UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

MAESTRÍA EN DESARROLLO EDUCATIVO

LÍNEA: EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PROCESOS DE GENERALIZACIÓN CON ESTUDIANTES DE 1º Y 2º DE SECUNDARIA DE UNA ESCUELA PÚBLICA DEL DISTRITO FEDERAL: UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA

Tesis que para obtener el grado de Maestra en Desarrollo Educativo en la Línea de Educación Matemática presenta:

GABRIELA ARRIAGA GARCÍA

DIRECCIÓN DE TESIS: DRA. CRISTIANNE BUTTO ZARZAR

MÉXICO D.F., DICIEMBRE DEL 2008

Agradecimientos

Dra. Cristianne,
Por su trabajo constante, sus valiosas enseñanzas
y su paciencia.

Jorge,
Por tu amor y apoyo incondicional, siempre.
Te amo

A mis padres,
Por creer en mi, por su cariño
y presencia incondicional.
Los amo

A mis herman@s, sobrinos y cuñad@s
Por su apoyo moral
y tolerar mis ratos de locura.
Los amo.

A todos los que estuvieron conmigo en este viaje,
MUCHAS GRACIAS.

ÍNDICE

Página

Resumen

Introducción…………………………………………………………………… 1

Capítulo I : Antecedentes del Estudio……………………………………. 8

Capítulo II: Procesos de generalización: Revisión de la literatura…. 18

Capítulo III: Marco Teórico………………………………………………. 30

Capítulo IV: Metodología…………………………………………………. 37

Capítulo V: Resultados del cuestionario inicial………………………… 66

Capítulo VI: Resultados de la Secuencia Didáctica……………………. 95

Capítulo VII: Resultados del cuestionario final…………………………. 118

Conclusiones…………………………………………………………………. 139

Síntesis de Resultados……………………………………………………. 143

Referencias Bibliográficas………………………………………………. 145

Anexos

Resumen

El tránsito de la aritmética al álgebra es un paso importante para llegar a ideas más complejas dentro de las matemáticas escolarizadas. Sin embargo, la mayoría de los estudiantes de secundaria encuentran dificultades que se generan porque este contenido matemático se enseña por lo general a partir de fuentes limitadas de significado, en donde usualmente se toma como base el dominio numérico. El acercamiento más tradicional al álgebra en la secundaria empieza por enseñar su sintaxis haciendo énfasis en sus aspectos manipulativos. A partir de las dificultades generadas por este tipo de enseñanza se han desarrollado diversas investigaciones en el área planteando distintos acercamientos hacia el aprendizaje del álgebra: como generalización o pensamiento en términos de número general (Mason, Graham, Pimm, Gowar, 1985), la evolución por rupturas (Filloy y Rojano, 1989), la reificación (Sfard y Linchevsky, 1994); la interpretación de los símbolos (Kieran, 1992, Matz, 1980 y Booth, 1984); la generalización y la formalización progresiva como una herramienta de representación y resolución de problemas (Da Rocha Falcao, 1993); como forma de pensamiento (Lee, 2001); como gestos y palabras (Radford, Demers, Guzmán y Cerulli, 2003); como metáforas (Lackoff y Núñez, 2000 y Ferrara, 2003). A pesar de las propuestas que se han derivado de la investigación sobre el aprendizaje del álgebra para trabajar en el aula, existen estudios que demuestran que los estudiantes siguen con dificultades para comprenderla. Por ejemplo, Ainley, Wilson y Bills (2003) mencionan que el trabajo de la generalidad en contexto no es suficiente para que los alumnos logren llegar al manejo simbólico de una regla. El estudio que aquí se reporta hace referencia al inicio de los contenidos algebraicos incluidos en el currículo de la escuela secundaria y pretende: estudiar las dificultades que los estudiantes presentan en el acceso al pensamiento algebraico vía los procesos de generalización, diseñar una secuencia didáctica que tome en consideración tanto dificultades cognitivas como el uso de distintos lenguajes (numérico, geométrico y algebraico), y observar diferentes tipos de interacción social, sus efectos y relaciones en los dominios matemáticos. El marco teórico se fundamenta en las aportaciones de Mason et al. (1985) sobre el acceso al álgebra por medio de la generalidad, el cual se desarrolla en cuatro pasos: percibir un patrón, decirlo, registrarlo y validarlo. La metodología del estudio es de corte cualitativo. El estudio se llevó a cabo con ocho estudiantes de primero y segundo grado de secundaria de una escuela pública del Distrito Federal, México. Se dividió en tres etapas: Cuestionario inicial de contenidos matemáticos y entrevista ad-hoc, Secuencia didáctica y Cuestionario final de contenidos matemáticos. En la primera etapa se encontró que los estudiantes lograron resolver problemas de secuencias aritméticas crecientes y percibir patrones, pero tenían dificultades con secuencias aritméticas decrecientes y secuencias geométricas, así como para comprender las ideas de variación proporcional y formular una regla general que la represente. En la segunda etapa del estudio se trabajaron actividades en parejas. Los alumnos lograron desarrollar las actividades de proporcionalidad geométrica, secuencias de figuras y escalas, lograron percibir el patrón y, aunque la mayor dificultad se refiere al planteamiento de las fórmulas, paulatinamente, lograron plantearlas. La interacción social permitió que los estudiantes accedieran a otro nivel conceptual. En la tercera etapa del estudio, se percibió que los estudiantes lograron desarrollar actividades de variación proporcional, secuencias geométricas y planteamiento de reglas o fórmulas sin la necesidad de ayuda. Por lo que se puede afirmar que llegaron a la cuarta etapa del trabajo de la generalidad propuesta por Mason et al. (1985), hecho que no se constató que sucediera en la primera etapa, pues ninguno había logrado dar una fórmula en el cuestionario inicial.

INTRODUCCIÓN

Un paso importante para lograr que el alumno comprenda ideas matemáticas avanzadas es el tránsito de la aritmética al álgebra. Sin embargo, las dificultades que los estudiantes presentan con el álgebra se deben a que ésta es vista tradicionalmente de manera lineal. Esto es, generalmente en la escuela secundaria el álgebra se presenta como una extensión de los algoritmos aritméticos hacia los algoritmos con literales. Asimismo, se trata como un contenido aislado de los demás, es decir, no se interconecta con las otras áreas de las matemáticas, por ejemplo, con la geometría.

El acercamiento más tradicional al álgebra empieza con el manejo de la sintaxis algebraica, enfatizando la manipulación de las expresiones algebraicas (con algoritmos algebraicos y simplificaciones, entre otras), luego se trabajan las ecuaciones, se resuelven y se verifican las soluciones. En ambos temas el alumno otorga poco significado a las literales que utiliza y a las expresiones de las que forman parte, ello limita el acceso a ideas más avanzadas, por ejemplo, a la noción de función. Carraher, Martínez y Schliemann (2008) establecen que debido al poco significado que tiene la notación algebraica para los alumnos, la introducción de la noción de función mediante expresiones algebraicas no parece la forma más adecuada para su comprensión. Así, el acceso tradicional al álgebra generalmente conduce a los alumnos a un simbolismo desprovisto de significado que no les permite acceder a la abstracción matemática.

Como consecuencia del aprendizaje en matemáticas carente de significado, el rendimiento en esta área del conocimiento y del álgebra en particular, se ve afectado. Esto se ve reflejado, por ejemplo, en evaluaciones nacionales e internacionales entre las que se encuentran “Excale” que realiza el Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE, 2006), y PISA que realiza la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (INEE, 2007). La prueba estandarizada denominada “Excale” está conformada por reactivos de opción múltiple que se ajustan a los contenidos curriculares del nivel básico, en ella se clasificó a los estudiantes en cuatro niveles de logro denominados “debajo del básico”, “básico”, “medio” y “avanzado”. Los resultados de “Excale” establecen que aproximadamente el 80% de los alumnos mexicanos no logran resolver los problemas algebraicos ahí planteados. Sólo manifiestan tener posibilidades de resolver correctamente actividades que implican el dominio de técnicas y mecanismos formales.

En la evaluación PISA (Programa Internacional para la Evaluación de los Alumnos), que evalúa a los alumnos de 15 años en su centro educativo sobre temas como español, ciencias y matemáticas, se ubica a los estudiantes en siete niveles de logro (del 0 al 6) y se considera que a los estudiantes que se ubican por debajo del Nivel 2 les es difícil “usar a las matemáticas como herramienta y que obtendrán muy pocos beneficios educativos, laborales y sociales como resultado de la enseñanza matemática que recibieron durante su formación básica” (Cortina, 2007). En México, aproximadamente el 57% de los alumnos que cursan el tercer grado de secundaria se encuentran debajo del Nivel 2 establecido por la OCDE.

En respuesta a los señalamientos anteriores y al interés por detectar y tratar de resolver las dificultades para comprender el álgebra, se han llevado a cabo diversas investigaciones de la didáctica de las matemáticas y planteado distintos acercamientos al álgebra: como forma de pensamiento (Lee, 2001), como generalización o pensamiento en términos de número general (Mason, Graham, Pimm, Gowar, 1985), como rupturas (Filloy y Rojano, 1989), como una herramienta (Kaput, 2001), entre otras. Sin embargo, a pesar de que existen varias propuestas para trabajar con el álgebra los estudios aún demuestran que los estudiantes siguen con dificultades para comprender esta área de las matemáticas (Booth, 1984). En el acercamiento al álgebra por medio de la generalidad destacan estudios como los de Mason et al. (op cit 1985) que afirman que el trabajo con la generalidad es un elemento esencial para desarrollar el pensamiento matemático y algebraico y que permite el acceso a la abstracción matemática. Pegg (citado en Durán Ponce, 1999) establece que el descubrimiento eficaz de patrones requiere de un trabajo en tres procesos: tener experiencias con patrones numéricos; expresar con oraciones reglas que caracterizan a los patrones, donde se involucre al alumno para aclarar y precisar dichas reglas; y expresar la regla de forma abreviada. Por su parte, Reggiani (1994) indica que la generalización es parte indispensable en el proceso de desarrollo del pensamiento algebraico. Radford (2006) aborda el pensamiento algebraico y la generalización de patrones desde una perspectiva semiótica.

Las dificultades del abordaje del álgebra mediante la generalización son estudiadas por Mc Gregor y Stacey (1993) quienes mencionan que los estudiantes tienen dificultades para describir y expresar algebraicamente patrones.

Ursini (1993) encuentra que los alumnos presentan dificultades para el reconocimiento de los patrones pero sobre todo en probar la validez de las fórmulas.

Michael et al. (citados en Lambertus, Mojica y Berenson, 2007) describen tres niveles de complejidad para la comprensión de las relaciones expresadas con patrones: abstracción empírica de las relaciones matemáticas, uso implícito de una regla general y uso explícito de la regla general.

Beatty (2007) resalta la importancia del trabajo con patrones representados simbólica y gráficamente. Encuentra que la comprensión de las funciones lineales se enriquece si los estudiantes pueden ligar la representación gráfica y la simbólica y esto sucede si se tienen experiencias previas con la construcción y graficación de patrones geométricos.

Otra investigación sobre la generalidad es la de Rossi y Rivera (2007), quienes trabajan con patrones crecientes y decrecientes y encuentran que existen importantes dificultades en los estudiantes cuando se trata de detectar un patrón en una secuencia que decrece y que, además, utiliza números negativos.

Anthony y Hunter (2008), reconocen que las funciones y las actividades con patrones ofrecen oportunidades importantes para el acceso temprano al álgebra. Amit y Neria (2008) trabajan con actividades de generalización y encontraron que los estudiantes son capaces de plantear generalizaciones de patrones no lineales y logran relacionar el patrón con la posición del término en la secuencia.

El estudio que se reporta en esta tesis hace referencia a los primeros contenidos algebraicos del currículo de la escuela secundaria, en la franja del pensamiento pre-algebraico al algebraico, donde se introduce a los alumnos a la sintaxis algebraica. Se trabajan los procesos de generalización en dos versiones, pre-simbólica (percepción de la idea de la variación proporcional) y simbólica (encontrar y expresar una regla general e incorporarla en lenguaje algebraico), por medio de la resolución de problemas propuestos en una secuencia de enseñanza, vía los procesos de generalización. En ambas versiones se involucra a los estudiantes con problemas que requieren de la percepción de patrones y relaciones funcionales para encaminarlos a la expresión del patrón o de la relación funcional de manera simbólica. La aportación de este estudio se dirige a desarrollar el pensamiento algebraico vía los procesos de generalización.

Las preguntas de investigación que pretendemos responder son:

- ¿Cuáles son las dificultades que presentan los estudiantes en el acceso al pensamiento algebraico vía los procesos de generalización?
- ¿Es viable el diseño de una secuencia didáctica que considere los aspectos cognitivos y el uso de distintos lenguajes (numérico, geométrico y algebraico) para que los alumnos accedan al pensamiento algebraico?
- ¿De qué manera influyen los diferentes tipos de interacción social, desarrollados en la secuencia didáctica, en los diversos dominios matemáticos?

Para responder las preguntas de investigación nos planteamos los siguientes propósitos:

- Estudiar las dificultades que los estudiantes presentan en el acceso al pensamiento algebraico vía los procesos de generalización.
- Diseñar una secuencia didáctica que tome en consideración tanto aspectos cognitivos como el uso de distintos lenguajes (numérico, geométrico y algebraico) para que los alumnos accedan al pensamiento algebraico.

- Observar diferentes tipos de interacción social que se desarrollan durante la secuencia didáctica y verificar sus efectos en los dominios matemáticos.

La tesis se fundamenta teóricamente en las aportaciones de Mason et al. (op cit, 1985). La metodología es de corte cualitativo. Se trabajó con ocho estudiantes de primero y segundo grado de secundaria de una escuela pública del Distrito Federal. Las etapas del estudio fueron tres: aplicación de un *cuestionario inicial y entrevista ad-hoc*, instrumentación de una *secuencia didáctica* y la aplicación de un *cuestionario final*.

La introducción del presente reporte plantea el problema de investigación, la importancia del estudio y los propósitos del mismo.

El primer capítulo, *Antecedentes del estudio,* presenta un acercamiento a las investigaciones sobre álgebra y sus diferentes abordajes incluyendo el de la generalidad.

El segundo capítulo presenta los *Antecedentes del estudio*, específicamente sobre *Procesos de Generalización.*

El tercer capítulo, denominado *Marco teórico*, trata sobre procesos de generalización basándose en la propuesta de Mason et al. (op cit, 1985).

El cuarto capítulo presenta la *Metodología* del estudio y se describen los instrumentos de investigación que fueron utilizados en el estudio principal, las etapas de la investigación, el marco de análisis de los datos, una síntesis de los resultados del estudio piloto y las consideraciones para el estudio principal.

El quinto capítulo presenta los *Resultados de la primera etapa del estudio: Cuestionario inicial y entrevista ad-hoc*. Inicia con la descripción y aplicación de los instrumentos y finaliza con los resultados del análisis de los datos.

El sexto capítulo presenta los *Resultados de la segunda etapa del estudio: Secuencia didáctica.* Aquí se da a conocer la descripción, aplicación, y análisis de la secuencia didáctica y los efectos de la interacción social.

El séptimo capítulo presenta los *Resultados de la tercera etapa del estudio: Cuestionario final.* Ahí también se presenta la descripción, aplicación y análisis correspondiente.

Finalmente, en esta tesis se presentan las *Conclusiones* de la investigación y se hace una reflexión de las implicaciones del estudio para futuras investigaciones en didáctica del álgebra, relativas al desarrollo del pensamiento algebraico y que se interrelacionan con aspectos similares, como son el lenguaje algebraico, la generalización, la simbolización y el uso de reglas algebraicas, como formas para acceder a ideas avanzadas dentro del álgebra formal.

CAPÍTULO I

ANTECEDENTES DEL ESTUDIO: DIVERSAS PERSPECTIVAS SOBRE EL ÁLGEBRA

Este capítulo aborda algunas de las investigaciones desarrolladas sobre la didáctica del álgebra. Se comentan algunos abordajes relacionados con este contenido y finalmente se justifica la postura que se adopta en esta tesis.

La enseñanza y el aprendizaje del álgebra

Para Kieran (2006) el desarrollo de las investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje del álgebra ha sido un tema de estudio desde 1977. Las primeras investigaciones que se desarrollaron se enfocaron en los conceptos algebraicos y procedimientos de resolución de problemas y las dificultades que presentaban los estudiantes en la transición de la aritmética al álgebra. El lenguaje algebraico fue de los principales temas de investigación. A mediados de los años 80, la investigación del álgebra abarcó temas como la generalización, múltiples representaciones y el uso de las herramientas tecnológicas. Hacia la mitad de los años noventa la investigación en álgebra se interesó por diferentes perspectivas de los contenidos algebraicos, desde el pensamiento algebraico de los estudiantes de la escuela elemental, los profesores de álgebra y la enseñanza de la misma, los contextos dinámicos, así como la modelización de situaciones dinámicas.

De acuerdo con la perspectiva de Kieran (op cit, 2006) podemos decir que la investigación sobre el aprendizaje y la enseñanza del álgebra ha puesto su interés en un amplio campo de estudio que va desde las posturas donde se trabajan contenidos específicos de esta área del conocimiento matemático, hasta las dificultades y fortalezas de quien aprende y de quien enseña.

La referida autora organiza los estudios sobre el aprendizaje y la enseñanza del álgebra, que se han realizado desde 1977, en tres grupos de investigación. Los clasifica de acuerdo a los temas de estudio que cada uno aborda. Algunos de ellos los presentamos a continuación.

Primer grupo: transición aritmética-álgebra; ecuaciones y su solución; variables e incógnitas y problemas con el lenguaje algebraico.

Para Kieran (op cit, 2006) los descubrimientos históricos de álgebra como sistema de símbolos sirvieron como punto de partida para la realización de las investigaciones sobre el pensamiento algebraico y su evolución en los estudiantes. Entre estas investigaciones se encuentran las que ven al álgebra como la generalización de la aritmética (Booth, 1981, 1984, citado en Kieran, 2006). Otras investigaciones se refieren a las formas en que los estudiantes interpretan los símbolos algebraicos basándose en los niveles cognitivos (Küchemann 1981, citado en Kieran, 2006). Otros estudios apuntaban hacia la manera en que los estudiantes otorgan un determinado uso a las literales en aritmética, por ejemplo, en fórmulas y cómo a partir de ese uso se puede lograr que los alumnos la vean como incógnita, como variable o como parámetro. Las primeras investigaciones sobre las literales algebraicas revelaron que no se trabajan en sus múltiples interpretaciones: como número específico, como incógnita y como número general (Collis 1974, Küchemann 1981, Wagner 1981, Clement, 1982, citados en Kieran, 2006). Sobre el uso de la variable como número general se encuentran investigaciones como la de Booth (1982,1983, citado en Kieran, 2006) que encuentra que a los estudiantes se les dificulta asimilar la idea de número general.

Los trabajos realizados con expresiones algebraicas, revelan las dificultades que los estudiantes tienen para interpretar expresiones como a+b. Algunos experimentos de enseñanza intentaron ayudar a los estudiantes a construir significados de expresiones algebraicas de diversas formas, por ejemplo, con modelos de área rectangular (Chalouh, Herscovics 1988, citados en Kieran, 2006). Otros trabajan utilizando identidades aritméticas para construir el concepto de ecuación, por ejemplo, la investigación de Herscovics y Kieran (1980, citados en Kieran, 2006) donde sugieren que a los estudiantes se les facilita construir el significado de ecuación mediante el uso de dichas identidades. En cuanto a la variable como número específico, las primeras investigaciones se centraron en la solución de ecuaciones y en los procedimientos de los estudiantes, por ejemplo, pruebas intuitivas, que incluyen el uso de factores numéricos, técnicas de conteo y métodos completos (Bell, O`Brien y Shiu 1980 y Booth 1983, citados en Kieran, 2006); ensayo, error y sustitución (Kieran 1985, citados en Kieran, 2006); y métodos formales (Withman 1973 y Kieran 1983, 1988, citados en Kieran, 2006). Entre los errores de solución en las ecuaciones se encuentra, por ejemplo, que los alumnos ignoran el signo “menos” que precede a los números (Hercovics y Linchevski 94, citados en Kieran, 2006) o la realización de comprobaciones erróneas (Perrenet y Wolters 1994, Pawley 1999, citados en Kieran, 2006). Dentro de este mismo grupo, la autora referida menciona las investigaciones sobre la resolución de problemas algebraicos mediante distintas representaciones, entre ellos, se puede mencionar el trabajo de Filloy y Rojano (1989, citados en Kieran, 2006) donde utilizan el modelo de la balanza y encontraron que los estudiantes no incrementan su comprensión de las ecuaciones al utilizar este tipo de representación. Stacey y Mc Gregor (1999, citados en Kieran, 2006) encontraron que en las etapas del proceso de resolución de los problemas, los alumnos se desvían de lo algebraico y aterrizan sus procedimientos generalmente en métodos de solución aritméticos.

Los temas de investigación citados anteriormente muestran algunas de las dificultades que tienen los alumnos con contenidos matemáticos como el uso de la variable en sus tres formas: número general, número específico y en relación funcional. Esto es importante porque sirve como antecedente para el presente estudio y permite enfatizar en la necesidad de diseñar una secuencia de actividades que ayude al alumno a encontrar sentido a las expresiones algebraicas y manipularlas.

El segundo grupo de investigación que menciona Kieran (op cit, 2006) presenta las investigaciones que utilizan la tecnología, la generalidad y otro tipo de apoyos para el aprendizaje del álgebra. Éstas se presentan a continuación.

Segundo grupo: El uso de la tecnología, la generalidad y otros apoyos en el aprendizaje del álgebra.

En este segundo grupo, nos ocuparemos principalmente de las investigaciones que consideran al álgebra como una actividad de generalización, perspectiva que de acuerdo con Kieran, (op cit, 2006) surge de la notación algebraica como herramienta para probar expresiones (por ejemplo Bell, 1976; Fischbein y Kedem, 1982; Mason y Pimm, 1984, citados en Kieran, 2006). Después fue ampliada y desarrollada por los pioneros de la generalidad, Mason, Graham, Pimm y Gowar (1985, citados en Kieran, 2006) quienes sostienen que la generalidad permite a los estudiantes comprender las relaciones matemáticas y expresarlas de forma sintética. Otra de las investigaciones sobre el uso de la notación algebraica como herramienta para las expresiones generales fue la de Lee y Wheeler en (1987, citados en Kieran, 2006) donde concluyen que algunos estudiantes sí usan el álgebra para expresar relaciones generales entre números. Mc Gregor y Stacey (1993, citados en Kieran, 2006) encuentran que los alumnos tienen dificultades en la expresión de los patrones por medio del lenguaje común. Healy y Hoyles (1999, citados en Kieran, 2006) encuentran que los acercamientos visuales en la generalización de patrones son una base para la representación algebraica de las secuencias y el desarrollo del concepto de función, sin embargo, hacen hincapié en la necesidad de conectar la observación del patrón con la forma simbólica. Mason (1996, citado en Kieran, 2006) destaca la importancia de trabajar después de varias actividades con secuencias, con el uso de tablas que pueden servir para que el alumno extraiga de ahí la fórmula.

Acorde con lo anterior, podemos observar que las investigaciones sobre la generalización a las que Kieran (op cit, 2006) hace referencia reportan dificultades que se relacionan con los problemas que los estudiantes tienen con la detección de un patrón. O bien, si detectan el patrón la dificultad que tienen para expresarlo incluso en lenguaje común. Ello nos permite tomar en cuenta que los instrumentos de investigación de este estudio deben insistir en actividades que involucren a los estudiantes en la percepción de patrones y en la expresión de los mismos, con el fin de que desarrollen el lenguaje algebraico de manera significativa.

Como se puede observar en los dos grupos de investigación anteriores, los temas de estudio tienen como elemento común la investigación de las dificultades que representan para los estudiantes los temas algebraicos. A diferencia de ellos, el tercer grupo que propone Kieran (op cit, 2006) contiene las investigaciones que ponen su atención en el pensamiento del maestro.

Tercer Grupo: Pensamiento algebraico de los estudiantes de la escuela elemental. Pensamiento algebraico del maestro. Modelizaciones de situaciones físicas.

En este grupo de investigación Kieran (op cit, 2006) hace referencia al acceso temprano al álgebra, esto es, con estudiantes de la escuela elemental. La autora refiere que la investigación sobre este tema inició a mediados de los años 90, justo en el momento en que también se incrementaba la investigación sobre la enseñanza del álgebra. Aunado al desarrollo de la tecnología, también se incrementaron las investigaciones donde se utiliza la modelización de situaciones físicas con herramientas tecnológicas. Dentro de las investigaciones que se refieren al acceso temprano al álgebra se encuentran las de la propia Kieran, Booth, Lee, Wheeler, Linchevsky, entre otros. Estas investigaciones abordan temas como relaciones entre igualdades numéricas, relaciones simbólicas entre las cantidades (por ejemplo Slovin, 2004, citado en Kieran, 2006), trabajo con ecuaciones (Carraher et al. 2003, citados en Kieran, 2006), y desarrollo del pensamiento funcional y la comprensión de propiedades matemáticas.

En este grupo también entran las investigaciones se enfocan en la enseñanza del álgebra, es decir, las que toman en cuenta el papel del docente, por ejemplo, en el trabajo que desarrollan dentro del salón de clases. También se consideran las investigaciones que tienen relación con la enseñanza de determinado programa con maestros en servicio, y el pensamiento algebraico de los maestros en formación.

Como se observa, este grupo de investigación da importancia al papel que juega el pensamiento del docente en el desarrollo del pensamiento algebraico de los alumnos.

También se consideran los estudios referentes al acceso temprano al álgebra, que muestran que los estudiantes de la escuela elemental pueden ser introducidos al álgebra con actividades donde se involucra al alumno, por ejemplo, en la comprensión de propiedades numéricas que se relacionan con generalizaciones matemáticas.

La perspectiva de Kieran (op cit, 2006) nos permite reconocer que el aprendizaje y la enseñanza del álgebra, si bien lleva al menos 30 años de investigación, no deja de ser tema de estudio puesto que las dificultades que los estudiantes aún presentan en esta área de las matemáticas son tareas pendientes para los investigadores y educadores.

De acuerdo con Rojano (1995), existen otros acercamientos al álgebra que se refieren al lenguaje matemático y algebraico, mismos que a continuación se presentan.

Sobre el lenguaje matemático y algebraico

Para Rojano (op cit, 1995) las tendencias de investigación en el estudio del lenguaje matemático que tratan sobre la naturaleza del mismo y del cómo los alumnos se apropian de él, se dividen en: Conceptualista y Como lenguaje. La primera tendencia considera la construcción de conceptos como objeto de estudio y las dificultades que esto representa para los alumnos. La segunda tendencia que Rojano (op cit, 1995) denomina: Como lenguaje, relaciona el aprendizaje de las matemáticas con la adquisición y el uso del lenguaje. Dentro de esta tendencia se encuentran diferentes enfoques de investigación como son: La matemática y otros lenguajes; Aspectos Semántico y Sintáctico del lenguaje matemático; y Modelos gramaticales y el estudio de la sintaxis.

Dentro de los estudios que forman parte de la tendencia del lenguaje y que abordan la relación del lenguaje algebraico con otros lenguajes, se encuentran dificultades para aprender el álgebra que pueden compararse con las dificultades para aprender la lengua materna. Al mismo tiempo reconocen que es más complicado corregir los errores del lenguaje algebraico porque su uso generalmente queda restringido al aula. Clement y Cooper (citados en Rojano, 1995) señalan que existen factores lingüísticos que provienen del lenguaje natural y que afectan la traducción de un enunciado en lenguaje común a lenguaje algebraico. A diferencia de ellos, Norman (citado en Rojano, 1995) apunta que los estudiantes encuentran la semántica del enunciado algebraico en el marco de referencia del lenguaje natural y en la sintaxis del mismo. Dentro de la misma postura, es decir de la que relaciona el lenguaje algebraico con otros, también se encuentra el estudio de Filloy y Rojano (1991, citados en Rojano, 1995). Ellos trabajaron con estudiantes de 12 y 13 años de edad y afirman que la dificultad y tensión existente entre los significados de conceptos algebraicos con los aritméticos y pre-algebraicos son resultado de la necesidad que tiene el alumno de dar sentido a las nuevas operaciones y conceptos a los que se enfrenta. Esto es, el alumno debe dotar de significado a las expresiones algebraicas que contienen signos aritméticos pero más elaborados.

Las investigaciones que trabajan con el lenguaje pero a partir de sus aspectos semánticos y sintácticos surgen a partir de las observaciones en la traducción de un lenguaje común u otra representación a lenguaje matemático o viceversa. Integran el manejo sintáctico del álgebra con la resolución de problemas, argumentando que la construcción de una semántica de los símbolos y las operaciones algebraicas está ligada a los enunciados de los problemas. Dentro de estos trabajos se encuentra un estudio desarrollado por Filloy y Rojano (1989, citados en Rojano, 1995) donde analizan específicamente los casos de dos niñas y concluyen que algunos procesos de abstracción en la modelación concreta de una situación dependen en gran medida de tendencias individuales encontradas en las alumnas. Por lo tanto, no se puede generalizar la influencia del enunciado del problema en la evolución de ciertas operaciones del nivel concreto a la forma sintáctica.

Los trabajos de investigación que relaciona el lenguaje algebraico con modelos gramaticales y con el estudio de la sintaxis, se encuentran los que ponen su interés en la sintaxis matemática, específicamente la algebraica. Entre ellos está el modelo de Kirshner (citado en Rojano, 1995) que consiste en modelar las expresiones algebraicas y sus transformaciones mediante traducciones que vayan de lo superficial a lo más profundo. Kirshner apunta que el acercamiento lingüístico ofrece ventajas significativas.

Según Rojano (op cit, 1995) otra orientación de las investigaciones, aparte de las teóricas citadas anteriormente, existe la orientación didáctica que incluye trabajos como el de Pimm (1987, citado en Rojano, 1995) que aborda aspectos verbales y simbólicos del lenguaje, en un contexto de aula.

Cualquiera de los diferentes temas de investigación sobre didáctica del álgebra presentados anteriormente ya sean desde la perspectiva de Kieran (op cit, 2006) y Rojano (op cit, 1995), contribuyen de manera importante al conocimiento de las dificultades y fortalezas que los diferentes abordajes representan en desarrollo de un pensamiento algebraico tanto de docentes como de alumnos. Aunque en este trabajo consideramos sólo uno de ellos: la generalización, es importante tener una visión de la situación de la investigación del álgebra para tomar en cuenta los elementos pertinentes que ayuden al diseño de los instrumentos de investigación. En el siguiente capítulo se presentan los antecedentes del tema referidos específicamente al trabajo de la generalidad, se retoman algunos citados en el segundo grupo que Kieran (op cit, 2006) propone y se dan a conocer otras investigaciones sobre este tema.

CAPÍTULO II

PROCESOS DE GENERALIZACIÓN: REVISIÓN DE LA LITERATURA

En este capítulo se presenta una revisión más detallada de las investigaciones que se han realizado sobre los procesos de generalización.

De acuerdo con Castro (citado en Butto, 2005), una situación repetida con regularidad involucra un patrón. Las matemáticas descubren patrones en los números, en la computadora, en el espacio y en la imaginación, y ayudan a entender las relaciones entre dichos patrones y su estructura. El trabajo con patrones en la enseñanza de las matemáticas se sustenta porque el contexto cotidiano contiene regularidades y porque en las matemáticas los patrones también están presentes. La habilidad para reconocerlos permite comprender las relaciones matemáticas. El álgebra permite que tales relaciones se puedan representar.

Las investigaciones que abordan la generalidad inician, según la perspectiva de Kieran (op cit, 2006) con Mason, Graham, Pimm y Gowar (op cit, 1985) a quienes considera como los pioneros del desarrollo de la generalidad como una ruta hacia el álgebra. La perspectiva de Mason et al. (op cit, 1985) da a conocer cuatro raíces del álgebra que son: Aritmética generalizada, Posibilidades y Restricciones, Expresión de la Generalidad y, Reordenamiento y manipulación. Todas ellas encaminadas al uso del lenguaje algebraico de manera significativa para el estudiante. Los autores proponen elegir una de las raíces y trazar una ruta para acceder al álgebra mediante dicha raíz. En el caso de la Expresión de la Generalidad este proceso debe incluir actividades que promuevan que el alumno desarrolle cuatro etapas: percibir un patrón, decirlo verbalmente, registrarlo, y validar los registros simbólicos. Mason, et al. (op cit, 1985) establecen que el trabajo basado en la expresión de la generalidad lleva al estudiante progresivamente a elaborar sus propias reglas y expresiones algebraicas que tendrán más sentido que las que les proporciona el maestro. Es necesario que el alumno tenga algo que decir para que surja la necesidad de plantear sus propias expresiones, mismas que poco a poco requerirán del lenguaje algebraico.

Otras investigaciones pioneras (Kieran, 2006) en el tema de la generalidad son las de Lee (1987; Lee y Wheeler, 1987) que trabajaron con el uso de la notación algebraica como herramienta para expresar una regla general de patrones numéricos y para justificar expresiones equivalentes de las relaciones de los patrones. Ellos encuentran que pocos estudiantes utilizan el lenguaje algebraico en la expresión y la justificación de los patrones. Los estudiantes logran probar patrones que encuentran y flexibilizar su pensamiento cuando la conjetura a la que llegaron no funciona.

MacGregor y Stacey (1993) observaron que una de las principales dificultades de los estudiantes en el trabajo con actividades de generalización estriba en la poca habilidad que tienen para expresar el patrón, incluso en lenguaje común.

Ursini (1993) realizó un estudio sobre el reconocimiento de patrones, con estudiantes de secundaria (12-13 años). Ella observó que los alumnos presentaban mayores dificultades en la prueba de las fórmulas, es decir, en la cuarta etapa que mencionan Mason et al. (op cit, 1985) y precisamente, descubre que los estudiantes no cubrían las cuatro etapas mencionadas. Asimismo, reconoce la importancia de apoyar al alumno para que complete el trabajo con la generalidad porque así los estudiantes lograrán manejar y comprender de forma eficiente del lenguaje algebraico.

Healy y Hoyles (1999, citados en Kieran, 2006) encuentran que al trabajar con secuencias de figuras, la aproximación visual les ofrece a los estudiantes un importante soporte para la representación algebraica de los patrones y para que observen la relación entre el patrón numérico y su forma simbólica.

Las representaciones tabulares son otra forma de trabajar con la generalidad (Kieran, 2006), entre las investigaciones que abordan estas representaciones se encuentra la de Mason (1996, citado en Kieran, 2006), que establece que la práctica escolar que involucra actividades de generalización en álgebra, ofrece el punto de partida para el trabajo con secuencias numéricas y de figuras. Mason (op cit, 1996) enfatiza en la construcción de tablas de valores para de ahí extraer una fórmula y probarla.

Sasman, Olivier, y Linchevski (1999, citados en Kieran, 2006) al trabajar con actividades que involucran distintas representaciones como: figuras, números, tablas y funciones, encuentran que esta multiplicidad tienen poco efecto en el pensamiento de los estudiantes de 14 años.

Otra aproximación sobre las representaciones tabulares es la que ofrece Moss (2005, citado en Kieran, 2006) donde sugiere que el uso de tablas con los estudiantes, dificulta que ellos logren reconocer las relaciones que están presentes en los patrones y a su vez que puedan representarlos simbólicamente.

En contraste con Moss (op cit, 2005), Lannin (2005) apunta que los estudiantes pueden relacionar las reglas con los diagramas tabulares y que su uso incrementa el éxito en la expresión de las generalizaciones.

Por otro lado, Steele (2008), quien trabaja con estudiantes de séptimo grado, encuentra que es importante presentar a los estudiantes secuencias de problemas donde se promueva la generalización y se les cuestione sobre las relaciones existentes entre sus diferentes representaciones, para que los alumnos puedan encontrar la equivalencia entre ellas. Otros trabajos que usan tablas de valores pero que enfatizan en la generalización son por ejemplo el de Usiskin (1988) que sugiere que para introducir el concepto de función, la generalización de patrones y la búsqueda de relaciones son un camino. De esta manera, los alumnos se inician en la búsqueda de la relación entre el cambio de una variable que es afectada por otra. Rico (1996) realizó un estudio con estudiantes de 14 años y encuentra que ellos prefieren generalizar usando tablas en lugar de diagramas.

Stacey (1989) reporta que los estudiantes pueden identificar patrones y expresar generalizaciones pero no prueban su validez. Al mismo tiempo, apunta que los alumnos dan las generalizaciones de forma precipitada.

Butto y Rojano (2004) quienes trabajaron con el acceso temprano al álgebra tomando como una ruta la generalización, plantean que junto con el razonamiento proporcional, numérico y geométrico, y la variación proporcional, en un ambiente de aprendizaje “LOGO”, se puede encontrar un camino es eficaz para el acceso temprano al álgebra. Sin embargo, enfatizan las dificultades que se presentan debido al tránsito del pensamiento aditivo al multiplicativo.

Lee (1996) considera que el álgebra es una pequeña cultura por medio de la cual el alumno puede formar parte de la cultura de las matemáticas. Con esta visión intenta integrar diversos abordajes del álgebra como son: álgebra como un conjunto de actividades y álgebra como un lenguaje. Defiende mediante la presentación del álgebra como cultura se puede lograr una interacción entre el lenguaje y el conocimiento, en un proceso gradual de aculturación algebraica que tendrá lugar en el salón de clases. Lee (1996) considera que es en el aula donde se pueden observar interacciones entre diferentes culturas, como la aritmética y la algebraica. La autora referida plantea que la introducción de los estudiantes a la cultura algebraica debería generar formas sociales, comunicativas, patrones de conducta, entre otros, y establece que la generalización es un camino para ello. Aunque no considera la generalidad como la única manera de aculturación algebraica, hace énfasis en que otras vías como las funciones, la modelización y la resolución de problemas también son tipos de generalización. Es decir, reconoce al igual que Mason et al. (op cit, 1985) que la generalización se encuentra en diversas áreas de las matemáticas y hace hincapié en que ya desde 1947 autores como Whitehead (citado en Lee, 1996) consideraban que el álgebra era la representación de patrones finitos. Al mismo tiempo, retoma a Sfard (1995 citada en Lee, 1996) que incluso define álgebra en términos de generalización.

Los estudios desarrollados por Pegg (1990), citado en Durán Ponce (1999), establecen que el descubrimiento de patrones requiere un trabajo en tres procesos: experiencias con actividades que involucran patrones numéricos; expresar la regla con oraciones, con el objetivo de involucrar a los estudiantes en la comunicación de la regla y esto les permita precisarla; y propiciar que los estudiantes expresen en forma abreviada las reglas. Dicho autor comenta que este trabajo debe llegar a la descripción de los patrones utilizando la notación algebraica y recomienda los alumnos comparen sus reglas para elegir las correctas. Asimismo, propone la creación de secuencias numéricas a partir de una regla dada o bien, encontrar varias reglas para un mismo patrón. Pegg (op cit, 1990) reconoce la importancia de la socialización en la detección de patrones numéricos y en la creación de las reglas que los caracterizan.

Michael et al. (citados en Lambertus, Mojica y Berenson, 2007) también trabaja con la generalidad y describe tres niveles de complejidad para la comprensión de las relaciones que involucran los patrones. Tales niveles son: abstracción empírica de las relaciones matemáticas, uso implícito de una regla general, y el uso explícito de la regla general. En el primer nivel los alumnos crean un patrón. En el segundo, el estudiante hace la predicción de los términos de posiciones más alejadas, sin que necesariamente continúen el patrón. Finalmente, en el tercer nivel los estudiantes son los que generalizan el patrón y formulan la regla. Los autores, de manera similar a Mason et al. (op cit 1985) establecen que el trabajo con patrones debe realizarse en etapas, sin embargo, no incluyen la expresión verbal del patrón ni su prueba, elementos que pueden determinar una reconfiguración de las conjeturas. Esto es, la comunicación verbal y la prueba del patrón, permiten que el estudiante organice sus ideas para que otro las entienda y en este proceso él mismo puede reconocer errores.

Beatty (2007), trabajó con estudiantes hacia la comprensión de las funciones lineales pero resalta la importancia del trabajo con patrones representados simbólica y gráficamente en este proceso. Encuentra que la comprensión de las funciones lineales se enriquece si los estudiantes pueden inicialmente relacionar la representación gráfica y la simbólica. Esto sucede si se tienen experiencias previas con la construcción y graficación de patrones geométricos. De esta manera, loes estudiantes incluso pueden predecir lo que pasa cuando se modifica el coeficiente de la variable o se agrega otra cantidad a ella.

Otra investigación sobre la generalidad es la que realizaron Rossi y Rivera (2007), donde trabajan con secuencias crecientes y decrecientes. Encuentran que existen importantes dificultades en los estudiantes cuando se trata de detectar un patrón en una secuencia que decrece y que requiere del uso de números negativos. Recomiendan el uso de tablas para ayudar al estudiante en la comprensión de los valores independientes y de los valores dependientes. Sugieren que la reversibilidad en las operaciones les puede ayudar.

Anthony y Hunter (2008), reconocen que la transición de la aritmética al razonamiento algebraico es un proceso difícil, pero apuntan que las funciones y las actividades con patrones ofrecen oportunidades importantes para el acceso temprano al álgebra. Los estudiantes inicialmente utilizan estrategias aditivas para resolver problemas de relaciones funcionales. Sin embargo, si poco a poco se les conduce a utilizar estrategias de generalización, por ejemplo, para valores más alejados, el objetivo se logra. Hacen hincapié en diseñar cuidadosamente las actividades para que el alumno tenga posibilidades de integrar sus esquemas numéricos y visuales.

Amit y Neria (2008) trabajaron con estudiantes talentosos en matemáticas a los que se les presentaban actividades de generalización. Mencionan que la importancia de trabajar con este tipo de problemas radica en su potencial matemático y encuentran que los estudiantes son capaces de llegar a la generalización de patrones no lineales, es decir, donde la diferencia de sus términos no es la misma en la secuencia. Los alumnos logran relacionar el patrón con la posición del término en la secuencia.

Las investigaciones anteriormente citadas ofrecen un panorama sobre el trabajo de la generalidad como alternativa para la comprensión de ideas matemáticas más avanzadas y aunque se verifica que en las actividades que abordan la generalidad los estudiantes encuentran dificultades, es preciso considerar que el proceso toma tiempo (Radford, 2000, citado en Kieran, 2006).

El trabajo con patrones, además es recomendado en los Estándares curriculares y de evaluación por el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NTCM, 2003). En dicho documento se establece el uso de los patrones desde la edad preescolar, con extensión hacia los grados superiores. Plantea que en todas las etapas escolares se debe capacitar al alumno en: el reconocimiento de patrones, relaciones y funciones; en la representación y el análisis de situaciones utilizando símbolos algebraicos; en el uso de modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas, y en el análisis del cambio en contextos diversos. Se señala que el trabajo con los procesos de generalización, inicialmente se desarrolla de manera intuitiva, observando la regularidad. Al mismo tiempo, hace hincapié en que el trabajo de las matemáticas realizado de esta manera tiene como propósito que los estudiantes sean capaces de:

- descubrir, extender, analizar y crear una amplia gama de patrones,

- descubrir y representar relaciones con tablas, gráficas y reglas,
- analizar relaciones funcionales para explicar de qué forma el cambio en una cantidad provoca un cambio en otra,
- usar patrones y funciones para presentar y resolver problemas.

En el currículo mexicano de educación secundaria, que está organizado en tres ejes: Sentido numérico y pensamiento algebraico; Forma espacio y medida y Manejo de la información (SEP, 2006), este contenido matemático (patrones y generalización) aparece en el eje sentido numérico y pensamiento algebraico donde señala que el alumno debe encontrar sentido al lenguaje matemático (oral o escrito) y tender un puente entre la aritmética y el álgebra, entendiendo que hay contenidos de álgebra en la primaria que se profundizan y consolidan en la secundaria (como el razonamiento proporcional). Sus propósitos van encaminados hacia los tres usos de las literales (número general, incógnita y en relación funcional), y al manejo del lenguaje algebraico. Pretende que el lenguaje algebraico sea visto como una forma de generalizar propiedades aritméticas y geométricas. Se insiste en ver lo general en lo particular para obtener un patrón, en emplear expresiones algebraicas para representar la relación entre dos variables (que puede ser lineal, cuadrática o exponencial). Cabe puntualizar que se promueve sólo en algunos temas y se proponen sólo las tres primeras etapas para el trabajo con procesos de generalización que propone Mason et al. (op cit, 1985): percibir el patrón, comunicarlo y registrarlo, no se plantea la validación de los resultados.

Después de conocer las investigaciones sobre el trabajo de la generalidad y las recomendaciones de su uso en la currícula mexicana y en los estándares norteamericanos, la postura de esta tesis es trabajar el lenguaje algebraico por la vía de los procesos de generalización. Para ello se consideran diversos contenidos matemáticos como el razonamiento proporcional y la variable en sus tres usos (como incógnita, como número general y como relación funcional).

Respecto a la variable en sus tres usos, se considera la investigación de Ursini y Trigueros (2000), donde se propone que el alumno comprenda cada uno de ellos debe lograr:

Al usar la variable en relación funcional:

- Reconocer la relación existente entre las diferentes representaciones y las cantidades: tabla, gráfica, problema verbal o expresión analítica.
- Determinar los valores de una variable dependiente cuando se conocen los de la variable independiente.
- Determinar los valores de una variable independiente cuando se conocen los de la variable dependiente.
- Reconocer la variación conjunta de las variables que intervienen en una relación en cualquiera de sus formas de representarse.
- Determinar los intervalos de variación de una de las variables cuando se conocen los de la otra.
- Expresar una relación funcional de manera tabular, gráfica y/o analítica, a partir de los datos de un problema.

Al usar la variable como número general

- Reconocer patrones y reglas en secuencias numéricas y en familias de problemas.

- Interpretar la variable simbólica como un ente que puede tomar cualquier valor.
- Interpretar la variable como un objeto indeterminado que se puede operar.
- Desarrollar la idea de método general distinguiendo los elementos variables de los invariantes en familias de problemas similares, hasta llegar a la simbolización de un método general y del objeto sobre el cual éste actúa.
- Manipular el símbolo para simplificar o desarrollar expresiones algebraicas.

Al usar la variable como incógnita:

- Reconocer e identificar en un problema la existencia de algo desconocido que se puede determinar.
- Interpretar la variable simbólica que aparece en una ecuación como algo que toma valores específicos.
- Sustituir el o los valores de la variable que hacen que la ecuación sea verdadera.
- Determinar el valor de la incógnita realizando las operaciones algebraicas y/o aritméticas necesarias.
- Simbolizar la incógnita que aparece en una situación particular y plantear una ecuación.

Acorde con las investigaciones que abordan la generalidad y con una idea clara sobre la variable en sus tres usos, se pueden reconocer los elementos necesarios para el diseño de los instrumentos y el trabajo con la generalización, pertinentes para nuestro estudio, por ejemplo, proponer actividades donde el alumno encuentre patrones y regularidades y el maestro lo invite a comunicarlas, teniendo presentes las dificultades que el alumno puede enfrentar como la simbolización y la prueba de las fórmulas. También cabe reconocer que el acceso al álgebra vía los procesos de generalización es un abordaje que ofrece al estudiante la posibilidad de dar sentido al lenguaje algebraico pues es él mismo el que lo escribe, encuentra las relaciones y las comunica.

Para el desarrollo de este trabajo se ha elegido como marco teórico la perspectiva de Mason et al. (op cit, 1985) que se desarrolla en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO III

MARCO TEÓRICO

En este capítulo se describen los aspectos teóricos del estudio. La propuesta de Mason, Graham, Pimm y Gowar (op cit, 1985) se ofrece como un marco de referencia teórica para esta tesis. Mason et al. (op cit, 1985) describen un trabajo sobre los procesos de generalización que consideramos acorde con los propósitos del estudio.

El marco teórico de esta tesis se fundamenta en los aportes de Mason, Graham, Pimm y Gowar (1985) quienes describen los temas que son fundamentales para comprender la generalidad como una ruta para que los estudiantes puedan acceder al pensamiento algebraico.

A continuación se describe cómo se concibe el pensamiento algebraico desde la generalidad, se mencionan las cuatro etapas de la misma y finalmente se presenta la manera en que se incorporan estas ideas en la presente investigación.

Desde la perspectiva de Mason et al. (op cit, 1985) el Álgebra es un lenguaje por medio del cual se comunican las ideas matemáticas de forma sintética y su característica principal es que puede expresar declaraciones generales que existen en todas las matemáticas. De esta manera, el manejo del lenguaje algebraico reviste su importancia pues es el lenguaje de las matemáticas.

Para acceder al álgebra los autores proponen conocer las “Raíces del álgebra”. Esto es, conocer las ideas básicas de las que se deriva el Álgebra y de las que fundamentalmente depende la comprensión de dicho contenido. Consideran cuatro Raíces: Aritmética generalizada, Posibilidades y Restricciones, Expresión de la Generalidad, y Reordenamiento y manipulación. Cada una de ellas se puede elegir para que el alumno acceda a los conceptos algebraicos de forma menos abrupta. Cuando se elige una Raíz, se debe trazar lo que Mason et al. (op cit, 1985) llaman una “Ruta hacia el álgebra”, misma que definen como el camino a seguir para lograr que el álgebra sea significativa para el alumno. Para trazar una ruta se deben elaborar actividades en las que se interconectan varios conceptos matemáticos, que el alumno trabaja y donde paulatinamente se van introduciendo los conocimientos algebraicos. En la ruta a seguir deben ser considerados los conocimientos previos del alumno así como sus dificultades anteriores, para no truncar el nuevo camino que va a recorrer.

Como se había mencionado anteriormente, en esta tesis hemos elegido como raíz la “Expresión de la generalidad”.

La Expresión de la Generalidad al igual que las otras Raíces es una de las ideas fundamentales para acceder a los conocimientos algebraicos y su característica es considerar que la Generalidad es “la vida de las matemáticas y el Álgebra es el lenguaje con el que se expresa esta generalidad” (Mason et al., 1985). Consiste básicamente en detectar una regularidad y poder explicarla, y se apoya en la idea de que el alumno ya tiene experiencia con estas actividades debido a que en su vida cotidiana también encuentra generalidades, que percibe y que explica, por ejemplo, “si como muchos dulces tendré caries en los dientes”.

Con este antecedente es posible considerar que las regularidades matemáticas poco a poco serán observadas y expresadas por el alumno. Sin embargo, es importante tener presente que no se trata solamente de que el alumno logre detectar regularidades y expresarlas, también debe ser capaz de diferenciar lo que pasa con las generalizaciones de las matemáticas y las de la vida cotidiana. Es decir, el alumno debe tomar en cuenta que en la vida cotidiana las generalizaciones que hace pueden tener excepciones, o bien, no cumplirse siempre. Por ejemplo, la frase citada anteriormente sobre la caries y los dulces ingeridos, puede no resultar cierta para una persona que aunque coma muchos dulces no tenga caries. En cambio, las regularidades que se detectan en matemáticas se traducen en expresiones generales que se escriben como enunciados que garantizan que lo planteado siempre se cumplirá, es decir, no pueden tener excepciones porque en tal caso no sería considerada como generalización matemática.

Trabajar con la “Expresión de la generalidad” es al mismo tiempo situarse en el centro del pensamiento matemático e implica que el alumno tenga algo que decir para después tener la necesidad de expresarlo mediante el lenguaje algebraico.

Así, cuando se ha comprendido qué significa expresar la generalidad se puede trazar una Ruta hacia el álgebra, que puede recorrerse en cortos o largos periodos de una sesión de matemáticas y no sólo en temas algebraicos, pues las regularidades existen en todas las matemáticas. Se trata entonces de que paulatinamente, el alumno encuentre ideas que expresar y con ello poco a poco tenga la necesidad de usar símbolos para generar sus propias expresiones algebraicas que, a diferencia de las expresiones que encuentra en un libro o recibe de su profesor, tendrán más sentido y significado.

Mason et al. (op cit, 1985) encuentran pertinente que el trabajo de la “Expresión de la generalidad” se realice en cuatro etapas:

1) Ver un patrón

2) Decir cuál es el patrón

3) Registrar un patrón y,

4) Prueba de la validez de las fórmulas

A continuación se describe en qué consiste cada una de ellas.

Ver un patrón

En esta etapa de la Ruta hacia el álgebra se pueden presentar actividades con secuencias de figuras o de números, donde se solicite a los alumnos la figura o el número siguiente. De esta manera para responder la actividad el alumno observará lo que está pasando de una figura a la otra, o de un número al siguiente y en esta observación el alumno percibirá la regularidad.

Decir cuál es el patrón

El alumno necesita expresar lo que observó y para ello es necesario incluir en las actividades preguntas que indaguen sobre cómo encontró la figura o el número siguiente y que lo comente con los demás compañeros. Ello permite también que el alumno organice sus ideas y sus observaciones de tal manera que lo pueda expresar para lo entiendan los demás, en ese proceso puede percatarse de si están correctas o no sus reflexiones.

Registrar el patrón

Para llegar a este punto se requiere que el alumno exprese de forma sucinta lo que ya dijo para que las ideas queden asentadas y no olvide las conjeturas a las que va llegando. El alumno vuelve a reflexionar sobre sus ideas para hacerlas accesibles a los demás, al mismo tiempo, se inicia en la manipulación de expresiones cuando las construye y reconstruye. El registro del patrón puede iniciar con oraciones donde se mezclen palabras, dibujos, y símbolos. Se debe insistir en este proceso hasta obtener expresiones exclusivamente simbólicas. Lo importante es que los registros sean elaboraciones propias de los alumno, para que tengan significado.

Prueba de la validez de las fórmulas

Una vez que se ha logrado llegar al registro simbólico, el alumno puede comprobar su fórmula en la actividad de la que surgió o en otros casos nuevos. La prueba de la fórmula se puede realizar con cálculos aritméticos, con dibujos o contando.

Es preciso considerar que el desarrollo de las primeras tres etapas no tiene que ser realizado de manera lineal, es decir, se puede mover de una etapa a otra dependiendo de las necesidades del estudiante.

Cuando el alumno logra elaborar sus propias expresiones algebraicas se puede decir que comienza a manejar un nuevo lenguaje: el algebraico, y para que logre un verdadero aprendizaje de ese lenguaje debe usarlo constantemente. Para Mason et al. (op cit, 1985) la manipulación y uso del lenguaje algebraico no debe ser difícil pues el trazo de una ruta hacia el álgebra tomando como base la Raíz “Expresión de la generalidad” implica también interconectar todas las áreas del conocimiento matemático y en ellas detectar regularidades que se traduzcan en fórmulas. Se puede usar el álgebra en contenidos aritméticos o geométricos. Con esta visión el alumno puede pensar en álgebra como algo útil para entender las matemáticas en general, esta utilidad puede iniciar con la idea de considerarla “como un lenguaje mediante el cual expresamos nuestros pensamientos y nuestro conocimiento de los patrones, en forma sucinta y, consecuentemente manipulable” (Mason et al., 1985). Luego, es importante que se pueda utilizar en otros contextos.

Para llegar a la manipulación de las expresiones algebraicas los alumnos necesitan elaborarlas, pero también compartir sus elaboraciones con los demás compañeros. Lo anterior les permitirá observar que existen expresiones equivalentes que surgen de distintas formas de ver un patrón, pero que al final representan una misma situación.

Así, el trazo de la ruta hacia el álgebra basada en la generalización debe considerar la interconexión de los conocimientos, la búsqueda de la observación, la comunicación, el registro y la prueba de los patrones. Al mismo tiempo, debe buscar que durante las sesiones de trabajo se promueva la interacción entre los alumnos para que verdaderamente comparen sus reflexiones y busquen otras alternativas cuando no pueden avanzar. Las actividades que se utilicen deben propiciar en el alumno la búsqueda de una regularidad, por ello, es necesario que se consideren actividades como secuencias de números, de figuras, actividades de la vida cotidiana, entre otras.

En esta tesis se trabajan los procesos de generalización a partir de las ideas desarrolladas por Mason et al. (op cit, 1985). Se considera la interconexión de contenidos como variación proporcional, variable como número específico, como número general, y en relación funcional. También se hace uso de las cuatro etapas que mencionan los autores: ver un patrón, comunicar el patrón, registrar el patrón y probar la validez de las fórmulas en:

- El diseño de los instrumentos de investigación: *cuestionario inicial*, *secuencia didáctica* y *cuestionario final*. Donde se proponen actividades que solicitan al alumno continuar la secuencia (para ello debe percibir el patrón), expresar cómo lo hizo (comunicar el patrón), dar una regla (registrarlo simbólicamente) y comprobar la regla (probar la validez de las fórmulas).

- El análisis de los datos, específicamente en lo que respecta a las categorías de resolución de problemas: aritmética, pre-algebraica y algebraica, donde la última expresa el desarrollo de la cuatro etapas, particularmente las últimas dos (registrar y probar las fórmulas) citadas por Mason et al. (op cit, 1985).

De esta manera y convencidas de que la generalidad está presente en el contexto cotidiano y en el contexto matemático, es importante considerar que el estudiante debe ser capaz de reconocerla y sobre todo de expresarla matemáticamente, para que logre llegar a una abstracción que le permita acceder a conocimientos matemáticos más avanzados.

En el siguiente capítulo se presenta la metodología del estudio y se hace una descripción de los instrumentos de investigación y de las propuestas de análisis de los datos, donde se puede observar específicamente, cómo se retoman los aspectos teóricos de la propuesta de Mason et al. (op cit, 1985).

CAPÍTULO IV

METODOLOGÍA

En este capítulo se describe la metodología que se siguió para realizar la investigación. Se inicia con la descripción del tipo de estudio al que pertenece esta investigación, después se presenta el corte del estudio y se describe la población con la cual se trabajó. Enseguida se explican las etapas del estudio y los instrumentos de investigación, y se explicita la propuesta de análisis de los datos. El capítulo concluye con una síntesis de los resultados del estudio piloto y las consideraciones para el estudio principal.

Tipo de estudio: Exploratorio y Descriptivo

Para caracterizar el tipo de estudio se definen los estudios exploratorio y descriptivo, de acuerdo a la clasificación de Dankhe (citado en Hernández, Fernández y Baptista, 1998).

Estudio Exploratorio: se caracteriza porque sus objetivos están encaminados hacia la innovación, es decir, aborda temas poco investigados o relativamente desconocidos para ayudar a futuras investigaciones.

Estudio Descriptivo: se caracteriza porque busca especificar propiedades importantes del fenómeno o de los sujetos a investigar. Selecciona las cualidades y las mide se manera independiente para después describirlas. Puede explicitar las relaciones existentes entre las variables y ofrecer algunas predicciones básicas de los fenómenos aunque ello no es su principal interés.

Es necesario apuntar que de acuerdo con Dankhe (citado en Hernández, Fernández y Baptista, 1998) las investigaciones pueden caracterizarse de manera exclusiva como exploratorias o como descriptivas, sin embargo, también pueden contener elementos de uno u otro tipo de investigación. En el caso del estudio que se presenta ha sido ubicado como exploratorio y descriptivo. Se considera exploratorio porque el abordaje de la generalidad es un tema de investigación joven, que tiene aproximadamente 20 años de desarrollo en comparación con otros temas como los procedimientos para resolver problemas algebraicos, que se ha investigado desde hace 40 años, como se podrá observar en los antecedentes del estudio. Se considera descriptivo porque especifica cómo los alumnos de secundaria trabajan con la generalización, cuáles son sus dificultades y sus avances. Finalmente, se hacen consideraciones que sirven para investigaciones posteriores relacionadas con este tema.

Corte del estudio: cualitativo

El estudio realizado es de corte cualitativo. En estos estudios, por ejemplo, la investigadora es parte activa en la recolección de los datos. Los resultados que se generan provienen de una realidad concreta que en el caso del estudio, es la enseñanza y el aprendizaje del álgebra vía los procesos de generalización, con alumnos de secundaria. La investigación se va ajustando a medida que avanza, es decir, se pueden hacer ajustes de acuerdo al las condiciones de la escuela, a los instrumentos de investigación y a las características de los alumnos. Se plantean criterios de análisis específicos que dependen del desarrollo de la investigación.

- *El papel de la investigadora*

De acuerdo con Butto (2005), en un estudio de corte cualitativo la investigadora participa activamente en la organización de las actividades desarrolladas en la investigación, en la colecta, y en al análisis de los datos. La investigadora también debe favorecer un ambiente donde los estudiantes puedan construir significados a lo largo de las actividades propuestas, principalmente en la secuencia didáctica.

- *Interacción social*

La perspectiva utilizada en el estudio para promover y analizar la interacción social hace referencia a los niveles de interacción social propuestos por Butto (2005), que se discuten en el capítulo *Resultados de la secuencia didáctica.*

El aprendizaje colaborativo se observa mediante la interacción social entre los estudiantes, desarrollada durante la discusión en las sesiones de trabajo de la *Secuencia Didáctica*, con el objetivo de desarrollar habilidades y conocimientos matemáticos y propiciar la comunicación. De acuerdo con Gokcroft (1982, citado en Hoyles y Sutherland, 1989) el lenguaje es una parte muy importante en la formación y expresión de las ideas matemáticas, mediante él los estudiantes pueden exponer sus concepciones y justificar sus estrategias y representaciones. En este sentido, la discusión de las ideas matemáticas durante la *Secuencia Didáctica* permite explorar aspectos como la interacción entre los alumnos y el contexto del conocimiento matemático. Además, permite desarrollar las funciones cognitivas y comunicativas como escuchar y hablar.

- *Organización de las sesiones de trabajo*

Es importante considerar que para el desarrollo de la investigación se deben organizar cuidadosamente las sesiones de trabajo, las actividades propuestas, los materiales, y el lugar donde se llevarán a cabo las etapas del estudio pues ello contribuye en gran medida al cumplimiento de los propósitos.

- *Diseño de los instrumentos de investigación*

Para diseñar cada uno de los instrumentos de investigación como son: *Cuestionario inicial, Secuencia didáctica* y *Cuestionario final* se desarrollaron las siguientes actividades: revisión de la literatura sobre procesos de generalización y didáctica del álgebra, identificar categorías de análisis para los procesos de generalización en álgebra, y elaboración de actividades para la *Secuencia didáctica* que toman en cuenta algunos aspectos de proporcionalidad numérica y geométrica, variación proporcional y procesos de generalización.

Ahora se describen la población, las etapas del estudio y cómo se analizan los datos.

Población

El estudio se realizó con ocho estudiantes de secundaria (tres de primero y cinco de segundo grado) de una escuela pública del Distrito Federal.

Etapas del estudio

El estudio se divide en tres:

1ª Etapa: Cuestionario inicial de contenidos matemáticos y entrevista ad- hoc.

2ª Etapa: Secuencia didáctica

3ª Etapa: Cuestionario final de contenidos matemáticos.

A continuación se describe cada una de las etapas que conforman la investigación.

1ª Etapa: Cuestionario inicial de contenidos matemáticos y entrevista ad-hoc

El cuestionario inicial consiste en el diseño de actividades que se relacionan con contenidos como secuencias aritméticas y geométricas; variable en sus tres usos: número específico, número general y en relación funcional; y variación proporcional; con el fin de conocer los antecedentes de los alumnos respecto al tema de investigación y definir sus niveles de adquisición conceptual.

A continuación se presenta una tabla donde se describen las preguntas planteadas en el cuestionario inicial.

Tabla No. 1 Descripción del cuestionario inicial

Número de pregunta	Contenidos Matemáticos	Planteamiento de la pregunta
1	Secuencia aritmética creciente y decreciente	Se solicita al alumno completar secuencias aritméticas con números enteros.
2	Comparación del crecimiento de la secuencia aritmética $S_n = S_{n-1} + 1$ y la secuencia geométrica $G_n = 2\ G_{n-1}$.	Se pide al alumno completar secuencias aritméticas y geométricas
3	Variación conjunta	Se pide al estudiante observar las tarjetas y completar la tabla con los valores que aparecen en casa tarjeta (relación funcional entre peso y edad) y se les pregunta ¿qué se puede decir entre el peso y los años de Jorge?
4	Relación funcional lineal y=2x+1, resolución de la ecuación 2x+1=b	Se pide al alumno comparar la cantidad de plástico producido y el número de máquinas. Encontrar relación entre ambos y dar la fórmula

Tabla No. 1 Descripción del cuestionario inicial (continuación)

Número de pregunta	Contenidos Matemáticos	Planteamiento de la pregunta
5	Variación funcional exponencial $y_n=2^{x_n}$	Se pide al alumno observar 4 edificios que están siendo pintados y responder cuántos pisos deberían ser pintados en el 5º edificio.
5.1	Variación funcional exponencial $y_n=2^{x_n}$	Se solicita al alumno que exprese la relación funcional
5.2	Variación funcional exponencial $y_n=2^{x_n}$	Se pide al alumno completar una secuencia geométrica de edificios pintados y encontrar la relación entre el número de edificio y pisos pintados. También debe hacer una gráfica, explicitar la relación y generalizar una fórmula.
6	Variable como número específico. Plantear y resolver la ecuación $x + x/2 = 1200$	Se pide al alumno resolver un problema que implica el planteamiento de una ecuación donde existen dos cantidades cuya relación es 2:1.
7	Variable como número específico. Plantear y resolver la ecuación $x + x/3 = 1200$.	Se solicita al alumno resolver un problema con cantidades que guardan una relación 3:1
8	Secuencia aritmética, relación cuadrática Las secuencias aritmética (b_n) base, (h_n) altura satisfacen $b_n = b_{n-1} + 2$, $n = 1,2,3,...$, de donde $b_n = 2n$; $h_n=h_{n-1} + 1$, $n = 1,2,3,...$, de donde $h_n = n+1$, eliminado n: $2 h_n = b_n+2$, de donde: $a_n = b_n h_n = h_n(h_n-1) = (1/2) b_n(b_n + 2)$, siendo para toda n: $a = h (h-1) = 1/2)b(b+2)$	Se pide al alumno observar una serie de rectángulos y dibujar la quinta figura de la serie, completar una tabla y encontrar cuál es el patrón.
9	Variable como relación funcional. $Y=80x$	Se pide al alumno observar una tabla y encontrar la relación entre las variables, explicar cómo aumenta una variable, en función de la otra y después deben graficar.
10	Variable como número específico en sistemas de ecuaciones lineales 2x2. Problema con error en uno de los datos	El alumno debe detectar el error en el dato al intentar decir el total de boletos vendidos de cada precio, dados los precios de niño y de adulto y el total de la venta.

Aplicación

El cuestionario inicial se aplica a todos los estudiantes en una sesión de aproximadamente 2 horas. Durante su desarrollo el alumno no recibe ninguna ayuda de la investigadora, salvo dudas referentes a la solicitud de la pregunta. Se les proporcionan materiales como lápiz, goma, sacapuntas, regla y calculadora.

Propuesta de análisis de los datos

Para el análisis del cuestionario inicial se consideran cuatro propuestas:

1ª Niveles de logro

2ª Categorías de resolución de problemas

3ª Niveles de conceptualización matemática

4ª Análisis de la entrevista ad-doc

En relación a las propuestas de análisis, se hace referencia explícita de cada una de ellas a partir de la página 49.

Entrevista ad-hoc

Es un tipo de entrevista que se diseña para un individuo en especial, de quien se conocen en detalle sus antecedentes sobre el tema a ser investigado por medio del cuestionario inicial. Tiene como objetivos profundizar en las ideas que el individuo tiene sobre los temas de generalización, e identificar de qué desarrolla las preguntas planteadas en el cuestionario inicial.

2ª Etapa: Secuencia didáctica con enseñanza

La secuencia didáctica es el diseño de actividades mediante las cuales se pretenden enseñar contenidos matemáticos del tema de investigación, es decir, sobre procesos de generalización. Se inicia con temas de razonamiento proporcional y se concluye con variable (como relación funcional, como número general y como número específico), para introducir a los estudiantes al lenguaje algebraico. Toma en consideración aspectos cognitivos y el uso de distintos lenguajes (como el numérico, el geométrico y el algebraico).

En esta etapa se planifican las actividades para después presentárselas a los alumnos en distintas sesiones de enseñanza dentro de su horario escolar. El diseño de la secuencia didáctica toma en cuenta los resultados de la primera etapa del estudio, es decir, del cuestionario inicial, para proponer actividades sobre los temas que requieren ser trabajados por los alumnos para que puedan ver una regularidad, comunicarla, registrarla y probar su registro.

Las actividades de la secuencia didáctica se describen en la siguiente tabla.

Tabla No. 2 Descripción de las actividades de la secuencia didáctica

Actividad	**Contenidos matemáticos**	**Solicitud de la pregunta**
1	Proporcionalidad intuitiva. Reconocer figuras en la misma proporción a partir de la percepción de la imagen.	Se pide al alumno observe un dibujo y seleccione imágenes que serían fotografías de él. Qué explique por qué las eligió.
2	Proporcionalidad geométrica Escala Proporción 2:1	Se solicita al alumno aplique la escala 2:1en el trazo de una casa a escala y explique cómo lo hizo.
3	Proporcionalidad geométrica Escala Proporción 3:1	Se solicita al alumno que descubra la escala 3:1, que termine un carro a escala y explique cómo lo hizo.
4	Secuencia geométrica Proporción 1:2 y 1:3	Se pide al alumno que trace las figuras que siguen en las secuencias de figuras que se les presenten.
5	Proporcionalidad geométrica Proporción entre varias cantidades a:b:c:d: ... :: 3a: 3b: 3c: 3d: ...	Se solicita al alumno que elija de un grupo de rectángulos las parejas que sean proporcionales (se les dan las medidas). Explicar cómo formó las parejas. Llenar una tabla, explicar por qué son proporcionales.

Tabla No. 2 Descripción de las actividades de la secuencia didáctica (continuación)

Actividad	Contenido Matemático	Solicitud de la pregunta
6	Variación proporcional Relación lineal: y = 2x, y = 3x, y = 4x, y = 5x, y = 6x	Se pide al alumno llene tablas y responda qué cantidad de ingredientes se necesitan para preparar hot cakes si aumenta la cantidad de personas
7	Secuencia aritmética creciente y decreciente. $x_{n+1}=x_n+1$ y $x_{n+1}=x_n-1$	Se solicita al alumno encontrar el patrón que siguen las casillas de las fichas de dominó para elegir la que sigue en la secuencia.
8	Secuencia aritmética $x_{n+1}=x_n+2$ Secuencia geométrica $t_n=n^2$	Se pide al alumno que encuentre la figura que sigue, detecte el patrón, lo explique y lo traduzca en una fórmula. Comprobar la fórmula.
9	Números figurados Secuencia aritmética Secuencia geométrica Relación cuadrática con variable discreta $A=n^2$	Se pide al alumno trazar los dos cuadrados siguientes, llenar una tabla, decir cómo calcular el total de puntos conociendo el número de figura, dar la regla y comprobarla.
10	Números figurados Secuencia aritmética Secuencia geométrica Relación cuadrática con variable discreta $A=n(n+1)$	Se solicita al alumno trazar los dos rectángulos siguientes, dar la regla para calcular el total de puntos conociendo el número de puntos de la base, comprobarla.
11	Números figurados Secuencia aritmética Secuencia geométrica Relación cuadrática con variable discreta $A=\frac{n(n+1)}{2}$	Se pide al alumno dibujar los dos triángulos siguientes, llenar tabla, calcular el número de puntos para la figura 10, para la 20, dar la regla para calcular el total de puntos, comprobarla.
12	Variable como número específico Plantear y resolver la ecuación x+2x=4500	Se solicita al alumno encontrar el precio de dos aparatos, dado el gasto total y la relación entre los precios.
13	Variable como número específico Plantear y resolver la ecuación x+2x=15000	Se pide al alumno encuentre un número dado el resultado de dos operaciones que se hacen con él.
14	Proporcionalidad geométrica Valor de la razón Valor unitario Relación funcional y=0.20x	Se pide al alumno completar la tabla Número de copias/precio, explicar cómo lo hizo, explicitar la relación, dar el precio de otro número de copias, explicar cómo lo obtuvo, dar una regla que exprese la relación que encontró, comprobarla.

Aplicación

La secuencia didáctica se aplica a todos los estudiantes en 16 sesiones de 90 minutos, aproximadamente. Durante su desarrollo los alumnos son organizados en parejas y se trabajan las actividades primero en binas y después en plenaria. La investigadora adopta el papel de docente y promueve la interacción entre los estudiantes.

Propuesta de análisis de los datos

Los datos obtenidos con la secuencia didáctica se analizan de acuerdo a tres propuestas:

1ª Niveles de logro

2ª Categorías de resolución de problemas

3ª Interacción social en pareja

Cada una de las propuestas de análisis se especifica a partir de la página 49.

3ª Etapa: Cuestionario final

El cuestionario final es el conjunto de preguntas que se le presentan al alumno con la finalidad de verificar la evolución de las ideas matemáticas respecto a las etapas anteriores. Se incluyen algunas cuestiones que fueron trabajadas en el cuestionario inicial y en la secuencia didáctica y se proponen otras nuevas.

El cuestionario final se describe a continuación.

Tabla No. 3 Descripción del cuestionario final

Actividad	Contenido Matemático	Solicitud de la pregunta
1 a) y b)	Secuencia geométrica $x_{n+1}=4x_n$	Se pide al alumno encontrar tres términos de una secuencia, explicar cómo lo hizo, dar la regla y comprobarla

Tabla No. 3 Descripción del cuestionario final (continuación)

Actividad	Contenido Matemático	Solicitud de la pregunta
2 a) y b)	Secuencia geométrica Proporción 1:2 y 1:3	Se solicita al alumno trazar las figuras que siguen en las secuencias de figuras que se les presentan, explicar cómo las trazó, qué observa y calcularlo para la siguiente figura. En el inciso b se le pide dar una regla si conoce la figura anterior.
3	Secuencia geométrica $t_n=n^2$ y aritmética $x_{n+1}=x_n+2$	Se pide al alumno responda cuántos cuadros lleva en su base la siguiente figura de la secuencia, cuántos tiene en total. Debe dar los mismos datos para la figura 5, la 10 y la 30. Debe dar una fórmula para los cuadros de la base y comprobarla. Después debe dar la regla para el total de cuadros y comprobarla.
4	Números figurados Secuencia aritmética Secuencia geométrica Relación cuadrática con variable discreta $A=n(n+1)$	Se solicita al alumno trazar los dos rectángulos siguientes, completar la tabla y calcular el número de puntos para la figura 10 y la 20, dar la regla para calcular el total de puntos conociendo el número de puntos de la base y comprobarla.
5	Relación funcional lineal Variable en relación funcional $y = 2x+1$	Se pide al alumno comparar la cantidad de plástico producido y el número de máquinas. Encontrar relación entre ambos y se les pide también generar una fórmula
6	Variable en relación funcional $y=80x-1200$	Se pide al alumno llenar una tabla para calcular la ganancia en función del número de podas de pasto, luego debe calcular el número de trabajos conociendo la ganancia que se quiere obtener, dar una fórmula y utilizarla para otra ganancia dada.
7	Variable como número específico Plantear la ecuación $x+3x=1600$	Se solicita al alumno resolver un problema de precios de dos celulares, se espera planteen una ecuación
8	Variable como número específico Plantear la ecuación $x+2x=20000$	Se pide al alumno resolver un problema de precios de dos celulares, se espera planteen una ecuación.

Aplicación

El cuestionario final se aplica a todos los estudiantes en una sesión de aproximadamente 2 horas. Los alumnos no reciben ninguna ayuda de la investigadora, sólo se les proporcionan las instrucciones y se resuelven dudas referentes a la solicitud de la pregunta. Se dejan al alcance de los estudiantes materiales como lápiz, goma, sacapuntas, regla y calculadora.

Propuesta de análisis de los datos

Los datos obtenidos en el cuestionario final se analizan de acuerdo a las siguientes propuestas de análisis:

1ª Niveles de logro

2ª Categorías de resolución de problemas y su evolución

3ª Niveles de conceptualización matemática y su evolución.

Las propuestas de análisis se especifican a continuación.

Descripción de las propuestas de análisis de los datos de las tres etapas del estudio

- **Primera propuesta: Análisis de los niveles de logro**

Consiste en un análisis del nivel de logro que tienen los estudiantes en cada actividad de los *Cuestionarios Inicial y Final y de la Secuencia Didáctica*.

Se define como nivel de logro: la evidencia de que el alumno tiene los elementos matemáticos necesarios para responder a la solicitud de las preguntas, esto hace referencia al nivel de conceptualización matemática que demuestra.

Se establecieron tres niveles de logro que se describen en la tabla que se presenta a continuación.

Tabla No. 4 Caracterización de los niveles de logro

Nombre del nivel de logro	Caracterización del nivel de logro
Nivel Bajo	Se refiere a las respuestas de los alumnos que evidencian un pensamiento aditivo, cuya característica es dar solución a las preguntas únicamente a través de sumas y/o restas, por ello se les dificulta ver patrones y relaciones funcionales. No responden a la solicitud de la pregunta o dan otra respuesta.
Nivel medio	Se refiere a las respuestas que evidencian un pensamiento aditivo en transición al multiplicativo, es decir, sólo detectan patrones o visualizan variaciones de una variable pero sin relacionarla con otra. No pueden aplicar su percepción a casos más alejados. Tampoco la expresan simbólicamente. Responden parcialmente a la solicitud de las preguntas.
Nivel alto	Se refiere a las respuestas que evidencian un claro pensamiento multiplicativo, es decir, pueden detectar patrones o regularidades, expresarlos simbólicamente y verificar sus elaboraciones. Responden a la solicitud de la pregunta.

- **Segunda Propuesta: Categorías de resolución de problemas**

En este análisis se toman en cuenta los tipos de respuesta proporcionados por los alumnos, considerando los procedimientos y la comprensión de las actividades propuestas en *los Cuestionarios Inicial y Final y la Secuencia Didáctica*. También se toma en cuenta si desarrollan las cuatro etapas que proponen Mason et al. (op cit, 1985) para el trabajo de la generalidad.

Tabla No. 5 Caracterización de las categorías de resolución de problemas

Nombre de la categoría	Caracterización
Aritmética	Se refiere a las respuestas que se caracterizan porque han sido resueltas mediante adiciones y sustracciones explícitas o mentales, o bien, a través de conteos. No detectan patrones geométricos. Perciben cambios de una variable pero no en relación con otra, no expresan reglas generales que las represente.
Categoría Prealgebraica	Se refiere a las respuestas que se caracterizan por un razonamiento aditivo en transición al pensamiento multiplicativo, es decir, son capaces de ver una variación proporcional o percibir un patrón en una secuencia geométrica, pero no pueden traducir la regularidad a una regla simbólica.

Tabla No. 5 Caracterización de las categorías de resolución de problemas (continuación)

Nombre de la categoría	Caracterización
Categoría Algebraica	Se refiere a aquellas respuestas que evidencian un pensamiento multiplicativo, es decir, los alumnos perciben la variación, pueden aplicarla para otros casos, pueden expresar oral y de forma simbólica dicha variación y pueden comprobarla.

- **Tercera propuesta: Entrevista ad-hoc**

Este análisis tiene como objetivo indagar con el alumno sobre su comprensión y tratamiento de las preguntas que se le plantearon en el *Cuestionarios Inicial* y se cuestiona sobre sus concepciones acerca de las nociones matemáticas.

- **Cuarta propuesta: Niveles de conceptualización matemática**

Después de la categorización de las estrategias de resolución de problemas en el *Cuestionario Inicial* se ubica a los alumnos en niveles de conceptualización matemática.

El nivel de conceptualización matemática se define como la comprensión que tienen los alumnos sobre los procesos de generalización, es decir, si su pensamiento les permite desarrollar el proceso completo que implica el trabajo de la generalidad propuesto por Mason et al (op cit, 1985).

En función de lo anterior se observa si su razonamiento les permite la resolución de los problemas mediante una suma. Si resuelven el problema con operaciones aritméticas (multiplicación) y pueden relacionar parcialmente las variables y expresar dicha relación por lo menos en lenguaje común. Finalmente, si son capaces de resolver el problema relacionando todas las variables existentes y además pueden expresar la relación de forma simbólica y verificar sus resultados.

Asimismo, los niveles de conceptualización matemática servirán para organizar a los alumnos durante el desarrollo de la segunda etapa del estudio (*Secuencia Didáctica*). En el *Cuestionario final* se verifica también si se ha dado un cambio en el nivel de conceptualización respecto al nivel que mostraron los alumnos en el *Cuestionario inicial*. Para ello, se definen tres niveles de conceptualización matemática: Bajo, Medio y Alto que se describen a continuación.

Tabla No. 6 Caracterización de los niveles de conceptualización matemática

Nivel conceptual	**Caracterización**
Bajo	Los alumnos evidencian un pensamiento aditivo. Resuelven secuencias aritméticas pero no geométricas. No grafican y no resuelven problemas de variable como número específico, no ven la relación entre dos variables en forma horizontal (una en relación con la otra). No expresan reglas generales.
Medio	Los alumnos evidencian un pensamiento aditivo en transición al multiplicativo, resuelven las secuencias aritméticas y en ocasiones las geométricas, no llegan a una expresión general simbólica.
Alto	Los alumnos evidencian un claro pensamiento multiplicativo que les permite detectar patrones en secuencias aritméticas y geométricas, observar la variación proporcional, resolver problemas que involucran el uso de la variable como número específico, como número general y como relación funcional. Asimismo pueden plantear reglas simbólicas.

- **Quinta propuesta: Análisis de la Interacción social**

Se observa la interacción social entre los estudiantes y su influencia en los dominios matemáticos. La secuencia didáctica se desarrolla en parejas y se analizan episodios de la misma para determinar el tipo de interacción que se da.

Para ello, de acuerdo con los niveles de conceptualización matemática identificados en el cuestionario inicial, se forman parejas de estudiantes conformadas por alumnos de nivel bajo y medio, o bien, medio y alto, y se analiza la influencia que tiene la interacción con su par, para establecer si tiene relación con el logro de las actividades y la evolución de las ideas de los alumnos. Se utiliza la propuesta de Butto (2005) que presenta los siguientes tipos de interacción:

Explicación univocal: cada uno de los alumnos juzga que su compañero no entendió y que no puede intervenir, por lo tanto un integrante de la pareja acepta tal posición. El término univocal enfatiza que la opinión de un sólo alumno predomina.

Explicación multivocal: en esta interacción tiene lugar un conflicto entre ambos alumnos, los dos consideran sus razonamientos como correctos. Este tipo de interacción constituye para los dos estudiantes un avance en sus perspectivas para explicar su pensamiento e intentar cambiar la de su compañero.

Colaboración directa: en este tipo de interacción un alumno resuelve y le dicta los resultados al otro, por ello no parece ser productiva para ninguno de los dos. Aunque la solución se consideró como compartida la posibilidad de que surjan oportunidades se aprendizaje es remota.

Colaboración indirecta: en este tipo de interacción los estudiantes piensan en voz alta, mientras aparentemente resuelven tareas de manera individual; sin embargo, ellos monitorean la actividad del otro, hasta cierto punto. Las oportunidades de aprendizaje surgen cuando un alumno dijo e hizo algo significativo para el otro.

- **Sexta propuesta: Seguimiento de las categorías de resolución de problemas y de los niveles de conceptualización matemática**

Se hace un seguimiento de las categorías de resolución de problemas del *Cuestionario Inicial, en la Secuencia Didáctica y en el Cuestionario Final*. Se verifica si los alumnos han cambiado de nivel de conceptualización matemática, es decir, si existe evolución en los mismos después del desarrollo de la secuencia didáctica.

ESTUDIO PILOTO

El estudio piloto se desarrolla con la finalidad de poner a prueba los instrumentos que se aplican en el estudio principal y con ello hacer los ajustes necesarios.

En el estudio piloto se aplicó un cuestionario inicial, la secuencia didáctica y el cuestionario final a dos estudiantes de primero de secundaria de una escuela pública del Distrito Federal.

Resultados del estudio piloto

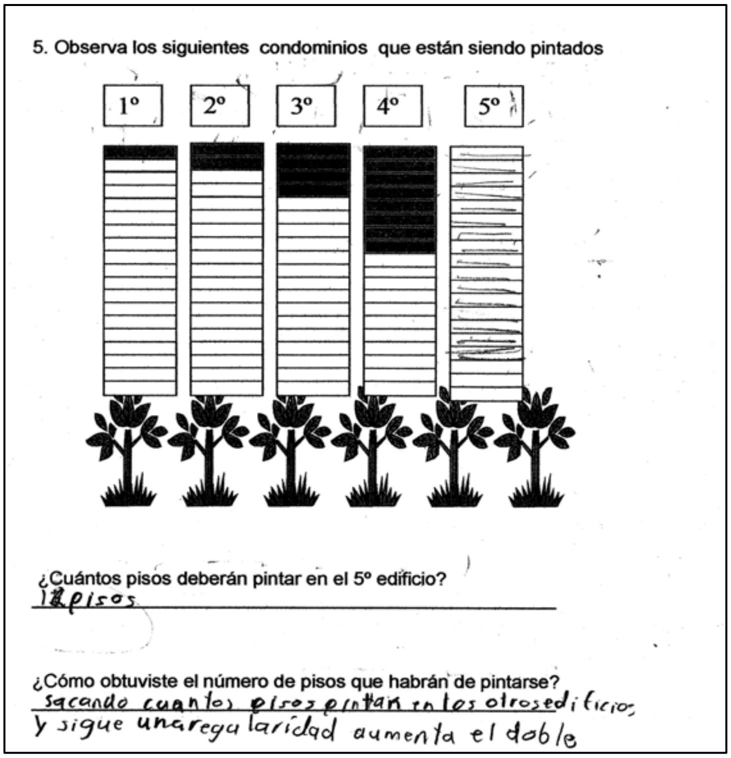
Cuestionario inicial

Niveles de logro

A partir de este análisis se establece que los dos alumnos pueden resolver secuencias aritméticas pero no las geométricas. Logran organizar los datos en una tabla correctamente pero no son capaces de leer la información de las columnas en conjunto, es decir, no establecen la relación entre dos variables. No logran plantear reglas simbólicas que expresen una generalidad. Un ejemplo de ello se muestra en la siguiente imagen.

Pregunta No. 5 (cuestionario inicial piloto)

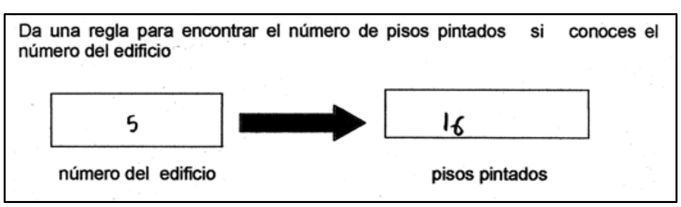
Alumno: JCT


5. Observa los siguientes condominios que están siendo pintados

¿Cuántos pisos deberán pintar en el 5º edificio?
1[illegible] pisos

¿Cómo obtuviste el número de pisos que habrán de pintarse?
sacando cuantos pisos pintan en los otros edificios y sigue una regularidad aumenta el doble

Como se observa en la imagen anterior, el alumno puede percibir que el edificio cinco debe tener 16 pisos pintados y lo explica diciendo que lo hace de acuerdo a los que tiene pintados el anterior, “aumenta el doble”. Sin embargo cuando se le solicita la regla, no puede expresarlo. Este hecho se muestra en la siguiente imagen.


Da una regla para encontrar el número de pisos pintados si conoces el número del edificio

Por otra parte, ninguno de los alumnos puede resolver problemas que abordan la variable como número específico.

Acorde con lo anterior, los alumnos se ubican en un nivel de logro medio que se caracteriza porque los alumnos pueden ver patrones y comunicarlos pero no llegan a las reglas debido a que no pueden relacionar todas las variables de los problemas.

Categorías de resolución de problemas

Después del análisis anterior se establecieron categorías de resolución de problemas basadas en el tipo de justificaciones y procedimientos que los alumnos realizaron en cada pregunta del cuestionario.

Se encontraron dos tipos de categorías de resolución de problemas: la aritmética y la pre-algebraica. Éstas se describen en la siguiente tabla.

Tabla No. 7 Categorías de resolución de problemas. Cuestionario inicial-estudio piloto

Nombre de la categoría	Caracterización
Aritmética	Las respuestas que ponen en evidencia procedimientos basados en operaciones como sumas y restas, los alumnos no perciben patrones y en consecuencia no pueden llegar a una regla simbólica.
Pre-algebraica	Las respuestas ponen en evidencia que los alumnos resuelven con operaciones como multiplicación y división; perciben un patrón aunque no llegan a una regla o fórmula.

A continuación se describe lo realizado por los alumnos en las preguntas del cuestionario que permitió la definición de las categorías de resolución de problemas.

En las preguntas No. 1 y 2 donde se les plantean secuencias aritméticas (de orden creciente y decreciente) y secuencias geométricas, los alumnos logran resolver las secuencias aritméticas en forma creciente pero no decreciente, sobre todo si se trata de utilizar números negativos. No resuelven con éxito una secuencia geométrica.

Para las actividades donde se trabaja la variable, por ejemplo en relación funcional no logran expresar en forma de regla la variación y en consecuencia hacer la comprobación, porque observan el cambio de una variable pero no en función de la otra. Cuando se trata como número específico los procedimientos utilizados por los alumnos se basan principalmente en operaciones aritméticas sin llegar a la solución de los problemas.

En la actividad No. 10 nuevamente se aborda la variable como número específico en un sistema de ecuaciones pero, al momento de la revisión se detectó un error en los datos que los alumnos no notaron y sólo contestaron valores numéricos.

Niveles de conceptualización matemática

Se encontraron dos niveles conceptuales: Bajo y Medio, estos se definen a continuación

Bajo: el alumno evidencia pensamiento aditivo, es decir, puede resolver las preguntas sólo a través de sumas y restas y no percibe patrones, por lo tanto, no puede expresar reglas generales.

Medio: el alumno evidencia un pensamiento aditivo en transición al multiplicativo, es decir, resuelve con multiplicaciones y percibe parcialmente relaciones entre las variables.

Los alumnos del estudio piloto se encuentran en nivel de conceptualización matemática medio.

Entrevista ad-hoc

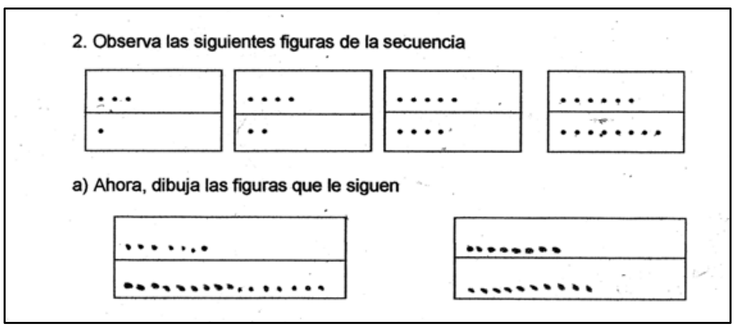
Por medio de la entrevista ad-hoc, se puede verificar que el alumno SJS puede percibir el patrón de la secuencia geométrica que se le presenta en la pregunta No. 2 del cuestionario inicial. Se observa que resuelve con sumas y multiplicaciones pero no puede dar una regla general. Lo que permite ver que se encuentra en un nivel de conceptualización medio.

A continuación se presenta un trecho de la entrevista realizada a SJS.

Trecho de protocolo

Pregunta No. 2

Alumno: SJS



Entrevistadora: (cuenta los puntos). ¿Y qué pasa con la secuencia de abajo?
SJS: lo mismo, le van sumando uno
Entrevistadora: Le van sumando uno, entonces si aquí es uno, aquí debe haber dos?, efectivamente
SJS: Y aquí le van sumando otro, porque aquí hay cuatro
Entrevistadora: Aquí hay cuatro ¿y acá?
SJS: le van sumando más
Entrevistadora: ¿Cuántos le suman? Si aquí había cuatro, acá ¿cuántos hay?
SJS: dos, cuatro, seis, ocho (cuenta)
Entrevistadora: Entonces qué observas que pasa ahí, primero es uno
SJS: luego dos
Entrevistadora: Luego
SJS: cuatro
Entrevistadora: ¿Y luego?
SJS: Ocho
Entrevistadora: ¿Qué va pasando?
Silencio
Entrevistadora: ¿Si le van agregando uno?

SJS: No, le van sumando…
Entrevistadora: ¿Cómo iba la secuencia? Al uno le sumaron ¿cuánto?
SJS: uno
Entrevistadora: ¿Al dos?
SJS: dos
Entrevistadora: Al cuatro
SJS: Cuatro
Entrevistadora: ¿Al ocho?
SJS: Ocho
Entrevistadora: Y fueron dieciséis, ¿al dieciséis?
(comienza a resolver la multiplicación 16x2)

Comentario: acorde con el trecho anterior se puede decir que el alumno se encuentra en un pensamiento aditivo en transición al multiplicativo, es decir puede ver el patrón pero no lo puede expresar aún como regla.

Consideraciones del estudio piloto del cuestionario inicial para el estudio principal

Se puede concluir que los resultados del estudio piloto del cuestionario inicial forman parte de los datos que justifican el estudio de esta tesis pues se detectó que los alumnos de primer grado de secundaria, aún a pesar de estar a punto de finalizar dicho ciclo, presentan deficiencias en la comprensión y manejo de contenidos que implican el manejo de expresiones algebraicas, no logran resolver completamente las preguntas que se les solicitan en el cuestionario. Así, se vuelve pertinente el trabajo con los procesos de generalización para acceder al álgebra.

Los estudiantes presentan dificultades en contenidos como el razonamiento proporcional (aritmético y geométrico) y la variación proporcional, el uso de la variable como número general, específico y en relación funcional; y en secuencias geométricas.

El cuestionario tiene un lenguaje adecuado para la comprensión de las solicitudes en cada pregunta y la organización de los temas parece ser la adecuada.

La pregunta número diez no será tomada en cuenta para los resultados, sin embargo, se dejará en la impresión final para indagar si algún alumno logra detectar el error.

Secuencia didáctica

Análisis de los datos

Niveles de logro

En la secuencia didáctica los dos alumnos del estudio piloto evidencian un nivel de logro medio, es decir, pueden detectar patrones, percibir la relación entre dos variables, sin poder expresarlo en forma simbólica, esto último lo hacen con ayuda de la investigadora.

Categoría de resolución de problemas

Las actividades de la secuencia didáctica piloto representaron dificultades cuando se abordaron temas como división de números decimales y la explicitación de la regla, sin embargo, los alumnos lograron ver patrones en secuencias geométricas, encontraron escalas que les permitían completar dibujos, observaron la proporcionalidad existente entre dos o más rectángulos pero sólo cuando se trataba de un factor de proporcionalidad entero. La categoría que prevalece es la pre-algebraica, donde los alumnos resuelven con operaciones como multiplicación y división y perciben patrones y hay indicios de reglas o fórmulas.

En la siguiente imagen se muestra que el alumno requiere del dibujo de las figuras para responder cuántos cuadros lleva la figura 5. No puede responder para la figura treinta. Los indicios de regla surgen durante la discusión con su compañero y la investigadora.

Pregunta No. 7

Alumno: SJS

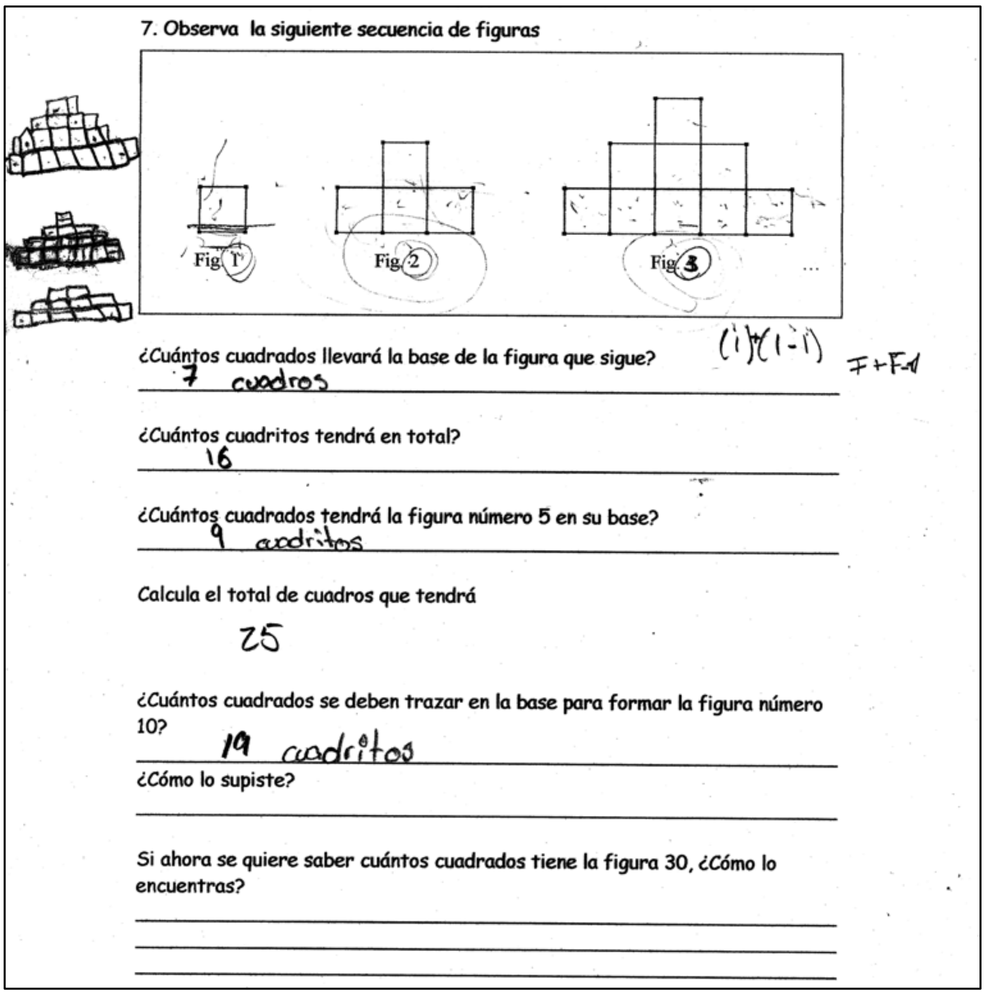

7. Observa la siguiente secuencia de figuras

Fig 1 Fig 2 Fig 3 ...

¿Cuántos cuadrados llevará la base de la figura que sigue? (1)+(1-1) F+F-1

7 cuadros

¿Cuántos cuadritos tendrá en total?

16

¿Cuántos cuadrados tendrá la figura número 5 en su base?

9 cuadritos

Calcula el total de cuadros que tendrá

25

¿Cuántos cuadrados se deben trazar en la base para formar la figura número 10?

19 cuadritos

¿Cómo lo supiste?

Si ahora se quiere saber cuántos cuadrados tiene la figura 30, ¿Cómo lo encuentras?

Como se puede apreciar en la imagen el alumno recurre a la representación gráfica para contar los cuadros de la base de las otras figuras. Como no puede relacionar la cantidad de cuadros con el número de figura, entonces, tampoco puede responder para la figura 30 debido a que el dibujo de la misma l resulta más complicado.

Interacción social en pareja

En el desarrollo de la secuencia no se logró que los estudiantes trabajaran en conjunto, lo que hacían era trabajar de manera individual y sí alguno tenía duda preguntaba y el otro le decía cómo hacerlo. Aunque la investigadora les invitaba a que lo hicieran de otra manera no se logró otro tipo de interacción.

Consideraciones de la secuencia didáctica piloto para secuencia didáctica del estudio principal

En la secuencia piloto las actividades no estaban organizadas de acuerdo al contenido matemático y al grado de dificultad, para la secuencia principal se decide organizarlas de acuerdo a esos referentes, iniciando con variación proporcional y se concluye con las actividades de variable como número general, número específico y en relación funcional. Se detectó que algunas actividades deben ser modificadas en forma y otras en contenido, algunas se retirarán de la misma. En la siguiente tabla se registra la actividad, los cambios y la justificación de las modificaciones.

Tabla No. 8 Cambios para la secuencia didáctica del estudio principal

Actividad	Contenido matemático	Solicitud de la pregunta	Cambios para la secuencia principal
1	Proporcionalidad aritmética	Que el alumno llene tablas y responda qué cantidad de ingredientes se necesitan para preparar hot cakes si aumenta la cantidad de personas	Aparece como actividad 6, después de actividades de proporcionalidad intuitiva y de escala debido a que presentó dificultades cuando se aumentaba la cantidad de hot cakes.

Tabla No. 8 Cambios para la secuencia didáctica del estudio principal (continuación)

Actividad	Contenido matemático	Solicitud de la pregunta	Cambios para la secuencia principal
2	Proporcionalidad aritmética Encontrar el valor de una razón Comparar razones	Que el alumno encuentre el valor de una razón derivada de la comparación entre cantidad de dulces y precio para que pueda calcular la ganancia que se obtiene al vender cierto tipo de dulces	Se elimina por la dificultad que causó el planteamiento.
3	Proporcionalidad geométrica Escala	Que el alumno aplique la escala 1:2 en el trazo de una casa a escala y explique cómo lo hizo.	Se queda como actividad 2.
4	Proporcionalidad geométrica Escala	Que el alumno termine un carro a escala, dada uno de sus elementos. Que descubra la escala 1:3 y explique.	Aparece como actividad 3.
5	Proporcionalidad geométrica Escala	Que el alumno aplique la escala 1:3 con un rompecabezas y explique cómo lo hizo. Debe llenar tablas para comprobar lo que hizo.	Se elimina por la saturación de actividades de escala y por ser la que se les complicó menos.
6	Secuencia geométrica Variable como número general	Que el alumno trace las figuras que siguen en las secuencias de figuras que se les presenten	Aparece como actividad 4, se separan los incisos por la dificultad para el trazado, se elimina uno y se agregan preguntas sobre la secuencia.
7	Secuencia geométrica Variable como número general	Que el alumno encuentre la figura que sigue, detecte el patrón, lo explique y lo traduzca en una fórmula. Comprobar la fórmula.	Pasa como actividad 8, antes de los números figurados que resultaron más complicados.
8	Variable como número específico	Encontrar el precio de dos aparatos, dado el gasto total y la relación entre los precios.	Aparece como actividad 12, después de las act. de variable como número general.

Tabla No. 8 Cambios para la secuencia didáctica del estudio principal (continuación)

Actividad	Contenido matemático	Solicitud de la pregunta	Cambios para la secuencia principal
9	Variable como número específico	Que el alumno encuentre un número dado el resultado de dos operaciones que se hacen con él.	Se retira. Se pone otra actividad, la número 13, con el mismo contenido pero que establece una relación 2:1 entre las cantidades.
10	Proporcionalidad intuitiva	Que el alumno observe un dibujo y seleccione imágenes que serían fotografías de él. Qué explique por qué eligió.	Pasa como actividad 1, debido a que resulta ser la menos complicada de proporcionalidad.
11	Proporcionalidad geométrica	Elegir de un grupo de rectángulos las parejas que sean proporcionales (se les dan las medidas) Explicar cómo formó las parejas. Llenar una tabla, explicar por qué son proporcionales.	Se coloca como penúltima actividad de variación proporcional por la dificultad de los alumnos del piloto para ver más relaciones entre las dimensiones
12	Números figurados Secuencia aritmética Secuencia geométrica	Trazar las dos figuras siguientes, dar la regla para calcular el total de puntos conociendo el número de puntos de la base, comprobarla.	Pasa como pregunta 9
13	Números figurados Secuencia aritmética Secuencia geométrica	Trazar las dos figuras siguientes, llenar una tabla, decir cómo calcular el total de puntos conociendo el número de figura, luego la base, dar la regla y comprobarla.	Pasa como actividad 11
14	Números figurados Secuencia aritmética Secuencia geométrica	Trazar las dos figuras siguientes, llenar tabla, calcular el número de puntos para la figura 10, para la 20, dar la regla para calcular el total de puntos, comprobarla.	Pasa como actividad 10 para que la siguiente actividad que se relaciona con su fórmula aparezca enseguida relación.

Tabla No. 8 Cambios para la secuencia didáctica del estudio principal (continuación)

Actividad	Contenido matemático	Solicitud de la pregunta	Cambios para la secuencia principal
15	Proporcionalidad geométrica Variable en relación funcional Valor de la razón Valor unitario	Completar tabla Número de copias/precio, explicar cómo lo hizo, explicitar la relación, dar el precio de otro número de copias, explicar cómo lo obtuvo, dar una regla que exprese la relación que encontró, comprobarla.	Pasa como actividad catorce, se cambia costo por precio debido a las implicaciones que tiene el concepto costo.

Cuestionario final

Análisis de los datos

Niveles de logro

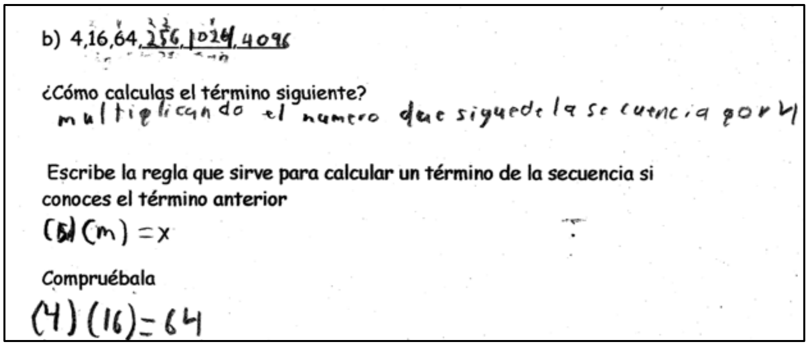
Los estudiantes mostraron un nivel de logro medio, es decir no pueden llegar a la tercera y cuarta etapas del trabajo con la generalidad propuesto por Mason et al. (op cit, 1985).

Categoría de resolución de problemas

La categoría que prevalece es la pre- algebraica, es decir, los alumnos siguen sin logra la simbolización de las reglas, escriben literales pero para sustituir palabras que describen las operaciones que hicieron.

Seguimiento de las categorías de resolución de problemas y de los niveles de conceptualización matemática

Los alumnos evidenciaron que no hay cambios ni en la categoría de resolución de problemas ni en su nivel de conceptualización matemática, es decir, permanecen en categoría pre-algebraica y en nivel medio, donde su pensamiento aditivo está en transición al multiplicativo, pueden resolver secuencias geométricas y percibir una variación proporcional pero no pueden expresarlo en una regla simbólica ni probarla. La siguiente imagen sirve para verificar lo dicho anteriormente.


b) 4,16,64,256,1024,4096

¿Cómo calculas el término siguiente?

multiplicando el numero que siguede la se cuencia por 4

Escribe la regla que sirve para calcular un término de la secuencia si conoces el término anterior

(5)(m) = x

Compruébala

(4)(16)=64

Como se puede apreciar en la imagen, el alumno JCT puede continuar con la secuencia numérica, percibe que debe multiplicar por 4, sin embargo, no puede expresar la regularidad de manera simbólica.

Consideraciones del cuestionario final piloto para el estudio principal

Para el cuestionario final del estudio principal se cambiaron las preguntas de variable como número específico, una porque resultó muy confusa para los estudiantes y la otra porque resultó muy sencilla para ellos. Se reorganizan las preguntas, se inicia con variable como número general, se continúa con proporcionalidad geométrica, se retoma variable como número general, luego en relación funcional, se presenta variable como número específico y al final nuevamente otra de variable en relación funcional. Se corrigen datos como Número de figura 4 por número de figura 3. Se reestructura un enunciado y se cambia 16000 por 20000.

Después de que los tres instrumentos se pilotearon, se realizaron los ajustes convenientes y se diseñaron los del estudio principal. En el siguiente capítulo se presentan los resultados de la primera etapa del estudio: *cuestionario inicial.*

CAPÍTULO V

RESULTADOS DEL CUESTIONARIO INICIAL DE PROCESOS DE GENERALIZACIÓN Y ENTREVISTA AD-HOC

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos en la primera etapa del estudio, (cuestionario inicial seguido de una entrevista ad-hoc). Inicialmente se presentan las ideas matemáticas tratadas en el cuestionario inicial. Enseguida, se describe la aplicación de dicho instrumento, se presentan las propuestas de análisis de los datos y se realiza la discusión de los resultados.

Descripción del cuestionario inicial de procesos de generalización

El cuestionario inicial está compuesto por diez preguntas que tienen como objetivo conocer sobre los antecedentes de los alumnos en los procesos de generalización.

A continuación se presenta la tabla de los contenidos matemáticos que forman parte del cuestionario inicial.

Tabla No. 9 Cuestionario inicial

Número de pregunta	Contenidos Algebraicos	Planteamiento de la pregunta
1	Secuencia aritmética creciente y decreciente	Se solicita al alumno completar secuencias aritméticas con números enteros.
2	Comparación del crecimiento de la secuencia aritmética $S_n = S_{n-1} + 1$ y la secuencia geométrica $G_n = 2\ G_{n-1}$.	Se pide al alumno completar secuencias aritméticas y geométricas

Tabla No. 9 Cuestionario inicial (continuación)

Número de pregunta	Contenidos Algebraicos	Planteamiento de la pregunta
3	Variación conjunta	Se pide al estudiante observar las tarjetas y completar la tabla con los valores que aparecen en casa tarjeta (relación funcional entre peso y edad) y se les pregunta ¿qué se puede decir entre el peso y los años de Jorge?
4	Relación funcional lineal y=2x+1, resolución de la ecuación 2x+1=b	Se pide al alumno comparar la cantidad de plástico producido y el número de máquinas. Encontrar relación entre ambos y dar la fórmula
5	Variación funcional exponencial $y_n=2^{x_n}$	Se pide al alumno observar 4 edificios que están siendo pintados y responder cuántos pisos deberían ser pintados en el 5º edificio.
5.1	Variación funcional exponencial $y_n=2^{x_n}$	Se solicita al alumno que exprese la relación funcional
5.2	Variación funcional exponencial $y_n=2^{x_n}$	Se pide al alumno completar una secuencia geométrica de edificios pintados y encontrar la relación entre el número de edificio y pisos pintados. También debe hacer una gráfica, explicitar la relación y generalizar una fórmula.
6	Variable como número específico. Plantear y resolver la ecuación x + x/2 = 1200	Se pide al alumno resolver un problema que implica el planteamiento de una ecuación donde existen dos cantidades cuya relación es 2:1.
7	Variable como número específico. Plantear y resolver la ecuación x + x/3 = 1200.	Se solicita al alumno resolver un problema con cantidades que guardan una relación 3:1

Tabla No. 9 Cuestionario inicial (continuación)

Número de pregunta	Contenidos Algebraicos	Planteamiento de la pregunta
8	Secuencia aritmética, relación cuadrática Las secuencias aritmética (b_n) base, (h_n) altura satisfacen $b_n = b_{n-1} + 2$, $n = 1,2,3,...$, de donde $b_n = 2n$; $h_n=h_{n-1} + 1$, $n = 1,2,3,...$, de donde $h_n = n+1$, eliminado n: $2 h_n = b_n+2$, de donde $a_n = b_n h_n = h_n(h_n-1) = (1/2) b_n(b_n + 2)$, siendo para toda n: $a = h (h-1) = (1/2)b(b+2)$	Se pide al alumno observar una serie de rectángulos y dibujar la quinta figura de la serie, completar una tabla y encontrar cuál es el patrón.
9	Variable como relación funcional. Y=80x	Se pide al alumno observar una tabla y encontrar la relación entre las variables, explicar cómo aumenta una variable, en función de la otra y después deben graficar.
10	Variable como número específico en sistemas de ecuaciones lineales 2x2. Problema con error en uno de los datos	El alumno debe detectar el error en el dato al intentar decir el total de boletos vendidos de cada precio, dados los precios de niño y de adulto y el total de la venta.

Aplicación del cuestionario inicial de procesos de generalización

El cuestionario se aplicó a 8 estudiantes de una escuela pública del Distrito Federal, tres de primer grado y cinco de segundo grado. Inicialmente se les entregó el instrumento, se leyeron las actividades que iban a resolver y se les comentó que si tenían dudas sobre la solicitud de las actividades podían preguntar para que se les aclararan. Enseguida se les dio un tiempo aproximado de dos horas para la resolución individual de las mismas. Durante la resolución no se les brindó ningún tipo de ayuda.

Resultados del cuestionario inicial

En este apartado se describen los resultados del cuestionario inicial, que consta de cuatro tipos de análisis: el primero consiste en un análisis de los niveles de logro de los estudiantes; el segundo se refiere a un análisis por categoría de resolución de problemas, el tercero consiste en el análisis de la entrevista ad-hoc y el último consiste en ubicar a los alumnos en niveles de conceptualización matemática. A continuación se presenta el análisis basado en los niveles de logro.

- **Niveles de logro**

Consistió en un análisis del nivel de logro que mostraron los alumnos en cada pregunta del cuestionario inicial. Se establecieron tres niveles de logro: bajo, medio y alto, que se describen a continuación.

Tabla No. 10 Niveles de logro

Nombre del nivel de logro	Caracterización de los niveles de logro
Nivel bajo	En este nivel se ubican los estudiantes que no perciben patrones ni la variación proporcional, debido a esto las respuestas son erróneas o con poca relación a la solicitud de las preguntas.
Nivel medio	En este nivel se ubican los estudiantes que perciben patrones y la variación parcial de las variables. Esuelven con adiciones y multiplicaciones. No expresan reglas. Por estas razones responden parcialmente al cuestionario
Nivel alto	En este nivel se ubican los alumnos que evidencian un claro pensamiento multiplicativo, es decir, pueden detectar patrones o regularidades, expresarlas simbólicamente y verificar sus elaboraciones. Logran responder la pregunta de acuerdo a la solicitud.

A continuación se presentan los resultados del nivel de logro de los estudiantes, en cada pregunta del cuestionario.

Tabla No.11 Resultados del análisis: niveles de logro (Cuestionario Inicial)

Número de pregunta	**Contenido algebraico**	**Solicitud**	**Alto**	**Medio**	**Bajo**
1	Secuencia aritmética creciente y decreciente	Completar la secuencia		2/8	6/8
2. a_1) a_2)	Comparación del crecimiento de la secuencia aritmética $S_n = S_{n-1} + 1$ y la secuencia geométrica $G_n= 2\ G_{n-1}$.	Completar las secuencias		4/8	4/8
3.	Variación conjunta	Llenar tabla y Explicar cómo cambian las variables		6/8	2/8
4.	Relación funcional lineal y=2x+1, resolución de la ecuación 2x+1=b	- Decir cuánto aumenta la producción si se ponen a funcionar más máquinas, cuántas máquinas se necesitan para producir una cantidad específica de plástico, dar una regla y comprobarla regla		3/8	5/8
5	Variación funcional exponencial $y_n=2^{x_n}$	- Decir cuántos pisos se deben pintar en el edificio 5, explicar cómo se obtuvo la respuesta anterior, llenar tabla, dar regla y comprobarla. Calcular para el sexto y noveno edificio. Explicar cómo se encuentra el No. de pisos pintados conociendo el No. de edificio. Explicar cómo se encuentra el No. de pisos de un edificio conociendo los del anterior. Graficar		5/8	3/8

Tabla No.11 Resultados del análisis: niveles de logro (Cuestionario inicial - continuación)

Número de pregunta	Contenido Algebraico	Solicitud	Alto	Medio	Bajo
6.	Variable como número específico. Plantear y resolver la ecuación x + x/2 = 1200	Resolver problema que implica una ecuación		1/8	7/8
7.	Variable como número específico. Plantear y resolver la ecuación x + x/3 = 1200.	Resolver problema que implica una ecuación		1/8	7/8
8.	Secuencia aritmética, relación cuadrática Las secuencias aritmética (bn) base, (hn) altura satisfacen bn = bn-1 + 2, n=1,2,3,..., de donde bn = 2n; hn=hn-1 + 1, n=1,2,3,... de donde hn = n+1, eliminado n: 2 hn = bn+2, de donde an = bn hn = hn(hn-1) = (1/2) bn(bn + 2), siendo para toda n: a = h (h-1) = (1/2)b(b+2)	- Dibujar la 5ª figura de la secuencia, Contar los cuadros que tiene la base y la altura , Contar el total de cuadros de las figuras 1 a la 5, Completar la tabla hasta el rectángulo 7, Decir cuántos cuadros tendría de base y de altura el rectángulo 7, Dar el número de cuadros en la base y en la altura de la figura 20, Explicar cómo se encuentra el área, teniendo la base, Cómo encontrar el área teniendo la altura, Dar regla para el área teniendo la base y la altura		3/8	5/8

Tabla No.11 Resultados del análisis: niveles de logro (Cuestionario inicial - continuación)

Número de pregunta	Contenido algebraico	Solicitud	Alto	Medio	Bajo
9.	Variable como relación funcional Y=80x	Explicar cómo aumenta una variable, en función de la otra, Graficar, Explicar cómo es la proporción de huevos por cada tortuga, Plantear regla		2/8	6/8
10.	Variable como número específico en sistemas de ecuaciones lineales 2x2. Problema con error en uno de los datos	Detectar el error en el planteamiento		1/8	7/8

Conforme a la tabla anterior se puede afirmar que ninguno de los estudiantes tiene un nivel de logro alto en el cuestionario inicial de procesos de generalización, es decir, pueden percibir patrones pero no expresarlos como regla general, llegar a una simbolización de la misma y comprobarla. Seis alumnos no pueden completar secuencias aritméticas decrecientes como las de los incisos c y d de la pregunta No. 1 porque no perciben el patrón, por ejemplo en el inciso "c" donde la secuencia que se les presenta es 15, 10, 5, el alumno DLG responde 15, 10. La mitad de los alumnos no puede continuar con una secuencia geométrica de puntos que cumple con la regla $G_n = 2\ G_{n-1}$. En la pregunta No. 4 donde se aborda una relación funcional lineal, se percibe que un total de cinco alumnos no pueden relacionar el cambio de la cantidad de kilogramos de plástico con el aumento en el número de máquinas, es decir, utilizan la información que se les presenta en una tabla para encontrar la relación entre la variable kilos de plástico y la variable número de máquinas. Debido a ello no pueden calcular para otro dato más y dar una fórmula que exprese la relación.

En las preguntas No. 6 y 7 donde se trabaja con la variable como número específico sólo un alumno puede dar solución al problema, aunque, sin plantear la ecuación (lo hace con sumas, multiplicaciones y divisiones).

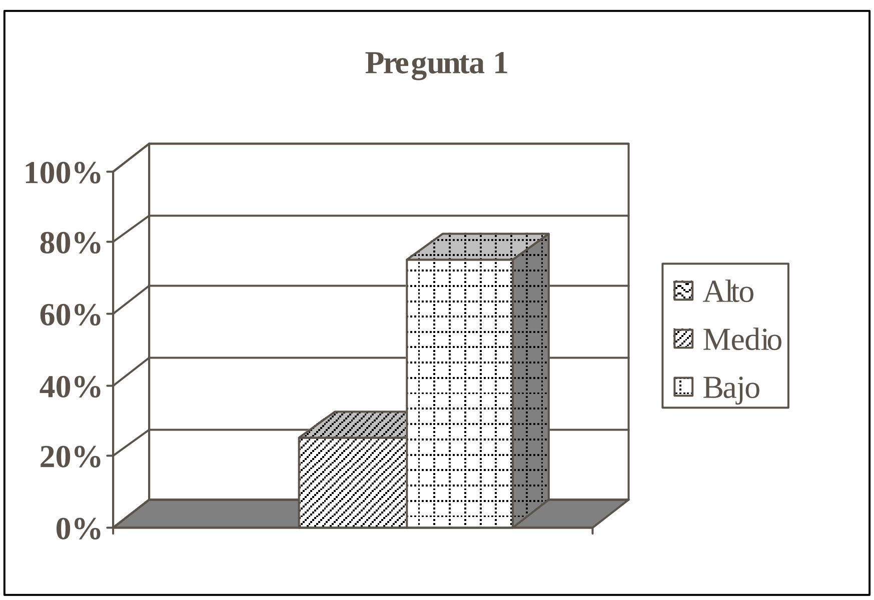
Para precisar el análisis de los niveles de logro se presentan a continuación las gráficas donde se muestra el porcentaje de alumnos que lograron niveles, medio y bajo en cada una de las preguntas del cuestionario inicial.

Pregunta No. 1

Idea Matemática: Secuencias aritméticas crecientes y decrecientes.

Solicitud de la pregunta: Completar secuencias aritméticas

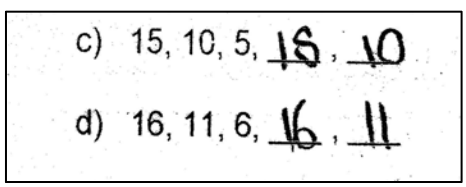
Gráfica No. 1



Completar secuencia aritmética creciente y decreciente

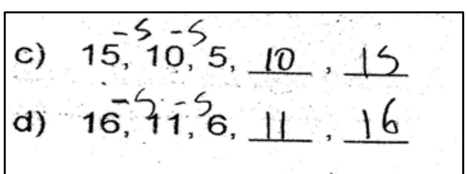
De acuerdo con la gráfica No. 1 se puede decir que el 75% de los alumnos puede completar secuencias aritméticas crecientes (pregunta 1, incisos a y b), sin embargo, las secuencias aritméticas decrecientes (pregunta 1, incisos c y d) no las pueden responder, sólo el 25% lo logra.

Lo anterior se puede relacionar con la dificultad para ver el patrón y con el desconocimiento o poco manejo de los números negativos. En el primer caso, algunos alumnos no detectan ni siquiera que los valores de la secuencia van disminuyendo por lo que responden con cantidades mayores al último número dado. En el segundo caso, los alumnos perciben que la secuencia decrece pero no continúan con el patrón. En otros casos, cuando llegan a cero responden cantidades que ya no concuerdan con la secuencia. Las siguientes imágenes ejemplifican estos hechos.

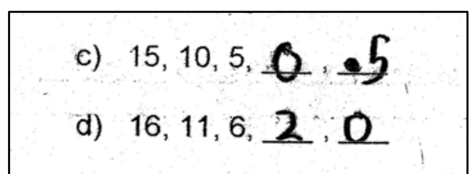

c) 15, 10, 5, 15, 10

d) 16, 11, 6, 16, 11

El alumno no detecta el patrón


c) 15, 10, 5, 10, 15

d) 16, 11, 6, 11, 16


c) 15, 10, 5, 0, 5

d) 16, 11, 6, 2, 0

El alumno parece detectar el patrón pero no lo aplica.

En el inciso c, el alumno observa que los valores decrecen pero al llegar a cero responde otro número que no corresponde a la secuencia

Pregunta No. 2

Idea Matemática: Secuencias geométricas y aritméticas

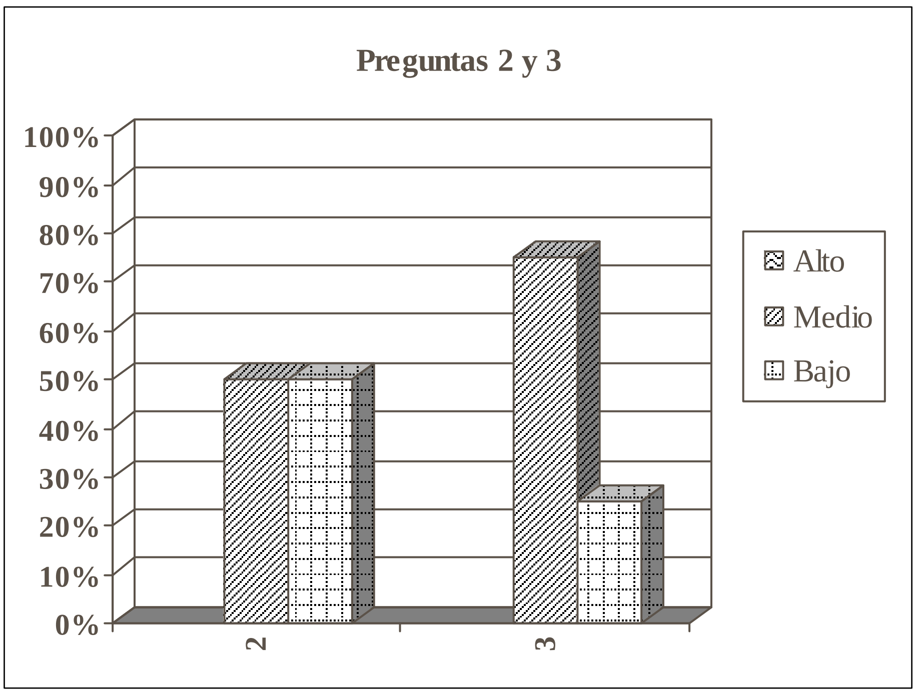
Solicitud de la pregunta: Completar secuencias aritméticas y geométricas

Pregunta No. 3

Idea Matemática: Variación

Solicitud de la pregunta: Expresar la relación peso-edad

Gráfica No. 2



2. Secuencia aritmética creciente y secuencia geométrica
3. Variación conjunta: organizar los datos en una tabla y explicar cómo varían

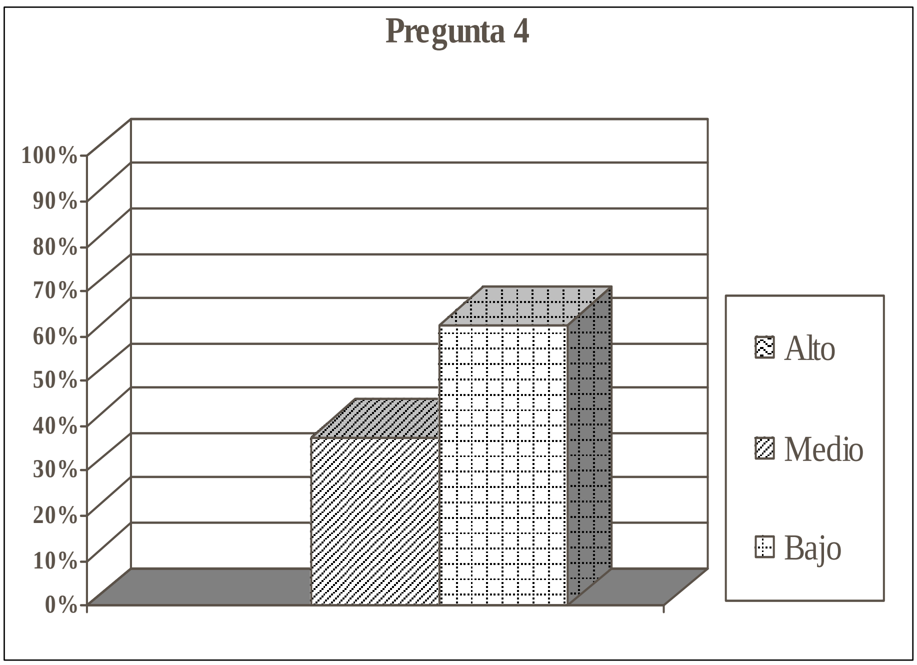
Como se observa en la gráfica anterior, en la pregunta No. 2, los estudiantes muestran dificultades para visualizar el patrón que sigue una secuencia, sobre todo, el de la geométrica. Estas dificultades pueden tener su origen en el pensamiento aditivo (sólo resuelven mediante adiciones o sustracciones) que predomina en ellos. Logran organizar los datos de las tarjetas en una tabla pero sólo expresan de manera cualitativa la variación. No observan la relación entre peso y edad, sólo responden con palabras como “aumenta” o “disminuye”.

Pregunta No. 4

Idea Matemática: Variable en relación funcional lineal

Solicitud de la pregunta: Encontrar la relación entre número de máquinas y kilogramos de plástico producido.

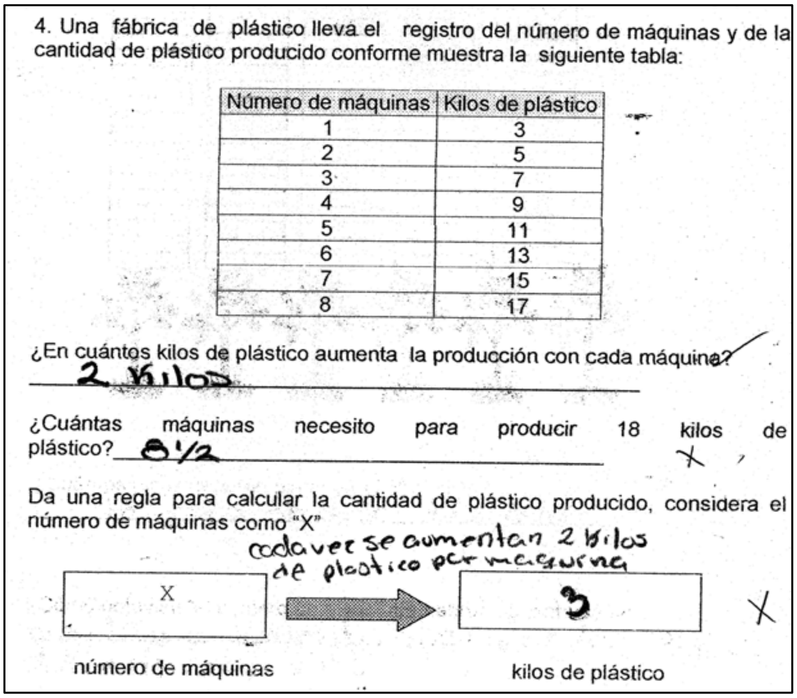
Gráfica No. 3



4. Expresar en cuánto aumenta el plástico con una máquina más, Cuántas máquinas se necesitan para producir 18kg, Plantear una regla que exprese la variación, Comprobar la regla

De acuerdo con la gráfica No. 3, sólo el 40% de los estudiantes pudo percibir la variación de la variable kilos de plástico y aplicar su percepción para un dato más. Ninguno de ellos pudo encontrar la relación Kilogramos-Número de máquinas. Aproximadamente el 60% sólo percibe cómo aumenta la variable Kilogramos de plástico.

A continuación se presenta una imagen que muestra un ejemplo de respuesta a esta pregunta.



4. Una fábrica de plástico lleva el registro del número de máquinas y de la cantidad de plástico producido conforme muestra la siguiente tabla:

Número de máquinas	Kilos de plástico
1	3
2	5
3	7
4	9
5	11
6	13
7	15
8	17

¿En cuántos kilos de plástico aumenta la producción con cada máquina?

2 kilos

¿Cuántas máquinas necesito para producir 18 kilos de plástico? 8½

Da una regla para calcular la cantidad de plástico producido, considera el número de máquinas como "X"

cada vez se aumentan 2 kilos de plastico por maquina

X → 3

número de máquinas — kilos de plástico

Se puede observar que el alumno sólo puede ver el cambio de manera vertical ("cada vez se aumentan dos kilos de plástico por máquina") pero no puede ver la relación entre las variables, es decir, no percibe que la cantidad de plástico cambia de acuerdo al aumento o disminución de la cantidad de máquinas, por lo tanto no hay regla simbólica que expresar.

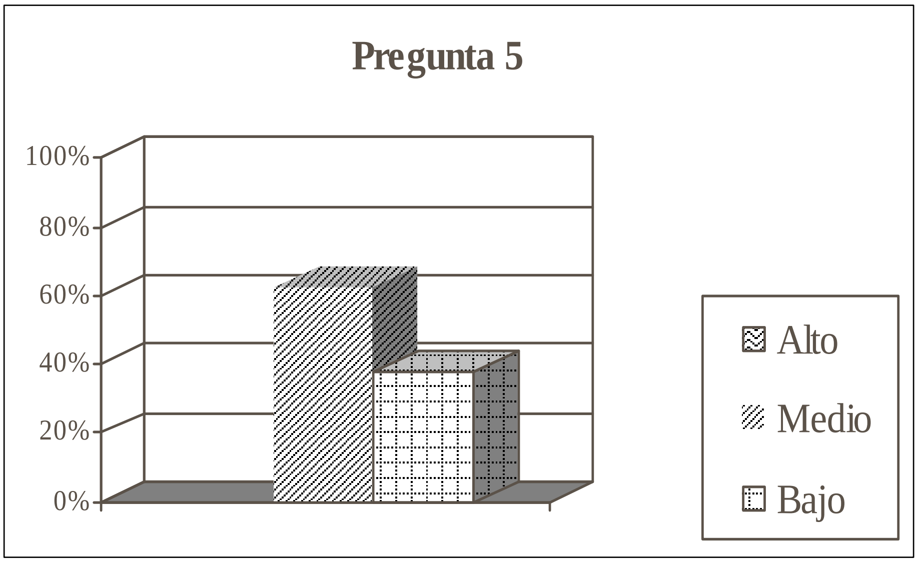
Cabe mencionar que los alumnos aún sin haber planteado una regla llenan la tabla de comprobación de la misma, pero sólo transcriben los datos de la tabla que se les da inicialmente. Este hecho muestra que si los alumnos no perciben una relación, no tienen nada que decir, por lo tanto no tienen nada qué comprobar, por ello sólo copian los valores, incluso con errores en la transcripción.

Pregunta No. 5

Idea Matemática: Función exponencial, secuencia geométrica.

Solicitud de la pregunta: Encontrar elementos de una secuencia de edificios pintados cuya regla es una función exponencial

Gráfica No.4



5.Cuántos pisos deberán pintarse en el edificio 5 Justificar la respuesta anterior Completar la tabla Dar una regla Comprobar la regla Cuántos pisos deberán pintarse en el edificio 6	Cuántos pisos deberán pintarse en el edificio 9 Encontrar el No. de pisos pintados de un edificio, si se conoce el No. de edificio Encontrar el No. de pisos pintados, conociendo el no. de pisos en edificio anterior. Graficar

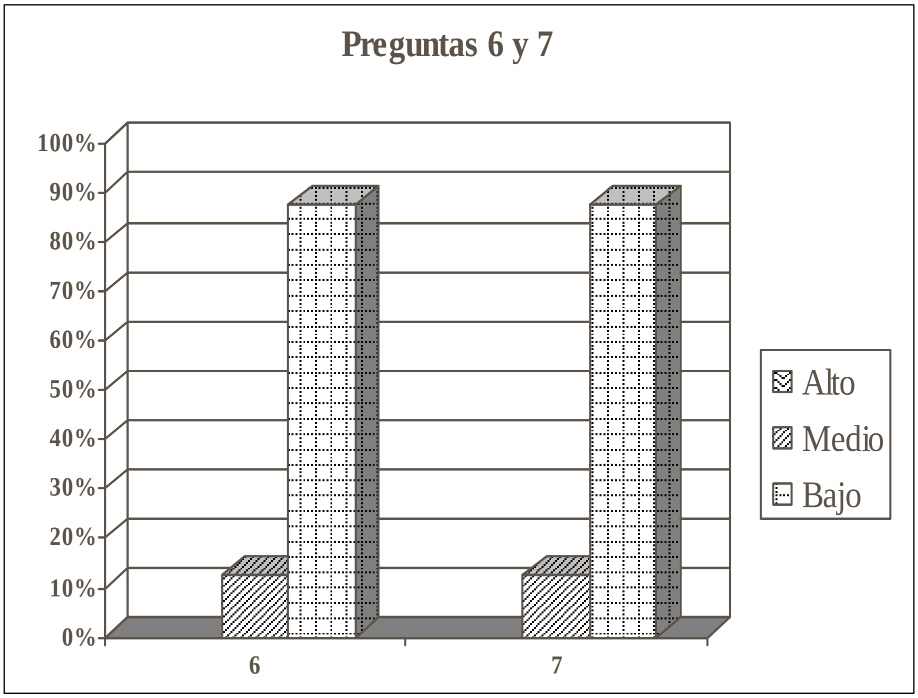
En la gráfica anterior se puede observar que aproximadamente el 60% de los alumnos logra percibir el patrón que rige la secuencia, considerando el número de pisos pintados en el edificio anterior, pueden aplicarlo para datos más alejados pero no pueden expresar una regla general con palabras o con símbolos. Casi el 40% de los estudiantes no puede percibir lo que sucede en la secuencia, hecho que no les permite completar la solicitud para otros datos ni plantear alguna regla.

Preguntas No. 6 y 7

Idea Matemática: Uso de la variable como número específico

Solicitud de las preguntas: Plantear y resolver una ecuación con cantidades que se relacionan 2:1 y 3:1

Gráfica No. 5



6 y 7. Resolver problema de variable como número específico

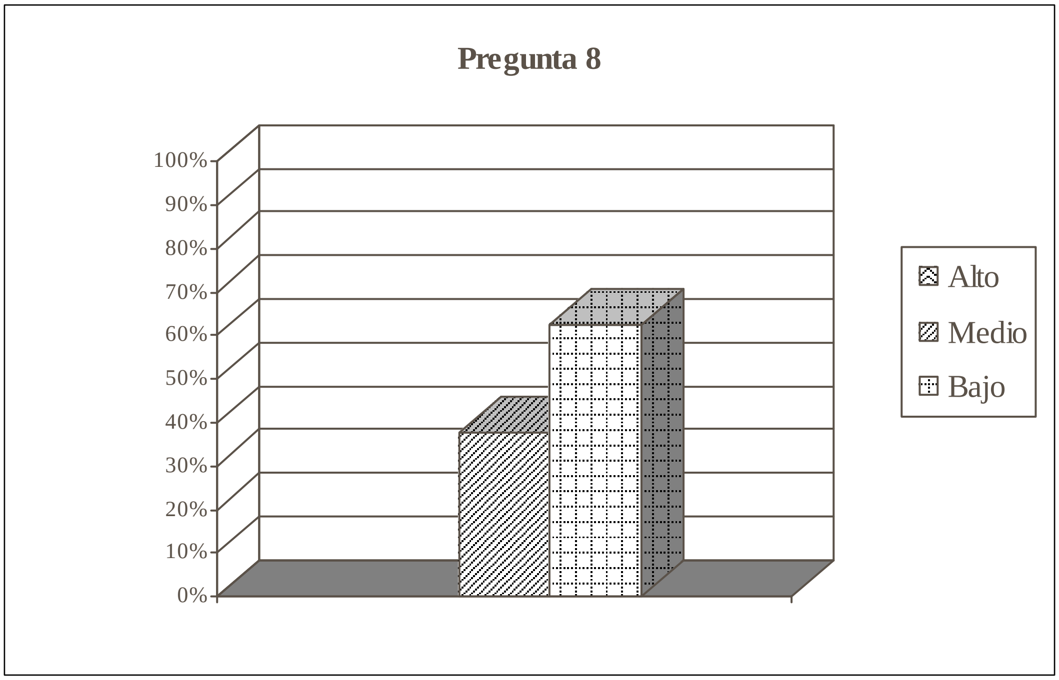
Acorde con la gráfica No. 5, aproximadamente el 90% de los alumnos no logra llegar a la solución de las preguntas No. 6 y 7. Sus intentos se centran en procedimientos generalmente aritméticos o de tanteo. No plantean alguna ecuación que les permita encontrar la solución. Ninguno muestra indicios del manejo de ecuaciones o de alguna expresión para resolver la situación que se les plantea.

Pregunta No. 8

Idea Matemática: Secuencia aritmética y relación cuadrática

Solicitud de la pregunta: Continuar una secuencia de rectángulos que van cambiando de dimensiones con base en una secuencia aritmética y explicitar una regla. Debe encontrar el patrón y la relación entre largo y ancho

Gráfica No. 6



8. Dibujar la quinta figura Decir cuántos cuadros lleva la base y la altura de la quinta figura Contar los cuadros de todas las figuras (área) Completar la tabla	Dar la base, la altura y el área de la figura 7 Base, altura y área de la figura 20 Dar una regla para el área conociendo la base Dar regla para el área conociendo la altura Dar regla para el área

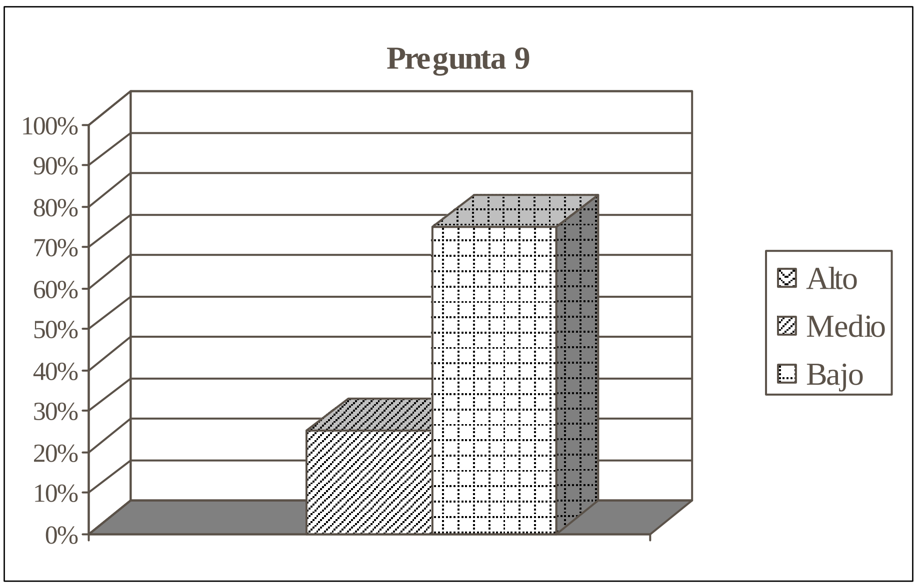
Acorde con la gráfica anterior, se puede decir que aproximadamente el 60% de los alumnos tienen problemas desde el primer paso para generalización propuesto por Mason et al. (op cit, 1985), es decir, con la percepción del patrón. Lo anterior justifica justifica la dificultad para expresar reglas, mismas que sólo son intentos en palabras y no con símbolos en casi el 40% de los casos. Cuando deben relacionar la posición de la figura con los cuadros de la base no lo logran, únicamente pueden responder si conocen los cuadros en la base de la figura anterior.

Pregunta No. 9

Idea Matemática: variable en relación funcional

Solicitud de la pregunta: Identificar cómo aumenta el número de tortugas en relación al número de huevos que ponen.

Gráfica No. 7



Cómo aumenta el número de tortugas según el número de huevos
Graficar
Decir la proporción huevos-tortugas
Regla para calcular la cantidad de huevos conociendo el número de tortugas

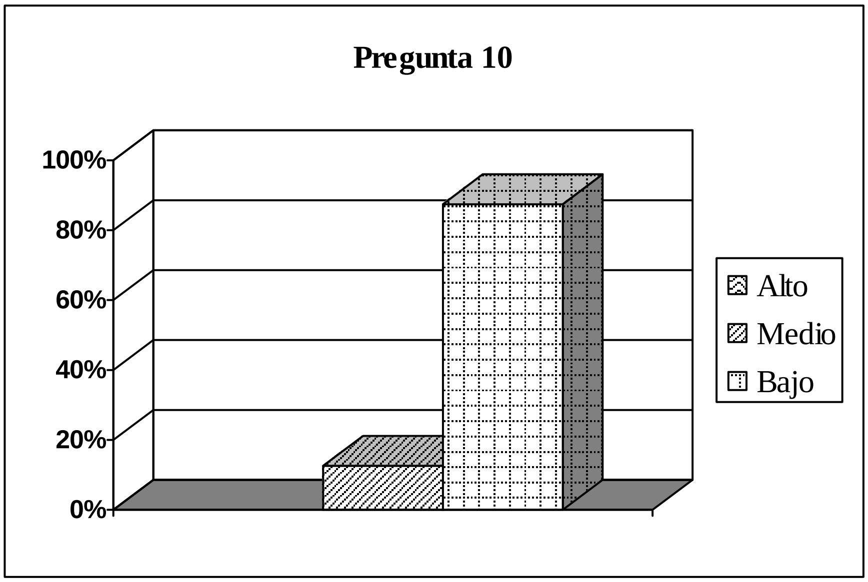
Conforme a la gráfica No. 7, se puede decir que el 75% de los alumnos no es capaz de explicar la relación entre dos variables y no usan la información de la tabla para encontrar la variación. Incluso un alumno al no percibir la proporción de huevos por tortuga lo que hace es responder “que no las maten”.

Pregunta No. 10

Idea matemática: Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Solicitud de la pregunta: Calcular el precio y la cantidad de boletos de teatro vendidos para niño y para adulto

Gráfica No.8



En esta pregunta se aborda el tema de ecuaciones simultáneas. Uno de los datos es incorrecto y al resolver el sistema de ecuaciones las soluciones son ilógicas. El alumno debe detectar ese error.

De los 8 alumnos del estudio sólo uno logró responder que el problema no era posible de resolver, después de que hace operaciones aritméticas.

Conclusiones del análisis de los niveles de logro

Los resultados de este análisis permiten detectar que los alumnos presentan deficiencias en el trabajo con los procesos de generalización, no llegan a la tercera y cuarta etapa que proponen Mason et al. (op cit, 1985). Aproximadamente el 40% de los alumnos del estudio puede ver patrones e intenta comunicarlo. El otro 60%

tiene dificultades desde la percepción del patrón. Específicamente, en los temas como variación proporcional, y el uso de la variable los alumnos muestran mayores deficiencias. El manejo de aspectos algebraicos no existe, los estudiantes resuelven con procedimientos basados principalmente en operaciones aritméticas y ninguno de ellos utiliza expresiones algebraicas.

- **Categoría de resolución de problemas**

En este segundo análisis se tomaron en cuenta los tipos de respuesta proporcionados por los alumnos, considerando básicamente las estrategias y la comprensión que tienen al resolver las preguntas.

Las dos categorías encontradas en el cuestionario inicial son: Aritmética y Pre-algebraica que se presentan a continuación.

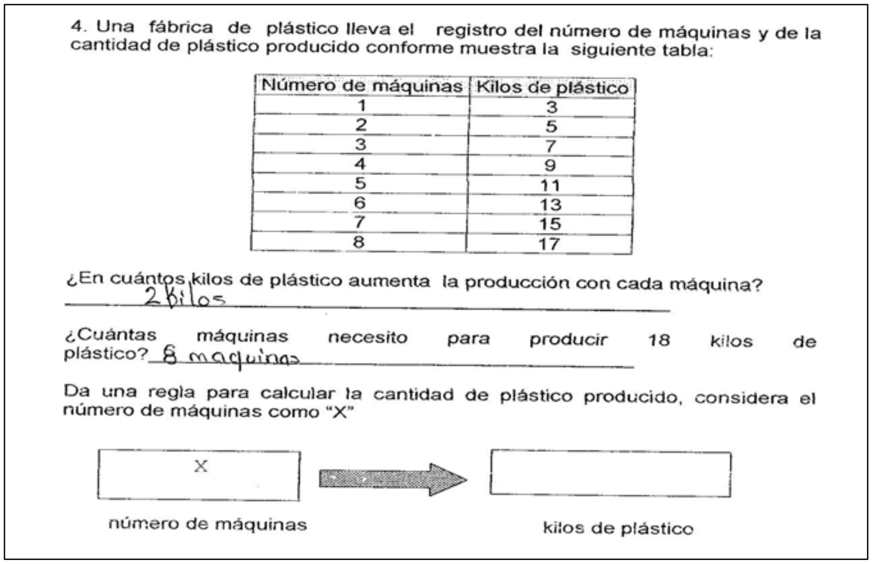
Tabla No.12 Caracterización de las categorías de resolución de problemas

Nombre de la categoría	Caracterización de la categoría
Aritmética	Se refiere a las respuestas que se caracterizan porque han sido resueltas mediante adiciones y sustracciones explícitas o mentales, o bien, a través de conteos. No detectan patrones geométricos. Perciben cambios de una variable pero no en relación con otra (sólo la ven verticalmente), no expresan reglas generales que las represente.
Pre-algebraica	Se refiere a las respuestas que se caracterizan por un razonamiento aditivo en transición al pensamiento multiplicativo, es decir, son capaces de ver una variación proporcional o percibir un patrón en una secuencia geométrica, pero no pueden expresarlo simbólicamente.

A continuación se presenta un ejemplo de respuesta que se ubica en la categoría Aritmética.

Ejemplo de respuesta: Categoría Aritmética

Pregunta No. 4. Relación funcional: número de máquinas-kilogramos de plástico



4. Una fábrica de plástico lleva el registro del número de máquinas y de la cantidad de plástico producido conforme muestra la siguiente tabla:

Número de máquinas	Kilos de plástico
1	3
2	5
3	7
4	9
5	11
6	13
7	15
8	17

¿En cuántos kilos de plástico aumenta la producción con cada máquina? 2 kilos

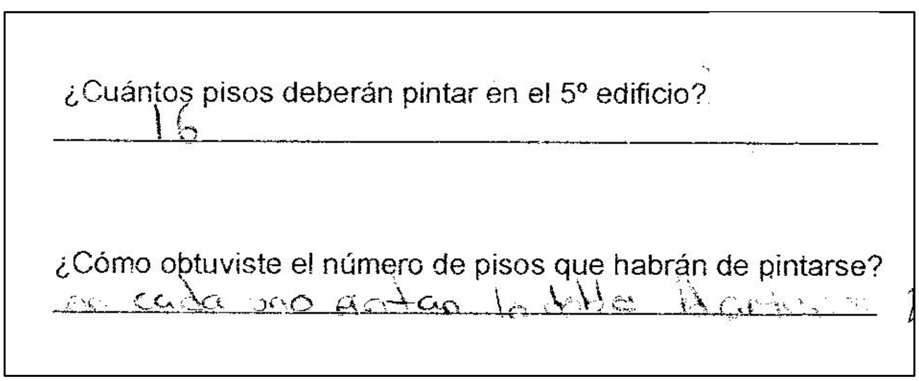
¿Cuántas máquinas necesito para producir 18 kilos de plástico? 8 máquinas

Da una regla para calcular la cantidad de plástico producido, considera el número de máquinas como "X"

En la imagen anterior se puede observar que el alumno logra percibir cómo aumenta la cantidad de plástico producido pero no es capaz de utilizar su percepción para un dato más. No puede plantear una regla que exprese la relación entre las variables porque no ha tomado en cuenta la lectura horizontal de la tabla (relación número de máquinas-kilos de plástico).

Ejemplo de respuesta: Categoría Pre-algebraica

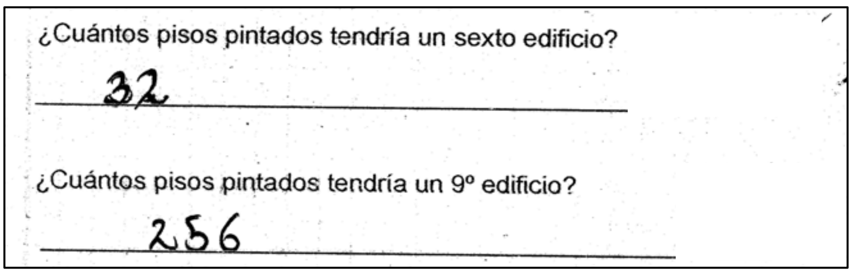
Pregunta No. 8: Secuencia aritmética y relación cuadrática



¿Cuántos pisos deberán pintar en el 5º edificio? 16

¿Cómo obtuviste el número de pisos que habrán de pintarse? en cada uno aumentan la [illegible]

Acorde con la imagen anterior se observa el alumno percibe cuántos pisos se deben pintar en el siguiente edificio y explica que “en cada uno pintan lo doble del anterior”, se puede decir que observa el patrón de la secuencia de pisos pintados, conforme al número de pisos pintados en el edificio anterior, la expresa en palabras y esta percepción la puede extender para datos más alejados, como lo muestran las siguientes imágenes.

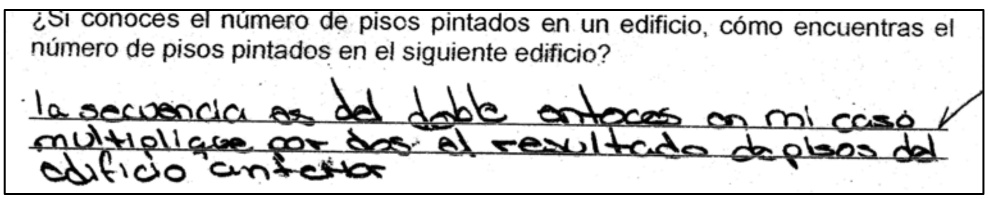


¿Cuántos pisos pintados tendría un sexto edificio?

32

¿Cuántos pisos pintados tendría un 9º edificio?

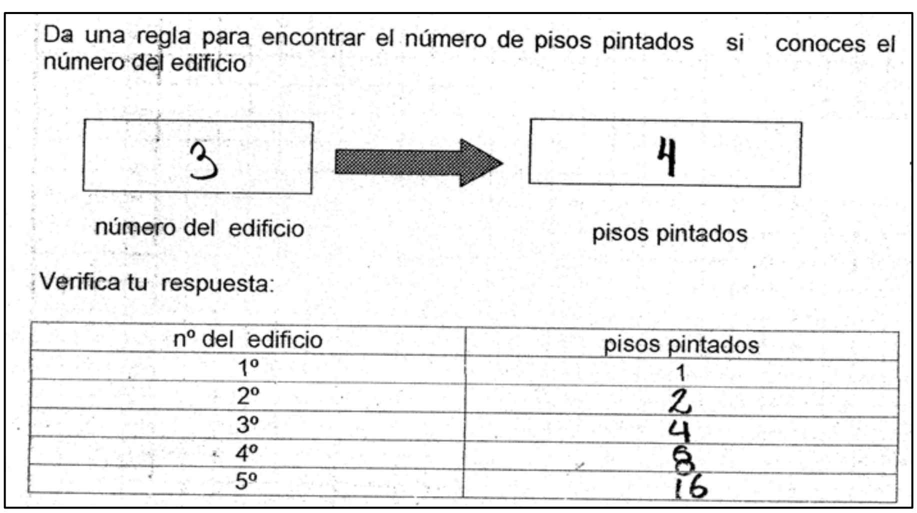
256



¿Si conoces el número de pisos pintados en un edificio, cómo encuentras el número de pisos pintados en el siguiente edificio?

la secuencia es del doble entoces en mi caso multiplique por dos el resultado de pisos del edificio anterior

Sin embargo, el alumno sólo percibe el patrón si toma como referencia el número de pisos pintados en el edificio anterior y cuando se le pregunta cómo hacer el cálculo si conoce solamente el número de edificio no logra dar una regla.



Da una regla para encontrar el número de pisos pintados si conoces el número del edificio

Verifica tu respuesta:

nº del edificio	pisos pintados
1º	1
2º	2
3º	4
4º	8
5º	16

Es importante notar que la comprobación es sólo la copia de los datos de la tabla anterior pues no hay indicios de regla.

- **Entrevista ad-hoc**

Descripción

Este tipo de entrevista tiene como objetivo profundizar en las ideas de los alumnos en los temas de generalización e identificar de qué manera los estudiantes desarrollan las preguntas propuestas en el cuestionario inicial. Se realizó un guión general para la entrevista que básicamente consistió en cuestionamientos referentes al cómo, con qué y por qué lo hiciste así, con base en las respuestas que ellos asentaron en su cuestionario inicial se ajustó para que especificaran sus estrategias de solución.

Aplicación

La entrevista se llevó a cabo de manera individual, después de que se solicitó autorización al alumno y a las autoridades de la escuela. Se realizó en un salón de clases y fue video-grabada. Tuvo una duración de aproximadamente una hora con treinta minutos.

Resultados

Después de realizar las entrevistas se encontró que los alumnos pueden resolver las secuencias aritméticas y las dificultades surgen en las secuencias decrecientes donde se requiere del uso de los números negativos, que ellos no manejan. Durante la entrevista algunos alumnos que no habían logrado resolver las secuencias geométricas pudieron percibir el patrón y continuar con la secuencia. En los dos tipos de secuencias no pudieron expresar reglas generales simbólcas, hecho que muestra que el uso de las literales no tiene significado para ellos porque no han tenido la oportunidad de elaborar sus propias expresiones algebraicas. Durante la entrevista no pudieron explicar la variación conjunta entre las variables, generalmente percibían sólo el cambio de una. A continuación se presenta un trecho de protocolo de la entrevista ad-hoc realizada a un estudiante donde pone en evidencia estos hechos, es decir, percibe la variación de la variable kilos de plástico sin relacionarla con el número de máquinas, pero no puede calcular para datos más alejados y expresar una regla.

Trecho de protocolo Alumno EFH
Pregunta No. 4

Entrevistadora: ¿En cuántos kilos de plástico aumenta la producción con cada máquina?
EFH: Dos kilogramos
…
Entrevistadora: Y ¿cómo le haría para saberlo? Haz de cuenta que a mi, mi jefe el dueño de la fábrica me pregunta ¿cómo le puedo decir cuánto producen 50 máquinas, 25 máquinas? Me dice ¿cómo puedo calcular el número de kilos de plástico que producen 25 máquinas? Silencio
Entrevistadora: ¿Cómo le podría hacer?
EFH: seguir la misma secuencia así, bueno, hacer una misma tabla, aumentar así, poner número de máquinas, número de kilos de plástico, pongo, voy aumentando los veinticinco números y voy aumentando así, dos en cada uno
Entrevistadora: ¿Voy agregando dos?
EFH: aja
Entrevistadora: Y si mi jefe me dice, oye pero no quiero la tabla, …Silencio…
Entrevistadora: Para poderle dar yo al jefe una regla sin que él tenga que hacer la lista de todos los números de máquinas
Silencio
EFH: pues así mismo yo lo podría hacer mentalmente más o menos
Entrevistadora: Y mentalmente qué tendría que hacer
EFH: seguir haciendo el…bueno seguir haciendo lo mismo… pero con…Es que así no lo entiendo
Entrevistadora: ¿No?
EFH: No
Entrevistadora: ¿se te ocurre ahorita una forma? ¿Sin hacer toda la lista poder calcular los kilos de plástico?
EFH: No

Comentario al trecho de protocolo: El alumno mostró en la respuesta inicial percibir cómo cambiaba la producción de plástico, es decir, logró identificar que existe una variación pero no la puede ver de manera funcional. Esto es, sólo observa la variación de los kilogramos de plástico sin observar la relación que ésta tiene con el aumento o disminución del número de máquinas. La entrevistadora trató de encaminarlo al cálculo para datos más alejados y él dice que lo haría siguiendo la tabla, la dificultad para ver que la relación de máquinas con plástico es 2x-1 hace que no pueda expresar una regla general ni con palabras ni con símbolos. Este hecho confirma que el alumno debe tener algo que decir para después expresarlo de forma escrita. Si el alumno no ve ninguna relación, no tiene nada que expresar.

- **Niveles de conceptualización matemática**

Después de los análisis anteriores se ubicó a los alumnos en dos niveles de conceptualización matemática denominados: nivel de conceptualización matemática bajo y nivel de conceptualización matemática medio.

A continuación se describen los dos niveles y se presenta un ejemplo de respuestas de los alumnos pertenecientes a cada nivel de conceptualización.

Tabla No. 13 Niveles de conceptualización matemática

Nivel conceptual	**Caracterización**
Medio	Los alumnos evidencian un pensamiento aditivo en transición al multiplicativo, resuelven las secuencias aritméticas y en ocasiones las geométricas, no llegan a una expresión general simbólica.
Bajo	Los alumnos evidencian un pensamiento aditivo. Resuelven secuencias aritméticas pero no geométricas. No grafican y no resuelven problemas de variable como número específico, no ven la relación entre dos variables en forma horizontal (una en relación con la otra). No expresan reglas generales.

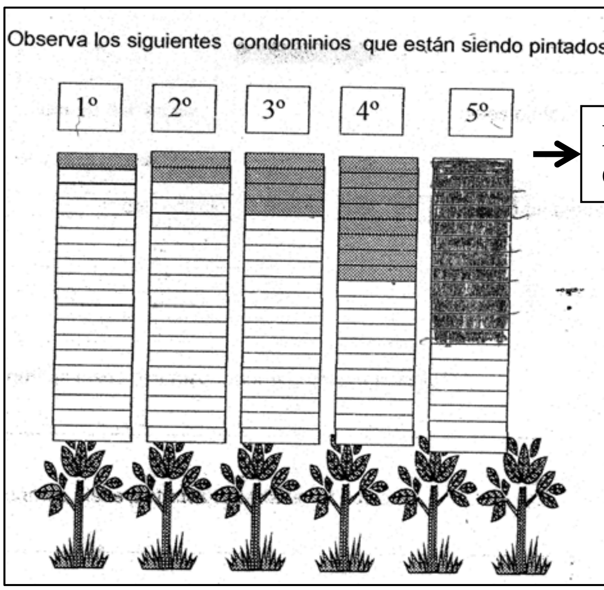
Ejemplo de Nivel de conceptualización matemática bajo

Como se describe en la tabla anterior, en este nivel, por ejemplo, los alumnos no logran percibir el patrón que rige a las secuencias geométricas, tienen dificultades para aplicar el patrón para elementos más alejados de las secuencias aritméticas, no logran establecer una regla general ni verbal ni simbólicamente. Las siguientes imágenes muestran estas dificultades con el alumno ALC.

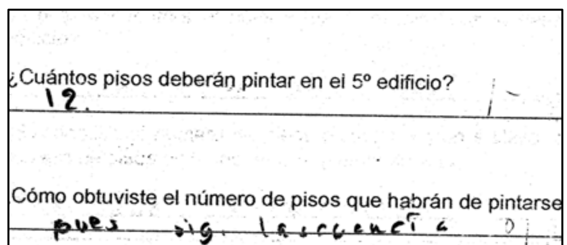
Pregunta No. 5

Idea Matemática: Función exponencial, secuencia geométrica.

Solicitud de la pregunta: Seguir una secuencia de edificios pintados cuya regla es una función exponencial

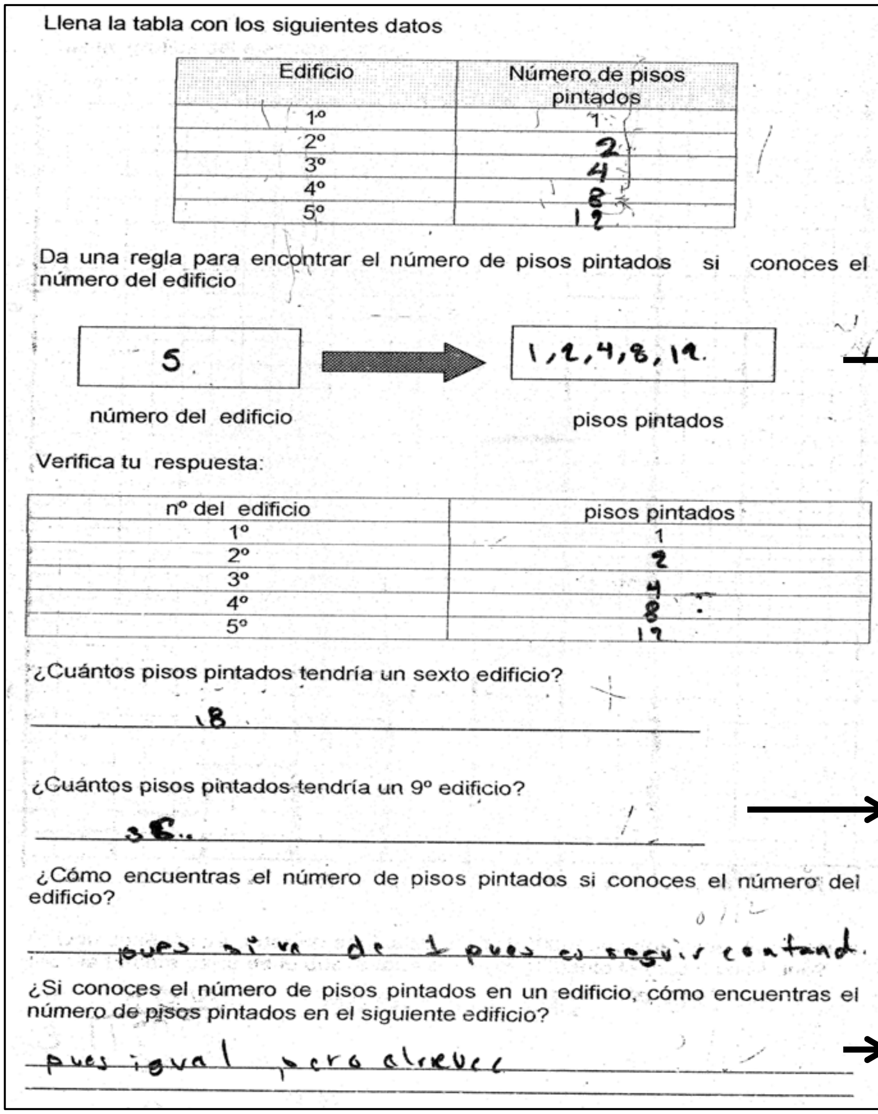


El alumno pinta 12 pisos (en lugar de 16) en el edificio 5, no percibe el patrón.



Al responder cómo supo que eran 12 sólo responde “pues sigo la secuencia”

Como se observa, el alumno no percibe el patrón que sigue la secuencia de pisos pintados en cada edificio, ni tomando en cuenta el edificio anterior, ni el número de edificio. Esta dificultad para ver el patrón obstaculiza en consecuencia las siguientes etapas del trabajo con la generalidad: comunicarlo, expresarlo simbólicamente y comprobarlo (Mason et al., 1985). La siguiente imagen muestra que la alumna al no percibir una regularidad, no tiene qué expresar simbólicamente y comprobar.


Llena la tabla con los siguientes datos

Edificio	Número de pisos pintados
1º	1
2º	2
3º	4
4º	8
5º	12

Da una regla para encontrar el número de pisos pintados si conoces el número del edificio

5 → 1,2,4,8,12.

número del edificio — pisos pintados

Verifica tu respuesta:

nº del edificio	pisos pintados
1º	1
2º	2
3º	4
4º	8
5º	12

¿Cuántos pisos pintados tendría un sexto edificio?

18.

¿Cuántos pisos pintados tendría un 9º edificio?

36.

¿Cómo encuentras el número de pisos pintados si conoces el número del edificio?

pues si va de 1 pues es seguir contand.

¿Si conoces el número de pisos pintados en un edificio, cómo encuentras el número de pisos pintados en el siguiente edificio?

pues igual pero alreves

No hay evidencia de una regla general, ni pre-simbólica, ni simbólica

Por ello tampoco puede aplicarlo para datos más alejados en la secuencia

Las respuestas del alumno evidencian nuevamente que no percibe lo que sucede.

La imagen anterior permite ver que si la percepción del patrón no se manifiesta, ello llevará al alumno a no poder trabajar con datos más alejados y con la expresión de una regla general, de ahí la importancia de proponer actividades que abordan el desarrollo de secuencias aritméticas y geométricas donde el alumno tenga la oportunidad de ver “cosas” y expresarlas, comprobarlas y reorganizar la información si es necesario.

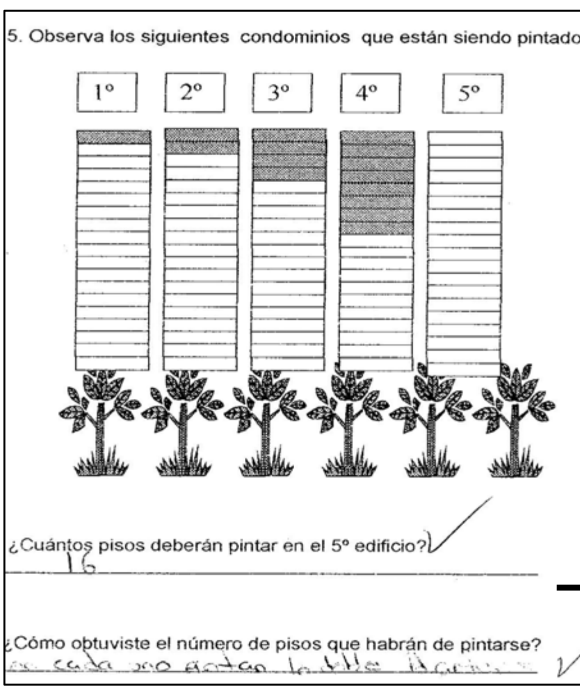
Ejemplo de Nivel de conceptualización matemática medio

Como se menciona en la tabla No. 13 en este nivel de conceptualización matemática los alumnos pueden resolver secuencias aritméticas y geométricas, perciben el patrón y pueden extenderlo para datos más alejados. No lo pueden traducir en una regla simbólica. Las siguientes imágenes presentan las respuestas del alumno YBR que evidencia un nivel de conceptualización medio.

Pregunta No. 5

Idea Matemática: Función exponencial, secuencia geométrica.

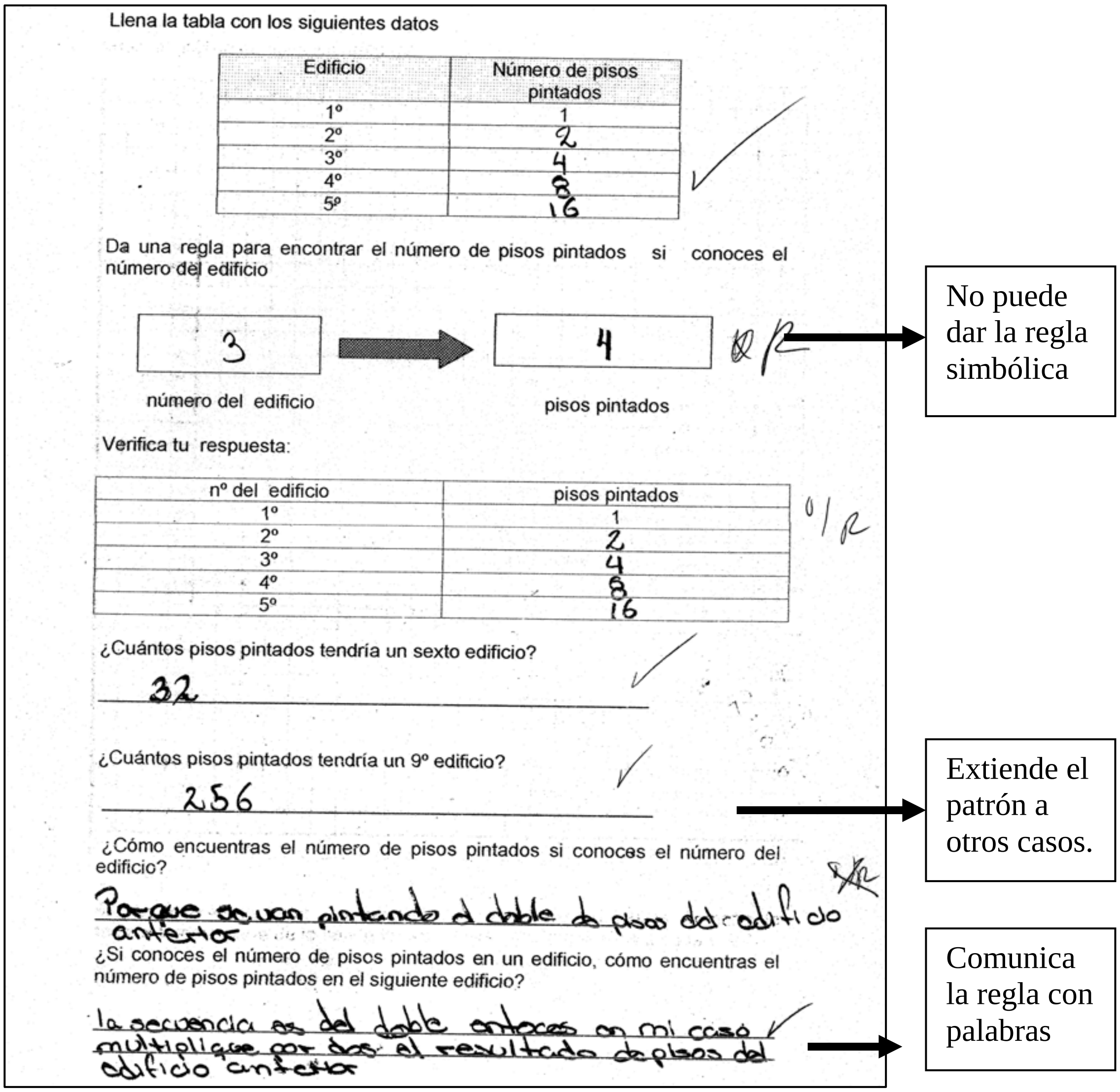
Solicitud: Seguir una secuencia de edificios pintados cuya regla es una función exponencial



Detecta el patrón respecto al número de pisos pintados en el edificio anterior: “a cada uno pintan lo doble del anterior”

De acuerdo con la imagen el alumno ha detectado el patrón de la secuencia geométrica.

En la siguiente imagen se muestra que YBR también extiende el patrón a otros casos.


Llena la tabla con los siguientes datos

Edificio	Número de pisos pintados
1º	1
2º	2
3º	4
4º	8
5º	16

Da una regla para encontrar el número de pisos pintados si conoces el número del edificio

3 → 4

número del edificio — pisos pintados

Verifica tu respuesta:

nº del edificio	pisos pintados
1º	1
2º	2
3º	4
4º	8
5º	16

¿Cuántos pisos pintados tendría un sexto edificio?

32

¿Cuántos pisos pintados tendría un 9º edificio?

256

¿Cómo encuentras el número de pisos pintados si conoces el número del edificio?

Porque se van pintando el doble de pisos del edificio anterior

¿Si conoces el número de pisos pintados en un edificio, cómo encuentras el número de pisos pintados en el siguiente edificio?

la secuencia es del doble entonces en mi caso multiplique por dos el resultado de pisos del edificio anterior

En la imagen anterior también se puede observar que el alumno puede expresar el patrón que encontró en lenguaje común pero no lo puede traducir a una expresión simbólica. Precisamente, a diferencia de los estudiantes que son de nivel de conceptualización matemática bajo, los estudiantes de este nivel, pueden expresar una regla con palabras.

Después de dar a conocer ejemplos de respuestas de cada uno de los niveles encontrados en esta etapa del estudio, a continuación se muestra la organización de los alumnos por niveles de conceptualización matemática.

Tabla No. 14 Niveles de conceptualización matemática

Alumnos	Nivel conceptual	Comentario
DLG, ALC, EFH	Bajo	Los alumnos pueden resolver secuencias aritméticas pero no geométricas. No ven la relación entre dos variables (una en relación con la otra), en ocasiones perciben el cambio de una variable pero de forma aislada. No grafican y no resuelven problemas de variable como número específico. No plantean reglas ni las comprueban
LAV, CED, CCB, CHLR, YBR	Medio	Los alumnos pueden resolver las secuencias aritméticas y en ocasiones las geométricas, perciben el cambio de una variable en forma vertical y lo pueden aplicar para datos más alejados pero no pueden dar una expresión general.

Como se observa en la tabla anterior cinco alumnos del estudio se encuentran en un nivel de conceptualización matemática medio, lo que quiere decir que se encuentran en la transición del pensamiento aditivo al multiplicativo. Estos alumnos cubren las primeras dos etapas del trabajo de la generalidad que sugieren Mason et al. (op cit, 1985): percibir un patrón y comunicarlo, pero no llegan a la forma simbólica ni a la prueba de la fórmula. Por ejemplo, las secuencias aritméticas son resueltas con éxito y sólo en casos donde las secuencias aritméticas son decrecientes y requieren del uso de los números negativos se les dificulta resolverlas. Pueden percibir un patrón en secuencias geométricas y extender su razonamiento para otros datos, aunque no logran expresar una regla general. En el nivel de conceptualización matemática bajo se encuentran tres alumnos, que evidencian dificultades desde la primera etapa del trabajo de la generalidad propuesto por Mason et al. (op cit, 1985), percibir un patrón. Evidentemente no llegan a las otras tres etapas.

En el siguiente capítulo se presentan los resultados de la segunda etapa del estudio principal: la secuencia didáctica, se describe en qué consiste, su aplicación y las conclusiones de la misma.

CAPÍTULO VI

RESULTADOS DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

En este capítulo se presentan los resultados de la segunda etapa del estudio: *Secuencia didáctica*. Inicialmente se hace una descripción del diseño de la secuencia didáctica, seguida de una descripción de la aplicación de la misma con el grupo de estudiantes participantes en el estudio. Finalmente se exponen los resultados de la observación de esta aplicación y el análisis de los datos.

Diseño de la secuencia didáctica

El diseño de la secuencia didáctica tuvo como antecedentes dos vertientes:

- Investigación documental sobre los procesos de generalización.
- Diseño y resultados obtenidos en la primera etapa del estudio: *cuestionario inicial* y entrevista ad-hoc y el estudio piloto.

Esta parte de la tesis se refiere a los procesos de generalización desarrollados en la secuencia didáctica y tuvo como objetivo principal trabajar algunos contenidos de razonamiento proporcional, variación proporcional y la variable en sus tres usos (como número específico, como número general, y como relación funcional), hacia la expresión de la generalidad. Inicia con actividades que abordan temas de razonamiento proporcional y termina con actividades que retoman la variable en relación funcional.

En la siguiente tabla se presentan las actividades que conforman a la secuencia didáctica y se describen sus contenidos matemáticos.

Tabla No. 15 Descripción de la secuencia didáctica

Actividad	Contenido matemático	Solicitud de la pregunta
1	Proporcionalidad intuitiva. Reconocer figuras en la misma proporción a partir de la percepción de la imagen.	Se pide al alumno observe un dibujo y seleccione imágenes que serían fotografías de él. Qué explique por qué las eligió.
2	Proporcionalidad geométrica Escala Proporción 2:1	Se solicita al alumno aplique la escala 2:1en el trazo de una casa a escala y explique cómo lo hizo.
3	Proporcionalidad geométrica Escala Proporción 3:1	Se solicita al alumno que descubra la escala 3:1, que termine un carro a escala y explique cómo lo hizo.
4	Secuencia geométrica Proporción 1:2 y 1:3	Se pide al alumno que trace las figuras que siguen en las secuencias de figuras que se les presenten.
5	Proporcionalidad geométrica Proporción entre varias cantidades a:b:c:d: ... :: 3a: 3b: 3c: 3d: ...	Se solicita al alumno que elija de un grupo de rectángulos las parejas que sean proporcionales (se les dan las medidas). Explicar cómo formó las parejas. Llenar una tabla, explicar por qué son proporcionales.
6	Variación proporcional Relación lineal: y = 2x, y = 3x, y = 4x, y = 5x, y = 6x	Se pide al alumno llene tablas y responda qué cantidad de ingredientes se necesitan para preparar hot cakes si aumenta la cantidad de personas
7	Secuencia aritmética creciente y decreciente. $x_{n+1}=x_n+1$ y $x_{n+1}=x_n-1$	Se solicita al alumno encontrar el patrón que siguen las casillas de las fichas de dominó para elegir la que sigue en la secuencia.
8	Secuencia aritmética $x_{n+1}=x_n+2$ Secuencia geométrica $t_n=n^2$	Se pide al alumno que encuentre la figura que sigue, detecte el patrón, lo explique y lo traduzca en una fórmula. Comprobar la fórmula.
9	Números figurados Secuencia aritmética Secuencia geométrica Relación cuadrática con variable discreta $A = n^2$	Se pide al alumno trazar los dos cuadrados siguientes, llenar una tabla, decir cómo calcular el total de puntos conociendo el número de figura, dar la regla y comprobarla.
10	Números figurados Secuencia aritmética Secuencia geométrica Relación cuadrática con variable discreta $A = n(n+1)$	Se solicita al alumno trazar los dos rectángulos siguientes, dar la regla para calcular el total de puntos conociendo el número de puntos de la base, comprobarla.

Tabla No. 15 Descripción de la secuencia didáctica (Continuación)

Actividad	Contenido Matemático	Solicitud de la pregunta
11	Números figurados Secuencia aritmética Secuencia geométrica Relación cuadrática con variable discreta $A=\frac{n(n+1)}{2}$	Se pide al alumno dibujar los dos triángulos siguientes, llenar tabla, calcular el número de puntos para la figura 10, para la 20, dar la regla para calcular el total de puntos, comprobarla.
12	Variable como número específico Plantear y resolver la ecuación x+2x=4500	Se solicita al alumno encontrar el precio de dos aparatos, dado el gasto total y la relación entre los precios.
13	Variable como número específico Plantear y resolver la ecuación x+2x=15000	Se pide al alumno encuentre un número dado el resultado de dos operaciones que se hacen con él.
14	Proporcionalidad geométrica Valor de la razón Valor unitario Relación funcional y=0.20x	Se pide al alumno completar la tabla Número de copias/precio, explicar cómo lo hizo, explicitar la relación, dar el precio de otro número de copias, explicar cómo lo obtuvo, dar una regla que exprese la relación que encontró, comprobarla.

Organización de los alumnos para la secuencia didáctica de procesos de generalización

La organización de los estudiantes en la secuencia didáctica fue en parejas que se formaron de acuerdo a los niveles de conceptualización matemática detectados en el cuestionario inicial y la entrevista ad-hoc. De acuerdo con ello, las parejas quedaron conformadas por un alumno de nivel medio y uno de nivel bajo, o bien, los dos de nivel medio. Después de la primera sesión se tuvieron que hacer cambios debido al horario de clases de los participantes y a situaciones de organización de la escuela.

Aplicación de la secuencia didáctica de procesos de generalización

Después de organizar a los estudiantes en parejas, la secuencia didáctica se llevó a cabo con ocho alumnos de secundaria de una escuela pública del Distrito Federal (tres estudiantes de segundo y cinco estudiantes de tercer grado) que son los mismos a los que se les aplicó el cuestionario inicial. La investigadora funge como docente. Se llevó a cabo en 9 sesiones de aproximadamente 90 minutos cada una, en horario fijo (7:30 a 9:10 am), las actividades fueron video grabadas y posteriormente transcritas para su análisis. Se desarrollaron en un salón de clases de la secundaria con mesas para dos personas.

Al iniciar la secuencia didáctica se les entregó a los alumnos un cuadernillo de actividades y el trabajo se realizó en parejas, acompañado con enseñanza de la investigadora. Después de concluir cada actividad se realizó una plenaria para que los estudiantes explicaran sus estrategias de resolución.

Resultados

Los datos obtenidos con la secuencia didáctica se analizaron de acuerdo con:

1. Niveles de logro
2. Categorías de resolución de problemas
3. Interacción social en pareja.

A continuación se presentan los resultados de cada análisis.

- **Niveles de logro**

En este análisis se toma en cuenta si las parejas de alumnos logran completar las actividades, para ello se definen a continuación los tres niveles de logro.

Tabla No. 16 Caracterización de los niveles de logro

Nombre del nivel de logro	Caracterización
Alto	Los alumnos evidencian un pensamiento multiplicativo, pueden ver un patrón, comunicarlo, registrarlo y probarlo, es decir, completan las actividades propuestas.
Medio	Los alumnos evidencian un pensamiento aditivo en transición al pensamiento multiplicativo, es decir, pueden ver un patrón y comunicarlo. No pueden registrarlo ni probarlo, por ello las actividades propuestas son resueltas parcialmente.
Bajo	Los alumnos evidencian un claro pensamiento aditivo que les permite ver un patrón cuando lo relacionan a una suma. Se les dificulta resolver las actividades propuestas

A continuación se presentan ejemplos de respuestas de cada nivel de logro.

Nivel de logro Bajo

Actividad No. 8: Secuencia Geométrica

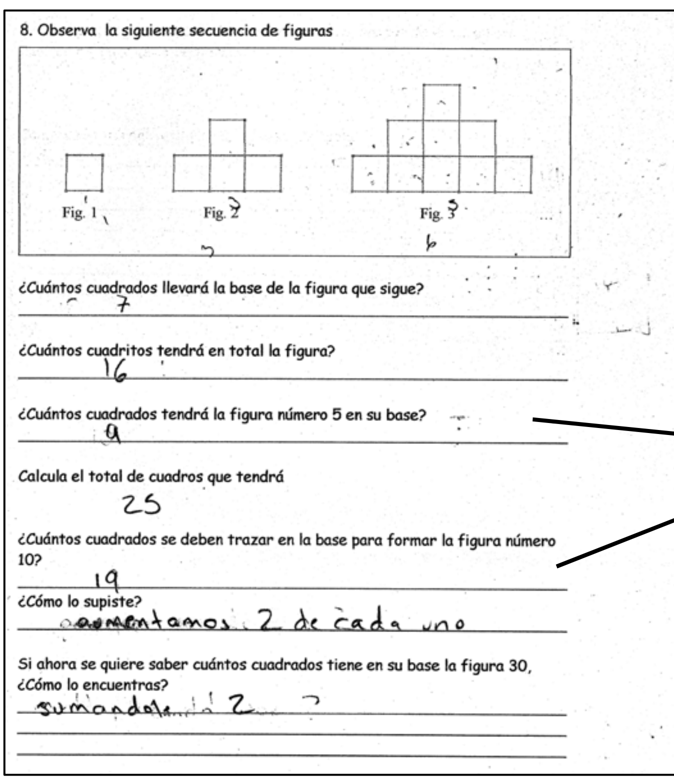

8. Observa la siguiente secuencia de figuras

Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

¿Cuántos cuadrados llevará la base de la figura que sigue?
7

¿Cuántos cuadritos tendrá en total la figura?
16

¿Cuántos cuadrados tendrá la figura número 5 en su base?
9

Calcula el total de cuadros que tendrá
25

¿Cuántos cuadrados se deben trazar en la base para formar la figura número 10?
19

¿Cómo lo supiste?
aumentamos 2 de cada uno

Si ahora se quiere saber cuántos cuadrados tiene en su base la figura 30, ¿Cómo lo encuentras?
sumando 2

Puede ver el patrón porque implica una adición de dos cuadros

De acuerdo con la imagen anterior, el alumno puede ver el patrón si lo relaciona con la figura anterior, entonces se da cuenta de que sólo hay que ir sumando dos.

Cuando se le pide que dé una regla para calcular el número de cuadros en la base para cualquier figura de la secuencia no lo puede hacer. En la siguiente imagen se muestra este hecho.

Escribe una regla para calcular el número de cuadrados de la base para cualquier figura de la secuencia.

Comprueba tu regla utilizando la siguiente tabla

# de figura	Regla	cuadritos de la base
1		1
2		3
3		5
4		7
5		9
6		11
...		
30		

No puede extender el patrón a otros casos, no puede dar la fórmula y comprobarla

Como se observa, el alumno no puede dar una regla para figuras más alejadas pues su pensamiento aditivo no le permite relacionar, por ejemplo, el número de figura con el número de cuadros en la base, pues ello implicaría establecer que la relación es $b=2n-1$ (el número de cuadros en la base es igual a dos veces el número de figura menos uno). Se puede ver que el alumno no ha observado la relación, entonces no tiene la necesidad de expresar nada simbólicamente.

Los demás alumnos logran responder las preguntas referentes al número de cuadros que tendrá en la base la siguiente figura sin embargo para calcular el total de cuadros necesitan construir la figura o agregar a la última los cuadrados necesarios y contarlos. Es decir, también pueden percibir el patrón que sigue la secuencia de cuadros en la base, sumar dos al número de cuadrados de la figura anterior, pero no pueden percibir la relación entre el número de figura y el total de cuadros de la base y tampoco la relación entre el número de figura y el número total de cuadros.

Como sólo perciben el patrón de la secuencia aritmética que sigue el número de cuadros de la base respecto a la figura anterior, se les complica aplicarlo para figuras más alejadas, poco a poco se dan cuenta que trazarlas o completarlas ya no es la mejor estrategia e intentan encontrar alguna manera de calcularlo.

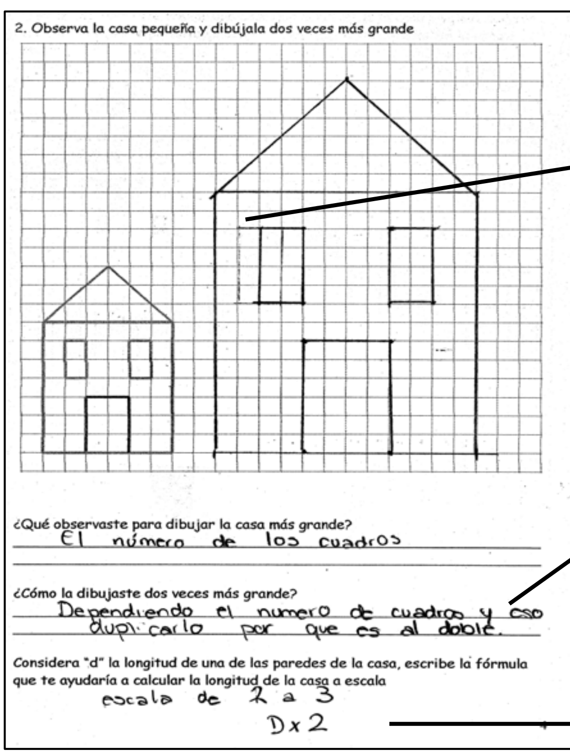
Durante la plenaria los alumnos YBR y EFH plantean que para encontrar el total de cuadros hay que observar que “si diez es el doble de cinco, entonces, la figura diez tiene el doble de cuadrados que la figura cinco (18 en total)”. La investigadora les recuerda que para que una regla sea general tendría que cumplirse para toda la secuencia y pone el ejemplo de la figura dos respecto a la figura cuatro para que vean que no se cumple su percepción y reconsideren su respuesta. Como los resultados son distintos, las parejas explican sus estrategias y se decide quién tiene la razón. LAV y CED plantean que la base de la figura número diez tiene diecinueve cuadrados en la base y describen dos estrategias diferentes. La primera estrategia es seguir la secuencia de números impares al mismo tiempo que se cuentan los dedos de la mano hasta llegar a 10. La segunda estrategia es hacer una lista hasta llegar a esa figura. Después de varios intentos, no logran llegar a una regla por lo que la investigadora les da pistas para lograrlo y mediante tanteos encuentran la regla, para el número de cuadros de la base y la expresan simbólicamente. Cabe destacar que después las parejas encuentran la regla para el total de cuadros de cada figura. ChLR y YBR encuentran expresiones como x^2 y (f)(f), respectivamente, oportunidad que aprovechó la investigadora para que observaran que eran equivalentes.

Comentario: De acuerdo con lo anterior podemos concluir que el nivel de logro es bajo porque no hay indicios de pensamiento multiplicativo, es decir, les cuesta mucho trabajo relacionar el número de figura con el número de cuadros en la base o con el total de cuadros, debido a que la relación no depende de una suma o una resta. Sólo con la ayuda de la investigadora logran percibir la relación y llegar a la regla para calcular el número de cuadrados en la base y sólo dos parejas logran plantear una regla para el total de cuadros de las figuras.

Nivel de logro medio

Actividad No. 2 Proporcionalidad Geométrica, Escala

En esta actividad los alumnos debían trazar una casa a escala 2:1, de acuerdo a la casa original que se les presentaba.



El trazo de las ventanas causa confusión porque hay que aplicar la escala no sólo en las dimensiones del rectángulo sino también en la posición que guardan respecto a la pared y a la puerta, sin embargo lo logra

Aplica la escala, lo duplica “porque es al doble”

Sin embargo, no puede dar la regla, sólo escribe que es escala 2 a 3. La fórmula que escribe, resulta durante plenaria

Los alumnos contaron los cuadritos para saber cuánto media cada longitud de la casa, aunque se les proporcionó una regla graduada sólo la utilizaron para trazar las líneas, no como instrumento de medida. En la imagen se muestra que el alumno puede aplicar la escala que se le ha dado y como se observa una de las dificultades para el dibujo de la casa fue la posición de las ventanas respecto a la puerta y al rectángulo mayor. El planteamiento de las fórmulas y el trazo del techo también causaron dificultad, el último debido a que los alumnos tenían que considerar la altura para ello. El siguiente trecho de la actividad muestra esta situación.

Trecho de la actividad No.2

I: ¿qué hicieron ustedes?
LAV: contamos los cuadritos de la casa original para sacar la otra
I: ¿para qué los contaron?
I: (preguntando directamente a la pareja de LAV) ¿si los contaron para multiplicarlos?
LAV: Si
I: ¿Por cuánto los multiplicaron?
LAV: Por dos
I: Por qué lo multiplicaron por dos
LAV: Porque era el doble
…
I: ¿Y cómo le hago para el techo?
YBR: Es un triángulo
I: es un triángulo
YBR: isósceles
I: ¿Por qué isósceles?
YBR: porque tiene dos lados iguales y uno diferente
YBR: entonces de la base que es el techo mide doce y como es un triángulo isósceles… entonces se mide la mitad y para arriba
…
I: A ver si entendí bien. De aquí para acá (señalando la base del triángulo que forma el techo de la casa) tomo la mitad, en este caso (señalando la casa original) la mitad ¿sería?
Varias voces: tres
I: y de aquí para el punto donde se unen los lados
Varias voces: tres
I: ¿en la casa grande cuántos tendría que haber?
Varias voces: seis
I: ¿qué estoy midiendo de la mitad de la base al vértice?

YBR: la altura
…
I: Todos usaron la misma estrategia de buscar la mitad y luego hacia arriba o también usaron la de su compañera
YBR: yo usé las dos
…
I: ¿Cómo sería la fórmula? (dirigiéndose a LAV)
LAV: yo puse "d" por dos
...
I: ¿Están de acuerdo? ¿Quién no? ¿O quién no escribió fórmula?
YBR: yo no escribí
…
YBR: también estaba pensando en si sería "d" por dos pero no sabía si sería correcto
I: ¿para qué me sirve una fórmula?
…
I: por ejemplo si yo traigo otra casa un poco más grande y les pido que la hagan dos veces más grande, ¿esa fórmula me servirá?
Varios: sí
I: Quién será "d"
Varios: la longitud

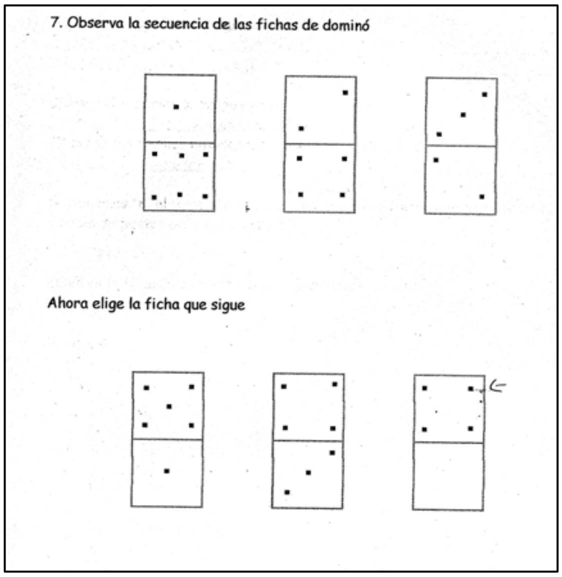
Como se observa todos coinciden en que para trazar la casa a escala se cuentan los cuadritos de la casa original y se multiplica por dos, pero cuando se trata de trazar el techo de la casa los alumnos utilizan estrategias de tanteo. Sin embargo YBR expresa primero lo hizo con tanteo y después tomando en cuenta la altura del triángulo. Cuando se trata de plantear la fórmula sólo un alumno lo logra pero al externarla parece que ayuda a los demás a comprender cómo hacerlo porque ellos también lo escriben.

Nivel de logro alto

Actividad No. 7: Secuencia aritmética

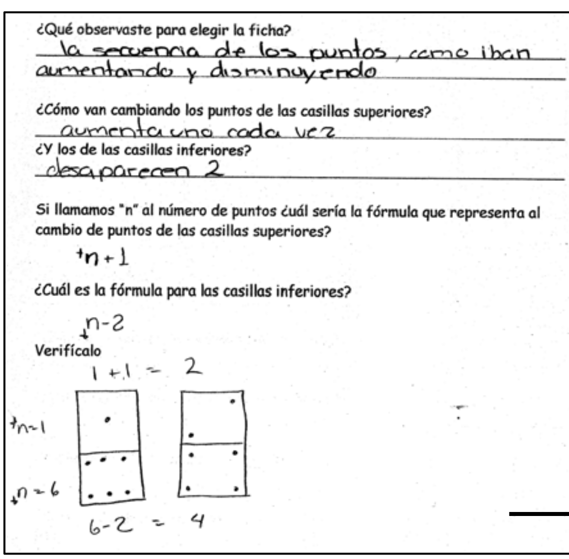
La actividad número siete solicita al alumno que elija la ficha de dominó que sigue en una secuencia de fichas que se rige por dos patrones, en la casilla superior se va aumentando un punto y en la casilla inferior se van disminuyendo dos puntos. En el desarrollo de esta actividad se muestra que los alumnos logran identificar el patrón que rige la secuencia aritmética en ambas casillas de la ficha de dominó y logran plantear la regla para las casillas superiores y para las inferiores. Perciben que son patrones diferentes para cada casilla y logran verificar su regla.

La siguiente imagen muestra una respuesta perteneciente a este nivel.



El alumno detecta el patrón y elige la ficha que sigue

La imagen anterior muestra que el alumno ha visto el patrón y esto se confirma porque después puede comunicarlo, registrarlo y probar su fórmula. En la siguiente imagen se puede verificar este hecho.



El alumno puede plantear la fórmula y probarla

Comentario: como se muestra, esta actividad presenta un nivel de logro alto porque identifican el patrón, lo comunican, plantean la regla simbólica y la prueban.

- **Categorías de Resolución de Problemas**

En este análisis se consideran las estrategias que los alumnos siguen para desarrollar las actividades de la secuencia didáctica. Se encontraron tres categorías de resolución que se describen a continuación.

Tabla No. 17 Caracterización de las categorías de resolución de problemas

Nombre de la categoría	Caracterización
Aritmética	Se refiere a las respuestas que se caracterizan porque han sido resueltas mediante adiciones y sustracciones explícitas o mentales, o bien, a través de conteos. No detectan patrones geométricos. Perciben cambios de una variable pero no en relación con otra (sólo la ven verticalmente), no expresen reglas generales que las represente.
Prealgebraica	Se refiere a las respuestas que se caracterizan por un razonamiento aditivo en transición al pensamiento multiplicativo, es decir, son capaces de ver una variación proporcional o percibir un patrón en una secuencia geométrica, pero no pueden traducir la regularidad a una regla simbólica.
Algebraica	Se refiere a aquellas respuestas que evidencian un pensamiento multiplicativo, es decir, los alumnos perciben la variación, pueden aplicarla para otros casos, pueden expresar oral y de forma simbólica dicha variación y pueden comprobarla.

A continuación se muestran ejemplos de cada una de las categorías de resolución de problemas.

Ejemplo de categoría aritmética

Actividad No. 8

Los alumnos utilizan predominantemente una estrategia de resolución aritmética que les permite encontrar un patrón que involucra adición. No pueden encontrar una regla que represente la relación número de figura-cuadros en la base, o bien, número de figura-total de cuadros, sólo con ayuda de la investigadora logran hacerlo. Es importante considerar que la regla no se expresa porque no tienen nada qué decir, no han observado la relación por lo que no hay nada que representar simbólicamente.

A continuación se presenta una imagen que muestra una estrategia aritmética.

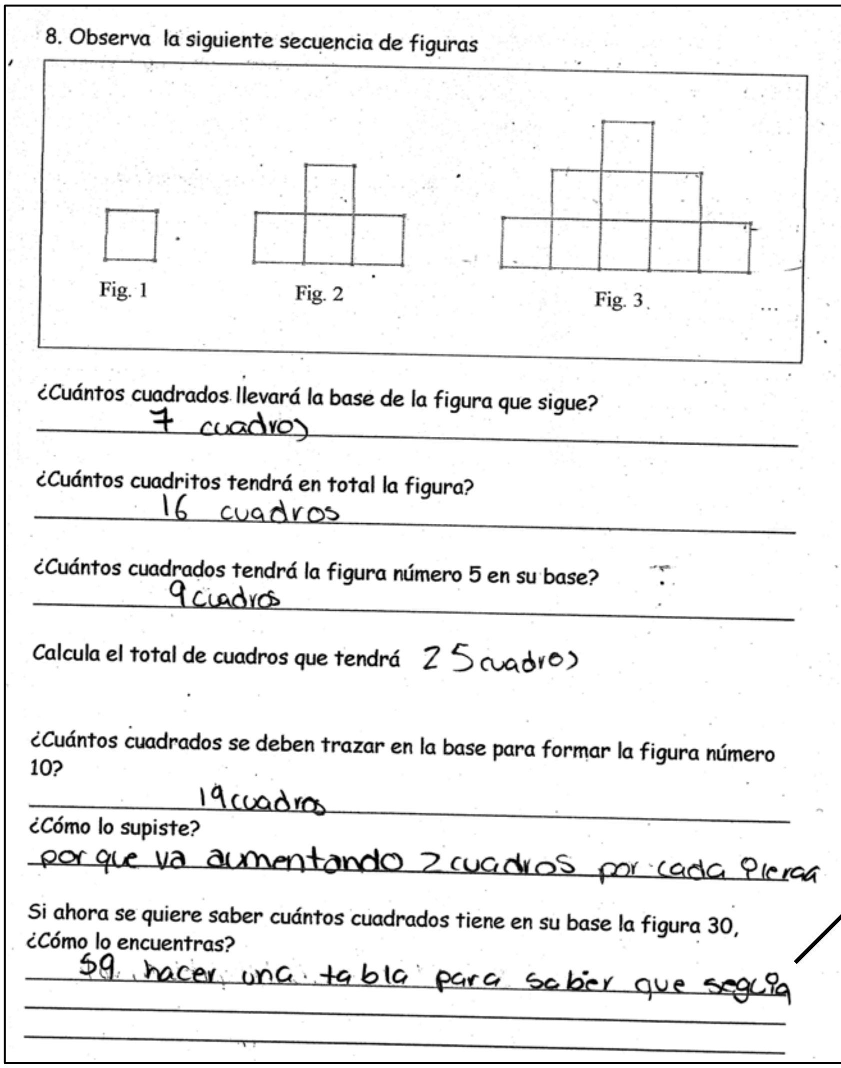

8. Observa la siguiente secuencia de figuras

Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 ...

¿Cuántos cuadrados llevará la base de la figura que sigue?
7 cuadros

¿Cuántos cuadritos tendrá en total la figura?
16 cuadros

¿Cuántos cuadrados tendrá la figura número 5 en su base?
9 cuadros

Calcula el total de cuadros que tendrá 25 cuadros

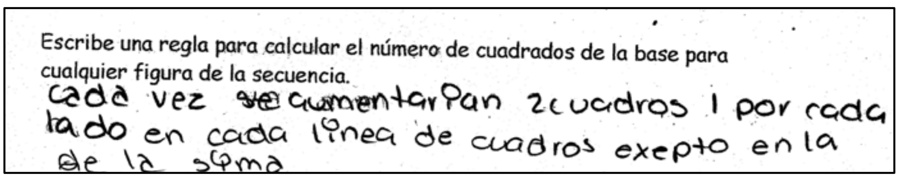
¿Cuántos cuadrados se deben trazar en la base para formar la figura número 10?
19 cuadros

¿Cómo lo supiste?
por que va aumentando 2 cuadros por cada hilera

Si ahora se quiere saber cuántos cuadrados tiene en su base la figura 30, ¿Cómo lo encuentras?
59 hacer una tabla para saber que seguía

El alumno responde que va aumentando dos cuadros por cada hilera y comenta que hizo una tabla para saber lo de figura 30

De acuerdo con la imagen, se verifica que el alumno no encuentra la relación "número de figura-cuadros en la base", por ello cuando se le pide dar el número de cuadros de la base de la figura número treinta, responde que se hace una tabla para saberlo. Esto muestra que aunque el patrón que percibe inicialmente (relacionado con el número de cuadros de la figura anterior) no le es suficiente para datos más alejados, tampoco busca otra relación que le sirva. Por ello no plantea una regla general que le sirva para calcular el número de cuadros en la base. Ello se muestra a continuación.


Escribe una regla para calcular el número de cuadrados de la base para cualquier figura de la secuencia.
cada vez ~~se~~ aumentarPan 2cuadros 1 por cada lado en cada lìnea de cuadros exepto en la de la s9ma

Ejemplo de categoría pre-algebraica

Actividad No. 5: Proporcionalidad geométrica

Se trata de una actividad donde los alumnos deben identificar parejas de rectángulos proporcionales. Inicialmente algunos estudiantes preguntan dudas sobre si un rectángulo puede ser proporcional a varios, o si siempre se deben multiplicar las dimensiones de una figura para encontrar la figura proporcional. La investigadora resolvió estas dudas a las dos parejas que cuestionaron y ellos continuaron con su selección. Se trata de una categoría pre-algebraica pues logran establecer la relación proporcional de los rectángulos chicos con los grandes cuando se trata de un número natural. Cuando se trata de un factor de proporcionalidad racional no logran establecer que son proporcionales. En la plenaria explican por qué sus parejas son proporcionales y la investigadora hace hincapié en que también se puede ver la relación proporcional de grande a pequeño y no tardan en responder que se hace con la división. Sin embargo, cuando han logrado exponer todas sus parejas de rectángulos, la investigadora les dice que faltan otras. Les da unos ejemplos y que expresen por qué son proporcionales. El siguiente trecho de la actividad en plenaria expone cómo van evolucionando las ideas de los estudiantes, desde ver la proporción de la figura chica hacia la grande y viceversa hasta expresar el factor de proporcionalidad decimal o racional.

Trecho de la actividad No. 5

I: ¿quién me explica qué significa que sean proporcionales?
YBR: que sean iguales
I: ¿Qué sean iguales?
YBR: que aumenten equitativamente
I: veamos si es correcto utilizar la palabra iguales… Si yo digo que es proporcional y que el requisito es que sea igual ¿Habría uno igual a este? (señala un rectángulo)
EFH: No
I: entonces ¿qué diferencia hay entre los que ustedes eligieron como proporcionales?
ChLR: son de diferente tamaño
I: pero qué pasa con el tamaño ¿yo puedo elegir arbitrariamente? Todos son de diferente tamaño, entonces ¿puedo elegir estos dos que son de diferente tamaño como proporcionales?
ChLR: No
I: ¿por qué no?
ChLR: porque tienen que ir aumentando equitativamente, si de un lado se va a aumentar el doble igual del otro y tienen que dar las cantidades del otro
I: ¿están de acuerdo con eso?
Asienten
…
La investigadora aclara que pueden ser proporcionales aumentando o disminuyendo, dependiendo del rectángulo que se tome como referencia.
I: si lo veo del morado (rectángulo grande) al amarillo (rectángulo pequeño)
LAV: aumentó
Otra voz, difícil de identificar: disminuyó
I: alguien dice que aumentó y alguien que disminuyó, repito si lo veo de morado a amarillo
Varias voces: disminuyó
I: ¿Si CCB? ¿Cómo disminuye?
LAV: entre tres
I: ¿si? ¿las dimensiones de dividen entre tres y dan la de este (rectángulo amarillo)?
Varias voces: si

La plenaria continúa seleccionando parejas, la investigadora retoma una pregunta individual que hizo CED sobre si siempre se tiene que multiplicar y comenta con todos que sí. Entonces les pide que reflexionen sobre por qué se debe multiplicar en el caso de grande a pequeño. Los alumnos no responden aunque identifican cuándo se divide y cuándo se multiplica. (Continúan exponiendo las parejas que encontraron)
YBR: el morado y el rosa
I: ¿cómo aumentaron?
YBR: se le suma tres al seis y tres al 9
I: ¿si son proporcionales?
DLG: No
I: ¿Por qué?
DLG: Porque se tiene que multiplicar
Cuando los alumnos agotaron sus parejas encontradas (amarillo- verde, amarillo- morado, amarillo-naranja, verde –naranja, azul –rosa)

La investigadora pregunta sobre las múltiples relaciones entre los rectángulos proporcionales y hace hincapié en los que no se han unido por ejemplo, dice que el amarillo es proporcional al verde, al morado y al naranja (que algunos no mencionaron) y cuestiona sobre la proporcionalidad (que no expresaron porque el factor de proporcionalidad no era tan evidente) entre el naranja y el morado, el verde y el morado y el verde con el naranja.
…Se quedan pensando y observando los rectángulos
I: díganme si es cierto, no es cierto
CED: sería uno punto cinco
…Los alumnos empiezan a resolver operaciones pero termina la sesión
Siguiente sesión
I: ¿qué otros números conocen?
ChLR: los decimales pero no me da exacto, se acerca mucho con cero punto tres
I: Doce por 0.3 me da 3.6, se acerca mucho ¿verdad? Pero hay otro número que hace que me de exacto
…
Se escucha una voz difícil de identificar: las fracciones
I: a ver busquen una fracción que al multiplicarse por 6 y 12 les de 2 y 4 (refiriéndose a las dimensiones del rectángulo rosa y azul)
… silencio…
Los alumnos prueban con operaciones, borran y lo vuelven a intentar
….
ChLR: seis medios
I: seis medios (se levanta y lo escribe en el pizarrón) vamos a ver
I: cómo multiplico las fracciones por un entero
Después de varias preguntas sobre cómo lo hacen, los alumnos no responden. La investigadora les dice el algoritmo “numerador por numerador y denominador por denominador” resuelve y obtiene 36. Le pregunta a ChLR si funciona.
ChLR: dos sextos
I: Lo verifica y se obtiene el 2. LAV y CED sonríen como comprobando algo que ellas ya habían notado.
Luego ChLR también determina que la fracción por la que se multiplica el morado para ser proporcional con el amarillo es 1/3

Como se puede verificar en el trecho anterior los alumnos lograron notar que si la proporción se ve del rectángulo grande al chico se tiene que dividir y como las parejas que habían formado tenían dimensiones que eran múltiplos de las dimensiones de los rectángulos pequeños no les resultaba difícil realizar la división. Sin embargo, cuando no era tan clara esta relación porque el número que se multiplica o divide no era un número natural, tuvieron más dificultades.

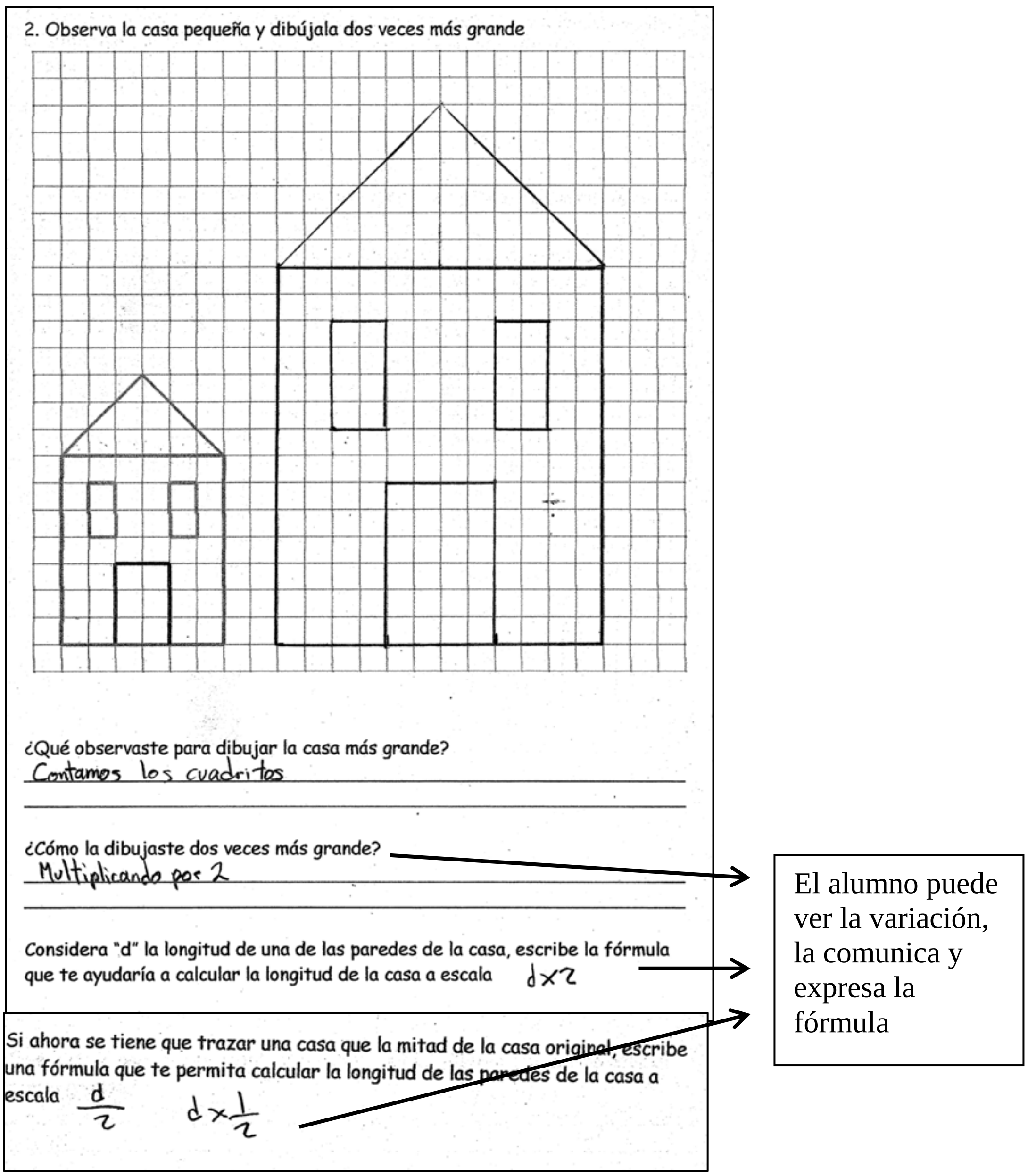
CED logró encontrar, por ejemplo, que 1.5 era el factor por el que se multiplicaban las dimensiones del rectángulo verde para encontrar el morado. Luego con ayuda de la investigadora pudieron considerar que una fracción también puede ser el factor de proporcionalidad. Es importante considerar que se les tuvo que indicar el algoritmo de la multiplicación de fracciones para poder verificar lo que ChLR parecía haber encontrado (2/6 como factor). Cabe reconocer que la investigadora continuó con la explicación y no permitió que ella externara cómo llegó a esa conjetura y dejó de lado los cálculos que ChLR había realizado.

Comentario: Como conclusión podemos decir que los alumnos pueden entender la proporcionalidad y se introducen a la búsqueda del factor de proporcionalidad a petición de la investigadora. Muestran claras dificultades cuando se trata de un factor de proporcionalidad racional, que pueden deberse también a las dificultades que en sí mismo posee este conjunto de números. Después de que se les da el algoritmo, por acierto y error encuentran la fracción que es el factor de proporcionalidad.

Ejemplo de categoría algebraica

Actividades No. 2 y 3

Se trata de dos actividades que requieren que el alumno trace dos dibujos a escala, en el primer caso se les explicita la escala y en el segundo la deben descubrir. Una pareja logra llegar a la expresión de la regla en ambas actividades incluso cuando se le dan otros datos puede dar una expresión algebraica.



Como se observa, el estudiante puede concretar las tres primeras etapas que proponen Mason et al. (op cit, 1985) para el trabajo de la generalidad: ver, decir y registrar el patrón, la cuarta no se le pide al estudiante pero durante la plenaria se comprobó si esta regla funcionaba.

- **Resultados de la interacción social en pareja durante la secuencia didáctica de procesos de generalización**

El análisis de la interacción social en pareja se realizó de acuerdo a la propuesta de Butto (2005) tomando en cuenta episodios de la secuencia didáctica.

En las sesiones de trabajo de la secuencia didáctica se dieron los siguientes tipos de interacción social:

Explicación univocal: en este tipo de interacción, cada uno de los alumnos juzga que su compañero no entendió y que no puede intervenir, por lo tanto un integrante de la pareja acepta tal posición. El término univocal se refiere a que la opinión de un sólo alumno predomina.

Explicación multivocal: en este tipo de interacción ocurre un conflicto entre los alumnos, cada uno defiende como correcto su razonamiento. Este tipo de interacción constituye para ambos alumnos un avance en sus perspectivas para explicar su pensamiento y tratar de cambiar el del otro.

Colaboración indirecta: en este tipo de interacción los estudiantes piensan en voz alta, mientras aparentemente resuelven tareas de manera independiente; sin embargo, la manera como capitalizan los comentarios de uno y otro, indica que, de hecho, ellos estaban monitoreando la actividad del otro, hasta cierto punto. Las oportunidades de aprendizaje surgieron cuando un alumno dijo e hizo algo significativo para el otro en un determinado momento, en el contexto de su actividad presente.

A continuación se presenta un ejemplo de cada tipo de interacción social detectados.

Ejemplo de Explicación Univocal

Actividad No. 6: Variación proporcional

ALC no resuelve la actividad, LAV está trabajando en la suya y la investigadora observa esa situación entonces le pide a ALC que comente sus dudas con LAV.

Trecho de protocolo actividad No. 6 (LAV y ALC)

LAV: primero dividí 18 entre 6 y me dio tres y dice
ALC se mantiene atenta
LAV: aumenta tres veces la cantidad de hot cakes, por tres. (señala las cantidades)
Luego la investigadora pregunta y ALC dice que ya entendió
Sólo reproduce el procedimiento de LAV
I: qué cantidad de ingredientes se necesitan para preparar 24 hot cakes
ALC: en cuatro (resuelve la división y las multiplicaciones y empieza a llenar la tabla)

Comentario: Como se observa, LAV que es de un nivel de conceptualización matemática medio, ha adoptado el papel del alumno que ha entendido la actividad y ALC el papel del que no lo ha entendido, entonces, asume que lo que dice LAV es lo que debe ser y como entiende el procedimiento “dividir y luego multiplicar” lo realiza si problema, es decir, sólo sigue las instrucciones de LAV.

Ejemplo de Explicación Multivocal

Actividad No. 9

Los alumnos deben continuar una secuencia de figuras y dar las fórmulas para el total de puntos.

Trecho de la actividad No. 9 (EFH y YBR)

EFH y YBR están resolviendo la actividad y van comentando.
YBR: para sacar el total de puntos se multiplica el número de figura por si mismo
EFH: para sacar el total de puntos
YBR: ajá
EFH empieza a contar en cada figura y verifica
EFH: tres, seis nueve … (observa y ve si es correcto en cada figura)… ajá, sí

Comentario: esta pareja de estudiantes está formada por un estudiante de nivel medio (YBR) y uno de nivel bajo (EFH), aunque inician la resolución de la actividad de manera individual van comentando lo que piensan y cuando llegan a la pregunta sobre el total de puntos YBR da su opinión, EFH no la acepta pues él tiene que verificar lo dicho por ella. Después de que lo verifica, ambos acuerdan qué van a contestar y proceden a escribir la respuesta.

Ejemplo de Colaboración Indirecta

Actividad No. 6: Variación proporcional

Los alumnos deben encontrar la cantidad de ingredientes necesarios para preparar 12,18 y 24 hot cakes, a partir de las cantidades dadas para preparar 6 hot cakes.

Durante el desarrollo en parejas DLG comenta con su pareja CED sobre como encontrar las otras cantidades. A continuación se presenta el trecho de esta conversación.

Trecho de la actividad No. 6 (DLG y CED)

DLG está respondiendo la pregunta para pero se queda dudando respecto a la cantidad de ingredientes para 30 hot cakes.
CED aunque aparentemente está trabajando por su cuenta voltea y comienza a hablar
CED: por cinco, este te da cinco tazas, luego este también te da cinco (señala la leche) luego dos por cinco (refiriéndose a las piezas de huevo), tres por cinco quince (cantidad de cucharadas de mantequilla) Eso sería de 30 hot cakes
DLG: pero como se está multiplicando

CED: si porque aquí son para seis hot cakes y acá es para doce, tres cuatro cinco y seis (señala las columnas de la tabla y se queda en la de 36 hot cakes). Uno por seis, seis, uno por seis, seis, dos por seis doce, tres por seis dieciocho (señala las cantidades para seis y dieciocho respectivamente) y ahora lo vas a hacer con cinco.
DLG: son treinta (luego empieza a llenar él su tabla para 30 hot cakes) entonces son 5, de leche igual ¿no?
CED: sí
DLG: ve las cantidades de las columnas anteriores
CED: le señala la de 6 hot cakes y le dice dos por cinco diez
DLG: ah si, si y termina la tabla él solo
Comentario:

Como se observa, a DLG le cuesta encontrar los valores para 30 hot cakes, aún a pesar de que ya ha respondido para 12, 18, 24 y 36 hot cakes de forma individual. CED va diciendo qué hizo ella, DLG no pregunta y sólo observa que se debe multiplicar por cinco pero sin comprender por qué lo hace.

CED estaba monitoreando la actividad de DLG y entonces comenzó a decir lo que ella hacía. DLG sólo escuchó y cuando CED dijo algo importante, él siguió con su actividad.

A continuación se describe el tipo de interacción que se observó con las parejas de estudiantes

Tipo de interacción	Parejas de estudiantes
Explicación univocal	ALC-LAV
Explicación multivocal	EFH-YBR
Colaboración indirecta	CED-DLG, CCB-ChLR

Conclusión del análisis de la interacción social en pareja durante la secuencia didáctica de procesos de generalización

En este tercer análisis se observó que los alumnos no están acostumbrados al trabajo en parejas, les costó trabajo integrarse, sobre todo porque eran de diferentes grados escolares y porque eran de grupos diferentes.

De acuerdo con lo anterior, podemos afirmar que cuando se observó una interacción de colaboración indirecta, uno de los alumnos no se vio beneficiado, pues por ejemplo DLG que era de nivel de conceptualización bajo permaneció en ese nivel. En el caso de ALC, no se puede establecer si la interacción fue determinante en su cambio de nivel de conceptualización matemática (de bajo a medio) pues en ocasiones, debido a la organización de su horario, se integraba después de que la sesión había comenzado. Lo que sí es claro es que la interacción que existió entre la pareja de EFH y YBR que fue multivocal, ayudó a que ambos cambiaran de nivel de conceptualización matemática. EFH pasó de nivel de conceptualización matemática bajo a alto. YBR de medio a alto.

Es importante notar que la interacción social de los estudiantes es un elemento clave para la comunicación de sus percepciones y para la reflexión de las mismas pues cuando ellos se enfrentan a la necesidad de explicar sus elaboraciones logran replantear sus conjeturas, sobre todo cuando ven que los demás no entienden. Esto se pudo observar en las plenarias de la secuencia didáctica, cuando la investigadora les solicitaba su explicación. La evolución de los niveles de conceptualización matemática se puede verificar en el siguiente capítulo donde se presentan los resultados del *Cuestionario final.*

CAPÍTULO VII

RESULTADOS DEL CUESTIONARIO FINAL Y ENTREVISTA AD-HOC

En este capítulo se presentan los resultados de le tercera etapa del estudio, cuestionario final y entrevista ad-hoc. Se inicia con la descripción del cuestionario y su aplicación y finalmente se analizan los resultados que arrojó.

Descripción del cuestionario

Está compuesto por 8 actividades que fueron trabajadas en el cuestionario inicial, en la secuencia didáctica y otras nuevas, todas abordan temas como secuencias aritméticas y geométricas, variación proporcional, variable como número general, como número específico y en relación funcional.

Las actividades se describen en la siguiente tabla

Tabla No. 18 Descripción del cuestionario final

Actividad	Contenido Matemático	Solicitud de la pregunta
1 a) y b)	Secuencia geométrica $x_{n+1}=4x_n$	Se pide al alumno encontrar tres términos de una secuencia, explicar cómo lo hizo, dar la regla y comprobarla
2 a) y b)	Secuencia geométrica Proporción 1:2 y 1:3	Se solicita al alumno trazar las figuras que siguen en las secuencias de figuras que se le presentan, explicar cómo las trazó, qué observa y calcularlo para la siguiente figura. En el inciso b se le pide dar una regla si conoce la figura anterior.
3	Secuencia geométrica $t_n=n^2$ y aritmética $x_{n+1}=x_n+2$ Relación cuadrática con variable discreta	Se pide al alumno responda cuántos cuadros lleva en su base la siguiente figura de la secuencia y cuántos tiene en total. Debe dar los mismos datos para la figura 5, la 10 y la 30. Debe dar una fórmula para los cuadros de la base y comprobarla. Después debe dar la regla para el total de cuadros y comprobarla.

Tabla No. 18 Descripción del cuestionario final

Número de pregunta	Contenido Matemático	Solicitud de la pregunta
4	Números figurados Secuencia aritmética Secuencia geométrica $A = n(n+1)$	Se solicita al alumno trazar los dos rectángulos siguientes, completar la tabla y calcular el número de puntos para la figura 10 y la 20, dar la regla para calcular el total de puntos conociendo el número de puntos de la base y comprobarla.
5	Relación funcional lineal Variable en relación funcional y = 2x+1	Se pide al alumno comparar el número de plástico producido y número de máquinas. Encontrar relación entre ambos y se les pide también generar una fórmula
6	Variable en relación funcional y=80x-1200	Se pide al alumno llenar una tabla para calcular la ganancia en función del número de podas de pasto, luego debe calcular el número de trabajos conociendo la ganancia que se quiere obtener, dar una fórmula y utilizarla para otra ganancia dada.
7	Variable como número específico x+3x=1600	Se solicita al alumno resolver un problema de precios de dos celulares, se espera planteen una ecuación
8	Variable como número específico x+2x=20000	Se pide al alumno resolver un problema de precios de dos celulares, se espera planteen una ecuación.

Aplicación

El cuestionario final se aplicó a 8 estudiantes, que fueron los que concluyeron el estudio. A los 8 alumnos se les aplicó en diferentes momentos, debido a su disponibilidad. Dos de ellos lo hicieron dos días después de que concluyó la secuencia, otros tres estudiantes una semana después, finalmente, otros tres lo resolvieron aproximadamente 45 días después, debido al receso escolar. En todos los casos se les repartieron las hojas y se les dio la indicación de leerlo y preguntar las dudas sobre el planteamiento de las actividades. Se colocó, a disposición de los estudiantes, regla, calculadora y lápices. Aproximadamente se tardaron 1hora y 30 minutos en entregarlo y no tuvieron dudas sobre lo que tenían que hacer.

Resultados

Los datos obtenidos con el cuestionario final se analizaron de acuerdo a los siguientes tipos de análisis: el primero consiste en un análisis de los niveles de logro de los estudiantes; el segundo se refiere a un análisis por categoría de resolución de problemas y su evolución en el estudio y, finalmente el tercero consiste en analizar los niveles de conceptualización matemática y verificar si existe o no un cambio de nivel en los alumnos respecto al *Cuestionario inicial*. A continuación se presentan los resultados del primer análisis.

- **Niveles de logro**

Consistió en un análisis del nivel de logro que tuvieron los alumnos en cada actividad. Se establecieron tres niveles de logro: bajo, medio y alto, que se describen a continuación.

Tabla No. 19 Niveles de Logro

Nombre del nivel de logro	**Caracterización del nivel de logro**
Nivel Bajo	Se refiere a las respuestas de los alumnos que evidencian un pensamiento aditivo, cuya característica es dar solución a las preguntas únicamente a través de sumas y/o restas. No responden a la solicitud de la pregunta o dan otra respuesta.
Nivel medio	Se refiere a las respuestas que evidencian un pensamiento aditivo en transición al multiplicativo, es decir, sólo detectan patrones o visualizan variaciones verticales de una variable, sin poderlas aplicar a casos más alejados o expresarlas de manera simbólica. Responden parcialmente a la solicitud de las preguntas.
Nivel alto	Se refiere a las respuestas que evidencian un claro pensamiento multiplicativo, es decir, pueden detectar patrones o regularidades, expresarlos simbólicamente y verificar sus elaboraciones. Responden a la solicitud de la pregunta.

Acorde con los niveles de logro descritos, se presenta la siguiente tabla que contiene el nivel de logro obtenido por los estudiantes en cada pregunta.

Tabla No. 20 Resultados del análisis: niveles de logro

Actividad	Contenido	Solicitud	Alto	Medio	Bajo
1	Secuencia geométrica	Continuar con dos secuencias geométricas, decir cómo lo hicieron, dar una regla y hacer la comprobación	5/8	1/8	2/8
2	Secuencia geométrica	Continuar con la secuencia de figuras, explicar cómo la trazaron, qué consideraron y decir cuántos cuadros tendría la figura 5	5/8	2/8	1/8
3	Secuencia geométrica y aritmética	Trazar la siguiente figura, decir para las figuras 4, 5, 10 y 30 cuántos cuadros tendrán en la base, decir el total cuadros, dar la regla para la base y para el total de cuadros y comprobarlas.	3/8	4/8	1/8
4	Números figurados Secuencia aritmética y geométrica	Continuar con la secuencia, llenar una tabla, decir el número de cuadros para la Fig. 10 y la Fig. 20, dar la regla y comprobarla	6/8	1/8	1/8
5	Relación funcional lineal. Variable en relación funcional	Decir cómo aumentan los kg. de plástico, cuántas máquinas se necesitan para 18kg, dar la regla y verificarla	2/8	3/8	3/8
6	Variable en relación funcional	Completar la tabla, calcular ganancia de $1000, dar una regla y utilizarla para una ganancia de $2000	3/8	1/8	4/8
7	Variable como número específico	El alumno debe resolver un problema de precios de dos celulares, se espera planteen una ecuación	2/8	3/8	3/8

Tabla No. 20 Resultados del análisis: niveles de logro (continuación)

Actividad	Contenido	Solicitud	Alto	Medio	Bajo
8	Variable como número específico	El alumno debe resolver un problema de precios de dos celulares, se espera planteen una ecuación.	2/8	3/8	3/8

De acuerdo con la tabla No. 20 podemos afirmar que existen preguntas donde los alumnos presentan un nivel de logro alto, que no se verifica en el cuestionario inicial. Ello demuestra que no sólo perciben la regularidad sino también pueden dar reglas simbólicas y comprobarlas. Esto es, cubren las cuatro etapas del trabajo con la generalidad (percibir, comunicar, expresar y comprobar la regularidad) propuestas por Mason et al. (op cit, 1985). Al menos dos alumnos resuelven problemas de variable como número específico planteando una ecuación.

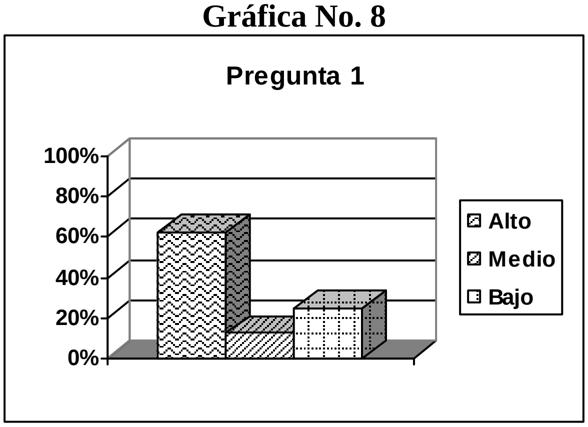
Para puntualizar estos hechos se presentan a continuación las siguientes gráficas donde se puede observar el porcentaje de alumnos que obtienen niveles de logro alto, medio y bajo, en cada una de las preguntas del cuestionario final.

Pregunta No. 1

Idea Matemática: Secuencia Geométrica de Números

Solicitud de la pregunta: completar la secuencia y dar la regla

Gráfica No. 8



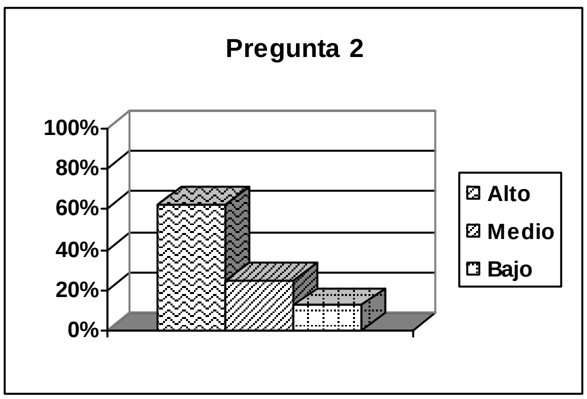
Acorde con la gráfica No. 8, se puede decir que aproximadamente el 60% de los alumnos puede llegar a una regla simbólica y comprobarla, al completar una secuencia geométrica. Es importante considerar que el patrón de una secuencia geométrica sólo era percibido por el 50% de los alumnos en el cuestionario inicial (véase tabla No. 11) y ninguno de ellos podía llegar a una regla general.

Pregunta No. 2

Idea Matemática: Secuencia Geométrica de figuras

Solicitud de la pregunta: completar la secuencia y dar la regla

Gráfica No. 9



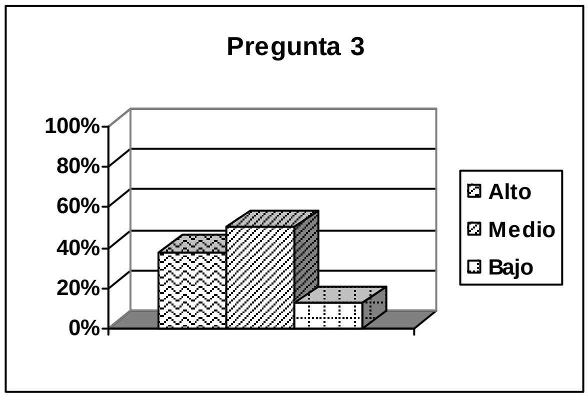
En la gráfica anterior se observa que aproximadamente el 60% de los estudiantes puede completar las secuencias de figuras y menos del 10% presenta dificultades con la percepción del patrón en una secuencia de figuras cuyos lados van aumentando el doble o el triple. Es importante considerar que aunque no se les solicita una regla simbólica, los alumnos explican de manera clara cómo siguen la secuencia.

Pregunta No. 3

Idea Matemática: Relación cuadrática y secuencia geométrica

Solicitud de la pregunta: completar la secuencia y dar la regla

Gráfica No. 10



En esta actividad, los estudiantes deben detectar el patrón que sigue una secuencia de figuras construidas con cuadrados, para encontrar el número d cuadros en la base y el total de cuadros en la figura.

De acuerdo con la gráfica anterior, el 50% de los estudiantes percibe el patrón pero no puede plantear la regla simbólica.

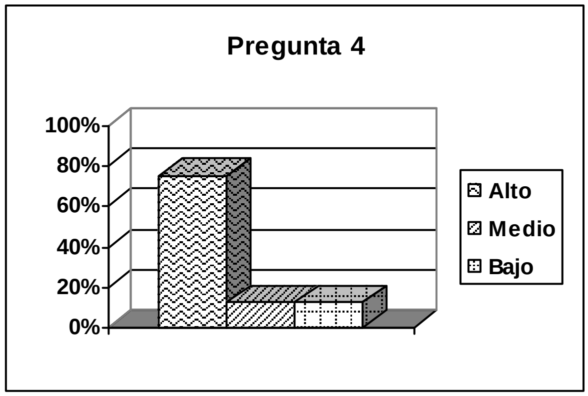
Casi el 40% llega a la regla simbólica, considerando la relación existente entre la posición de la figura en la secuencia y los cuadros de su base o con su total de cuadros.

Pregunta No. 4

Idea Matemática: Números figurados, Secuencia aritmética y geométrica

Solicitud de la pregunta: completar la secuencia y dar la regla

Gráfica No. 11



En esta pregunta nuevamente el alumno debe encontrar el patrón, pero necesita visualizar la relación entre la posición de la figura y el total de puntos para dar la regla general.

La gráfica anterior muestra que casi el 80% de los estudiantes percibe el patrón, lo comunica, lo expresa simbólicamente y lo comprueba.

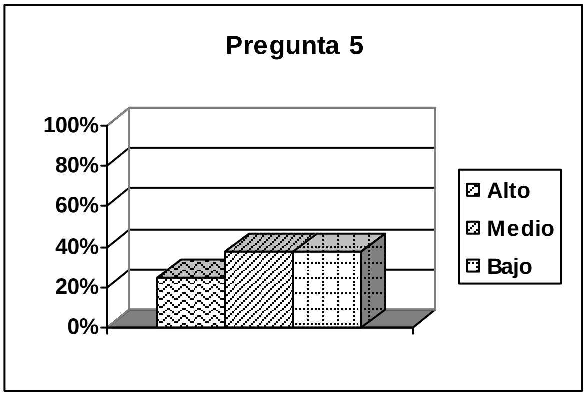
Se corrobora que cuando el alumno ve una regularidad, encuentra utilidad al lenguaje algebraico, porque puede utilizarlo para manifestar de forma sucinta lo que percibe.

Pregunta No. 5

Idea Matemática: Relación funcional lineal, variable en relación funcional

Solicitud de la pregunta: Encontrar la relación entre número de máquinas y kilogramos de plástico producido.

Gráfica No. 12



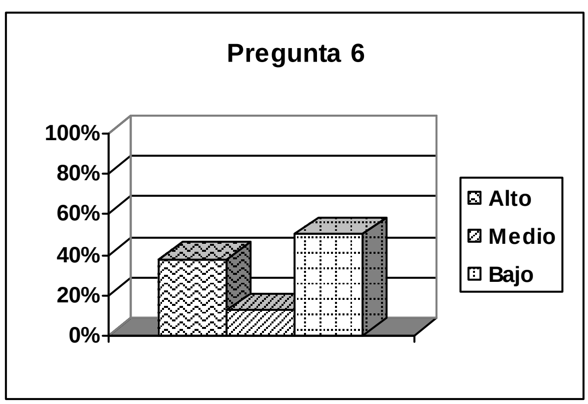
La gráfica anterior muestra que aproximadamente el 80% de los alumnos no logran llegar a una regla simbólica que exprese la relación entre el número de máquinas y la cantidad de plástico producido y comprobarla. Es importante mencionar que el 20% de los estudiantes sí lo hace, pues en el cuestionario inicial, donde se planteó la misma pregunta, ningún alumno lo logra (véase gráfica No. 3).

Pregunta No. 6

Idea Matemática: Variable en relación funcional lineal

Solicitud de la pregunta: Encontrar la relación entre el número trabajos y la ganancia

Gráfica No. 13



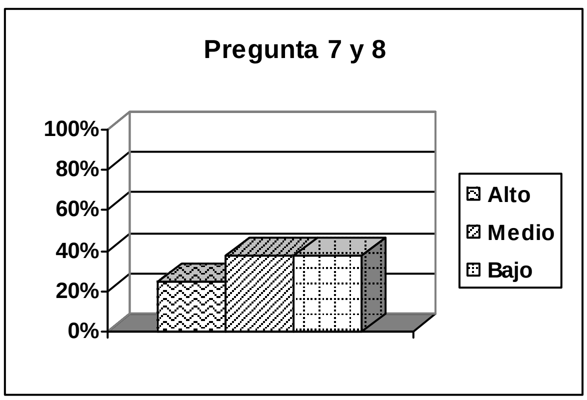
Acorde con la gráfica No. 13 se puede afirmar que el 50% de alumnos no puede encontrar la relación entre el número de trabajos de poda de pasto con la ganancia, a pesar de que calculan los valores de la tabla propuesta. Para una cantidad específica de dinero no pueden calcular y plantear la expresión simbólica. No utilizan la información de su tabla para encontrar la relación entre las dos variables. Solo el 40% de los estudiantes logra dar una regla y puede utilizarla para otro cálculo más.

Preguntas No. 7 y 8

Idea Matemática: Variable como número específico

Solicitud de la pregunta: Plantear y resolver una ecuación

Gráfica No. 14



De acuerdo con la gráfica anterior, se puede afirmar, en ambos problemas, que sólo el 25% de los alumnos logra plantear una ecuación y resolverla. Se resalta este hecho porque no sucedió en el cuestionario inicial, sólo un alumno pudo dar solución a preguntas similares pero utilizando operaciones aritméticas y tanteos (véase gráfica No. 5). Sin embargo, es importante considerar que casi el 40% de los alumnos sigue sin resolver las situaciones que se les plantean en cada pregunta, porque no puede expresar la relación que existe entre las cantidades los problemas.

Conclusiones finales del análisis de los niveles de logro

Es importante establecer que este análisis muestra que existe un avance en los estudiantes porque evidencian un pensamiento multiplicativo, es decir, aparece el nivel de logro alto, donde se ubican los estudiantes que pueden detectar patrones o regularidades, expresarlos simbólicamente y verificar sus elaboraciones, es decir, desarrollan las cuatro etapas propuestas por Mason, Graham, Pimm y Gowar (op cit, 1985) para el trabajo de la generalidad. El nivel de logro alto no aparecía en el cuestionario inicial. Se verifican dificultades principalmente en las preguntas que abordan contenidos matemáticos como variable en relación funcional.

- **Categoría de resolución de problemas**

Para establecer la categoría de resolución de problemas a la que pertenecen los alumnos, este análisis toma en cuenta las estrategias que los alumnos siguen en cada una de las preguntas del cuestionario final.

Las categorías encontradas en esta etapa del estudio son tres: Aritmética, Pre-algebraica y Algebraica, que se definen a continuación.

Tabla No. 21 Categorías de resolución de problemas

Nombre de la categoría	Caracterización
Aritmética	Se refiere a las respuestas que se caracterizan porque han sido resueltas mediante adiciones y sustracciones explícitas o mentales, o bien, a través de conteos. No detectan patrones geométricos. Perciben cambios de una variable pero no en relación con otra (sólo la ven verticalmente). No expresan reglas generales.

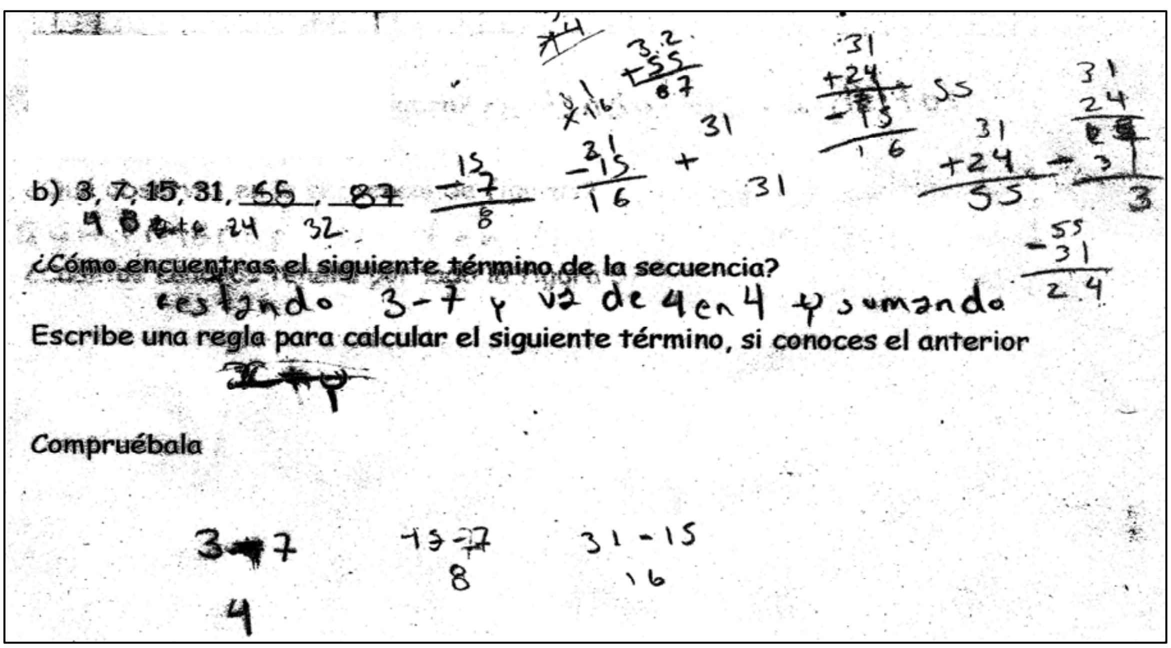
Tabla No. 21 Categorías de resolución de problemas (continuación)

Nombre de la categoría	Caracterización
Categoría Prealgebraica	Se refiere a las respuestas que se caracterizan por un razonamiento aditivo en transición al pensamiento multiplicativo, es decir, son capaces de ver una variación proporcional o percibir un patrón en una secuencia geométrica, pero no pueden traducir la regularidad a una regla simbólica.
Categoría Algebraica	Se refiere a aquellas respuestas que evidencian un pensamiento multiplicativo, es decir, los alumnos perciben la variación o el patrón, lo aplican para otros casos y lo pueden expresar oral y de forma simbólica. También pueden comprobar sus expresiones.

En seguida, se muestran ejemplos de respuestas de cada una de las categorías, es importante verificar que en el cuestionario inicial no existía la categoría algebraica pues ninguno de los alumnos expresaba simbólicamente las reglas ni las verificaban.

Ejemplo de Categoría Aritmética

Pregunta No. 1
Idea matemática: Secuencia Geométrica

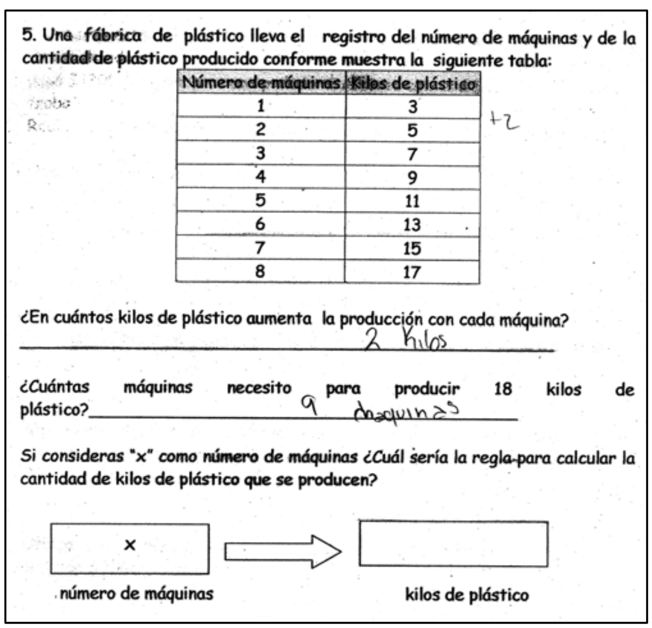


Como se había mencionado, en esta categoría de resolución de problemas, las estrategias que utilizan los alumnos para resolver las actividades son principalmente adiciones y sustracciones explícitas o mentales, o bien, conteos. No detectan el patrón ni la relación entre variables y por ello no expresan reglas generales que las representen.

La imagen anterior muestra que el alumno no ha percibido el patrón en la secuencia geométrica por lo que la continúa mal. Son evidentes sus estrategias de resolución, sumas y restas y efectivamente expresa que lo hace restando, que va de cuatro en cuatro y sumando. Por ello, la regla aunque pareciera simbólica (x-y) no representa la percepción utiliza los símbolos aunque no reflejan una regla.

Ejemplo de Categoría Pre-Algebraica

Pregunta No. 5
Idea matemática: Relación funcional lineal


5. Una fábrica de plástico lleva el registro del número de máquinas y de la cantidad de plástico producido conforme muestra la siguiente tabla:

Número de máquinas	Kilos de plástico
1	3
2	5
3	7
4	9
5	11
6	13
7	15
8	17

+2

¿En cuántos kilos de plástico aumenta la producción con cada máquina? 2 kilos

¿Cuántas máquinas necesito para producir 18 kilos de plástico? 9 máquinas

Si consideras "x" como número de máquinas ¿Cuál sería la regla para calcular la cantidad de kilos de plástico que se producen?

x →

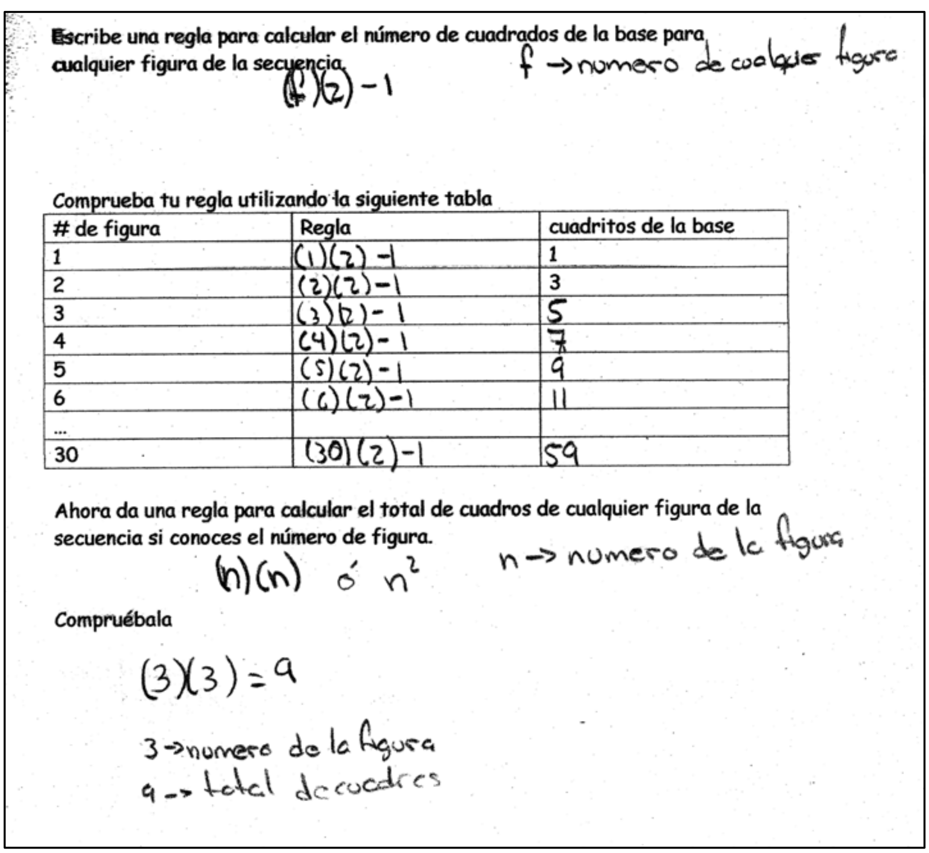
número de máquinas — kilos de plástico

En esta categoría entran las respuestas de los alumnos que evidencian que son capaces de ver una variación proporcional o de percibir un patrón en una secuencia geométrica, pero no pueden traducir la regularidad a una regla simbólica.

Conforme a la imagen anterior, podemos afirmar que el alumno percibe el patrón y lo aplica para otro dato más, pero no llega a la expresión simbólica del mismo. Esta pregunta especialmente, muestra que el alumno alcanza las dos primeras etapas de trabajo de la generalidad propuesto por Mason et al. (op cit, 1985): percibir el patrón y comunicarlo.

Ejemplo de Categoría Pre-Algebraica

Pregunta No. 3
Idea matemática: Secuencia Geométrica



Escribe una regla para calcular el número de cuadrados de la base para cualquier figura de la secuencia.

$(f)(2) - 1$ f → numero de cualqier figura

Comprueba tu regla utilizando la siguiente tabla

# de figura	Regla	cuadritos de la base
1	(1)(2) −1	1
2	(2)(2)−1	3
3	(3)(2)− 1	5
4	(4)(2)− 1	7
5	(5)(2)−1	9
6	(6)(2)−1	11
...		
30	(30)(2)−1	59

Ahora da una regla para calcular el total de cuadros de cualquier figura de la secuencia si conoces el número de figura.

$(n)(n)$ ó n^2 n → numero de la figura

Compruébala

$(3)(3) = 9$

3 → numero de la figura
9 → total de cuadros

En esta categoría entran las respuestas de los alumnos que evidencian estrategias multiplicativas, es decir, pueden ver la relación, comunicarla, expresarla simbólicamente y comprobarla.

La imagen anterior muestra que todas las etapas han sido concretadas por el alumno, incluso la de comprobación.

Seguimiento de las categorías de resolución de problemas

De acuerdo con los resultados del estudio, *en la secuencia didáctica* y en *el cuestionario final* aparece una tercera categoría de resolución de problemas: la algebraica, que no se presentó en el cuestionario inicial. En ella se concretan las cuatro etapas para la expresión de la generalidad propuesto por Mason, et al (op cit 1985), es decir, algunos estudiantes muestran que pueden ver un patrón, comunicar el patrón, registrarlo de forma simbólica y probar la validez de sus fórmulas. En la siguiente tabla se muestra cómo cambiaron las categorías de resolución de problemas, del *cuestionario inicial* al *cuestionario final.*

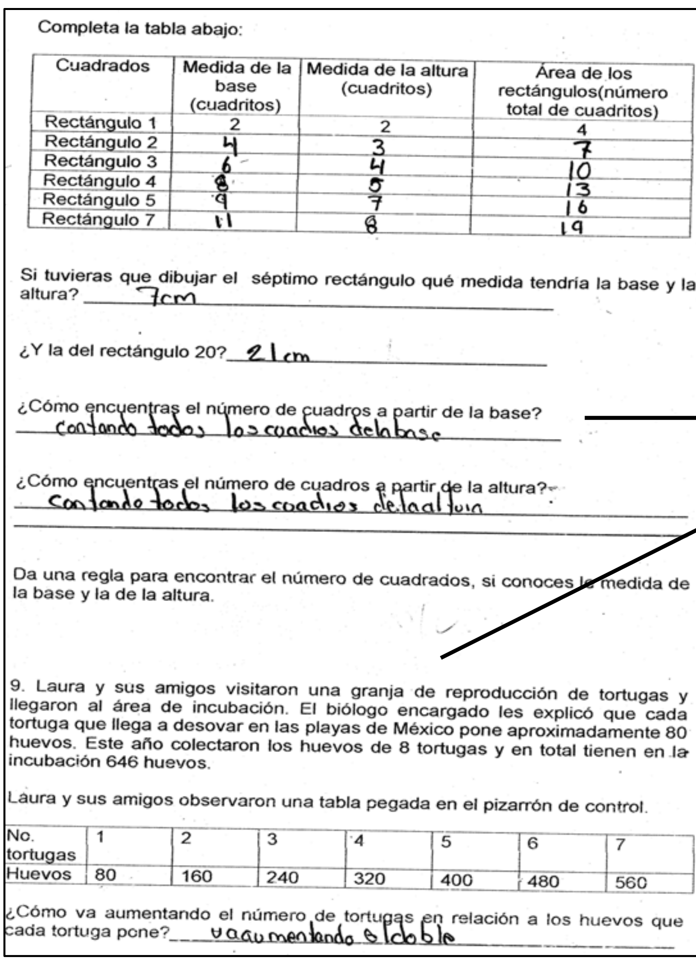
Tabla No. 22 Evolución de las categorías de resolución de problemas

	Aritmética	Pre-Algebraica	Algebraica
Cuestionario inicial	DLG, ALC, EFH	LAV, CED, CCB, CHLR, YBR	
Cuestionario final	DLG	ALC	CHLR, YBR, LAV EFH, CCB, CED

De acuerdo con la tabla anterior, siete alumnos tienen un claro avance en sus estrategias de resolución de problemas, tres de ellos (CHLR, YBR y LAV) responden aproximadamente el 90% de las preguntas evidenciando las cuatro etapas del trabajo con la generalidad (ver, decir, registrar y probar), pasando de una categoría pre-algebraica a una algebraica. Tres alumnos (EFH, CCB y CED) responden aproximadamente el 65% de las preguntas con estrategias algebraicas, avanzando a esta categoría, el caso más notorio es el de EFH que pasa de la aritmética a la algebraica al final del estudio. Un alumno (ALC) pasa de la categoría aritmética a la pre-algebraica, es decir puede percibir patrones pero no llega a su expresión simbólica. Sólo un estudiante no muestra evolución (DLG).

Las siguientes imágenes ejemplifican cómo EFH en el cuestionario inicial da una respuesta aritmética y en el cuestionario final logra dar una respuesta algebraica.

Cuestionario inicial: Respuesta Aritmética. EFH


Completa la tabla abajo:

Cuadrados	Medida de la base (cuadritos)	Medida de la altura (cuadritos)	Área de los rectángulos(número total de cuadritos)
Rectángulo 1	2	2	4
Rectángulo 2	4	3	7
Rectángulo 3	6	4	10
Rectángulo 4	8	5	13
Rectángulo 5	9	7	16
Rectángulo 7	11	8	19

Si tuvieras que dibujar el séptimo rectángulo qué medida tendría la base y la altura? 7cm

¿Y la del rectángulo 20? 21cm

¿Cómo encuentras el número de cuadros a partir de la base? contando todos los cuadros de la base

¿Cómo encuentras el número de cuadros a partir de la altura? contando todos los cuadros de la altura

Da una regla para encontrar el número de cuadrados, si conoces la medida de la base y la de la altura.

9. Laura y sus amigos visitaron una granja de reproducción de tortugas y llegaron al área de incubación. El biólogo encargado les explicó que cada tortuga que llega a desovar en las playas de México pone aproximadamente 80 huevos. Este año colectaron los huevos de 8 tortugas y en total tienen en la incubación 646 huevos.

Laura y sus amigos observaron una tabla pegada en el pizarrón de control.

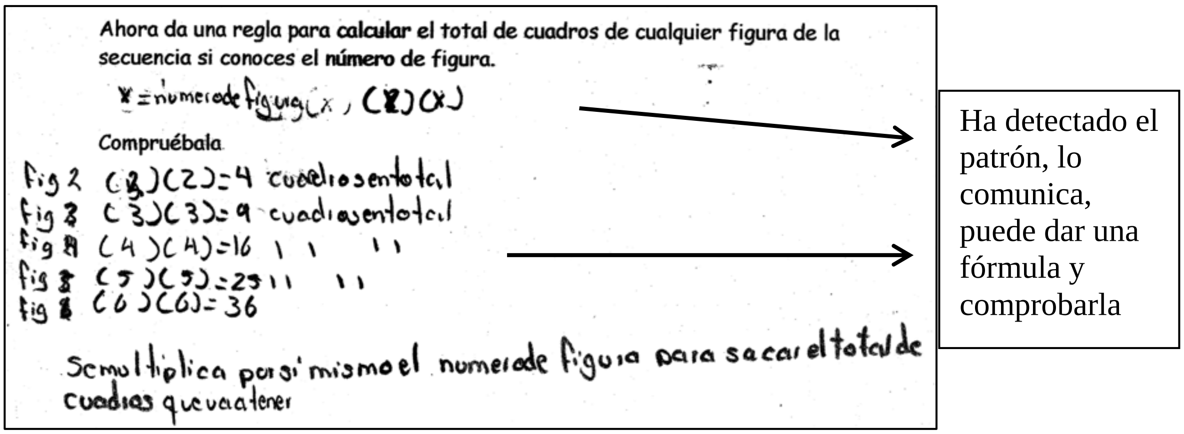
No. tortugas	1	2	3	4	5	6	7
Huevos	80	160	240	320	400	480	560

¿Cómo va aumentando el número de tortugas en relación a los huevos que cada tortuga pone? va aumentando el doble

No detecta el patrón, no lo expresa, por lo tanto tampoco existe una regla

De acuerdo con la imagen el alumno EFH no percibe cuál es el patrón que sigue la secuencia de la base y de la altura, por ello no lo puede aplicar por ejemplo para la figura No. 7 y para la No. 20 y responde “contando”. No da una regla. También se puede observar que en la pregunta No. 9 no percibe cómo aumenta el número de tortugas.

Cuestionario final: Respuesta Algebraica. EFH



Como se observa en la imagen, EFH logra dar una regla para calcular el número de cuadros que lleva la base e incluso puede comprobarla, esto muestra que desarrolla las cuatro etapas que proponen Mason et al. (op cit, 1985) para la Expresión de la Generalidad.

- **Niveles de conceptualización matemática**

En este análisis se realizó un comparativo del cuestionario inicial y del cuestionario final. Como resultado de este análisis se puede afirmar que al responder secuencias geométricas (Pregunta No. 2 del cuestionario inicial) sólo el 60% de los estudiantes tuvo éxito. En actividades similares del cuestionario final casi el 80% de los alumnos logra hacerlo.

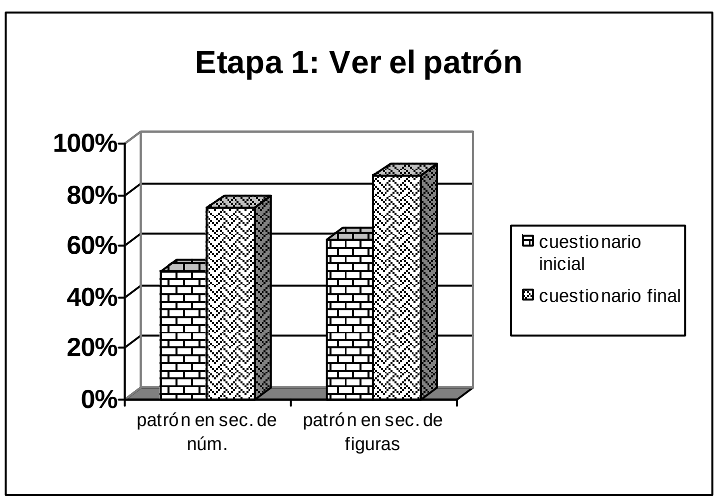
En el cuestionario final, en actividades con variable como número específico, seis estudiantes logran responder satisfactoriamente y de ellos, tres plantean una ecuación para hacerlo. En el cuestionario final, en promedio el 69% de los estudiantes logra dar una regla simbólica en secuencias geométricas de números y algunos pueden dar una regla en actividades con variables en relación funcional. De acuerdo con lo anterior, se puede afirmar que sólo un alumno permaneció en un nivel de conceptualización matemática bajo.

Las siguientes gráficas muestran algunas de las actividades que, en contraste con el cuestionario inicial, han mostrado un avance considerable en cuanto al nivel de logro, tomando en cuenta las cuatro etapas para el trabajo de la generalidad que Mason et al. (op cit, 1985) proponen: ver un patrón, comunicarlo, expresarlo, comprobarlo.

Etapa 1: Ver un patrón

En secuencias geométricas, de números o de figuras

Gráfica No. 15

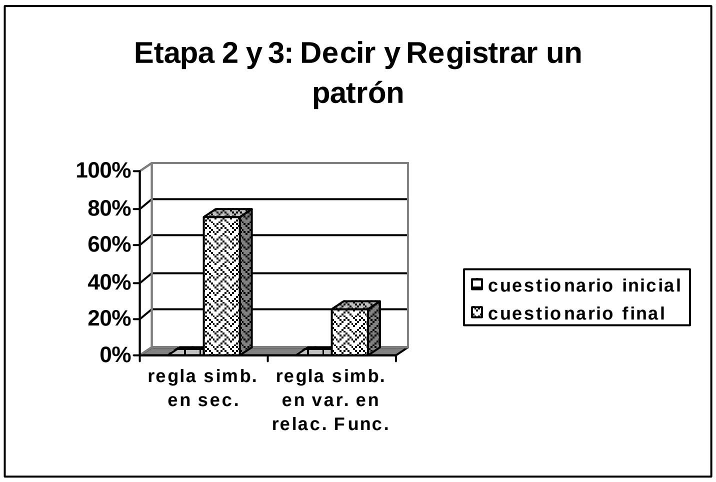


Como se observa, en el cuestionario final son más los alumnos que logran ver el patrón en actividades que contienen secuencias geométricas de números o de figuras. También pueden explicar cómo lo hicieron, cumpliéndose así la segunda etapa del trabajo de la generalidad que es “Decir el patrón” (escrita o verbalmente).

Etapa 2 y 3: decir y registrar el patrón

Elaborar una regla para una secuencia y para una relación funcional

Gráfica No. 16

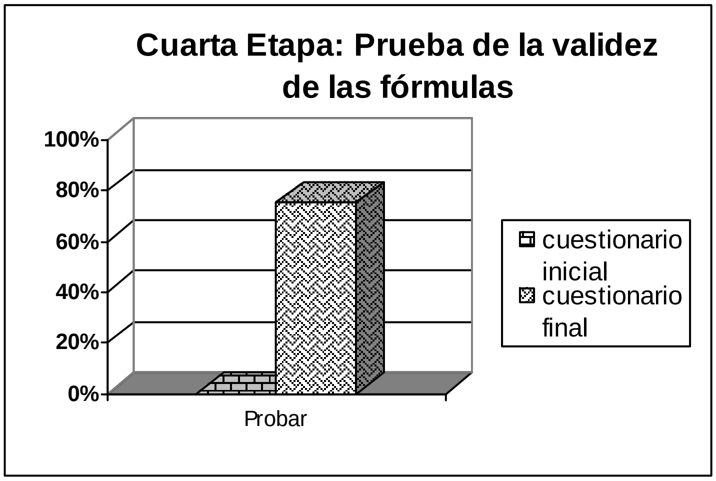


De acuerdo con la gráfica, en el *Cuestionario final*, se verifica que existe un importante avance en la elaboración de reglas simbólicas. Es preciso apuntar que en el *cuestionario inicial* los estudiantes que detectaban el patrón lo comunicaban pero sólo con palabras, sin embargo, después de trabajar con la secuencia los alumnos han logrado plantear reglas simbólicas, situación que hace referencia a la tercera etapa del trabajo con la generalidad.

Etapa 4: Probar la validez de las fórmulas

Secuencias geométricas

Gráfica No. 17



La gráfica No.17 muestra que existe un importante avance en la comprobación de las fórmulas de los alumnos (la cuarta etapa del trabajo con la generalidad), pues en el cuestionario inicial sólo trascribían los datos de las tablas iniciales a la tabla de comprobación. En esta etapa realizan operaciones que se relacionan con la regla que plantearon.

De acuerdo con este análisis podemos afirmar que los alumnos han mejorado significativamente los niveles de conceptualización matemática pues logran percibir un patrón, comunicarlo, registrar una regla y probarla.

Seguimiento de los niveles de conceptualización matemática

En la siguiente tabla se muestra cómo evolucionaron los niveles de conceptualización matemática, del *cuestionario inicial* al *cuestionario final.*

Tabla No. 23 Evolución de los niveles de conceptualización

	Bajo	Medio	Alto
Cuestionario inicial	DLG, ALC, EFH	LAV, CED, CCB, CHLR, YBR	
Cuestionario final	DLG	ALC	CHLR, YBR, LAV EFH, CCB, CED

Así, podemos afirmar que después de concluir las tres etapas del estudio los alumnos CHLR, YBR, LAV, CCB, CED y EFH han cambiado de nivel de conceptualización matemática, los primeros cinco alumnos pasan de un nivel de conceptualización matemática medio a un nivel alto. El EFH pasa de nivel de conceptualización bajo hacia nivel alto. ALC pasa de nivel de conceptualización bajo a medio y sólo DLG permanece en el nivel bajo.

CONCLUSIONES

El estudio que se reporta en esta tesis investigó las dificultades que presentan los estudiantes de secundaria para acceder al pensamiento algebraico, vía los procesos de generalización. Los objetivos del estudio fueron conocer cuáles son las dificultades que presentan los estudiantes en el acceso al pensamiento algebraico vía los procesos de generalización, saber si el diseño de una secuencia didáctica que considerara los aspectos cognitivos y el uso de distintos lenguajes (numérico, geométrico y algebraico) era viable y de qué manera influían los diferentes tipos de interacción social y sus efectos y relaciones en los diversos dominios matemáticos. La metodología utilizada en esta investigación fue de corte cualitativo. Se trabajó con ocho estudiantes de primero y segundo grado de secundaria de una escuela pública del Distrito Federal, en México, con edades variando entre los 12 y 14 años. El estudio se llevó a cabo en tres etapas. La primera giro en torno de la aplicación de un cuestionario inicial de contenidos matemáticos y de una entrevista ad-hoc. En la segunda, se abordó la instrumentación de una secuencia didáctica y en la tercera se trabajó en torno de la aplicación de un cuestionario final de contenidos matemáticos.

Se realizaron análisis de los resultados obtenidos en cada una de las etapas del estudio de acuerdo a las siguientes categorías: Niveles de logro, Categorías de resolución de problemas, Niveles de conceptualización matemática e Interacción social.

Del análisis realizado con respecto al *Cuestionario Inicial*, podemos afirmar que tres estudiantes mostraron un nivel de logro bajo, es decir, presentaron dificultades en la percepción de regularidades, mientras que cinco estudiantes evidenciaron un nivel de logro medio que mostraba que sólo percibían la regularidad pero no podían expresarla, registrarla y probarla.

En cuanto a las categorías de resolución de problemas, los tres estudiantes de nivel de logro bajo utilizaron estrategias aritméticas, es decir, resolvían predominantemente con sumas o restas. Los cinco alumnos ubicados en el nivel de logro medio evidenciaron un pensamiento aditivo en transición al multiplicativo, por lo que se encontraron dentro de la categoría pre-algebraica, desarrollando las preguntas con multiplicaciones y divisiones pero sin poder percibir una variación conjunta de las variables, situación que les dificultó expresar regla o fórmulas. De acuerdo con lo anterior, los niveles de conceptualización matemática encontrados en esta etapa fueron bajo y medio, respectivamente.

En la segunda etapa del estudio, la *Secuencia didáctica*, encontramos que los alumnos durante el desarrollo de la secuencia didáctica mostraron niveles de logro alto, medio y bajo, así como categorías de resolución aritméticas, pre-algebraicas y algebraicas. De esta manera, en esta etapa del estudio surgieron tanto el nivel de logro alto como la categoría de resolución algebraica, las cuales no aparecieron en la resolución del *Cuestionario inicial*. Es decir, en la fase del estudio de la instrumentación de la propuesta didáctica los alumnos lograron concluir las cuatro etapas para el trabajo con la generalidad (ver, decir, registrar y probar un patrón), las propuestas por Mason et al. (op cit, 1985).

También se verificó que se promovió una interacción social entre los estudiantes, del tipo explicación multivocal, la cual tiene efectos positivos en los aspectos cognitivos pues en la pareja que se detectó, existió una evolución en los niveles de conceptualización matemática y en las categorías de resolución de problemas, pasando de nivel bajo a alto y de medio a alto cada estudiante.

En la última etapa del estudio, la de la aplicación de un *Cuestionario final*, se verificó una evolución tanto en los niveles de conceptualización matemática como en las categorías de resolución de problemas. Sólo un alumno permaneció en el nivel de conceptualización matemático bajo y en la categoría de resolución de problemas aritmética, detectadas al inicio de la investigación.

En general, las dificultades encontradas a lo largo del estudio tienen relación con el pensamiento aditivo que evidenciaron los estudiantes, lo que no les permitía observar patrones, regularidades y relaciones funcionales. Esto desembocaba en la dificultad para utilizar significativamente el lenguaje algebraico que es la forma de expresar la generalidad en matemáticas.

Asimismo el estudiante encuentra dificultades para comprender la expresión simbólica de relaciones funcionales entre variables porque no observa la existencia de una variable que depende de otra.

Conclusión Final

El desarrollo del pensamiento algebraico vía los procesos de generalización es eficaz cuando se logran interconectar diferentes contenidos matemáticos y se promueve la interacción social de la forma explicación multivocal.

Considerando que las estrategias de resolución de problemas que involucran procesos de generalización generalmente parten de una representación concreta, es conveniente diseñar actividades que promuevan esta representación pero que paulatinamente generen en el estudiante la necesidad de una forma simbólica que le permita calcular, por ejemplo, un término más alejado en una secuencia, o bien, sean capaces de representar una relación funcional. De esta manera se logra que el estudiante dé uso y significado a las expresiones algebraicas, como lo muestran al menos siete de los estudiantes que formaron parte de este estudio.

Finalmente, podemos apuntar que la generalidad puede llevar tiempo con algunos alumnos, pero ofrece la posibilidad de trabajar diferentes contenidos matemáticos al mismo tiempo que se trabajan los algebraicos y ello representa una gran ventaja para el docente de matemáticas que desea enseñar los contenidos curriculares de manera significativa y no parcializada. Asimismo, el estudiante accede a todos los temas del currículo y es él quien encuentra las relaciones existentes.

Síntesis de Resultados

Tabla No. 24 Evolución de las Categorías de Resolución de Problemas

Nombre de la categoría	Caracterización	Cuestionario inicial	Cuestionario final
Aritmética	Se refiere a las respuestas que se caracterizan porque han sido resueltas mediante adiciones y sustracciones explícitas o mentales, o bien, a través de conteos. No detectan patrones geométricos. Perciben cambios de una variable pero no en relación con otra (sólo la ven verticalmente), no expresen reglas generales que las represente.	DLG, ALC, EFH	DLG
Categoría Prealgebraica	Se refiere a las respuestas que se caracterizan por un razonamiento aditivo en transición al pensamiento multiplicativo, es decir, son capaces de ver una variación proporcional o percibir un patrón en una secuencia geométrica, pero no pueden traducir la regularidad a una regla simbólica.	LAV, CED, CCB, CHLR, YBR	ALC
Categoría Algebraica	Se refiere a aquellas respuestas que evidencian un pensamiento multiplicativo, es decir, los alumnos perciben la variación, pueden aplicarla para otros casos, pueden expresar oral y de forma simbólica dicha variación y pueden comprobarla.		CHLR, YBR, LAV EFH, CCB, CED

Síntesis de Resultados

Tabla No. 25 Evolución de los Niveles de Conceptualización Matemática

Nivel conceptual	Caracterización	Cuestionario inicial	Cuestionario final
Alto	Los alumnos evidencian un claro pensamiento multiplicativo que les permite detectar patrones en secuencias aritméticas y geométricas, observar la variación proporcional, resolver problemas que involucran el uso de la variable como número específico, como número general y como relación funcional. Asimismo pueden plantear reglas simbólicas.	DLG, ALC, EFH	DLG
Medio	Los alumnos evidencian un pensamiento aditivo en transición al multiplicativo, resuelven las secuencias aritméticas y en ocasiones las geométricas, no llegan a una expresión general simbólica.	LAV, CED, CCB, CHLR, YBR	ALC
Bajo	Los alumnos evidencian un pensamiento aditivo. Resuelven secuencias aritméticas pero no geométricas. No grafican y no resuelven problemas de variable como número específico, no ven la relación entre dos variables en forma horizontal (una en relación con la otra). No expresan reglas generales.		LAV CHLR, YBR, EFH, CCB, CED

Referencias Bibliográficas

Ainley, J., Wilson, K., y Bills, L. (2003).Generalising the context and generalising the calculation. En N.A. Pateman, B.J. Dougherty, y J.T. Zilliox (Eds.). Proccedings of the 27 PME Internacional Conference, 2, 9-16

Amit, M y Neria, D. (2008). Methods for de Generalization of non-linear patterns used by talented pre-algebra students. En PME 32 and PME-NA XXX, 2008. 2, 49-56

Anthony, G y Hunter, J. (2008). Developing algebraic generalization strategies. En PME 32 and PME-NA XXX, 2008. 2, 65-72

Beatty, R. (2007) en Lamberg, T., & Wiest, L. R. (Eds.). (2007). Proceedings of the 29 annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Stateline (Lake Tahoe), NV: University of Nevada, Reno. Pp. 148 -155

Booth, L.(1984).Álgebra: Childrens Strategies and Errors. UK NFER- NELSON. Windsor

Butto, C. (2005). Introducción temprana al pensamiento algebraico: una experiencia en la escuela primaria. En tesis doctoral. Departamento de Matemática Educativa. México: CINVESTAV-IPN

Butto, C. y Rojano, T. (2004). Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basaso en la geometría. Educación matemática. (México), Vol. 16, (abril) pp. 113-148

Carraher, D., Martínez, M., Shliemmann, (2008). ZDM Mathematics Education 40:3-22. Early algebra and mathematical generalization. Springer

Cortina, J. L. (2007). El aprendizaje de las matemáticas en Iberoamérica según lo informado en el documento PISA 2006, Science Competencies for Tomorrow's World. Educación Matemática, 19(3), 115-122.

Da Rocha Falcão, J.T (1993) Algebra como ferramenta de resolução de problemas in: Schliemann, A.D., Carraher, D.W.; Spinillo, G., Meira, L.L & Rocha Falcão,J.T Estudos em Psicologia da Educação Matemática: Recife, editora Universitaría, UFPE.

Durán Ponce, R. (1999). Reconocimiento de patrones en secuencias numéricas y de figuras, por alumnos de sexto grado de primaria. En Tesis de Maestría Departamento de Matemática Educativa. México: CINVESTAV-IPN.

Ferrara, F.(2003). Metaphors as vehicles of knowledge: An exploratory analysis. En N.A. Pateman, B.J. Dougherty, y J.T. Zilliox (Eds.). Proccedings of the 27thPME Internacional Conference, 2, 373-380

Filloy, E. and Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. For the learning of Mathematics, 9(2), 19-25

Hernández, R., Fernández, C., Baptista, P. (1998). Metodología de la investigación. México: Mc Graw Hill

Hoyles, C & Sutherland, R .(1989) Logo mathematics in the classroom Routledge (1985) Ways of Learning in a computer based environment: some findings of the logo maths project. Institute of Education University of London

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (2006). El aprendizaje del español y las Matemáticas en la educación básica en México. Sexto de primaria y tercero de secundaria. México: INEE.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (2007). PISA 2006 en México. México: INEE.

Joanne Rossi F. D. Rivera en Lamberg, T., & Wiest, L. R. (Eds.). (2007). Proceedings of the 29th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Stateline (Lake Tahoe), NV: University of Nevada, Reno. Pp. 179-185

Kaput, J & Blanton. (2001). Generalizing and progressively formalizing in a third-grade mathematics classroom: conversations about and odd numbers. In Plenary presentation at PME- NA XXII; Tucson, AZ; October 7-10.

Kieran, C. (1992). “The Learning and Teaching of School Algebra” en D.A. Grows (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* Nueva York: MacMillan, pp. 390-419

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. En Ferrara, F., Pratt, D. y Robutti, O. (2006). Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, present and future. Reino Unido: Publicaciones Sense.

Lackoff, G., y Nuñez, R. (2000). Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being. New York, USA: Basic Books

Lambertus, Mojica y Berenson (2007) en Lamberg, T., & Wiest, L. R. (Eds.). (2007). Proceedings of the 29th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Stateline (Lake Tahoe), NV: University of Nevada, Reno. Pp. 215-216

Lee, L. (1996). En Bednarz, et al. (eds.) (1996). Approaches to Algebra. Netherlands: Kluwer Academic Publishers. Pp. 87-106

Lee, L. (2001). Early algebra- but which algebra?. In Proceedings of the 12th ICMI Stydy Conference. Australia, Vol. 2 pp 392-399.

Mac Gregor, M & Stacey, K. (1993). Seeing to patern and writing to rule. PME, Psychology of Mathematics Education Ibaraki, Japan.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D., and Gowar, N. (1985). Routes to Roots of Algebra. Great Britain: The Open University Press.

Matz, M. (1980). « Towards a Computational Theory of Algebraic Competence", Journal of Mathematical Behaviour, vol. 3, núm. 1, pp. 93-166

Radford, L., Demers, S., Guzmán, J., y Cerulli, M. (2003). Calculators, graphs, gestures and the production of meaning. En N.A. Pateman, B.J. Dougherty, y J.T. Zilliox (Eds.). Proccedings of the 27thPME Internacional Conference, 4, 55-62

Radford,L.(2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. In PME-NA 2006 Proceedings.

Reggiani, M. (1994). Generalization as a basic for algebraic thinking: observations with 11- 12 years old pupils. In Proceeding of the XVIII PME Conference Lisboa, Portugal. pp 97-104.

Rico, L. (1996). The role of representation systems in the learning of numerical structures. In: L. Puig, & A. Gutierrez (Eds.), Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1, pp. 87–102). Valencia: University of Valencia.

Rojano, T. (1995). La Matemática Escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. CINVESTAV-IPN: México

Rossi, J. y Rivera, F. (2007). Generalization in algebra: the foundation of algebraic thinking and reasoning across the grades. ZDM Mathematics Education (2008) 40:1

Sfard, A. y Linchevsky, L. (1994). "The gains and Pitfalls of Reification – The Case of Algebra". Educational Studies in Mathematics, vol. 26, pp. 191-228

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. Education Studies in Mathematics, 20, 147–164.

Steele, D. (2008). Seventh-grade students' representations for pictorial growth and change problems. ZDM Mathematics Education (2008) 40:97-110

Ursini, S. (1993). Pupils Approaches to Different Characterizations Variable of in Logo. In doctoral Thesis, University of London Institute of Education.

Ursini, S. y Trigueros, M. (2000). La conceptualización de la variable en la enseñanza media. Educación matemática. (México), Vol. 12, (agosto).

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variable. In: A. F. Coxford, & A. P. Shulte (Eds.), The ideas of algebra, K–12 (pp. 8–19). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Secretaría de Educación Pública. (2006). Matemáticas. Educación Básica. Secundaria. Programas de Estudio 2006. México: SEP.

Sociedad Andaluza de educación Matemática Thales. (2003). Principios y Estándares para la Educación Matemática. Granada: Proyecto Sur Industrias Gráficas.

ANEXOS

Cuestionario Inicial

Cuestionario diagnóstico

Nombre:_______________________________________
Escuela:____
Curso:________________________ **Fecha:**___/___/___
Hora de inicio:___________**Hora de término:**___________

Instrucción: *Lee con atención los problemas que son presentados, en caso de alguna duda pregúntale a la entrevistadora. !!!Buena Suerte!!!!!*

1. Completa las siguientes secuencias

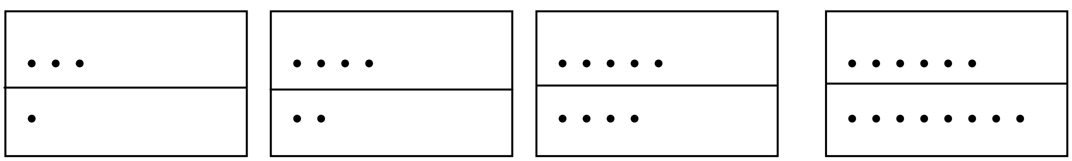
a) 8, 12, 16, ____ , 24, ____ , ____

b) ____ , ____ , _____, 15, 18, 21

c) 15, 10, 5, ____ , ____

d) 16, 11, 6, ____ , ____

2. Observa las siguientes figuras de la secuencia



a) Ahora, dibuja las figuras que le siguen

3. La mamá de Jorge registró su peso año tras año. Algunos registros se presentan a continuación, obsérvalos.

20 kg 5 años	44 kg 12 años	21 kg 8 años	16 kg 4 años	40 kg 11 años
23 kg 7 años	35 kg 10 años	12 kg 3 años	29 kg 9 años	24 kg 6 años

Ahora completa la tabla con los valores correspondientes a cada tarjeta.

Peso	Edad
12 Kg	3

¿Qué puedes decir de cómo cambió el peso en relación a los años de Jorge?

____

____

4. Una fábrica de plástico lleva el registro del número de máquinas y de la cantidad de plástico producido conforme muestra la siguiente tabla:

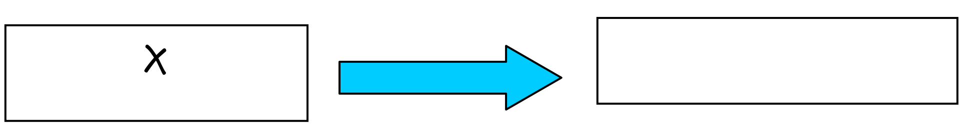
Número de máquinas	Kilos de plástico
1	3
2	5
3	7
4	9
5	11
6	13
7	15
8	17

¿En cuántos kilos de plástico aumenta la producción con cada máquina?

____

¿Cuántas máquinas necesito para producir 18 kilos de plástico?____

Da una regla para calcular la cantidad de plástico producido, considera el número de máquinas como “X”

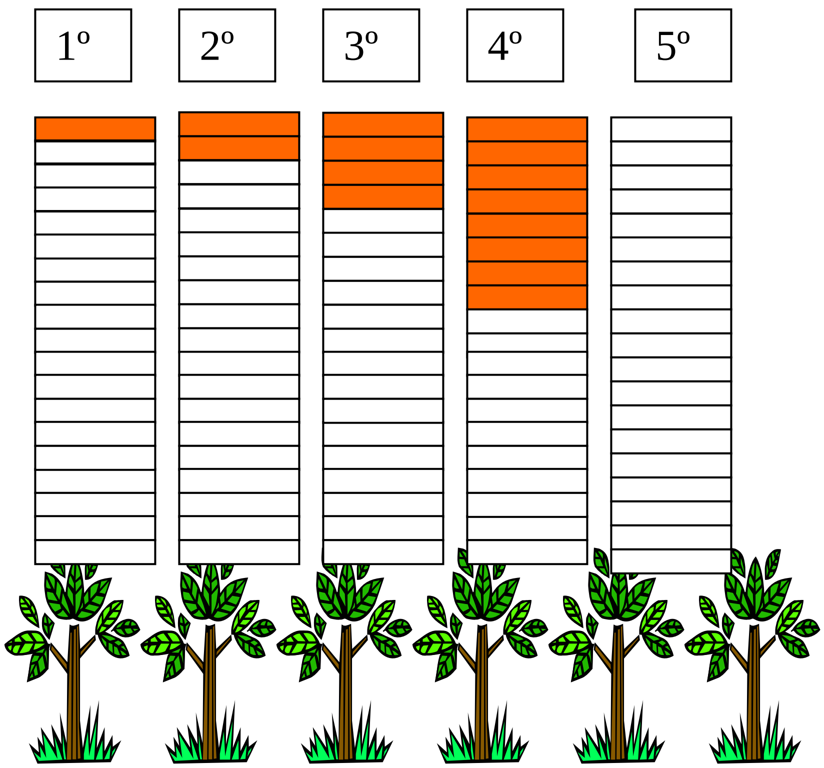


número de máquinas kilos de plástico

Verifica tu respuesta:

nº de máquinas (X)	kilos de plástico
1	3
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	

5. Observa los siguientes condominios que están siendo pintados



¿Cuántos pisos deberán pintar en el 5º edificio?

____

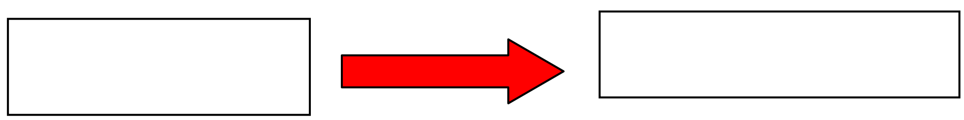
¿Cómo obtuviste el número de pisos que habrán de pintarse?

____

Llena la tabla con los siguientes datos

Edificio	Número de pisos pintados
1º	1
2º	
3º	
4º	
5º	

Da una regla para encontrar el número de pisos pintados si conoces el número del edificio



número del edificio pisos pintados

Verifica tu respuesta:

nº del edificio	pisos pintados
1º	1
2º	
3º	
4º	
5º	

¿Cuántos pisos pintados tendría un sexto edificio?

¿Cuántos pisos pintados tendría un 9º edificio?

¿Cómo encuentras el número de pisos pintados si conoces el número del edificio?

¿Si conoces el número de pisos pintados en un edificio, cómo encuentras el número de pisos pintados en el siguiente edificio?

Haz la gráfica del ejercicio anterior.

6. Don José les va a dar un aguinaldo de $ 1.200 a sus dos hijos. Al menor le toca la tercera parte de lo que le toca al mayor ¿Cuánto le toca a cada uno?

7. Don José les va a dar un aguinaldo de $1 200 a sus dos hijos. Al menor le va a dar la mitad de lo que le toca al mayor ¿Cuánto le toca a cada uno?

8. Observa la secuencia de rectángulos

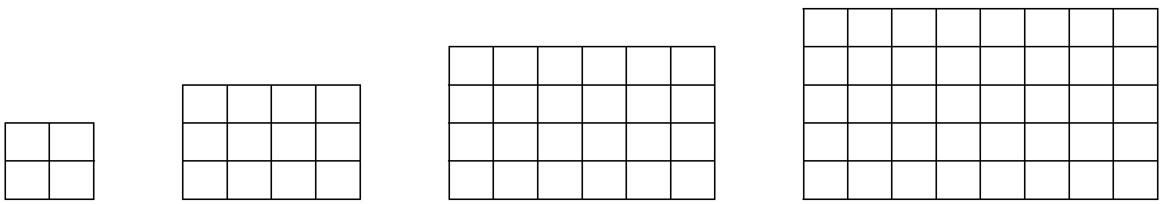


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

Dibuja la quinta figura que le sigue

¿Cuántos cuadros tiene la base y cuántos cuadros tiene la altura?____

____

Responde:
¿Cuántos cuadros hay en la 1ª figura?_______________
¿Cuántos cuadros hay en la 2ª figura?_______________
¿Cuántos cuadros hay en la 3ª figura?_______________
¿Cuántos cuadros hay en la 4ª figura?_______________
¿Cuántos cuadros hay en la 5ª figura?_______________

Completa la tabla abajo:

Cuadrados	Medida de la base (cuadritos)	Medida de la altura (cuadritos)	Área de los rectángulos(número total de cuadritos)
Rectángulo 1	2	2	4
Rectángulo 2			
Rectángulo 3			
Rectángulo 4			
Rectángulo 5			
Rectángulo 7			

Si tuvieras que dibujar el séptimo rectángulo qué medida tendría la base y la altura? ____

¿Y la del rectángulo 20?_______________________________

¿Cómo encuentras el número de cuadros a partir de la base?
____

¿Cómo encuentras el número de cuadros a partir de la altura?
____
____

Da una regla para encontrar el número de cuadrados, si conoces le medida de la base y la de la altura.

9. Laura y sus amigos visitaron una granja de reproducción de tortugas y llegaron al área de incubación. El biólogo encargado les explicó que cada tortuga que llega a desovar en las playas de México pone aproximadamente 80 huevos. Este año colectaron los huevos de 8 tortugas y en total tienen en la incubación 646 huevos.

Laura y sus amigos observaron una tabla pegada en el pizarrón de control.

No. tortugas	1	2	3	4	5	6	7
Huevos	80	160	240	320	400	480	560

¿Cómo va aumentando el número de tortugas en relación a los huevos que cada tortuga pone?____

Grafica la información de la tabla

¿Cómo es la proporción de huevos por cada tortuga?

Ahora, imagina que no sabes cuántos huevos pondrá cada tortuga. Da una regla para calcular la cantidad de huevos que pondrá cada tortuga si conoces el número de tortugas.

10. En un teatro se vendieron 325 boletos cuyo costo fue de $120 para adultos y $80 para niños, cada uno. Del total de la venta se reunieron $3000.

¿Puedes decir cuántos boletos de cada precio se vendieron?

Para comprobar tu respuesta considera que tenemos dos clases de boletos: los de $120 de adulto y los de $80 para niños.

$120	$80

Recuerda que el número total de boletos vendidos es de 325, si consideras que “X” representa el número de boletos vendidos de $120, y “Y” a los boletos de $80, entonces, x + y es igual a los 325 boletos vendidos.

En consecuencia,
120 por ___ + 80 por ____ sería igual a los $ 3 000 del total de la venta

Comprueba tus valores

Secuencia Didáctica

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

Maestría en Desarrollo Educativo

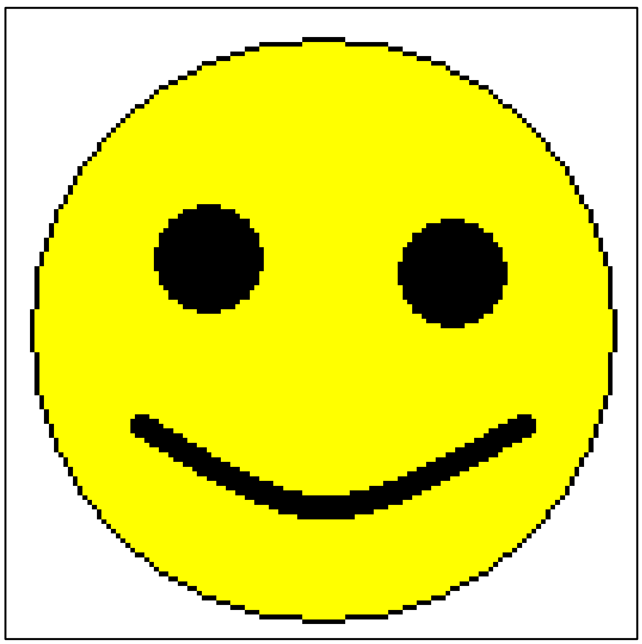
Línea: Educación Matemática

HOJAS DE TRABAJO

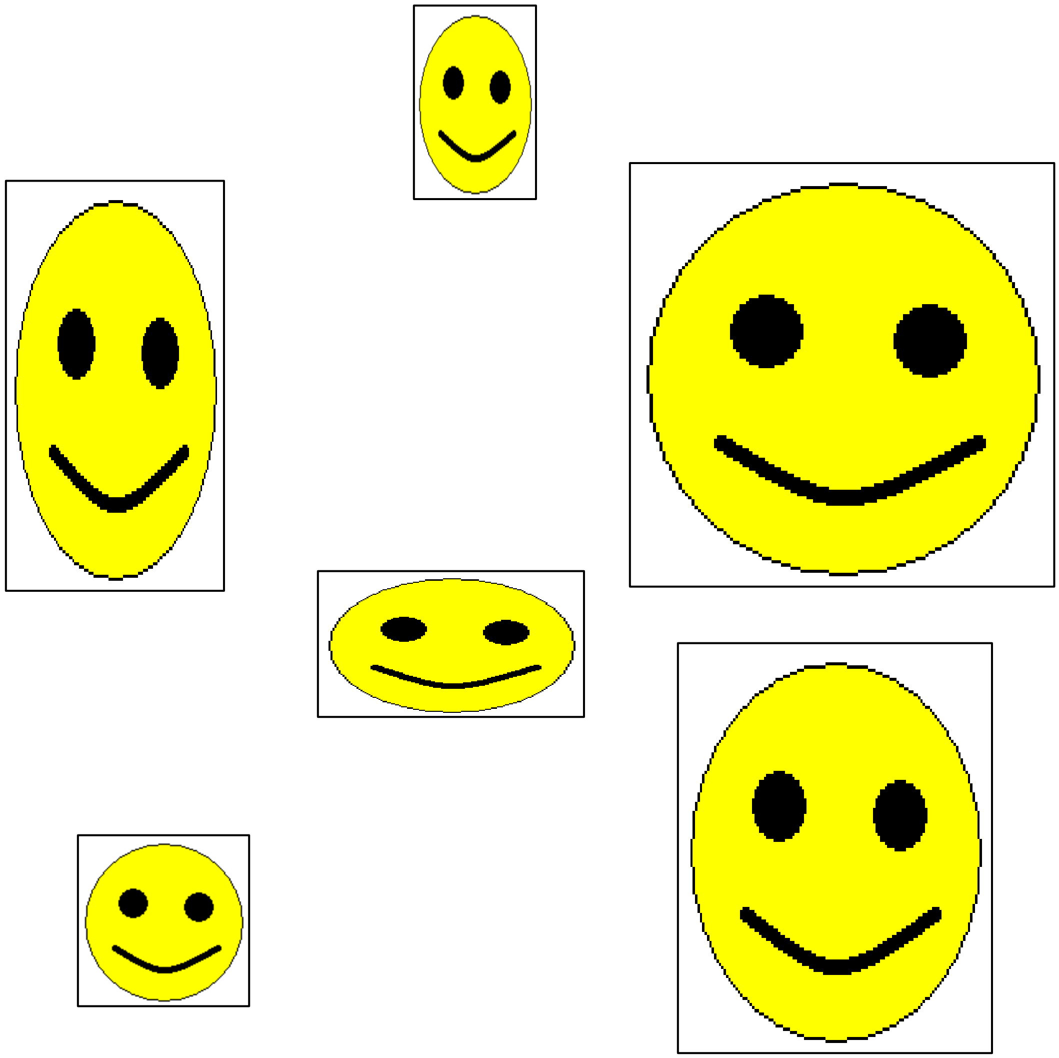
México, D.F., junio 2008

Nombre del alumno:____

1. Observa el dibujo



Ahora marca con una cruz las figuras que sean una fotografía de la figura anterior



¿Qué observaste para elegir las figuras?

____

____

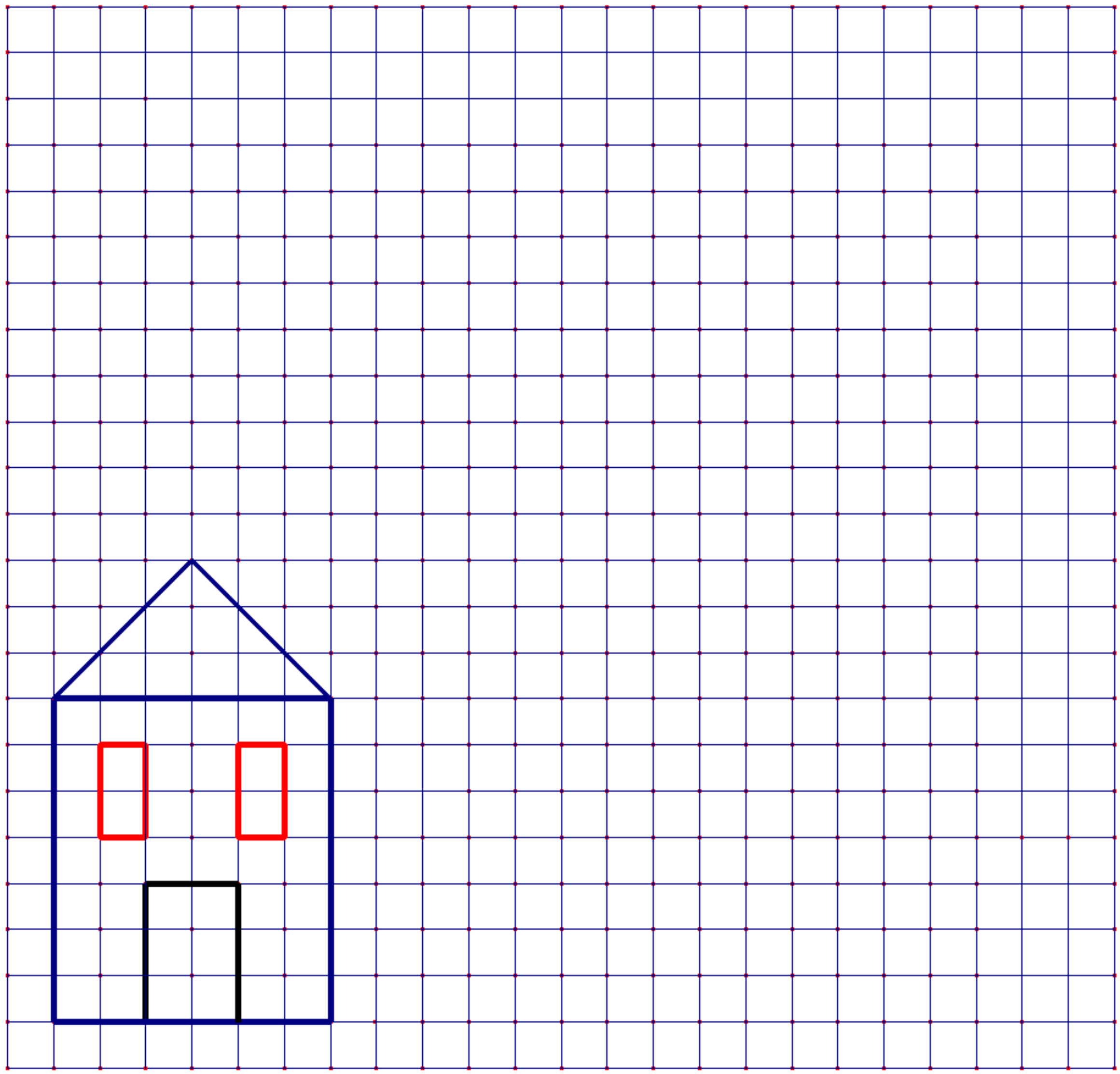
____

¿Por qué las otras figuras no son fotografías?

____

____

2. Observa la casa pequeña y dibújala dos veces más grande



¿Qué observaste para dibujar la casa más grande?

____

____

¿Cómo la dibujaste dos veces más grande?

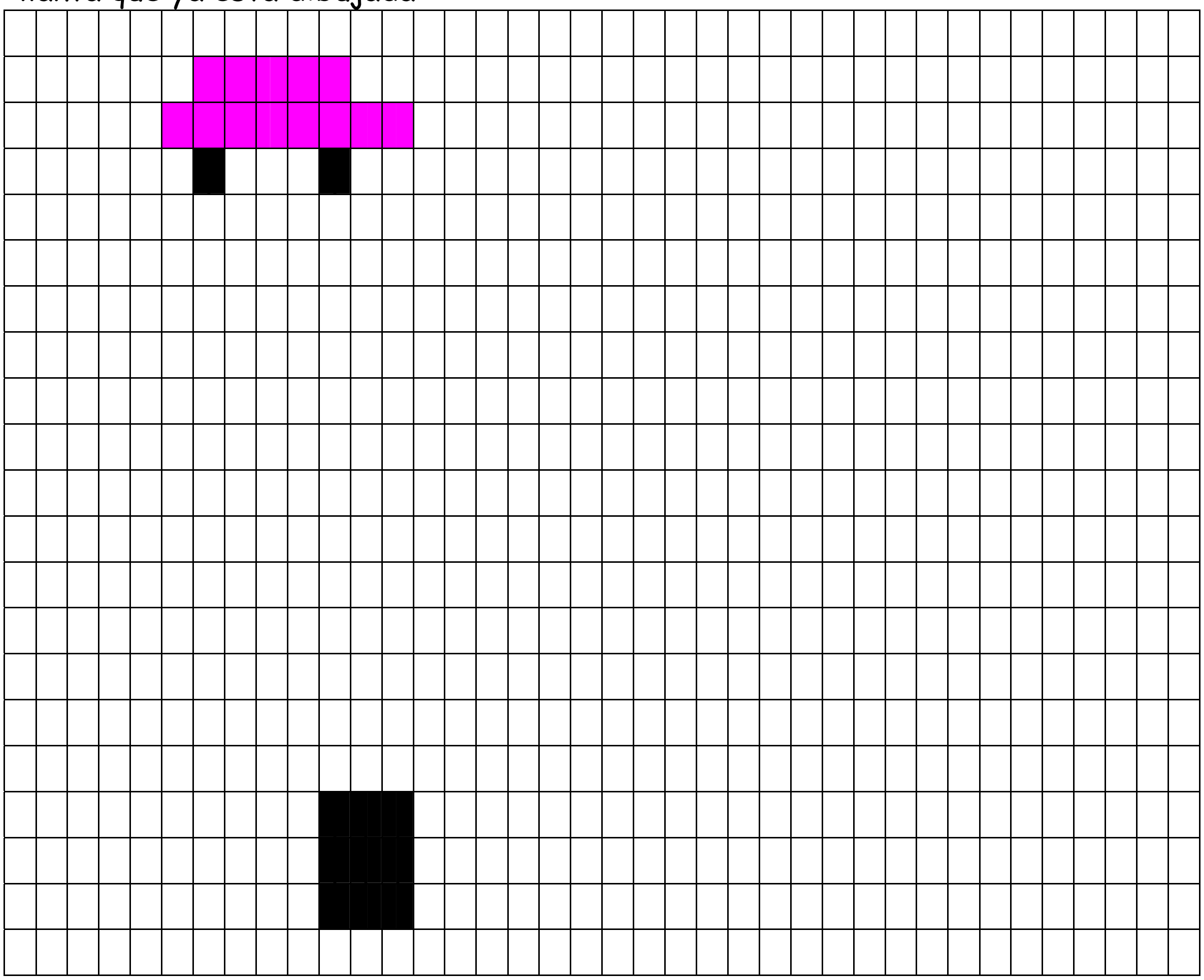
____

____

Considera “d” la longitud de una de las paredes de la casa, escribe la fórmula que te ayudaría a calcular la longitud de la casa a escala

Si ahora se tiene que trazar una casa que la mitad de la casa original, escribe una fórmula que te permita calcular la longitud de las paredes de la casa a escala

3. Observa el carro pequeño y termina el carro más grande. Toma en cuenta la llanta que ya está dibujada



¿Qué hiciste para saber cuántos cuadritos debías dibujar para completar el carrito grande?

____

____

¿Cuántas veces se amplió el carrito?

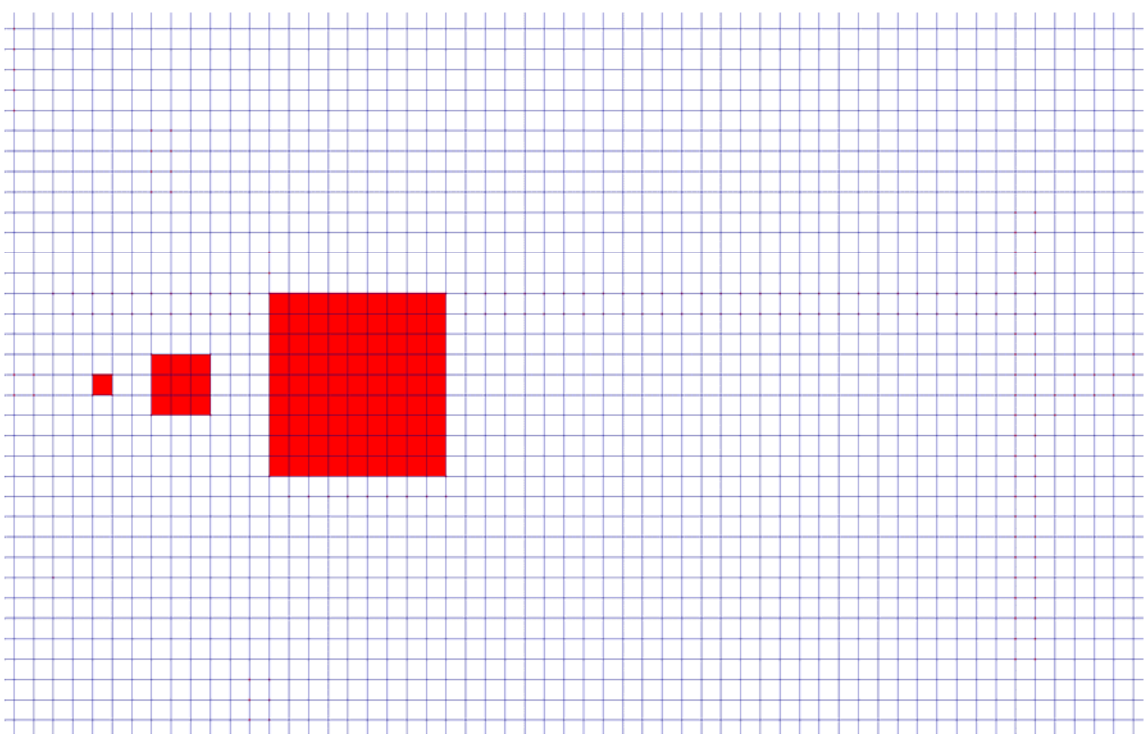
____

____

Escribe una fórmula que sirva para saber cuál será la longitud del techo del carro a escala. Considera "t" como la longitud del techo del carro original

4. Observa las siguientes series de figuras. Traza la siguiente y responde las preguntas

a)



¿Cómo trazaste la cuarta figura?

¿Qué consideras para seguir la secuencia de figuras?

¿Cuántos cuadros tendrá por lado la figura 5?

¿Si conoces cuántos cuadros tiene la figura anterior cómo calculas cuántos cuadros tendrá la siguiente?

b)

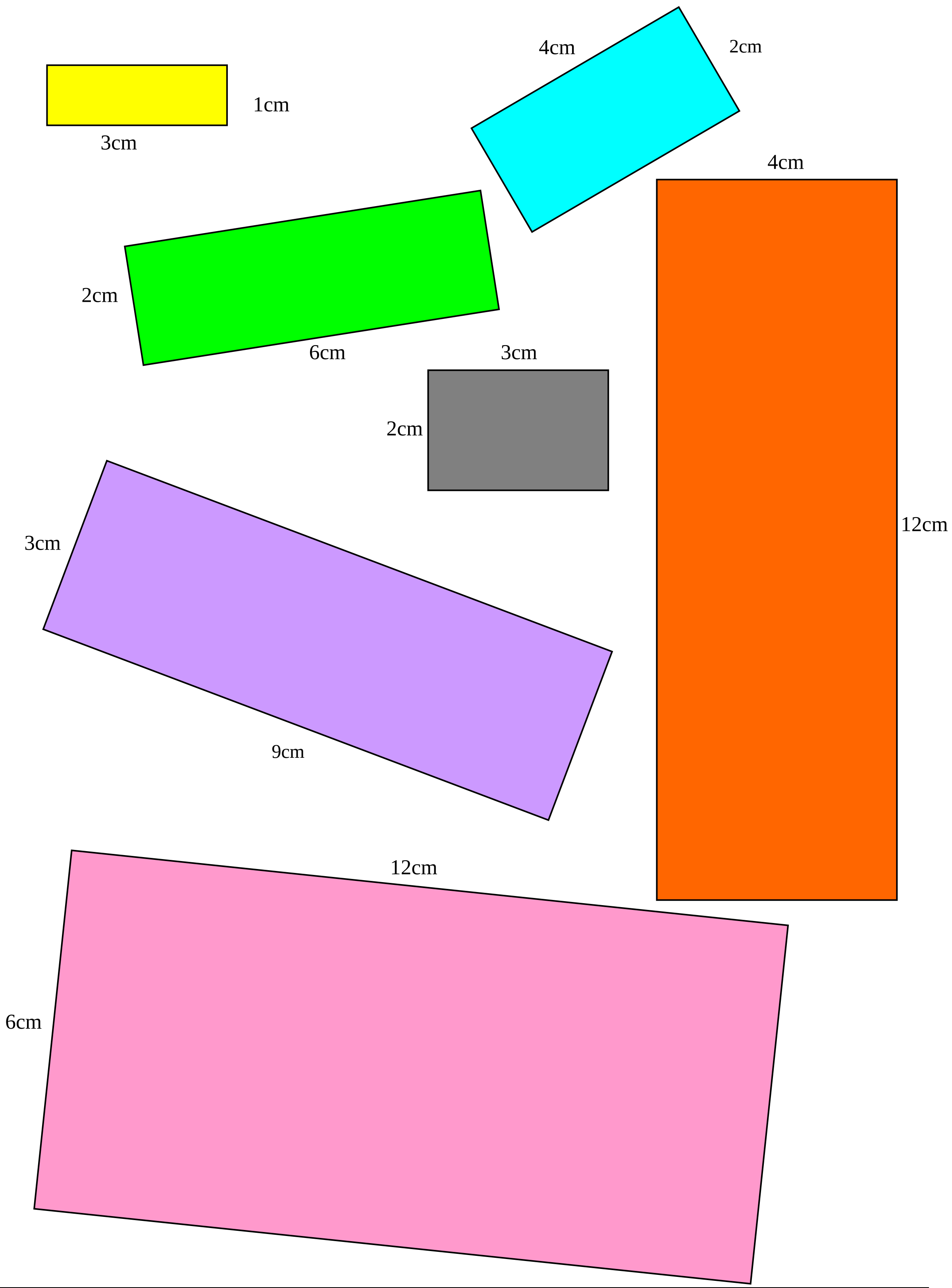
¿Cómo trazaste la tercera figura?

¿Cuántos cuadros tendrá de largo la figura 4?

¿Cuántos cuadros tendrá de ancho la figura 4?

¿Qué patrón sigue la secuencia de figuras?

5. Observa los siguientes rectángulos y une con una línea las parejas que sean proporcionales.



¿Qué tomaste en cuenta para formar las parejas?

Llena la tabla colocando las medidas de los rectángulos de una de las parejas que encontraste

Color del Rectángulo	Medida del ancho	Medida del largo

¿Por qué son proporcionales?

Escribe por qué determinaste que eran proporcionales las otras parejas

6. Alejandra preparará hot cakes para sus hijos. La caja indica que para preparar 6 hot cakes se necesitan los siguientes ingredientes:

Ingredientes	6 hot cakes
Harina	1 taza
Leche	1 taza
Huevo	2 piezas
Mantequilla	3 cucharadas

Los sobrinos de Alejandra llegaron a visitarla por lo que tendrá que preparar más hot cakes, llena la tabla con la cantidad de ingredientes que se necesitan para 12 hot cakes:

Ingredientes	12 hot cakes
Harina	
Leche	
Huevo	
Mantequilla	

¿Qué pasó con la cantidad de ingredientes para prepara 12 hot cakes respecto a los que se necesitan para preparar 6 hot cakes ?

____

____

Completa la tabla con los ingredientes que se necesitan para preparar 18, 24 y 30 hot cakes:

Ingredientes	18 hot cakes	24 hot cakes	36 hot cakes
Harina			
Leche			
Huevo			
Mantequilla			

¿Cuántas cucharadas de mantequilla se necesitan para preparar 30 hot cakes?

____

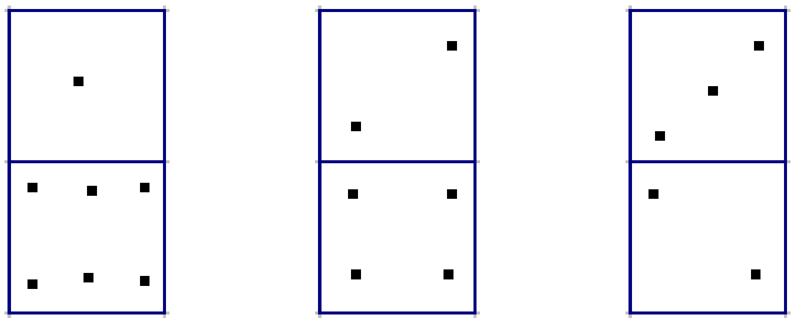
¿Cómo lo supiste?____

____

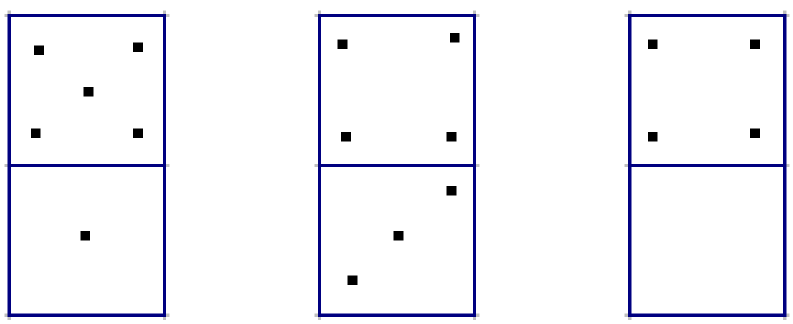
¿Cómo cambian las cantidades de ingredientes si en lugar de preparar para 6 personas se prepara para 18?______________________________________

____

7. Observa la secuencia de las fichas de dominó



Ahora elige la ficha que sigue



¿Qué observaste para elegir la ficha?

____

____

¿Cómo van cambiando los puntos de las casillas superiores?

____

¿Y los de las casillas inferiores?

____

Si llamamos "n" al número de puntos ¿cuál sería la fórmula que representa al cambio de puntos de las casillas superiores?

¿Cuál es la fórmula para las casillas inferiores?

Verifícalo

8. Observa la siguiente secuencia de figuras

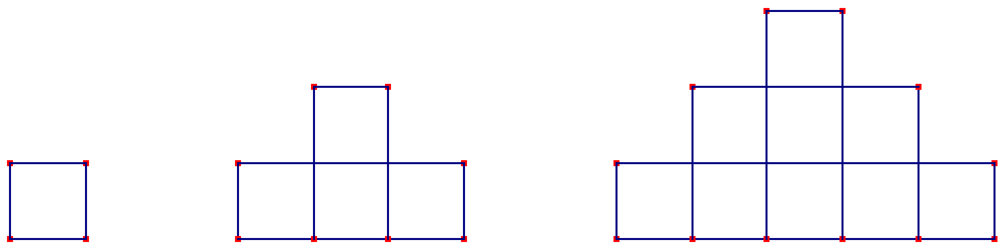


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 …

¿Cuántos cuadrados llevará la base de la figura que sigue?

___

¿Cuántos cuadritos tendrá en total la figura?

___

¿Cuántos cuadrados tendrá la figura número 5 en su base?

___

Calcula el total de cuadros que tendrá

¿Cuántos cuadrados se deben trazar en la base para formar la figura número 10?

___

¿Cómo lo supiste?

___

Si ahora se quiere saber cuántos cuadrados tiene en su base la figura 30, ¿Cómo lo encuentras?

___

___

___

Escribe una regla para calcular el número de cuadrados de la base para cualquier figura de la secuencia.

Comprueba tu regla utilizando la siguiente tabla

# de figura	Regla	cuadritos de la base
1		1
2		3
3		
4		
5		
6		
…		
30		

9. Observa la secuencia y completa las que faltan

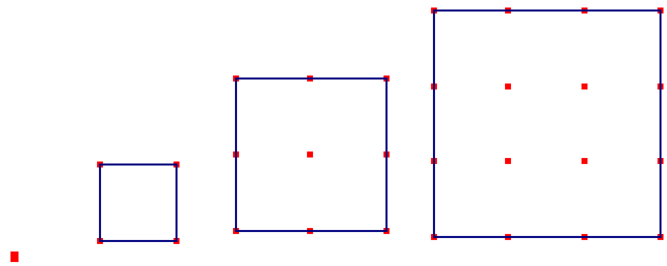


Fig.1 Fig.2 Fig.3 Fig.4 ________ Fig.5

____

Fig.6

Ahora llena la tabla

Número de figura	Número de puntos en la base	Número total de puntos en la figura
1	1	1
2	2	4
3		
4		
5		
6		

Si conoces el número de puntos de la base ¿Puedes decir el número total de puntos que tendrá la figura?________________ ¿Cómo lo calculas?__________
____
____

Escribe una regla que represente ese cálculo

Aplícala para calcular el número total de puntos de la figura que tiene 10 puntos en la base

¿La regla funciona para cualquier figura de la secuencia?

____

____

Pruébala para la figura número 30

10. Traza las figuras que siguen en la secuencia

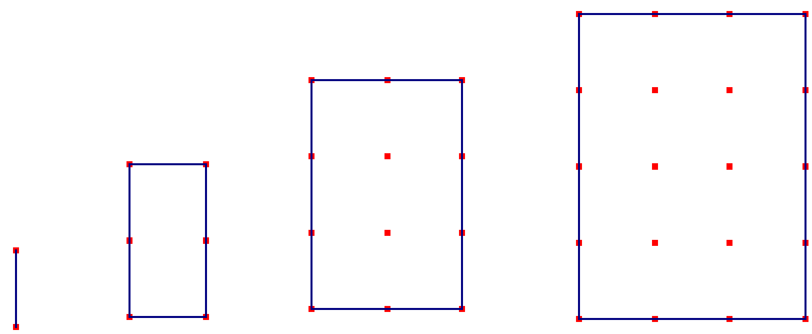


Fig.1 Fig.2 Fig.3 Fig.4 Fig.5

Fig. 6

Llena la tabla

Figura	No. de puntos en la base	No. total de puntos en la figura
1	1	2
2		
3		
4		
5		
6		

Calcula el número de puntos que tendrá la figura 10

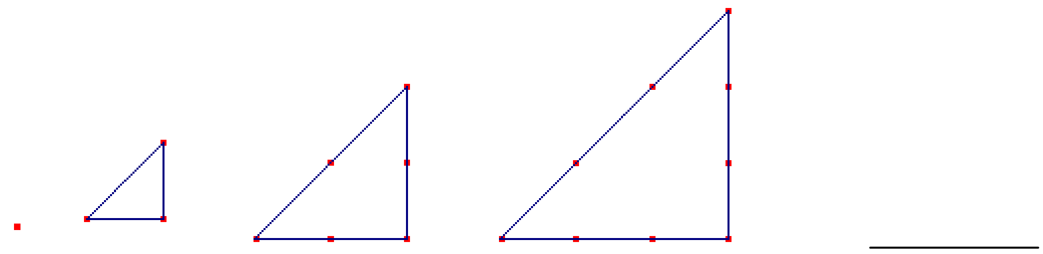
¿Cuántos tendrá la figura 20?

____

Escribe una regla que permita calcular el total de puntos de todas las figuras de la secuencia

Verifícala

11. Completa la secuencia



1 2 3 4 5

____

6

Completa la tabla

Figura	No. de puntos en la base	No. total de puntos en la figura
1	1	1
2	2	3
3		
4		
5		
6		

Sin trazar la figura 10 ¿Puedes decir el número de puntos que tendrá en la base? ______ ¿Puedes encontrar el total de puntos que tendrá la figura?

¿Cómo encuentras el total de puntos de la figura si conoces el número de puntos que tiene la base?

Escribe una regla que lo represente

Comprueba la regla para las figuras 7 a la 10

12. Ana compró un DVD y una televisión. Si la televisión costó el doble de lo que costó el DVD y Ana pagó en total por los dos $4500 ¿Cuánto costó cada aparato?

13. Al sumar el sueldo de mi hermano y el mío juntamos $15 000. Si yo gano el doble de lo que él gana ¿Cuál es el sueldo de cada uno?

14. El dueño de la papelería de la esquina le encargó al vendedor que completara el cartel del precio de las fotocopias. Ayúdalo a terminarlo

Número de copias B/N	Precio
5	1
10	2
15	
	4
25	
40	
	12
100	

¿Cómo encontraste los valores que faltaban?

____

____

¿Qué relación existe entre el número de copias y su precio?

____

____

Si un cliente sólo pide 13 copias ¿Cuánto le cobrarán?

____

____

¿Cómo lo obtuviste?

____

____

Escribe una regla para poder obtener el total de dinero que pagará un cliente por cualquier cantidad de fotocopias

Compruébala

Cuestionario Final

Nombre:____
Escuela:____
Fecha:____

Cuestionario final

Instrucciones: Lee con atención las siguientes actividades y responde. Si tienes alguna duda pregunta a la aplicadora. ¡Suerte!

1. Continúa con las secuencias y responde

a) 4,16,64,___,____,____

¿Cómo calculas el término siguiente?

Escribe la regla que sirve para calcular un término de la secuencia si conoces el término anterior

Compruébala

b) 3, 7, 15, 31, ____, ____

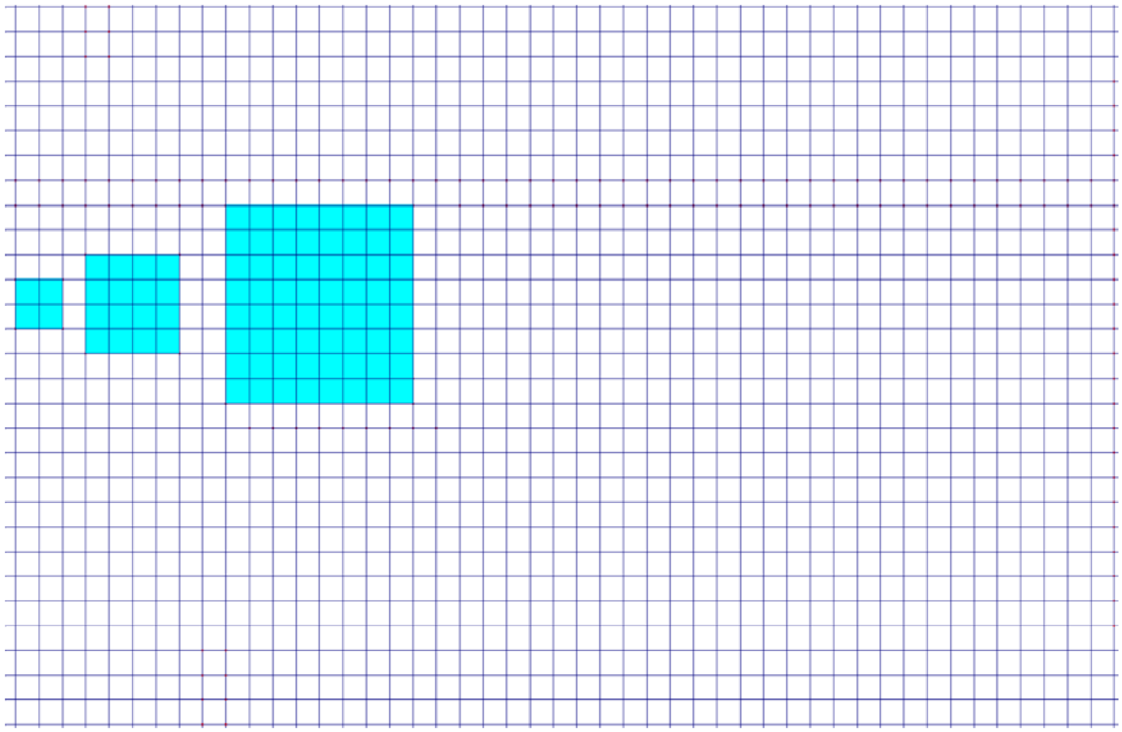
¿Cómo encuentras el siguiente término de la secuencia?

Escribe una regla para calcular el siguiente término, si conoces el anterior

Compruébala

2. Observa las siguientes series de figuras. Traza la siguiente y responde las preguntas

a)

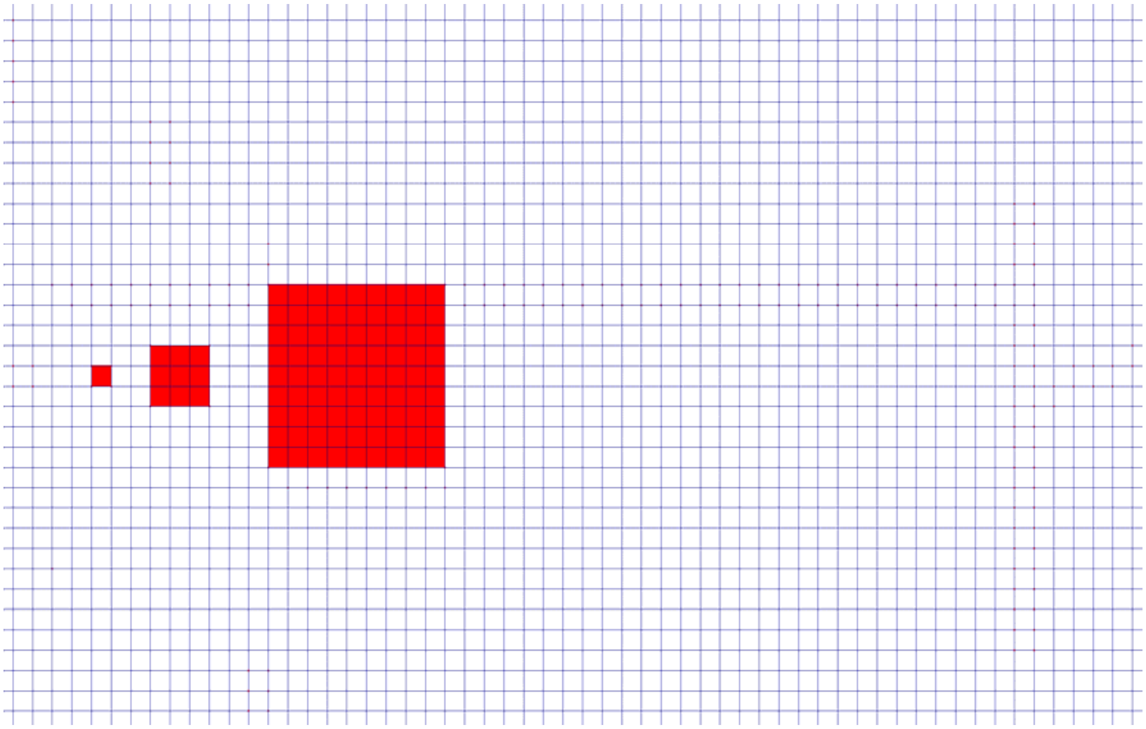


¿Cómo trazaste la cuarta figura?

¿Qué observas en la secuencia de figuras?

¿Cuántos cuadros tendrá por lado la figura 5?

b)



¿Cómo trazaste la cuarta figura?

¿Qué consideras para seguir la secuencia de figuras?

¿Cuántos cuadros tendrá por lado la figura 5?

¿Si conoces cuántos cuadros tiene la figura anterior cómo calculas cuántos cuadros tendrá la siguiente?

3. Observa la siguiente secuencia de figuras

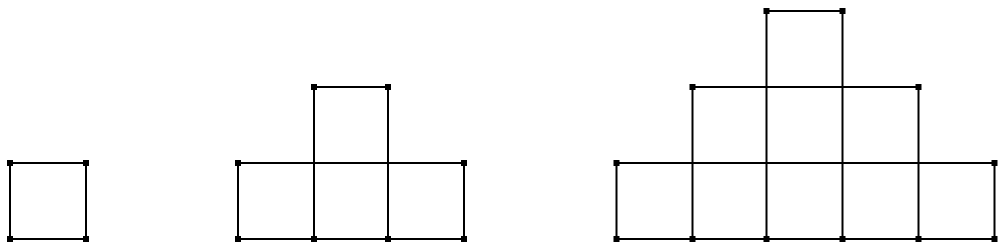


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 …

¿Cuántos cuadrados llevará la base de la figura 4?

____

¿Cuántos cuadritos tendrá en total la figura 4?

____

¿Cuántos cuadrados tendrá la figura número 5 en su base?

____

Calcula el total de cuadros que tendrá

¿Cuántos cuadrados se deben trazar en la base para la figura número 10?

____

¿Cómo lo supiste?

____

¿Cuántos cuadros tiene en total?

Si ahora se quiere saber cuántos cuadrados tiene en la base la figura 30, ¿Cómo lo encuentras?

____

____

____

Escribe una regla para calcular el número de cuadrados de la base para cualquier figura de la secuencia.

Comprueba tu regla utilizando la siguiente tabla

# de figura	Regla	cuadritos de la base
1		1
2		3
3		
4		
5		
6		
…		
30		

Ahora da una regla para calcular el total de cuadros de cualquier figura de la secuencia si conoces el número de figura.

Compruébala

4. Traza las figuras que siguen en la secuencia

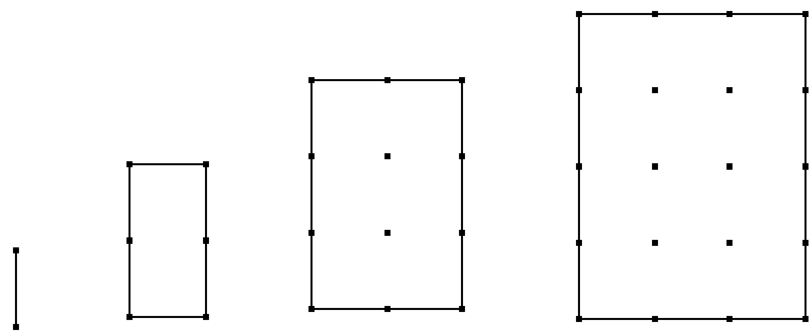


Fig.1 Fig.2 Fig.3 Fig.4 Fig.5

Fig. 6

Llena la tabla

Figura	No. de puntos en la base	No. total de puntos en la figura
1	1	2
2		
3		
4		
5		
6		

Calcula el número de puntos que tendrá la figura 10

¿Cuántos tendrá la figura 20?
____

Escribe una regla que permita calcular el total de puntos de todas las figuras de la secuencia

Verifícala

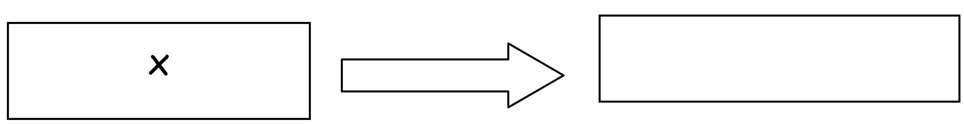
5. Una fábrica de plástico lleva el registro del número de máquinas y de la cantidad de plástico producido conforme muestra la siguiente tabla:

Número de máquinas	Kilos de plástico
1	3
2	5
3	7
4	9
5	11
6	13
7	15
8	17

¿En cuántos kilos de plástico aumenta la producción con cada máquina?
____

¿Cuántas máquinas necesito para producir 18 kilos de plástico?____

Si consideras "x" como número de máquinas ¿Cuál sería la regla para calcular la cantidad de kilos de plástico que se producen?



número de máquinas kilos de plástico

Comprueba tu regla:

nº de máquinas (X)	regla	kilos de plástico
1		3
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

6. Alberto está planeando sus vacaciones de fin de año y para juntar más dinero decide podar el pasto de los vecinos los fines de semana. Le pide a su papá $1200 para comprar una podadora. Alberto cobrará $80 pesos por cada trabajo.
Realiza una tabla donde se observe la ganancia para 1, 10, 15, 20 y 30 trabajos.

Número de trabajos	Ganancia

Con cuántos trabajos puede obtener $1000 pesos libres si le paga a su papá

Ahora escribe una regla para calcular la ganancia de Alberto tomando en cuenta el dinero que le debe a su papá

Utiliza tu regla para saber ¿Con cuántos trabajos puede pagarle a su papá y obtener $2000 de ganancia?

7. Mi papá compró dos celulares, uno para mi hermano pequeño y uno para mí. El mío costó el triple de lo de mi hermano. En total mi papá pagó $1 600. ¿Cuál es el precio de cada celular?

8. Al sumar el sueldo de mi hermano y el mío juntamos $20 000. Si yo gano el doble de lo que él gana ¿Cuál es el sueldo de cada uno?