio, consistió en que los alumnos trazaran un triángulo rectángulo con uno de sus ángulos agudos de 40°. Los alumnos trabajaron con las calculadoras científicas desde el primer día. La segunda actividad fue un refuerzo a la del día anterior; igual que en aquella, se pidió a los alumnos que escribieran una conclusión; el tiempo fue mejor administrado.

En el tercer día de actividades con el grupo de trabajo se planteó el problema de las rampas (del *FAD*; véase el anexo 3) con el objetivo de utilizar la tangente (razón trigonométrica) para calcular la amplitud del ángulo y así elegir en cuatro casos distintos cuál rampa tenía un ángulo de mayor elevación.

En el cuarto día con el grupo de trabajo se trató sobre la resolución de triángulos rectángulos en cuatro casos (véase el anexo 4). De dichos casos la mayoría del grupo resolvió hasta el tercero, por lo que en el día cinco se retomó la actividad y se concluyó. Luego se inició con la resolución de dos problemas de trigonometría con la opción de reunirse en equipos de 2 o 3 alumnos.

Durante el día seis con el grupo de trabajo se resolvieron dos problemas de trigonometría. Los alumnos los resolvieron individualmente, con la finalidad de determinar a qué alumnos se entrevistaría, de acuerdo con la relación de sus respuestas y esta investigación.

Aplicación de entrevistas a través de problemas de trigonometría

Para identificar las estrategias que emplearon los alumnos al resolver problemas de trigonometría, se hizo una revisión de las hojas de trabajo de cada alumno correspondientes a cada día de aplicación de la secuencia de actividades. Se encontraron apuntes y respuestas muy parecidas entre sí; algunas hojas de trabajo mostraban uno o varios esquemas, y en otras no se encontró respuesta a las actividades del día.

Se seleccionó a aquellos alumnos en cuyas hojas de trabajo estuviesen realizadas correctamente más de 50% de las actividades, en las que hubiese una estrategia interesante de resolución, que participaran con sus opiniones en clase y que tuvieran pocas o ninguna inasistencia. En total se seleccionó a 7 alumnos, de los cuales sólo 5 fueron entrevistados exitosamente para esta investigación.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS

Este capítulo se presenta dividido en cuatro apartados principales: en el primero se describen los “Resultados de la revisión de documentos oficiales”, y se subdivide en tres partes; en el segundo apartado se presentan los “Resultados de la selección, aplicación y ajustes de una secuencia de problemas de trigonometría”, subdividido en dos partes, el tercer apartado contiene los “Resultados obtenidos con el grupo de trabajo”; y finalmente “Resultados obtenidos en las entrevistas”.

Resultados de la revisión de documentos oficiales

Resultados de la comparación de la trigonometría en el Plan de estudios de 1993 y el de 2006

En el programa de matemáticas del Plan de estudios de 2006, la SEP aún no ha determinado el contenido específico de los subtemas ni ha detallado las características ni propuesto ejemplos de los ejercicios planteados para los temas citados, en comparación con el contenido del programa de matemáticas del Plan de estudios de 1993. Los diagramas de las figuras 3.1 y 3.2 (véase el capítulo III) se desarrollaron en base a los elementos encontrados para su comparación. Hace falta también la publicación de otros materiales para el maestro, para que se amplíe la posición del enfoque y de esta forma se puedan analizar claramente las diferencias de contenido para abordar la trigonometría según cada programa de estudio.

Las características que se observan en el contenido de ambos programas de matemáticas para la enseñanza de la trigonometría en el Plan de estudios de 2006 y en el de 1993 son muy parecidas en cuanto a secuencia didáctica, contenido de los elementos previos y contenido de los temas elementales. La diferencia básicamente radica en la división temática. Primero fue hecha en áreas de conocimiento; actualmente se tiene una separación por ejes temáticos en los que quedan englobadas las distintas áreas de estudio de las matemáticas. Así es que en el programa de 2006 para tercer grado de educación secundaria podemos encontrar algunos puntos retomados del de 1993:

1.- Continúan vigentes los temas del programa de matemáticas establecido en 1993. En los temas fundamentales de geometría se conserva el estudio de la trigonometría; en el Plan de 2006 se encuentra señalado en el tema de "Medida". Los contenidos de trigonometría están señalados en dos áreas. Primero en el tema "Estimar, medir y calcular", donde se estudian las razones trigonométricas y la resolución de triángulos rectángulos. Posteriormente en el tema "Justificación de fórmulas" se estudia el significado de las razones trigonométricas en triángulos rectángulos. Son los mismos temas que se plantearon en el área de geometría del Plan de estudios de 1993.

2.- Articulación con los temas previos. La trigonometría, como último tema de geometría en educación básica, está estrechamente relacionada con los temas que le anteceden, desde el conocimiento de figuras planas, rectas, ángulos, semejanza, estimar, medir y calcular, planteados para los tres grados de educación secundaria.

3.- Estudio de la trigonometría como parte de los contenidos fundamentales. En geometría se conservan los temas de trigonometría como parte fundamental de la enseñanza básica, además de su relación directa con el siguiente nivel de estudio. Como parte de la educación básica, no se pretende que los alumnos aprendan gran cantidad de contenidos. Se pretende que su desarrollo sea completo, sin saturar el programa con temas que no puedan ser agotados a lo largo del ciclo escolar.

En el último grado de educación básica (tercer grado de secundaria), se presenta la introducción a la trigonometría una vez que los alumnos conocen y han resuelto diversas aplicaciones de los teoremas de semejanza y el de Pitágoras. Aunque sólo son temas iniciales —de trigonometría—, en su estudio abundan situaciones de interés para los alumnos, que también los preparan para el estudio de temas más avanzados como son los números complejos, los vectores y las coordenadas polares, por mencionar algunos. Esto acentúa la importancia de los temas trigonométricos iniciados en secundaria al relacionarse con el nivel escolar inmediato superior.

Por otra parte, la trigonometría se ha mantenido sin muchas modificaciones en su contenido desde que en 1993 la educación secundaria se incorporó a la educación básica obligatoria. Los contenidos permanecen iguales en la anterior (1993) y actual Reforma a la Educación Secundaria (2006). En ambas difiere el tratamiento que se le da a los contenidos geométricos, ya que los propósitos centrales de los programas de matemáticas son: que el alumno aprenda a utilizarlas para resolver problemas, y que desarrolle con ello habilidades y competencias.

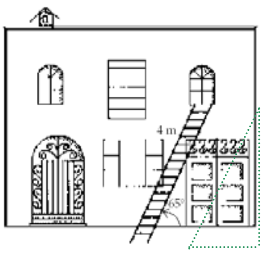
Resultados de la revisión de los problemas de trigonometría en el Libro para el maestro

Problemas de trigonometría encontrados

En el *Libro para el maestro* se proponen nueve ejemplos (Alarcón *et al.,* 1994, pp. 237-240), los cuales se resuelven a continuación para describir sus características.

1.- *Problema de la ventana*

Una escalera de 4 m de largo llega hasta el pretil de una ventana cuando el ángulo formado por la escalera y el suelo es de 65°. ¿A qué altura se encuentra la ventana? ¿En qué ángulo debe colocarse la escalera para que quede 50 cm por debajo de la ventana?



Primera pregunta

sen 65°= h / 4

(sen 65°)(4) = h

3.6252 = h

La altura de la ventana es de 3.625 m.

Segunda pregunta

La escalera se debe colocar con un ángulo sen β = (3.625 – 0.5) / 4

β = sen^{-1} (3.125 / 4)

β = 51.38 = 51° 22´ 30.6´´

de 51° 22´ 30.6´´ para quedar 50cm bajo la ventana.

En este problema el alumno debe identificar los datos que le ayudarán a formar un triángulo rectángulo. En este caso el suelo forma un ángulo recto con la pared de la ventana, este dato es implícito y el alumno debe tomarlo como cierto, aunque no haya más información al respecto. La hipotenusa de este triángulo es la escalera de 4 m, la cual une el suelo con el pretil de la ventana. Finalmente, dicha escalera forma un ángulo de 65° con el suelo.

Después de identificar el triángulo rectángulo, el problema puede resolverse con el uso de la trigonometría. La primera pregunta del problema, “¿A qué altura se encuentra la ventana?”, se reduce a encontrar un lado (altura de la ventana al suelo) contando con los siguientes tres datos: hipotenusa de 4 m y ángulos de 90° y 65°, es decir, un lado y dos ángulos. Entre los conocimientos que debe poner en práctica el alumno se encuentran reconocer catetos e hipotenusa, plantear la razón trigonométrica que le ayudará a acertar en la solución del problema, despejar una incógnita (despeje de ecuaciones) y uso de la calculadora científica.

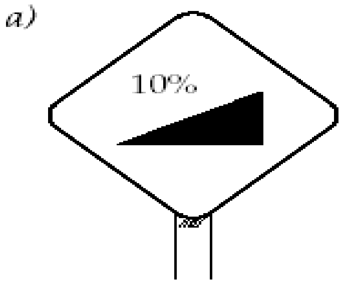
La altura resultante del suelo al pretil de la ventana es un número irracional, lo cual crea una situación problemática para decidir hasta qué cifra decimal tomar para expresar la medida de la altura de la ventana. ¿Deben considerarse décimos, centésimos, milésimos, diezmilésimos o más dígitos?, ¿hasta qué parte puede medir el alumno y considerar que es suficiente para dar respuesta a esta primera pregunta? En este punto está implicada también la segunda pregunta: “¿En qué ángulo debe colocarse la escalera para que quede 50 cm por debajo de la ventana?” La respuesta a esta segunda pregunta del problema se reduce a encontrar el nuevo ángulo formado al mover la escalera. Nuevamente se cuenta con tres datos: altura de la ventana al suelo (resultado de la pregunta anterior) menos 50 cm, hipotenusa formada por la escalera de 4 m y el ángulo de 90°. Los datos son dos lados y un ángulo.

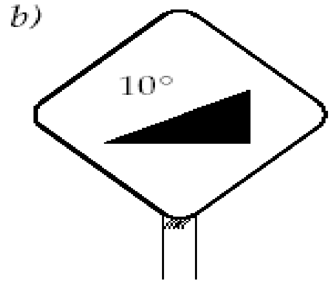
La respuesta correcta a esta pregunta va enganchada a la respuesta a la pregunta anterior, pues debe usarse en esta nueva situación. En el caso de utilizar como altura 3.625 m (utilizando hasta milésimos, midiendo milímetros), el ángulo que resulta es de 51° 22´ 30.6´´. Si el alumno se enfrenta en realidad con una situación similar a la del problema, ¿cómo medirá dicho ángulo?

Es conveniente que en este problema se abra un espacio para su análisis y con ello se considere por qué no se conserva el mismo ángulo agudo de 65° al recorrer la escalera 50 cm hacia abajo. Conviene analizar también si el cateto sobre el suelo aumenta los 50 cm que se recorrieron en el cateto de la altura. Observar y comparar las cualidades de los dos triángulos que resuelven el problema puede dejar más significado que el hecho de sólo dar respuesta a las preguntas.

2.- *Problema de las pendientes*

Se dice que una subida tiene una pendiente de 10% si se eleva 10 m por cada 100 m horizontales recorridos, ¿cuál de las rutas siguientes tiene la mayor pendiente?





a) tan α = 10/100

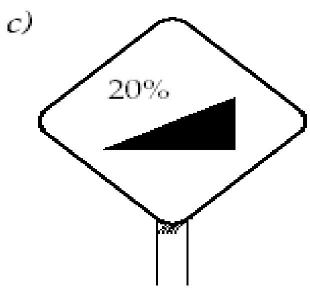
tan α = 0.1

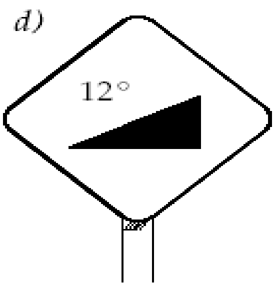
$\alpha = \tan^{-1} 0.1$

α = 5° 42´ 38.14´´

Si la pendiente de *a*) es 5°42´ 38.14´´, entonces la pendiente de *b*) es mayor, mide 10°. También para *a*) tan α = 0.1, y para *b*) es mayor tan 10°= 0.176.

Comparando las rutas *a* y *b*, la de mayor pendiente es la ruta *b.* Si se determina en cada caso el valor del ángulo de elevación o bien el valor de la tangente del ángulo, se pueden comparar las pendientes.





tan θ = 20/100	El ángulo de la pendiente de c) es menor
tan θ = 0.2	que el ángulo de la pendiente de d) que
$\theta = \tan^{-1} 0.2$	mide 12°. También para d) tan 12°= 0.212,
θ = 11° 18´ 35.76´´	mayor que para c) tan θ = 0.2.

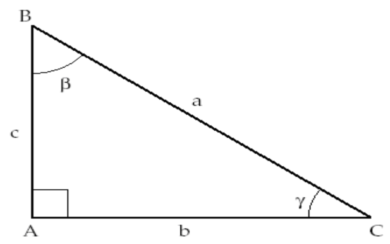
El ángulo indicado en el inciso d), 12°, y su tangente, 0.212, indican que es ésta la mayor de las cuatro pendientes presentadas en el problema.

Hay información que no se pide al alumno en este problema, como lo es la definición de pendiente, la cual le ayudaría a comparar sólo las razones de la tangente. Resulta importante ver por qué también puede compararse el ángulo de elevación, ya que relaciona directamente que a mayor pendiente mayor ángulo (de elevación). Esta información es tácita en el problema, lo cual deja abierta la posibilidad a distintos caminos de resolución

Para resolver el problema de las pendientes se identifican, según los esquemas propuestos, triángulos rectángulos. Hay que hallar la medida del ángulo de elevación de cada pendiente y compararlos. Otra opción es encontrar la medida de la tangente de cada ángulo, que es la razón que coincide con la pendiente de una recta. En este caso se proporcionan al alumno tres datos: ángulo de 90° y los dos catetos. Las medidas están indicadas en el porcentaje (10% o 20%) que aumenta (se eleva 10 m por cada 100 m recorridos), de modo que el alumno debe relacionar dicho porcentaje con las dimensiones de los catetos.

3.- *Tabla de problemas de resolución de triángulos rectángulos*

Dado un triángulo rectángulo como el siguiente,



completa la tabla.

CASO	*a*	*B*	*c*	*β*	*γ*	sen *β*	cos *β*	tan *β*	sen *γ*	cos *γ*	tan *γ*
1	10	5.7	8.2	35°	55°	5.7 /10	8.2/10	5.7/8.2	8.2/10	5.7 /10	8.2/5.7
2	7	5	$\sqrt{24}$	45°35’	44°25’	5/7	$\sqrt{24/7}$	5/$\sqrt{24}$	$\sqrt{24/7}$	5/7	$\sqrt{24}$ /5
3	23.3	15	17.9	40°	50°	15/23.3	17.9/23.3	15/17.9	17.9/23.3	15/23.3	17.9/15
4	√41	4	5	38°39’	51°20’	4/$\sqrt{41}$	5/$\sqrt{41}$	4/5	5/$\sqrt{41}$	4/$\sqrt{41}$	5/4

Caso 1

b = (sen 35°) (10) = 5.735

c = (cos 35°) (10) = 8.191

γ = 90° - 35° = 55°

Caso 2

$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{5}{7}\right)$ = 44° 24´ 55.11´´

$\beta = \text{sen}^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$ = 45° 35´ 4.89´´

Caso 3

$a = \frac{15}{\text{sen } 40°}$ = 23.33

$b = \frac{15}{\tan 40°}$ = 17.876

γ = 90° - 40° = 50°

Caso 4

$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$ = 38° 39´ 35.31´´

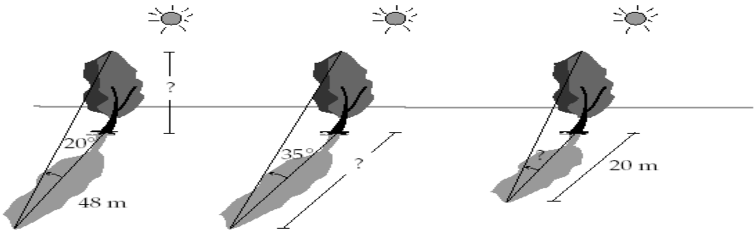
$\gamma = \tan^{-1}\left(\frac{5}{4}\right)$ = 51° 20´ 24.69´´

Al resolver los triángulos rectángulos propuestos en la tabla, el alumno puede llegar a identificar los dos posibles casos: se conoce el ángulo de 90° y dos lados (un ángulo y dos lados), o bien se conoce el ángulo de 90°, uno de los ángulos agudos y un lado (dos ángulos y un lado).

Éste es en realidad un problema de aplicación y no un problema para descubrir elementos nuevos. Para resolver este "ejercicio" se requiere el uso de la calculadora científica en el cálculo de la medida de los ángulos en los casos 1 y 4. También se requiere plantear correctamente las razones trigonométricas y realizar los despejes para obtener la medida del lado *a* en los casos 2 y 3. Las razones trigonométricas de cada caso pueden indicarse sólo con sus razones entre los lados o bien resolviendo con ayuda de una calculadora.

4.- *Problema de los árboles*

Un árbol proyecta una sombra de 48 m cuando el sol [*sic*] se encuentra a una altura [*sic*] de 20° sobre el horizonte. ¿Cuál es la altura del árbol? ¿Cuál será la longitud de la sombra cuando el sol [*sic*] se encuentre a una altura [*sic*] 35° sobre el horizonte? ¿Cuál será la altura [*sic*] del sol [*sic*] horizonte cuando el árbol proyecte una sombra de 20 m?



Para responder cuál es la altura del árbol, se tienen el ángulo de 90°, el ángulo de 20° y el lado de 48 m. Al plantear la incógnita cuyo valor debe determinarse se utiliza la razón tangente y al despejar se obtiene la altura de 17.47 m de la manera que sigue.

Planteamiento: $\tan 20° = \frac{¿?}{48 \text{ m}}$

Despeje de la incógnita: ¿? = (tan 20°) (48 m)

¿?= 17.47 m

Para determinar cuál será la longitud de la sombra del árbol al cambiar su ángulo de elevación, el alumno cuenta ahora con la altura del árbol, que será un lado conocido, además de los dos ángulos (de 90° y 35°).

$\tan 35° = \frac{17.47}{x}$

x = 17.47/tan 35

x = 24.95 m

Por último, para encontrar el ángulo de elevación, se conocen dos lados que son la altura del árbol y la longitud de la sombra. Por lo tanto, se puede despejar el ángulo y resolver:

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{17.47}{20}\right) = 41°\ 81´\ 13.97´´.$$

(En la redacción del problema de los árboles, se menciona “altura al Sol”, esta frase puede generar duda en quien lo resuelve, ¿qué quiere decir? Lo correcto sería preguntar por el ángulo de elevación del Sol, dado que en el concepto de altura entran los conceptos de distancia más corta y ángulo recto. Es preciso además propiciar el uso del vocabulario correcto en matemáticas.)

5.- *Problema de la Torre Latinoamericana*

La Torre Latinoamericana, en la Ciudad de México, tiene una altura de aproximadamente 180 m, incluida la antena. ¿A qué distancia debo colocarme de ella para verla bajo un ángulo de 15°?

El alumno puede realizar un esquema, suponiendo que la torre es perpendicular al suelo; hallará un triángulo rectángulo y con ello resolverá a partir de la razón tangente de la forma que sigue.

$$\tan 15° = \frac{18}{x}$$

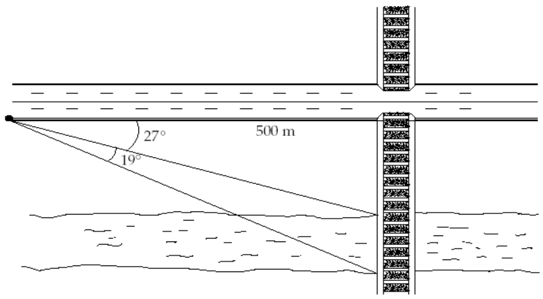
$$x = \frac{18}{\tan 15°}$$

$$x = 67.1769 \text{ m.}$$

En este problema nuevamente se cae en la ejercitación. Alude una situación difícil de presentar en la realidad del alumno. Parece ser que en el planteamiento del problema no hay elementos nuevos y que es de aplicación. No genera situaciones de descubrimiento o motivación.

6.- *Problema del puente*

Una vía de ferrocarril atraviesa perpendicularmente una carretera recta y más adelante cruza un puente sobre un río. Una persona que se encuentra sobre la carretera, a 500 m del cruce con la vía, observa una situación como la indicada en el dibujo. ¿Cuál es la longitud del puente?



El problema consiste en reconocer que se debe determinar la longitud de un cateto para dos triángulos rectángulos diferentes. Para ambos triángulos se conoce el ángulo de 90°, según el esquema mostrado, un cateto de 500 m, y el ángulo agudo que para un primer triángulo es de 27° y para el segundo es de 27° + 19° = 46°.

La longitud del cateto del primer triángulo se obtiene así:

$$\tan 27° = \frac{x_1}{500},$$

$$x_1 = (\tan 27°)\ (500\text{ m}) = 254.76\text{ m}.$$

La longitud del cateto del segundo triángulo se obtiene así:

$$\tan 46° = \left(\frac{x_2}{500}\right),$$

$$x_2 = (\tan 46°)\ (500\text{ m}) = 517.76\text{ m}.$$

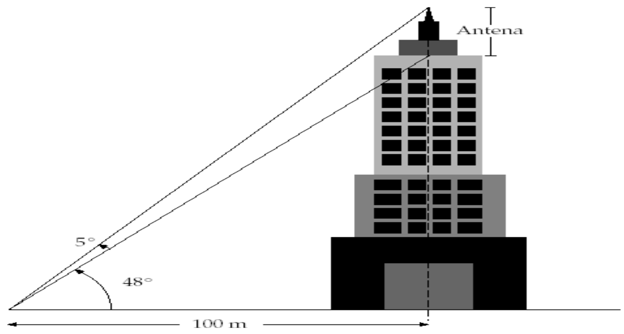
La longitud del puente se obtiene de la diferencia de los catetos correspondientes en ambos triángulos. La longitud del puente es de

$$517.76\text{ m} – 254.76\text{ m} = 263\text{ m}.$$

(En la redacción del problema 6 no se describen datos para la formulación del triángulo rectángulo; toda la información necesaria está vertida en el esquema inicial del puente. Es interesante pensar en agregar elementos escritos en la situación del problema, de modo que sea el alumno quien elabore su propio esquema.)

7.- *Problema del edificio y la antena*

¿Cuáles son las alturas del edificio y de la antena?



En este problema nuevamente hay que encontrar la diferencia entre dos catetos, de modo que se tienen dos triángulos con el ángulo de 90° formados por el suelo y el edificio; en ambos triángulos se tiene el cateto de 100 m y un ángulo agudo para el primer triángulo de 48° y para el segundo de 48° + 5° = 53°.

La longitud del cateto del primer triángulo se obtiene así:

$$\tan 48° = \frac{x_1}{100},$$

$$x_1 = (\tan 48°)\ (100 \text{ m}) = 111.06 \text{ m}.$$

La altura del edificio, que es el cateto del segundo triángulo, se obtiene así:

$$\tan 53° = \frac{x_2}{100},$$

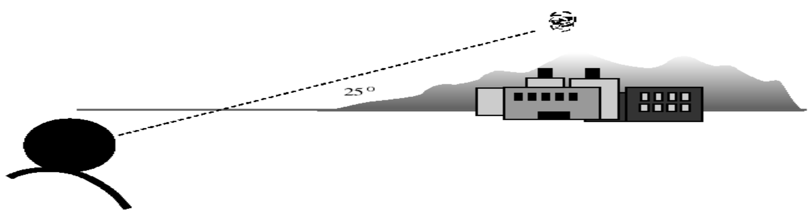
$$x_2 = (\tan 53°)\ (100 \text{ m}) = 132.70 \text{ m}.$$

La longitud de la antena se obtiene de la diferencia de los catetos en ambos triángulos:

Longitud de la antena = 132.70 m – 111.06 m = 21.64 m.

8.- *Problema del cohete*

Alguien lanza un cohete y lo vemos explotar; medio segundo después escuchamos el estallido. Si cuando vimos explotar el cohete nuestra mirada hacía un ángulo de 25° con la horizontal, ¿a qué altura explotó el cohete? (*Nota:* La velocidad del sonido es de aproximadamente 340 m/s y podemos despreciar el tiempo que tardó la luz en llegar a nosotros, ya que viaja a 300 000 km/s aproximadamente.)



Para poder plantear la existencia de un triángulo rectángulo en este problema, el alumno debe ignorar la trayectoria parabólica del cohete lanzado y reconocer como datos un cateto formado por la altura del cohete en el momento de su observación en el suelo. El segundo dato se obtiene de suponer que el suelo es completamente horizontal y que con la altura del cohete se forma un ángulo de 90°. El tercer dato del problema será la hipotenusa, que de acuerdo con el problema, al ser visto medio segundo después de escuchado, tendrá una longitud de $\frac{340 \text{ m}}{2}$, es decir 170 m. Plantear el triángulo rectángulo de esta forma resulta muy forzado.

La altura (h) del cohete se obtiene ahora con la razón seno:

$$\text{sen } 25° = \frac{h}{170},$$

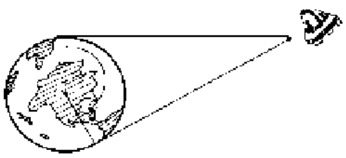
$$h = (\text{sen } 25°)\ (170 \text{ m}),$$

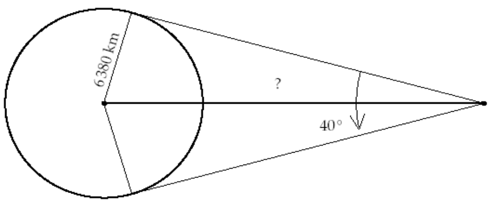
$$h = 71.84 \text{ m}.$$

El cohete explota a 71.84 m de altura.

9.- *Problema de la nave*

Un astronauta ve desde su nave que la Tierra abarca un ángulo de 40°. ¿A qué altura se encuentra sobre la superficie de la Tierra? (*Nota:* El radio de la Tierra es de aproximadamente 6 380 km.)





En este problema el alumno puede guiarse por el esquema dado para deducir la información de un posible triángulo rectángulo. Los tres datos son: el ángulo de 90° formado por la tangente y el radio de la Tierra (una recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio que une su centro con el punto de tangencia), el radio de la Tierra de 6 380 km y la mitad del ángulo de observación (se divide el ángulo), es decir $\frac{40°}{2}$ = 20°.

La altura de la nave a la superficie de la Tierra es:

$$\text{sen } 20° = \frac{6380}{x},$$

$$x = \frac{6380 \text{ km}}{\text{sen } 20°},$$

$$x = 18\,653.87 \text{ km}.$$

Una posible dificultad es la credibilidad de este resultado, ya que se trata de una cantidad inmensurable para el alumno, lo que puede poner en duda su lógica. Se puede comprobar este resultado a partir del otro ángulo agudo. La distancia del centro de la Tierra a la nave puede calcularse con la razón coseno, como se muestra a continuación:

$$\cos 70° = \frac{6380}{x},$$

$$x = \frac{6380 \text{ km}}{\cos 70°},$$

$$x = 18\,653.87 \text{ km}.$$

Hasta este punto del problema es importante reconocer que lo que se encontró es la distancia al centro de la Tierra, por lo que habrá que restarle la distancia del radio:

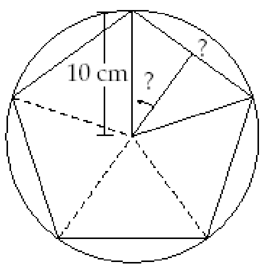
Distancia de la nave a la superficie de la Tierra: 18 653.67 km – 6 380 km = 12 273.87 km.

Para tener una idea general acerca de las distancias que puede alejarse una nave espacial de la Tierra, una forma es a través de la comparación de la Luna que orbita la Tierra a una distancia media de 384 403 km. Otro dato curioso es la altitud a la que orbitan los satélites artificiales. A una altitud de 200 km hay aún la suficiente masa atmosférica como para frenar los satélites artificiales, gracias a la resistencia aerodinámica, por lo que los satélites de larga vida han de alcanzar órbitas de gran altitud.

La trigonometría y el estudio de los polígonos regulares

En el *Libro para el maestro* se proponen seis ejemplos, los cuales se muestran a continuación, junto con su resolución y un análisis respecto a los conocimientos previos para los alumnos.

1.- ¿Cuál es el perímetro y el área de un pentágono inscrito en una circunferencia de 10 cm de radio?



a) $\theta = \frac{360°}{2n} = \frac{360°}{10\text{ cm}}$ = 36°.

b) sen 36° = $\frac{(d/2)}{10\text{ cm}}$,

sen 36° = $\frac{d}{20\text{ cm}}$,

(sen 36°)(20 cm) = *d*,

11.76 cm = *d.*

c) cos 36° = $\frac{a}{10\text{ cm}}$,

a = (cos 36°) (10 cm),

a = 8.09 cm.

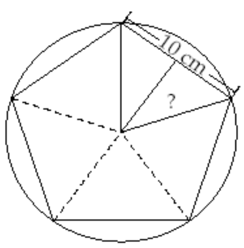
Los incisos *a)*, *b)* y *c)* indican los elementos necesarios para poder obtener el perímetro y el área, la medida del lado (*d*) y el apotema (a) del pentágono que se propone. Ahora es suficiente sustituir en las fórmulas para el perímetro y el área los valores obtenidos:

$$P = 5d = (5)\ (11.76\text{ cm}) = 58.8\text{ cm};$$

$$A = \frac{P \times a}{2} = \frac{(58.8\text{ cm})(8.09\text{ cm})}{2} = \frac{475.692\text{ cm}^2}{2} = 237.85\text{ cm}^2$$

Este problema geométrico implica que el alumno reconozca cuánto vale el ángulo *θ*, o bien que deduzca una fórmula para obtener *θ* para el polígono de *n* lados. Usará las razones seno y coseno para obtener la medida del lado faltante.

2.- Calcular el apotema y el área de un pentágono (o hexágono, o heptágono,...) cuyos lados miden 10 cm.



a).- $\theta = \frac{360°}{2n} = \frac{360°}{10} = 36°$.

b).- $\tan 36° = \frac{5\text{ cm}}{a}$,

$a = 5\text{ cm}/\tan 36° = 6.88\text{ cm}$.

Para encontrar el valor del área de este pentágono (o de algún otro polígono regular), es necesario conocer su apotema, la cual se obtiene mediante la función tangente para el ángulo de 36° (el cuál puede variar de acuerdo con el número de lados del polígono). Con esta información es posible entonces obtener el área del pentágono:

$$A = \frac{P \times a}{2} = \frac{[(10 \text{ cm})(5)](6.88 \text{ cm})}{2} = 172.05 \text{ cm}^2.$$

Los conocimientos previos del alumno pueden referirse al apotema, área de un polígono, cómo determinar el ángulo θ (que es el ángulo central de la circunferencia que pertenece también al triángulo rectángulo en el esquema del problema). De no conocer cómo obtener el área de un polígono, los alumnos podrían obtener el área de los triángulos que se ven en el esquema del pentágono regular del problema planteado.

3.- Un polígono regular de 12 lados tiene un área de 24 unidades cuadradas. ¿Cuánto miden sus lados? ¿Y los radios de los círculos inscrito y circunscrito?

Para poder resolver este problema es necesario que los alumnos resuelvan en primer lugar lo propuesto en el número 4. En el ejercicio mencionado se puede llegar a una generalización acerca de la medida del lado, el apotema y el área de un polígono, expresados en función del radio. Con la fórmula del área obtenida es mucho más sencillo comprender el problema, que se puede resolver sustituyendo los datos: A = área, n = número de lados, $\theta = \frac{360°}{24}$, y despejando R,

$$A = n R^2 \text{ sen } \theta \cos \theta,$$

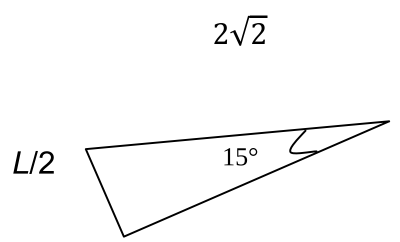
$$24 = (12) R^2 \text{ sen } 15° \cos 15°,$$

$$\frac{24}{12} = R^2 \text{ sen } 15° \cos 15°$$

$$R = \sqrt{\frac{2}{\text{sen } 15° \cos 15°}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Con el valor del radio, es posible plantear triángulos rectángulos con los cuales encontrar las medidas del lado para el perímetro y del apotema para el área.

Obtención de la medida del lado (L) del dodecágono regular, donde el lado del polígono mide $\frac{L}{2}$ en el triángulo rectángulo.



sen 15° = $\frac{L/2}{2\sqrt{2}}$,

sen 15° = $\frac{L}{4\sqrt{2}}$,

(sen 15°) $(4\sqrt{2})$ = L,

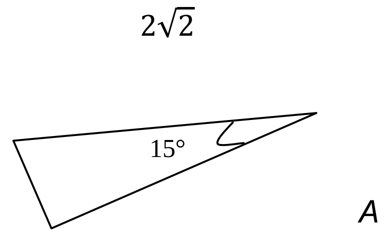
1.464 = L.

Obtención de la medida de el apotema (a), que es el radio del circunferencia circunscrita al polígono.

cos 15° = $a/(2\sqrt{2})$,

(cos 15°) $(2\sqrt{2})$ = a,

2.7320 = a.



La comprobación de estos resultados (lado y apotema) es posible sustituyendo en la fórmula del área, donde al emplear estas medidas obtenemos A = 24 u^2:

$$A = \frac{P \times a}{2},$$

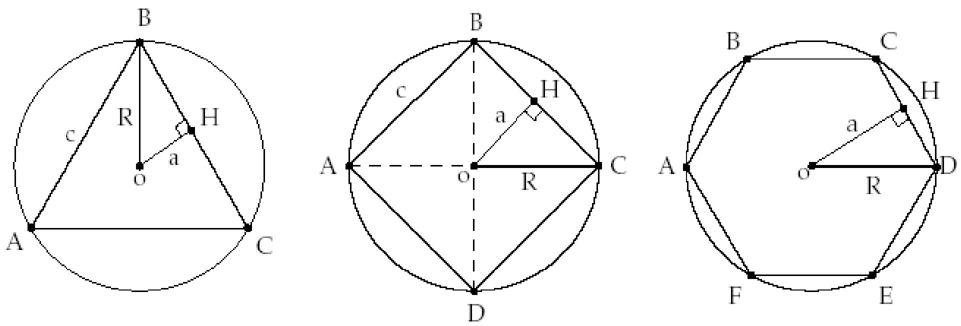
$$A = \frac{(12)(1.464)(2.732)}{2},$$

$$A = 23.997 \text{ u}^2,$$

$$A = 24 \text{ u}^2.$$

El valor del área quedó muy aproximado, dado que los valores del lado y del apotema fueron truncados a milésimos.

4.- Utilizando los valores de las funciones trigonométricas para los ángulos de 30°, 45º y 60°, expresar en función de R el lado, el apotema y el área de los siguientes polígonos inscritos en un círculo.



Cuadro 4.1

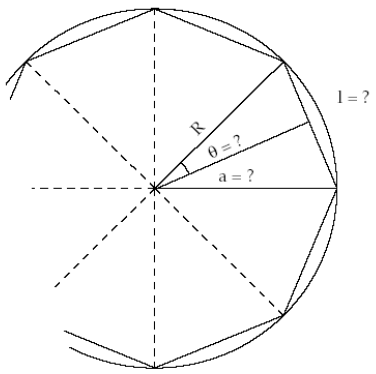
Polígonos regulares y su generalización

	TRIÁNGULO	CUADRADO	HEXÁGONO
ÁNGULO	$\theta = \frac{360°}{2(3)}$ $\theta = \frac{360}{6}$ $\theta = 60°$	$\theta = \frac{360°}{2(4)}$ $\theta = \frac{360}{8}$ $\theta = 45°$	$\theta = \frac{360°}{2(6)}$ $\theta = \frac{360°}{12}$ $\theta = 30°$
LADO	sen 60° = $\frac{L/2}{R}$ sen 60° = $\frac{L}{2R}$ $2R$ sen 60° = L	sen 45° = $\frac{L/2}{R}$ sen 45° = $\frac{L}{2R}$ $2R$ sen 45° = L	sen 30° = $\frac{L/2}{R}$ sen 30° = $\frac{L}{2R}$ $2R$ sen 30° = L
APOTEMA	cos 60° = $\frac{a}{R}$ R cos 60° = a	cos 45° = $\frac{a}{R}$ R cos 45° = a	cos 30° = $\frac{a}{R}$ R cos 30° = a
ÁREA	$A = \frac{P \times a}{2}$ $A = \frac{n\, 2R \text{ sen } 60° \, R \cos 60°}{2} \circ$ $A = n R^2$ sen 60° cos 60°	$A = \frac{P \times a}{2}$ $A = \frac{n\, 2R \text{ sen } 45° \, R \cos 45°}{2}$ $A = n R^2$ sen 45° cos 45°	$A = \frac{P \times a}{2}$ $A = \frac{n\, 2R \text{ sen } 30° \, R \cos 30°}{2}$ $A = n R^2$ sen 30° cos 30°
	Generalización $A = n R^2$ sen θ cos θ		

Se puede llegar a la generalización del área de un polígono de *n* lados, como se observa en el cuadro 4.1. Una estrategia es organizar los resultados en columnas para los polígonos regulares hasta su generalización, en la que de forma metódica se observan las congruencias en las fórmulas para obtener el ángulo, el lado, el apotema y el área de cada polígono. También se requiere que los alumnos dominen la expresión de fórmulas en función de un dato (en este caso, del radio *R*).

Utilizar las funciones trigonométricas para los ángulos de 30°, 45° y 60° es parte del conocimiento de los valores de las razones trigonométricas. En este problema se propone un mayor reto al querer que los alumnos apliquen los nuevos conocimientos y generen otros nuevos, a partir del uso del lenguaje algebraico y la trigonometría.

5.- ¿Cuáles serían las fórmulas para calcular el lado, el apotema [*a*], el perímetro [*P*] y el área [A] de un polígono de *n* lados inscrito en una circunferencia de radio *R*?



$l(n) = 2R \text{ sen } \theta$

$a(n) = R \cos \theta$

$P(n) = 2n\, R \text{ sen } \theta$

$A(n) = nR^2 \text{ sen } \theta \cos \theta$

siendo $\theta = 360°/2n$.

En el *Libro para el maestro* se sugiere que los alumnos no memoricen las fórmulas anteriores; así mismo, se propone que las utilicen para resolver problemas como el indicado en el número 6 (es el problema siguiente). Con la actividad propuesta en el ejemplo 4, al expresar la medida del lado y del apotema en función del radio, es posible la obtención de estas fórmulas. En estas actividades (4 y 5) se propone que además de la aplicación de las razones trigonométricas para la obtención de la medida de un lado, se llegue a la generalización, en este caso planteando fórmulas para el ángulo, el lado, el apotema, el perímetro y el área de un polígono regular de *n* lados.

6.- En la tabla que viene a continuación están dados el lado, el apotema, el perímetro y el área de los polígonos regulares de 3 (triángulo equilátero) y 6 (hexágono regular) lados inscritos en una circunferencia de radio 10 cm. Completa la tabla para los polígonos regulares de 12, 24 y 48 lados. ¿Qué descubres en la tabla? Coméntalo con tu profesor y compañeros.

NÚM. DE LADOS	LADO	APOTEMA	PERÍMETRO	ÁREA
3	17.32	5.00	51.96	129.9
6	10.00	8.66	60.00	259.8
12	5.18	9.65	62.12	300
24	2.61	9.91	62.65	310.58
48	1.31	9.97	62.78	313.26

(Los resultados en la tabla están redondeados a la segunda cifra decimal.)

Es importante que para poder completar la tabla se use una calculadora, con el fin de facilitar el trabajo con las tablas de razones trigonométricas y así no se pierda el objetivo.

A través de los valores encontrados en la tercera columna de la tabla, se observa cómo mientras más lados tienen los polígonos regulares más parecidos son su radio (10 cm) y su apotema. Por otra parte, la medida del lado va disminuyendo. Sería interesante cuestionar a los alumnos sobre qué pasaría con la medida de los lados en un polígono de 96 lados, por ejemplo.

Este ejercicio también permite el uso y el manejo de la información mediante tablas. Lo primordial en este ejercicio no es completar la tabla, sino las deducciones que se puedan obtener al completarla.

Por otra parte, en el *Libro para el maestro*, el profesor frente a grupo que proponga esta actividad puede no darse cuenta del error cometido en la tabla original (p. 242), donde el valor escrito para el apotema del polígono de 6 lados es 8.59 y para el área, 258.58. Estos datos no cambian el sentido de este ejemplo; sin embargo, pueden crear confusión en el alumno y distraerlo de las observaciones importantes que deben hacer.

Resultados de la revisión de los temas 16 y 17 del FAD publicado por la SEP

La ficha propuesta para el tema 16, de manera inicial enfoca el estudio de la tangente en cuatro triángulos rectángulos. En el mismo contenido de la ficha del tema 16, “Rampas para patinetas”, se exponen diferentes estrategias que los alumnos pueden emplear para elegir la rampa con mayor inclinación (con respecto al piso); entre ellas propone medir el ángulo directamente, hacer un esquema a escala (1 cm: 1 m); sin embargo, se espera que los alumnos apliquen para el caso 3 lo visto en *semejanza*. Finalmente, en el caso 4 presentan lados con decimales, de modo que para validar sus resultados los argumentos deben ser más lógicos que basados en el azar.

El ideal para resolver esta ficha es que el alumno plantee la razón que existe entre la altura de la rampa y la distancia que se recorre de horizontalmente. De no darse esta situación, se sugiere que el maestro intervenga, haga la observación de esta razón, dándoles a conocer que se llama tangente, y entonces los alumnos la planteen en los diferentes triángulos. Se pretende también que los alumnos relacionen este tema con lo estudiado en semejanza, de modo que analicen que el valor de la tangente es invariable para los triángulos que son semejantes, es decir, que la razón se conserva para ángulos de la misma medida.

Las actividades 2 y 3 esencialmente se convierten en ejercicios en los que el alumno despeja un cateto y, ayudándose de la calculadora o de tablas trigonométricas, encuentra el valor del otro cateto. En la última actividad se solicita a los alumnos que además de utilizar tangente para encontrar el cateto usen el teorema de Pitágoras para hallar la hipotenusa.

A continuación se resumen las actividades propuestas a los alumnos, y en la figura 4.1 se señalan algunas de las características presentadas en esta ficha.

Tema 16 Trigonometría: Razones trigonométricas de un ángulo agudo (cálculo y primeras aplicaciones)

Propósito. Utilizar la trigonometría para resolver problemas de cálculo geométrico.

Contenidos. Primeros ejemplos para motivar el estudio de la trigonometría. Tangente de un ángulo agudo.

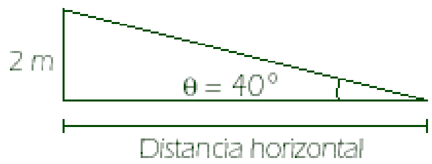
1.- Organizados en equipos de cuatro o cinco alumnos, plantee el siguiente problema: Se quieren construir rampas para una competencia de patinetas. Para medir el ángulo de inclinación de cada rampa, se considerarán dos medidas [altura y distancia horizontal]:

De acuerdo con las medidas especificadas, elijan aquella rampa cuyo ángulo de inclinación sea mayor en cada caso (las medidas están dadas en metros).

Caso	Rampa 1	Rampa 2
1	$a = 1.5$ $b = 6.5$	$a = 1.5$ $b = 7.5$
2	$a = 1.5$ $b = 6.5$	$a = 1.7$ $b = 6.5$
3	$a = 1.5$ $b = 6$	$a = 2$ $b = 8$
4	$a = 1.6$ $b = 6.5$	$a = 1.7$ $b = 7$

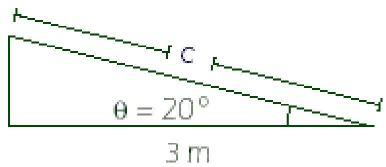
2.- Nuevamente organizados en equipos, plantee el siguiente problema:

Se quiere construir una rampa cuya altura sea de 2 m y que forme un ángulo de 40° con el piso. ¿Cuál será la distancia horizontal que tendrá la base de la rampa?



3.- Plantee a los equipos el siguiente problema.

Calculen la longitud *c* de la siguiente rampa:



De las 3 actividades que propone esta ficha, se identificó que en la primera de ellas se propone una situación problemática que genera nuevos conocimientos al alumno, ya que permite que éste valide sus resultados con la estrategia que emplee en la resolución de cada caso. Con el problema de la primera actividad se puede conocer que la razón trigonométrica tangente implica al ángulo de elevación de la rampa. Con el uso de una tabla de razones trigonométricas, o despejando y haciendo las operaciones en una calculadora científica, se obtiene el valor del ángulo.

En las actividades 2 y 3 se identificó que el alumno puede resolver con mayor facilidad la situación problemática si ya ha resuelto la actividad 1. En estas actividades se propone un repaso de las razones trigonométricas: tangente y coseno; también, la aplicación y despeje de dichas razones para encontrar un lado desconocido en un triángulo rectángulo.

La segunda actividad es un repaso sobre la aplicación de la razón tangente. La diferencia con la actividad 1 es que en la actividad 2 se conoce el ángulo y se desconoce uno de los catetos. Después de plantear una igualdad con “tan 40°”, el alumno despeja y obtiene el valor del cateto con ayuda de la calculadora. La tercera actividad puede resolverse con coseno del ángulo θ, lo que dará al alumno la aplicación de una razón trigonométrica diferente, pero en esencia sólo practica el uso de una razón trigonométrica para conocer el valor de un lado en un triángulo rectángulo. Las características de las 3 actividades de la ficha del tema 16, “Trigonometría: Razones trigonométricas de un ángulo agudo”, del *Fichero de actividades didácticas,* se resume en la figura 4.1.

Característica / Actividad	Propone que el alumno genere nuevos conocimientos	Propone que el alumno repase, aplique y despeje las razones trigonométricas conocidas
1	✓	
2		✓
3		✓

Figura 4.1 Características de las actividades de la ficha “Rampas para patinetas”

Las actividades propuestas en la ficha del tema 17, "Para medir polígonos regulares", son exactamente las mismas actividades propuestas en el *Libro para el maestro* (Alarcón *et al.*, 1994), acerca de polígonos regulares y la trigonometría. Se mencionan posibles estrategias de resolución de los alumnos. La actividad 2 de esta ficha está directamente relacionada con el problema 4 del *Libro para el maestro*, donde el alumno puede obtener la generalización

$$A = n\, R^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta.$$

Se espera que el alumno lo logre mediante las orientaciones del profesor y que compruebe dichos resultados asignando valores al radio de las figuras —utilizando primero la fórmula obtenida— para después corroborarlo con un método diferente.

A continuación se presenta un resumen de la ficha del tema 17, "Para medir polígonos regulares", y en la figura 4.2 se señalan las características generales de esta ficha.

Tema 17: Problemas de trigonometría

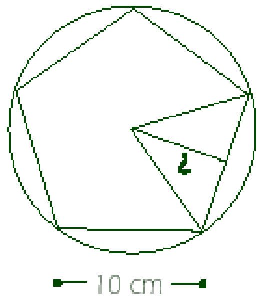
Propósitos: Utilizar las relaciones trigonométricas para resolver problemas de cálculo geométrico. Estudio de los polígonos regulares.

Contenidos: Resolución de triángulos rectángulos y sus aplicaciones. Estudio de los polígonos regulares.

Material: Juego de geometría y calculadora.

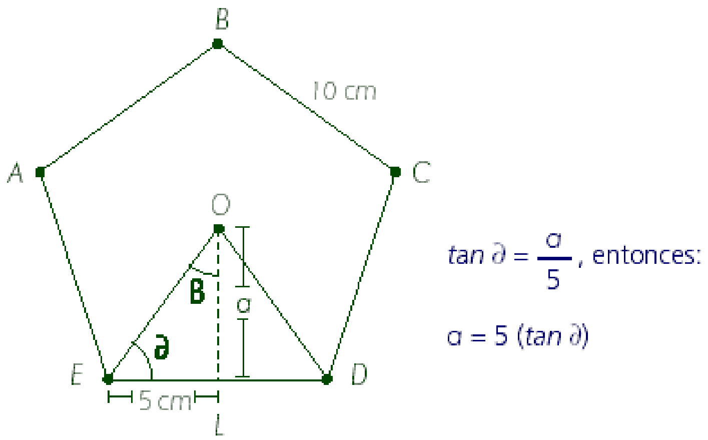
1.- Proponga al grupo resolver el siguiente problema en equipos de cuatro o cinco alumnos:

a) Calculen el perímetro y el área de un pentágono regular que mide 10 cm por lado.



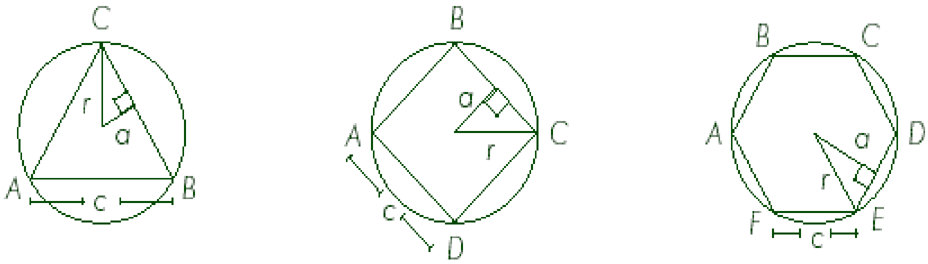
b) Utilizando funciones trigonométricas, calculen el perímetro y el área de un heptágono, un octágono, un *n*-ágono, etcétera, cuyos lados midan 20 cm respectivamente.

A partir de las soluciones de los alumnos, puede orientarlos para resolver el mismo problema utilizando razones trigonométricas, en particular la razón tangente. Así, el apotema del pentágono se puede expresar en función de uno de los ángulos del triángulo rectángulo *OEL*, como se muestra enseguida.



2.- Para resolver los siguientes problemas, organice al grupo en equipos de cuatro o cinco alumnos.

Utilizando los valores de las funciones trigonométricas para los ángulos de 30°, 45° y 60°, en función del radio (*r*) expresen: el valor de un lado (*c*), el apotema (*a*) y el área (*S*) de los polígonos regulares siguientes.



En el caso del triángulo, si se considera el ángulo de 30°, las siguientes son expresiones que los alumnos podrán encontrar:

$$c = 2r\,(\cos 30°); \quad a = r\,(\text{sen } 30°); \quad S = 3r^2\,(\cos 30°)\,(\text{sen } 30°).$$

VARIANTES

1.- En la tabla que se muestra a continuación están dadas las medidas de un lado, así como el apotema, el perímetro y el área de los polígonos regulares de tres lados (triángulo equilátero) y seis lados (hexágono regular) inscritos en un círculo que tiene 10 cm de radio. Completen la tabla para los polígonos regulares de 12, 24 y 48 lados que también están inscritos en un círculo que mide 10 cm de radio. ¿Qué relaciones descubren después de que han completado la tabla? Coméntenlo con sus compañeros y escriban sus conclusiones.

Número de lados	Lado	Apotema	Perímetro	Área
3	17.32	5.00	51.96	129.90
6	10.00	8.59	60	258.58
12				
24				
48				

2.- Un polígono regular de 12 lados tiene de área 24 unidades cuadradas. ¿Cuánto miden sus lados? ¿Cuánto miden los radios de los círculos inscrito y circunscrito? ¿Y si el polígono regular tuviera 8, 9, 10, 18,... lados?

De las 2 actividades que se proponen en la ficha del tema 17, se identificó que en la primera de ellas se propone una situación problemática que permite a los alumnos repasar y aplicar la razón trigonométrica tangente para encontrar el apotema; también, permite que el alumno aplique sus conocimientos sobre el cálculo del perímetro y el área de polígonos regulares.

La segunda actividad propuesta en la ficha del tema 17 plantea un problema en el que el alumno pone en práctica el uso de las razones trigonométricas, en el que además se generan nuevos conocimientos. En esta actividad el alumno expresará en lenguaje algebraico cómo obtener el valor de un lado, el apotema, y el área en función del radio de polígonos regulares (triángulo, cuadrado y hexágono) inscritos en una circunferencia.

Las variantes 1 y 2 de las actividades de la ficha del tema 17 también proponen situaciones problemáticas en las que el alumno genera nuevos conocimientos. En la variante 1 se propone que los alumnos completen una tabla (lo cual puede hacerse aplicando las expresiones que obtuvieron en la actividad 2 de la misma ficha). Además de hacer un repaso a dichas expresiones se pide a los alumnos que observen lo que sucede con las medidas del lado, el apotema, el perímetro y el área de los polígonos. Con ello los alumnos pueden observar y conocer que en una circunferencia de 10 cm de radio al trazarse polígonos regulares:

- La medida de cada lado disminuye al aumentar el número de lados.
- La medida del apotema aumenta, casi hasta medir lo que mide el radio, si aumenta el número de lados.
- El perímetro de cada polígono se acerca más al perímetro de la circunferencia de 10 cm de radio al aumentar el número de lados.
- El área de cada polígono aumenta al aumentar el número de lados y se aproxima al área del círculo de 10 cm de radio.

En la variante 2 de la ficha del tema 17 se propone un problema en el que el alumno debe determinar la medida del lado, de los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita (son el radio de la circunferencia circunscrita y el apotema) de un polígono regular de 12 lados que tiene un área de 24 u^2. Este problema es de mayor dificultad. Para resolverlo el alumno debe partir del área como único dato del problema. En la actividad 2, anterior a la variante 2, se solicitó expresar el área en función del radio; aquí se pide conocer el radio, el lado, y el apotema cuando es conocida el área del polígono. Este problema se puede resolver planteando expresiones algebraicas para el perímetro y el apotema en función del lado del polígono. Al sustituir dichas expresiones en la fórmula del área, se determinar el valor del lado, y sustituyendo en las primeras expresiones se obtiene el apotema. Con los valores del apotema y el lado (dividiéndolo a la mitad), y aplicando el teorema de Pitágoras se puede calcular la medida del radio (de la circunferencia circunscrita). Otra forma de obtener el radio, es que una vez obtenida la longitud del lado del polígono se divida entre 2 (lado de un triángulo rectángulo), y dividir el resultado entre tan 15°. La dificultad del problema aumenta al solicitar que se plantee una estrategia general que pueda aplicarse a polígonos de 8, 9, 10, 18,… lados.

En la figura 4.2 se señalan las características generales de las actividades de la ficha del tema 17, "Para medir polígonos regulares".

Característica / Actividad	Propone al alumno generar nuevos conocimientos	Propone que el alumno repase, aplique y despeje las razones trigonométricas conocidas
1		✓
2	✓	
Variante 1	✓	✓
Variante 2	✓	

Figura 4.2 Características de las actividades de la ficha "Para medir polígonos regulares"

Resultados de la selección, aplicación y ajustes de la secuencia de problemas de trigonometría

Resultados de la selección de problemas para la secuencia de actividades en clase

Un objetivo de esta investigación consistió en seleccionar y organizar los problemas para propiciar que en los procesos de resolución los estudiantes consoliden nociones, construyan conceptos y usen diferentes estrategias y recursos. Por esta razón se seleccionaron los problemas que permitan el análisis de las estrategias que emplean los alumnos de secundaria al resolverlos. Se privilegian aquí los problemas para descubrir:

- las razones trigonométricas y su significado, y
- la resolución de triángulos rectángulos.

En el Cuadro 4.2 se encuentran citadas los problemas del *Fichero de Actividades Didácticas* (FAD) de matemáticas y los del *Libro para el maestro* (LM) relacionados con la trigonometría; también se menciona una adaptación a las orientaciones didácticas propuestas en el Programa de estudio 2006 (p. 131) de matemáticas. Así mismo, aparecen los problemas en la secuencia en que pueden ser abordados para desarrollar los subtemas del tema Medida con respecto a la trigonometría.

Cuadro 4.2 Temas y subtemas de trigonometría en el FAD y el LM

Problema	Fuente	Subtema
Ficha 16, actividad 1	FAD	- Tangente de un ángulo agudo - Significado de la razón tangente en un triángulo rectángulo
Ficha 17, actividad 1	FAD	- Tangente de un ángulo agudo - Significado de la razón tangente en un triángulo rectángulo (Justificación de fórmulas)
Orientaciones didácticas, p. 131 (Adaptación)	Programa de estudio 2006	- Razones trigonométricas - Significado de las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo (Justificación de fórmulas)
Orientaciones didácticas, p. 131 (Adaptación)	Programa de estudio 2006	- Razones trigonométricas - Significado de las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo
*Ficha 17, actividad 2	FAD	- Resolución de triángulos rectángulos
*Tabla de problemas de resolución de triángulos	LM	- Resolución de problemas de triángulos rectángulos
* Problema del edificio y la antena	LM	- Resolución de problemas de triángulos rectángulos

[Continúa]

Cuadro 4.2 [Concluye]

Problema	Fuente	Subtema
*Problema de la Torre Latinoamericana	LM	- Resolución de problemas de triángulos rectángulos
*Problema del puente	LM	- Resolución de problemas de triángulos rectángulos
*Problema de la nave	LM	- Resolución de problemas de triángulos rectángulos

Después de haber analizado las tareas que se proponen en el *Fichero de Actividades Didácticas* y en el *Libro para el maestro* para que el profesor las utilice con sus alumnos, no se identificó algún planteamiento para introducir las razones trigonométricas a través de un problema, por lo que se propone una adaptación a las orientaciones didácticas en el Programa de estudio de 2006 (SEP, 2006, p. 132) para abordar el subtema indicado en el Cuadro 4.2.

Conviene diseñar un planteamiento en el que se aborde de manera conjunta el descubrimiento de las razones trigonométricas y su significado en un triángulo rectángulo. Esto para no tratar en temas separados una situación inherente a la otra, como se propone en el programa del Plan de estudios de 2006 (donde las razones trigonométricas se estudian en el tema “Estimar, medir y calcular” y el significado de las razones trigonométricas en triángulos rectángulos se estudia en el tema “Justificación de fórmulas”).

Resultados obtenidos con el grupo piloto

Es necesario exponer lo sucedido en cada sesión de trabajo con los alumnos del grupo piloto y con ello dar cuenta de las adecuaciones a la secuencia original. En general, se agregaron algunas actividades como parte de la secuencia y otras se eliminaron; una de estas últimas se utilizó en la entrevista a través de la resolución de problemas de trigonometría.

Día 1 del grupo piloto

El primer día de trabajo con el grupo 3° "E" fue el lunes 7 de enero de 2008. Los alumnos trabajaron en una hoja en blanco, en la que tenían que trazar un triángulo rectángulo con la única condición de que uno de los ángulos agudos midiera 40°. El primer detalle observado fue el desconocimiento del uso del transportador y, en segundo lugar, la utilización de una unidad de medida arbitraria, no convencional, para los lados. "¿Cómo lo trazo?" fue una pregunta común en este primer día. Esta actividad se conservó en la secuencia para el grupo de trabajo.

En seguida los alumnos debían llenar una tabla con datos como la longitud de cada cateto, la hipotenusa y tres cocientes (dados por las razones para seno, coseno y tangente). Los alumnos se reunieron en equipos; sin embargo, no se organizaron para hacer las operaciones distribuyéndose el trabajo. Los alumnos trabajaron sin calculadora. Las principales dificultades encontradas para dividir usando el algoritmo consistieron en colocar el dividendo y el divisor donde corresponden, pero sobre todo dividir cuando hay punto decimal. Estas dudas de los alumnos pertenecen a un tema básico de su aprendizaje, y se resolvieron para todo el grupo en el pizarrón. Considerando el tiempo invertido en resolver dudas del mismo tipo para realizar la actividad, con el grupo de trabajo se utilizaron calculadoras desde el primer día.

Los alumnos obtuvieron triángulos con las características solicitadas y se dieron cuenta de que no hubo dos triángulos con las mismas longitudes en sus lados; expresaron que éstos eran semejantes. Sin embargo, no expresaron que fueran semejantes por tener sus ángulos iguales (uno recto y otro de 40°).

Las conclusiones que obtuvieron los alumnos en este día de trabajo fueron poco precisas. Un equipo de cinco alumnos observó la similitud de los cocientes obtenidos por cada alumno del cateto opuesto entre la hipotenusa, así como del cociente del cateto adyacente entre la hipotenusa. En general, los alumnos escribieron sobre la coincidencia de los resultados de las columnas para cada cociente; sin embargo, no concluyeron que esto fue así porque todos completaron la tabla para el ángulo de 40°. Ocho alumnos, divididos en tres equipos, sólo copiaron lo escrito en el pizarrón y no aportaron nada a las conclusiones.

Día 2 del grupo piloto

La actividad 2 se basó en una fotografía rectangular y su ampliación. El objetivo de la actividad era reforzar los resultados y conclusiones que obtuvieron los alumnos en la clase anterior. Cada alumno tuvo las dos fotografías y trazó la diagonal en cada una. Se reunieron en equipos de tres personas y trabajaron con un juego geométrico y una calculadora.

Se pasó a cada equipo para retomar las instrucciones dadas al principio de la actividad, ya que las calculadoras científicas, las imágenes (fotografías) y el juego de geometría causaron mucha distracción a los alumnos. La actitud de los alumnos en este día de trabajo refuerza la conveniencia de trabajar con las calculadoras y juegos de geometría en la actividad previa para que los alumnos se familiaricen con dichos materiales.

Los alumnos que carecían de práctica en el uso de calculadoras se distraían mucho —sobre todo jugando con los diferentes botones—. Cuando habían terminado de completar la tabla, habían pasado 40 minutos. Hasta ese momento se entregó a cada alumno una tabla con los valores de las funciones trigonométricas. Cuando analizaron los cocientes y, recordando el nombre de las razones trigonométricas vistas el día anterior, relacionaron los datos. Al concluir la sesión de trabajo los alumnos encontraron de qué ángulo se trataba, lo cual era la finalidad de la actividad del día.

La actividad de la diagonal en un rectángulo no refuerza el conocimiento acerca de las razones trigonométricas. Esta actividad puede emplearse en la aplicación de las diferentes razones para encontrar ángulos. Para reforzar la actividad del día 1 con el grupo de trabajo (final), se sustituyó ésta con otra actividad.

Día 3 del grupo piloto

En el tercer día de trabajo hubo más alumnos que en las dos clases anteriores, sólo faltaron dos alumnos. Se consideró conveniente hacer un recordatorio usando el pizarrón, sobre las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.

Se explicó a los alumnos sobre la competencia de rampas y se dibujó un esquema de éstas en el pizarrón. Luego se entregó a cada alumno una hoja de trabajo con el problema de las rampas (véase el anexo 3) y después de reunirlos en equipos de cuatro alumnos, se les entregó una calculadora por equipo.

El problema consistió en determinar cuál de dos rampas en cada caso tenía mayor ángulo de inclinación y justificar la respuesta. Fue necesario hacer un esquema de las dos rampas del primer caso para que los alumnos tuvieran un ejemplo de cómo podrían hacer la comparación.

En dos de los seis equipos utilizaron la razón tangente porque estaba en el pizarrón. Comentaron que tenían una idea de hacer algo con la tangente y los dos lados de la rampa conocidos, pero que no sabían cómo usarla y que tampoco conocían el significado de los cocientes que obtenían. Se hizo notar lo anterior a todo el grupo (mediante una puesta en común), pero en los demás equipos siguieron procedimientos diferentes y no fue relevante para ellos.

Para finalizar el caso 1 de la actividad de las rampas, se pidió a los alumnos que utilizaran la tabla de valores de razones trigonométricas que se les entregó en la primera clase. Se pidió que por equipo buscaran los cocientes que habían obtenido en la columna de la tangente. Así fue como los alumnos determinaron que los ángulos implicados en las rampas eran de 13° y de 11° respectivamente; con estos valores justificaron por qué la rampa uno tiene un ángulo de elevación mayor.

Los alumnos siguieron trabajando individualmente, aunque permanecían agrupados en sus respectivos equipos. Sólo 10 alumnos del grupo realizaron operaciones para obtener los cocientes relacionándolos con la tangente y así obtener el ángulo de inclinación de las rampas.

Hubo 7 alumnos que mostraron apatía hacia el trabajo individual y en grupo, pues se limitaron a copiar algunos resultados sin considerar las operaciones. También hubo respuestas sin números o justificaciones (por ejemplo, “la rampa dos está más inclinada”, sin decir por qué).

No dio tiempo para resolver la segunda parte de la actividad (calcular el perímetro y el área de un pentágono regular que mide 10 cm por lado). Por estar implicada la tangente en la resolución de esta actividad, será parte de la entrevista a través de un problema. El trabajo en equipos hizo muy lento el desarrollo de la actividad. En el grupo de trabajo se resolverá la actividad individualmente.

Día 4 del grupo piloto

Hubo una asistencia de sólo 15 alumnos en el grupo (faltaron 10); sin embargo, esta situación facilitó el trabajo individual. Se explicó a los jóvenes del grupo piloto que resolveríamos triángulos rectángulos en su cuaderno y que los datos los anotaríamos en la tabla impresa en la hoja de trabajo para ese día.

A los estudiantes les costó un poco de trabajo determinar la razón trigonométrica con la que encontrarían alguno de los lados de los triángulos dados en la tabla. Sólo resolvieron los dos primeros casos.

Las ventajas de haber trabajado con tan pocos alumnos consistieron en que participaron más oralmente, expusieron con mayor facilidad sus dudas y pusieron más interés del habitual. La desventaja fue que no se alentó a los alumnos a que concluyeran los cuatro casos de la actividad, ya que al día siguiente se previno retomarlos para aquellos que faltaron.

Día 5 del grupo piloto

Este día, 5 alumnos llevaron su calculadora científica, lo cual fue muy sorprendente, ya que el profesor titular no la solicitó para temas previos. Nuevamente se trabajaron los casos 1 y 2 de la tabla de la actividad del día anterior. Los alumnos resolvieron individualmente los casos 3 y 4 en su cuaderno. Finalmente pasaron los valores encontrados a su hoja de trabajo. En grupo, se hizo notar la diferencia entre los cuatro casos y ellos determinaron que dependía del ángulo de referencia cuáles serían el cateto adyacente y el opuesto. Sin embargo, no determinaron si esos cuatro casos eran los únicos posibles.

Sólo 4 de los 20 alumnos resolvieron el problema del edificio y la antena (véase el anexo 5). Se les dijo que era opcional, aun cuando estaba impreso en la misma hoja de trabajo que la tabla; y tal vez ésta fue la razón del desinterés del resto de los alumnos.

Al revisar los cuadernos de los alumnos, fueron aproximadamente10 (los mismos de la clase anterior) quienes comprendieron que resolver un triángulo rectángulo es hallar los valores faltantes a partir de los tres datos proporcionados del triángulo.

En la actividad 2, de acuerdo con el esquema del triángulo rectángulo impreso en la hoja de trabajo, la mayoría de los alumnos utilizó γ como ángulo de referencia. Sólo una alumna preguntó que si ella utilizaba β como ángulo de referencia, entonces b sería el cateto opuesto (véase el anexo 5).

Día 6 del grupo piloto

Sólo asistieron 11 alumnos (menos de 50%). El profesor titular no había asistido el día anterior y tampoco asistió a la sesión de este día. Sin embargo, nueve de los alumnos que sí asistieron llevaron su calculadora científica.

Se devolvió a los alumnos la hoja de trabajo del día anterior y una alumna explicó ante el grupo cómo había resuelto el problema del edificio y la antena. El problema resultó difícil de comprender para tres alumnos que insistían en preguntar por qué su compañera restó las alturas. Sin embargo, los demás alumnos decían que ya no les hiciera caso porque “nunca entienden”.

Para la sesión del día se repartieron las hojas de trabajo con los problemas 3, 4 y 5 (véase el anexo 6). La mayoría de los alumnos encontró más familiar el problema 3, de la Torre Latinoamericana. Dos de ellos no hicieron algún esquema para resolverlo; dos más trazaron un rectángulo, y el resto lo dibujó con una antena, muy parecido al esquema del problema anterior.

Cuando quedaban menos de 20 minutos para resolver los dos problemas, se pidió a los alumnos que leyeran los dos problemas siguientes y decidieran cuál de ellos resolverían. Ocho resolvieron el problema 4, que es parecido al del edificio y la antena; sin embargo, sólo uno de ellos lo resolvió por completo. Los otros siete obtuvieron un resultado parcial, pues se requerían dos resultados para obtener la diferencia de longitudes y dar el resultado final del segundo problema.

Una alumna resolvió los problemas 4 y 5. En el cuarto problema (el del puente; véase el anexo 6) obtuvo la diferencia de longitudes dando el resultado final correcto. En el problema 5, acerca de la nave (véase el anexo 7), lo resolvió utilizando la razón tangente y el resultado que obtuvo lo multiplicó por 2, explicando que son dos triángulos en el esquema del problema.

Cada problema toma alrededor de 20 minutos para que lo resuelvan los alumnos. Hizo falta tiempo para revisar con todo el grupo (los 11 alumnos que asistieron) los resultados que obtuvieron y para que expusieran por qué lo resolvieron en la forma que lo hicieron.

Día 7 del grupo piloto

En este último día de aplicación de la secuencia asistieron 13 alumnos. Se les entregó la hoja de trabajo con dos problemas, el primero solicitando encontrar el perímetro y el área de un pentágono regular con 10 cm de lado.

Después de casi 10 minutos se hizo una lluvia de ideas sobre cómo lo resolvían, para ayudar a quienes no habían escrito algo en su hoja de trabajo. La mayoría había calculado sólo el perímetro de la figura, y en algunos casos escribieron la fórmula para el área del pentágono: $A = \frac{P \times a}{2}$.

Un alumno pasó al pizarrón y explicó que podía usar un triángulo rectángulo que tuviera de base 5 unidades y el ángulo opuesto igual a 36°. Dijo que si el ángulo [que coincide con el ángulo central] del triángulo dibujado en el esquema del problema media 72°, la mitad era 36°.

Los 13 alumnos escribieron la misma operación para obtener el apotema del pentágono; sólo 7 plantearon el esquema que explicaba por qué la tangente y por qué la medida del ángulo.

Finalmente fueron 8 de los 13 alumnos quienes intentaron resolver el problema de calcular el perímetro y el área de un octágono regular cuyos lados miden 20 cm de lado (véase el anexo 8). Tres de los alumnos consideraron un triángulo rectángulo con base de 10 cm y un ángulo opuesto a éste de 45°. Obtuvieron el apotema de 10 cm y no se dieron cuenta de que el ángulo agudo debía medir la mitad, es decir 22.5°, para pertenecer al triángulo rectángulo con el que se resuelve el problema.

Por falta de tiempo los alumnos no llegaron a la generalización que propone la actividad: obtener el perímetro y el área de un *n*-ágono de 20 cm de lado. Esta actividad completa formó parte de la entrevista a través de un problema, ya que invita al alumno a encontrar los datos ocultos en el problema, recordar fórmulas que no se han utilizado comúnmente, encontrar patrones de resolución, y finalmente llegar a la generalización empleando razones trigonométricas en polígonos regulares.

La resolución de esta actividad en grupo no permite ver el modo particular en que los alumnos resuelven el problema, desde recordar conceptos como perímetro hasta obtener la longitud del apotema y aplicarla en otra fórmula para obtener un área específica, aun cuando no se determine el número de datos.

Resultados obtenidos con el grupo de trabajo

En el anexo 9 se muestra la secuencia de trabajo empleada en el grupo de trabajo y los problemas que formaron parte de las entrevistas aplicadas de manera individual a 5 alumnos del mismo grupo.

Los ajustes hechos a la secuencia de actividades utilizada con el grupo piloto funcionaron en su aplicación con el grupo de trabajo. Se mejoró el tiempo empleado en cada día de clase y se llegó a una conclusión con el grupo al finalizar cada sesión. Se redujeron de 7 a 6 los días con el grupo de trabajo y hubo mejores resultados en la resolución de problemas de manera individual.

Día 1 con el grupo de trabajo

El ambiente en el aula

En el grupo de trabajo, de un total de 25 alumnos, 2 no asistieron. En la primera actividad los alumnos atendieron a las indicaciones. Algunos alumnos comían, pues acababan de entrar a clase después del receso, así que la clase empezó con casi 10 minutos de retraso.

Como indicaciones a los alumnos, se les pidió ser puntuales, no entrar con alimentos, hablar fuerte y no faltar. También se les explicó que la cámara de video estaba encendida y que se usaría sólo con la autorización del grupo; estuvieron de acuerdo y pudimos empezar con las actividades del día.

Actividad de aprendizaje

En la hoja de trabajo que se repartió a los alumnos, trazaron un triángulo rectángulo usando un transportador y escuadras (véase la figura 4.3). Se preguntó quiénes tenían dudas sobre cómo trazarlo, y 5 alumnos levantaron la mano e indicaron que la duda era cómo trazar el ángulo agudo de 40° para el triángulo solicitado. Se explicó en el pizarrón cómo colocar los instrumentos de geometría.

Estrategias

Después de que cada alumno trazó un triángulo rectángulo con un ángulo agudo de 40°, se pidió que obtuvieran los cocientes de las razones entre lados del triángulo: cateto opuesto entre hipotenusa, cateto adyacente entre hipotenusa, y cateto opuesto entre cateto adyacente, con respecto al ángulo de 40° (véase la figura 4.4).

Figura 4.3 Trazo de un triángulo rectángulo con un ángulo agudo de 40°

Mide los lados de tu triángulo. Escribe abajo la medida correspondiente para:

- El cateto opuesto al ángulo de 40° mide 7cm
- El cateto adyacente al ángulo de 40° mide 9cm
- La hipotenusa de tu triángulo rectángulo mide 11.6

Obtén el resultado de las siguientes razones:

$\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$ $\frac{7cm}{11.6} = .6034482759$

$\frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$ $\frac{9cm}{11.6} = .775862069$

$\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}}$ $\frac{7cm}{9cm} = .7777777778$

Figura 4.4 Razones entre los lados de un triángulo rectángulo

Se facilitó una calculadora científica a cada dos alumnos; se indicó que podían o no trabajar en equipo. También se dio una explicación introductoria sobre cómo se encendía la calculadora, cómo se apagaba, sobre la tecla “2nd” o segunda función, y que el resultado se obtenía con la tecla “ENTER”. Los alumnos se auxiliaron de las calculadoras científicas para obtener los cocientes solicitados.

En el grupo de trabajo había alumnos muy dedicados, y otros muy distraídos que no ponían atención en las indicaciones.

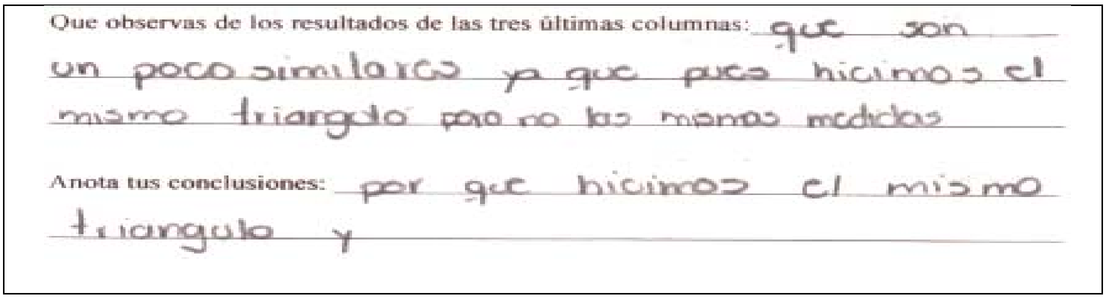
Al completar una tabla en el pizarrón, los alumnos notaron que los cocientes de las razones trigonométricas de los diferentes triángulos que habían trazado se aproximaban hasta en décimos y centésimos en cada columna (véase la figura 4.5).

En la siguiente tabla, anota los resultados obtenidos por tu grupo.

Triángulo rectángulo	Cateto opuesto 40°	Cateto adyacente 40°	Hipotenusa	Cateto opuesto / Hipotenusa	Cateto adyacente / Hipotenusa	Cateto opuesto / Cateto adyacente
Juan Carlos	2.5	3	4			
Jacob	6	7	9	0.66	0.77	0.85
ANA LAURA	8	9.5	12	0.66	0.79	0.84
ALE	8.2	10	13	0.63	0.76	0.82
CARLOS	4	4.5	6	0.66	0.65	0.88

Figura 4.5 Tabla de cocientes obtenidos por algunos alumnos

Se llegó a una conclusión de manera oral en el grupo. Ellos anotaron después, en su hoja de trabajo, su propia conclusión sobre por qué eran tan parecidos los resultados en cada columna. Sin embargo, la falta de vocabulario sobre lo que observaron hizo que escribieran ideas poco claras como se muestra en la figura 4.6 (en otros casos escribieron “cateto opuesto entre hipotenusa son semejantes por el ángulo” o “fueron los resultados semejantes dependiendo de las medidas, yo creo porque fueron los mismos ángulos del triángulo rectángulo”).



Que observas de los resultados de las tres últimas columnas: que son un poco similares ya que pues hicimos el mismo triangulo para no las mismas medidas

Anota tus conclusiones: por que hicimos el mismo triangulo y

Figura 4.6 Conclusión de la alumna *K* el día 1

Día 2 con el grupo de trabajo

El ambiente en el aula y actividades de aprendizaje

Para iniciar la clase se repartieron a los alumnos dos hojas de trabajo, la primera era la del día 1 y la otra era la correspondiente al día 2. La primera actividad consistió en observar los triángulos que se muestran en la figura 4.7, y expresar por qué se considera que son semejantes.

Estrategias de resolución en la primera actividad

Se esperaba que en algunas respuestas de los alumnos hubiese referencias a las propiedades de los triángulos, como la suma de los ángulos interiores, así como los criterios de semejanza de triángulos. Los alumnos escribieron frases como las siguientes:

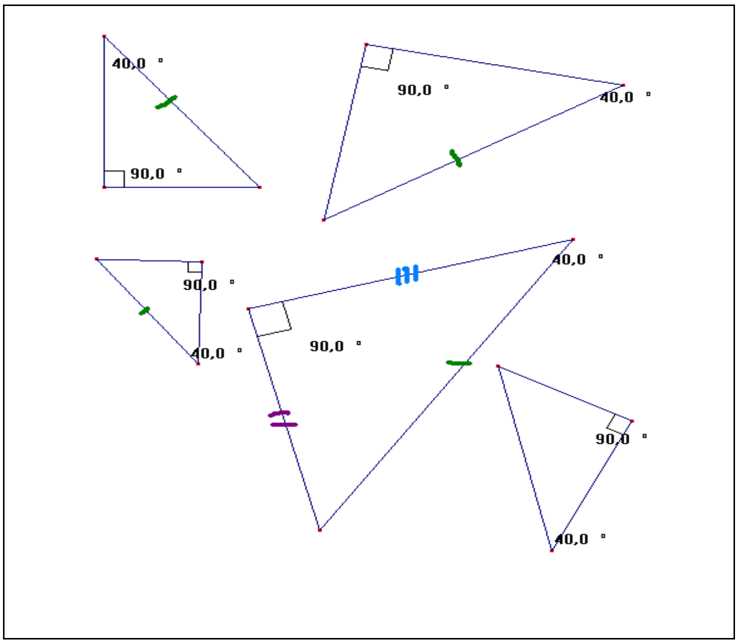


Figura 4.7 Triángulos semejantes

[Los triángulos son semejantes…]

Q: “Porque tienen los mismos ángulos a pesar de tener medidas diferentes en centímetros.”

C: “Porque tienen las mismas medidas de los ángulos.”

W: “Porque tienen las mismas medidas los ángulos tanto el de 90° como el de 40° en todos los triángulos a pesar de su medida en los lados.”

V: “Porque son triángulos rectángulos y sus ángulos son de 90° y 40°.”

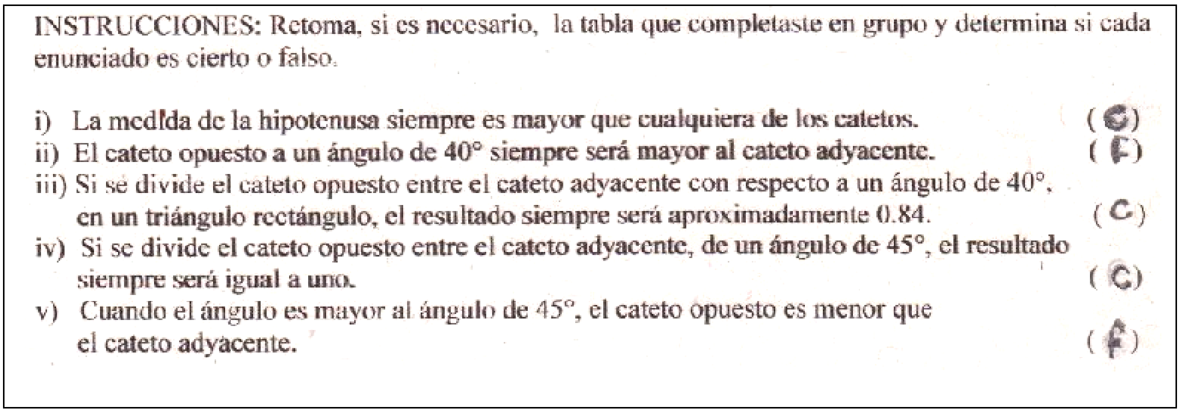
En estas frases, más allá de lo previsto, los alumnos no citaron el criterio de semejanza de triángulos *AA* (ángulo – ángulo): dan por hecho que los cinco triángulos (véase la figura 4.7) son semejantes por la medida de los ángulos, basados en la intuición y no en un conocimiento previo.

Sin embargo, quien escribió la última frase anterior anotó que los triángulos son rectángulos y por lo tanto ya considera un ángulo congruente en todos los triángulos dados y el segundo ángulo es de 40°. Una interrogante (que quedó pendiente en esta investigación) fue determinar si la alumna podía abreviar el criterio ángulo – ángulo al decir que sólo se necesita un ángulo agudo congruente para establecer que dos triángulos rectángulos son semejantes.

Estrategias de resolución en la segunda actividad

En la segunda actividad del día los alumnos debían determinar si cada enunciado dado era cierto o falso (véase la figura 4.8). Se esperaba que los alumnos comentaran en grupo sus opiniones y reflexionaran. En general los alumnos expresaron propiedades de los triángulos, como la suma de los ángulos interiores. También expresaron que se puede identificar si un cateto es opuesto o adyacente en un triángulo rectángulo dependiendo del ángulo agudo que se tome de referencia. Hubo insistencia por parte de una alumna para remarcar que “si [en un triángulo rectángulo] un ángulo de 40° tiene como cateto adyacente al lado del ángulo que lo forma [y que no es la hipotenusa], para el ángulo de 50° el mismo lado es el cateto opuesto”. Esta alumna expresó lo anterior como una observación que posiblemente sus compañeros no habían hecho e insistió en que los demás alumnos lo notaran también.

Los enunciados más polémicos fueron los de los incisos iii) y iv). Algunos alumnos contestaron individualmente y no expresaron al grupo por qué cada enunciado era cierto o falso. Se hizo el análisis en el pizarrón (sobre los dos polémicos incisos mencionados antes) para que los alumnos pudieran explicar cómo razonaron cada enunciado y así determinar si era cierto o falso.



INSTRUCCIONES: Retoma, si es necesario, la tabla que completaste en grupo y determina si cada enunciado es cierto o falso.

i) La medida de la hipotenusa siempre es mayor que cualquiera de los catetos. (C)
ii) El cateto opuesto a un ángulo de 40° siempre será mayor al cateto adyacente. (F)
iii) Si se divide el cateto opuesto entre el cateto adyacente con respecto a un ángulo de 40°, en un triángulo rectángulo, el resultado siempre será aproximadamente 0.84. (C)
iv) Si se divide el cateto opuesto entre el cateto adyacente, de un ángulo de 45°, el resultado siempre será igual a uno. (C)
v) Cuando el ángulo es mayor al ángulo de 45°, el cateto opuesto es menor que el cateto adyacente. (F)

Figura 4.8 Enunciados ciertos y falsos

Finalmente se completó un cuadro en el que escribieron el nombre de las razones trigonométricas: seno, coseno y tangente. Para ello se hizo referencia a las actividades del día 1, y luego de escribir las razones trigonométricas anotaron al reverso alguna conclusión sobre lo que habían aprendido en la clase. Dos ejemplos de ello se pueden ver en la figura 4.9.

El objetivo de las actividades planeadas para el día 2 fue que los alumnos hicieran un repaso acerca de lo que sabían sobre los triángulos (incluyendo los que son rectángulos), conocer hasta dónde llegaban sus observaciones, y si llegaban a generalizarlas (como lo hizo el alumno 1 en su conclusión mostrada en la figura 4.9). Se trataba de que los alumnos tuviesen idea de la relación del tema de trigonometría con los temas tratados con anterioridad en sus clases de matemáticas.

Alumno 1	Conclusión: Que el cateto opuesto y adyacente siempre va a ser menor que la hipotenusa y entre crezca el opuesto se hace menor el adyacente
Alumno 2	Pues aprendí cual es el nombre de cada Funcion trigonometrica y reforze un poco el conociemto que ya tenia de lo demas.

Figura 4.9 Conclusiones de 2 alumnos del grupo de trabajo el día 2

Día 3 con el grupo de trabajo

El ambiente de trabajo y la actividad de aprendizaje

La clase fue la séptima y última del día para los alumnos del grupo de trabajo. Se empezó por plantear verbalmente a los alumnos el problema sobre una competencia de patinetas en rampas. Se explicó que se trataba de cuatro casos diferentes y que debían determinar cuál rampa tenía un mayor ángulo de elevación (véase la figura 4.10). Se mostró al grupo el esquema impreso en su hoja de trabajo y se pidió que trabajaran de manera individual.

Mientras los alumnos trataban de resolver el primer caso, se repartió una calculadora por cada dos o tres alumnos (en esta clase tres alumnos llevaron su propia calculadora científica). Cuando se terminó de repartir el material, se les pidió que expusieran cuál rampa tenía un ángulo mayor de inclinación y por qué.

Se quieren construir rampas para una competencia de patinetas. Para medir el ángulo de inclinación de cada rampa, se considerarán dos medidas:

De acuerdo con las medidas especificadas, elije aquella rampa cuyo ángulo de inclinación sea mayor en cada caso (las medidas están dadas en metros).

Caso	Rampa 1	Rampa 2
1	$a = 1.5$ $b = 6.5$	$a = 1.5$ $b = 7.5$
2	$a = 1.5$ $b = 6.5$	$a = 1.7$ $b = 6.5$
3	$a = 1.5$ $b = 6$	$a = 2$ $b = 8$
4	$a = 1.6$ $b = 6.5$	$a = 1.7$ $b = 7$

Figura 4.10 Problema de las rampas

Estrategias

Nuevamente, se esperaba que los alumnos recurrieran a distintas estrategias para elaborar su respuesta. Se les pidió que expresaran qué usaron o qué podrían usar para determinar el ángulo de mayor inclinación. En efecto, en el grupo se expresaron por lo menos tres formas distintas:

1.- Primero se expresó que *a* y *b* eran la base y la altura del triángulo, así que calculando el área del triángulo formado por cada rampa los resultados se podrían comparar y con ello decidir que el triángulo que tuviera mayor área sería el que contenga el ángulo *θ* con mayor inclinación.

2.- En segundo lugar se expresó que era más directo si se utilizaba el teorema de Pitágoras, ya que las rampas formaban triángulos rectángulos y los datos eran *a* y *b*, por lo que la hipotenusa podría encontrarse. Para determinar el mayor ángulo de elevación, establecieron que el segmento mayor de cada caso sería para el de la rampa con mayor ángulo de inclinación.

3.- Por último, dijeron que también era conveniente hacer los triángulos de cada rampa a escala y con una regla medir los lados de la hipotenusa, como en el caso de usar el teorema de Pitágoras. Sin embargo, dijeron que si lo que se quería medir era el ángulo de inclinación, necesitaban transportador y ese día ningún alumno llevaba alguno.

Finalmente, después de revisar cada estrategia propuesta, se pidió a los alumnos que revisaran la tabla de las razones trigonométricas con la que se trabajó el día 1. La alumna *K* sorprendió a sus compañeros cuando dijo en voz alta que si *a* y *b* son catetos, se podría buscar el cociente en la tabla para ver qué ángulo de inclinación tenía cada rampa.

Se resolvió el caso 1 con la participación de todo el grupo. Los alumnos determinaron que la razón trigonométrica de la tangente los llevaría a encontrar el ángulo de inclinación de cada rampa. Ya que se había determinado el ángulo de inclinación θ de cada rampa, se preguntó a los alumnos de qué otra manera se podría encontrar el ángulo buscado. El alumno *S* respondió que sería con la calculadora porque ahí aparecen las teclas “sin”, “cos” y “tan”, que eran las “razones” (*i. e.,* funciones) que hasta entonces conocían (no se hizo una discusión con los alumnos para conceptuar el término *función*).

Para probar lo que el alumno *S* decía, se pidió al grupo encontrar con sus calculadora el cociente *a*/*b*. Luego se pidió que presionaran las teclas “tan” y “Ans” para obtener el ángulo del cociente solicitado. El resultado fue diferente al ángulo encontrado en la tabla de razones trigonométricas.

Después de que se obtuvo la tangente del cociente *a/b*, se hizo la observación al grupo respecto a las funciones trigonométricas en la calculadora.

La forma en que se introdujeron los datos, primero tangente y luego un valor numérico (como *a/b*), nos dan por resultado el cociente entre dos lados de un triángulo rectángulo de un ángulo agudo determinado, como se hizo en el día 1.

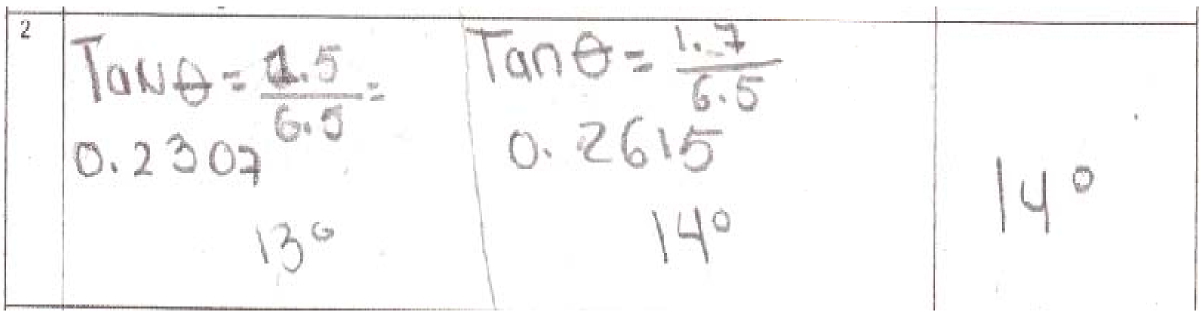
Se explicó que así lo hicieron en la tabla de razones trigonométricas, cuando al encontrar un cociente en una columna (seno, coseno o tangente), se encontraba después el ángulo al principio de la fila que le correspondía a dicho cociente.

Se aclaró entonces que en la calculadora la función directa (por ejemplo de la tangente) daba como resultado el cociente de dividir dos lados de un triángulo rectángulo, de determinado ángulo agudo. Se explicó enseguida a los alumnos que para encontrar el ángulo agudo, por ejemplo θ, se puede utilizar la función inversa si es que se tienen los dos lados del triángulo rectángulo, como los que forman las rampas.

Se retomó la introducción hecha sobre el uso de la calculadora, principalmente que la tecla “2nd” serviría para encontrar los ángulos que se buscaban. Se dieron instrucciones para teclear en la calculadora “2nd tan (1.5 / 6.5) *Enter*”. En las pantallas de las calculadoras apareció 12.9946167919, que correspondía a los 13° a los que se aproximaba al cociente en la tabla de razones trigonométricas obtenido por los alumnos.

Una vez resuelto el caso 1 en el pizarrón con todo el grupo, se pidió a los alumnos que resolvieran los casos 2, 3 y 4. Por falta de tiempo la mayoría de los alumnos sólo resolvió 2 casos más. Antes de finalizar la clase se hizo un resumen verbal de por qué y cómo se empleó la tangente en cada caso y se dio por concluida la clase.

En la figura 4.11 se muestra cómo la alumna *U* resolvió el caso 2 obteniendo el cociente con la calculadora y enseguida buscando el ángulo de inclinación en la tabla de razones trigonométricas.



Rampa 1 Rampa 2 Ángulo de mayor inclinación

Figura 4.11 Resolución del caso 2 del problema de las rampas

Día 4 del grupo de trabajo

El ambiente en el aula y la actividad de aprendizaje

En la sesión 4 se abordó la resolución de triángulos rectángulos. Como entrenamiento para emplear la calculadora científica, como en la primera clase, se pidió a los alumnos que obtuvieran “sen 20°”. Así lo hicieron y el resultado que obtuvieron fue “sen 20° = 0.3420”.

Sólo hubo una calculadora que estaba en modo “RAD”, pero al hacer el cambio a modo “DEG” todos los alumnos obtuvieron el mismo resultado. Nuevamente se mencionó que ahí estaban las funciones seno, coseno y tangente (en las teclas “sin”, “cos” y “tan” respectivamente). También se les recordó que, como el día anterior, se puede obtener el ángulo agudo con las funciones inversas, usando la tecla “2nd” de segunda función y haciendo planteamientos de igualdad y despejes correctos.

Se plantearon 4 casos distintos, considerando que son los 4 casos posibles de resolución de triángulos rectángulos como se analizó en la metodología y en los resultados del análisis de los casos propuestos en el *Libro para el maestro*. Para los 4 casos el triángulo rectángulo es el que se muestra en la figura 4.12, y en cada caso los datos propuestos son distintos.

Dado un triángulo rectángulo como el siguiente, completa la tabla para cada caso.

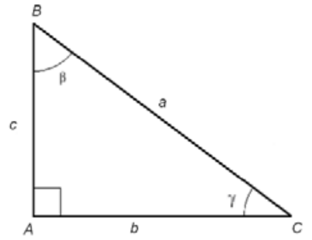


Figura 4.12 Esquema base para los 4 casos de resolución de triángulos rectángulos

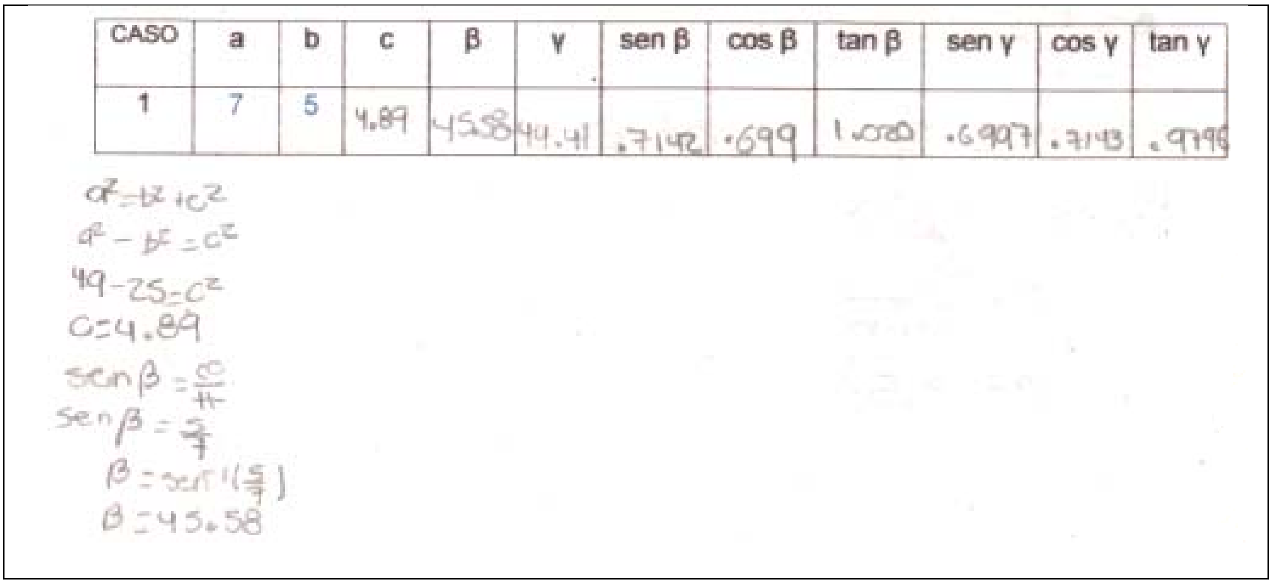
Estrategias

En el primer caso se pidió obtener *c* (un cateto), dados *a* (la hipotenusa) y *b* (otro cateto). Las medidas de los ángulos agudos β y γ eran desconocidos. Para resolver *c* los alumnos propusieron utilizar el teorema de Pitágoras; encontraron entonces que *c* mide 4.89 unidades, dado que los catetos miden 7 y 5 (véase la figura 4.13). Para obtener β, la alumna *K* propuso la razón trigonométrica seno y planteó lo siguiente en su cuaderno y en el pizarrón:

$$\text{sen } \beta = \text{C. O./H}$$

$$\text{sen } \beta = 5/7$$

$$\beta = \text{sen}^{-1} (5/7) = 45.58°$$



CASO	a	b	c	β	γ	sen β	cos β	tan β	sen γ	cos γ	tan γ
1	7	5	4.89	45.58	44.41	.7142	.699	1.020	.6997	.7143	.9798

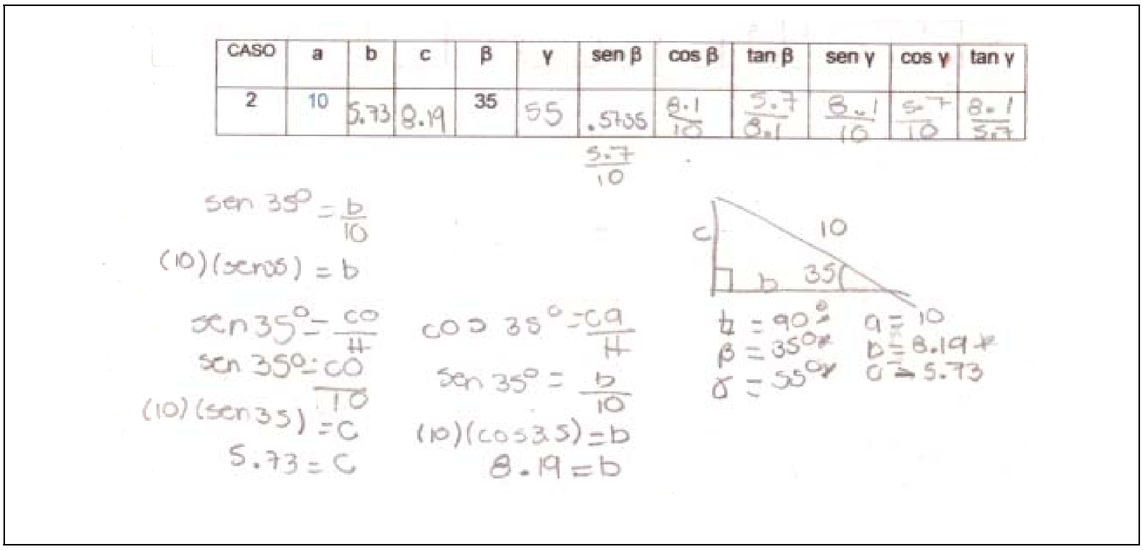
$a^2 = b^2 + c^2$
$a^2 - b^2 = c^2$
$49 - 25 = c^2$
$c = 4.89$
$\text{sen}\,\beta = \frac{co}{h}$
$\text{sen}\,\beta = \frac{5}{7}$
$\beta = \text{sen}^{-1}(\frac{5}{7})$
$\beta = 45.58$

Figura 4.13 Resolución del triángulo rectángulo del caso 1

Con respecto a la forma en que esta alumna procedió en su resolución, algunos alumnos preguntaron si se podía anotar en la calculadora 5/7 entre paréntesis, como lo planteó la alumna *K* (véase la figura 4.13). Como se observa, la misma alumna escribió en su hoja de trabajo el valor del ángulo γ sin realizar operaciones por escrito. Cuando se le preguntó cómo obtuvo el resultado, explicó que a 90° le restó el valor de *β*.

Para completar los valores de las funciones (sen *β*, cos *β*, tan *β*, sen *γ*, cos *γ* y tan *γ*) se les sugirió anotar las razones con las que se obtenían. Aun así hubo alumnos que anotaron los valores de forma decimal efectuando los cocientes indicados.

Al resolver el segundo caso (véase la figura 4.14), los alumnos sugirieron empezar por el ángulo *γ,* ya que *β* es uno de los datos. Para completar los lados, que en este caso son los catetos *b* y *c,* el alumno *B* sugirió encontrar primero *c* empleando seno de 35°. Una dificultad general fue el despeje de *c*, ya que al cambiar de miembro el valor 10 en la igualdad planteada, seguían anotando el valor dividiendo. El despeje fue expuesto en el pizarrón y se escribió por pasos cómo hacerlo.



CASO	a	b	c	β	γ	sen β	cos β	tan β	sen γ	cos γ	tan γ
2	10	5.73	8.19	35	55	.5735 $\frac{5.7}{10}$	$\frac{8.1}{10}$	$\frac{5.7}{8.1}$	$\frac{8.1}{10}$	$\frac{5.7}{10}$	$\frac{8.1}{5.7}$

Figura 4.14 Caso 2 de resolución de triángulos rectángulos

Luego de encontrar *c* fue más sencillo para otros alumnos hacer un planteamiento para encontrar *b* empleando coseno de 35°. Como se observa en la figura 4.14, la mayor parte del grupo resolvió el despeje así, esta vez con mayor facilidad. Las funciones de los ángulos quedaron indicadas con los cocientes para seguir avanzando en los casos planteados.

Para el tercer caso (véase el cuadro 4.4), se pidió que fuera resuelto individualmente; 11 de 21 alumnos realizaron un esquema para ubicar los datos del triángulo. Todos encontraron el valor del ángulo faltante *γ*, en ningún caso escribieron sus operaciones, determinándolo mentalmente.

Todas las hojas de trabajo tienen como valor encontrado en primer lugar la hipotenusa *a*, tal vez a causa de que es la primera incógnita respecto a los lados del triángulo en el cuadro 4.4. Coincidió que los alumnos emplearon como ángulo de referencia el β, a pesar de haber encontrado también el ángulo γ.

Cuadro 4.4 Caso 3 de resolución de triángulos rectángulos

CASO	*a*	*b*	*c*	β	γ	sen β	cos β	tan β	sen γ	cos γ	tan γ
3		15		40°							

Para encontrar *a*, los alumnos emplearon coseno de 40° planteando

$$\cos 40° = 15/a.$$

Los alumnos trabajaron en equipo ayudándose, aun cuando se solicitó que el trabajo fuera individual. Así fue el caso de la alumna *X*, quien no escribió cómo se encuentra *a*, pero empleó este dato (obtenido por alguien más) para encontrar *c* escribiendo como planteamiento “seno 40° = *c/a*”.

En el cuarto caso (véase el cuadro 4.5), los alumnos emplearon el teorema de Pitágoras para encontrar la hipotenusa *a*. La mayoría sí terminó de resolver el caso 4; sin embargo, no todos lo hicieron correctamente.

Cuadro 4.5 Caso 4 de resolución de triángulos rectángulos

CASO	*a*	*b*	*c*	*B*	γ	sen β	cos β	tan β	sen γ	cos γ	tan γ
4		4	5								

De los casos resueltos asertivamente, la alumna *C* planteó así su resolución para hallar el valor de *β:* tan *β* = 4/5. Después empleó “tan *γ* = 5/4” para hallar *γ.* Probablemente trató de utilizar los datos del triángulo sin darse cuenta de que podía encontrar el ángulo *γ* con la diferencia 90° - *β.*

Una posible causa de los resultados que obtuvieron los alumnos fue su deseo de concluir a tiempo la actividad. La necesidad de cumplir con el tema que se estaba viendo en clase fue un factor que orientó a los alumnos a resolver situaciones como el caso 4, tal como se hizo en el pizarrón en los casos 1 y 2, haciendo que no fueran tomadas en cuenta otras posibles estrategias de resolución.

Día 5 con el grupo de trabajo

El ambiente en el aula y la actividad de aprendizaje

Se entregaron a los alumnos 2 hojas que contenían 4 problemas para trabajar los días 5 y 6 de la secuencia de actividades de la investigación. La primera hoja contenía 2 problemas que podían resolverse en equipos de 2 o 3 integrantes.

El primero fue el “problema del edificio y la antena” (véase la figura 4.15) y fue leído en voz alta por un alumno. Luego de escucharlo, los alumnos se agruparon y lo resolvieron con estrategias muy parecidas y resultados iguales.

Estrategias

Aunque en la figura 4.15 no se observa, la compañera de equipo *K* sí hizo una resta para obtener la altura de la antena. Muchos alumnos omitieron dar respuesta a las preguntas de los problemas que resolvieron. Para estos alumnos las respuestas fueron los números finales en las operaciones, o bien ellos mismos no se dieron cuenta de lo que se les preguntó en un problema.

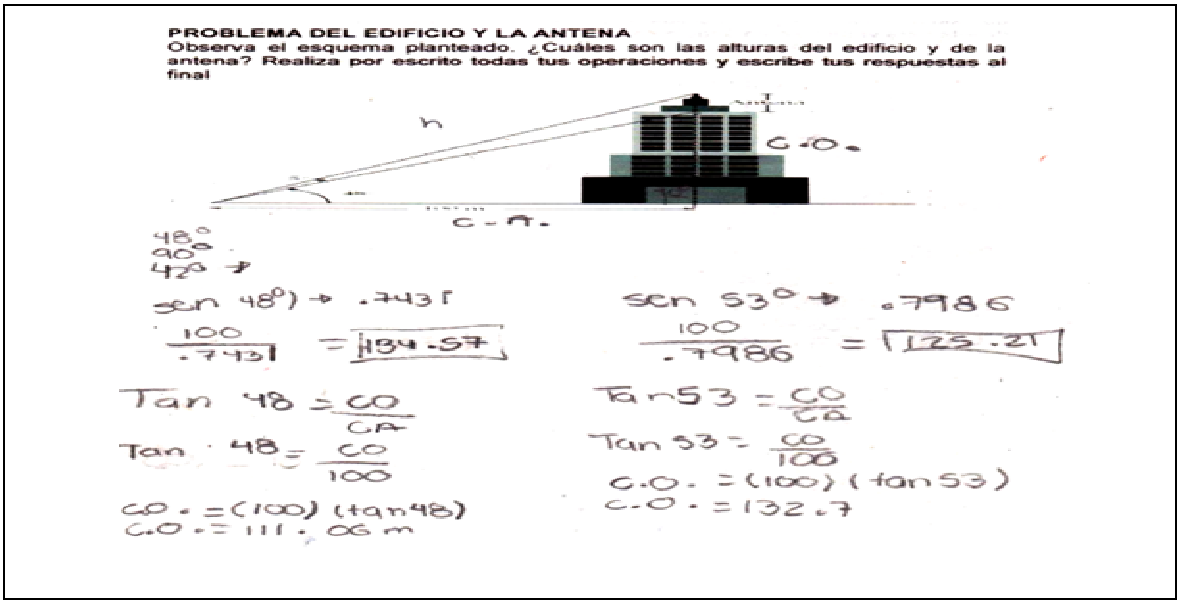


Figura 4.15 Resolución del problema del edificio y la antena por un equipo de alumnas

En general, los alumnos respondieron como se muestra en la figura 4.15. Para el triángulo rectángulo que contenía en un cateto la altura del edificio y la antena, emplearon “tan 53° = C. O/100”. Para el triángulo que contiene en un cateto sólo la altura del edificio, emplearon “tan 48° = C. O/100”. Después de obtener las 2 alturas, calcularon la diferencia y así determinaron cuánto medía la antena.

El segundo problema fue el de la Torre Latinoamericana (véase la figura 4.16). Se resolvió en equipos después de revisar en el grupo las respuestas al problema anterior. En este problema no hubo un esquema determinado, así que los alumnos hicieron los suyos, algunos tomando de referencia la estructura real de la Torre Latinoamericana, y otros sólo lo marcaron como un rectángulo; en otros casos, dibujaron un edificio parecido al del problema anterior.

Luego de dar tiempo a que cada equipo hiciera su planteamiento, la alumna *U* pasó al pizarrón a explicar cómo hizo su esquema y planteó los datos en éste. Los alumnos lo resolvieron individualmente y otros siguieron en equipo para compartir la calculadora. Emplearon la tangente, ya que los lados eran catetos del triángulo rectángulo; sin embargo, 4 no resolvieron ni plantearon cómo resolver el problema.

Dieciséis de los alumnos plantearon sus operaciones en las hojas de trabajo, de modo que las introdujeron en la calculadora en un solo paso para obtener el cateto adyacente. El planteamiento que escribieron los 16 alumnos fue el siguiente:

$$\tan 15° = 180/\text{C. A.},$$
$$\text{C. A.} = 180/\tan 15°,$$
$$\text{C. A.} = 671.76.$$

Sin embargo, 6 de estos 16 alumnos escribieron 61.17, lo cual fue muy raro. En general, los alumnos no comprobaron sus operaciones, volviendo a hacerlas en la calculadora o comparándolas con otro compañero.

También hubo 2 alumnos que plantearon las operaciones en sus hojas de trabajo para obtener el resultado en 2 pasos. Primero obtuvieron tangente de 15° igual a 0.2679. Emplearon este valor de la siguiente manera:

$$\tan 15° = 180/\text{C.A.},$$
$$0.2679 = 180/\text{C.A.},$$
$$\text{C. A.} = 180/0.2679,$$
$$\text{C. A.} = 671.89.$$

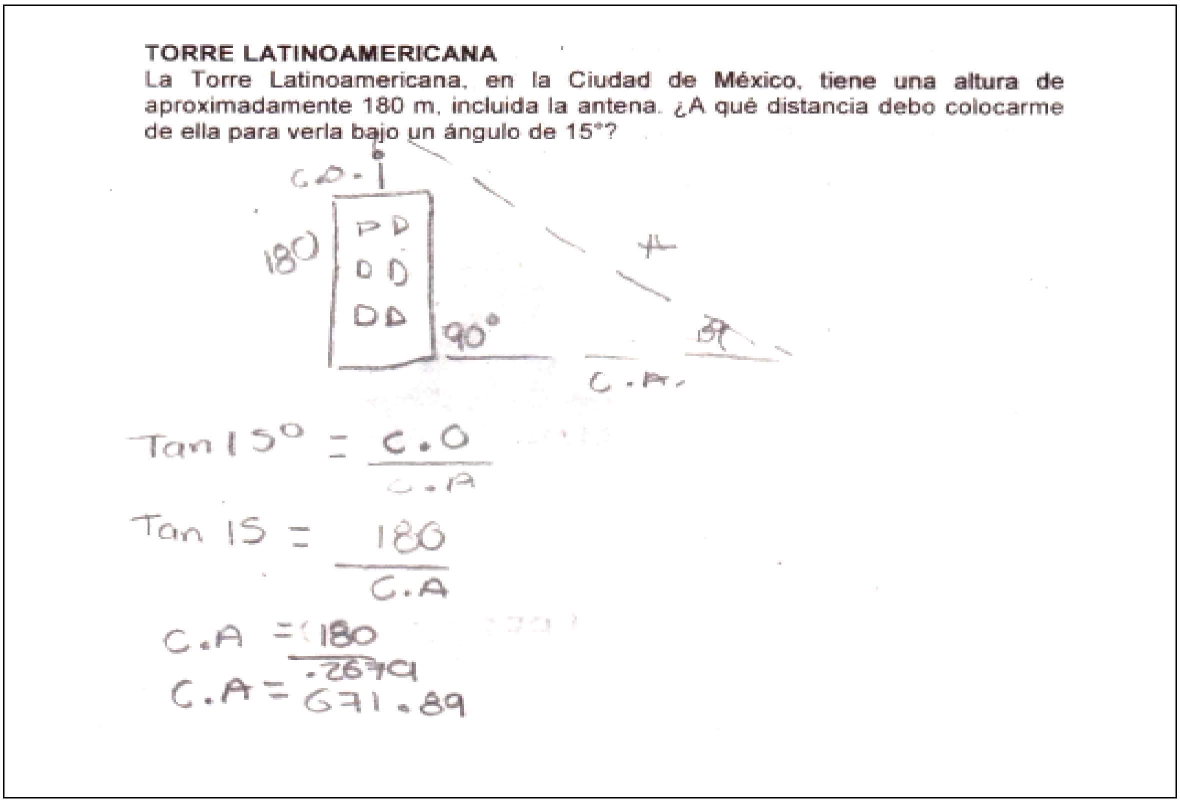
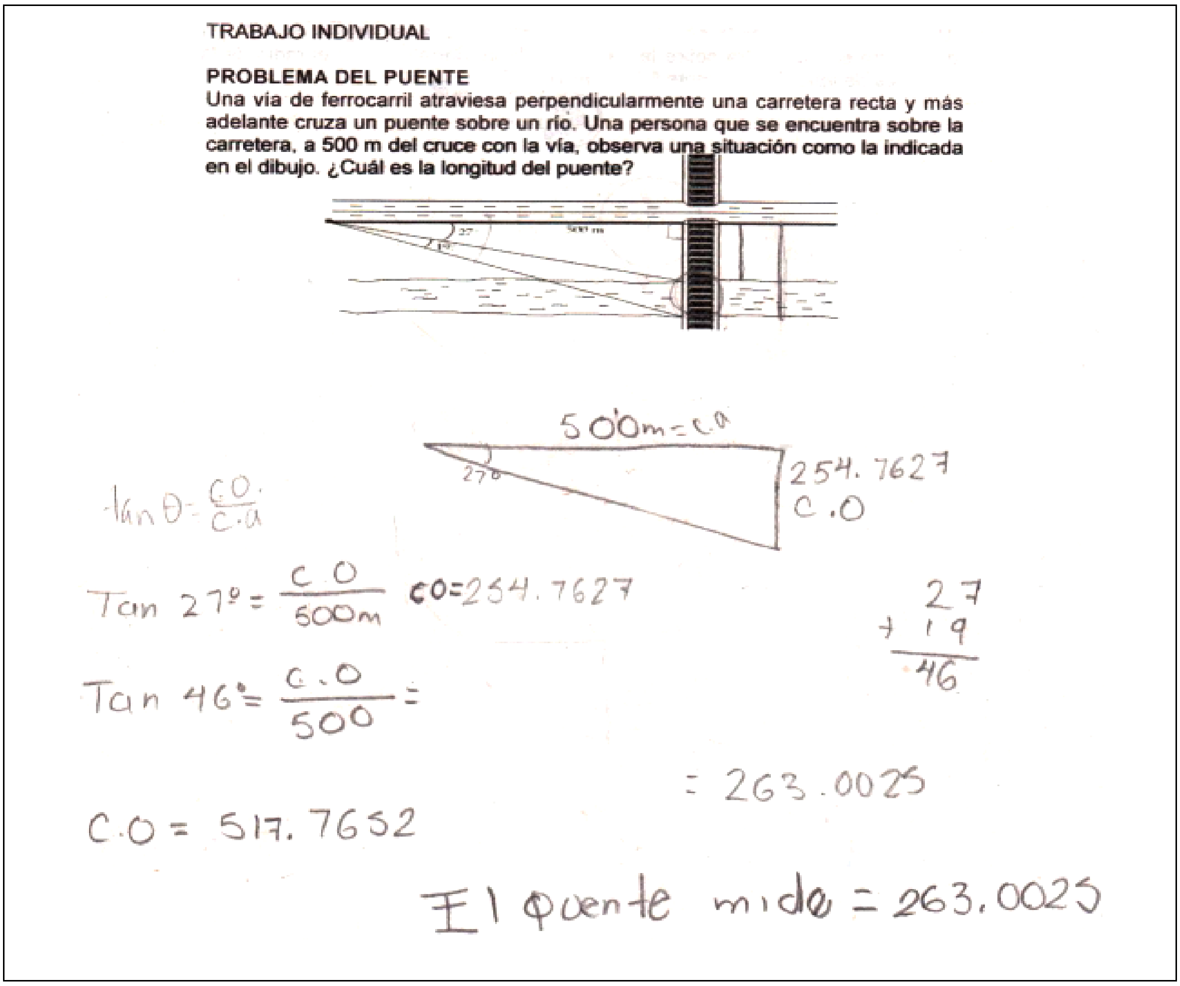


Figura 4.16 Resolución del problema de la Torre Latinoamericana por un grupo de alumnos

Día 6 con el grupo de trabajo

El ambiente en el aula y a actividad de aprendizaje

Se devolvieron a los alumnos las hojas de trabajo del día 5. La alumna *N* pasó al pizarrón e hizo el esquema de la Torre Latinoamericana. Con la participación de los alumnos se resolvió en el pizarrón dicho problema en aproximadamente 4 minutos. Esta actividad fue un repaso de los procesos de resolución en equipos de los problemas del día anterior. Con ello se dio lugar para resolver de manera individual el "problema del puente" (véase la figura 4.17) y "el problema de la nave".



TRABAJO INDIVIDUAL

PROBLEMA DEL PUENTE

Una vía de ferrocarril atraviesa perpendicularmente una carretera recta y más adelante cruza un puente sobre un río. Una persona que se encuentra sobre la carretera, a 500 m del cruce con la vía, observa una situación como la indicada en el dibujo. ¿Cuál es la longitud del puente?

500m = c.a

27°

254.7627

C.O

$\tan\theta = \frac{C.O.}{C.a}$

$\text{Tan } 27° = \frac{C.O}{500m}$ CO=254.7627

$27 + 19 = 46$

$\text{Tan } 46° = \frac{C.O}{500} =$

= 263.0025

C.O = 517.7652

El puente mide = 263.0025

Figura 4.17 Resolución del problema del puente por un alumno del grupo de trabajo

Estrategias

Los alumnos empezaron a resolver el problema individualmente. Sin embargo, 5 de ellos no trabajaron en la resolución de los problemas. Por otra parte, en las hojas de trabajo de 4 alumnos quedaron anotadas muchas operaciones; mostraron confusión y sólo llegaron a resultados parciales del problema: obtuvieron 517 m como la distancia total del puente sobre el río, cuando en realidad ésta es la distancia de las vías del tren hasta el punto donde finaliza el río.

En el mismo caso, la alumna *R* determinó trabajar con 3 triángulos; de ellos, 1 no era rectángulo, pero la alumna aplicó las razones trigonométricas sin tomar en cuenta que el triángulo era diferente. Cinco alumnos encontraron que podían resolver con “tan 27°” y “tan de 46°” los triángulos rectángulos. Sin embargo, al sustituir los datos del problema escribieron 500 como el valor del cateto opuesto, cuando éste es el valor del cateto adyacente de los ángulos de 27° y 46°.

En los cinco casos, el puente del tren mide 228.08 m y lo extraño es que primero hicieron el planteamiento incorrecto y el despeje correcto:

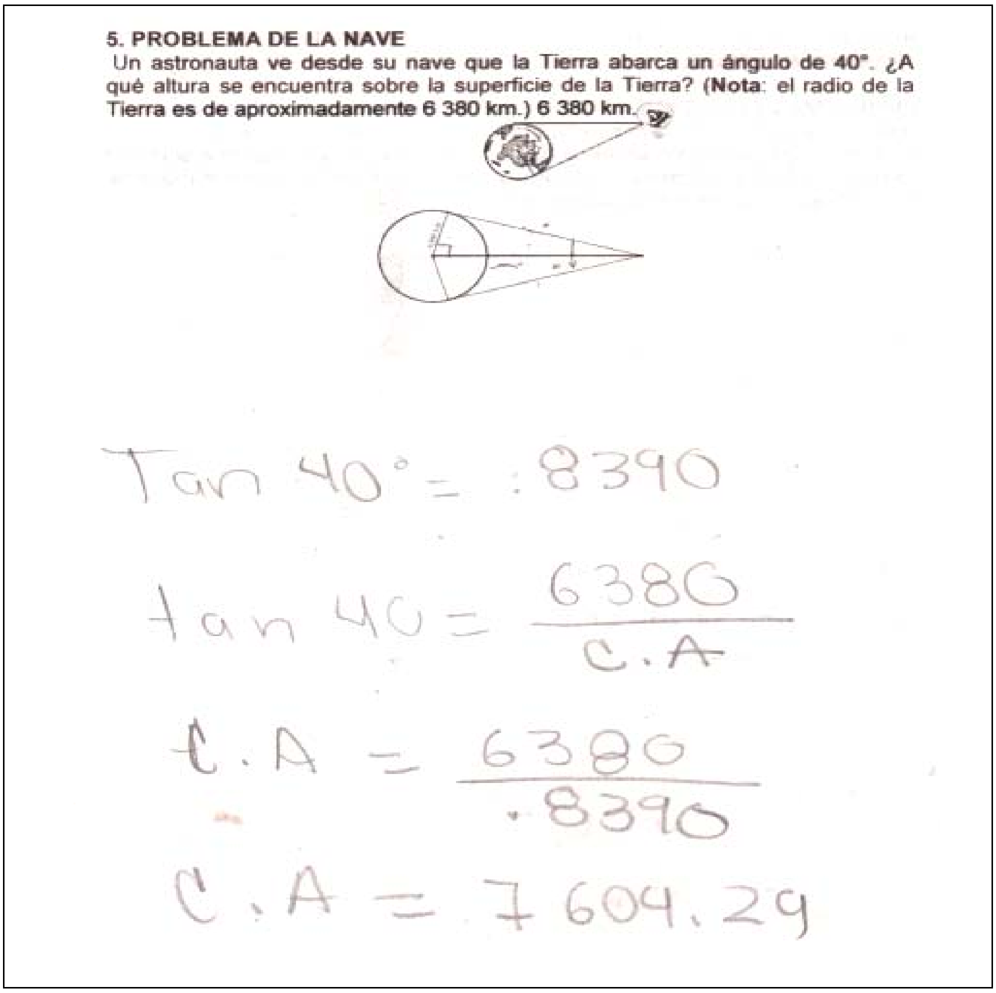
$$\tan 27° = 500/\text{C. A.}$$
$$\text{C. A.} = 500/\tan 27°$$
$$\text{C. A.} = 482.84.$$

Luego de obtener el resultado anterior, hicieron un despeje incorrecto, que es el que los llevaría al resultado correcto de haber puesto 500 en el lugar del cateto adyacente:

$$\tan 27° = 500/\text{C. A.}$$
$$\text{C.A.} = (500)\ (\tan 27°)$$
$$\text{C.A.} = 254.76.$$

De tal modo que escribieron 482.84 – 254.76 = 228.08, sin caer en cuenta que de un mismo planteamiento hicieron 2 despejes distintos. Sin el menor cuidado, la diferencia de los valores calculados fue para ellos la distancia que se buscaba en el problema.

Siete alumnos resolvieron el problema correctamente. La alumna *U* resolvió el problema del puente en casi 6 minutos y el resto del grupo tardó casi 25 minutos en resolverlo. Dado el tiempo que se tardaron los alumnos en resolver el primer problema, fueron 6 los que resolvieron el problema de la nave (véase la figura 4.18).



5. PROBLEMA DE LA NAVE

Un astronauta ve desde su nave que la Tierra abarca un ángulo de 40°. ¿A qué altura se encuentra sobre la superficie de la Tierra? (**Nota**: el radio de la Tierra es de aproximadamente 6 380 km.) 6 380 km.

Tan 40° = .8390

$\tan 40 = \frac{6386}{C.A}$

$C.A = \frac{6386}{.8390}$

C.A = 7 604.29

Figura 4.18 Resolución del problema de la nave por un alumno

El alumno *S* en su hoja de trabajo primero encontró el valor de la tangente de 40°, y escribió que ésta es 0.8390. Luego planteó una igualdad en la que ocupó el mismo valor ya encontrado:

$$\tan 40° = 6380/0.8390.$$

Es decir, 6 380 km entre el mismo valor de tangente de 40°. El alumno obtuvo 7604.29 y lo escribió en la hoja de trabajo, sin señalar si es ésa la distancia que se quiere conocer. La alumna *R* sólo escribió “6380 tan 40° = 5 353.45”. Ningún otro de sus compañeros hizo lo mismo. Para que ella hiciera la anotación debió suponer que

$$\tan 40° = C.O./6380.$$

Dicho planteamiento tiene 2 errores que se repiten en los 6 alumnos que resolvieron el problema. El primero es que en el esquema se señalan 2 triángulos unidos por uno de sus lados y la suma de 2 de sus ángulos agudos es 40°; por tanto, la operación debió indicarse con 20° como el ángulo de referencia.

El segundo error que se observó en los 6 alumnos fue que ubicaron el ángulo recto en el centro del esquema, es decir, formado por el radio de 6 380 km y la altura que se buscaba. Es probable que los alumnos hayan resuelto este problema con poco interés, algo de prisa y sin meditar en el resultado.

El caso del alumno *G* coincidió en los errores señalados, pero también resolvió tomando como medida del radio de la Tierra 0.380 en lugar de 6 380. Obtuvo que la altura de la nave a la Tierra es de 26 529 km.

Las alumnas *U*, *Q* y *N* también resolvieron con “tan 40°”; ellas coincidieron en sustituir los datos correctamente y obtuvieron una altura de 7 604.29 km de distancia entre la Tierra y la nave.

Sólo estos 6 alumnos trataron de resolver el problema de la nave y utilizaron lo que sabían, lo que creyeron correcto; su experiencia los llevó a considerar los datos del problema como lo hicieron.

Observaciones sobre las estrategias de resolución de problemas en el grupo de trabajo

En general, los alumnos del grupo de trabajo consideraron que si un dato se presenta en un problema, éste debe emplearse tal cual, sin reflexionar acerca de que:

- Los datos pueden emplearse para obtener detalles del problema, o para obtener valores que conduzcan a la solución.
- Los esquemas de los problemas no siempre reflejan semejanza, congruencia o longitudes proporcionales reales.
- En el caso del problema de la nave, la distancia que se busca es un lado de un triángulo rectángulo o es sólo un segmento del total de un lado.

En general, al finalizar los temas de trigonometría, basados en los problemas propuestos en el *Libro para el maestro* y el *Fichero de Actividades Didácticas*, los alumnos se enfrentaron a situaciones problemáticas con las que no mostraron familiarización.

Fue complicado lograr que los alumnos se atrevieran a expresar al grupo sus estrategias de resolución, y fue aún más complicado —y con menos resultados— el trabajo individual para la resolución de problemas.

Por otra parte, que los alumnos comprendieran los problemas planteados, como el de la actividad de las rampas, y que además se les pidiera que sustentaran con argumentos válidos sus respuestas, fue algo fuera de lo habitual para la clase. Es decir, habitualmente los alumnos pueden sustentar sus respuestas con las operaciones que realizan, como aplicar el teorema de Pitágoras, pero no lo es que expresen el porqué de sus elección.

Al hacer que los alumnos reflexionen sobre el significado del número que obtendrán al realizar cualquier operación, implica que ellos tendrán que decidir qué hacer o qué no hacer para evitar encontrar valores innecesarios o perder de vista cómo resolver un problema.

Resultados obtenidos en las entrevistas

Para poder observar y describir las estrategias que emplean los alumnos de educación secundaria al resolver los problemas de trigonometría, así como las decisiones que toman, los conocimientos que ponen en práctica y la información que discriminan, se seleccionó a siete alumnos del grupo de trabajo.

Los puntos que se consideraron para la selección de estos alumnos fueron las asistencias a la clase, la constancia en sus participaciones, lo escrito en sus hojas de trabajo donde expresaron de mejor forma cómo resuelven problemas y el interés mostrado por participar en el grupo verbalmente.

En el cuadro 4.6 se muestra cómo fue el desempeño general de los alumnos en los 6 días en que se llevó a cabo la secuencia actividades de resolución de problemas de trigonometría.

De los alumnos seleccionados, sólo se aplicaron 5 entrevistas. Las causas en la disminución de las entrevistas fueron la insistencia de la alumna *V* y la eliminación de la entrevista con la alumna *R* por haber recibido influencias en la resolución en el primer problema.

Durante el inicio de la entrevista, la alumna *R* mostró inseguridad sobre cómo resolver el primer problema. Luego fue interrumpida la entrevista, ya que a la alumna *R* se le entregarían rendimientos generados por la Cooperativa Escolar. Casi 15 minutos después se retomó la entrevista. La alumna mostró que había resuelto sus dudas y empleó una estrategia diferente que había obtenido con ayuda de algún compañero.

Cuadro 4.6 Resultados de participación obtenidos con el grupo de trabajo en la secuencia de actividades

ESCUELA SECUNDARIA DIURNA No. 96 "Dr. ENRIQUE HERRERA MORENO" ESI-96 TURNO MATUTINO PERIODO LECTIVO 2007-2008								
ALUMNOS INSCRITOS EN EL GRUPO DE TRABAJO		MAYO					JUNIO	POSIBLES ALUMNOS A ENTREVISTAR A TRAVÉS DE PROBLEMAS (E)
		26	27	28	29	30	2	
	A	P	R	P	R	P	R	
	B	R	P	P	P	P	P	E
*	*C*	P	P	N	P	R	N	
	D	/	R	N	R	R	R	
*	*E*	P	P	R	R	P	R	
*	*F*	P	P	/	N	R	N	
	G	R	P	R	R	P	P	
	H	P	P	/	P	P	R	
	I	R	P	/	/	R	N	
*	*J*	P	P	R	R	P	R	
*	*K*	P	P	N	P	P	P	E
*	*L*	P	P	R	/	R	R	
*	*M*	P	R	R	P	P	R	E

[Continúa]

Cuadro 4.6 [Concluye]

ESCUELA SECUNDARIA DIURNA No. 96 “Dr. ENRIQUE HERRERA MORENO” ESI-96 TURNO MATUTINO PERIODO LECTIVO 2007-2008								
ALUMNOS INSCRITOS EN EL GRUPO DE TRABAJO		MAYO					JUNIO	POSIBLES ALUMNOS A ENTREVISTAR A TRAVÉS DE PROBLEMAS (E)
		26	27	28	29	30	2	
*	*N*	P	/	R	/	P	P	
	O	P	P	P	/	P	P	
	P	/	R	R	P	R	R	
*	*R*	P	P	P	P	P	P	E
	S	R	P	N	R	P	P	E
*	*T*	P	P	/	R	/	/	
	U							
*	*V*	P	P	N	P	P	P	E
	W	P	P	/	R	/	/	
*	*X*	P	P	R	R	R	N	

P: Participó en clase y realizó correctamente más de 50% de las actividades.

N: No trabajó ninguna de las actividades planteadas.

R: Resolvió correctamente la mínima parte de las actividades del día (menos de 50%)

/: No asistió a clases

*: Sexo femenino

En la siguiente sección se describen las cinco entrevistas realizadas. Cada una de ellas está integrada por 3 problemas. En el primero de ellos se solicita obtener el perímetro y el área de un polígono regular. El problema proporciona un esquema con algunos datos.

En el segundo problema de la entrevista se trata de encontrar el perímetro y el área de tres polígonos regulares: un heptágono, un octágono y un *n*-ágono. No hay esquemas que auxilien al alumno en este problema.

El tercer problema consiste en calcular la distancia a la que debe colocarse una escalera dadas algunas condiciones.

Después de cada problema se describen observaciones respecto a las estrategias que emplearon los alumnos, los factores de error, cómo llevaron a cabo su estrategia y si la verificaron o no.

1a entrevista

Alumna *U*, 9 de junio de 2008

Problema 1

1a parte. Sobre cómo obtuvo el perímetro del pentágono regular de 10 cm por lado La alumna *U* obtuvo rápidamente el perímetro del pentágono regular (véase el anexo 10). Primero señaló que cada lado mide 10 cm y expresó: “Pues si son 5, entonces son 50”, señalando en el esquema impreso junto al problema planteado.

Observaciones

- Se basó en el esquema para ver el número de lados.
- No mencionó si hay una fórmula para obtener el perímetro en polígonos regulares.
- Sin anotar operaciones, *U* escribió el resultado del perímetro del pentágono como se observa en la figura 4.19.

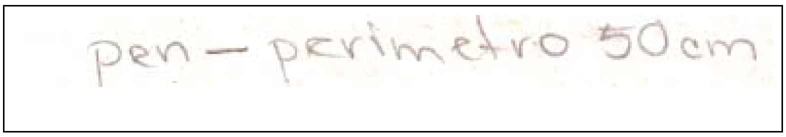


Figura 4.19 Perímetro del pentágono regular obtenido por *U*

2a parte. Sobre cómo obtuvo el área del pentágono regular de 10 cm por lado

Observó que el pentágono estaba formado por varios triángulos y que si sacaba la altura de uno de ellos, podía calcular el área de uno de los 5 triángulos que forman el pentágono regular.

La alumna *U* mencionó que “si el pentágono era regular, cada triángulo era equilátero” [se refería a cada triángulo formado por un lado del pentágono unido en cada vértice con el centro del pentágono]. También creyó que la altura del triángulo medía 10 cm. Sin embargo, lo dudó y buscó otra forma de resolverlo. Mencionó entonces que “la figura también es un círculo, pero entonces este lado [la altura del triángulo en el esquema] no mide 10”.

Se le pidió a la alumna que mostrara el triángulo que le ayudaría a determinar el área. No se le especificó si se trataba del área del pentágono o del triángulo. *U* realizó el esquema de un triángulo, formado por la altura del triángulo (apotema del pentágono), la mitad de un lado del pentágono y el lado formado por la unión de estos segmentos.

La alumna *U* vio el triángulo y dijo que el cateto opuesto ya lo tenía y que quería obtener el cateto adyacente y le anotó C. A.; al opuesto le anotó 10 cm, luego de ver su figura y el esquema del problema, le encimó 5 sobre el 10, corrigiendo los datos.

Cuando se le preguntó si podría conocer los ángulos del triángulo, respondió “tomando en cuenta que los lados de un triángulo rectángulo miden 180° y que uno siempre es de 90° entonces uno debe ser 45° y el otro, 45° también”. Se le preguntó si siempre pasaba eso con los triángulos, a lo que respondió: “Bueno, es una forma, porque para que sean 180° hay muchas cosas”, dio a entender que había muchas combinaciones.

La alumna *U* dedujo después que con los 360° de la circunferencia se puede saber el ángulo (central) que determina cada lado. Para obtener dicho ángulo no dividió 360°/5:

lo que hizo fue multiplicar “45° x 5”, luego observó qué le faltaba para llegar a 360°; así que con la calculadora hizo los siguientes tanteos, hasta obtener el ángulo que multiplicado 5 veces le diera 360°:

65 × 5, 70 × 5, 78 × 5, 75 × 5, 73 × 5, 71 × 5 y finalmente 72 × 5.

Al finalizar los tanteos dijo: “Entonces el ángulo mide 72° y el ángulo del triángulo (el que ella trazó) mide la mitad”. Con la calculadora encontró que dicho ángulo medía 36° y anotó cuál medía 90°.

Con los datos escritos en el triángulo, la alumna mencionó que “con tangente se puede obtener el cateto adyacente y también puedo sacar el otro ángulo [agudo] porque con ese también se puede sacar el cateto adyacente”. Escribió la razón tangente y planteó la igualdad para despejar y obtener el cateto adyacente, como se muestra en la figura 4.20.

En la calculadora, *U* multiplicó 6.88 × 10; luego dividió el resultado entre 2. Eran las operaciones para obtener el área del triángulo “(base × altura)/2”. Como se observa, la alumna no obtuvo el área del triángulo que trazó: calculó directamente el área de uno de los 5 triángulos que forman el pentágono. Por eso la base que multiplicó fue 10 cm y obtuvo 34.4 cm^2, que al multiplicar por 5, dio el área total.

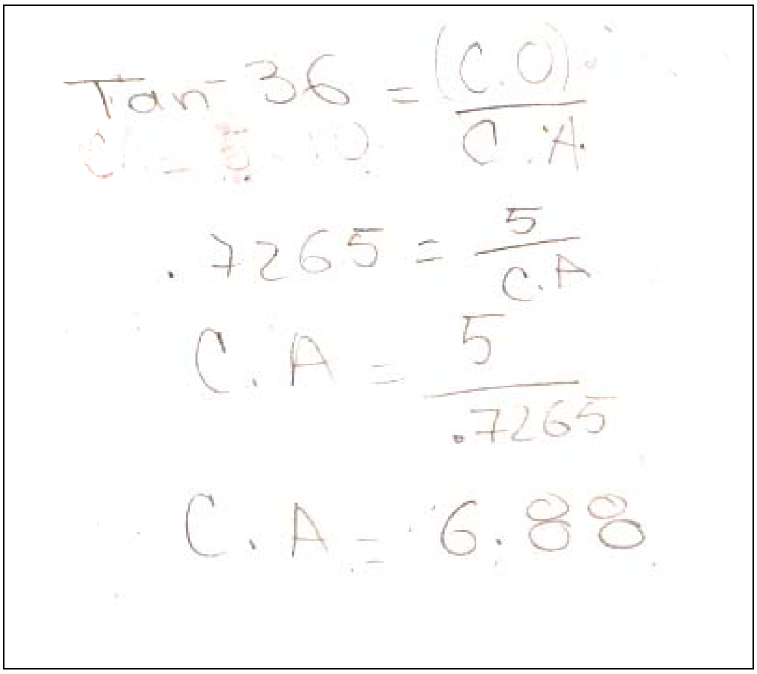


Figura 4.20 Operaciones de *U* para obtener el cateto adyacente

Observaciones

- No recordó con exactitud las razones trigonométricas; primero creyó que eran un producto al decir “tan 36 es cateto opuesto por cateto adyacente” y lo escribió así: “tan 36 = (C. O.)(C. A.)”.
- No recordó cuál era la fórmula para obtener el área del pentágono, o de cualquier polígono regular.
- Resolvió con tangente y encontró el apotema (sin que le llamara apotema). Obtuvo con esta medida la altura del triángulo rectángulo.
- Se le dificultó obtener la medida del ángulo agudo. Calculó al tanteo que cada triángulo del pentágono tenía un ángulo central de 72°, ya que los 5 ángulos forman los 360° de la circunferencia en la que está inscrito dicho pentágono (véase la figura 4.21).

- Obtuvo el perímetro y el área con algunas dificultades por no recordar las fórmulas. El realizar un esquema aparte le facilitó la compresión del valor que necesitaba y de cómo podía obtenerlo (en este caso la altura de un triángulo, que era en realidad el apotema del pentágono).

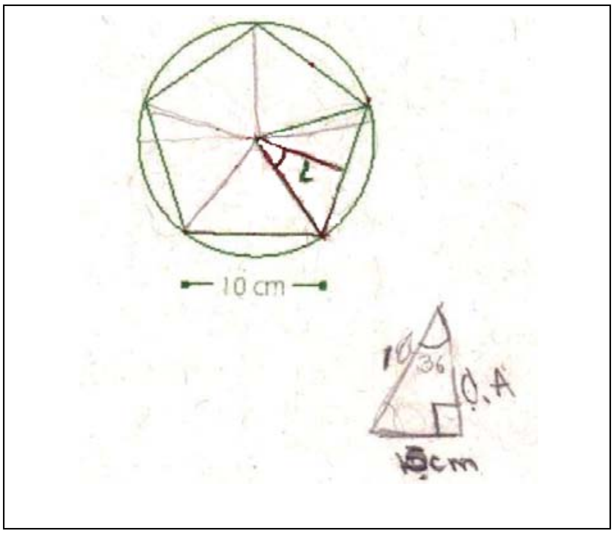


Figura 4.21 Pentágono regular inscrito en una circunferencia

- En este ejercicio se observó la posibilidad de plantear a los alumnos deducir la fórmula para obtener el área de cualquier polígono regular, si partían de conocer la fórmula para el área de un triángulo.

Problema 2

1a parte. Sobre cómo obtuvo el perímetro y área del heptágono regular

En la lectura del problema la alumna *U* dijo que los polígonos eran de 7, 8 y 9 lados. Se le aclaró que se le llama *n*-ágono a un polígono de *n* lados. La alumna no expresó desconocer a qué se refería la expresión "*n* lados" y empezó con la resolución del heptágono.

En primer lugar dibujó un heptágono, borrando algunos lados que le sobraban al polígono que había trazado inicialmente hasta que formó un heptágono. Luego de haber hecho el esquema, dijo que lo resolvería como el caso del pentágono y dividió 360° entre 7. En este caso no recurrió al tanteo como en el problema 1.

El resultado que obtuvo después de dividir fue 51.4286. La alumna *U* expresó: “No es exacto, a ver si sale”. Luego continuó con la expresión que le sirvió para obtener el área en el problema 1, ajustando los datos al problema que resolvía en ese momento:

tan 51.4286 = C. O/C. A.

Expresó después: “No sé si 51.4286 tenga tangente”. En este caso, su comentario indica que en clase no se trabajó con ángulos de este tipo, con decimales; y en la tabla de razones trigonométricas los ángulos estaban en unidades enteras (véase el anexo 11).

La alumna continuó con una sustitución y el despeje de la expresión que anotó (véase la figura 4.22) hasta que obtuvo la altura del triángulo, que era el cateto adyacente.

Luego de obtener el cateto adyacente, *U* expresó que no se podía calcular el área porque los triángulos (en su esquema) no eran iguales y que los ángulos tampoco habían sido exactos. Luego preguntó: “Igual lo puedo hacer, ¿no?”

La alumna hizo operaciones en un solo renglón para obtener el área y el perímetro del heptágono. En primer lugar anotó que el perímetro era de 70 cm y enseguida multiplicó este valor por 4 (que obtuvo como altura del triángulo) y con la calculadora finalmente dividió entre 2. No multiplicó base por altura y dividió entre 2 como ella misma había hecho con el problema del pentágono. La operación que hizo fue multiplicar el perímetro (70 cm) por apotema (la altura de 4 cm) y luego dividió entre 2, como se hace al aplicar la fórmula del área en los polígonos regulares (véase la figura 4.23).

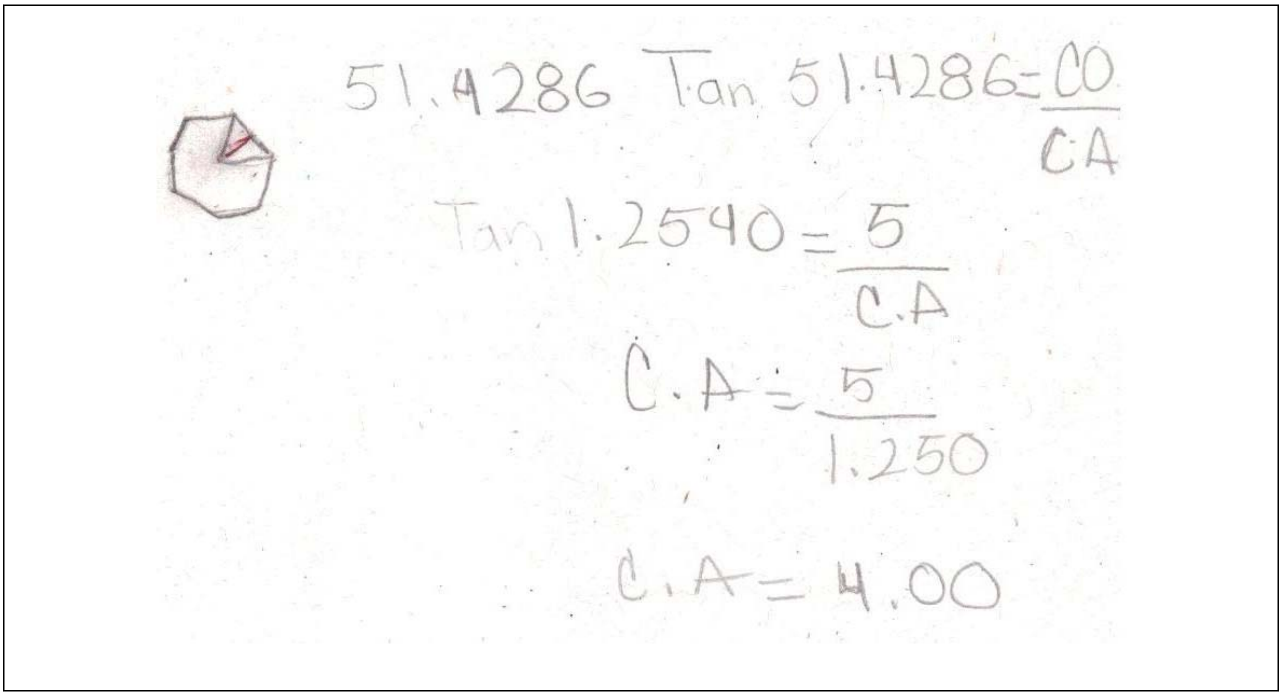


Figura 4.22 Estrategia de la alumna *U* para obtener la altura de un triángulo

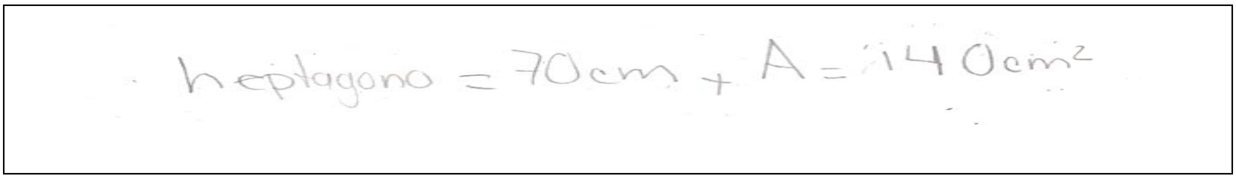


Figura 4.23 Perímetro y área de un heptágono regular obtenido por la alumna *U*

2a parte. Sobre cómo obtuvo el perímetro y área de un octágono regular

La alumna *U* empleó la calculadora directamente para dividir 360°/8 y con ello obtener el ángulo agudo que le serviría para calcular la altura de uno de los triángulos que forman el octágono regular del problema.

Cuando obtuvo 45° en la calculadora, enseguida anotó una expresión mediante la cual empleando tan 45° obtendría el cateto adyacente, o altura, para luego calcular, obtener y anotar el perímetro y el área de un octágono regular de 10 cm por lado (véase la figura 4.24).

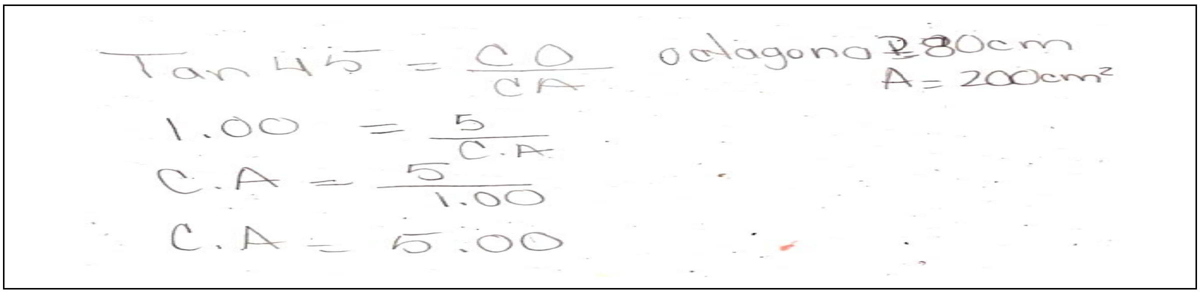


Figura 4.24 Estrategia de *U* para obtener el perímetro y área de un octágono regular

La alumna *U* revisó sólo unos segundos lo que obtuvo, y mientras decía “ah, se me olvida”, colocó el exponente 2 a los metros que correspondían al área.

Observaciones

- Se le olvidó que al ángulo central de cada triángulo en el heptágono y en el octágono debía dividirlo a la mitad, como en el primer problema, ya que para resolver la altura de cada triángulo formó dos triángulos rectángulos, de los cuales su ángulo agudo conocido era la mitad del ángulo central que se obtenía primero.
- La alumna *U* dudó sobre el valor de la tangente cuando se trataba de un ángulo con decimales, como fue el caso de 51.4286° en el heptágono.
- La alumna, después de haber comprendido el primer problema, resolvió el caso del heptágono y el octágono mecánicamente, copiando los pasos que aplicó para resolver el primer problema.

- No hizo una comprobación del resultado ni una revisión paso a paso de la estrategia que empleó para obtener las áreas de los polígonos.
- En el caso del octágono la alumna no realizó algún esquema, como lo hizo en los casos anteriores.
- La alumna realizó las operaciones en la calculadora como si empleara la fórmula "(perímetro × apotema)/2" para los polígonos regulares; sin embargo, no mencionó si recordaba la fórmula o si en realidad la desconocía y fue deducción propia.

3a parte. Sobre cómo resolvió el caso del *n*-ágono

La alumna comenzó explicando que para el *n*-ágono el número de lados era *x*, o cualquier letra. Para calcular el ángulo, dijo que se dividiría 360° entre el número de lados y que podía ser "como una ecuación", y planteó que "360°/*n* es el ángulo". Luego anotó en la hoja una expresión, basándose en la hoja de trabajo del problema del pentágono, en la que igualó tan (360°/*n*) con la razón C. O./C. A., y luego sustituyó con los valores conocidos.

La alumna *U* se basó completamente en la estrategia que empleó para resolver el problema del pentágono regular. Haciendo la revisión de lo que le correspondía como datos a la igualdad que planteó, reconoció que el ángulo central que había obtenido lo dividió entre 2 y sin mayor explicación cambió en su igualdad *n* por 2*n* (véase la figura 4.25).

$$\mathrm{Tan}\ \frac{360}{n} = \frac{C.O}{CA}$$

$$\mathrm{Tan}\ \frac{360}{2n} = \frac{5}{C.A}$$

$$\boxed{C.A = \frac{5}{\tan \frac{360}{2n}}}$$

Figura 4.25 Estrategia de *U* para obtener la altura (apotema) del *n*-ágono regular

La alumna concluyó el despeje del cateto adyacente (C. A.) como lo había hecho en el problema del pentágono y en los anteriores. Sin embargo, no relacionó lo escrito en esta fórmula respecto a dividir el ángulo a la mitad con lo que efectuó en los casos del heptágono y el octágono.

La alumna *U* para el área total del *n*-ágono escribió *A*, luego preguntó: “¿Cómo se representa?”, refiriéndose al total, sin saber en ese momento si multiplicaba por el perímetro (que aún no obtenía) como lo hizo con el heptágono y con el octágono o si lo hacía como con el pentágono: (base × altura)/2.

La alumna repasó lo que escribió en el problema del pentágono y fue sustituyendo por pasos la expresión que tenía anotada ahí. Obtuvo finalmente la expresión para el área de un *n*-ágono regular de 10 cm de lado, como se muestra en la figura 4.26.

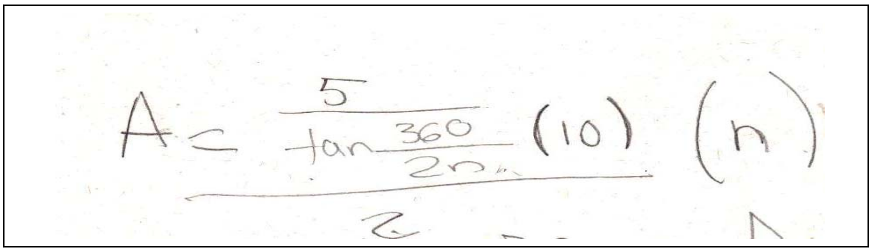


Figura 4.26 Fórmula de *U* para calcular el área de un *n*-ágono regular de 10 cm de lado

Se le pidió a la alumna *U* que comprobara su fórmula calculando el área del heptágono. Sólo empleó la calculadora para obtener lo que se le pedía, aunque fue resolviendo la fórmula por partes, y en el caso de 2*n* lo hizo mentalmente. Finalmente anotó:

Heptágono [p] = 70 cm,

A = 363.3912 cm^2.

Cuando se le preguntó porque no obtuvo el mismo resultado que cuando resolvió el mismo problema antes, respondió que podía ser el número de lados, y que a lo mejor salía si lo hacía por partes, sin la fórmula. Se le pidió que obtuviera el área del octágono, para no repetir el caso por partes.

U anotó en otra hoja la fórmula completa para el área del *n*-ágono y sustituyo los datos para el octágono. Nuevamente empleó la calculadora haciendo ahí las operaciones por partes y enseguida anotó:

Octágono = P = 80 cm,

A = 965.6854 cm^2.

La alumna *U* dijo que la calculadora, al ser científica, podía haber afectado el resultado en las áreas para el heptágono y el octágono.

Con el objetivo de hacer notar a la alumna *U* que el error estaba en la primera vez que resolvió los problemas del octágono y el heptágono cuando no dividió el ángulo central a la mitad, se le pidió que obtuviera el cateto adyacente como lo hizo sin la fórmula del *n*-ágono.

La alumna *U* empezó por hacer la operación de dividir 360°/7 y fue haciéndola cuando se dio cuenta de que al calcular el área del heptágono la primera vez, no había dividido entre 14, sino entre 7 (el número de lados), es decir, no hizo la división 360°/2*n*.

Observaciones

- Los problemas pueden resolverse mecánicamente; sin embargo, la mecanización hace ver estrategias generales (fórmulas) para resolver problemas parecidos.
- No hay un hábito de revisar lo que se escribe como respuesta de un problema. La alumna no expresó en oraciones los resultados de perímetro y área para cada polígono.
- Los esquemas ayudan en los problemas en los que se desconoce la incógnita y cómo se resuelve; una vez familiarizados con el tipo de problema propuesto, los esquemas no son necesarios (*U* no hizo esquema para el octágono y *n*-ágono).
- Es probable que la alumna recordara la fórmula del área de un polígono regular. No mencionó la palabra apotema y finalmente no la relacionó con la fórmula del área del *n*-ágono.

- Para evitar hacer una revisión completa de un problema, la alumna culpó a la calculadora científica de los resultados diferentes.

Problema 3

Sobre cómo resolvió el problema de la escalera

El problema de la escalera no tenía un esquema en el que la alumna *U* pudiera basarse para su resolución (véase el anexo 10). Primero dibujó un rectángulo y sobre uno de sus lados encimó el trazo que correspondía a una escalera. La duda de la alumna era cómo hacer el esquema del problema, ya que el suelo y la escalera formaban un ángulo de 65°. La alumna *U* suponía que la escalera estaba pegada a la pared; después de leer el problema nuevamente, borró ese esquema e inició otro más abajo en la hoja.

Una segunda duda de la alumna al hacer el esquema fue el significado de "perpendicular" y mencionó que "Cuando una calle se cruza con otra se dice que es perpendicular porque la atraviesa". No hizo mención a que se cruzaban formando ángulos de 90°; sin embargo, en su esquema indicó uno (de 90°) por la necesidad de resolver con un triángulo rectángulo.

En el esquema para el problema de la escalera, *U* anotó 90° en el ángulo formado por la pared del edificio y el suelo sin mencionar que este dato lo determinaba el enunciado del problema, 65° en el ángulo formado por la base de la escalera y el suelo (véase la figura 4.27).

Después de realizar su esquema, *U* escribió una igualdad empleando tan 65°; sin embargo, expresó que no sabía cuánto valían los lados y que mejor usaba la hipotenusa de 4 m, borrando la primera expresión que había planteado.

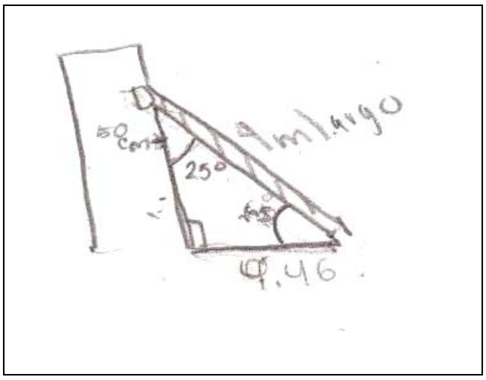


Figura 4.27 Esquema de la alumna *U* para el problema de la escalera

La alumna *U* escribió cos 65°, aun cuando había mencionado que le serviría seno para utilizar la hipotenusa. En la calculadora obtuvo primero cos 65° = 0.4226; sólo anotó ".4226" y continuó sin darse cuenta de que su planteamiento debió ser "cos 65° = C. A./*h*" (véase la figura 4.28).

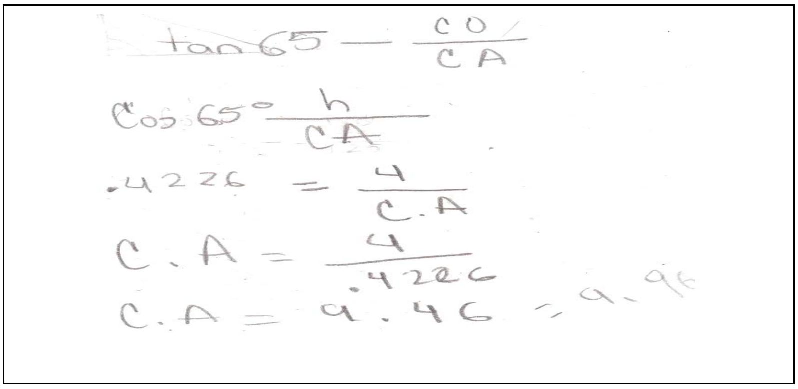


Figura 4.28 Estrategia para obtener la distancia del edificio al pie de la escalera

Cuando concluyó el despeje regresó a la lectura del problema y murmuró: "A lo que mide C. O. le tengo que reducir 50 cm… ahora sí me sirve la tangente". Comenzó entonces un nuevo planteamiento empleando tan 25°. Después de observar que le faltaban datos en el problema, no empleó el cateto que había obtenido, en lugar de esto planteó una igualdad con sen 25° (que es cos 65°, y que ya había hecho antes), con lo que obtuvo el mismo resultado. Al darse cuenta de que era el mismo resultado, hizo lo que había murmurado antes: aumentó 50 cm a la distancia de la base del edificio a la base de la escalera. Para obtener la altura a la que se debía colocar la escalera, disminuyendo 50 cm del borde de la ventana, decidió que al mismo valor encontrado como cateto opuesto le debía restar 50 cm (véase la figura 4.29).

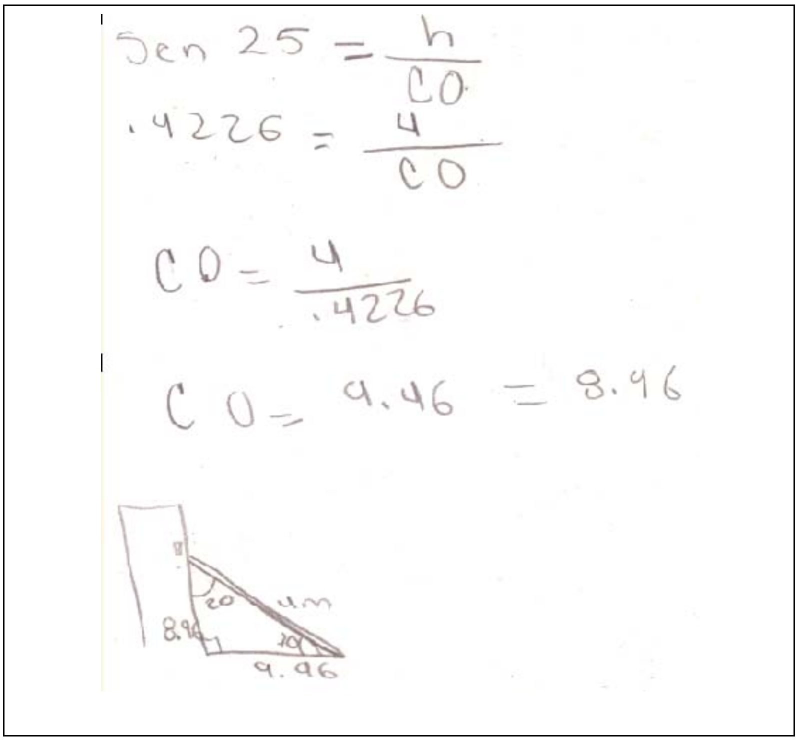


Figura 4.29 Estrategia de resolución del problema de la escalera

Observaciones

- La alumna invirtió las razones trigonométricas seno y coseno, escribió la hipotenusa en el denominador en ambos casos. No revisó en sus apuntes, ni siquiera dudó al escribirlas.
- Cuando *U* encontró que los resultados eran los mismos, después de emplear sen 25° y cos 65°, asumió que con ello se comprobaba el resultado anterior.

- Para responder a la pregunta del problema (la distancia a la que debe colocarse la base de la escalera de la base del edificio), la alumna sólo restó 50 cm al valor obtenido.
- No hubo una reflexión sobre el valor de la distancia encontrada: "¿Se puede colocar, como se indica en el problema, una escalera de 4 m a una distancia de 9.96 m de un edificio?"
- Para responder a la pregunta del problema, lo hizo mediante un nuevo esquema en el que anotó las distancias (de la base de la escalera a la base del edificio, de la base del edificio a donde llegaría la escalera sobre la pared, la medida de la escalera). Evitó expresar verbalmente la respuesta concreta a lo que se preguntó en el problema.
- Al preguntarle sobre la medida de los ángulos en el nuevo esquema, mostrado en la figura 4.31, la alumna mencionó que sí cambian y escribió 20° y 70°, indicando intuitiva y arbitrariamente que uno disminuye 5° y el otro los aumenta, de acuerdo con los 50 cm que se recorrió la escalera hacia abajo de la ventana del edificio del problema.
- En la opinión de la alumna *U*, le fue bien en la resolución de los problemas (1, 2 y 3) y mencionó que sólo había que aprenderse las fórmulas (refiriéndose a las razones trigonométricas).

2a entrevista

Alumna *K*, 10 de junio de 2008

Problema 1. Sobre cómo determinó el perímetro y el área del pentágono regular

La alumna *K* leyó el problema y enseguida recordó y mencionó que la fórmula "perímetro por apotema sobre 2" le serviría para encontrar el área. Cuando se le preguntó qué era el apotema, *K* respondió que era una línea que va del centro de la figura a uno de los lados.

Para resolver el problema, la alumna *K* expresó que le serviría el triángulo rectángulo del esquema que se incluyó como parte del problema (véase el anexo 11). Luego trazó un primer triángulo rectángulo, colocando la base al revés (en opinión de la alumna), así que lo volvió a trazar (véase la figura 4.30) y entonces colocó los datos del problema.

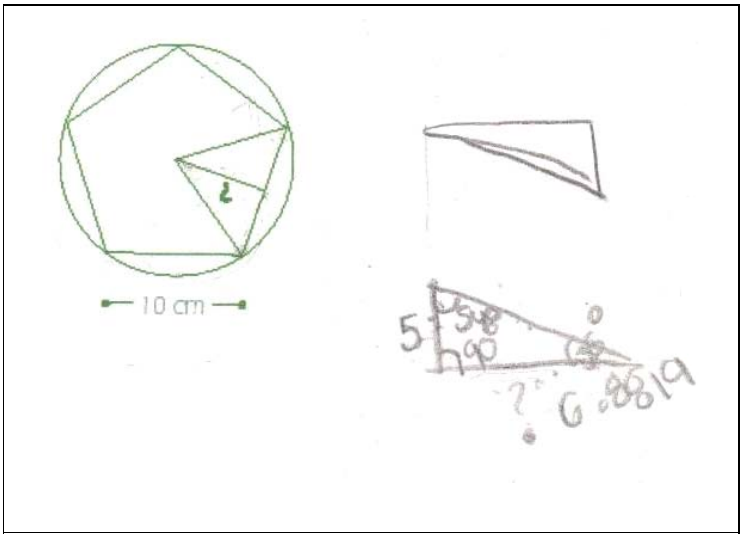


Figura 4.30 Trazos de triángulos rectángulos que pertenecen al pentágono regular

Para obtener el ángulo central que subtiende un lado del pentágono, la alumna *K* dividió en la calculadora 360° entre 5, y dividió el resultado entre 2 determinando que uno de los ángulos agudos del triángulo rectángulo que ella trazó sólo era la mitad de lo que medía el ángulo central.

La alumna *K* escribió casi de inmediato que la razón que le ayudaría a encontrar el apotema era tangente de 36°. Luego la igualó con la razón 90°/C. A. Se le preguntó si en las razones trigonométricas se dividían ángulos entre lados y respondió que sí, pues dependía de lo que se buscara en el despeje. Cuando explicó en su expresión que buscaba el valor del cateto adyacente y que en el esquema ella conocía 5 (la mitad de un lado del pentágono), borró en su igualdad 90° y escribió 5.

Sin realizar el despeje correctamente, la alumna *K* obtuvo el apotema (cateto adyacente en su planteamiento) igual a 3.6327 cm. A la alumna no le pareció un resultado lógico: expresó que era muy pequeño para el triángulo y que mejor comprobaría usando el otro ángulo agudo para calcular el mismo lado.

El resultado que había obtenido primero era incorrecto, ya que despejó mal el cateto adyacente que estaba en el denominador de la razón. En el segundo planteamiento la incógnita era el cateto opuesto, aunque era el mismo lado, así que el despeje fue correcto porque dicha incógnita estaba en el numerador de la razón planteada.

Obtuvo el valor del apotema igual al 6.8819 cm y colocó este dato en el esquema del triángulo rectángulo que elaboró. Enseguida anotó a la derecha de la hoja de trabajo junto al esquema la fórmula del área para un polígono regular. Luego, en el renglón siguiente, escribió una *P* para el valor del perímetro y expresó que si cada lado era de 10 cm, el perímetro era de 50 cm. En lugar de escribir dicho resultado, borró la *P* y escribió "*A* =", sustituyendo en la fórmula los datos, realizó con la calculadora las operaciones de multiplicación y división correspondientes y finalmente escribió en 2 reglones los resultados: primero el área y después el perímetro del pentágono (véase la figura 4.31).

Observaciones

- La alumna *K* recordó de inmediato la fórmula para obtener el área de un polígono regular, aunque no definió con claridad lo que era el apotema.

- El esquema donde trazó un triángulo rectángulo con el ángulo de 90° arriba y la hipotenusa hacia abajo no le permitió emplearlo en la resolución porque le pareció un triángulo invertido. *K* requirió invertir dicho triángulo para colocar ahí los datos.

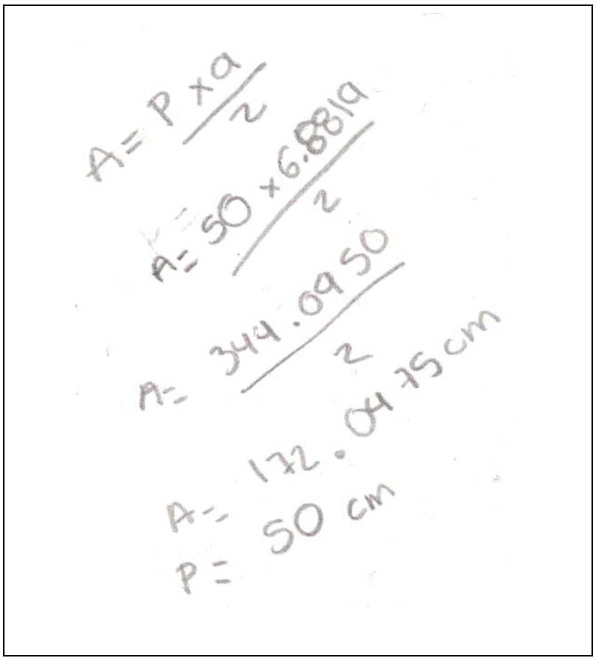


Figura 4.31 Operaciones para obtener el área y perímetro del pentágono regular

- La alumna determinó que con tan 36° encontraría el apotema; sin embargo, no supo cómo despejar correctamente una razón cuando la incógnita se encuentra en el denominador.
- A la alumna *K* le pareció que el apotema medía menos de 5 cm y que en el esquema que trazó se veía más grande. Se basó en la observación para determinar que el valor obtenido era incorrecto.
- La alumna planteó una segunda igualdad empleando el otro ángulo agudo y con ello encontró cuánto medía el apotema.

- El mayor obstáculo en la resolución de este problema fue cómo calcular el apotema, con ello resolvió rápidamente el área del pentágono. El perímetro del polígono lo encontró haciendo operaciones mentalmente.
- No empleó unidades cuadradas para expresar el área del pentágono.

Problema 2

Después de leer el problema, la alumna expresó que era como el anterior, pero que cambiaba el número de lados. Dividió (imaginariamente) la hoja de trabajo en 3 columnas y en cada parte escribió como títulos "Heptágono, Octágono y *N*-ágono". Enseguida escribió debajo de cada uno de ellos el perímetro que le correspondía. En el caso del *n*-ágono indicó la multiplicación "*P* = (*x*) (10) cm".

La alumna *K* trazó enseguida los tres triángulos rectángulos con los que se ayudaría para calcular el apotema. No intentó dibujar el heptágono, el octágono ni el *n*-ágono: únicamente trazó los triángulos. Luego empezó a colocar los datos de cada caso, dividiendo 360° entre el número de lados y luego entre 2 para obtener el ángulo agudo correspondiente. Su resolución fue ordenada: perímetro de los tres polígonos, luego el esquema para cada uno y por último los datos. La alumna no pudo seguir la resolución ordenadamente cuando quiso colocar los datos para el *n*-ágono; entonces resolvió caso por caso (véase la figura 4.32).

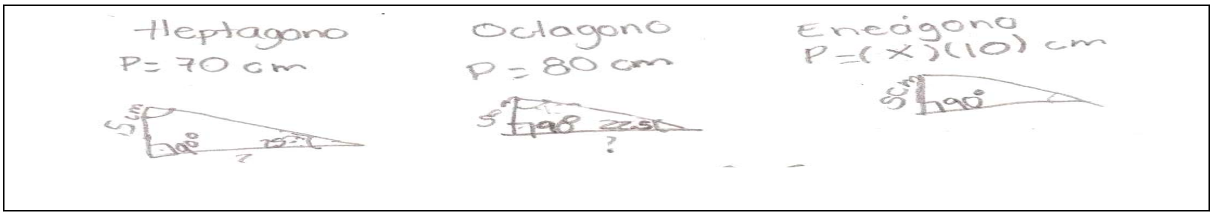


Figura 4.32 Esquemas para resolver el heptágono, octágono y *n*-ágono regulares

1a parte. Sobre cómo obtuvo el área del heptágono regular

La alumna *K* planteó primero la igualdad “tan 25.71° = 5/C. A.”, pero expresó que así había hecho en el caso del pentágono y que no sabía cómo despejar. Se le preguntó qué hacía si el cateto adyacente estaba dividiendo y lo quería pasar al otro lado de la igualdad; respondió: “pasa multiplicando”. La alumna escribió “(tan 25.71°) (C. A.) = 5”; luego de observar la expresión dijo: “Entonces tan 25.71° va a pasar dividiendo [al otro miembro de la igualdad]”.

Después de realizar el despeje, hizo las operaciones en la calculadora, primero obtuvo el valor de tan 25.71°, y luego dividió 5 entre dicho valor para obtener el apotema. Una vez calculado, escribió la fórmula del área de un polígono, sustituyó los datos y escribió el área en centímetros (véase la figura 4.33).

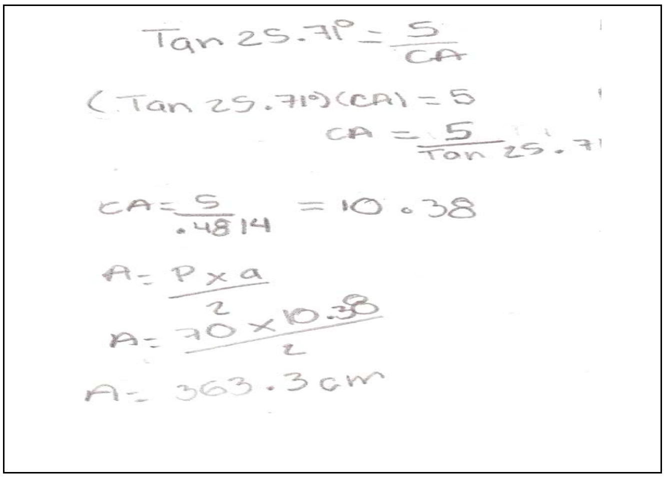


Figura 4.33 Operaciones escritas para obtener el área del heptágono regular

2a parte. Sobre cómo obtuvo el área del octágono regular

La alumna colocó los datos del triángulo rectángulo que le ayudaría; primero determinó con la calculadora que un ángulo (el central) medía 45°, y así lo escribió, pero retomó que después ese ángulo se dividía entre 2 y con ello obtuvo que el ángulo agudo medía en el caso del octágono 22.5°.

De modo casi mecánico escribió una igualdad empleando tangente como en los polígonos anteriores. Realizó el despeje del cateto adyacente en voz alta y paso a paso hasta que realizó los cálculos de manera rápida y obtuvo que el apotema medía 12.07 cm.

El siguiente paso en su estrategia fue anotar la fórmula del área de los polígonos regulares; luego sustituyó perímetro y apotema por los valores obtenidos, realizó las operaciones con la calculadora y escribió el área en centímetros (véase la figura 4.34).

3a parte. Sobre cómo resolvió el caso del *n*-ágono

El espacio en la hoja de trabajo del problema 2 no le alcanzaba para resolver ahí el caso del *n*-ágono, así que la alumna empleó otra hoja en la que copió el esquema del triángulo rectángulo junto con el perímetro que había expresado con la multiplicación (x) (10) cm.

Retomó lo que hizo en el heptágono y en el octágono para calcular el ángulo agudo del triángulo rectángulo. Luego explicó en voz alta “Dividí 360° entre el número de lados y luego entre 2, es decir que para el de 5 [lados] fue 360°/10, para el de 7[lados] fue 360° entre 7 y entre 2, pero como es el doble de triangulitos, por eso se puede 360°/14, o sea el doble”. Se le preguntó cómo expresaría el ángulo del polígono de x lados y respondió “$360°/x^2$ porque se divide 360° entre el doble de x”. Para que la alumna corrigiera su expresión, se le preguntó cuál era el resultado correcto “$x + x = x^2$” o “$x + x= 2x$”.

Respondió que era 2*x* porque eran dos veces *x* (decir *x* al cuadrado no representa el doble de *x*).

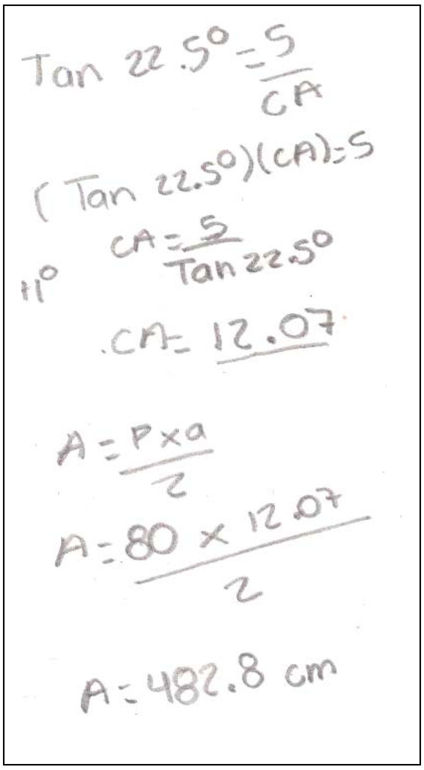


Figura 4.34 Operaciones para obtener el área del octágono regular

Primero escribió 360°/2*x* y en el reglón de abajo (véase la figura 4.35), siguiendo lo hecho en los polígonos anteriores, escribió tan 360°/2*x* = 5/C. A., luego despejó paso a paso y obtuvo C. A. = 5 (tan (360°/2*x*)).

Para obtener el área del *n*-ágono anotó en la hoja la fórmula del área para los polígonos regulares. Abajo escribió la sustitución, primero lo que obtuvo para el apotema encerrando la expresión entre paréntesis. Abrió otro paréntesis y escribió la expresión para obtener el perímetro, cerró el paréntesis y trazó una línea debajo de toda la expresión y escribió que se dividía entre 2 (véase la figura 4.36).

$$\frac{360^\circ}{2x}$$

$$\tan\frac{360^\circ}{2x} = \frac{5}{CA}$$

$$\left(\tan\frac{360^\circ}{2x}\right)(CA) = 5$$

$$CA = \frac{5}{\left(\tan\frac{360^\circ}{2x}\right)}$$

Figura 4.35 Estrategia para obtener el cateto adyacente (apotema del *n*-ágono)

$$A = \frac{P \times a}{2}$$

$$A = \frac{\left(\frac{5}{\tan\frac{360^\circ}{2x}}\right)\left((x)(10)\right)}{2}$$

Figura 4.36 Fórmula del área para el *n*-ágono regular de 10 cm de lado

Se pidió a la alumna que comprobara la fórmula obtenida calculando el área de alguno de los polígonos anteriores. Decidió comprobar la fórmula con el pentágono, primero calculó el apotema dividiendo “5/tan (360°/10)”, al resultado que obtuvo lo multiplicó por “(7) (10)” y finalmente dividió entre 2. Su resultado coincidió con el área del pentágono del primer problema.

En opinión de la alumna *K* fue fácil encontrar la generalización o la fórmula para calcular el área del *n*-ágono, ya que la figura del problema —el esquema del pentágono regular— ayudaba mucho en cómo resolver los polígonos.

Observaciones

- La alumna mecanizó los casos del problema, resolviéndolos de igual forma como hizo con el problema del pentágono.
- *K* trató de resolver en orden los polígonos del problema 2, pero cuando llegó al *n*-ágono no le resultó una estrategia fácil de seguir.
- La alumna escribió cómo se obtiene el área del *n*-ágono de 10 cm de lado.

Problema 3

Sobre cómo resolvió el problema de la escalera

Leyó de forma continua el problema de la escalera. En una segunda lectura lo hizo oración por oración para que fuera haciendo un primer esquema, en el cual la escalera quedó paralela a la pared del edificio (véase la figura 4.37).

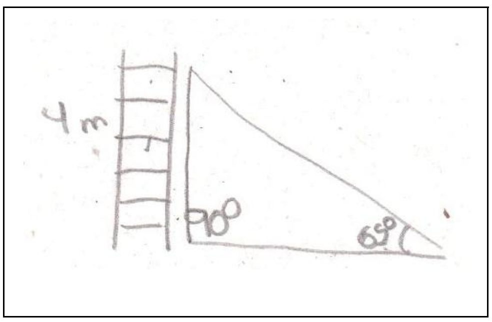


Figura 4.37 Primer trazo del esquema para el problema de la escalera

Al preguntarle cómo quedaría el esquema cuando la escalera se moviera 50 cm debajo de la ventana, respondió que era la escalera la que formaba el triángulo rectángulo. La alumna realizó un segundo esquema en el que la escalera era la hipotenusa, nuevamente colocó el valor de cada ángulo aclarando que debía haber uno de 90°, aunque no lo dice el problema. También colocó C. A. y C. O. respecto al ángulo de 65°.

Se le preguntó cuál distancia buscaba y respondió que la del suelo al borde de la ventana, o sea el cateto opuesto. Expresó que tal vez con tangente podría encontrar ese cateto, como en los problemas de los polígonos. También observó que los dos catetos eran desconocidos y cambió de parecer con respecto a la razón trigonométrica que empleó.

La alumna planteó la igualdad "sen 65° = C. O./4" y resolvió con ayuda de la calculadora que el cateto opuesto medía 3.62 m. Luego se le preguntó a la alumna si esa distancia respondía al problema y dijo que debía restarle 50 cm. Sin decir por qué, la alumna anotó la relación de equivalencia, convirtió los metros en centímetros y restó (véase la figura 4.38). Obtuvo 312 cm como la distancia del edificio al borde de la ventana restándole 50 cm.

La alumna *K* expresó que necesitaba otro esquema (sería el tercero), porque si la escalera se movía no formaba el mismo triángulo. Con el tercer esquema trazado la alumna esperaba dar la respuesta al problema; sin embargo, al volver a leer notó que aún no encontraba la distancia a la que debía quedar la escalera.

Se le preguntó cuáles eran los datos en el nuevo triángulo, respondió que sólo el ángulo de 90° y dos lados del triángulo, ya que los ángulos [agudos] habían cambiado cuando se movió la escalera. La alumna pensó un poco y preguntó: "¿Se puede usar el teorema de Pitágoras?" Se le respondió que cuál era o cómo lo usaría, a lo que respondió que era lo más directo porque tenía la hipotenusa y un cateto.

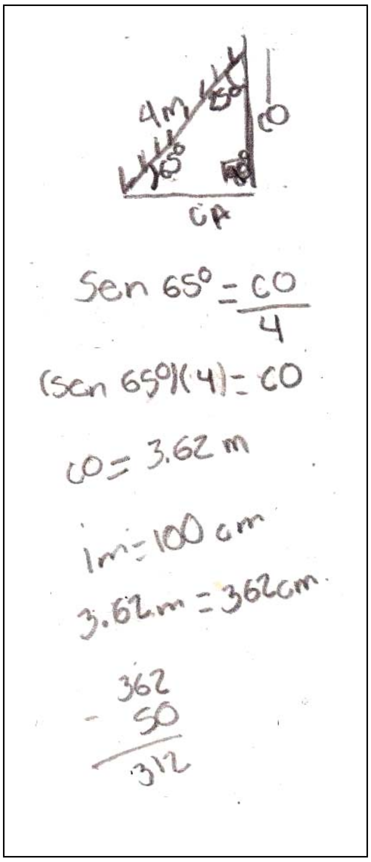


Figura 4.38 Esquema y estrategia para encontrar la altura de la ventana

Debajo del tercer esquema escribió "$a^2 = b^2 + c^2$"; debajo de dicha expresión escribió el despeje de *c,* que dijo era el cateto sobre el suelo. Sin embargo, cuando sustituyó escribió que al cuadrado del cateto le restaría el cuadrado de la hipotenusa. La alumna hizo operaciones en la calculadora varias veces, hasta que anotó que $c^2 = 2.5031$, aunque era el valor de *c* (véase la figura 4.39).

Cuando se le dijo a la alumna *K* que eso era todo, dijo que tenía una duda, pues al ingresar los valores como en el despeje que hizo en la pantalla de la calculadora aparecía un letrero de error. Se le preguntó qué causaría dicho error, ella dijo que el error estaba en el despeje, porque si lo hacía al revés (como lo hizo para dar el resultado) sí salía 2.5031. Entonces se hizo ver a la alumna que en la hoja escribió que al cuadrado del cateto le restaría el cuadrado de la hipotenusa y que en realidad debió despejar el cuadrado del cateto *c* en la forma “$c^2 = a^2 – b^2$”, siendo *a* la hipotenusa y *b* el otro cateto. La alumna aclaró su duda y expresó que casi no usaba ese teorema y que por eso se le olvidaba, pero que ya se había acordado bien. El verdadero error no fue la memorización del teorema: en la figura 4.39 se aprecia que aún había dudas sobre cómo realizar el despeje de ecuaciones.

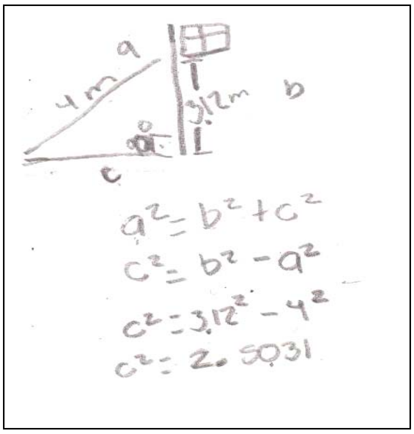


Figura 4.39 Estrategia para calcular la distancia a la que se debe colocar la escalera

Observaciones:

- La alumna relacionó el problema con los anteriores y quiso emplear tangente para resolver en un principio.
- El realizar esquemas más cercanos a la realidad del problema, le permitió a *K* descubrir que no se trataba del mismo triángulo y que para resolver la distancia final de la escalera debía valerse de otros conocimientos además de la trigonometría.

- Negó que en el problema se mencionara que hay un ángulo de 90°, y lo anotó por intuición respecto a cómo es el ángulo que forman el edificio y el suelo. No reconoció el término “perpendicular”.
- Empleó el teorema de Pitágoras.
- Hubo fallas al realizar despejes sencillos en ecuaciones.
- A conveniencia, ajustó las cantidades para no extraer raíz cuadrada a un número negativo, ya que la calculadora le marcó error.

3a entrevista

Alumno *B*, 12 de junio de 2008

Problema 1

Sobre cómo obtuvo el perímetro y el área del pentágono

El alumno *B* inició calculando mentalmente el perímetro del pentágono regular; sólo escribió el resultado, “*P* = 50 cm”.

Para responder a la pregunta del área, sólo escribió “*A* =” pero expresó que no sabía cómo obtenerla. Al observar el esquema del pentágono (véase el anexo 11), mencionó que sí sabía cómo calcular el área de los triángulos en la figura.

Como el alumno no empezaba a resolver los triángulos, se le preguntó si conocía cuánto medían los lados de uno de los triángulos rectángulos que aparecían en el esquema del pentágono. Respondió que sí, que cada lado medía 10 cm, y la base del triángulo [rectángulo] medía 5 cm. Luego dijo que además era el único lado conocido, y que para calcular el área del triángulo también necesitaba el lado que tenía el signo de interrogación en el esquema, pues necesitaba multiplicar base por altura.

Se le preguntó si podía saber cuánto medía el ángulo agudo del triángulo rectángulo que coincidía con el centro del pentágono. Al señalarlo, el alumno respondió: “si se divide el pentágono en 5 triángulos iguales como se ve [en el esquema del pentágono], puedo dividir la vuelta completa [refiriéndose a los 360° de la circunferencia] entre 5”. El alumno *B* tomó la calculadora e hizo la división; luego explicó que cada ángulo medía 72° y entonces el ángulo agudo del triángulo rectángulo medía la mitad, porque se dividió el ángulo de 72° en dos ángulos iguales. Con la calculadora dividió 72° entre 2 y obtuvo 36°.

El alumno *B* escribió con letra muy tenue la suma 90° + 36° = 126°; luego hizo la operación 180° - 126° y así obtuvo que el otro ángulo agudo medía 54°. Después expresó que sí se sabía cuánto medían los tres ángulos.

Se le preguntó que si con los datos que tenía en ese momento se podía obtener la altura del triángulo (el lado señalado con un signo de interrogación en el esquema). El alumno respondió que como tenía 5 cm, y era el cateto opuesto al ángulo de 36°, con la razón seno obtendría la hipotenusa, con coseno ningún lado y con tangente el cateto adyacente, que era el lado que se quería obtener. El alumno *B* planteó una igualdad empleando tangente de 36° y obtuvo el apotema (véase la figura 4.40). Para obtener el resultado anotó a un lado “.7265”, que es la tangente de 36°, y luego empleó dicho número para calcular el apotema.

El alumno *B* no escribió las operaciones siguientes, sólo multiplicó en la calculadora el valor que obtuvo para *a* (la altura, que a la vez era el cateto adyacente) por 10 cm, que era la base; por último, dividió entre 2 y con ello obtuvo 34.4095 como el área del triángulo. Escribió ese resultado (parcial) sin hacer referencia de qué se trataba, como se observa en la figura 4.40.

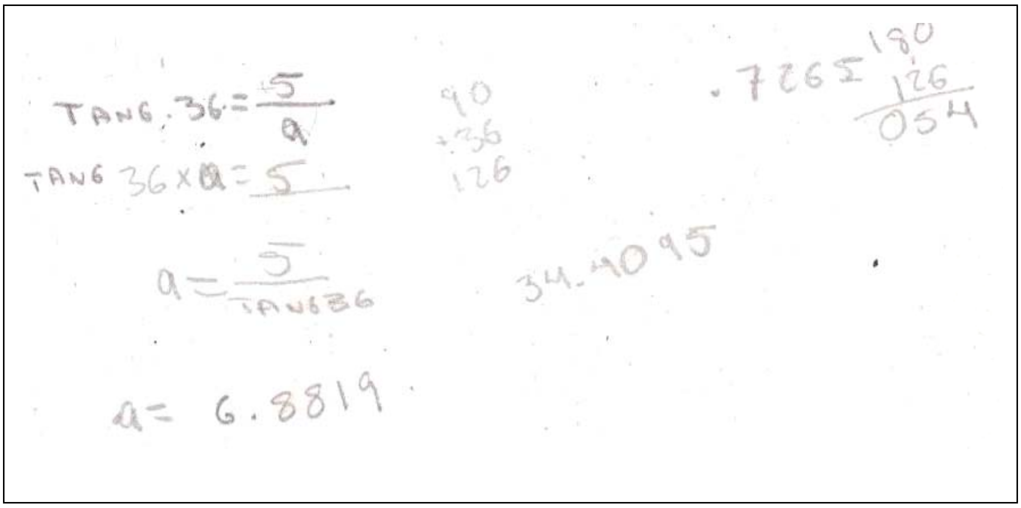


Figura 4.40 Estrategia de *B* para obtener la altura de un triángulo en el pentágono regular

Trazó en el pentágono los 5 triángulos que lo formaban, luego multiplicó el resultado que aún seguía en la calculadora (34.4095) por 5. Enseguida anotó el resultado del perímetro y el área al final de la hoja, y también donde dejó el espacio en blanco al principio de la resolución del problema.

Observaciones

- El alumno *B* no empleó la fórmula del área de los polígonos regulares.
- Abrevió tangente como “tang”, aunque en clase no se abrevió de esta forma.
- El alumno *B* demostró dominio de las razones trigonométricas al expresar qué lado (cateto adyacente o hipotenusa) podía obtenerse al emplear seno, coseno o tangente si se conocía el cateto opuesto.
- Despejó por pasos (lo cual hizo también con las operaciones en la calculadora).
- Comprobó que los ángulos del triángulo sumaran 180° después de haberlos obtenido.
- Escribió en desorden los resultados parciales y sus operaciones.

- Contó los triángulos que se formaban con los lados del pentágono y entonces multiplicó el área de uno de ellos por 5.
- Cuando encontró el perímetro y el área, los escribió al final de la hoja; los volvió a escribir arriba con la unidad correspondiente para el área (m^2).

Problema 2

1a parte. Sobre cómo obtuvo el perímetro y el área del heptágono

El alumno *B* trazó una circunferencia, ubicó su centro y dividió en 7 partes para unir los lados que formarían el heptágono. Enseguida trazó un triángulo rectángulo en el que indicó que un cateto era *a* y el otro medía 5 cm. Luego dividió con la calculadora 360°/7 y obtuvo 51.42°; colocó ese valor en un triángulo dentro del heptágono que trazó. Dividió el ángulo obtenido entre 2 empleando la calculadora, y obtuvo el ángulo agudo del triángulo rectángulo (véase la figura 4.41).

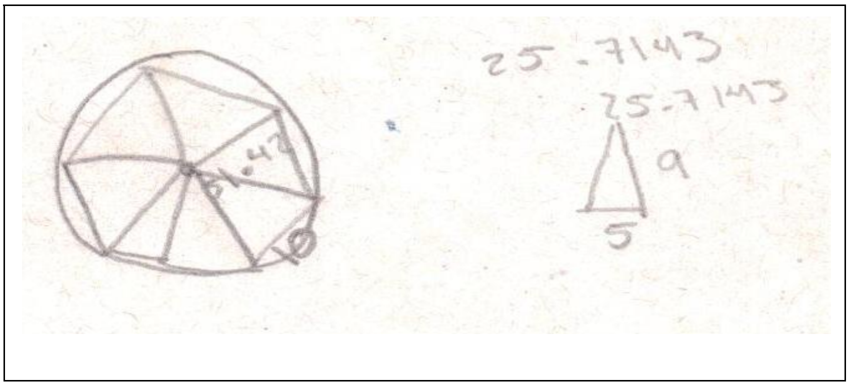


Figura 4.41 Esquema y datos del heptágono regular

Después de los datos en el esquema del heptágono, el alumno *B* escribió una igualdad empleando tan 25.7143°. En el primer renglón no colocó el valor del ángulo, lo hizo en el renglón de abajo y continuó con el despeje de *a* (cateto adyacente) y lo obtuvo.

En este caso también anotó el resultado de la tangente por separado (véase la figura 4.42). Tampoco escribió las operaciones que realizó en la calculadora “(a × 10)/2” para calcular el área. El alumno escribió arriba de la hoja el área del heptágono, 363.4260 cm^2, y abajo su perímetro, 70 cm.

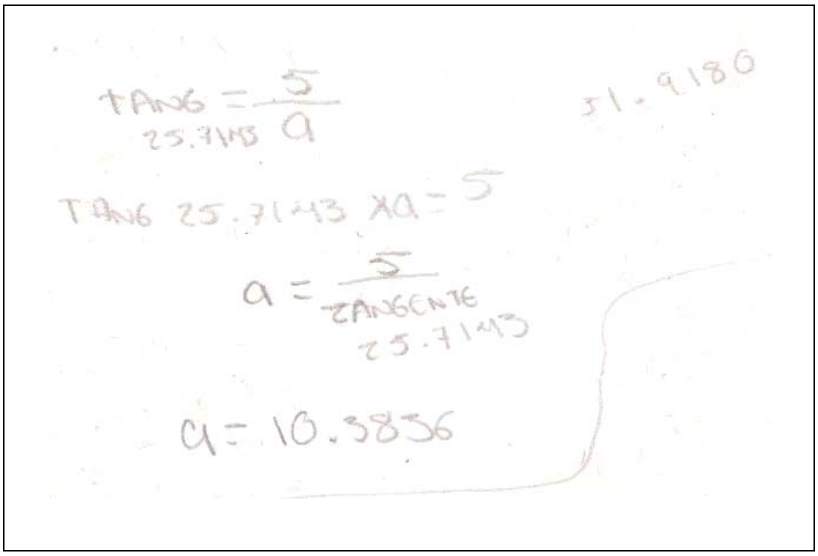


Figura 4.42 Estrategia de *B* para obtener la altura de un triángulo en el heptágono regular

2a parte. Sobre cómo obtuvo el área y el perímetro del octágono

En este caso, el alumno sólo trazó el esquema del triángulo rectángulo y le colocó 5 cm en uno de los catetos. Tomó la calculadora y dividió 360°/16 y obtuvo el ángulo de 22.5°, que indicó en su esquema. Trazó de forma tenue un triángulo a la derecha, de modo que se formó un triángulo de los que forman el octágono.

El alumno *B* planteó la igualdad “tan 22.5° = 5/a”, luego despejó por pasos hasta obtener a = 5/tan 22.5°. Escribió el valor de esta tangente y obtuvo a = 12.0711. Sin explicar ni escribir el procedimiento de su estrategia, *B* multiplicó el valor que obtuvo para a por 10 y dividió el producto entre 2. Con ello obtuvo que el área de uno de los triángulos que formaban el octágono: era 60.3555 cm^2, valor que anotó a un lado. En la calculadora realizó las operaciones para el área del octágono, obteniendo 482.844, y el perímetro de 80 cm. (Muchas de las operaciones que fue realizando el alumno *B* sólo se ven en las videograbaciones, pues el alumno manejó muy rápido la calculadora.)

3a parte. Sobre cómo resolvió el caso del *n*-ágono regular

El alumno *B* expresó que no sabía qué era un *n*-ágono; se le explicó que se le llama así al polígono que tiene *n* número de lados. Luego de pensarlo un poco, el alumno expresó que no sabía qué hacer, pero que si seguía el procedimiento del heptágono y del octágono, primero debía encontrar el ángulo (véase la figura 4.43).

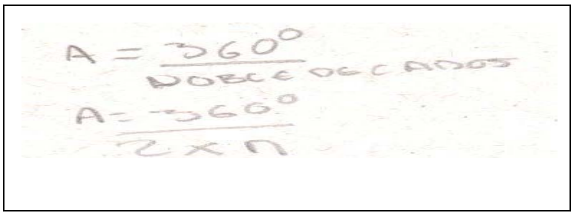


Figura 4.43 Expresión para determinar el ángulo de un triángulo rectángulo en un *n*-ágono regular

Siguió observando lo que realizó en los casos del heptágono y del octágono. Luego planteó una igualdad empleando tangente del ángulo que determinó, e hizo los despejes hasta encontrar el valor de *a*, la altura de uno de los triángulos que forman el *n*-ágono (véase la figura 4.44).

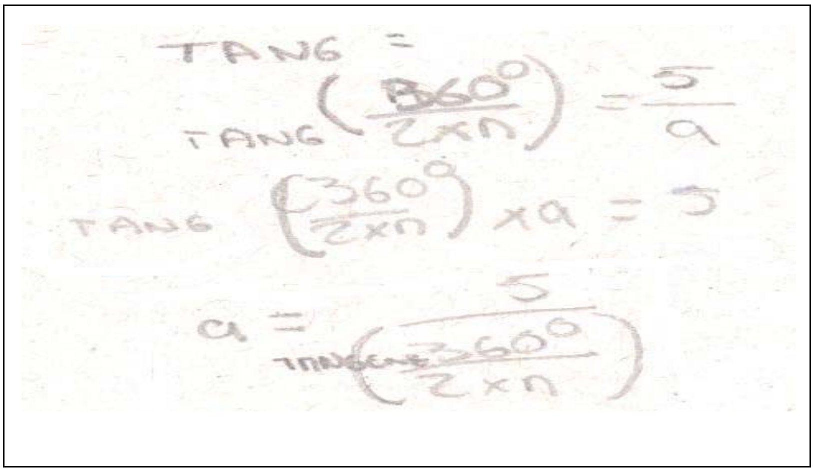


Figura 4.44 Estrategia para obtener la altura de un triángulo rectángulo en el *n*-ágono regular

El alumno *B* expresó que después de calcular la altura se puede encontrar el área del *n*-ágono si se multiplica como lo indica la expresión de la figura 4.45.

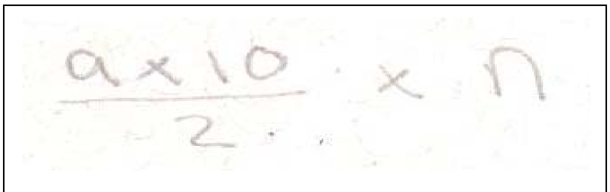


Figura 4.45 Expresión del alumno *B* para determinar el área del *n*-ágono regular

Se le pidió al alumno que resolviera uno de los polígonos con su estrategia, a lo que respondió que sí y que probaría con el pentágono. Al hacer las operaciones directo en la calculadora se enredaba y volvía a empezar (tal vez porque no iba anotando resultados parciales, como lo hacía al resolver los casos anteriores).

Para hacerlo directo en la calculadora, insertó paréntesis para indicar las operaciones “5/(tan(360/2×5))” y luego multiplicó por 10 y dividió entre 2, como lo indica su última expresión. Para terminar, multiplicó lo que obtuvo por 5. El resultado fue el mismo que cuando obtuvo el área en el problema 1.

Observaciones

- Para los casos del heptágono y del octágono el alumno requirió de un esquema, el cual omitió en el caso del *n*-ágono.
- En el esquema del heptágono realizó un trazo muy parecido al del problema 1 (el pentágono); sin embargo, para el octágono se dio cuenta de que el esquema que más le ayudaba era el del triángulo rectángulo que contenía la altura. Sólo trazó un triángulo rectángulo.
- Manejó la calculadora muy rápido, comparando con otros de sus compañeros. Sólo escribió los números de los resultados parciales sin señalar qué significaban porque en el problema no se preguntaba por esos valores.
- Dominaba las razones trigonométricas, pero se olvidaba de, o ponía poca atención en, cómo se abrevia tangente. En una ocasión, cuando resolvió el *n*-ágono, se le olvidó expresarla, y cuando reconoció qué le faltaba, encimó la palabra tangente sobre la expresión que tenía.
- La fórmula que obtuvo para el área del *n*-ágono es muy sencilla. Sin embargo, es necesario encontrar primero la altura para poder aplicar la fórmula.
- El alumno despejó e hizo por pasos operaciones, pero cuando empleó la calculadora para obtener la altura *a* usando su fórmula, empleó paréntesis para que se respetara la jerarquía de las operaciones.

Problema 3

Sobre cómo resolvió el problema de la escalera

El alumno *B* realizó una lectura del problema y trazó un pequeño cuadrado que representaba la ventana, luego hizo un triángulo rectángulo y colocó ahí los datos del problema (la escalera y el ángulo de 65°).

Escribió en la parte superior de la hoja las razones trigonométricas seno, coseno y tangente. Volvió a leer el problema y expresó que conocía la hipotenusa y que se le pedía encontrar el cateto adyacente al ángulo de 65° (la distancia en el suelo del edificio a la escalera). El alumno escribió una igualdad empleando la razón cos 65°. El alumno despejó el cateto adyacente, realizó las operaciones y escribió que el cateto medía 1.6905 m (véase la figura 4.46).

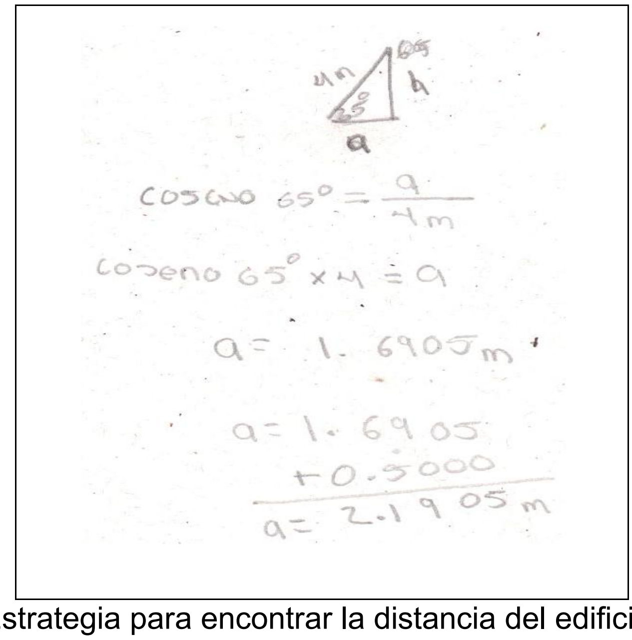


Figura 4.46 Estrategia para encontrar la distancia del edificio a la escalera

Después explicó que si la escalera se movía 50 cm hacia abajo de la ventana, la distancia de *a* (medida de la base del edificio a la base de la escalera) se recorría aumentando 50 cm. El alumno realizó la suma (véase la figura 4.46) y escribió que la distancia a la que se debía colocar la escalera era de 2.19 m.

Observaciones

- El alumno escribió las razones trigonométricas no como apoyo a su resolución, sino formando parte de lo que se le puede evaluar.
- Para resolver la pregunta del problema el alumno no consideró que si la escalera se movía, en el triángulo rectángulo cambiaban los ángulos agudos y se formaba un triángulo rectángulo diferente.

4a entrevista

Alumna *M*, 18 de junio de 2008

Problema 1

Sobre cómo obtuvo el perímetro y el área del pentágono

La alumna *M* realizó la lectura del problema 1 de la entrevista (véase el anexo 11) y obtuvo el perímetro en primer lugar, escribiendo la multiplicación “10 × 5” y su resultado, 50 cm.

Para obtener el área del pentágono decidió trazar sobre el esquema los triángulos que formaban el pentágono. Luego escribió la fórmula para obtener el área de un triángulo. A la derecha de la fórmula sustituyó la altura *H* por un signo de interrogación. También expresó que mejor usaría uno de los triángulos rectángulos y dividió en 2 cada triángulo del esquema de modo que al final quedaron 10 triángulos rectángulos (véase la figura 4.47) con la misma altura desconocida y una base de 5 cm.

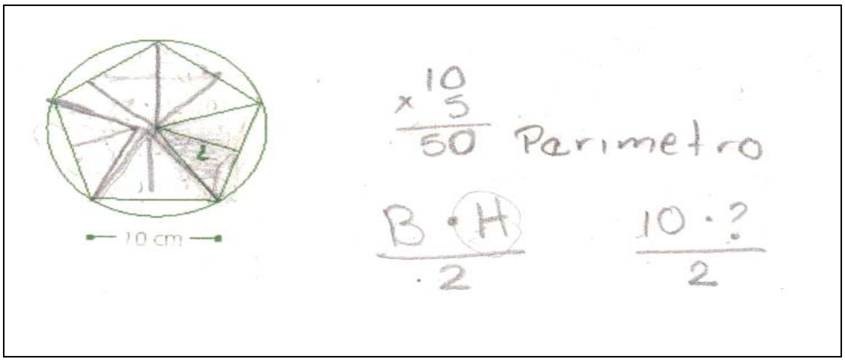


Figura 4.47 Esquema para determinar la altura *H* de los triángulos del pentágono regular

La alumna *M* trazó uno de los triángulos rectángulos y colocó los datos donde correspondía; para encontrar el ángulo agudo dividió 360° entre 10, como se observa en la figura 4.48.

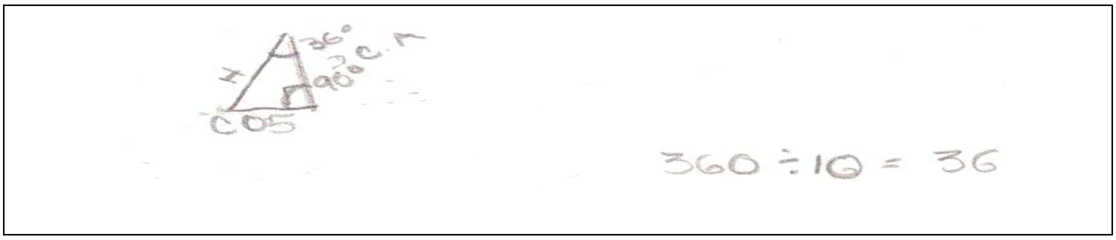


Figura 4.48 Triángulo rectángulo con los datos del problema

Para que la alumna *M* decidiera con qué razón trigonométrica resolvería la altura del triángulo (que es el cateto adyacente de la figura 4.48, pues ahí la *H* significa hipotenusa), escribió “sen θ = C. O./H” y observó que no obtendría el cateto adyacente; enseguida escribió “cos θ = C. A./H” e hizo la misma observación determinando que sin el valor de la hipotenusa no encontraría el cateto buscado. Escribió “tan θ = C. O./C. A.” y expresó en voz alta que con tangente sí se podía calcular la altura “?” con la que obtendría el área de cada triángulo rectángulo.

La alumna *M* escribió una igualdad entre tan 36° y los catetos implicados, realizó el despeje de la incógnita "'?" y obtuvo que la altura medía 6.8819 cm. Luego escribió la fórmula del área del triángulo, sustituyó los datos y obtuvo que cada triángulo rectángulo de base 5 cm y altura 6.8819 cm tenía un área de 17.2 cm^2. Para calcular el área del pentágono, escribió "*ap* = 17.2 x 10" (véase la figura 4.49), y con esta operación concluyó el problema.

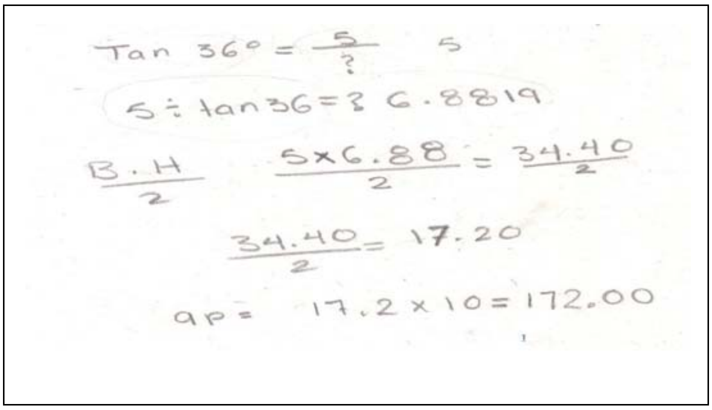


Figura 4.49 Estrategia de la alumna *M* para encontrar el área del pentágono regular

Observaciones

- La alumna anotó todas las operaciones, incluso las que usó para calcular el perímetro.
- Trazó los 10 triángulos rectángulos en que se dividía el pentágono regular.
- Escribió las razones trigonométricas y sus cocientes hasta que obtuvo la que emplearía para resolver el problema.
- Para obtener el área del pentágono, calculó el área de uno de los triángulos rectángulos y multiplicó por 10.
- Para la misma incógnita, la altura, utilizó el signo de interrogación y la letra *H*.

Problema 2

1a parte. Sobre cómo determino el perímetro y el área del heptágono regular

La alumna *M* trazó un heptágono, le ajustó los lados hasta que le pareció correcto. Enseguida escribió la multiplicación “7 × 10 = 70” (aunque no indicó que ése era el perímetro del heptágono).

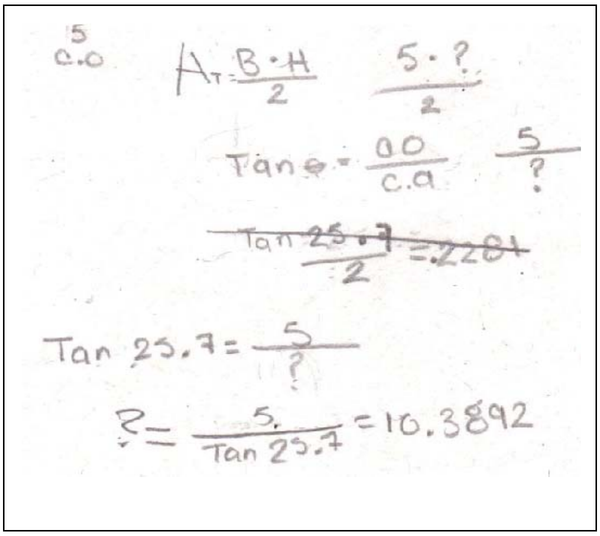


Figura 4.50 Estrategia de *M* para obtener la altura de un triángulo del heptágono regular

Trazó un triángulo rectángulo muy pequeño y colocó ahí que el cateto opuesto medía 5 cm e indicó el ángulo recto. Para calcular un ángulo agudo de dicho triángulo escribió y dividió 360° entre 14; el resultado lo anotó también en el esquema. Después de terminar el esquema del triángulo rectángulo escribió la fórmula del área, esta vez sustituyó la base con 5 cm. La altura quedó expresada por un signo de interrogación. Siguiendo la estrategia que empleó al resolver el caso del pentágono, escribió la igualdad correspondiente a la tangente del ángulo de 25.7°. Cuando hizo la sustitución, siguió lo que se expresa en la fórmula del área del triángulo, calculó “tan (25.7°/2)”, por lo que su resultado fue 0.2281 (véase la figura 4.50). La alumna se dio cuenta de que la altura no debería medir 0.2281 cm, observó la sustitución que hizo y se dio cuenta de que sustituyó en otra fórmula, así que canceló con una línea y realizó la sustitución y despeje de la incógnita nuevamente.

Para calcular el área de un triángulo rectángulo, multiplicó la altura de 10.3892 cm por la base de 5 cm y dividió entre 2. Finalmente la alumna multiplicó esa área por 14, y ese valor lo indicó como el área del heptágono (véase la figura 4.51).

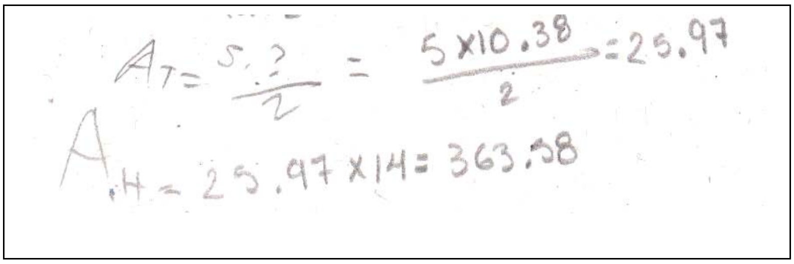


Figura 4.51 Operaciones de la alumna *M* para determinar el área del heptágono regular

2a parte. Sobre cómo determinó el área y el perímetro del octágono regular

La alumna dibujó un octágono y dentro de éste trazó 2 triángulos rectángulos, utilizando como base un lado del octágono. Después escribió la multiplicación “10 × 8 = 80”, con la que indicó que había encontrado el perímetro.

La alumna siguió la estrategia que empleó para el pentágono y el heptágono. Para ella fue más fácil y rápido resolver el área del octágono. Primero trazó un pequeño triángulo rectángulo en el que colocó los datos; para obtener un ángulo agudo dividió 360°/16. La alumna *M* escribió la fórmula del área de un triángulo e hizo la sustitución “(5·?)/2”.

Escribió el planteamiento para hallar la incógnita con la razón trigonométrica tangente. Sustituyó los datos, despejó la incógnita, realizó las operaciones en la calculadora y obtuvo “? = 12.07 cm”.

Para calcular el área del triángulo rectángulo multiplicó la altura (12.07 cm) por 5 cm y dividió entre 2, obteniendo 30.175 cm^2. No multiplicó esa área por 16 para calcular el área del octágono, como lo hizo en los casos anteriores. Dividió 30.175 m^2 entre 2 y luego multiplicó por 16 (véase la figura 4.52). Cuando se le pidió a la alumna que explicara lo que realizó, observó su resultado, lo canceló con una línea y escribió que el área del octágono era lo que obtuvo como área del triángulo rectángulo multiplicada por 16.

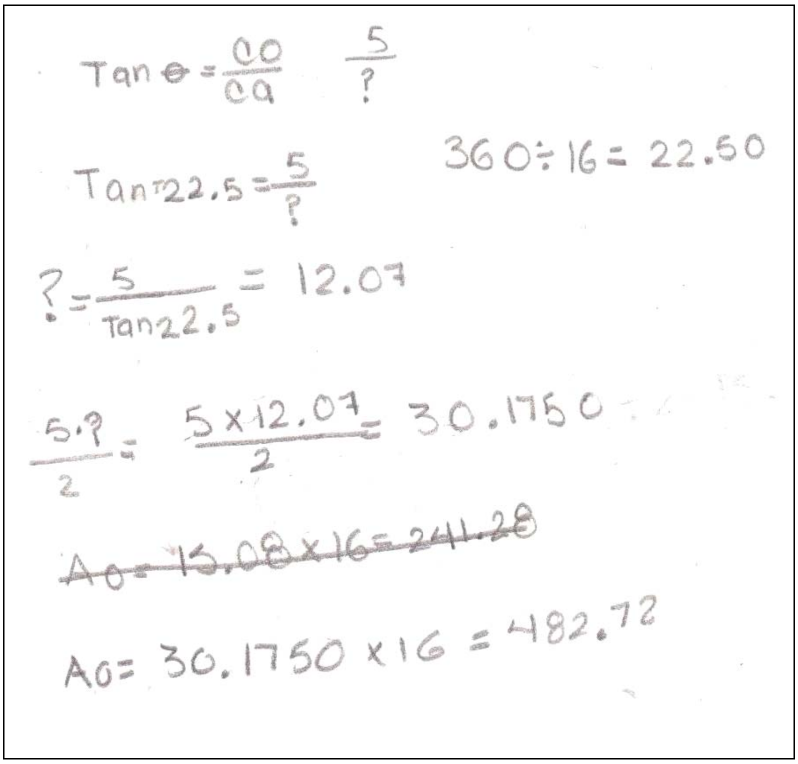


Figura 4.52 Estrategia para determinar el área del octágono regular

3a parte. Sobre cómo resolvió el caso del *n*-ágono regular

La alumna *M* escribió primero que el perímetro sería la multiplicación “$n \cdot 10 = P$” (como había expresado el perímetro para los polígonos anteriores). Enseguida hizo el esquema de un triángulo rectángulo en el que colocó los datos; en el cateto opuesto, 5 cm, y el ángulo recto. Luego expresó que el ángulo mediría 360° entre el doble de lados y lo escribió como se observa en la figura 4.53.

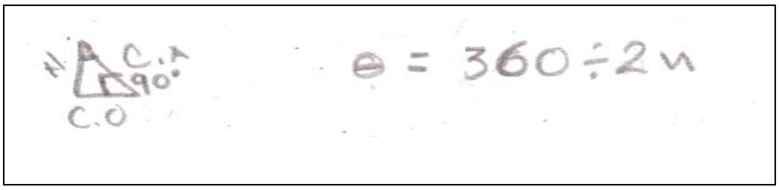


Figura 4.53 Estrategia para determinar el ángulo agudo de un triángulo del *n*-ágono regular

La alumna resolvió tranquilamente, ayudándose de las estrategias empleadas en los casos anteriores. Planteó la igualdad con la razón tangente con los catetos y el ángulo correspondiente, siguiendo lo que hizo con el heptágono y el octágono.

La alumna realizó el despeje obteniendo el valor de la altura “?”. Luego escribió la fórmula para el área de un triángulo. Después expresó que ya no sabía qué hacer porque no se sabía nada del problema (se refería al número de lados del polígono) y que dejando todo indicado (el ángulo y la altura obtenidos) era muy difícil resolverlo.

Se le dijo a la alumna que hasta donde había expresado el área del triángulo rectángulo era suficiente para resolver el problema (véase la figura 4.54) y que si quería se podía quedar así.

La alumna comprendió que para el área del *n*-ágono tenía que multiplicar el área del triángulo rectángulo “(5·?)/2” por el doble del número de lados, que es el número de triángulos rectángulos que se trazarían dentro del polígono. La alumna hizo entonces la sustitución de “?” por la expresión para determinar dicha área, luego encerró esa nueva expresión entre paréntesis y en otros paréntesis, para indicar la multiplicación, escribió 2*n*.

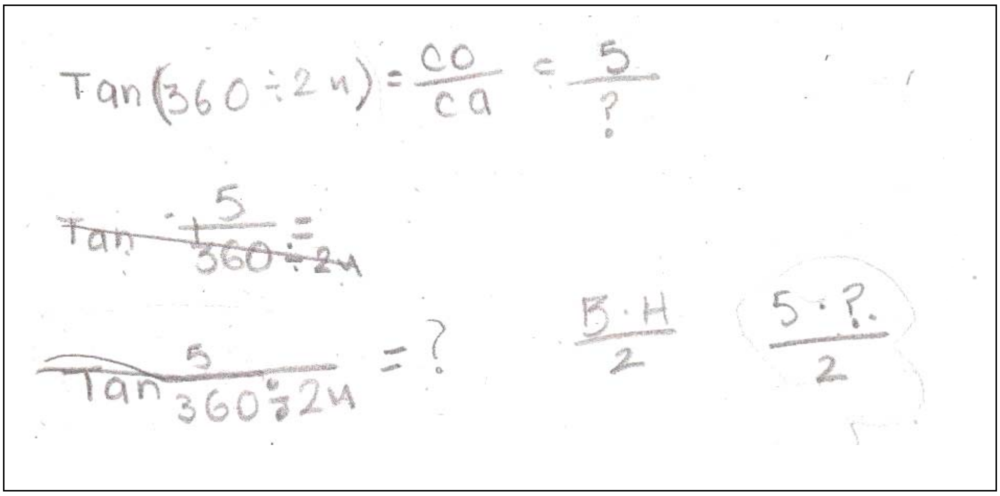


Figura 4.54 Estrategia de la alumna *M* para obtener la altura y el área de un triángulo del *n*-ágono regular

Luego regresó al principio de la expresión y escribió “A_t =” diciendo que era el área total; pero luego cambió la *t* por una *n* para expresar que era la fórmula para calcular el área de un *n*-ágono regular de 10 cm de lado (véase la figura 4.55).

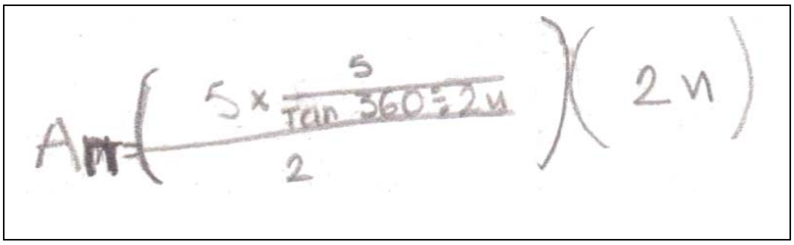


Figura 4.55 Expresión para determinar el área del *n*-ágono regular de 10 cm de lado

Observaciones

- La alumna *M* trazó el polígono correspondiente para el heptágono y el octágono, así como el triángulo rectángulo con el que resolvió cada caso.
- Para calcular el ángulo agudo dividió 360° entre el doble del número de lados del polígono, ya que desde el caso del pentágono trazó en el polígono los triángulos rectángulos que lo formaban. Con esa estrategia se le facilitó plantear la expresión para obtener el ángulo agudo en el caso del *n*-ágono.
- Cuando resolvió el área del octágono, basó su estrategia en los pasos que siguió para el pentágono y el heptágono; sin embargo, al hacerlo más rápidamente realizó operaciones de más. Cuando respondió qué había hecho, pudo reconocer el error y rectificar.
- La alumna *M* no confiaba en sí misma para escribir la fórmula para el área del *n*-ágono regular.
- La escritura de la expresión del área del *n*-ágono fue algo sencillo para la alumna cuando se le hizo notar que ya tenía los datos para sustituir y obtener la expresión final.
- En la mayoría de las ocasiones la alumna no borró lo que realizó cuando se equivocó. Sólo canceló con una línea lo que estaba mal.
- La expresión que la alumna *M* escribió para el área de un *n*-ágono regular no la comprobó mediante la obtención del área de otro polígono.

Problema 3

Sobre cómo resolvió el problema de la escalera

La alumna *M* leyó el problema y trazó un esquema; dibujó en él la ventana y luego la escalera que formaba un triángulo rectángulo.

La alumna dijo que con la razón coseno podía obtener la distancia en el suelo. Planteó la igualdad “cos 65° = C. A./*H*”, despejó el cateto adyacente y multiplicó cos 65° × 4. La alumna dijo que hasta ahí llegaba el problema, que el resultado era 1.69 m.

Se le preguntó a la alumna qué había obtenido y expresó que el cateto adyacente, la distancia en el suelo. Se le preguntó si podía obtener la medida del tercer lado del triángulo y dijo que sí, pero que sería con otra razón trigonométrica.

La alumna escribió una igualdad empleando tan 65°; sin embargo, al sustituir los datos escribió 4 en lugar de 1.69 m. La alumna no se percató del error. Obtuvo que el cateto opuesto medía 8.57 m y lo anotó en el esquema de la escalera.

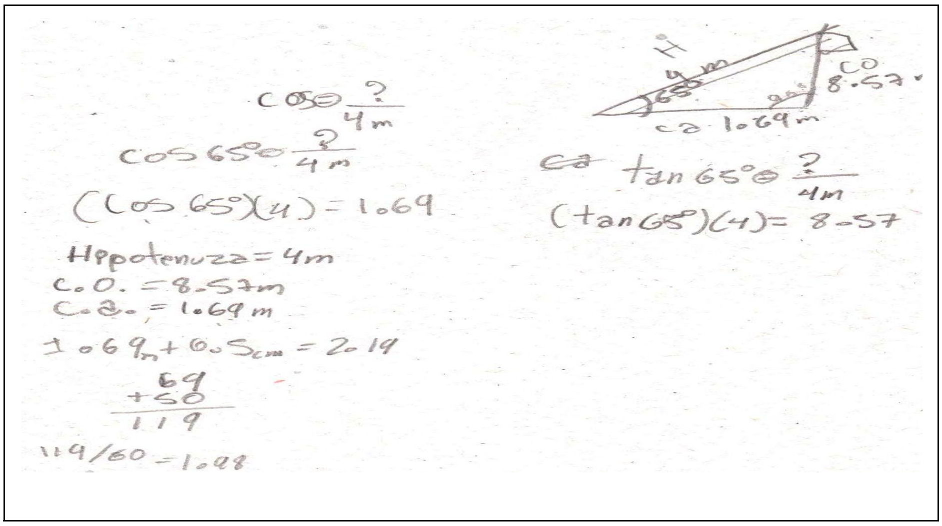


Figura 4.56 Estrategia de *M* para resolver el problema de la escalera

Observaciones

- La alumna *M* obtuvo la distancia al suelo y le aumentó 50 cm para responder a la pregunta del problema.
- Cuando se le propuso encontrar la altura a la que está la ventana no empleó el dato encontrado y se equivocó usando la hipotenusa de 4 cm.

- La alumna hizo un esquema correcto pero no señaló que el ángulo de 90° lo determina la palabra “perpendicular” en el enunciado del problema.
- Para encontrar el tercer lado del triángulo, cuando se le solicitó, resolvió con trigonometría. En ese caso podía aplicar el teorema de Pitágoras.
- Cuando hizo la comprobación de la suma (que había hecho con la calculadora) se equivocó al convertir 119 cm a metros, pues dividió entre 60. No relacionó que 100 cm son un metro.

5a Entrevista

Alumno *S*, 20 de junio de 2008

Problema 1

Sobre cómo determinó el perímetro y el área del pentágono regular

El alumno *S* leyó el problema y escribió después la fórmula del área de los polígonos regulares. Dijo que obtener el perímetro era fácil al ir sustituyendo los datos. Multiplicó 10 × 5 y escribió 50. Luego expresó: “el apotema puede ser la mitad de un lado, pero no se puede decir sin operaciones, porque creo que mide la mitad pero no se sabe”.

El alumno sugirió que con el teorema de Pitágoras se podía saber cuánto miden los lados de un triángulo rectángulo. Se le pidió que señalara a qué triangulo se refería, lo señaló y luego lo trazó a un lado. Al escribir los datos se dio cuenta de que sólo tenía un lado y que para aplicar el teorema de Pitágoras se requerían 2 lados del triángulo rectángulo.

Se le preguntó si conocía o si podía hacer operaciones para conocer cuánto medían los ángulos. El alumno respondió que el ángulo de 90° era uno. Luego dijo que para otro de los ángulos tenía que hacer una división. Escribió en la hoja del problema 360°/5 y obtuvo 72° usando el algoritmo. Mentalmente dividió entre 2 cuando observó que el triángulo rectángulo era la mitad de uno de los triángulos que formaban el pentágono. Luego dijo que era el único que se podía obtener.

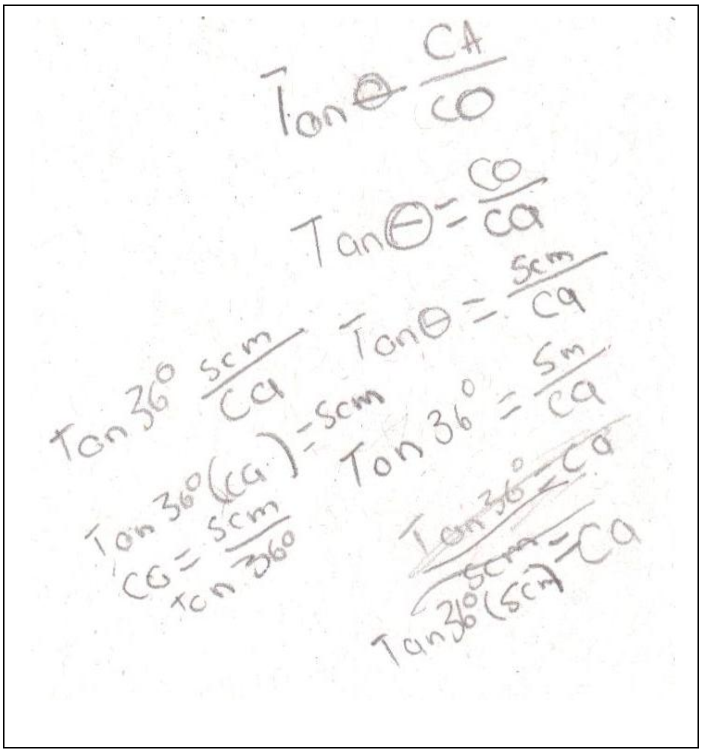


Figura 4.57 Operaciones para obtener el apotema del pentágono regular

Se le preguntó si con los datos que tenía del triángulo rectángulo (dos ángulos y un lado) se podía obtener el apotema. Dijo que sí, porque el apotema era un cateto y que usando las razones trigonométricas se podía. El alumno escribió de inmediato los cocientes de lados del triángulo implicado, correspondientes a las razones trigonométricas seno, coseno y tangente en la parte superior de la hoja. Al observarlas dijo que “podía ser con tangente” y escribió: tan θ = C. A./C. O., pero al comparar con las razones que escribió en la parte superior de la hoja corrigió en el renglón de abajo: tan θ = C. O./C. A., diciendo que se había equivocado. Luego de hacer las sustituciones, los despejes, correcciones en los despejes y las operaciones usando la calculadora, obtuvo que el apotema medía 6.8819 cm (véase la figura 4.57).

Después de haber encontrado el apotema, regresó a la fórmula del área del pentágono regular, sustituyó el valor encontrado y realizó las operaciones (60 × 6.88199)/2. Finalmente escribió en un rectángulo el resultado A = 172.0475, sin señalar que eran cm^2.

Observaciones

- El alumno escribió los cocientes de lados del triángulo implicado correspondientes a las razones trigonométricas seno, coseno y tangente para reconocer con cuál calcularía el apotema del pentágono regular.
- Algunas operaciones las resolvió con papel y lápiz aun teniendo la calculadora.
- Detectó en qué parte hizo un despeje incorrecto y lo corrigió. Hizo 3 despejes diferentes para determinar con cuál encontraría el cateto adyacente (esto es, el apotema).
- Después de que calculó el apotema, regresó a la fórmula del área del pentágono y resolvió rápidamente.
- No especificó que 50 cm era el perímetro del pentágono regular.
- No usó unidades de medida (cm^2) para el área del pentágono regular.

Problema 2

1a parte. Sobre cómo obtuvo el perímetro y el área del octágono regular

El alumno *S* resolvió el caso del octágono antes que el del heptágono. Después de leer el problema trazó un pequeño octágono y dijo que se basaría en el problema del pentágono. Escribió que el área del octágono se obtendría al multiplicar “80 × *a*” y dividir entre 2.

Trazó un triángulo que no parecía rectángulo y anotó en él que un ángulo era recto y que otro medía 5 cm y que era el cateto opuesto. Dividió 360°/8; obtuvo 45°, que dividió mentalmente entre 2 y obtuvo 22.5°. No anotó las razones trigonométricas como en el caso del pentágono, sólo escribió la igualdad empleando tan 22.5°. Aún siguiendo la estrategia para el pentágono hizo varios despejes para llegar al valor del cateto adyacente (véase la figura 4.58). Sus primeros errores fueron al sustituir los datos; luego despejó correctamente, pero desconfió del resultado y al repetir el despeje le salió el mismo resultado.

A la izquierda de la columna de sus anotaciones escribió el despeje del cateto adyacente, hizo la sustitución, y las operaciones con la calculadora. El apotema medía 12.0711 (en la calculadora), pero el alumno sólo escribió 2.0711 sin darse cuenta del error.

El alumno *S* regresó a la fórmula del área del octágono, multiplicó el perímetro 80 cm por el apotema 2.0711 y dividió entre 2. Escribió que el área del octágono era 82.8440 (sin cm^2). El error del alumno consistió en no verificar si escribió el mismo número que apareció en la pantalla de la calculadora cuando calculó el apotema.

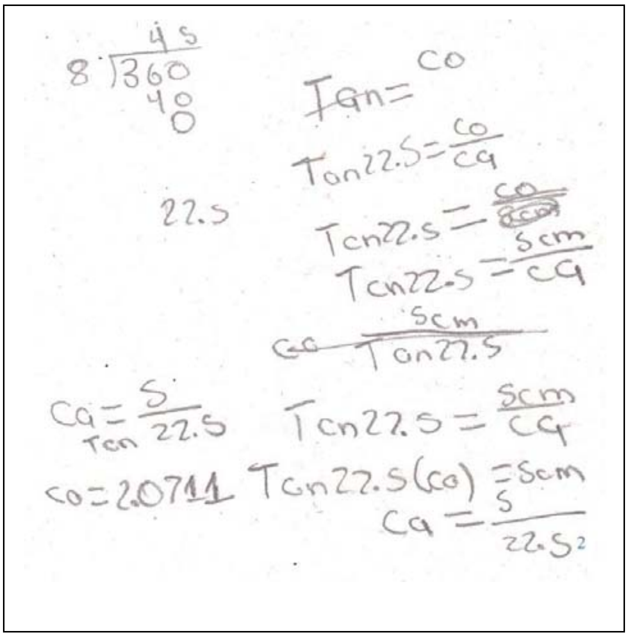


Figura 4.58 Operaciones para obtener el apotema (C. A.) del octágono regular

2a parte. Sobre cómo obtuvo el área y perímetro del heptágono

Al alumno se le complicó realizar el trazo del heptágono; sin embargo, sólo lo hizo una vez y así lo dejó. Señaló que cada lado medía 10 cm. Luego escribió la fórmula del área y sustituyó el perímetro por 70 cm y dejó indicadas las operaciones (70 × *a*)/2.

Más abajo en la hoja de trabajo trazó un triángulo rectángulo en el que un cateto medía 5 cm. Para obtener el ángulo agudo que le ayudaría a calcular la hipotenusa, el alumno intentó dividir 360° entre 7. Cuando iba a empezar con el procedimiento del algoritmo de la división, decidió hacerlo con la calculadora. Obtuvo 51.4286° y lo anotó en el esquema. Cuando se percató de que le faltaba dividir entre 2, canceló el número con una línea y realizó la división con la calculadora (véase la figura 4.59)

El alumno planteó una igualdad utilizando tan 25.71° para calcular el cateto adyacente (que era el apotema). A diferencia de los casos anteriores, despejó y calculó sin errores el cateto adyacente. En la figura 4.60 se observa que cuando despejó por último al cateto adyacente, escribió sólo 5/25.71°, pero al hacer la división en la calculadora escribió 5/tan 25.71°.

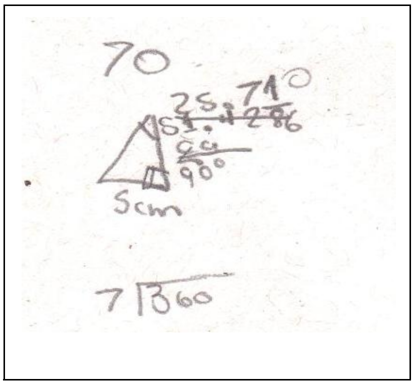


Figura 4.59 Esquema de un triángulo rectángulo que forma al heptágono regular

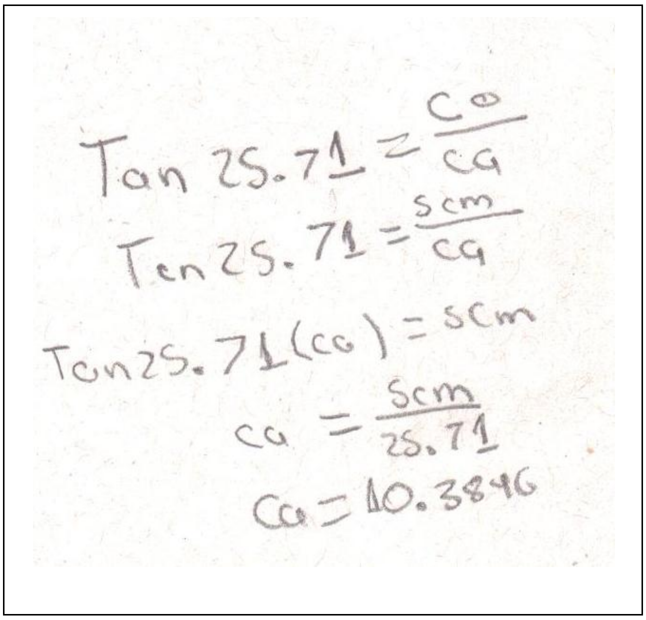


Figura 4.60 Estrategia para calcular el apotema del heptágono regular

El alumno calculó el área del heptágono sin anotar las operaciones en la hoja de trabajo, lo hizo directamente en la calculadora. Multiplicó 70 cm del perímetro por 10.3846 cm del apotema. No escribió el resultado en cm^2.

3a parte. Sobre cómo obtuvo el perímetro y el área del *n*-ágono

El alumno no realizó algún esquema. Dijo que el perímetro se obtendría como en los casos anteriores. Se basó en las hojas de trabajo del heptágono y del octágono para escribir qué era el perímetro; se confundió con la fórmula del área de los polígonos que escribió al principio en cada caso. Después se le preguntó cómo había calculado sólo el perímetro, y escribió su respuesta (véase la figura 4.61).

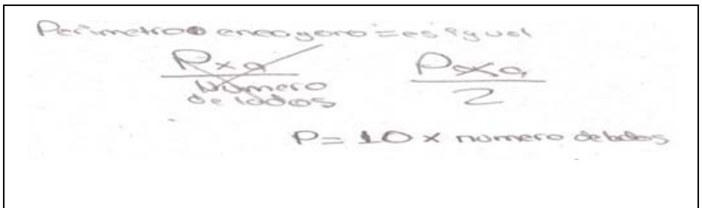


Figura 4.61 Fórmula del alumno *S* para el perímetro del *n*-ágono regular

Se le preguntó al alumno si podía cambiar “número de lados” escribiéndolo de otra forma. El alumno respondió que sí y lo cambió; volvió a escribir $P = 10 \times a$, sustituyendo la expresión por una letra. Luego dijo que esa *a* podía confundirse con la *a* de apotema y expresó el número de lados con la letra *i*.

El alumno dibujó el triángulo rectángulo que le ayudaría a encontrar el apotema. Para completar las medidas en el triángulo, fue escribiendo lo que hizo en los casos anteriores. Lo que escribió lo hizo de manera textual, no con expresiones algebraicas.

Escribió que había dividido 360°/2N. El alumno expresó que N, al igual que i, representaba el número de lados (véase la figura 4.62).

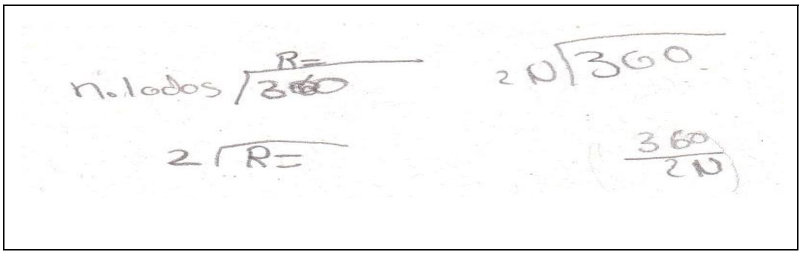


Figura 4.62 Expresiones para determinar el ángulo agudo de un triángulo rectángulo en un *n*-ágono regular

Cuando el alumno dijo que ya tenía el ángulo agudo que necesitaba para calcular el apotema, escribió una igualdad con tan (360°/2N). Realizó la sustitución y despeje para el cateto adyacente, que era el apotema (véase la figura 4.63).

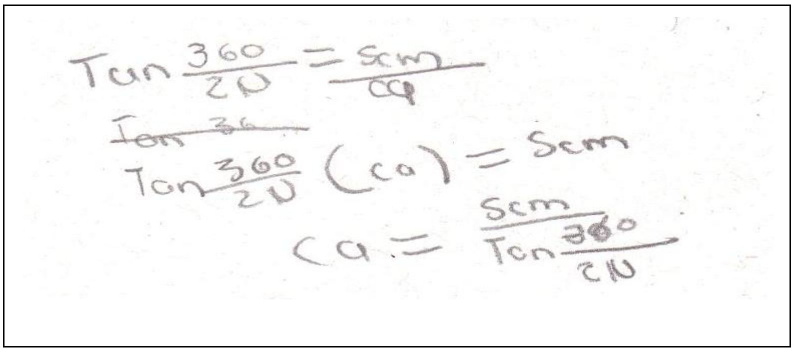


Figura 4.63 Apotema de un *n*-ágono regular de 10 cm de lado

El alumno regresó a la fórmula del área del *n*-ágono ($P \times a$)/2 y dijo que ya tenía las expresiones que se sustituirían en el perímetro y en el apotema. Luego dijo que podía dejar indicada el área del *n*-ágono. Empezó a hacer la sustitución en el centro de la hoja; al terminar se le preguntó cuál era el área del *n*-ágono regular y el alumno tomó otra hoja y copió la fórmula que había escrito, agregó que ésa era el área del *n*-ágono (véase la figura 4.64).

Hoja 1. Resolución del área del *n*-ágono

$$\frac{(10\times i)\times\left(\frac{\frac{5cm}{\mathrm{Tan}\ 360^\circ}}{2N}\right)}{2}$$

Hoja 2. Resolución del área del *n*-ágono

$$\frac{(10\times i)\left(\frac{\frac{5cm}{\mathrm{Ton}\ 360^\circ}}{2N}\right)}{2} = \text{A del eneogono}$$

Figura 4.64 Área del *n*-ágono regular de 10 cm de lado

Se le preguntó al alumno si era válido que en una misma expresión 2 letras signifiquen lo mismo (ya que en su fórmula *N* e *i* significan “número de lados”). Contestó que sí, ya que “uno puede usar la letra que se le venga a la cabeza”. Al sustituir lo que obtuvo en el apotema, *S* escribió “tan 360°/2*N*” (véase la figura 4.64) en lugar de “tan (360°/2*N*)”. Se le pidió al alumno verificar su fórmula con uno de los polígonos, así que probó su fórmula en el pentágono y su resultado fue correcto. Al hacer las operaciones por partes el alumno recordó, aunque no corrigió, que el ángulo se obtenía de dividir 360° entre el doble del número de lados y que al número resultante le calculaba la tangente.

Observaciones

- El alumno *S* comprendió que el apotema se obtenía de un triángulo rectángulo que forma parte de los polígonos regulares.
- Tuvo muchas dificultades al realizar los despejes.
- Después de haber resuelto el pentágono, ya no escribió las razones trigonométricas para determinar la que empleó en la resolución del apotema para el heptágono, el octágono y el *n*-ágono.
- Tuvo muy claro el proceso para encontrar el perímetro y el área en cada polígono regular; sin embargo, aún no tenía el lenguaje algebraico para expresar lo que hizo.
- El alumno se apoyó en los casos anteriores hasta que obtuvo la expresión algebraica que diera a entender lo mismo que hizo.
- Aunque tuvo dificultades en la sustitución de los datos y en el despeje del cateto adyacente en el caso del octágono, cuando resolvió el heptágono y el *n*-ágono lo hizo sin titubear tanto.
- El alumno expresó que no recordaba bien las funciones trigonométricas y dijo que utilizándolas se las aprendía más.

Problema 3

Sobre cómo resolvió el problema de la escalera

El alumno hizo un esquema, y luego lo corrigió porque no se formaba un triángulo rectángulo. Hizo un nuevo esquema con un triángulo rectángulo y a la hipotenusa le anotó “4 m”, al ángulo recto, “90°”, y al ángulo agudo en el suelo de su esquema, “65°”.

Se le preguntó por qué había dibujado un ángulo recto; el alumno respondió que en el problema así lo decía. Comenzó a leer el problema para mostrar la parte en que se mencionaba el dato. Cuando llegó a la frase “la pared es perpendicular al suelo”, el alumno trazó otro triángulo en el que los segmentos que representaban la pared y la escalera eran inclinados uno hacia otro. Luego dijo que el problema no podía resolverse, ya que en el esquema sólo se veía un ángulo (65°) y un lado (4 m), y que además no había un triángulo rectángulo (véase la figura 4.65)

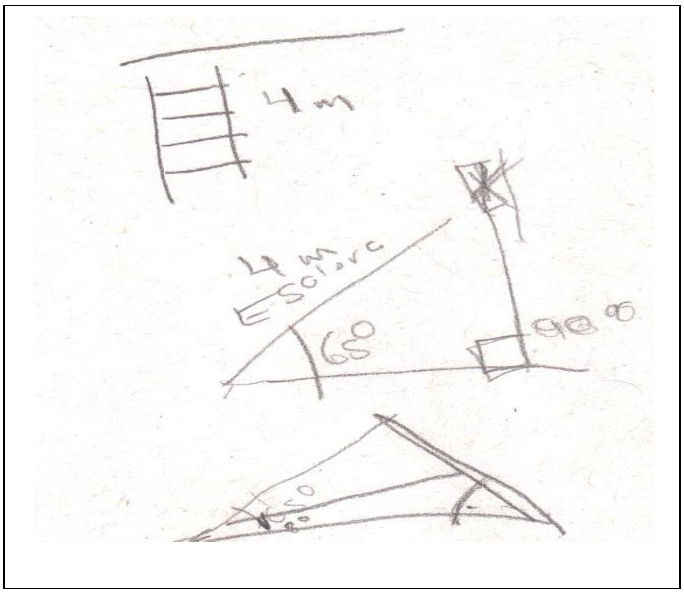


Figura 4.65 Esquemas sobre el problema de la escalera

Aunque el alumno había mencionado que no podía resolver el problema, hizo una serie de operaciones con la calculadora para determinar la distancia solicitada (véase el anexo 10). El alumno dividió en la hoja de trabajo 65°/4 m. Obtuvo 16.25 y dijo que a ese valor le tenía que restar 50 cm. Escribió la división 16.25/2 (aunque había mencionado que restaría) y con la calculadora obtuvo 8.1250. El alumno determinó que la escalera quedaba a 8.1250, aunque no lo indicó ni le agregó unidades de medida (véase la figura 4.66).

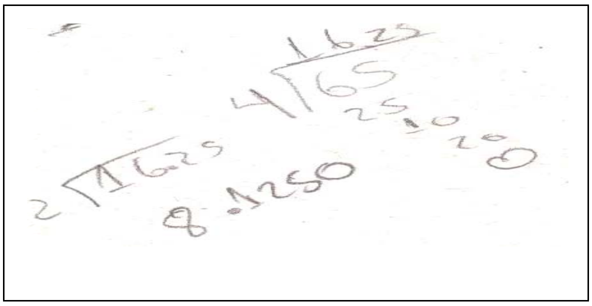


Figura 4.66 Operaciones para calcular la distancia a la que se separa la escalera

Observaciones

- El vocabulario en el problema limitó al alumno para resolverlo. Textualmente no se mencionaba un ángulo de 90°; sin embargo, se aclaraba que la pared del edificio era perpendicular al suelo.
- No obtuvo la distancia del edificio a la escalera e inventó operaciones entre magnitudes diferentes, que no lo llevaban a la respuesta. Sólo empleó los datos del problema en una operación sin saber si se podía o no, es decir, dividió grados sexagesimales entre metros y a su resultado no le anotó alguna unidad de medida.

CAPÍTULO V

CONCLUSIONES

En este capítulo se exponen las conclusiones en tres apartados. El primero de ellos es "Conclusiones obtenidas de la aplicación de la secuencia de actividades en el grupo de trabajo", en el que se muestra lo obtenido en seis días de resolución de problemas con el grupo de trabajo. En el segundo apartado, "Conclusiones sobre las estrategias que emplearon los alumnos en la resolución de problemas de trigonometría durante las entrevistas", se describe lo obtenido en las 5 entrevistas aplicadas a los alumnos seleccionados del grupo de trabajo. En el tercer apartado, "Conclusiones generales", se expone lo obtenido de la realización de esta investigación de tesis de maestría con respecto a las estrategias de los alumnos de tercer grado de educación secundaria, que participaron como sujetos, en la resolución de problemas de trigonometría.

Conclusiones obtenidas de la aplicación de la secuencia de actividades en el grupo de trabajo

Día 1 con el grupo de trabajo

Tanto en el *Libro para el maestro* de matemáticas (Alarcón *et al.,* 2001) como en el *Fichero de Actividades Didácticas* (SEP, 2001) (o que se indique en el programa de 2006) se requiere incluir algún problema o actividad que sirva para que los alumnos descubran las razones trigonométricas. Con ese fin se adaptó la actividad propuesta en "Orientaciones didácticas" del tema 4.3 del programa de matemáticas de educación secundaria (SEP, 2006, p. 132) para la investigación de esta tesis.

El uso de la calculadora facilitó la obtención de resultados de razones entre lados de un triángulo rectángulo. El ahorro de tiempo en el cálculo de operaciones generó mayor reflexión en la comparación de resultados; en el primer día de clase con los alumnos del grupo de trabajo se llegó a formalizar que las razones entre las longitudes de 2 lados de un triángulo rectángulo dependen de la medida del ángulo agudo que se tome como referencia.

Día 2 con el grupo de trabajo

Los alumnos reconocieron algunas características de los triángulos semejantes aunque no expresaron formalmente uno u otro criterio. Principalmente reconocieron que hay semejanza cuando los ángulos interiores del triángulo son iguales.

Se les dificultó reflexionar acerca de que las razones entre la longitud de 2 lados de un triángulo dependen del ángulo; por ejemplo, cuando se les preguntó si era falso o verdadero que al dividir la longitud del cateto opuesto entre la del cateto adyacente, con respecto al ángulo de 40° en un triángulo rectángulo, el resultado siempre sería aproximadamente 0.84. Aun cuando se formalizó en la clase del primer día, al preguntarles nuevamente fue necesario exponer las justificaciones de los alumnos sobre sus diferentes respuestas.

Se pueden plantear problemas a los alumnos de modo que relacionen los temas de trigonometría con los temas tratados con anterioridad en la clase de matemáticas.

Día 3 con el grupo de trabajo

Aunque no se solicitó a los alumnos calculadora científica, algunos se interesaron en llevar una a la clase. En el grupo de trabajo se expresaron 3 estrategias diferentes no convencionales para determinar el ángulo de mayor elevación entre 2 rampas (triángulos rectángulos); los alumnos emplearon sus conocimientos previos relacionando el área de cada triángulo con el ángulo de elevación (de las rampas), o aplicaron el teorema de Pitágoras para comparar los segmentos correspondientes a la hipotenusa. Otros alumnos trazaron los triángulos de las rampas a escala y compararon los ángulos para determinar cuál tenía una elevación mayor.

Se puede orientar a los alumnos para que descubran el uso de las razones trigonométricas. En el caso de la actividad de las rampas, se pidió a los alumnos que revisaran la tabla de razones trigonométricas. El resultado fue que relacionaron los cocientes de la columna “tangente” con el ángulo de elevación de las rampas.

Es necesario que los alumnos dominen la jerarquía de las operaciones. Tener clara esta jerarquía ayuda a indicar correctamente las operaciones en la calculadora y a obtener un resultado correcto de lo que se quiere calcular.

Día 4 con el grupo de trabajo

Al principio de la resolución de triángulos rectángulos los alumnos utilizaron el teorema de Pitágoras para encontrar el tercer lado. Conforme se familiarizaron con las razones trigonométricas, las emplean como una nueva estrategia para calcular el tercer lado de un triángulo rectángulo cuando se conocen 2 de sus lados.

Al principio del tratamiento del tema hubo confusión en las ecuaciones en las que los alumnos tenían que despejar las razones trigonométricas, pues separaban los nombres de las razones del ángulo que les correspondía.

El empleo de la calculadora en lugar de la tabla de razones trigonométricas permitió que los alumnos reconocieran que no sólo se obtienen ángulos exactos. Asimismo, el uso de la calculadora científica facilitó la determinación de los ángulos agudos en los casos en que no se conocía más que el ángulo recto.

Los alumnos mostraron dificultad cuando se requirió que hicieran despejes en ecuaciones en las que el valor que se debía calcular aparecía en el denominador.

Para la mayoría de los alumnos fue necesario hacer un esquema del triángulo cuando resolvían triángulos rectángulos. Cuando sólo se desconocía un ángulo en la resolución de triángulos rectángulos, los alumnos calculaban su medida con operaciones mentalmente.

Día 5 con el grupo de trabajo

Cuando los alumnos trabajaban en equipo para resolver problemas, el grupo tenía mayor oportunidad de socialización. Las estrategias de resolución de problemas fueron muy parecidas.

Los alumnos no estaban habituados a redactar una oración en la que se dé respuesta a la pregunta del problema. Sus respuestas se limitaban a encerrar en un rectángulo los valores numéricos encontrados.

Algunos alumnos se familiarizaron con el uso de la calculadora científica y probaron la obtención de resultados ingresando en un solo paso todas las operaciones que se tenían que realizar.

Día 6 con el grupo de trabajo

Cuando los alumnos trabajaron individualmente resolviendo los problemas de trigonometría propuestos al grupo, se pudo distinguir a los que trabajaban rápidamente porque comprendían el tema de estudio y podían aplicarlo en la resolución de problemas. Se distinguió también a aquellos alumnos para quienes resolver un problema era una dificultad, ya sea a causa de su débil aprendizaje o porque su poca comprensión del tema, o que su capital cultural no los relacionaba con la situación del problema y no lo entendían, o por la falta de herramientas como el álgebra para plantear una ecuación y despejar.

Los alumnos se confundieron en la resolución de problemas en los que se requería encontrar algunos ángulos y segmentos que no formaban parte de la respuesta a la pregunta planteada. Los resultados parciales se interpretaron como la resolución final del problema. Para algunos alumnos resultó más práctico resolver triángulos rectángulos que aplicar esos procedimientos en la resolución de problemas.

Conclusiones sobre las estrategias que emplearon los alumnos en la resolución de problemas de trigonometría durante las entrevistas

Primera entrevista

La alumna de la primera entrevista tenía conocimientos previos a la trigonometría deficientes, como lo relacionado a triángulos rectángulos, despeje de ecuaciones, obtención del área de un polígono regular, definición de ángulos centrales, trazo de polígonos regulares, definición y uso del apotema.

También tenía obstáculos relacionados con el conocimiento de las razones trigonométricas. En una ocasión, al resolver el primer problema, la alumna *U* dudó sobre “sen 36°”, creyendo que se refería a un producto “(sen) (36°)”, como si la razón seno por sí sola tuviera un valor numérico.

Cabe señalar que para la resolución de problemas trigonométricos es básico tener un dominio de los cocientes que forman las razones trigonométricas, ya que al invertir uno de estos cocientes se obtiene una razón inversa a la planteada originalmente, como le sucedió a la alumna *U* en el problema 3, sobre la distancia de la base de una escalera a la base de un edificio.

Por otra parte, la alumna borró los errores que cometía al resolver un problema; en general lo hizo en todos los problemas. Esta situación puede provocar que maestros y alumnos se acostumbren a no decir las estrategias empleadas para obtener un resultado válido. Las estrategias omitidas son parte de la resolución de problemas, y no deberían ser eliminadas, ya que muestran el pensamiento del alumno, dejando huella de los conocimientos que más usa o relaciona en el momento de resolver determinado problema.

Segunda entrevista

El esquema planteado en el problema del pentágono dio a la alumna *K* una orientación para calcular el apotema. Se observó que para la alumna *K* en un esquema correcto de un triángulo rectángulo debía ubicarse el ángulo recto en la parte inferior y del lado izquierdo.

El despeje de la incógnita en ecuaciones en las que aquélla se encuentra en el denominador fue un factor de error al resolver ecuaciones de las razones trigonométricas.

En los problemas del área de un pentágono, un heptágono y un octágono, la mayor dificultad fue calcular el apotema, lo cual a su vez implicaba determinar la medida de un ángulo desconocido relacionado con el número de lados del polígono que se tratara. También se omitieron los resultados expresados con unidades de medida (cm y cm^2).

Después de que el problema del área del pentágono regular fue resuelto por la alumna *K*, empleó el aprendizaje obtenido para aplicar la estrategia de resolución de manera mecánica o de repaso en los demás polígonos regulares, incluso para el *n*-ágono regular.

Para expresar la fórmula del área del *n*-ágono regular (de 10 cm de lado) se requirió hacer un recuento de todas las estrategias empleadas en cada uno de los polígonos, además de saber expresar esas acciones en términos algebraicos.

El planteamiento de un esquema cercano a la realidad del problema permite descubrir una estrategia que culmine en la resolución del mismo. La alumna diseñó esquemas tanto del problema de la escalera como de su solución.

El conocimiento de las razones trigonométricas y del teorema de Pitágoras para resolver un problema, permite elegir uno de éstos como recurso en la resolución y el otro como recurso de comprobación.

Tercera entrevista

Al alumno *B* le resultó complicado distinguir en qué casos se podían emplear las razones trigonométricas para determinar la longitud de un lado en un triángulo rectángulo. Una vez identificado el triángulo rectángulo, calculado el ángulo agudo y señalado el lado que se buscaba, podía determinar con cuál razón trigonométrica calcularlo.

No es necesario sustituir varias fórmulas sencillas para crear una fórmula compleja que indique cómo se obtiene el área del *n*-ágono regular de 10 cm de lado.

En el problema de la escalera se confundieron los resultados parciales con la distancia que se buscaba. En la lectura del problema, su resolución parece ser sencilla y de pocos pasos. El análisis de qué resultados se obtienen con respecto a lo que se pregunta causaría menor confusión en los alumnos.

Cuarta entrevista

El esquema planteado para el problema del área del pentágono regular orientó a la alumna *M* a dividirlo en 10 triángulos rectángulos; para decidir que uno de ellos era suficiente para determinar la altura (el apotema) con la que se calcularía el área, primero de un triángulo y luego del pentágono.

Cuando aún no se ha logrado el dominio de las razones trigonométricas, al alumno le sirve escribirlas a un lado del planteamiento del problema y decidir después con cuál se resuelve el problema.

Resolver mecánicamente un problema (aplicando una estrategia conocida) puede hacer que se confíe en los resultados obtenidos sin rectificar el procedimiento que se siguió para llegar a ellos.

Es difícil para los alumnos explicarse por qué sí se puede “calcular” el área de un *n*-ágono (esto es, generalizar el cálculo del área de cualquier polígono regular), si se desconoce todo: número de lados, longitud de cada lado, apotema. La alumna *M* no creía posible escribir una fórmula para obtener el área, aunque ya había expresado el perímetro, el ángulo y el área de los triángulos dentro del polígono.

En el problema de la escalera la información llevó a la alumna a calcular, en un principio, cuánto medía cada lado del triángulo que se formaba. Después no se consideró que al mover la escalera hacia abajo de la ventana en el triángulo cambiaban los ángulos (se forma un triángulo diferente, no semejante), y ya no es suficiente con restar y sumar 50 cm a los lados del triángulo anterior.

Quinta entrevista

Fue necesario para el alumno escribir los cocientes de lados del triángulo implicado en el problema, correspondientes a las razones trigonométricas seno, coseno y tangente, para decidir después cuál de ellas le ayudaría en la resolución del problema.

Resultó sencillo plantear una igualdad con las razones trigonométricas en la que se pudiera calcular el lado requerido en el problema. Después, no hubo claridad en los despejes, sobre todo cuando había cocientes y la incógnita estaba en el denominador.

Para expresar el perímetro y el área del *n*-ágono regular el alumno *S* tenía claro el proceso que había seguido, pero no poseía el lenguaje algebraico adecuado para expresar lo que hizo.

En el caso del problema de la escalera, el alumno *S* no lo resolvió a causa de que desconocía el significado de “perpendicular” (que en el problema aseguraba que se formaba un triángulo rectángulo entre el suelo, el edificio y la escalera del problema).

En los cuadros que se presentan en la siguiente sección se describen las 6 estrategias posibles para la resolución de los problemas de trigonometría según los datos que se proporcionan. También se describen otras 21 estrategias en la resolución de problemas de trigonometría surgidas durante las entrevistas a 5 alumnos de tercer grado de educación secundaria. En total se describen 27 estrategias que los alumnos emplearon durante la resolución de problemas de trigonometría.

Estrategias de los alumnos en la resolución de problemas de trigonometría

Cuadro 5.1 Tipo de estrategias posibles en la resolución de problemas de trigonometría

Tipo de problema	Estrategia	Descripción
LL (lado – lado)	T Resuelve con razones trigonométricas	Al tener 2 lados de un triángulo rectángulo, encuentra el tercer lado empleando las razones trigonométricas
	NT Resuelve sin recurrir a razones trigonométricas	Al tener 2 lados de un triángulo rectángulo, encuentra el tercer lado empleando (i) el teorema de Pitágoras, (ii) escalas, o (iii) algún otro procedimiento

[Continúa]

Cuadro 5.1 [Concluye]

AL (ángulo – lado)	C Para obtener el ángulo agudo que falta usa la complementariedad de los dos ángulos agudos	Obtiene el ángulo agudo faltante por medio de una resta del ángulo recto menos el ángulo conocido, o bien calcula el ángulo que sumado a los dos ángulos conocidos dé en total 180°
	A Da prioridad al ángulo agudo conocido	Para calcular un cateto o la hipotenusa faltante emplea una razón trigonométrica en la que usa el ángulo agudo conocido (sin considerar que puede usarse el ángulo agudo obtenido en la estrategia anterior)
	T Resuelve con razones trigonométricas	Una vez obtenido un segundo lado del triángulo rectángulo del problema, emplea razones trigonométricas para calcular el tercer lado
	NT Resuelve sin recurrir a razones trigonométricas	Una vez obtenido un segundo lado del triángulo rectángulo del problema, emplea el teorema de Pitágoras para calcular el tercer lado

Otras estrategias en la resolución de los problemas de trigonometría surgidas durante las entrevistas a 5 alumnos de tercer grado de educación secundaria

Cuadro 5.2 Estrategias encontradas en la resolución del Problema 1 (Tipo AL)

Estrategia	Descripción
Triangulación del pentágono regular	Usa la figura del pentágono regular para trazar triángulos cuyos lados son radios de la circunferencia que circunscribe al polígono y triángulos rectángulos (usando el apotema) a partir de los cuales plantea la resolución del problema (5 alumnos)
Suma de áreas de triángulos	Emplea la suma de áreas de los triángulos formados dentro del pentágono regular; no usa la fórmula del área de un polígono regular: $A = \frac{P \times a}{2}$ (5 alumnos)
Determinación del ángulo central del polígono	Mediante tanteo, trata de determinar la medida del ángulo central que subtiende al lado del polígono (1 alumno)
360° entre el número de lados	Para calcular la medida del ángulo central divide 360° entre el número de lados del polígono (5) y con ello obtiene que mide 72° (4 alumnos)

[Continúa]

Cuadro 5.2 [Concluye]

Estrategia	Descripción
T Uso de razones trigonométricas	Calcula con razones trigonométricas el apotema del polígono (la altura de uno de los triángulos en que se descompuso el polígono: la que va del centro del polígono a uno de sus lados) (5 alumnos)

Cuadro 5.3 Estrategias encontradas en la resolución del Problema 2 (tipo AL)

Estrategia	Descripción
Realiza un esquema semejante al del Problema 1	Realiza el esquema de acuerdo con las características que señala el problema y toma en cuenta el esquema del Problema 1 (4 alumnos)
Sólo realiza el esquema del triángulo rectángulo	El esquema que realiza incluye sólo al triángulo rectángulo con el que ilustra que la incógnita es la apotema, no incluye al polígono regular del problema (1 alumno)
$\frac{360°}{n}$	Para obtener el ángulo central del polígono regular divide 360° entre el número de lados (5 alumnos)

[Continúa]

Cuadro 5.3 [Continúa]

Estrategia	Descripción
Olvida emplear $\frac{360°}{2n}$	No toma en cuenta que el ángulo agudo con el que obtiene la altura del triángulo es la mitad del ángulo central con el que se forma cada lado del polígono; es decir, cada ángulo para calcular la altura (apotema) en los triángulos trazados mide 360° entre el doble del número de lados del polígono (1 alumno)
Recuerda emplear $\frac{360°}{2n}$	Sí toma en cuenta que el ángulo agudo con el que obtiene la altura del triángulo es la mitad del ángulo central con el que se forma cada lado del polígono; es decir, cada ángulo para calcular la altura (apotema) mide 360° entre el doble del número de lados del polígono (4 alumnos)
Usa la fórmula del área de un polígono regular	Sí usa la fórmula del área de un polígono regular, $A = \frac{P \times a}{2}$, aun cuando sólo haga las operaciones multiplicando el perímetro por la altura obtenida (apotema) y divida entre 2 el resultado (1 alumno)

[Continúa]

Cuadro 5.3 [Concluye]

Estrategia	Descripción
Resuelve copiando sus propias estrategias de un problema a otro	Considera que los problemas del área de un heptágono y de un octágono regulares son muy parecidos al del pentágono regular; los resuelve de manera muy similar, casi repitiendo o copiando los pasos que empleó en el caso del pentágono regular; con esta estrategia se le facilita obtener el área por un camino ya explorado (5 alumnos)
Omisión del esquema del polígono regular que representa al *n*-ágono	Después de resolver problemas parecidos, omite el esquema del polígono regular que representa al *n*-ágono y se limita al trazo del triángulo rectángulo útil para calcular la altura de cada triángulo (el apotema) y con esa altura calcular el área pedida (5 alumnos)
Copia procedimientos para obtener el área de un *n*-ágono	Sigue los pasos que empleó en la resolución de los problemas anteriores del área de diferentes polígonos regulares; copia sus procedimientos de un problema a otro, comprobando sus estrategias para llegar a la obtención del caso general del área de un polígono regular (5 alumnos)

Cuadro 5.4 Estrategias encontradas en la resolución del Problema 3 (LA y LL)

Estrategia	Descripción
Trazo de un esquema que representa al problema	Realiza el esquema de acuerdo con las características que señala el problema y de acuerdo con su concepto de perpendicularidad (5 alumnos)
Calcula primero la distancia del suelo a la ventana	Determina primero la distancia del suelo a la ventana del edificio; con esta estrategia toma en cuenta que primero se debe conocer esta distancia para recorrer la escalera 50 cm hacia abajo (2 alumnos)
Calcula primero la distancia de la base del edificio a la base de la escalera	Determina primero la distancia de la base del edificio a la base de la escalera; con esta estrategia podría sólo recorrer (aumentando) 50 cm la distancia para obtener la distancia a la que debe quedar la escalera después de ser recorrida 50 cm hacia abajo de la ventana (3 alumnos)

[Continúa]

Cuadro 5.4 [Continúa]

Estrategia	Descripción
Recorre 50 cm (sumando o restando) a los lados obtenidos	Después de calcular las distancias de la base de la escalera a la base del edificio y la distancia del suelo a la ventana, aumenta la primera y disminuye la segunda para resolver el problema; con esta estrategia omite que los ángulos van a cambiar, que no aumentará en un lado la misma distancia que disminuirá en otro de los lados del triángulo formado por la escalera de 4 m, la pared del edificio y el suelo (3 alumnos)
Resta 50 cm sólo a la distancia del suelo a la ventana	Resta 50 cm a la distancia del suelo a la ventana; no aumenta esta cantidad al otro lado encontrado (2 alumnos)
Forma un triángulo rectángulo diferente del original planteado en el problema	Forma un nuevo triángulo rectángulo considerando el lado formado por la escalera de 4 m, el lado formado por la distancia del suelo a la ventana menos 50 cm y el tercer lado, que es la incógnita del problema (2 alumnos)

[Continúa]

Cuadro 5.4 [Concluye]

Estrategia	Descripción
Determina la distancia buscada con el teorema de Pitágoras	Con los lados del triángulo rectángulo formado por la escalera de 4 m y el lado de la distancia del suelo a la ventana menos 50 cm, encuentra el tercer lado empleando el teorema de Pitágoras (1 alumno)
Determina las distancias buscadas en el problema empleando razones trigonométricas	Resuelve el triángulo rectángulo formado por la escalera de 4 m y el lado formado por la distancia del suelo a la ventana menos 50 cm, sin considerar que los ángulos interiores han cambiado; emplea las razones trigonométricas del ángulo de 65°, que originalmente aparece en el problema (1 alumno)

Conclusiones generales

1.- Con base en el análisis de los problemas de trigonometría que plantea el *Libro para el maestro* (Alarcón *et al.,* 2001) en relación a los temas de trigonometría en el Programa de estudios de 2006, aunado a los ajustes y la aplicación de la secuencia de actividades, se concluye que dichos problemas no se presentan organizados en una secuencia que favorezca la reflexión y búsqueda de nuevos procedimientos que aproximen a los alumnos hacia la formalización de conocimientos matemáticos. En general, los problemas de trigonometría que ahí se presentan tienen diferentes grados de dificultad para los alumnos. Sin embargo, fue posible hacer adecuaciones a los problemas y organizarlos en una secuencia para lograr que los alumnos del grupo de trabajo resolvieran los problemas más complejos.

2.- Se encontró poca solidez respecto a los conocimientos de los alumnos del grupo de trabajo que participaron en las entrevistas al resolver los problemas del área y el perímetro de polígonos regulares. Hace falta más que una propuesta como la secuencia de actividades (con problemas de trigonometría) para lograr que los alumnos reflexionen y busquen nuevos procedimientos en la resolución de problemas.

3.- Los aprendizajes obtenidos por los alumnos de tercer grado de educación secundaria con sus procesos de resolución de problemas de trigonometría propuestos en esta investigación son principalmente:

- El desarrollo de estrategias de resolución de problemas de trigonometría. Hubo alumnos que mostraron un avance en el nivel de desarrollo de sus estrategias, como diseñar un plan de resolución, llevarlo a cabo y, en los mejores casos, hacer una revisión de la estrategia puesta en práctica.
- La realización de diferentes tipos de estrategias para resolver un problema, empleando la trigonometría y el teorema de Pitágoras (complementando la resolución de un problema); el desarrollo de esquemas útiles para explicar el planteamiento del problema y en otros casos la esquematización del resultado obtenido.
- El uso de conceptos y conocimientos matemáticos como: el apotema, la obtención del área de un polígono regular, cómo expresar generalizaciones, el uso del teorema de

Pitágoras, las relaciones entre los cocientes de dos lados de un triángulo rectángulo, la suma de los ángulos interiores de un triángulo, el significado de “perpendicular”, la esquematización de triángulos rectángulos en situaciones de la realidad (puentes, edificios, naves, cohetes, etcétera).

4.- Los problemas de trigonometría propuestos en el *Fichero de Actividades Didácticas* de matemáticas (Espinosa, 2000) están organizados en temas, y éstos a su vez en actividades. Dichos problemas de trigonometría son los mismos que los propuestos en el *Libro para el maestro* (Alarcón *et al.,* 2001) pero el orden y forma en que son planteadas las actividades (en el *FAD*) hacen que aumente el nivel de complejidad para que los alumnos las resuelvan sin antecedentes. Es decir, los alumnos difícilmente resuelven los problemas de trigonometría como se organizaron el *Fichero de Actividades Didácticas* (Espinosa, 2000) y se requiere de otros problemas que se planteen con anterioridad para que los alumnos puedan ir aumentando su nivel de resolución de problemas, en especial los que se presentan en relación a los polígonos regulares.

5.- Los problemas de “polígonos y trigonometría” se aplicaron a los alumnos en las entrevistas organizados en una secuencia, desde el más sencillo al más complejo por el número de lados; es quizá ésta una de las razones por la que los alumnos se entrenaron y desarrollaron estrategias que les permitieron resolver el problema más complejo de determinar el área del *n*-ágono. Desde la primera sesión con los alumnos del grupo de trabajo los problemas se presentaron organizados en una secuencia que los llevó a resolverlos primero en grupo, después en equipos de 2 y 3 alumnos y en la última sesión individualmente.

En esta investigación se encontró que no fue sencillo para los alumnos obtener la fórmula del área para un *n*-ágono regular (la generalización del área de un polígono regular). Antes de resolver este problema, los alumnos resolvieron otros del mismo tipo, en los cuales calcularon el perímetro y el área de un pentágono regular, un heptágono regular y un octágono regular. Al hacerles preguntas respecto a sus estrategias de resolución, los alumnos describieron lo que hicieron en común en cada caso y así fueron expresando sus ideas hasta llegar a la generalización: el área de un polígono regular.

Referencias bibliográficas

Abrate, R., Delgado, G. y Pochulu, M. D. (2006). *Caracterización de las actividades de geometría que proponen los textos de matemática.* Revista Iberoamericana de Educación. Obtenido el 20 de noviembre de 2006 de http://www.rieoei.org/deloslectores/1290Abrate.pdf

Afonso, M. y Candelaria, M. (2003). *Los niveles de pensamiento geométrico de Van Hiele. Un estudio con profesores en ejercicio*. España: Universidad de La Laguna. [Tesis de doctorado inédita]. Obtenido el 20 de noviembre de 2006 de: http://www.rieoei.org/tesisdoctoral/Afonso.pdf

Alarcón, J., Bonilla, E., Nava, R., Rojano, T. y Quintero, R. (2001). *Libro para el maestro. Educación Secundaria. Matemáticas.* (2a ed.) México: SEP.

Araya, A., Monge, A. y Morales, C. (2007). Comprensión de las razones trigonométricas: Niveles de comprensión, indicadores y tareas para su análisis. *Revista Electrónica "Actualidades Investigativas en Educación"*. Obtenido el 29 de marzo de 2009 de: http://www.latindex.ucr.ac.cr/aie-2007-2/aie-2007-2-06.pdf

Comellas, J. y Serra, J. (2000). El curriculum en el bachillerato. En: J. Goñi (coord.), C. Alsina, D. Ávila, C. Burgués, F. Comellas, M. Corbalán *et al.*, *El currículo de las matemáticas en los inicios del siglo XXI.* Madrid: biblioteca de uno.

Cedillo, T., Cruz, V., Vega, E. y Cambray, R. (2006). *Modulo 9. Geometría. Medición y razones trigonométricas*. Proyecto: "Tecnología y educación a distancia en América Latina y El Caribe". Programa Interamericano de Capacitación de Maestros. Serie "Enseñanza de las matemáticas". México: SEP/UPN/ILCE/BID.

Espinosa, H., García, S. y García, M. (2000). *Fichero de Actividades Didácticas*. Matemáticas. Educación secundaria. México: SEP.

Luceño, J. (1999). *La resolución de problemas aritméticos en el aula*. Madrid: Aljibe.

Hernández, A. y Mora, F. (s/a). Aplicación del programa *winplot* a la enseñanza de algunos tópicos de trigonometría y calculo diferencial. Obtenido el 29 de marzo de 2009 de: http://www.cidse.itcr.ac.cr/ciemac/4toCIEMAC/Talleres/AplicaciondelProgramaWINPLOTalaensenanza.pdf

Massa, E., Romero, F. y Casals, A. (2007). *La historia de las matemáticas en la enseñanza de la trigonometría. El teorema de Pitágoras*. Obtenido el 4 de febrero de 2007 de: http://www.cimm.ucr.ac.cr/historia%20de%20las%20matematicas/archivos/La%20Historia%20de%20las%20Matematicas%20en%20la%20Ensenanza%20de%20la%20Trigonometria.pdf

Mendoza, J. (2004). La reforma curricular y los problemas en la clase de matemáticas. En: A. Ávila, L. Aguayo., E. Becerra, J. Estrada, D. Eudave, A. Hermosillo *et al.*, *La reforma realizada. La resolución de problemas como vía del aprendizaje en nuestras escuelas* (pp. 67–102). México: SEP.

NCTM [National Council of Teachers of Mathematics] (1970). *Sugerencias para resolver problemas. Temas de matemáticas*. (Trad.: F. Velasco.) Cuaderno 17. México: Trillas. (Publicado originalmente en 1964)

Ortiz, F. (2001). *Matemática. Estrategias de enseñanza y aprendizaje*. México: PAX.

Parra, B. (1996). Dos concepciones de resoluciones de problemas de matemáticas. En: J. Alarcón y R. Rosas (Coords.). *La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria. Lecturas. Primer nivel.* México: SEP.

Peralta, J. (1995). *Principios didácticos e históricos para la enseñanza de la matemática.* Colección: Eliseo Reclus / Textos. España: Huerga y Fierro.

Polya, G. (1965). *Cómo plantar y resolver problemas* (J. Zagazagoitia, Trad.) México: Trillas. (Publicado originalmente en 1944)

San Martín S., O. J. (s/a). Aprendizaje significativo de las definiciones de seno, coseno y tangente de un ángulo agudo. Obtenido el 29 de marzo de 2009 de: http://www.e-mexico.gob.mx/work/memoria/tematica_b/0257.pdf

San Martín S., O. J. (2006). Un registro de representación semiótica de naturaleza geométrica para la trigonometría. Obtenido el 29 de marzo de 2009 de: http://www.comie.org.mx/congreso/memoria/v9/ponencias/at05/PRE1178828913.pdf

San Martín S., O. J. y Soto, J. (s/a). *Construcción de significados para las razones trigonométricas mediante un aparato virtual diseñado con CABRI.* Universidad Pedagógica Nacional, Centro Pedagógico del Estado de Sonora.

Sanabria, G. (2006). Una propuesta para la enseñanza de las funciones trigonométricas. Obtenido el 29 de marzo de 2009 de: http://www.uned.ac.cr/MemEncMate/Ponencias/proceso-ensenanza/Una%20propuesta%20para%20la%20ense%C3%B1anza%20-%20Msc.%20Geovany%20Sanabria.pdf

Sánchez, J. y Fernández, J. (2003). *La enseñanza de la matemática. Fundamentos teóricos y bases psicopedagógicas.* CCS.

Santos T., L. M. (1996). Hacia una propuesta de evaluación en la resolución de problemas. En: J. Alarcón y R. Rosas (Coords.). *La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria. Lecturas. Primer nivel.* México: SEP.

SEP [Secretaría de Educación Pública]. (1994). *Plan y programas de estudio. Educación básica. Secundaria.* México: SEP.

SEP [Secretaría de Educación Pública]. *Plan y programa de Estudios 2006.* Obtenido el 20 de septiembre de 2006 de: http://www.reformasecundaria.sep.gob.mx/doc/programas/2006/planestudios2006.pdf

Stodolsky, S., (1999). La importancia del contenido en la enseñanza. Actividades en las clases de matemáticas y ciencias sociales, (Trad.: F. Segovia). España: Ministerio de Educación y Ciencia / Paidós.

Valiente, S. (2000). *Didáctica de la matemática. El libro de los recursos.* Colección Aula Abierta. España: La Muralla.

Anexo 1. Oficio de solicitud de permiso para realizar la secuencia de actividades

013251

México, D. F. a 28 de abril de 2008

Asunto: solicitud de permiso

DIRECCIÓN OPERATIVA 1

Benito Juárez y Miguel Hidalgo

RECIBIDO

ABR. 28 2008

NOMBRE:

FIRMA:

C. Profra. Concepción Villa y Dávila

Directora Operativa No. 1

La que suscribe Profra. Reyes Cruz Xóchitl Yaraseth con filiación RECX801014HK4, con CURP RECX801014MPLYRC09, claves presupuestales: 110071352 EO36219.0093775 y 110071352 EO36201.0091523, actualmente de beca comisión, adscrita al centro de trabajo 09DES0096K, "Escuela Secundaria Diurna No. 96 "Dr. Enrique Herrera Moreno" ubicada en Calzada México – Tacuba No. 213, Col. Un Hogar para Nosotros, Del. Miguel Hidalgo, C. P. 11330 solicito a usted su apoyo para que me sea autorizado el acceso a la Escuela Secundaria 96, arriba mencionada, para realizar el trabajo de campo del proyecto de tesis de maestría "Resolución de problemas de Trigonometría: Estrategias de alumnos de educación secundaria", el cual requiere de video grabaciones para el análisis de los datos obtenidos durante las sesiones de trabajo y entrevistas a los alumnos a través de problemas de trigonometría.

El estudio piloto se llevó a cabo en la misma, con la autorización del profesor de grupo del 3° "E" C. Enrique Ortiz León y la directora C. Profra. Martha A. Gómez Soto en enero de 2008. Para continuar con el trabajo de campo iniciado reitero mi solicitud de autorización y apoyo para llevar a buen término dicho proyecto en los meses de mayo y junio de 2008.

ATENTAMENTE

C. Profra. Xóchitl Yaraseth Reyes Cruz

Recibi copia

19/05

ESTADOS UNIDOS MEXICANOS

SECRETARIA DE EDUCACION PUBLICA

COORDINACION SECTORIAL DE EDUCACION SECUNDARIA

ESCUELA SECUNDARIA DNA. 96

ENRIQUE HERRERA MORENO

C.P. 11330 MEX., D.F.

C.C.P. Profra. Soledad Herrera Ramírez

13 1252

Anexo 2. Autorización para realizar la aplicación de la secuencia de actividades

SEP
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

Oficio No. D. O. 1/ATP/2092/2008

"2008, AÑO DE LA EDUCACIÓN FÍSICA Y EL DEPORTE"

DIRECCIÓN GENERAL DE OPERACIÓN DE SERVICIOS EDUCATIVOS
COORDINACIÓN SECTORIAL DE EDUCACIÓN SECUNDARIA
DIRECCIÓN OPERATIVA 1

Profa. Ma. Luisa Acosta Aguilar
Inspectora General de la Zona Escolar LXIV
Presente

México, D.F., a 13 de mayo de 2008.

Por medio del presente me dirijo a Usted de la manera más atenta, para hacer de su conocimiento que ha sido autorizada la Profa. Xóchitl Yaraseth Reyes Cruz, para llevar a cabo el trabajo de campo del proyecto de tesis de maestría "Resolución de problemas de Trigonometría: estrategias de alumnos de educación secundaria", en la Es1 – 96 "Dr. Enrique Herrera Moreno" Turno Matutino.

Por lo anterior, solicito su valiosa y oportuna intervención, girando las indicaciones pertinentes con los directivos del plantel de la zona escolar a su digno cargo, a fin de permitir el acceso de la profesora en comento para realizar su trabajo de estudio, de acuerdo a las fechas que en su oportunidad ella determine de manera conjunta con la directora de la escuela, sin afectar las actividades cotidianas de la comunidad educativa.

Sin otro particular, aprovecho la ocasión para enviarle un afectuoso saludo.

Atentamente

Profa. María Concepción Villa y Dávila
Directora Operativa 1

ESTADOS UNIDOS MEXICANOS
SECRETARIA DE EDUCACION PUBLICA
COORDINACION SECTORIAL DE EDUCACION SECUNDARIA
DIRECCION OPERATIVA NUM. 1
BENITO JUAREZ
MIGUEL HIDALGO

ESTADOS UNIDOS MEXICANOS
SECRETARIA DE EDUCACION PUBLICA
COORDINACION SECTORIAL DE EDUCACION SECUNDARIA
ESCUELA SECUNDARIA DNA. 96
ENRIQUE HERRERA MORENO
C. P. 11330 MEX. D. F.

Recibí copia
19/05/08.

C.c.p. Profa. Soledad Herrera Ramírez.- Directora de la ES1 – 96 "Dr. Enrique Herrera Moreno".- Presente
Profa. Xóchitl Yaraseth Reyes Cruz.- Interesada

MCVD'ECF'cco

ADMINISTRACIÓN FEDERAL DE SERVICIOS EDUCATIVOS EN EL DISTRITO FEDERAL

Av. Maestro Rural No. 57, Col. Un Hogar para Nosotros, C. P. 11340, Delegación
Miguel Hidalgo, Tel. 53-41-18-34 y 53-41-50-76
Correo electrónico: cvilla@sep.gob.mx
AFSEDF:www.sepdf.gob.mx

Anexo 3. Día 3 con el grupo de trabajo. Problema de las rampas

1. Lee el siguiente problema con atención y sigue las indicaciones para resolverlo.

Se quieren construir rampas para una competencia de patinetas. Para medir el ángulo de inclinación de cada rampa, se considerarán dos medidas:

De acuerdo con las medidas especificadas, elije aquella rampa cuyo ángulo de inclinación sea mayor en cada caso (las medidas están dadas en metros).

Caso	Rampa 1	Rampa 2
1	$a = 1.5$ $b = 6.5$	$a = 1.5$ $b = 7.5$
2	$a = 1.5$ $b = 6.5$	$a = 1.7$ $b = 6.5$
3	$a = 1.5$ $b = 6$	$a = 2$ $b = 8$
4	$a = 1.6$ $b = 6.5$	$a = 1.7$ $b = 7$

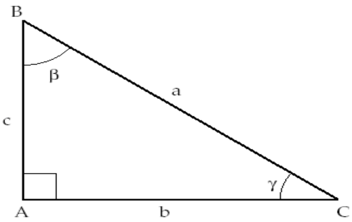
Escribe tus observaciones caso por caso, luego anota tu repuesta justificándola.

caso	OBSERVACIONES	RESPUESTA
1		
2		
3		
4		

Anexo 4. Día 4 con el grupo de trabajo. Resolución de triángulos rectángulos

PROBLEMAS DE RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Dado un triángulo rectángulo como el siguiente:



Completa la tabla para cada caso:

CASO	a	b	c	β	γ	sen β	cos β	tan β	sen γ	cos γ	tan γ
1	7	5									

CASO	a	b	c	β	γ	sen β	cos β	tan β	sen γ	cos γ	tan γ
2	10			35							

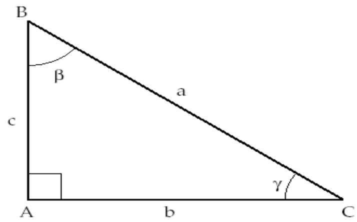
CASO	a	b	c	β	γ	sen β	cos β	tan β	sen γ	cos γ	tan γ
3		15		40°							

CASO	a	b	c	β	γ	sen β	cos β	tan β	sen γ	cos γ	tan γ
4		4	5								

Anexo 5. Actividades abordadas el día 5 con el grupo piloto

1.- TABLA DE PROBLEMAS DE RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Dado un triángulo rectángulo como el siguiente,

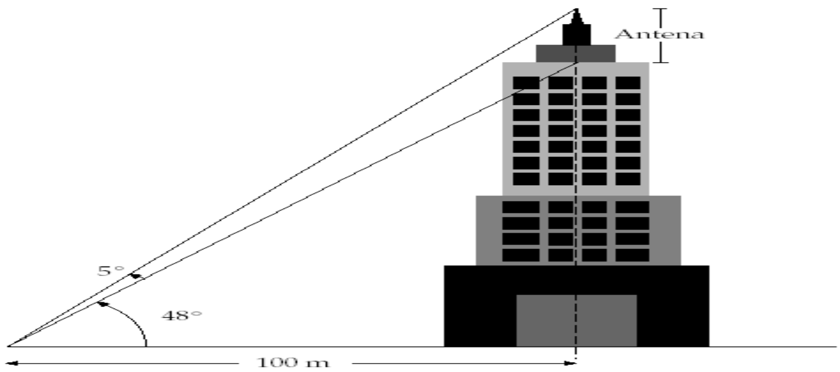


completa la tabla.

CASO	a	b	c	β	γ	sen β	cos β	tan β	sen γ	cos γ	tan γ
1	10			35°							
2	7	5									
3		15		40°							
4		4	5								

2.- PROBLEMA DEL EDIFICIO Y LA ANTENA

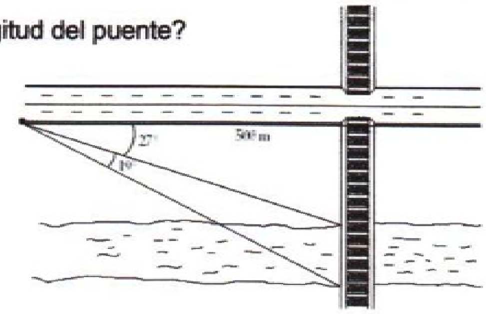
¿Cuáles son las alturas del edificio y de la antena?



Anexo 6. Problema del puente resuelto por un alumno del grupo piloto

4. PROBLEMA DEL PUENTE

Una vía de ferrocarril atraviesa perpendicularmente una carretera recta y más adelante cruza un puente sobre un río. Una persona que se encuentra sobre la carretera, a 500 m del cruce con la vía, observa una situación como la indicada en el dibujo. ¿Cuál es la longitud del puente?



$(\text{tang } 27°) = \frac{b}{500}$ $(\tan 46°) = \frac{T}{500m}$ Elegí la formula al tener un angulo agudo y un cateto

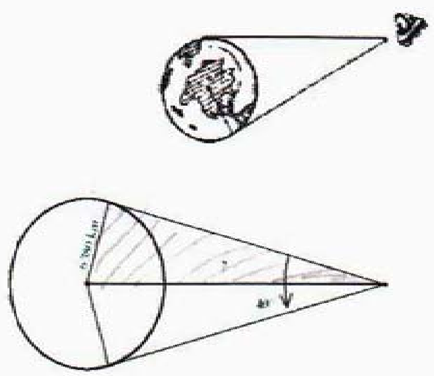
$\tan(27°)(500) = 254.7$ $\tan(46°)(500) = 517.7$

longitud = 267m

Anexo 7. Problema de la nave resuelto por una alumna del grupo piloto

5. PROBLEMA DE LA NAVE

Un astronauta ve desde su nave que la Tierra abarca un ángulo de 40°. ¿A qué altura se encuentra sobre la superficie de la Tierra? (Nota: el radio de la Tierra es de aproximadamente 6 380 km.) 6 380 km.



tan 20° =

tan =(20°)(6380)

=2322 x 2

→4644.26

Yo primero dividí el angulo ~~pa~~ 2 ya que la medida era el radio y cuando obtube la altura del triangulo coloreado lo multiplique x 2

Anexo 8. Problema del área y el perímetro de un octágono regular resuelto por un alumno del grupo piloto

Utilizando funciones trigonométricas, calculen el perímetro y el área de un heptágono, un octágono o un n-ágono, cuyos lados midan 20 cm. respectivamente.

$A = \frac{P \cdot a}{2}$

$P = (8)(20\,cm) = 160$

$\tan 45° = \frac{co}{ca}$ $ca = a$

$\tan 45° = \frac{10}{a}$

$a = \frac{10}{\tan 45°} = 10$

$a = 10$

$P = \frac{P \cdot a}{2}$

$A = \frac{(160)(10)}{2} = 8,600$

Anexo 9. Secuencia de actividades aplicada al grupo de trabajo

Día 1

Nombre:______________________________ Fecha: __________ 3° __ No. de lista: ___

Dibuja un triángulo rectángulo, donde uno de los ángulos agudos mida 40°.

Mide los lados de tu triángulo. Escribe abajo la medida correspondiente para:

- El cateto opuesto al ángulo de 40° mide __________
- El cateto adyacente al ángulo de 40° mide __________
- La hipotenusa de tu triángulo rectángulo mide __________

Obtén el resultado de las siguientes razones:

$$\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}}$$

En la siguiente tabla, anota los resultados obtenidos por tu grupo.

Triángulo rectángulo	Cateto opuesto	Cateto adyacente	Hipotenusa	$\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$	$\frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$	$\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}}$

¿Qué observas de los resultados de las tres últimas columnas?:______________________

____

____

Anota tus conclusiones: ____

____

____

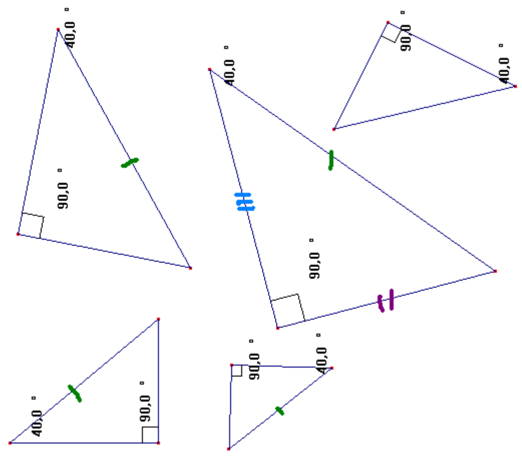
____

____

Día 2

Nombre: ___________________________________ 3° “D”. Fecha: _________________

INSTRUCCIONES: Observa Los triángulos y luego contesta.



Explica por qué se puede asegurar que los cinco triángulos son semejantes:

____

____

____

INSTRUCCIONES: Retoma, si es necesario, la tabla que completaste en grupo y determina si cada enunciado es cierto o falso.

i) La medida de la hipotenusa siempre es mayor que cualquiera de los catetos. ( )

ii) El cateto opuesto a un ángulo de 40° siempre será mayor al cateto adyacente. ( )

iii) Si se divide el cateto opuesto entre el cateto adyacente con respecto a un ángulo de 40°, en un triángulo rectángulo, el resultado siempre será aproximadamente 0.84. ( )

iv) Si se divide el cateto opuesto entre el cateto adyacente, de un ángulo de 45°, el resultado siempre será igual a uno. ( )

v) Cuando el ángulo es mayor al ángulo de 45°, el cateto opuesto es menor que el cateto adyacente. ( )

INSTRUCCIONES: Lee la siguiente información.

Si un ángulo se mantiene fijo, como el de 40°, todos los cocientes de dividir el cateto opuesto entre la hipotenusa son iguales, y sucede lo mismo con cualquier otro cociente como cateto adyacente entre hipotenusa o cateto opuesto entre cateto adyacente. Estos cocientes se llaman razones trigonométricas y tienen nombres especiales.

*** El cociente CATETO OPUESTO entre HIPOTENUSA se llama: ___________________

*** El cociente CATETO ADYACENTE entre HIPOTENUSA se llama: _________________

*** El cociente CATETO ADYACENTE entre CATETO OPUESTO se llama:_________________

NOMBRE: ____________________________________ 3° "D" FECHA: ____________

1. Lee el siguiente problema con atención y sigue las indicaciones para resolverlo.

Se quieren construir rampas para una competencia de patinetas. Para medir el ángulo de inclinación de cada rampa, se considerarán dos medidas:

De acuerdo con las medidas especificadas, elije aquella rampa cuyo ángulo de inclinación sea mayor en cada caso (las medidas están dadas en metros).

Caso	Rampa 1	Rampa 2
1	$a = 1.5$ $b = 6.5$	$a = 1.5$ $b = 7.5$
2	$a = 1.5$ $b = 6.5$	$a = 1.7$ $b = 6.5$
3	$a = 1.5$ $b = 6$	$a = 2$ $b = 8$
4	$a = 1.6$ $b = 6.5$	$a = 1.7$ $b = 7$

Escribe tus observaciones caso por caso, luego anota tu repuesta justificándola.

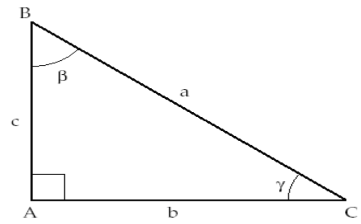
caso	OBSERVACIONES	RESPUESTA
1		
2		
3		
4		

Día 4

Nombre: ___________________________________ 3° “D” Fecha: _________

PROBLEMAS DE RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Dado un triángulo rectángulo como el siguiente,



completa la tabla para cada caso

CASO	a	b	c	β	γ	sen β	cos β	tan β	sen γ	cos γ	tan γ
1	7	5									

CASO	a	b	c	β	γ	sen β	cos β	tan β	sen γ	cos γ	tan γ
2	10			35							

CASO	a	b	c	β	γ	sen β	cos β	tan β	sen γ	cos γ	Tan γ
3		15		40°							

CASO	a	b	c	β	γ	sen β	cos β	tan β	sen γ	cos γ	tan γ
4		4	5								

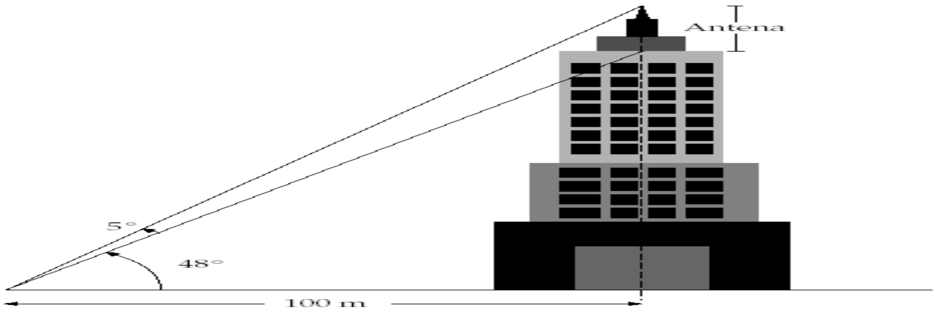
Día 5

Nombre: ___________________________________ 3° “D” Fecha: __________

TRABAJO EN EQUIPO CON_________________

PROBLEMA DEL EDIFICIO Y LA ANTENA

Observa el esquema planteado. ¿Cuáles son las alturas del edificio y de la antena? Realiza por escrito todas tus operaciones y escribe tus respuestas al final



TORRE LATINOAMERICANA

La Torre Latinoamericana, en la Ciudad de México, tiene una altura de aproximadamente 180 m, incluida la antena. ¿A qué distancia debo colocarme de ella para verla bajo un ángulo de 15°?

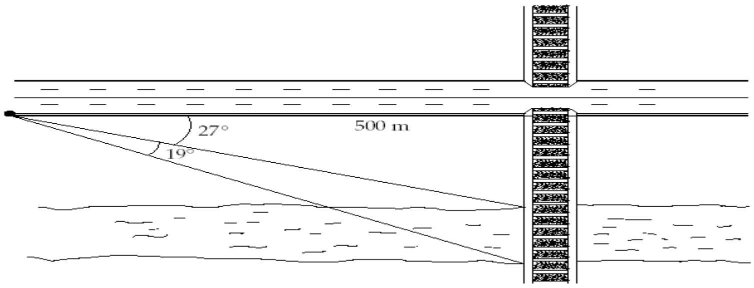
Día 6

Nombre: ___________________________________ 3° "D"   Fecha: __________

TRABAJO INDIVIDUAL

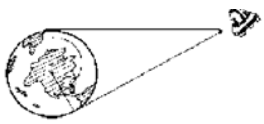
PROBLEMA DEL PUENTE

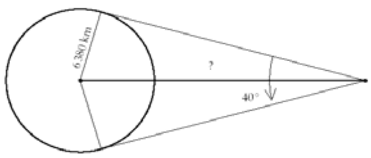
Una vía de ferrocarril atraviesa perpendicularmente una carretera recta y más adelante cruza un puente sobre un río. Una persona que se encuentra sobre la carretera, a 500 m del cruce con la vía, observa una situación como la indicada en el dibujo. ¿Cuál es la longitud del puente?



PROBLEMA DE LA NAVE

Un astronauta ve desde su nave que la Tierra abarca un ángulo de 40°. ¿A qué altura se encuentra sobre la superficie de la Tierra? (**Nota**: el radio de la Tierra es de aproximadamente 6 380 km.) 6 380 km.

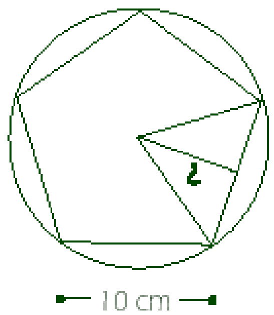




Anexo 10. Tres problemas para realizar la entrevista a los alumnos seleccionados

PROBLEMA 1.

Calcula el perímetro y el área de un pentágono regular que mide 10 cm por lado.



PROBLEMA 2.

Utilizando funciones trigonométricas, calcula el perímetro y el área de un heptágono regular, un octágono regular y un *n*-ágono regular, cuyos lados midan 10 cm respectivamente.

PROBLEMA 3.

Una escalera de 4m de largo llega hasta el borde de la ventana de un edificio, cuando el ángulo formado por la escalera y el suelo es de 65°. La pared del edificio es perpendicular al suelo. ¿A qué distancia de la base del edificio debe colocarse la base de la escalera en el suelo para que llegue a 50cm por debajo de la ventana?

Anexo 11. Tabla de razones trigonométricas

TABLA DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Medidas de ángulos	Seno	Coseno	Tangente
1°	.0175	.9998	.0175
2°	.0349	.9994	.0349
3°	.0523	.9986	.0524
4°	.0698	.9976	.0699
5°	.0872	.9962	.0875
6°	.1045	.9945	.1051
7°	.1219	.9925	.1228
8°	.1392	.9903	.1405
9°	.1564	.9877	.1584
10°	.1736	.9848	.1763
11°	.1908	.9816	.1944
12°	.2097	.9781	.2126
13°	.2250	.9744	.2309
14°	.2419	.9703	.2493
15°	.2588	.9659	.2679
16°	.2756	.9613	.2867
17°	.2924	.9563	.3057
18°	.3090	.9511	.3249
19°	.3256	.9455	.3443
20°	.3420	.9397	.3640
21°	.3584	.9336	.3839
22°	.3746	.9272	.4040
23°	.3907	.9205	.4245
24°	.4067	.9135	.4452
25°	.4226	.9063	.4663

Medidas de ángulos	Seno	Coseno	Tangente
26°	.4384	.8988	.4877
27°	.4540	.8910	.5095
28°	.4695	.8829	.5317
29°	.4848	.8746	.5543
30°	.5000	.8660	.5774
31°	.5150	.8572	.6009
32°	.5299	.8480	.6249
33°	.5446	.8387	.6494
34°	.5592	.8290	.6745
35°	.5736	.8192	.7002
36°	.5878	.8090	.7265
37°	.6018	.7986	.7536
38°	.6157	.7880	.7813
39°	.6293	.7771	.8098
40°	.6428	.7660	.8391
41°	.6561	.7547	.8693
42°	.6691	.7431	.9004
43°	.6820	.7314	.9325
44°	.6947	.7193	.9657
45°	.7071	.7071	1.0000
46°	.7193	.6947	1.0355
47°	.7314	.6820	1.0724
48°	.7431	.6691	1.1106
49°	.7547	.6561	1.1504
50°	.7660	.6428	1.1918

Medidas de ángulos	Seno	Coseno	Tangente
51°	.7771	.6293	1.2349
52°	.7880	.6157	1.2799
53°	.7986	.6018	1.3270
54°	.8090	.5878	1.3764
55°	.8192	.5736	1.4281
56°	.8290	.5592	1.4826
57°	.8387	.5446	1.5399
58°	.8480	.5299	1.6003
59°	.8572	.5150	1.6643
60°	.8660	.5000	1.7321
61°	.8746	.4848	1.8040
62°	.8829	.4695	1.8807
63°	.8910	.4540	1.9626
64°	.8988	.4384	2.0503
65°	.9063	.4226	2.1445
66°	.9135	.4067	2.2460
67°	.9205	.3907	2.3559
68°	.9272	.3746	2.4751
69°	.9336	.3584	2.6051
70°	.9397	.3420	2.7475

Medidas de ángulos	Seno	Coseno	Tangente
71°	.9455	.3256	2.9042
72°	.9511	.3090	3.0777
73°	.9563	.2924	3.2709
74°	.9613	.2756	3.4874
75°	.9659	.2588	3.7321
76°	.9703	.2419	4.0108
77°	.9744	.2250	4.3315
78°	.9781	.2079	4.7046
79°	.9816	.1908	5.1446
80°	.9848	.1736	5.6713
81°	.9877	.1564	6.3138
82°	.9903	.1392	7.1154
83°	.9925	.1219	8.1443
84°	.9945	.1045	9.5144
85°	.9962	.0872	11.4301
86°	.9976	.0698	14.3007
87°	.9986	.0523	19.0811
88°	.9994	.0349	28.6363
89°	.9998	.0175	57.2900
90°	1.0000	.0000	

RESUMEN DE *CURRICULUM VITAE*

Xóchitl Yaraseth Reyes Cruz nació en Tehuacán, Puebla, el 14 de octubre de 1980. Realizó sus estudios de educación básica en las escuelas “Liberación” e “Ing. Jorge L. Tamayo” de su ciudad natal. Egresó en 1998 de la Preparatoria Federal por Cooperación “C. P. Gilberto Martínez G.” en el área económico-administrativa.

De 1998 a 2002 estudió la licenciatura en Educación Media Básica en el área de matemáticas de la Escuela Normal Superior de México. Para obtener su título profesional, en marzo de 2006 presentó el documento recepcional “Regularización sabatina para los alumnos de la secundaria técnica No. 47 «Juan de Dios Bátiz» que adeudan la materia de matemáticas 1”.

Durante 6 años ha ejercido su profesión como profesora de matemáticas en la ciudad de México en las secundarias diurnas No. 96, “Dr. Enrique Herrera Moreno”, y No.120, “Rosario Castellanos”.

Ingresó en julio de 2006 a la Maestría en Desarrollo Educativo de la Universidad Pedagógica Nacional y egresó en junio de 2008 de la línea de Educación Matemática habiendo obtenido como promedio general 9.81. Durante sus estudios de maestría colaboró en la Organización de Estados Iberoamericanos en la evaluación de libros de texto de matemáticas para la educación secundaria del sistema educativo nacional de México en el segundo semestre de 2007; también fue auxiliar de investigación como becaria del Conacyt en el proyecto “Los sistemas algebraicos computarizados como herramienta para fortalecer la enseñanza-aprendizaje del álgebra de la escuela secundaria”.