UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

MAESTRÍA EN DESARROLLO EDUCATIVO

RAZONAMIENTO Y PRUEBA EN GEOMETRÍA: PROCESOS DE VALIDACIÓN DE PROPOSICIONES MATEMÁTICAS EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN DESARROLLO EDUCATIVO

LÍNEA: EDUCACIÓN MATEMÁTICA

P R E S E N T A

ERNESTO GERMÁN LARIOS MATUK

DIRECTOR DE TESIS: DR. RODRIGO CAMBRAY NÚÑEZ

MÉXICO, D. F., 2007

DEDICATORIAS

A mi esposa Tulia

Compañera de vida, de lucha y de logros

por todo el amor, apoyo, comprensión,

paciencia y tiempo que me has dado

Con todo mi amor

A mis hijos Germán Antonio y Ana Cristina

Con el estímulo de su existencia y el reflejo

de mi vida en ustedes, para mí todo es posible

A mis padres José Gonzalo y Ma de los Ángeles

Ejemplo de amor y sabiduría

Al Dr. Rodrigo Cambray Núñez

Con mi agradecimiento y gratitud

por su valiosa ayuda prestada para

el desarrollo de este trabajo y por su

excelente calidad profesional y humana

AGRADECIMIENTOS

A la Dirección General de Educación Secundaria Técnica, por la beca comisión otorgada para cursar la Maestría en Desarrollo Educativo en la Universidad Pedagógica Nacional y para desarrollar el trabajo de tesis.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, por el apoyo otorgado como becario para cursar la Maestría en Desarrollo Educativo en la Universidad Pedagógica Nacional.

A los lectores de esta tesis Dra. Mariana Sáiz Roldán, Dr. Gonzalo Zubieta Badillo, Dr. Gonzalo López Rueda y Dr. Tenoch E. Cedillo Ávalos por sus valiosos comentarios, los cuales sirvieron para enriquecer este trabajo.

NOTA

Para el formato de presentación de esta tesis se siguieron las recomendaciones de los siguientes manuales:

Ibáñez B., B., 1995 (2a ed.), *Manual para la elaboración de tesis,* Consejo Nacional para la Enseñanza e Investigación en Psicología/ Trillas, México.

American Psychological Association, 2001 (5a ed.), *The publication manual of the American Psychological Association*, APA, Washington, DC. [Versión en español: *Manual de estilo de publicaciones de la American Psychological Association*, 2002 (2a ed.), Manual Moderno, México.]

RESUMEN

El propósito de esta investigación fue identificar y describir qué procesos de validación siguen alumnos de segundo y tercer grados de educación secundaria en México para legitimar proposiciones, insertas en la resolución de problemas; también se indagó cómo construyen el significado de lo que es comprobar, en los procesos de comunicación, en forma hablada y escrita, entre ellos y con el profesor. Esta investigación parte del estudio de los esquemas personales de validación de los alumnos, propuestos por Harel y Sowder (1998).

El trabajo se llevó a cabo con 24 alumnos de educación secundaria con distinto desempeño académico. Doce alumnos cursaban el segundo grado en una escuela privada, y otros 12 cursaban el tercer grado en una escuela pública. Para el desarrollo del trabajo se agrupó a los alumnos en parejas mixtas. Se plantearon 7 actividades en 2 sesiones de trabajo con cada grupo de alumnos. En la primera sesión se trabajó la validación de 3 proposiciones presentadas en forma de problemas. En la segunda sesión se trabajó la validación de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, un cuadrilátero, un pentágono y un polígono convexo. Se recurrió principalmente al trabajo explicativo de los alumnos y a cuestionamientos planteados por el investigador, así como por los sujetos participantes en la investigación.

ÍNDICE

Lista de figuras

Lista de cuadros

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

La investigación en educación matemática respecto al aprendizaje de la geometría a nivel secundaria en México es relativamente escasa. Son pocos los trabajos de investigación relacionados con procesos de validación desarrollados en el aula. Las investigaciones llevadas a cabo se pueden ubicar básicamente en el ámbito de las nuevas tecnologías, en especial con programas computacionales de geometría dinámica.

En México, la comprobación como objeto de enseñanza se incluye en el área de contenido de la geometría, en la asignatura académica de matemáticas del plan y programas de estudio de 1993, en segundo y tercer grados de la educación secundaria, elaborados por la Secretaría de Educación Pública (SEP). Los programas destacan varios aspectos de la enseñanza de la geometría, entre los que se contemplan: a) la iniciación gradual al razonamiento deductivo en situaciones de demostración que el profesor proponga, "[...] considerando que la demostración en matemáticas es un objetivo que requiere de tiempo y una preparación cuidadosa" (SEP, 1994, p. 40), y b) la preparación del razonamiento deductivo por medio de la exploración y del reconocimiento de propiedades y características de las figuras geométricas al trazarlas y construirlas.

Para esta investigación se estudiaron los procesos de validación que desarrollan alumnos en el ámbito de interacción entre ellos y con el maestro, mediante observaciones, para tener evidencia de cómo argumentan y validan su racionalidad matemática. El enfoque de los planes y programas de la educación básica, tanto de primaria como de secundaria, plantea el acercamiento y la construcción de significados matemáticos mediante resolución de problemas, invariablemente permite que los alumnos desarrollen diversos procesos de validación.

Este estudio se desarrolló alrededor de un tema de segundo grado de la educación secundaria: la suma de los ángulos interiores de un polígono convexo. Los procesos de descubrimiento por parte de los alumnos del resultado de esta suma, los conducen al planteamiento de conjeturas, así como a la comprobación de una proposición matemática en un ambiente de resolución de problemas.

El problema de investigación

El objetivo primordial de este trabajo de investigación educativa fue identificar y describir cuáles son los procesos de validación que utilizan alumnos de segundo y tercer grados de educación secundaria para legitimar una proposición matemática. Se indagó cómo construyen los alumnos el significado de lo que es *comprobar*, en los procesos de actividades, en forma hablada y escrita, entre ellos y con el profesor, y cuáles son los productos de sus procesos de validación, cómo los explican y cuáles son las condiciones de actividades de los participantes en estos procesos.

Se estudió la riqueza y la variedad de los procesos de validación insertos en la resolución de problemas, mediante los cuales los alumnos comprueban la certeza o veracidad de una proposición matemática en sesiones de trabajo con el investigador.

Los modos como se conciben, se abordan y se resuelven los problemas reflejan los procesos de aprendizaje, contemplando diferentes componentes como son las representaciones, las formas y los procedimientos que se emplean, así como los conocimientos que se requieren y se aplican. En cuanto al análisis de las actividades realizadas por los sujetos participantes en este estudio, se identificaron y describieron procesos de validación utilizados por ellos —alumnos de segundo y tercer grados de educación secundaria— para legitimar una proposición matemática. Para ello, se llevaron a cabo las siguientes actividades.

1.- Se analizó el *Plan y programas de estudio* de 1993 para la asignatura de matemáticas de los tres grados para determinar qué teoremas de la geometría se enseñan en la educación secundaria.

2.- Se escogieron los teoremas de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, un cuadrilátero, un pentágono y un polígono convexo para desarrollar actividades en las sesiones de trabajo.

3.- Se elaboraron 7 hojas de actividades conforme al programa de estudio de segundo grado de educación secundaria (SEP, 1994) y a los libros de texto autorizados para este grado (Barrón, Sánchez y Arteaga, 2003; González, Ríos y González, 2000; García y Delgado, 2002; Sánchez, Ávila y Yánez, 2002).

4.- Se seleccionaron dos escuelas secundarias, una privada y otra pública, con base en las facilidades dadas al investigador para realizar las actividades.

5.- Se solicitó permiso por escrito a las autoridades de la escuela privada y de manera verbal a las autoridades de la escuela pública, para llevar a cabo las actividades planteadas en esta investigación (sesiones de trabajo con estudiantes y recolección de datos).

6.- Se solicitó la cooperación de los profesores de matemáticas de la escuela privada para que seleccionaran a 12 alumnos de segundo grado, que fueran participativos, creativos y comprometidos, sin importar promedio de calificaciones.

7.- Se solicitó la cooperación de los profesores de matemáticas de la escuela pública para que seleccionaran a 12 alumnos de tercer grado, que fueran participativos, creativos y comprometidos, sin importar promedio de calificaciones.

8.- Se formaron 6 parejas mixtas de segundo grado y 5 parejas mixtas y una pareja de varones en tercer grado.

9.- Atendiendo a las facilidades para registrar las evidencias empíricas, se decidió dividir en grupos de tres parejas, tanto a los 12 alumnos de segundo grado como a los 12 alumnos de tercer grado.

10.- Se agruparon las 7 actividades en 2 sesiones de trabajo; en la primera se desarrollaron las actividades 1, 2, 3 y 4 (véase apéndice A); en la segunda se trabajaron las actividades 5, 6 y 7 (véase apéndice B).

11.- Se videograbaron 2 sesiones de trabajo por cada grupo de 3 parejas de segundo grado —4 en total— y 2 sesiones de trabajo por cada grupo de 3 parejas de tercer grado —también 4 en total—.

12.- Se transcribieron las 8 sesiones de trabajo.

13.- Se analizaron las evidencias empíricas recabadas en la etapa de experimentación tomando como base los esquemas personales de validación propuestos por Harel y Sowder, adaptándolos a las respuestas de los alumnos que participaron como sujetos en esta investigación.

Así, las siguientes preguntas guiaron esta investigación:

1.- ¿Cómo conceptúan la comprobación en matemáticas los alumnos de segundo y tercer grados de educación secundaria en México?

2.- ¿Qué motiva a los alumnos de segundo y tercer grados de educación secundaria en México a emprender un proceso de validación y comprobación de una proposición matemática?

3.- ¿Qué tipos de comprobaciones son capaces de elaborar los alumnos de segundo y tercer grados de educación secundaria en México?

4.- ¿Qué importancia reviste en el desarrollo de los procesos de validación de los alumnos que sean ellos los que elaboren sus propias conjeturas, en sus procesos de aprendizaje, y no que se les presenten como ya dadas solamente para ser aplicadas?

5.- ¿Cuáles son las posibles consecuencias, en el aprendizaje de las matemáticas, de la omisión del uso de procesos de validación y de la reflexión acerca de éstos como parte de las matemáticas?

Pertinencia del estudio

"Medición" del aprendizaje de las matemáticas de estudiantes de educación secundaria en México

Un individuo sigue determinado camino para validar proposiciones matemáticas, el cual inicia al intentar resolver un problema elaborando una conjetura, y después la explica y ofrece argumentos cuya racionalidad y validez deben convencer a una comunidad, proporcionando evidencia de que lo que se afirma es verdad, y finalmente comprobarlo.

Así, comúnmente al abordar problemas en los cursos de matemáticas en la educación secundaria de forma memorística de resultados y definiciones, o como una práctica rutinaria de procedimientos, como es el caso de los teoremas o proposiciones geométricas, se le niega al alumno la oportunidad de desarrollar su razonamiento deductivo por medio de procesos de validación consistentes en conjeturar, explicar, argumentar, probar y comprobar.

Las matemáticas que un profesor enseña contienen los elementos que el alumno necesita, de tal manera que a ese alumno le baste limitarse a la aplicación de un algoritmo y a la realización de cálculos para llegar al resultado. Cuando ese alumno se enfrenta a algunas situaciones problemáticas por sí mismo, como elaborar una proposición matemática que parta de una conjetura, y su posterior comunicación y validación, suele no saber qué elementos se necesitan ni dónde puede encontrarlos y, en el peor de los casos, no sabe qué hacer.

El sistema mexicano de educación básica pasó del lugar 34 al 37 durante el periodo de 2000 a 2003, en cuanto al rendimiento de los alumnos, de una lista de 41 países afiliados o asociados a la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), según datos de las evaluaciones comparativas internacionales que dicha organización aplica, dentro de su Programa Internacional de Evaluación de Alumnos (PISA, *Programme for International Student Assessmet*). PISA evalúa los contenidos que los estudiantes necesitan adquirir, los procesos que deben realizar y el contexto en que aplican los conocimientos y las aptitudes en áreas de conocimiento específicas como la lectura, las matemáticas y las ciencias. En 2000, PISA tuvo como área de contenido principal la lectura, enfocándose a medir la competencia lectora de jóvenes de 15 años de edad (quienes se encuentran por finalizar su educación básica o iniciar su educación media superior en México), mientras que en 2003 el área de contenido principal lo constituyeron las matemáticas, centrándose en medir la *competencia matemática*, definida como “la capacidad de los estudiantes para reconocer, comprender y participar en las matemáticas y opinar con fundamento sobre el papel que desempeñan las matemáticas en la vida diaria” (OCDE, 2004, p. 14). Para esta competencia se identificaron dos dimensiones particulares:

1.- Contenido matemático. En el cual se presentan, en situaciones y contextos de la vida real, una gama de conceptos matemáticos relevantes que se espera que hayan aprendido los estudiantes. Estos conceptos se engloban en cuatro categorías: cantidad, espacio y forma, cambio, y relaciones e incertidumbre.

2.- Proceso matemático. Los procesos matemáticos que los estudiantes aplican al tratar de resolver los problemas se conocen como *competencias matemática*s. Tres grupos de competencias condensan los diferentes procesos cognitivos necesarios para resolver diferentes tipos de problemas: reproducción, conexión y reflexión. Estos grupos reflejan el modo en que los estudiantes utilizan normalmente los procesos matemáticos al resolver problemas. El grupo de reproducción implica esencialmente la reproducción del conocimiento estudiado. Incluye aquellas competencias que se emplean más frecuentemente en las evaluaciones convencionales y en los libros de texto: conocimiento de hechos, representaciones de problemas comunes, reconocimiento de equivalentes, recopilación de propiedades y objetos matemáticos familiares, ejecución de procedimientos rutinarios, aplicación de destrezas técnicas y de algoritmos habituales, el manejo de expresiones con símbolos y fórmulas establecidas y la realización de cálculos. Las competencias del grupo de conexiones requieren la reunión de ideas y procedimientos matemáticos para resolver problemas que ya no son de mera rutina, pero que aún incluyen escenarios familiares o razonablemente familiares. El conjunto de las competencias de reflexión incluye elementos de reflexión basados en razonamiento matemático, generalización e introspección por parte del estudiante para planificar estrategias de resolución de un problema.

Además, se añadió la evaluación de la capacidad de resolución de problemas, definida como “la competencia de los estudiantes a la hora de utilizar procesos cognitivos para resolver problemas interdisciplinarios sin una solución obvia” (OCDE, 2005, p. 14).

La situación educativa de los jóvenes mexicanos de 15 años, como se desprende de los resultados de las pruebas del PISA de la OCDE, puede analizarse de varias maneras. Para los fines de esta investigación, importa analizar los resultados en términos de la proporción de alumnos en los niveles de competencia que permiten definir las pruebas del PISA.

Las escalas de las pruebas del PISA permiten clasificar a los alumnos en seis niveles de competencia en matemáticas. El nivel 6 indica un manejo pleno de competencias de alto grado de dificultad, mientras que el nivel 1 representa un manejo mínimo de competencias básicas.

La proporción de estudiantes mexicanos de 15 años que alcanzó una competencia elevada (niveles 5 y 6) fue de 0.4 por ciento. Estos jóvenes son capaces de tomar una

> postura activa y creativa en su acercamiento a los problemas matemáticos. Así, interpretan y formulan problemas en términos de matemáticas, son capaces de manejar información más compleja y de negociar una serie de pasos de procesamiento. Los estudiantes en este nivel identifican y aplican conocimientos y herramientas relevantes (a menudo en el contexto de un problema con el que no están familiarizados), emplean la perspicacia para identificar maneras adecuadas de encontrar una solución y muestran otros procesos cognoscitivos de alto nivel, tales como la generalización, el razonamiento y la argumentación para explicar y comunicar resultados. (INEE, 2004, p. 32)

En contraste, la proporción de jóvenes que alcanzó una competencia insuficiente (nivel 1 o menor) fue de 65.9 por ciento. Estos jóvenes son capaces de

> contestar preguntas que impliquen contextos familiares donde toda la información relevante está presente y las preguntas están claramente definidas. Son capaces de identificar información y desarrollar procedimientos rutinarios conforme a instrucciones directas en situaciones explícitas. Pueden llevar a cabo acciones que son obvias y seguirlas inmediatamente a partir de un estímulo dado. (INEE, 2004, p. 32)

La proporción de alumnos mexicanos de 15 años de edad que alcanzó los niveles más altos de competencia definidos por las escalas de las pruebas PISA fue muy baja, y la mayor proporción de alumnos se ubicó en el nivel más bajo o por debajo de él: “los alumnos mexicanos pueden responder correctamente las preguntas sencillas, no así las más complejas” (INEE, 2005, p. 27).

Estos resultados sugieren “buscar formas de trabajo con los estudiantes que atiendan aspectos actitudinales y conductuales” (INEE, 2004, p. 182), con los cuales se cierre la brecha respecto al nivel de aprendizaje.

La resolución de problemas en los programas de matemáticas del plan de 1993 para la educación secundaria

Con la reforma educativa de 1993 en México, en el caso de la educación secundaria, de acuerdo con los documentos oficiales, dentro de los varios propósitos se busca coadyuvar “[...] la solución de las demandas prácticas de la vida cotidiana” (SEP, 1994, p.12), teniendo como prioridad, en el caso de la asignatura de matemáticas, “ampliar y consolidar los conocimientos y habilidades matemáticas y las capacidades de aplicar la aritmética, el álgebra y la geometría en el planteamiento y resolución de problemas de la actividad cotidiana” (SEP, 1994, p.13).

Así, de acuerdo con los programas de estudio de matemáticas de la educación secundaria, se pretende que el alumno aprenda a utilizar sus conocimientos matemáticos para resolver problemas en los que no solamente ponga en práctica los procedimientos y técnicas adquiridas, sino también su curiosidad e imaginación creativa. Los programas son documentos normativos elaborados por la SEP, como un medio de comunicación de intenciones y alcances. En ellos se plantean los *propósitos,* la *organización y el alcance de la asignatura*; además, se describe el enfoque. En éste se da énfasis a la importancia de las matemáticas en la vida diaria y a cómo el hombre siempre ha tenido la necesidad de “ [...] explicarse el universo y las cosas que en él ocurren” (SEP, 1994, p. 37). En la descripción del enfoque se presentan ideas interesantes acerca de los programas, aunque algunas se deben leer entre líneas. De las ideas declaradas, se menciona que en la enseñanza, el estudio y el aprendizaje de las matemáticas de la educación secundaria “es prerrogativa y responsabilidad del profesor seleccionar y organizar las actividades para el estudio de los contenidos que marcan los programas en la forma que considere más adecuada para propiciar el aprendizaje de sus alumnos” (SEP, 2001c, p. 7). Con este enfoque se busca dejar de lado el aprendizaje de las matemáticas reducido a la simple memorización de resultados y definiciones, y abandonar la práctica rutinaria de procedimientos. También se hace necesario que los contenidos se presenten a partir de situaciones y actividades con sentido, de manera que permitan a los estudiantes generar conjeturas, analizarlas con sus compañeros y poner en juego, de manera consciente, los conocimientos adquiridos con anterioridad.

De las actividades que diseñe el profesor al aplicar este enfoque (SEP, 1994), convienen distinguir las situaciones descritas a continuación.

Los problemas de exploración y búsqueda, necesarios para la formulación de conceptos para el desarrollo de: a) la capacidad de trabajo personal del estudiante, y b) aptitudes para la investigación, la comunicación y la justificación de sus afirmaciones. Los problemas de aplicaciones deben servir para relacionar conceptos con su uso en la vida cotidiana, en las diversas disciplinas o en otras partes de las matemáticas mismas, que contribuyan a una visión integral de las matemáticas. Los ejercicios deben servir para favorecer la apropiación de conocimientos básicos, el fomento de seguridad y destreza en el uso de técnicas y procedimientos.

De las ideas entre líneas, se da a los profesores la consigna de convertir el aula en un laboratorio de conocimientos y de discusión. Cuando ahí no se encuentren las respuestas, deben tener la determinación de salir del aula, a la calle, a la tienda, al teatro, a la fábrica y a cualquier lugar donde se encuentre los datos que requieran y que los alumnos necesiten. El enfoque tiene una mayor tendencia al aprendizaje que a la enseñanza; por ello se centra más en el alumno y en el desarrollo de sus habilidades y actitudes cuando aprende matemáticas. Luego, para estar en sintonía con este enfoque, se demanda un cambio en las prácticas docentes para que se atienda más a la personalidad de los alumnos, sus experiencias, sus propuestas y razonamientos y que, cuando haya trabas, la intervención del profesor sirva para orientar los modelos organizados por los alumnos, impulsar sus conjeturas, sus supuestos y llevarlos a que vean si tienen posibilidad de aplicarlos.

Este enfoque de resolución de problemas, para que los alumnos construyan su propio conocimiento de las matemáticas, ha permeado a la comunidad docente de educación secundaria en México; pareciera que se ha impuesto al magisterio, y que no lo toman en cuenta; pero en realidad no es así. Este enfoque de resolución de problemas hace referencia continua al quehacer docente y a su responsabilidad de organizar los contenidos en la forma en que considere necesario para el aprendizaje, en la selección, adecuación y el planteamiento de los problemas que se propondrán a los alumnos, en su intervención oportuna para organizar el trabajo en el aula sin que sustituya el trabajo de los alumnos, con base a la *experiencia* de éstos. ¿Qué sucede con los profesores que no tienen la suficiente experiencia docente (ya sea a causa de que acaban de egresar de la escuela normal superior o tengan pocos años de servicio)? ¿Podrán organizar eficientemente los distintos contenidos de manera que las experiencias de aprendizaje sean lo suficientemente enriquecedoras para que los alumnos avancen hacia la concreción de los objetivos? Por otra parte, ¿qué sucede con los profesores que ya cuentan con una amplia experiencia, basada en los años de servicio frente a grupo, y que han visto implementar más de una reforma de los planes y programas de estudio? ¿Cómo pueden estos maestros guiar a sus alumnos en la construcción de conocimientos si ellos, por la forma en la que se les enseñó, no saben construirlos ni es parte de su costumbre? ¿Los maestros han construido o saben construir matemáticas? Los enfoques de las reformas son decretos que se imponen al magisterio, y éste debe responder ante algo para lo que no se encuentra preparado.

El enfoque de la asignatura de matemáticas de la educación secundaria plantea como propósitos generales desarrollar en los alumnos las habilidades operatorias, comunicativas y de descubrimiento. Para ello, los profesores deben proponer actividades de aprendizaje que tiendan a desarrollarlas para que, entre otras cuestiones, los alumnos elaboren conjeturas, las comuniquen y las validen.

Bajo el enfoque de resolución de problemas para el aprendizaje de las matemáticas, están implicadas dos cuestiones relevantes:

1.- ¿Qué es un problema?

2.- ¿Cuál es la relación de la resolución de problemas con los procesos de *validación*?

El libro de matemáticas para el maestro de educación secundaria define un problema como "una situación que presenta un reto, un desafío, ante el cual, el alumno que intenta responderlo no dispone de un recurso expedito" (SEP, 2001b, p. 16). En palabras de Parra, "un problema plantea una situación que debe ser modelada para encontrar la respuesta a una pregunta que se deriva de la misma situación" (1989, p. 20), aunque el problema debe permitir "derivar preguntas nuevas, pistas nuevas, ideas nuevas" (Bouvier, 1981; citado en Parra, 1989, p. 20). Conceptuar un problema como una situación desafiante conlleva una repercusión importante en la práctica del docente; bajo este enfoque, un problema deja de considerarse como un medio de aplicación de procedimientos y técnicas aprendidas previamente que sirven para ejercitar y refinar algoritmos hasta lograr su repetición sin errores, y se convierte en instrumento de reflexión que permite la exploración y el ensayo de diversas estrategias de resolución para avanzar en la comprensión y asimilación de nuevos conocimientos.

Hablar de resolver problemas puede parecer una cuestión nada novedosa, dado que la enseñanza de las matemáticas ha privilegiado su aparición en los cursos de esta asignatura, aunque “la resolución de problemas” se reduzca a la aplicación memorística de resultados y definiciones o a la práctica rutinaria de procedimientos. Según el enfoque propuesto en el plan, resolver problemas genera un proceso de resolución que implica “buscar, ensayar, establecer relaciones, analizar sus efectos, elaborar conjeturas, probarlas y validarlas” (SEP, 2001b, p. 16). Resolver problemas también se describe como la “coordinación de experiencias previas, conocimiento e intuición, en un esfuerzo para encontrar una solución que no se conoce” (SEP, 2001a, p. 15). Puede considerarse que se resolvió determinado problema cuando “un individuo [...] cree, explícita o implícitamente, que ha obtenido la ‘verdadera’ solución” (SEP, 2001a, p. 14). La etapa de validación de las conjeturas tiene una importancia medular en este proceso

> porque a través de ella la conjetura puede ser reformulada, ajustada para dar mejor cuenta de la situación planteada por el problema, o puede mostrarse falsa, encontrarse un contraejemplo que la invalide, con lo que será necesario construir una nueva conjetura teniendo en cuenta los errores anteriores, que valen como ensayos. (SEP, 2001a, p. 14)

En los procesos de resolución de problemas se ejercita frecuentemente el razonamiento matemático, entendido como el establecimiento, por parte del estudiante, de relaciones entre proposiciones matemáticas en las que la verdad de una de ellas asegura la verdad o la probable certeza de otra. Efectivamente, al plantear una conjetura sobre la solución de un problema, implícitamente se atribuye una relación de verdad probable entre proposiciones. Si se llega a una solución correcta, y se comprueba dicha solución con medios diferentes a los utilizados en el razonamiento que produjo el resultado, se fortalece el vínculo entre las proposiciones que se utilizaron en el procedimiento de resolución.

Evidentemente "este tipo de procesos sólo puede ocurrir cuando el problema es suficientemente interesante como para que el alumno se 'apropie' de él y lo considere casi como un hallazgo que debe ser comunicado" (SEP, 2001a, p. 16). Luego, un proceso de resolución de un problema incluye varias fases: a) *comprensión del problema*, en la cual se distinguen los datos; b) *investigación y búsqueda de la solución*, etapa en la que se organiza el análisis de casos particulares con la finalidad de producir conjeturas y buscar contraejemplos que ocasionalmente puedan refutarlas, y c) *redacción de la solución*, que consiste en la presentación de los resultados obtenidos, distinguiendo los que se demostraron de aquellos que se tomaron como ciertos o que ya habían sido demostrados antes.

Los contenidos del plan y programas de 1993 de matemáticas de la educación secundaria tienen el objetivo fundamental de desarrollar en los alumnos una apreciación hacia la justificación matemática para que, de esta manera, reconozcan al razonamiento y a la comprobación como aspectos fundamentales de las matemáticas, que les permitan elaborar e investigar conjeturas, desarrollar y evaluar sus argumentos y pruebas, así como desarrollar un repertorio de métodos de razonamiento y comprobación cada vez más sofisticados.

Con respecto a las actividades que inician a los alumnos en el razonamiento deductivo, se identifican en los programas los temas de *equivalencia de figuras y cálculo de áreas, en especial la demostración del teorema de Pitágoras por descomposición y equivalencia de áreas* (segundo grado) *y el teorema de Pitágoras* (tercer grado). Estos contenidos representan los primeros acercamientos y contactos de los estudiantes en la educación secundaria con el pensamiento deductivo y la demostración en matemáticas, lo que les permite en forma paulatina distinguir lo que se ha probado de aquello que se ha aceptado sin demostración.

Por lo que toca a las actividades que preparan el paso al razonamiento deductivo se identifican los temas de *dibujo y trazos geométricos, ángulos entre paralelas y una secante* [transversal]*, medición y cálculo de áreas y perímetros, las posiciones relativas de rectas en el plano, y la equivalencia de figuras y cálculo de áreas, en especial la justificación de las fórmulas para calcular el área de paralelogramos, triángulos, trapecios y polígonos regulares*. Estos contenidos se ocupan de diversos aspectos deductivos tales como: a) Trabajar la equivalencia de propiedades; b) Saber realizar e interpretar la conjunción, disyunción y negación, y c) saber comprender el campo de validez de los cuantificadores. Hay que hacer notar que los contenidos mencionados no sólo sirven para preparar el paso al razonamiento deductivo, sino que también sirven para desarrollar el razonamiento inductivo por medio de la producción de conjeturas o generalizaciones que surgirán del reconocimiento de propiedades o de la observación de lo que ocurre en varios casos particulares.

Detrás de estas referencias al razonamiento deductivo, la cuestión se centra en la comprobación. Esto se vislumbra con los comentarios vertidos en el libro para el maestro de matemáticas de la educación secundaria, el cual sugiere que se combine el estudio intuitivo de las propiedades de las figuras geométricas con la introducción gradual del razonamiento deductivo, con lo que se espera que los alumnos, con base en los problemas planteados por el profesor produzcan, comuniquen y validen sus conjeturas (SEP, 1994).

Esta tesis de maestría en desarrollo educativo en la línea de especialización de educación matemática, de la Universidad Pedagógica Nacional, unidad Ajusco, está estructurada en cinco capítulos, además de los apéndices.

En el capítulo 1, Introducción, se presenta el problema de investigación, las preguntas de investigación y la justificación del problema, tomando como antecedentes los objetivos de la enseñanza de la geometría, resaltando la importancia que tiene la resolución de problemas en la ejecución de procesos de validación.

En el capítulo 2, Revisión de la literatura, se abordan las nociones principales en las que se apoya tanto el diseño de las actividades, y la estructura que hay en ellas, de la experimentación realizada para la investigación, así como, para el análisis de los datos recabados. Este capítulo está compuesto de tres secciones. En la primera se revisa la relación que existe entre la resolución de problemas y los procesos de validación. En la segunda sección se revisan cuestiones sobre racionalidad, visualización e intuición. La tercera sección inicia con la revisión de la noción de comprobación, desde el reconocimiento de que las matemáticas son un producto cultural, para posteriormente abordar a la comprobación desde la educación matemática, en especial en el ámbito de la educación secundaria, tomando elementos del trabajo de Harel y Sowder (1998), a fin de proporcionar elementos teóricos para el análisis de los datos obtenidos en la investigación.

En el capítulo 3, Metodología, se describe la metodología de investigación. Se hace referencia a las características de los sujetos de investigación; se describe el propósito y contenido de las hojas de actividades que se trabajaron en la fase experimental, con 12 alumnos de segundo y 12 alumnos de tercer grados de la educación secundaria; y se describe el procedimiento para el desarrollo de la fase experimental, de la que se recabaron evidencias.

En el capítulo 4, Análisis, se presenta una discusión y análisis de la información recabada de las actividades trabajadas con 12 alumnos de segundo grado de educación secundaria de una escuela privada y con 12 alumnos de tercer grado de educación secundaria de una escuela pública; el análisis se centra sobre las validaciones de las afirmaciones planteadas en las actividades 1, 2 y 3, así como en las validaciones de las sumas de los ángulos interiores de un triángulo, un cuadrilátero, un pentágono y de la generalización de la suma de los ángulos interiores de un polígono convexo.

En el capítulo 5, Discusión, se destacan los principales resultados, se dan las conclusiones y se proponen recomendaciones a la luz de las preguntas de investigación, y los resultados de los análisis de las evidencias. También se analizan las situaciones que no se abordaron en este estudio y que quedarían pendientes para ser abordadas en posteriores investigaciones, así como algunas interrogantes que emergen de la realización del estudio.

Se incluyen las hojas [Actividad 1; Actividad 2; Actividad 3; Actividad 4, Actividad 5; Actividad 6; y Actividad 7] en los Apéndices al final de la tesis.

CAPÍTULO 2

REVISIÓN DE LA LITERATURA

En este capítulo se presenta el marco teórico en el que cual se basó el análisis de la información que se obtuvo de las actividades y las observaciones realizadas para esta investigación. El capítulo se divide en tres secciones. Para esta tesis se estudió la riqueza y variedad de los procesos de validación insertos en un contexto de resolución de problemas; así, la primera sección se dedica al tema de la resolución de problemas y su relación con los procesos de validación, con el fin de dar luz sobre el enfoque del plan y los programas de estudio para la educación secundaria en México implantados en 1993 (SEP, 1994). La segunda sección se dedica a la revisión de cuestiones sobre racionalidad, visualización e intuición como actividades cognitivas que influyen en el aprendizaje de los alumnos. La tercera sección se dedica al análisis de la noción de comprobación, con base en la pregunta de por qué los estudiantes comprueban; siendo la comprobación un objeto complejo que admite diferentes interpretaciones y dimensiones, se abordan las distintas interpretaciones de la comprobación, sus diferentes usos y funciones, así cómo el tipo de comprobaciones que los alumnos acometen en la educación secundaria.

García (2002), como parte de su trabajo de tesis de maestría, llevó a cabo una investigación en dos planteles de educación secundaria pública, la cual tuvo como propósito documentar la relación entre la formación docente y su actualización con respecto a su actuar en el aula. De los resultados que obtuvo, García menciona que los alumnos opinaban que los temas que los profesores trataban en clase nunca eran discutidos o analizados, además de que eran los profesores quienes exponían la clase sin fomentar un trabajo de descubrimiento y experimentación por parte de sus alumnos; por otra parte, menciona que los profesores que participaron como sujetos en su investigación no fomentaban como una actividad incorporada a sus clases el trabajo en equipos con sus alumnos, y cuando lo hacían sólo era para que los alumnos resolvieran series de ejercicios de corte tradicional, cuyos resultados y estrategias de resolución no eran discutidas. La discusión en grupo, la elaboración de conclusiones, la exposición de clase y la lectura no eran asumidas por los profesores como puntos centrales en la actividad de sus alumnos.

Esta manera de actuar de los profesores refleja una concepción del aprendizaje de las matemáticas basado en la reproducción, es decir, los alumnos aprenden ejercitando una y otra vez los procedimientos que el profesor explicó al resolver un ejercicio modelo tomado de un libro de texto, previa exposición de conceptos y definiciones, hasta que puedan repetir dicho procedimiento sin errores. Esta manera de concebir el aprendizaje de las matemáticas privilegia entre los alumnos la memorización de hechos, definiciones y teoremas, así como la mecanización de técnicas y procedimientos; además, se niega a los alumnos la oportunidad de desarrollar su razonamiento deductivo por medio de procesos de validación consistentes en conjeturar, explicar, argumentar, probar y comprobar. Cuando un alumno se enfrenta a la necesidad de resolver algunas situaciones problemáticas por sí mismo, como elaborar una proposición matemática que parta de una conjetura, y su posterior comunicación y validación, suele no saber qué elementos se necesitan ni dónde puede encontrarlos y, en el peor de los casos, no sabe qué hacer.

Problemas para comprobar

En el aula, en muchos momentos durante la instrucción, tanto alumnos como profesores llegan a considerar que las palabras *ejercicio* y *problema* son sinónimos; en esta tesis, no significan lo mismo. Por *problema* se entiende una situación matemática que no tiene solución inmediata, que admite varias vías de aproximación y posiblemente varias soluciones, que exigen esfuerzo mental, imaginación y creatividad, y que debe ser aceptado como problema por alguien, ya que sin esa aceptación no hay compromiso de resolver dicho problema. El significado de ejercicio se relaciona fuertemente con una rutina, que al ser utilizada con frecuencia, aumenta la destreza en el manejo de los procedimientos implicados.

Para Schoenfeld, *problema* es un término relativo que se utiliza “para referirse a una tarea que es difícil para el individuo que intenta resolverla” (1985, p. 74). Esto conlleva una implicación: una situación se convierte o no en problema dependiendo del individuo que la aborda: “la misma tarea que exige esfuerzos significativos de algunos estudiantes, puede ser un ejercicio rutinario para otros y, solucionarlo, puede ser un simple acto recordatorio para un matemático talentoso” (Schoenfeld, 1985, p. 74). Santos hace notar que “el que exista un problema no es una propiedad inherente de la tarea matemática: la palabra está ligada a la relación o interacción entre el individuo y esa tarea” (1997, p. 27). Esto conduciría a que no todos los “problemas” escolares son *problemas*: hay que diferenciar este término del de *ejercicio*. En este sentido, Zeitz señala la diferencia entre ejercicio y problema:

> Un ejercicio es una cuestión en la que se reconoce cómo resolverla inmediatamente. Si se plantea apropiadamente un ejercicio, su solución no depende de cómo un experto aplica técnicas específicas y no se necesita hacer un esfuerzo mental fuera de las técnicas usuales. En contraste, un problema demanda pensamiento, meditación, recursos e ingenio, antes de que se encuentre un acercamiento apropiado. (Zeitz, 1999, p. 3)

Polya considera a los ejercicios como un tipo particular de problemas: los *de rutina*, describiéndolos como “todo problema que se puede resolver ya sea sustituyendo simplemente nuevos datos en lugar de los de un problema ya resuelto, ya sea siguiendo paso a paso, sin ninguna originalidad, la traza de algún viejo ejemplo” (Polya, 1969, p. 163). Sin embargo, a este tipo de actividades se insiste en llamarles *ejercicios* por no representar un reto a la creatividad y a las habilidades matemáticas del individuo. Es posible que los ejercicios puedan ayudar al aprendizaje y a fomentar procesos de validación, pero el papel de su resolución no es únicamente un paso intermedio en la adquisición de habilidades “mecánicas”, experimentales, de observación inductiva o de búsqueda de patrones por parte del alumno.

Parra afirma que en general los problemas propuestos en la escuela son “como ejercicio de aplicación de algoritmos” (1990, p. 21), no se les concibe como un proceso y se busca únicamente que el alumno seleccione el algoritmo correcto, sin obligarlo a interactuar con situaciones que lo lleven a “comprometer sus conocimientos, a revisarlos, a modificarlos, o a rechazarlos para formar un conocimiento nuevo” (Parra, 1990, p. 22). Esta diferenciación entre *problema* y *ejercicio* resulta subjetiva, relativa al alumno, cuyas capacidades y experiencias previas resultan determinantes para decidir si alguna cuestión es un problema o simplemente un ejercicio. Santos (1997) y Parra (1990) caracterizan lo que debe ser un problema para poder utilizarlo con determinado éxito, coincidiendo en lo siguiente:

1.- Que sea considerado como un proceso y no sólo como un resultado, y que además tenga diferentes métodos de resolución así como diferentes posibles resultados.

2.- Que despierte un interés suficiente como para ser resuelto, que al alumno le interese lo suficiente como para que se concentre y desee ansiosamente resolverlo, que se entregue al problema “en cuerpo y alma”.

3.- Que no exista garantía de que al aplicar un algoritmo se obtenga el resultado de manera inmediata.

4.- Que permita el desarrollo del razonamiento matemático, promoviendo una actitud positiva hacia las matemáticas.

5.- Que el error al tratar de resolverlo se convierta en una fuente de conocimiento.

En resumen, el problema debe obligar a los alumnos a establecer una interacción con situaciones que los lleven a poner en tal situación sus propios conocimientos como para verse forzados a revisarlos, modificarlos o rechazarlos, a fin de construir un conocimiento nuevo.

Bajo esta perspectiva, aparece un alejamiento de la idea de que los problemas deben tomarse como situaciones trilladas, como un quehacer reiterativo y repetitivo, para acercarse a la idea de que son fuente misma del conocimiento que construirá el alumno en el ámbito de las matemáticas.

Por otra parte, para Ramírez resolver problemas implica enfrentar a los alumnos a situaciones que presenten cuatro tipos de dificultades, producto del escaso conocimiento de:

-lo que es un problema y su solución,
-[el] análisis del texto de los problemas,
-[el] procedimiento general de construcción de ecuaciones,
-[el] control del proceso de resolución y de la solución que se obtenga (Ramírez, 1997, p. 28).

Si se elimina el tercer inciso, por su especificidad, remite directamente a las fases que identifica Mason (1987) para resolver un problema:

1.- Abordar el problema.
2.- Atacar el problema.

3.- Evaluar el proceso.

La primera fase se refiere a la interpretación y entendimiento del problema, es decir, comprender cuál es la situación problemática, identificar la información que aparece en el planteamiento y discernir de esta información cuál es útil para resolverlo.

La segunda fase implica que el alumno elabore una estrategia que lo lleve a la resolución del problema por medio de una formalización y simplificación progresiva. Es esta fase la que favorece el planteamiento de conjeturas: “la parte de atacar el problema (...) [implica] actividades que incluyen conjeturar, convencer, justificar y cómo reaccionar ante posibles dificultades” (Santos, 1997, p. 32). Así, para resolver un problema es necesario el paso de elaborar una conjetura. Su posterior validación ratificará o rectificará la estrategia de resolución.

En la tercera fase se analiza la pertinencia de la estrategia seguida por el alumno para resolver el problema planteado. Esta fase se limita comúnmente a una comparación entre el resultado obtenido por el alumno y el resultado que el maestro tiene de antemano. Proceder de este modo conlleva la pérdida de una oportunidad de gran importancia para el aprendizaje, y quizá la de mayor riqueza: reflexionar sobre la solución y el proceso de resolución es una oportunidad que permitiría a los alumnos consolidar conocimientos y desarrollar aptitudes para resolver problemas. En el análisis del proceso de resolución de un problema se deben tomar en cuenta las fases previas, abordar y atacar el problema, propuestas por Mason (1987) y Parra (1990). En cada una de estas fases se debe evaluar la capacidad del individuo para: a) entender el problema, b) reestructurar la información, c) elegir la(s) estrategia(s) de resolución pertinentes, y d) la verosimilitud de la solución misma.

Simon (1973) plantea que los problemas pueden clasificarse teniendo en cuenta su estructura; así, distingue entre los problemas bien estructurados y los mal estructurados. Fredericksen (1984) agrega otra categoría a las dos anteriores: los problemas estructurados que requieren un pensamiento creativo.

1.- *Problemas bien estructurados*: son los que se encuentran formulados de manera clara y cuya solución se obtiene aplicando un algoritmo conocido y con criterios de verificación del resultado.

2.- *Problemas estructurados que requieren un 'pensamiento productivo'*: aunque parecidos a los anteriores, presentan la característica de exigir a quien los resuelve que diseñe parcial o totalmente el proceso de resolución.

3.- *Problemas mal estructurados*: son los que no tienen una formulación clara, para los que no se tiene un procedimiento que garantice de antemano la obtención de una solución correcta, y para los que se carece de criterios definidos para evaluar la solución. En esta categoría se puede incluir la mayoría de los problemas cotidianos a los que posiblemente se enfrente un individuo.

Lev Fridman (1995) propone una clasificación de los problemas en la que inicialmente considera una división de acuerdo con el carácter de los objetos implicados en un problema: *problemas prácticos* (o *aplicados*) y *problemas matemáticos*. En los problemas prácticos intervienen objetos reales o materiales, siendo los problemas cotidianos algunos de los que se incluyen en esta categoría; también algunos de los problemas de cursos de matemáticas, como los de la geometría métrica, relacionados con el cálculo de perímetros, áreas o volúmenes. Algunos problemas prácticos pueden resolverse con ayuda de las matemáticas, para lo cual habría que resolver el problema matemático correspondiente, reduciéndose el problema práctico a un problema matemático.

Los *problemas matemáticos*, de acuerdo con Fridman, son aquellos en los cuales los objetos que intervienen son de carácter matemático, como números o funciones. Éstos, a su vez, los clasifica en *problemas característicos* y en *problemas no característicos*. Los problemas característicos son aquellos que se resuelven con la aplicación de un algoritmo. Por otra parte, para los problemas no característicos no se tiene un algoritmo prestablecido para resolverlos. Fridman hace la aclaración de que es posible reducir un problema no característico a uno característico, descomponiendo el problema original en dos o más subproblemas o utilizando reglas heurísticas. A su vez, a los problemas no característicos los clasifica, de acuerdo con el *carácter del requerimiento del problema*, en tres categorías:

1.- *Problemas que se reducen a encontrar un objeto matemático*: aquellos en los que se debe determinar el valor de una incógnita.

2.- *Problemas que se reducen a una demostración o a una explicación*: son los problemas en los que se requiere el convencimiento de la validez de determinada proposición, someter a prueba la veracidad de la proposición o explicar las causas de algún fenómeno.

3.- *Problemas que se reducen a una transformación o a una construcción*: Esta categoría incluye problemas en los que debe hacerse una transformación de algo (una expresión en otra, por ejemplo) o la construcción de un objeto matemático (una figura geométrica o una expresión algebraica).

Polya (1969) propuso una clasificación más simple de los problemas de acuerdo con el propósito de éstos en dos categorías: los *problemas de resolución* y los *problemas de demostración*. De acuerdo con Polya, los problemas de demostración son aquellos cuyo propósito es "mostrar de modo concluyente la veracidad o falsedad de una afirmación claramente enunciada" (p. 161), mientras que los problemas de resolución tienen como propósito determinar el valor de una incógnita. Hay que aclarar que los problemas de demostración incluyen no sólo a los de validación matemática (teoremas), sino también aquellos en los que se tienen juicios referentes a otras disciplinas como la filosofía o el derecho. A diferencia de los problemas de resolución, cuyos elementos son la condición y los datos proporcionados en el enunciado del problema, además de la incógnita de la cual se precisa conocer su valor, los problemas de demostración tienen como elementos principales la hipótesis y la conclusión.

Razonamiento, visualización e intuición

Tipos de razonamiento

El razonamiento es uno de los procesos cognitivos por medio del cual se utiliza y aplica el conocimiento. Sin la posibilidad de hacer inferencias, el sistema de procesamiento humano se vería obligado a depender de un conocimiento específico y puntual para cada una de las situaciones a la cual se enfrentara. El razonamiento permite, a partir del conocimiento de uno o más conocimientos puntuales, derivar en otro conocimiento o avanzar una conclusión por medio de inferencias.

Los conocimientos expresados por medio de enunciados a partir de los cuales se realiza el razonamiento reciben el nombre de *premisas*, y el enunciado que se deriva se denomina *conclusión*. El conjunto formado por premisas y conclusiones se conoce como *argumento*.

En el razonamiento matemático básicamente se distinguen dos tipos de razonamiento, que siguen reglas lógicas que a la vez que guían las inferencias del discurso, permiten verificar en cada paso la validez de las aserciones. Inducir y deducir son facetas esenciales de este tipo de razonamiento, nacido precisamente del estudio de la geometría. Una de las grandes contribuciones de la cultura griega al pensamiento de la humanidad fue la aplicación, en el caso concreto de la geometría, del rigor de la lógica al estudio de determinados contenidos. Hacer conjeturas a partir de la observación supone un razonamiento inductivo, demostrarlas o refutarlas requiere un razonamiento deductivo.

Razonamiento inductivo

El razonamiento inductivo consiste en obtener conclusiones generales a partir de premisas que contienen datos particulares. Por ejemplo, de la observación repetida de objetos o acontecimientos de la misma índole se establece una conclusión para todos los objetos o eventos de dicha naturaleza. En este razonamiento se generaliza para todos los elementos de un conjunto la propiedad observada en un número finito de casos. Ahora bien, la verdad de las premisas no convierte en verdadera la conclusión, ya que en cualquier momento podría aparecer una excepción. De ahí que la conclusión de un razonamiento inductivo sólo pueda considerarse probable, y la información que se obtiene por medio de esta modalidad de razonamiento es siempre una información incierta y discutible. El razonamiento sólo es una síntesis incompleta de todas las premisas.

Razonamiento deductivo

El razonamiento deductivo es un proceso dirigido *hacia abajo,* es decir, un razonamiento que parte de determinadas premisas que derivan en una conclusión.

Uno de los objetivos centrales de la enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria, expresado en el plan y programas de estudio de 1993, consiste en que los alumnos se inicien gradualmente al razonamiento deductivo y tengan la oportunidad de practicar este razonamiento en situaciones escogidas por el profesor. Se trata de que los alumnos al explicar por qué es cierta una conjetura, aprendan a “construir y comunicar argumentos y a examinarlos para reconocer si son válidos o no” (SEP, 2001b, p. 243). Para validar o refutar una conjetura “los alumnos necesitan aprender a razonar lógica, deductivamente” (SEP, 2001b, p. 243). El que los alumnos aprendan a razonar deductivamente implica que aprendan a validar conjeturas mediante argumentos que deriven lógicamente en afirmaciones de hechos aceptados o que aprendan a refutar conjeturas con la construcción de contraejemplos.

En el sistema educativo de México, la comprobación como objeto de enseñanza se incluye en el área de contenido de la geometría de la educación secundaria, en la asignatura académica de matemáticas en los grados segundo y tercero. Los programas destacan varios aspectos de la enseñanza de la geometría, entre otros: a) la iniciación gradual al razonamiento deductivo en situaciones de demostración que el profesor proponga, "[...] considerando que la demostración en matemáticas es un objetivo que requiere de tiempo y una preparación cuidadosa" (SEP, 1994, p. 40), y b) la preparación del razonamiento deductivo por medio de la exploración y del reconocimiento de propiedades y características de las figuras geométricas al trazarlas y construirlas. Se acentúan los relacionados con la enseñanza de la geometría referentes a: a) la preparación del razonamiento deductivo al hacer uso de la exploración y del reconocimiento de propiedades y características de las figuras geométricas al trazarlas y construirlas, y b) la iniciación gradual al razonamiento deductivo en situaciones de demostración que el profesor proponga (SEP, 1994, p. 39).

Con respecto a las actividades que preparan el paso al razonamiento deductivo, se identifican en los programas los temas de a) dibujo y trazos geométricos, b) ángulos entre paralelas y una secante, c) medición y cálculo de áreas y perímetros, d) las posiciones relativas de rectas en el plano, y e) la equivalencia de figuras y cálculo de áreas en especial la justificación de las fórmulas para calcular el área de paralelogramos, triángulos, trapecios y polígonos regulares. Estos temas se ocupan de diversos aspectos deductivos tales como: a) trabajar la equivalencia de propiedades, b) realizar e interpretar la conjunción, disyunción y negación, y c) comprender el campo de validez de los cuantificadores. Hay que hacer notar que los contenidos mencionados no solo sirven para preparar el paso al razonamiento deductivo sino que también sirven para desarrollar el razonamiento inductivo, por medio de la producción de conjeturas o generalizaciones que surgirán del reconocimiento de las propiedades o de la observación de lo que ocurre en varios casos particulares. El problema a este respecto es que el carácter inductivo en estos contenidos es más cercano e intenso que el deductivo, por lo que las actividades pueden desplazarse más hacia el desarrollo del primero y dejar de lado al segundo, con lo que no se trabaja efectivamente en el paso hacia esa racionalidad deductiva con los alumnos.

Con respecto a las actividades que inician a los alumnos al razonamiento deductivo, se identifican en los programas los temas de equivalencia de figuras y cálculo de áreas en especial la demostración del teorema de Pitágoras por descomposición y equivalencia de áreas (segundo grado) y el teorema de Pitágoras (tercer grado). Estos contenidos representan los primeros acercamientos y contactos de los estudiantes con el pensamiento deductivo y la demostración en la educación secundaria, lo que les permitirá aprender en forma paulatina a distinguir lo que se ha probado de aquello que se ha aceptado sin demostración. Las demostraciones que se plantean en los programas son deseables y especialmente atractivas para los jóvenes mayores de 12 años, ya que recurren a aspectos visuales.

Hay dos cuestiones por las cuales no se trabaja con los alumnos de educación secundaria el razonamiento deductivo. Una tiene que ver con que la enseñanza del razonamiento deductivo tiene poca tradición en el sistema educativo mexicano y, por tanto, se está poco acostumbrado a tratar este tipo de razonamiento en clase. La otra radica en que muchos maestros no han tenido oportunidad de estar en contacto con demostraciones geométricas y comprender el papel del razonamiento deductivo en las matemáticas. Entonces, los mismos maestros tienen dificultades para producir un argumento lógico que les permita demostrar aun resultados sencillos, o para reconocer cuándo una prueba es válida o no.

La visualización

De acuerdo con Davis (1993), desde 1840 los matemáticos se enfocaron en un aspecto de las matemáticas: la demostración. Este énfasis, exagerado y desigual, en opinión de Davis, propició la exclusión de la visualización y la intuición de las matemáticas. Davis plantea que la visión que se tiene de las matemáticas debe ampliarse para permitir que se incluyan lo que llama *teoremas visuales o teoremas perceptibles,* los cuales son intuitivamente geométricos o visualmente obvios. Estos teoremas los define como "los que el ojo del observador organiza en un todo coherente, identificable y que puede inspirar preguntas matemáticas de una naturaleza tradicional o que contribuye de alguna manera a nuestra comprensión o enriquecimiento de alguna situación matemática" (Davis, 1993, p. 333). El beneficio de utilizar teoremas visuales, de acuerdo con Davis, es mayor que el que obtienen los alumnos del estudio de las matemáticas basado en algoritmos y deducciones. Davis presenta una clasificación de los teoremas visuales, entre los cuales incluye a todos los teoremas que resultan de la geometría euclidiana, debido a que la geometría es visualmente obvia.

El papel de la visualización en las matemáticas es uno de los puntos más importantes y por tanto no lo debe ser menos en la enseñanza de esta disciplina. Pero, ¿qué se entiende por visualizar? Son muchos los ámbitos donde se utiliza esta palabra y sus significados son diferentes según en qué contexto se use. Por ejemplo, la visualización en matemáticas no tiene el mismo significado que posee en algunas corrientes psicológicas. Para un psicólogo, en general, la visualización es una técnica, entroncada en el análisis transaccional iniciado por Eric Berne en la década de 1950, que pretende una reestructuración de ciertos aspectos del subconsciente. Tiene mucho más que ver con componentes afectivos que con componentes propiamente cognitivos. Desde el punto de vista matemático, la visualización está mucho más relacionada con la capacidad de entender y asimilar ideas, conceptos y métodos. Las siguientes palabras de Einstein sintetizan lo que es la visualización "la alegría de ver y entender, es el más perfecto don de la naturaleza". Las matemáticas presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitivamente, cuya utilización resulta muy provechosa tanto en las tareas de presentación y manejo de conceptos y métodos como en su manipulación para la resolución de los problemas. Guzmán (1996, p. 15) asevera lo siguiente sobre visualización:

> nuestra percepción es muy primordialmente visual y así no es de extrañar en absoluto que el apoyo continuo en lo visual esté tan presente en las tareas de matematización [...] Y aun en aquellas actividades matemáticas en las que la abstracción parece llevarnos mucho más lejos de lo perceptible por la vista, los matemáticos muy a menudo se valen de procesos simbólicos, diagramas visuales [...] que les acompañan en su trabajo [...]. La visualización aparece así como algo profundamente natural [...] en la transmisión y comunicación propias del quehacer matemático.

Para Duval, lo propio de la visualización en matemáticas se relaciona con la producción de "una representación que da lugar a una aprehensión simultánea y casi inmediata, pero sin que esta representación constituya una aprehensión de los objetos representados" (Duval, 2003, p. 45).

La visualización hace visible todo lo que no es accesible a la visión. La percepción visual necesita explorar el objeto por medio de movimientos físicos, ya que la percepción nunca da una aprehensión completa del objeto. Sin embargo, la visualización puede dar la aprehensión completa de alguna organización de relaciones.

En esta tesis se entiende por visualización la capacidad de comprender un resultado, ya sea una idea, una proposición matemática, un teorema o una argumentación, de una manera global mediante las representaciones visuales de éste. Obviamente, la rama de las matemáticas que tiene mayor relación con la visualización es la geometría. No se pretende con ello decir que la visualización no intervenga en las otras ramas de las matemáticas: la visualización está presente en todas y cada una de las ideas de las matemáticas.

En general las ideas y conceptos matemáticos tienen un rico contenido visual que es útil en su presentación, comprensión y manipulación para llegar a otros resultados o para la resolución de problemas. Pero las ideas geométricas no sólo sirven para aclarar ideas y así luego poder profundizar analíticamente, sino que tienen importancia central en el desarrollo de demostraciones de teoremas, además de proporcionar ejemplos para aclarar definiciones o ideas.

En general, para elaborar en el pensamiento una imagen de los elementos que se utilizan en un problema o una proposición matemática es imprescindible su comprensión. Tener una imagen clara de las ideas y de los conceptos proporciona una mayor seguridad y permite ser crítico.

Por lo general los conceptos matemáticos son abstractos, y si no se tiene una idea clara de su naturaleza resulta imposible manipularlos. Por ejemplo, diversas ideas matemáticas están ligadas a conceptos físicos y son entendidas mucho más rápidamente por medio de dibujos que por medios analíticos. Es justo este modo de entender las ideas y conceptos, prestando una especial atención a las posibles representaciones concretas, lo que se entiende por visualización matemática.

Por otra parte, el intento de visualizar las cosas en matemáticas es algo casi inevitable. Se le puede intentar dar más o menos importancia, pero cuando el cerebro intenta entender algo, usa todas las posibilidades de las que dispone, y una especialmente importante es la de visualizar. Además, no es extraño que esto pase en matemáticas, tomando en cuenta su naturaleza. Por tanto, la visualización es algo profundamente natural, tanto en el nacimiento del pensamiento matemático como en el desarrollo de las relaciones dentro del campo matemático, es decir, en la transmisión y comunicación propias del quehacer matemático.

Existen dos dificultades importantes en la visualización matemática. Una es que pueden cometerse errores (Castañeda, 2004) cuando se utiliza la capacidad de visualización para demostrar un resultado; ocurre con mucha frecuencia que no se es capaz de considerar todos los posibles casos o que algún detalle se nos pase de largo. La segunda dificultad de la visualización es que en matemáticas no todo se puede visualizar; si se basa todo el entendimiento de las matemáticas en ver lo que se hace, se corre el riesgo de tener una dependencia tan grande de esto que no se sea capaz de trabajar con propiedades o conceptos abstractos. El estudiante debe acostumbrarse a intentar ver todo lo que se pueda, pero no tener una dependencia tal que no pueda hacer nada si no se tiene una idea perfectamente clara del significado geométrico de lo que se hace, ya que en matemáticas siempre vamos a encontrar situaciones de este tipo.

Ahora bien, ante estas dificultades se pueden tomar dos caminos: Intentar evitar la visualización en las matemáticas (lo cual parece una locura en la educación secundaria), o intentar sacar el mayor fruto posible de esa inigualable ayuda que es la visualización, siendo conscientes de las dificultades que conlleva y tratando de evitarlas en la medida de lo posible. Además, estas dos dificultades se notan sobre todo a un nivel superior al que se imparte en la educación primaria y secundaria.

Al nivel que se explican los temas en la educación secundaria, la visualización resulta una herramienta no sólo útil, sino indispensable. Si bien en la educación secundaria no son tan peligrosas esas dificultades, sí existen otros factores que intervienen más en este nivel educativo. Una de las principales dificultades del uso de la visualización en el aprendizaje de las matemáticas es que el profesor debe tener las ideas muy claras sobre cada uno de los conceptos que se expliquen. El profesor de matemáticas debe entender y visualizar diversas ideas que tenga que enseñar a sus alumnos. En muchas ocasiones la experiencia en el manejo de algo a lo largo de mucho tiempo no nos permite apreciar las dificultades que pueden tener otras personas que se enfrenten a ello por primera vez.

La intuición

Se suele hablar de la intuición como un proceso mental, no accesible a la conciencia, que engendra una nueva idea. También se identifica la intuición con el dominio, la soltura y la familiaridad con las que un individuo maneja un saber dado. Es frecuente también caracterizar a un individuo como más o menos intuitivo, asignándole a tal término una connotación positiva ligada a la creatividad, ingenio, rapidez de juicio, "olfato" matemático, etcétera. En la didáctica, la intuición suele relacionarse con el uso de los sentidos (manipulación de objetos, visualización, etcétera).

En varios de sus trabajos, Fischbein (1983, 1990, 1999) afirma que en las matemáticas, y en la ciencia en general, existen dos tipos de conocimientos: los autoevidentes, a los que denomina *intuitivos*, y los que están basados en una serie de pasos, a los que llama *lógicos*. Para Fischbein los conocimientos intuitivos están ligados a la acción, "el componente principal de cada modo de comprensión activa y del pensamiento productivo" (Fischbein, 1983, p. 3). Fischbein considera que en el razonamiento matemático se deben tomar en cuenta tres aspectos básicos: a) el *formal*, expresado principalmente a través de la estructura lógico-deductiva de las matemáticas (axiomas, definiciones, teoremas, demostraciones), b) el *algorítmico*, que atañe a los procedimientos de transformación y solución, y c) el *intuitivo*, que se refiere al grado de aceptación subjetiva de los conceptos o afirmaciones matemáticas como algo evidente o cierto.

De acuerdo con Fischbein (1975), la intuición implica: "un sentimiento de afirmación, de convicción y de certeza. Pero en determinados casos la propia intuición es solo una afirmación autoevidente" (p. 7). La autoevidencia es la característica que le permite a un individuo aceptar un conocimiento sin necesidad de validarlo. La convicción es una característica que impone un carácter de verdad al conocimiento intuitivo. En este sentido, el conocimiento intuitivo tiene un peso fundamental sobre los métodos de razonamiento, sobre las decisiones para resolver problemas, e incluso sobre los conocimientos analíticos. Las intuiciones tienen un carácter de necesaria certidumbre intrínseca, que no requieren de soportes externos para apoyarse ya que están basadas en la experiencia del individuo.

Fischbein propone clasificar las intuiciones en primarias y secundarias. Básicamente la diferencia estriba en el medio usado para adquirirlas: de manera natural (las *primarias*) o mediante entrenamiento sistemático en condiciones de enseñanza adecuadas (las *secundarias*). Así, las intuiciones primarias son aquellas que "*se forman antes e independientemente de una enseñanza sistemática*" (1975, p. 9; énfasis en el original). Las intuiciones primarias se desarrollan de manera natural como efecto de la experiencia personal del individuo, así como por medio de sus interacciones con su entorno natural y social; algunas de las que desarrollamos son de tipo espacial, temporal, físico, numérico y relativos al infinito. Por ejemplo, si se plantea la pregunta de qué pesa más, si un kilogramo de plomo o un kilogramo de plumas, con bastante frecuencia se obtendrá como respuesta que pesa más el kilogramo de plomo. Esta es una creencia intuitiva, aunque incorrecta. En contraste, las intuiciones secundarias "son aquellas que se forman después de un proceso sistemático de enseñanza, que le permiten al individuo trascender en sus adquisiciones cognoscitivas primarias" (Fischbein, 1975, p. 9). Las intuiciones secundarias constituyen creencias cognitivas que el individuo desarrolla mediante un entrenamiento sistemático y prolongado, generalmente en un contexto educativo sistemático. Para Fischbein, la intuición matemática es una intuición secundaria que se deriva de la experiencia social, la cual "*implica una intensa actividad intelectual (sin embargo, más especializada de lo que aparenta) y representa la síntesis vertical de los elementos motores, imaginativos y conceptuales*" (1975, p.10; énfasis en el original).

Por otra parte, Fischbein plantea otra dicotomía en la cual propone diferenciar entre intuiciones anticipatorias y afirmatorias. Las intuiciones anticipatorias las define como "la solución global a un problema, que precede a la explicación detallada del proceso de resolución del mismo" (1975, p. 12). Estas intuiciones se encuentran relacionadas con ese momento de "iluminación" que experimenta el individuo cuando intuye haber hallado la respuesta, "cuando el matemático contempla la posibilidad de un nuevo teorema, 'tienen la corazonada' de que es correcto *antes* de que haya descubierto todos los pasos de la comprobación" (Fishbein, 1975, p. 13; énfasis en el original). Así, "la anticipación por intuición de una solución original es 'acometida', expresa una creencia en la autoevidencia del patrón escogido antes de que se adopten los pasos detallados de la demostración" (Fishbein, 1975, p. 13). En este sentido, se sabe de la sensación que percibió Andrew Wiles cuando, a punto de abandonar la demostración del *último teorema de Fermat*, descubrió cómo podía arreglar el error que contenía la demostración que había propuesto:

> Estaba sentado frente a mi escritorio un lunes por la mañana, el 19 de septiembre, examinando el método de Kolyvagin-Flach. (...) De repente, de una forma inesperada, tuve una revelación increíble. Me di cuenta de que, aunque el

método no funcionaba perfectamente, era todo lo que necesitaba para desarrollar mi trabajo original con la teoría de Iwasawa. (...) Fue tan indescriptiblemente bello; era tan simple y elegante. No podía entender cómo lo había pasado por alto y lo estuve contemplando incrédulo durante veinte minutos. Aquel día pasé por el departamento y volví a mi despacho para ver si la nueva idea aún estaba allí. Y aún estaba. (Singh, 1998, pp. 263-264)

Las intuiciones afirmatorias se refieren a las afirmaciones, enunciados, representaciones o soluciones que, desde el punto de vista subjetivo, aparecen como aceptables, autoevidentes y necesarias global e intrínsecamente. Por ejemplo, el término "punto" tiene un significado intuitivo aparente porque se le asocia automáticamente una cierta representación: una manchita; sin embargo, el concepto matemático en sí no tiene un significado intuitivo.

Fischbein distingue entre información e intuición y para ello recurre a varios ejemplos de lo que considera información: "la razón de la circunferencia al diámetro es 3.14 [sic]; la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado es $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ " (1975, p.10). La diferencia entre intuición e información radica en que los datos o la fórmula no motivan al individuo a comprometerse, ya que no son percibidos como necesariamente derivados de mecanismos básicos intelectuales, sino que son adquiridos por repetición.

Las cogniciones intuitivas son confrontadas con el conocimiento matemático en situaciones didácticas, siendo que en ocasiones coinciden y en otras no. Fischbein (1999) identifica cuatro de estas situaciones y sus implicaciones didácticas:

1.- Cuando los enunciados matemáticos son aceptados sin prueba, basados en su evidencia intuitiva. En este caso se pierde el sentido del porqué de la demostración para los alumnos, a pesar de que, por el carácter deductivo de las matemáticas y su estructura axiomática, la evidencia intuitiva no elimina la necesidad de una prueba. Un ejemplo muy frecuente es que los estudiantes no le encuentran el sentido al énfasis puesto en la mención de las propiedades de los números reales, como la conmutatividad y la asociatividad. O también cuando se le pide al estudiante demostrar que en un triángulo isósceles los dos ángulos adyacentes a los lados congruentes y al tercer lado son congruentes entre sí; es evidente empíricamente qué se pide verificar y, por tanto, carece de sentido realizar tal verificación.

2.- Cuando la evidencia intuitiva entra en conflicto con el *status* formal, se debe explicitar este conflicto al alumno y hacerle entender que en las matemáticas lo que impera es el *status* formal. Si se ignora dicho conflicto, que se presenta como una reacción intuitiva errónea, entonces la intuición original permanece, el conflicto permanece y, a la larga, se olvida la verdad matemática formal. Un ejemplo muy común es el proceder de los alumnos ante la simplificación de expresiones del tipo $\frac{(x-2)^2}{x^2-4}$ para las cuales utilizan las fórmulas incorrectas $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ y $(a - b)^2 = a^2 - b^2$, pues *intuitivamente* resulta más razonable distribuir el exponente sobre la suma (como en el caso de la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma) en lugar de efectuar el producto notable donde aparece el término $2ab$.

3.- Cuando se presentan enunciados matemáticos sin relación con una representación intuitiva no existe conflicto alguno, pero la ausencia de dicha relación intuitiva hace que se dificulte la interpretación de los conceptos matemáticos. En estos casos el alumno debe acostumbrarse a la idea de que las matemáticas son un sistema de conocimiento abstracto, formal y deductivo. Existen muchos ejemplos de estas situaciones, entre los cuales se pueden mencionar la fórmula general de resolución de ecuaciones cuadráticas, los símbolos a^0 y $a^{\sqrt{\pi}}$, operaciones como $\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{5}{7}\right)$, etcétera.

4.- Cuando la evidencia intuitiva y el conocimiento matemático se les dificultan a los estudiantes, deberán ser analizadas y atendidas en el aula, con la ayuda de ejercicios adecuados. Fischbein (1999, pp. 20-21) presenta el siguiente ejemplo considerando la resta:

$$\begin{array}{r} -\quad 1702 \\ \underline{1368} \end{array}.$$

De acuerdo con el algoritmo canónico de la sustracción, se empieza restando 8 de 2. Intuitivamente esto no funciona dado que es contrario a la intuición. Se ha encontrado que, algunas veces, los niños invierten la operación (8 - 2) y escriben 6. Restar 8 de 2 es contraintuitivo. Lo que se tiene que hacer es *pedir prestada* una decena del siguiente dígito a la izquierda, pero esto tampoco es posible intuitivamente. El siguiente dígito es 0. Así que se debe pedir prestado de nuevo, ahora una centena, del siguiente dígito a la izquierda que es 7. Obviamente este procedimiento funciona pero probablemente el alumno, en este punto haya olvidado lo que estaba haciendo. A fin de no perderse, el estudiante tiene que comprender el principio del valor posicional de los dígitos, el cual está lejos de ser simple. La combinación anterior de dificultades formales y algorítmicas sirve para explicar por qué la operación de sustracción es tan difícil para muchos niños.

En todo momento, “generalmente hablando, para la enseñanza de las matemáticas, es muy importante que el profesor entienda las interacciones entre los aspectos intuitivos, formal y procedimental en los procesos de comprensión, recuerdo y resolución de problemas” (Fischbein, 1999, p. 22).

Para el alumno resulta difícil aceptar algunos de los enunciados que se proponen en el conocimiento matemático, y se genera una comprensión interna, producida por una aceptación *intuitiva* del conocimiento, cuando se acepta el saber sin importar el nivel de pensamiento matemático, aun en el de la construcción axiomática. La aceptación intuitiva, dice Fischbein, es parecida a la fe y se refiere principalmente al grado de aceptación directa y subjetiva de la relación correspondiente en cuanto a lo intrínsecamente necesario (D'Amore, 1999).

Esta aceptación tiene sustento en las convicciones, las cuales pueden ser (Fischbein, 1990): *autoritarias* (por ejemplo si el profesor o un libro lo dice); *formales* (cuando se basan en una prueba formal), o *intuitivas* (cuando se basan en la evidencia).

En cuanto a la demostración, Fischbein la considera una característica de las matemáticas. Sin embargo, por sus reglas lógicas y deductivas, considera a la demostración fuera del flujo fundamental del comportamiento, pues a pesar de que un adolescente es capaz de llegar al nivel lógico de razonamiento, esto no sucede, pues el método que ha utilizado durante su vida para validar su conocimiento está adaptado a los conocimientos empíricos.

Considera que "la comprobación formal y la interpretación intuitiva son perfectamente congruentes" (Fischbein, 1983, p. 22), no obstante que no sean simétricas en el campo de la actividad: no tienen el mismo peso en la vida práctica. Así, el pensamiento analítico, el basado en la lógica, tiene como característica su claridad, pero en la práctica carece de algo esencial: su inmediatez, la eficiencia directa. En situaciones prácticas se necesitan validaciones globales y rápidas. A pesar de ello, es posible que el concepto de demostración pueda ser usado en el aprendizaje de las matemáticas:

> El concepto de una demostración formal, no inductiva, no deductiva, no empírica puede convertirse en una herramienta útil para el proceso de razonamiento si, y solo si, adquiere la misma demanda del comportamiento empírico de la adaptación. (Fischbein, 1983, p. 20)

Las afirmaciones matemáticas serán aceptadas por el alumno (esperando que no las olvide) cuando se dé la aceptación intuitiva de las mismas. De igual manera, las demostraciones de dichas afirmaciones (teoremas) serán aceptadas cuando la aceptación intuitiva ocurra. Existen tres niveles de aceptación intuitiva (Fischbein, 1983) de la demostración:

1.- Cuando se acepta el hecho expresado por la misma afirmación.

2.- Cuando la aceptación se refiere a la estructura de la demostración.

3.- Cuando la aceptación se refiere a entender la validez universal de la afirmación como garantizada y planteada por la validez de la demostración. Esto se puede ver cuando un alumno acepta el enunciado y la demostración, pero aun así quiere verificar casos particulares.

Sin embargo, si las aserciones matemáticas (y científicas) son antintuitivas: a) la intuición primaria es muy fuerte y la verdad matemática no la puede eliminar, b) se desarrolla una intuición secundaria por medio del aprendizaje paralelamente a la intuición primaria, pero ambas diferentes, o c) la intuición secundaria coexiste con la primaria por un largo tiempo, dado que para que se transforme una cognición formal en una intuitiva toma tiempo y mientras tanto la intuición primaria permanece.

Pero es necesario que el docente esté consciente de la existencia y del papel que desempeñan las intuiciones sobre el razonamiento matemático, incluyendo la producción de conjeturas y la aceptación de teoremas y demostraciones. Es necesario que este conocimiento le permita al docente influir en los modelos tácitos intuitivos del alumno para mejorar sus intuiciones, ya que de otra manera las influencias continuarán y el paso del alumno hacia el conocimiento analítico resultará más difícil.

Los pensamientos analítico e intuitivo son aspectos complementarios del razonamiento humano, interactúan entre sí y se influencian mutuamente. No son independientes entre sí y mientras que unos se presentan de manera natural y son autoevidentes, otros ya se han convertido en una exigencia social por medio de las instituciones escolarizadas.

Dice Alessandra Mariotti (1998, pp. 2-3), refiriéndose a la comprobación y la intuición:

> Es necesario reconocer la unidad entre enunciado, prueba y teoría. [...] Para poder ser usado productivamente al razonar, un teorema debe tener determinado *status* de intuición, pero ello sólo puede ocurrir si la unidad —la fusión entre el enunciado y la prueba, de momento separados artificialmente— es restaurada: el enunciado y la prueba deben condensarse en conocimiento intuitivo (Fischbein, 1983). [...] El proceso de análisis que lleva a la prueba debe ser recompuesto en una sola pieza para obtener la inmediatez que hace a aquella unidad productiva.

La comprobación y los procesos de validación

La comprobación

La comprobación es uno de los elementos que caracterizan el quehacer matemático. A lo largo de la historia de las matemáticas se ha desarrollado una idea de qué es comprobar, y se han ido decantando formas de comprobar y criterios para determinar qué comprobación es válida y cuál no lo es. En el ámbito de las matemáticas, los términos *comprobación* y *comprobar* adquieren un sentido preciso. La comprobación permite establecer la veracidad de las conclusiones a partir de la veracidad de las premisas y, con ello, hace posible el avance en el conocimiento que se tiene de las matemáticas, mediante la construcción de nuevas ideas y el abandono de las no válidas.

En el ámbito de la educación secundaria la situación es diferente. Se prefieren comprobaciones o modos de comprobar en los que se utilizan procedimientos de argumentación que contribuyen al aumento de la convicción de los estudiantes y que mejoran su comprensión de las ideas.

En el tratamiento de la comprobación matemática en el aula se enfrenta una serie de dificultades características de la educación secundaria: ausencia de sentimiento de necesidad de comprobar por parte de los alumnos (De Villiers, 1993), dificultades para que los alumnos generen sus propias comprobaciones (Schoenfeld, 1992), y reticencia a aceptar que la existencia de un contraejemplo invalida irrevocablemente una proposición matemática (Galbraith, 1981). Para estudiar estas cuestiones, se caracteriza a la comprobación frente a otras actividades de justificación y, a partir de ello, se desmitifica como ritual discursivo, resaltando su carácter explicativo, comunicativo y sistematizador. Algunas ideas que se manejan en la comprobación en la educación secundaria son la inducción no completa, la analogía y la visualización.

Precisiones sobre el vocabulario

Siguiendo a Balacheff (2000), por argumentación se entiende cualquier discurso destinado a obtener el consentimiento del interlocutor sobre una afirmación; una explicación es una argumentación para la que el consentimiento se busca a partir de hacer explícito el carácter verdadero de la afirmación, utilizando exclusivamente argumentos de contenido y renunciando a otro tipo de argumentos, como los de autoridad.

Las pruebas son explicaciones en que el carácter verdadero de la afirmación se realiza sobre la base de normas aceptadas por determinada comunidad en un momento dado. Cuando la implicada es la comunidad matemática y las normas plantean la presentación de una sucesión de enunciados, cada uno de los cuales es una definición, un axioma, un teorema previo o un elemento derivado mediante reglas prestablecidas de los enunciados que le preceden, las pruebas reciben el nombre de *demostraciones* (Balacheff, 2000).

Mientras que la demostración se relaciona con la búsqueda del saber, una argumentación podría valorizar la eficiencia por encima del rigor. La argumentación, cuya práctica es usual en la vida cotidiana, puede actuar como obstáculo frente a la demostración, ya que el cambio que implica perseguir la certeza más allá de la confianza no tiene por qué ser aceptado naturalmente por el alumno cuando ingresa a la clase de matemáticas. Esta observación cuestiona la conveniencia de centrar la presentación de la demostración sobre la base de sus similitudes con la argumentación (Balacheff, 1990) y alerta sobre el riesgo de hacer creer a un alumno que realizó una demostración cuando no ha hecho más que argumentar.

Aunque Balacheff jerarquiza a la argumentación, la explicación, la prueba y la demostración, otros autores también establecen vínculos de otro tipo entre estas actividades. Por ejemplo, Duval (1992) opone la argumentación a la demostración como mecanismos de justificación de una afirmación: la demostración debe basarse en un razonamiento válido, fundamentalmente deductivo y resultante de la aplicación del *modus ponens*; la argumentación, por el contrario, no obedece a restricciones de validez ni de organización de las razones manejadas, sino a restricciones de pertinencia, de vinculación entre los contenidos de la afirmación y de las razones con que se busca justificarla. Mientras que en la primera la conclusión se impone necesariamente al individuo que comprende su funcionamiento, en la segunda esta imposición no es en absoluto garantía. Aunque Duval plantea la existencia de una gran distancia cognitiva entre demostración y argumentación, reconoce que la distancia a un nivel discursivo puede no ser tan grande y admite el debate entre la existencia de una ruptura o de continuidad entre una y otra actividad a nivel cognitivo.

En este trabajo de tesis se hace referencia a la “demostración” y a la “comprobación” como sinónimos. Estos términos se utilizan al hacer referencia en forma genérica al objeto emergente del conjunto de explicaciones argumentativas (o argumentos) aprobadas en el seno de una comunidad, frente a situaciones de acción, formulación y validación; es decir, ante situaciones que requieren una interacción entre los sujetos para tratar de convencer a uno o varios interlocutores de la veracidad de las afirmaciones que se hacen.

Qué es una comprobación

En la vida diaria, frecuentemente la gente se enfrenta a diversas circunstancias en las que se ve en la necesidad de mostrar la verdad o la falsedad de determinadas aseveraciones o hechos. Para ello recurre a su experiencia, a los sentidos, a los hábitos, a la intuición, y llega a una conclusión generalmente por mecanismos de ensayo y error. De acuerdo con Martín y Harel (1989), en la vida cotidiana la gente cree que comprobar es básicamente *aquello que los convence*. Bell menciona que “la convicción se alcanza la mayoría de las veces como el resultado de una revisión mental de un rango de elementos los cuales tienen presente el punto en cuestión, resultando finalmente en una integración de ideas en un juicio" (1976, p. 24). Sin embargo, utilizar la experiencia, los sentidos, los hábitos o la intuición puede conducir a emitir un juicio equivocado sobre la aseveración o el hecho. Un ejemplo es la primera demostración defectuosa que examina Dubnov, la de "un cuadrado cuyo lado es de 21 cm [que] tiene la misma área que un rectángulo cuyos lados son de 34 cm y 13 cm" (2003, p. 15). En esta demostración se recurre al corte del cuadrado (véase la figura 2.1) en dos trapecios y dos triángulos, que luego de manipularlos y reacomodarlos forman una nueva figura, un rectángulo (véase la figura 2.2) cuya área es distinta a la del cuadrado de partida; en el procedimiento descrito, se ha añadido un centímetro cuadrado. ¿De dónde proviene el centímetro cuadrado adicional?

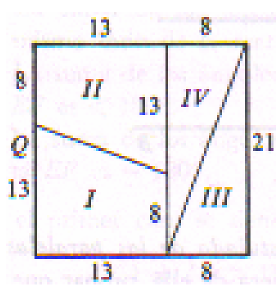


Figura 2.1. La división del cuadrado: 21 cm × 21 cm = 441 cm^2.

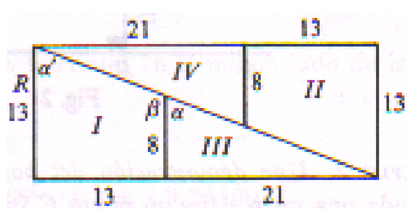


Figura 2.2. Sobra una unidad: 34 cm × 13 cm = 442 cm^2.

En general, comprobar es adjudicar la cualidad de certeza a una afirmación sobre algo. Para plantear el problema de investigación educativa de la comprobación en el aprendizaje de las matemáticas en las escuelas, es necesario precisar el significado de la palabra “comprobar”. Según el *Diccionario la Lengua Española de la Real Academia Española* (1998), *comprobar* es “verificar, confirmar la veracidad o exactitud de alguna cosa”.

Hersh (1993) menciona dos significados para el vocablo comprobar: uno vinculado al ámbito de la práctica cotidiana de los matemáticos profesionales, y el otro relacionado con la lógica matemática y la filosofía de las matemáticas. El primero de estos significados lo define como “un *argumento que convence a jueces calificados*” (p. 391; énfasis en el original). Sobre el segundo significado establece que es “*una secuencia de transformaciones de afirmaciones lógicas, llevadas a cabo de acuerdo con las reglas del cálculo de predicados”* (p. 391; énfasis en el original). ¿En qué difieren estos significados? Por principio de cuentas, Hersh afirma que la comprobación ‘lógica’ o formal sólo puede existir dentro de una teoría formalizada, la cual utiliza “un lenguaje formal basado en un conjunto de axiomas formales, razonado por reglas de inferencia formales” (p. 390). Así, este tipo de comprobación parte de “una serie de axiomas o afirmaciones que pueden considerarse ciertos o que por evidencia propia lo son. Después, con una argumentación lógica y progresiva, se puede llegar a una conclusión [...] innegable” (Singh, 2004, p. 39).

Por otra parte, para los matemáticos las comprobaciones son, en sus investigaciones de su práctica cotidiana, Deductivas pero no formales, se expresan mediante lenguaje ordinario completado con el uso de expresiones simbólicas. La fundamentación de una inferencia $A \Rightarrow B$ no estriba en la existencia de una regla de transformación que permita pasar de *A* a *B*, sino que se apoya en la significación particular de las expresiones *A* y *B*, interpretada por el matemático que realiza la inferencia. (Godino y Recio, 2001, p. 408)

Las demostraciones formales en las matemáticas cotidianas de un profesional de las mismas se pueden tornar en una tarea extraordinariamente compleja, lo que hace que la formalización completa de las comprobaciones, aunque en principio sea deseable, en la práctica sea imposible, ya que “pueden requerir tiempo, paciencia e interés más allá de la capacidad de cualquier matemático humano. Ciertamente pueden exceder la capacidad de cualquier sistema de computación disponible o previsible” (Hersh, 1993, p. 390).

La *actividad de comprobar* está íntimamente vinculada al quehacer matemático, al tipo de actores que en ella intervienen y a los distintos ámbitos en los que la comprobación se lleve a cabo. Por ejemplo, de acuerdo con Hersh (1993), la comprobación que efectúa un matemático tiene el propósito de convencer, mientras que el propósito de la comprobación efectuada por alumnos en un aula de matemáticas es explicar. La comprobación puede tener diferentes significados e interpretaciones en los ámbitos en los que se realiza dicha actividad, lo que permite hablar de tipos de comprobación. La importancia de reconocer que existe una variedad de significados para la comprobación radica en la posibilidad de “estudiar los componentes del significado, las circunstancias de su desarrollo, los papeles que desempeñan en los distintos contextos, en definitiva, de comprender las relaciones ecológicas que se establecen entre los mismos y su carácter sistémico" (Godino y Recio, 2001, p. 412). Diversos reportes de investigación en el campo de la educación matemática muestran que la aproximación a la comprobación puede darse desde distintas perspectivas, las cuales conllevan diferentes problemáticas.

En el ámbito del aula, en especial de la educación secundaria (grados 7 a 9), la comprobación, de acuerdo con Vicario y Carrillo, "se ha tratado casi exclusivamente en términos de verificación o justificación de enunciados matemáticos" (2004, p. 1). Desde esta perspectiva, en reportes de investigación sobre educación matemática se han propuesto distintos usos del concepto *comprobar*. A continuación se resumen algunos de estos usos enlistados por Reid (1995):

– Verificación: Fischbein y Kedem (1982), Bell (1976), y muchos otros. Concerniente a la verdad de una afirmación.
– Explicación: Hanna (1989), de Villiers (1991), Bell (1976), Moore (1990). Profundización en por qué es verdad.
– Exploración: de Villiers (1990).
– Sistematización: Bell (1976). Organización de resultados dentro de un sistema axiomático.
– Descubrimiento: de Villiers (1990): Invención de nuevos resultados.
– Comunicación: de Villiers (1990), Arsac, Balacheff y Mante (1992). Trasmisión del conocimiento matemático.

– Estética y autorealización: de Villiers (1990). Necesidad que siente un individuo.

– Desarrollo de un pensamiento lógico: de Villiers (1991). Como transferencia de habilidades u objetivo de la enseñanza.

– Un “juego del profesor”: Alibert (1988), Schoenfeld (1987).

Por su parte, Balacheff (1987) indicó que los procesos de validación deben ser estudiados en la situación en la que se ponen en funcionamiento y en referencia al sujeto que los ejecuta. Balacheff entiende por proceso de validación la elaboración de comprobaciones de cualquier tipo, ligado al análisis que la persona hace de la situación en la que se encuentre. Existen varias formas y diversos niveles de validación, ya que las exigencias de la situación son las que provocan el desarrollo de estos procesos, que de alguna forma están ligados en un principio a fines prácticos.

Godino y Recio (1997) describen diferentes significados de la comprobación en distintos contextos institucionales, como son el de la lógica y los fundamentos de las matemáticas, la matemática profesional, las ciencias experimentales, la vida cotidiana y la clase de matemáticas. Para Godino y Recio, en los fundamentos de la matemática la comprobación es formal y deductiva, mientras que en la matemática profesional, las comprobaciones “son deductivas pero no formales” (p. 316). En las ciencias experimentales y en la vida cotidiana, las comprobaciones son una mezcla de argumentaciones deductivas con otras inductivas empíricas y razonamiento por analogía. En la clase de matemáticas, se trata de un uso idiosincrásico de la comprobación, distinto del que hace el matemático profesional. El estudiante de matemáticas tiene que convencerse de la verdad necesaria y universal de determinado teorema, y explicar su convencimiento al profesor.

La característica principal que diferencia a las matemáticas de otras disciplinas es que “la comprobación se considera un concepto central en las matemáticas” (Tall, 1995, p. 27), “la esencia de la Matemática está en las comprobaciones” (Ross, 1998, p. 254). Por otra parte, no se debe perder de vista que las matemáticas son el resultado de dos tipos de procesos distintos: uno de naturaleza individual y otro de índole social. El primero se refiere a las relaciones que se establecen entre el sujeto cognoscente y los objetos propiamente matemáticos. El segundo tipo abarca procesos intraindividuales y de influencias sociales que, en el caso de las matemáticas, tienen un alto grado de coherencia y consenso entre los matemáticos (Heinze y Reiss, 2003).

De acuerdo con Barbin (1994), la historia de las matemáticas muestra que la idea de comprobación ha cambiado a lo largo del tiempo: en una etapa estuvo relacionada con la síntesis o la composición; después, con el análisis o la resolución, para finalmente evolucionar a evidencia y contradicción. En el ámbito del aula, este desarrollo no es tan diferente. Si se reconoce que los funcionamientos de los sistemas cognitivos, los conocimientos, las habilidades y los niveles de actividad de los estudiantes varían de uno a otro e individualmente, esto lleva a “la aceptación de otros tipos de comprobaciones en el aula de matemáticas” (Heinze y Reiss, 2003, p. 3), por lo que en las matemáticas escolares el significado y los usos de la comprobación deben considerarse de manera más amplia.

Así, según lo expuesto hasta este punto, no existe una noción de *comprobación* única. La noción de comprobación, no sólo como una verificación formal de un resultado, sino como un argumento convincente, como un medio de comunicación, ha adquirido gran importancia últimamente en la investigación de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en las escuelas.

La aplicación de la comprobación formal en el ámbito escolar está actualmente cuestionada, dadas las dificultades que comporta para los estudiantes, de acuerdo con diferentes investigaciones desarrolladas en las décadas recientes. En el ámbito escolar se prefieren las *explicaciones que comprueben* en vez de las *comprobaciones que expliquen* o las comprobaciones que sólo comprueben. Tanto las explicaciones que comprueban, como las comprobaciones que comprueban o las comprobaciones que explican son válidas. Incluso las llamadas ‘comprobaciones sin palabras’ recientemente han cobrado importancia porque las representaciones geométricas desempeñan el papel de las explicaciones necesarias (véanse, entre otros: Flores, 1993; Guirette, 2004; y Nelsen, 1990; 2002).

Funciones de la comprobación

A menudo la comprobación existe para el alumno como un ritual, un discurso que debe repetir o cuyo estilo debe imitar si se le pide probar una proposición, más que como una herramienta explicativa basada en un sistema común de validación construido y aceptado por él y su grupo (Balacheff, 1982). Algunas de las razones de este hecho podrían encontrarse en la propia actividad matemática dentro del aula:

1.- Se centra la función de la comprobación en la verificación de resultados, sin siquiera acompañar esta práctica de la discusión de las razones por las que se repiten una y otra vez validaciones ya hechas por otros.

2.- Se trata la comprobación como un objeto que el profesor acepta o rechaza cuando la recibe de su alumno, antes que resaltar su papel dentro de un proceso de validación (Balacheff, 1982). Un ejemplo de esto es el tratamiento que en ocasiones se da a las comprobaciones por inducción completa, en que el alumno, imitando un modelo, presenta a su profesor un trabajo que éste considera correcto o no, sin fomentar la reflexión sobre la actividad de justificación realizada. Esta situación favorece la disociación entre lo que el alumno hace para asegurarse de un resultado y lo que ofrece a su profesor cuando éste se lo pide.

3.- No se recrean las condiciones que permiten apreciar la necesidad de la comprobación frente al riesgo de equivocarse al aceptar un enunciado falso o rechazar uno verdadero y al riesgo de no lograr convencer a los demás al comunicar un resultado matemático (Balacheff y Laborde, 1985). Se sobrevalora, de esta manera, el papel motivador de un supuesto deseo de certeza por parte del estudiante.

4.- Se presentan comprobaciones formales a los alumnos, sin haberlos acercado previamente al simbolismo lógico y su manipulación, invocando habilidades naturales de razonamiento que se perfeccionarían en la práctica. Esta instrucción debería tomar en consideración explícitamente su aplicación en contextos matemáticos, ya que en ocasiones en los cursos de lógica tradicionales, se pone énfasis en algunas cuestiones que no se usan directamente en las comprobaciones (por ejemplo, diagramas de Venn) mientras que no enfatizan otras cuestiones estrechamente relacionadas con la actividad de comprobar (Selden y Selden, 1996).

Aunque no todas las funciones de la comprobación en la comunidad matemática son igualmente relevantes en el aprendizaje, es importante considerarlas para no llevar la comprobación al aula sólo como un ritual que identifica la práctica matemática, sino para presentarla como un comportamiento con *razón de ser* dentro del proceso de aprendizaje (Hanna, 1995).

La transición hacia el pensamiento matemático avanzado implica que el estudiante pase de la argumentación a la demostración como método de validación de un resultado matemático. Para algunos profesores la clave está en hacer las comprobaciones lo más claras posible, intentando que quede claro el porqué y el para qué de cada paso, y en presentar la comprobación como la respuesta a una necesidad de tal manera que la estructura de las matemáticas formales sea vista por el alumno como un objetivo significativo (Tall, 1991a). Pero dada la posición del profesor en el aula como garante de la legitimidad y validez de las actividades matemáticas que allí se realizan, resulta muy difícil *devolver* a los alumnos la responsabilidad de sus afirmaciones y, más aún, que emerja de esta devolución la necesidad de una comprobación más allá de una simple argumentación.

Para otros profesores, la salida está en introducir al estudiante en actividades de conjetura, verificación, debate, que fomenten el pasaje hacia explicaciones basadas en normas convenidas por el grupo, desmitificando el *ideal* de comprobación como un ritual formalista característico de la comunidad matemática, que en el aula sólo puede contemplarse (Tall, 1991b).

A fin de tomar en cuenta el papel de la comprobación como medio de justificación, explicación y comunicación, y de reconocer el proceso social que implica la aceptación de un nuevo resultado por parte de la comunidad matemática, algunos profesores han recurrido en los últimos tiempos a poner énfasis en la función explicativa de una comprobación, tanto que las comprobaciones que sólo validan como las que también revelan y usan las ideas matemáticas que la motivaron (su *propiedad característica*) son legítimas ya que ambas cumplen los requerimientos de una comprobación matemática; pero se diferencian en que mientras unas informan que un teorema es verdadero, las otras muestran además por qué es verdadero, sin que esto provoque necesariamente una pérdida de rigor. El reto está, entonces, en identificar pruebas alternativas a las que se usan en los cursos y que mayoritariamente no cumplen un papel realmente explicativo (Hanna, 1989). Estas pruebas podrán ser de diferentes clases: un diagrama, una discusión guiada por reglas previamente convenidas por el grupo, una comprobación totalmente rigurosa; pero sean de la clase que sean, no deberían dejar de lado el reconocimiento de que el alumno sabe que lo que es nuevo para él forma parte de un conjunto de conocimientos ya aceptado como verdadero por los matemáticos, por lo que el desafío radica en que entienda por qué es verdadero (Hanna, 1995).

La comprobación responde a necesidades de explicación y comunicación, así como a requerimientos de justificación y, en ese sentido, es importante mencionar que las pruebas visuales, es decir, las justificaciones que utilizan diagramas (acompañados, en mayor o menor grado por un texto), también pueden cumplir ese requerimiento de comunicación y explicación. En algunas ocasiones, este carácter explicativo de las pruebas visuales es mayor que el de una comprobación formal, puesto que se libera parte de la atención requerida para el seguimiento de las cadenas deductivas propias de la comprobación.

Cuando se analiza el papel de la visualización en las actividades de justificación, no sólo se destaca el valor heurístico y explicativo de los diagramas sino que también se alerta acerca del riesgo de utilizar en el proceso de justificación atributos del diagrama que son irrelevantes al concepto que ese diagrama modela. Se puede ilustrar lo anterior con un ejemplo: Mientras que en las comprobaciones analíticas se puede razonar con base en un elemento desprovisto de más atributos que los dados por las hipótesis, en las pruebas visuales cualquier objeto sobre el que se construya el razonamiento posee características que deben ser ignoradas en dicho razonamiento.

En la misma línea respecto a problematizar el uso de las pruebas visuales, Martín y Harel (1989) reportan una investigación mediante la cual detectaron que el uso de atributos irrelevantes de un diagrama que se utilice en una prueba visual no influye en la validación de dicha prueba para la mayoría de una muestra de alumnos que habían completado un curso de geometría de nivel preuniversitario.

Entender qué se está probando y cómo se está haciendo, no implica solamente la transmisión del resultado matemático en cuestión y el convencimiento sobre su validez, sino que, según De Villiers (1993), puede a su vez:

- *Alentar el descubrimiento de nuevos resultados*. Al analizar una prueba, la investigación sobre dónde se utilizan las hipótesis, sobre si es posible debilitarlas o sobre las consecuencias de su modificación, representa una importante fuente de conjeturas.
- *Aportar técnicas útiles para la resolución de problemas.* Por ejemplo, al comprobar la suma de los ángulos interiores de un polígono mediante la triangulación del polígono no sólo se valida dicha suma, sino que se proporciona un método, $(n - 2)180°$, para calcular la suma de los ángulos interiores de un polígono.
- *Alentar sobre la necesidad de mejores definiciones*. Este punto se relaciona con el grado de operatividad de una definición respecto a otra y también con la restricción del alcance de los enunciados, según la amplitud de los objetos afectados por la definición.
- *Contribuir a la sistematización de los resultados validados*. Este papel de la comprobación organizando resultados deductivamente a partir de axiomas, teoremas previos y definiciones, se relaciona con un perfil global de la comprobación a veces eclipsado por detalles más locales de la validación de un resultado particular como consecuencia lógica de otros.

Papel y límites de la comprobación en la educación secundaria

La comprobación juega un papel esencial en la educación matemática, como lo juega en las propias matemáticas. Sin embargo, lo que se considera una demostración en un ámbito no es equivalente en otro. Incluso a lo largo del aprendizaje escolar la propia idea de demostración no es unívoca: necesariamente ha de ir cambiando para adecuarse a las posibilidades de los estudiantes, a su mayor experiencia matemática, a su calidad de desarrollo, que les permite la comprensión y utilización de argumentaciones más complejas.

La interacción de la comprobación con el alumno puede exigir de él distintos comportamientos, para los que es necesario un nivel de desarrollo también diferente; según cuál sea ese nivel de desarrollo, será capaz de entender, de repetir o de generar, sucesivamente, argumentaciones o demostraciones de mayor exigencia. Esto ha sido estudiado ampliamente en el ámbito de la geometría, pero parece igualmente aplicable a cualquier contenido matemático.

Por qué aprender o enseñar las comprobaciones en la educación secundaria. En relación con la comprobación en la educación secundaria, Rivière (2001) presenta algunas aseveraciones planteadas por maestros respecto a que la demostración ha desaparecido de las aulas de España:

> - En la educación secundaria no se comprueba. (...) en la educación secundaria las matemáticas se muestran, en la educación superior se comprueban.
> - Antes se comprobaba todo. La comprobación ha ido desapareciendo de las aulas de secundaria.
> - No es posible hacer comprobaciones. Los alumnos no son capaces de entender una comprobación.
> - Se tiene que elegir entre que los alumnos comprueben o que aprendan a calcular. (Rivière, 2001, p. 214)

Rivière plantea que “algunas de estas afirmaciones se basan en recuerdos imprecisos sobre lo que se hacía antes y lo que se hace ahora. Y todas ellas responden a ideas sobre la comprobación extraídas de la matemática académica” (2001, p. 214).

Por su parte, Balacheff (2000) menciona que la palabra “demostración” ha desaparecido de la formulación de los programas educativos [de Francia] y de sus comentarios en la última reforma de la enseñanza de las matemáticas” (p. 1). Su lugar lo ocupa el razonamiento deductivo, en respuesta a “los problemas encontrados en la enseñanza de la demostración” (Balacheff, 2000, p. 2).

En México la demostración aparece explícitamente en los comentarios del programa como objeto de enseñaza y como herramienta de la actividad matemática de los alumnos. Como actividad matemática, la demostración se encuentra ligada al razonamiento deductivo: “la iniciación gradual al razonamiento deductivo, en situaciones escogidas por el profesor y considerando que la demostración en matemáticas es un objetivo que requiere de tiempo y una preparación cuidadosa” (SEP, 1994, p. 40). Como objeto de enseñanza, la demostración aparece mencionada en los programas de segundo y tercer grados, ambos en el área de la geometría. En el programa de segundo grado aparece en los temas de equivalencia de figuras y cálculo de áreas geométricas: “demostraciones del teorema de Pitágoras por descomposición y equivalencias de áreas” (SEP, 1994, p. 47). En el programa de tercer grado también aparece en el tema del teorema de Pitágoras: “demostraciones del teorema de Pitágoras por diversos métodos” (SEP, 1994, p. 50).

El significado de la demostración en el ámbito de la educación matemática difiere de sus significados en otros ámbitos; así que la disyuntiva de si se demuestra o no en la educación secundaria es falsa. En la enseñanza de las matemáticas en la educación secundaria, y en particular en la enseñanza de las demostraciones, de acuerdo con Rivière (2001), existen situaciones que contribuyen a aumentar la convicción de los estudiantes, además de mejorar la comprensión de las ideas que manejan en las demostraciones:

- La veracidad de las proposiciones y teoremas que se presentan en la educación secundaria está garantizada porque funciona plenamente y, por partida doble, [bajo] el criterio de autoridad: las afirmaciones del profesor son ciertas, las afirmaciones del libro de texto son ciertas. También está garantizada la veracidad porque se sabe que las cosas funcionan: es un conocimiento socialmente aceptado.
- A menudo no es fácil, ni deseable, acotar un intervalo de tiempo nítido para la comprobación. Los procesos de enseñanza y aprendizaje no son jerárquicos, como lo es la versión final de las matemáticas. Se aprende de manera no lineal, con idas y venidas, con aproximaciones sucesivas. Incluso cuando se desarrolla una explicación del profesor (lección magistral o con otro formato) una clase de matemáticas no siempre permite un desarrollo lineal, en el que la comprobación esté acotada en el tiempo. La adaptación de lo que se dice a la realidad del aula exige normalmente un camino tortuoso, con digresiones, recuerdo de contenidos, etcétera.

- La comprobación, en la medida en que se basa en el conocimiento matemático previo, es válida en tanto que el alumno tiene ese conocimiento. Por ello, en la validez de una comprobación dentro de la educación matemática entra en juego la situación individual de los aprendices. Esto introduce un componente de subjetividad notable.
- En la educación secundaria es necesario poder manejar propiedades y relaciones cuya comprobación requiere el uso de métodos muy formales y conceptos no conocidos. Así, por ejemplo, se utiliza la irracionalidad de π sin ni remotamente tener la posibilidad de comprobarla. Y no es fácil renunciar a la utilización de resultados en estas condiciones. En definitiva, se deben poder manejar sin problemas ideas no demostrables en el ámbito en el que se mueve el alumno.
- La necesidad de dar sentido al aprendizaje, y la propia finalidad de la enseñanza de las matemáticas en secundaria, exigen un apoyo en la realidad, asociado en muchos casos a la intuición. No es deseable evitar esa unión con la realidad, con la visión intuitiva de los conceptos y las relaciones matemáticas, que las hace más útiles. (Rivière, 2001, p. 215)

A pesar de todo, e introduciendo todos estos matices, la comprobación en secundaria comparte lo esencial con la comprobación en otros ámbitos. Permite validar las afirmaciones, se desarrolla siguiendo determinadas normas de razonamiento, su estructura es común y es válida en la medida en que es aceptada por la comunidad, aunque no se trate de la comunidad científica. Comparte incluso algunos de los problemas de validación: la validez en relación con el tamaño de la comprobación o el efecto en la certeza que produce el uso de medios automáticos de cálculo.

¿Qué papel desempeña la comprobación en la educación secundaria? Cualquier análisis del papel de la comprobación en esta etapa parte, de modo explícito o no, de la respuesta a la cuestión de *para qué se comprueba*. Las diferentes respuestas posibles a esta pregunta llevan consigo también distintas formas de actuar en relación con la comprobación. En una primera aproximación, se puede partir de las finalidades expresadas por Rivière (2001): a) se comprueba para convencer, b) se comprueba para contribuir al desarrollo de capacidades asociadas al razonamiento, o c) se comprueba para desarrollar hábitos *matemáticos.*

Comprobar para convencer, de acuerdo con Rivière (2001), es una actividad matemática asociada a la resolución de problemas, en la cual la argumentación juega un papel esencial dado que es el medio por el cual se convence al interlocutor. Al convencer al interlocutor, en este caso los alumnos, éstos integran nuevas ideas, así como métodos de razonamiento. Para Rivière, la convicción en la educación matemática, es más que conseguir la aceptación de la validez. Se ha de convencer al alumno para facilitarle el aprendizaje. Rivière afirma que la comprobación no es el único modo por el cual se puede convencer a los alumnos, que existen también otros modos por medio de los cuales se puede lograr la convicción, entre los cuales menciona al ejemplo y establece que es por medio de él que los alumnos pueden convencerse. El ejemplo no determina la veracidad de una afirmación sino que explica por qué esa afirmación es verdadera. Otro punto que menciona Rivière es que el rigor no siempre convence, así como tampoco los resultados que choquen frontalmente con ideas previas del alumno.

Comprobar para contribuir al desarrollo de capacidades asociadas al razonamiento, según Rivière (2001), ayuda a los alumnos a utilizar y comprender determinados modos de explicar, argumentar, razonar, validar del modo que se hace en matemáticas.

Comprobar favorece en los alumnos, conforme con Rivière (2001), el desarrollo de hábitos matemáticos que se consideran útiles en la actividad matemática, como son dudar de lo no comprobado, aceptar sin titubeos lo comprobado o dar un valor de certeza objetivo a las afirmaciones, independientemente de quién las hace.

Además de las razones planteadas por Rivière, en cuanto a la cuestión de para qué comprobar, la comprobación en la educación secundaria también puede servir como método de enseñanza. Casi con cualquier orientación metodológica que se tenga, se utiliza la comprobación, en mayor o menor medida, como excusa para manejar conceptos y relaciones. En este sentido, la comprobación comparte propiedades didácticas con la resolución de problemas. Facilita la interacción de los objetos y relaciones matemáticos, hace posible poner en juego su comportamiento en determinados casos y permite manejar de forma natural casos extremos.

De acuerdo con lo que se ha expuesto hasta este punto, en la educación secundaria no tiene sentido comprobar para establecer la veracidad de las proposiciones, ni para aumentar el grado de rigor o formalizar los contenidos que se enseñan, ni para enseñar o aprender técnicas específicas de comprobación.

De las razones para comprobar que enumeró Rivière, se derivan algunas condiciones básicas para la presencia de la comprobación en la educación secundaria. En la medida en que la comprobación es parte del aprendizaje de las matemáticas, comparte las características asociadas al aprendizaje.

Se entiende, en lo que sigue, que el aprendizaje se produce mediante la construcción de significados que se integran en la estructura de conocimiento del aprendiz de manera significativa, por enriquecimiento o recomposición de los conocimientos previos que se tienen en relación con el contenido específico de aprendizaje. De acuerdo con Rivière (2001), la presencia de la comprobación en la educación secundaria cumple tres condiciones básicas:

1.- La comprobación debe tener sentido para el alumno. Debe aportar nuevos significados a los que ya posee. Estos significados provienen, por una parte, del resultado que se comprueba y, por otra, del método de comprobación utilizado. En cuanto a la proposición que se comprueba, para que ésta sea significativa se requiere que los términos de la proposición sean comprensibles, pero también que se perciba como algo digno de ser demostrado. Pero también ha de ser significativa la comprobación en cuanto al método en dos aspectos: el método puede tener más o menos sentido. Pero, además de la estructura lógica del método de comprobación, el sentido viene determinado por el cuerpo conceptual que requiere. Pierde significado la comprobación que utiliza contenidos de mayor grado de abstracción, o aquellos otros que en la organización conceptual del alumno están alejados o sin conexión. Por el contrario, aquella otra que se apoya en ideas e instrumentos familiares, o en procesos cognitivos más accesibles, como la visualización o la analogía mecánica, tienen una mayor fuerza de significación.

2.- Tanto la comprobación como la proposición que se comprueba han de ser suficientemente accesibles para ser comprendidas, pero no tanto como para que no exista interés alguno hacia ellas. Moverse en ese margen no siempre es sencillo, precisamente porque lo demostrable en la educación secundaria es a menudo lo que muchos alumnos consideran evidente.

3.- La comprobación ha de ser aceptada como elemento de aprendizaje. Suponiendo que hay en el estudiante una actitud general favorable hacia su aprendizaje, la aceptación de la comprobación requiere una, aunque sea levísima, interrogación acerca de por qué será cierto lo que se pretende comprobar (ya se sabe que es cierto). Necesita también, como se ha indicado antes, que la proposición tenga sentido como algo que merece la pena ser demostrado. Pero es preciso, además, que no se sienta defraudado por ella. Se produce un conflicto, por ejemplo, cuando se manejan demostraciones con artificios, con aspecto de idea feliz, que el alumno considera a menudo un engaño.

A estas condiciones básicas, se les puede agregar una cuarta condición:

4.- No es aconsejable elegir una sola comprobación de entre una amplia variedad posible, por lo contrario, teoremas tan importantes como el de la suma de los ángulos interiores de un triángulo o el de Pitágoras merecen más de una comprobación. Debe evitarse elegir una sola comprobación de un teorema, ya que esto hace que los alumnos tengan la idea de que la comprobación presentada es un elemento aislado de la geometría, y colabora a la suposición de que las matemáticas son un sistema de conocimientos y de teorías acabadas, excesivamente cerradas, que tienen una validez absoluta y única. Una sola demostración conduce a la reproducción de la misma ajustada a un patrón y a unas condiciones. Trabajar con varias comprobaciones de un mismo teorema favorece el reconocimiento del papel y la importancia del teorema, además de ayudar al “descubrimiento de las distintas interpretaciones del significado del teorema” (Knipping, 2001, p. 255). Por otra parte, favorece el desarrollo en los alumnos de capacidades generales como argumentar, fundamentar, inferir, refutar y deducir, además de fomentar la búsqueda, discusión y análisis de las distintas formas de proceder, con lo cual ponen de manifiesto sus distintos tipos de pensamiento como son el creativo, lateral, especulativo, heurístico y lógico-deductivo. El trabajo con distintas demostraciones de un mismo teorema destaca la importancia del proceso seguido por encima del resultado, por lo que brinda métodos y procedimientos de trabajo, además de contribuir también al desarrollo de operaciones mentales generales como son abstraer, concretar, analizar, sintetizar, comparar, clasificar, particularizar y generalizar. El trabajo con varias demostraciones de un solo teorema, permite que los alumnos se desarrollen en tres sentidos. Primero, les enseña a resolver problemas, dado que aprenden a preguntar, encontrar, investigar y explorar, además de comprender que puede haber varias maneras de encontrar una respuesta. Segundo, les enseña a comunicarse matemáticamente, a utilizar el lenguaje matemático para explicar cosas y explicar el razonamiento utilizado, además de escuchar cuidadosamente para entender las diversas maneras en que las otras personas razonan. Tercero, les enseña a razonar matemáticamente, es decir, a pensar lógicamente y a discernir de las similitudes y diferencias en las distintas comprobaciones; les ayuda a poder elegir opciones sobre la base de estas diferencias y a razonar sobre las relaciones entre las cosas.

¿Cuándo comprueban los estudiantes?

Cualquiera puede cuestionar la sensatez de la pregunta: "¿Cuándo comprueban los estudiantes?", cuando lo más probable es que los estudiantes no quieran comprobar. De acuerdo con Reid (1995), la necesidad de comprobar puede clasificarse en dos dimensiones. La primera dimensión está relacionada con la necesidad que sienten los estudiantes cuando se enfrascan en una actividad matemática. La segunda dimensión se refiere a la necesidad de comprobar que sienten los alumnos en una interacción social.

La actividad matemática como motor de los procesos de validación. De acuerdo con Balacheff (2000), una motivación que impele a un individuo a producir una prueba o a emprender un proceso de validación es el deseo de saber si lo que se piensa que es verdad en realidad lo es, es decir, es el deseo de certitud o certidumbre lo que motiva la puesta en marcha de un proceso de validación. Este deseo puede ser originado, según Balacheff, por una satisfacción intelectual o por una curiosidad por la verdad.

La certidumbre de los estudiantes proviene de distintas fuentes. Una de ellas se refiere a una autoridad externa a ellos, la cual se hace evidente cuando un alumno basa su comprobación en lo que dice el profesor o lo que está escrito en el libro de texto. Este tipo de autoridad, utilizada para sustentar una demostración, sólo es válida hasta que alguien más experimentado dé un contraejemplo (o muestre lo contrario). Otra fuente que produce certeza en los alumnos es el basarse en uno o varios ejemplos que apoyen su comprobación. Este tipo de verdades matemáticas puede ser más o menos entendible ya que dependen de la habilidad de los estudiantes para escoger el o los ejemplos que ayuden a hacer comprensible su comprobación. Cuando un estudiante realiza una comprobación, es menos propenso a pensar que su trabajo es efímero. Una comprobación convence más cuando es resultado del propio trabajo que cuando es resultado del trabajo de alguien más.

Por su parte, Reid (1995) menciona que los motivos que pueden echar a andar un proceso de validación tienen que ver con las funciones de las comprobaciones, así para este autor es motivo la necesidad de explorar, comunicar y explicar, además de la necesidad de verificar; aunque afirma, con base en los resultados de su investigación, que esta última parece ser una motivación bastante pobre.

La interacción social como motor de los procesos de validación. De acuerdo con Brousseau (2000), situar a los alumnos en una situación que implique una interacción social permite transformar una situación de acción en una situación de validación. Balacheff (2000) apunta que uno de los medios que permite echar a andar los procesos de validación en las situaciones de validación son los debates, en los cuales se garantiza o desconoce la validez de la prueba por medio de las refutaciones. De este modo, para despertar en los interlocutores el interés por validar una conjetura, es necesario que la situación contenga un desafío a la contradicción, es decir, un riesgo generado por la incertidumbre en la motivación de un individuo. Reid (1995) señala como motivación para emprender un proceso de validación a) la comunicación de ideas a los demás y b) el desafío.

a).- Para comunicar ideas a los demás. A menudo los alumnos tienen una fuerte convicción de que una conjetura es cierta. Sus creencias pueden estar apoyadas en una explicación informal o en algunos casos convincentes. No tienen ninguna duda, pero hay una amplia audiencia que mantiene determinado escepticismo. Un proceso de validación permite al alumno convencer a los demás de la certeza de sus ideas. (Reid, 1995)

b).- Por desafío. Las situaciones difíciles se disfrutan más cuando son resueltas. En este punto se puede recordar un eslogan publicitario que tiene ya bastante tiempo de haberse mencionado: *si las cosas que valen la pena fueran fáciles de hacer, cualquiera las haría*. Muchos problemas matemáticos no tienen un significado profundo, pero cuando son resueltos, la sensación gratificante que siente la persona que los resolvió es indescriptible. Tal es el caso del último teorema de Fermat cuya comprobación tardó más de trescientos años en ser presentada. Después de noches infatigables de trabajo y de numerosos fracasos y decepciones, Andrew Wiles consiguió elaborar una comprobación de ese teorema, el cual atrajo su atención desde que tenía diez años de edad. La sensación de realización que obtuvo fue extraordinaria:

> No hay otro problema que pueda significar lo mismo para mí. Fue la pasión de mi infancia. Nada puede reemplazar eso. Lo he resuelto. Intentaré resolver otros problemas, estoy seguro. Algunos serán muy difíciles y tendré una sensación de realización otra vez, pero no hay ningún problema matemático que me pueda capturar como lo hizo Fermat. (Singh, 2004, p. 291)

Tal situación ayudó, sin lugar a dudas, a elevar la autoestima y la confianza matemática que Wiles tenía.

Tipo de comprobaciones que convencen a los estudiantes

Para hablar del tipo de comprobaciones que convencen a los alumnos, es necesario recurrir a los reportes de investigación en el campo de la educación matemática.

Hoyles en 1994 llevó a cabo una investigación junto con Healy cuyo propósito consistió en indagar sobre la comprensión de los estudiantes respecto a la comprobación y el proceso de validación en matemáticas. La primera fase de la investigación se centró en averiguar cómo el currículo modelaba las creencias de los estudiantes de décimo grado en Inglaterra y Gales (14 a 15 años de edad) en cuanto a la comprobación y cómo estas creencias afectaban sus razonamientos tras los juicios de prueba, es decir, qué era lo que los estudiantes escogían como comprobación y cómo leían y construían una comprobación (Hoyles, 1997, pp. 7-16). Para esta primera fase, Hoyles y Healy elaboraron un cuestionario que contenía comprobaciones y refutaciones en variadas formas, tomadas de tres campos de las matemáticas: la aritmética, el álgebra y la geometría.

Respecto al campo de la geometría, el reactivo G1 era el primer ítem y se refería a la comprobación de la afirmación de que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo siempre resultaba de 180°. En dicho reactivo se les solicitaba a los alumnos elegir, dentro de varias opciones, la comprobación que más se apegara a la que harían en caso de que se les solicitara responder por sí mismos a la pregunta y escogieran la comprobación que consideraran que su profesor les calificaría con la nota más alta. Las opciones que el reactivo G1 proporcionaba se pueden clasificar, teniendo como base al argumento que presentan como: visual para el caso de Amanda, inductiva en el caso de Barry, deductiva para el caso de Cynthia, empírica en el caso de Dylan y lógica para el caso de Ewan.

El análisis de los resultados reveló que los estudiantes escogieron a las comprobaciones inductiva y deductiva como aquellas que serían calificadas con la nota más alta por su profesor, mientras que para su desempeño personal escogieron la forma empírica. Algo que resulta interesante destacar es que sólo una quinta parte de los estudiantes escogió la misma comprobación para ambas preguntas, es decir, son pocos los estudiantes que creen que su desempeño personal recibirá la nota más alta por parte de su profesor.

Ibañez en 2000 llevó a cabo una investigación con alumnos de primer grado de bachillerato (15 años de edad) de España entre cuyos objetivos estaba el de determinar qué clase de pruebas convencían a sus alumnos (Ibañez, 2001, pp. 11-26). De los problemas que Ibañez les propuso a sus alumnos, uno se refería a la aceptación o rechazo de cinco pruebas distintas del teorema de la suma de los ángulos interiores de un triángulo; recurrió a los esquemas personales de validación planteados por Harel y Sowder (1998) para clasificarlas. Cincuenta por ciento (50%) de los estudiantes aceptó la prueba inductiva de un caso como comprobación del teorema, y solo 17% aceptó el esquema transformacional o intuitivo axiomático como comprobación del teorema.

Por su parte, Mercado, para su tesis de doctorado (2004) investigó sobre tres cuestiones, siendo una de ellas la de la capacidad de los alumnos para encontrar argumentos que justifiquen las conjeturas formuladas por ellos mismos. Los sujetos de su investigación fueron alumnos de segundo semestre del bachillerato en México (15 a 16 años). Mercado realizó su investigación en tres etapas; en la primera aplicó un cuestionario de diagnóstico. Este cuestionario tenía la finalidad de documentar las concepciones de los alumnos acerca de la prueba en matemáticas. Mercado adaptó para sus propósitos de investigación el cuestionario de Hoyles (1997), desechando los reactivos de aritmética y álgebra, y tomando sólo los reactivos de geometría. En particular, integró el reactivo G1 de opción múltiple de Hoyles (1997, p. 10). A partir del análisis de las respuestas de los alumnos en México, determinó que comparten similitudes con los del Reino Unido (Mercado, 2004, pp. 77-81). La opción que los estudiantes escogieron como aquella que sería calificada con la nota más alta por el profesor es la comprobación deductiva (formal, en palabras de Mercado), mientras que para su desempeño personal escogieron la forma visual y la empírica. Así que se tiene evidencia de que las comprobaciones que convencen a los estudiantes son las empíricas, es decir, aquellas en las que se recurre a la manipulación para verificar casos particulares, ya sea rasgando papel o midiendo ángulos.

El plegado de papel como recurso para comprobar teoremas

En la actualidad, se tiene una amplia diversidad de recursos para plantear situaciones problemáticas interesantes en la clase de matemáticas. Ejemplo de ello son los materiales didácticos que la Secretaría de Educación Pública (SEP) de México edita para apoyar a los maestros en el desempeño de su práctica docente (véanse, por ejemplo el *Libro para el maestro* (SEP, 2001b), el *Fichero* (SEP, 2001d), y la *Secuencia y organización de contenidos* (SEP, 2001c). En estos productos curriculares se proponen actividades con materiales concretos, que se clasifican en a) herramientas de la vida real, como el plegado de papel y el uso de periódicos y revistas; b) materiales educativos especialmente construidos con propósitos escolares, como el tangrama, el geoplano, el geoespacio y el pantógrafo, y c) juegos, que ocupan un espacio importante, como en el libro *Juega y aprende matemáticas* (SEP, 2001e), el cual forma parte de la colección “Libros del Rincón” (véanse: SEP, 2001e, y Szendrei, 1996).

Szendrei (1996) muestra las tres líneas o enfoques que en la actualidad los materiales concretos pueden adoptar en la realidad de las aulas. Aunque pareciera que las herramientas comunes, los materiales educativos y los juegos pueden coexistir en los salones de clases, Szendrei señala que no es así, y que el enfoque de uso de los materiales depende de la filosofía educativa de cada corriente didáctica. Por otra parte, expone las divergencias que existen entre las herramientas comunes, los materiales educativos y los juegos, resaltando la resonancia y transferencia del uso de las matemáticas en las situaciones de la vida real, el tiempo empleado para enseñar el uso adecuado de los materiales y la retroalimentación de los profesores por parte de alumnos, padres y colegas (Szendrei, 1996). Szendrei cuestiona la necesidad de los materiales educativos en el aula, ante el surgimiento de algunos temores compartidos entre los docentes, con referencia al uso de estos materiales. Para ejemplificar esta situación, hace referencia a las barras de Cuisinaire que, utilizadas correctamente, ayudan al desarrollo del concepto de número y al de operación; este material puede ayudar a desarrollar la intuición, a plantear conjeturas y a construir pruebas. Pero su uso equivocado conlleva la pérdida de su flexibilidad y la utilización del mismo en ejercicios triviales. Bajo este señalamiento, la cuestión del uso de los materiales es delicada, pues los profesores deben ser concientes de que los materiales por sí mismos no pueden provocar el aprendizaje de las matemáticas. Un punto importante que Szendrei identifica es la distancia entre determinado material concreto y el concepto matemático abstracto, así como la dificultad de plantear un proceso que dé cuenta del camino que debe recorrerse de lo concreto a lo abstracto.

Generalmente, tanto maestros como alumnos utilizan una hoja de papel en blanco para escribir en ella, hacer cuentas o dibujar algo, pero raras veces, o casi nunca, piensan en utilizar esa hoja de papel como un material concreto que les ayude, mediante su manipulación, a descubrir, profundizar, aplicar, visualizar, trasmitir, construir y comprobar nociones, fórmulas o relaciones matemáticas. El origami, papiroflexia o doblado de papel, es el antiguo arte japonés de plegar papel, arte en el que intervienen las matemáticas, permitiendo visualizarlas y transmitirlas. El educador alemán Friedrich Froebel (1782-1852) sugirió el uso del origami como una herramienta didáctica para el estudio de las formas geométricas elementales. El doblado de papel es un recurso didáctico que puede ser explotado al interior del aula mediante actividades enfocadas en construcciones de la geometría euclidiana. Al prescindir de la regla y el compás, se permiten operaciones más cercanas al espíritu geométrico griego relativo al razonamiento deductivo y al uso de la regla no graduada y del compás colapsable. Con el plegado de papel, los estudiantes literalmente manipulan conceptos geométricos; es un material de bajo costo, manejable y con una alta disponibilidad que además permite al maestro observar al alumno trabajando y hacer un seguimiento de su avance intelectual. Esto es, le permite observar cómo el alumno reflexiona, descubre, supera problemas y actúa ante sus logros, además de identificar sus reacciones psicológicas tales como seguridad, curiosidad, alegría, etc. Uno de los peligros de utilizar plegado de papel como material concreto radica en considerarlo sólo como una actividad recreativa, artística o de esparcimiento.

En diversos reportes de investigación sobre el plegado de papel en el aprendizaje de las matemáticas, se encuentran aquellos que se enfocan a los procesos de enseñanza y de aprendizaje, o hay los que destacan sus beneficios educativos. Por ejemplo, Silverman y Nevada (1996) afirman que mediante el uso de plegado de papel se puede mejorar el aprendizaje de los niños, a quienes les permite examinar, transformar, aplicar, representar, comprobar y comunicar, además de ayudarles a desarrollar su imaginación espacial, al proporcionarles un ambiente atractivo y motivador en el que extienden sus experiencias geométricas y su visualización espacial. Así, las experiencias con el plegado de papel proporcionan una oportunidad para desarrollar la creatividad actuando en la resolución y el planteamiento de problemas.

Por su parte, Carter y Ferrucci (2003) sostienen que cuando los estudiantes participan en actividades con el plegado y otras manipulaciones con el papel, como el rasgado y el corte, ganan un cimiento para construir las formalizaciones que necesitan en la geometría escolar. En particular, estos autores hacen notar que los estudiantes se benefician de la experimentación y la exploración con los modelos y materiales concretos, y de las oportunidades de aprendizaje proporcionadas por la visualización, el dibujo y la comparación de figuras en varias configuraciones, fortaleciendo así el desarrollo de su imaginación espacial. Dado que la geometría en la educación básica implica a los estudiantes en la descripción, relación y representación de los objetos de su medio, se pueden beneficiar de actividades en las que intervengan el plegado, el corte y el rasgado de papel.

Los beneficios educativos del plegado de papel, considerando que es una actividad que motiva el desarrollo del pensamiento intuitivo, de acuerdo con Levenson (1995), se relacionan con el desarrollo de conductas tales como la paciencia, la perseverancia y la elevación de la autoestima, además de fomentar el aprendizaje cooperativo y ayudar al desarrollo cognitivo de los alumnos.

El uso del plegado de papel en la enseñanza de la geometría, de acuerdo con Carrión (1993), es un recurso didáctico que ofrece ventajas, entre las cuales se tienen la economía en tiempo, esfuerzo y costo, además de que es un medio propicio para explorar las situaciones de las matemáticas escolares de modo novedoso. Carrión considera que el plegado de papel es un apoyo importante que puede “ilustrar diversos conceptos y verificar propiedades al enseñar proposiciones geométricas. Por ejemplo, ilustrar teoremas” (p. 11).

Por su parte, Ledesma (1994) menciona que un planteamiento pedagógico de la geometría de tipo constructivo centra el aprendizaje de los conceptos en el paso de lo concreto a lo abstracto, en el que se cubren tres etapas: la primera, de construcción o manipulativa, la segunda, representativa o de construcción gráfica; y la tercera, deductiva o de construcción formal. También menciona que la introducción del plegado de papel ayuda a los alumnos a *palpar* los conceptos, a visualizar y modelar las propiedades. Concluye que cuando se recurre constantemente a la manipulación, se facilita en los alumnos la comprensión de conceptos geométricos ya que se les dota de significado, además de propiciar la asimilación de propiedades, el desarrollo de la intuición, el fomento de la creatividad y lo que es más importante, no se pierde en ningún momento el carácter lúdico.

En un reporte de la investigación de Carter y Ferrucci (2003), la cual consistió en la identificación y clasificación de las actividades de diez libros de texto que recurrían al doblado de papel, se encontró que los contenidos de ángulos, propiedades de los triángulos, la construcción de poliedros, el trazado de segmentos perpendiculares, la construcción de polígonos y simetría eran los que con mayor frecuencia hacían uso del plegado de papel. De estos contenidos, fue el teorema de la suma de los ángulos interiores de un triángulo el que tuvo la mayor cantidad de actividades que se relacionaban con el plegado de papel.

Con respecto a la enseñanza de la geometría, en el *Libro para el maestro* de matemáticas para la educación secundaria, en el apartado que se refiere a los materiales y recursos didácticos para su estudio, se menciona que se pueden aprovechar "las oportunidades que ofrecen materiales [concretos] y recursos didácticos" (SEP, 2001b, p. 210); entre otros, se menciona el plegado de papel.

Para el estudio del triángulo y, en particular, del teorema de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, en el *Libro para el maestro* se sugiere la utilización de este recurso para mostrar “de manera informal que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°” (SEP, 2001b, p. 210). Esta sugerencia que se proporciona sin dar mayor explicación y por el modo en el que se expone, hace pensar que es un experimento más que una comprobación, cuestión debatible dado que en el ámbito del salón de clases, el plegado de papel se puede considerar como una comprobación que explica sin palabras: una comprobación que ayuda a visualizar de modo gráfico y silencioso la certeza de la afirmación de que la suma de los ángulos interiores del triángulo es 180°. El énfasis se pone claramente en los aspectos visuales del concepto matemático y en la intuición de quien observa para, de este modo, estimular su pensamiento matemático.

La utilización el plegado o del rasgado de papel para comprobar el teorema de la suma de los ángulos interiores del triángulo, sugerido el primero en el *Libro del maestro*, encuentra un amplio eco en los libros de texto y cuadernos de trabajo autorizados por la SEP para la enseñanza de las matemáticas en la educación secundaria. Así, se pueden encontrar libros en los cuales solamente se presente la actividad de doblado o rasgado, o incluso ambas, para comprobar el teorema de la suma de los ángulos interiores de un triángulo sin mayor explicación, como es el caso de los libros de texto de Bosch y Gómez (1999); Sánchez, Hoyos, Guzmán y Sáiz (2000); Valiente y Valiente (2001), y los cuadernos de trabajo de Curiel, Tavera y Villar (2001); Cruz (1999); Valiente y Valiente (2002); Flores y Lechuga (2000); García, Rivera y Durán (2001); Ramos y Montejano (2001).

También se tienen libros de texto y cuadernos de trabajo en los que, conjuntamente con la demostración del plegado de papel, los autores recurren a los ángulos alternos internos para comprobar el teorema de un modo preformal. Ésta es una comprobación que además de comprobar, explica; por ejemplo: Escareño, Mancera y Espinosa (2001); Chávez *et al*. (2001) y el cuaderno de trabajo de Duran *et al*. (2003).

Aparte de los enfoques que se han mencionado, existen otras posibilidades de utilización informal de las propiedades del triángulo. Entre ellas se puede mencionar la utilización de triángulos congruentes de cartón, para recubrir un plano, o la utilización de una red triangular en la cual se coloreen los ángulos y se identifiquen líneas paralelas en la red, o considerando una vuelta completa alrededor de una glorieta cuadrangular o rectangular, siendo la suma de los giros de 360°, y la división de esta glorieta por su diagonal para demostrar que la suma de los ángulos interiores de un triángulo rectángulo vale 180°, y después, por descomposición, se puede demostrar esta propiedad de los triángulos.

Los procesos de validación

La educación matemática es una disciplina de investigación que desde hace varias décadas se ha venido desarrollando en diversas partes del mundo. Esta disciplina en Francia recibe el nombre de didáctica de las matemáticas. Uno de los representantes de la didáctica de las matemáticas es Guy Brousseau, quien en su teoría de las situaciones didácticas plantea una serie de situaciones de apropiación de conocimiento matemático, entre las cuales se encuentra la situación de validación, la cual:

> Es la ocasión en que el alumno somete el mensaje matemático al criterio de su interlocutor justificando su exactitud y pertinencia. Se plantea así un *debate* donde el interlocutor puede participar pidiendo explicaciones suplementarias ante aquellas que no comprende, o rechazando aquellas que puede refutar, lo que puede llevar al alumno a nuevas acciones, nuevas formulaciones y nuevas validaciones. (Brousseau, 1977, p. 14)

De acuerdo con Giordano, una situación de validación es “una situación didáctica que contiene orgánicamente la exigencia de elaborar una prueba, y una prueba es todo proceso de validación de los enunciados que, desde la perspectiva de los alumnos, aparecen como conjeturas” (2005, p. 9).

Balacheff (1987; 2000), en el marco de la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau, analiza las características “de un proceso didáctico cuya finalidad es la de plantear problemas de prueba e inducir a los estudiantes a tomar la responsabilidad de resolverlos y, por consiguiente, responsabilizarles también de los medios de validación utilizados por ellos” (Balacheff, 2000, p. 8), siendo éstos los procesos de validación, a los que define como “la actividad intelectual no completamente explícita que se ocupa de la información dada o adquirida, para producir una nueva información cuya finalidad sea la de asegurarse de la validez de una proposición y, eventualmente, producir una explicación (una prueba o una demostración)” (Balacheff, 2000, p. 13). Es decir, los procesos de validación son considerados como los tipos de racionalidad que ostentan los individuos al sustentar las pruebas que producen en una situación de validación. Estos procesos tienen un carácter dialéctico en los que los sujetos se confrontan con argumentos a favor y en contra. Los productos que se obtienen de estos procesos de validación, de acuerdo con Balacheff, son la explicación, la prueba y la demostración, cuya movilización y ejecución son provocadas por las exigencias de las interacciones sociales de la situación en la que se encuentra el sujeto.

No es suficiente sólo proponer un problema a los alumnos para garantizar la puesta en marcha de un proceso de validación: “no basta ‘comunicar’ un problema a un alumno para que ese problema se convierta en su problema y se sienta el único responsable de resolverlo” (Brousseau, 1988, p. 65). La ausencia o la puesta en práctica de un proceso de validación, de acuerdo con Balacheff (2000), se relaciona con el análisis que el alumno hace de la situación. Para ejemplificarlo, Balacheff recurre a la cita de una metáfora extraída de un escrito de Popper en la cual éste diserta acerca de las posibles consecuencias de varias situaciones en función del nivel de certidumbre de la autenticidad de varias monedas que recibe de cambio al comprar un libro. Así, los procesos de validación tendrán una mayor oportunidad de ponerse en marcha cuando los alumnos sean responsables de validar una producción propia, ya sea una proposición matemática o una conjetura referente a la validez de una afirmación matemática.

Para Harel y Sowder (1998), la base de un proceso de validación radica en el proceso empleado por un individuo para convencerse de la verdad de una conjetura establecida con base en una observación; plantean que el proceso de validación incluye dos subprocesos: convencimiento y persuasión. El convencimiento lo definen como “el proceso que un individuo utiliza para eliminar sus propias dudas sobre la verdad de una observación” y la persuasión como “el proceso que un individuo utiliza para eliminar las dudas a otras personas sobre la verdad de una observación" (Harel y Sowder, 1998, p. 241). Para estos autores, una observación traducida en conjetura dejará de serlo hasta que la persona tenga absoluta certeza de la verdad de esa observación. Así, un estudiante puede estar convencido de la verdad de una observación, pero no tendrá absoluta certeza hasta que su maestro confirme esa observación o hasta que acumule evidencia adicional. En este sentido Fischbein y Kedem (1982) reportaron que los estudiantes que participaron como sujetos en su investigación después de haber elaborado una demostración deductiva de una proposición matemática que les fue proporcionada, deseaban verificarla en algunos casos especiales, lo cual indicaba que todavía dudaban de la veracidad de la demostración.

Un elemento esencial de la propuesta de Harel y Sowder es la idea de esquema personal de validación, el cual queda situado en una dimensión personal o subjetiva de lo que para determinado individuo significa hacer matemáticas. Este esquema lo definen como "todo aquello que constituye persuasión y convencimiento para la persona" (Harel y Sowder, 1998, p. 244). Luego, un esquema personal de validación se puede entender como los argumentos que utiliza una persona para convencerse y convencer a los demás de la verdad o falsedad de una proposición matemática.

Harel y Sowdwer proponen siete tipos de esquemas de validación, agrupados en tres categorías: de convicción externa, empíricos, y analíticos. Los esquemas personales de convicción externa se dividen en tres tipos y, en cada caso, los estudiantes validan las conjeturas basándose en una fuente de conocimiento externa. En el esquema personal de validación ritual, el convencimiento se debe a la forma de la prueba, no a su contenido. Un esquema personal de validación autoritario es aquel en el cual el convencimiento surge a causa de que el maestro o el libro o alguna otra autoridad dijeron que era así. En un esquema personal de validación simbólico el convencimiento se debe a la manipulación simbólica, como puede ser el uso de fórmulas matemáticas o la realización de transformaciones algebraicas, detrás de las cuales no necesariamente hay un significando.

Los esquemas personales de validación empíricos son los que validan las conjeturas basándose en observaciones físicas o experimentaciones concretas. Éstos pueden ser inductivos o perceptivos. Un estudiante con un esquema personal de validación inductivo valida las conjeturas evaluándolas cuantitativamente en uno o más casos concretos, consciente de la verdad del caso general. En un esquema personal de validación perceptiva el estudiante valida las conjeturas mediante inferencias basadas en imágenes mentales rudimentarias que no se encuentran apoyadas totalmente por la deducción, siendo estas inferencias las que se utilizan para convencerse y convencer a los demás. Harel y Sowder hacen notar que lo que caracteriza a estas imágenes mentales rudimentarias es el "ignorar las transformaciones sobre los objetos o la incapacidad de anticipar plenamente o con precisión los resultados de esas transformaciones" (Harel y Sowder, 1998, p. 255).

Los esquemas personales de validación analíticos pueden ser transformativos o axiomáticos, los cuales validan las conjeturas basándose en deducciones lógicas. En un esquema personal de validación transformativo el estudiante efectúa operaciones sobre objetos y anticipa los resultados de esas operaciones; también efectúa transformaciones de imágenes mediante procesos deductivos. Un esquema de validación axiomático va más allá de uno transformacional: es un esquema cuyos autores comprenden que, al menos en principio, las justificaciones matemáticas deben haber comenzado a partir de términos no definidos y axiomas.

Harel y Sowder elaboraron su marco basados en su trabajo con alumnos del nivel medio superior y del nivel superior. Con algunas adaptaciones, este marco se utiliza en esta investigación para describir los procesos de validación insertos en la resolución de problemas, mediante los cuales los alumnos de segundo y tercer grados de la educación secundaria comprueban la certeza o veracidad de una proposición matemática.

En esta tesis se entiende por proceso de validación aquel mediante el cual los alumnos, al plantear una conjetura acerca de la validez de una afirmación matemática, arriban por sí mismos a una conclusión sobre su propia producción o hacen un juicio respecto de los procedimientos que han puesto en juego para explicar, argumentar y probar esa conjetura, así como de los resultados que obtengan.

En este capítulo se analizó la relación existente entre la resolución de problemas y los procesos de validación; se revisaron cuestiones sobre racionalidad, visualización e intuición y su relación con la elaboración de conjeturas; se analizó la noción de comprobación, sus distintas interpretaciones, usos y funciones en distintos ámbitos.

En el siguiente capítulo se describirá la metodología de la investigación. Se describirán las características de los sujetos de investigación; se describirán los propósitos y contenidos de las hojas de actividades diseñadas para esta investigación y se describirá el procedimiento para el desarrollo de la fase experimental.

CAPÍTULO 3

METODOLOGÍA

De acuerdo con los planes y programas de estudio de 1993 de la asignatura de matemáticas de la educación secundaria en México, los alumnos deben aprender los siguientes teoremas geométricos:

1.- Teorema de Euler (primer grado).

2.- Teorema de la igualdad de los ángulos correspondientes, alternos internos, y alternos externos formados por dos rectas paralelas cortadas por una transversal (segundo grado).

3.- Teorema de la suma de los ángulos interiores de un triángulo (segundo grado).

4.- Teorema de la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero (segundo grado).

5.- Teorema de la suma de un polígono convexo en general (segundo grado).

6.- Teorema de Pitágoras (segundo y tercer grados).

7.- Teorema de la semejanza de triángulos: LAL, ALA y LLL (tercer grado).

8.- Teorema de Tales (tercer grado).

9.- Teorema de los ángulos central e inscrito en una circunferencia (tercer grado).

10.- Teorema del ángulo inscrito en una semicircunferencia (tercer grado).

Cuando los alumnos solamente se aprenden y recuerdan las expresiones matemáticas relacionadas con estos teoremas y sus demostraciones, su conocimiento se estanca, dificultándose la evolución gradual de su razonamiento deductivo. Así, cuando los alumnos se encuentran frente a una situación problemática que exige la elaboración de una conjetura y su posterior comunicación y validación, su competencia resolutiva se ve mermada, en parte porque no saben qué elementos necesitan ni dónde pueden encontrarlos y, en el peor de los casos, no saben qué hacer.

En este capítulo se describe la manera en que se llevó a cabo la investigación. El capítulo se divide en tres apartados: participantes, instrumentos y procedimiento. En el primero se describe a los sujetos que participaron en el estudio y la manera en que se condujo su selección; en el segundo apartado se hace una descripción de los instrumentos utilizados para recabar la información, y en el tercer apartado se describen los procedimientos llevados a cabo durante la aplicación de los instrumentos y se explica cómo se implementaron las sesiones de trabajo con los alumnos.

Participantes

El grupo de estudio estuvo integrado por 24 estudiantes de educación secundaria, 12 inscritos en una escuela pública y 12 inscritos en una escuela privada (particular). Las edades de los alumnos oscilaron entre los 14 y 15 años. Los alumnos de la escuela privada cursaban el segundo grado y los alumnos de la escuela pública cursaban el tercer grado de la educación secundaria. Los alumnos de la escuela pública eran estudiantes de la escuela secundaria 39, turno vespertino, “Ramón Domínguez Ramón”, ubicada en la delegación Álvaro Obregón; mientras que los alumnos de la escuela particular, eran estudiantes del Colegio Hispano Americano, el cual se ubica en la delegación Cuauhtémoc. La aprobación que permitió el acceso a la secundaria pública se obtuvo gracias a que el autor de esta tesis laboró en ese centro de trabajo, por lo que de manera verbal, se solicitó y se obtuvo el permiso de las autoridades del plantel, para trabajar con 12 alumnos de tercero grado. Con respecto al colegio particular, para que se permitiera la entrada a esta institución fue necesario presentar un oficio (véase el apéndice C) solicitando permiso y facilidades institucionales para llevar a cabo un trabajo de investigación en el cual se requería la participación de 12 estudiantes de segundo grado.

El grupo de estudiantes de la escuela particular incluyó a 6 hombres y 6 mujeres, quienes pertenecían a distintos grupos de segundo grado del turno matutino, pero que tenían a la misma maestra de matemáticas, la cual gozaba del reconocimiento de la comunidad escolar como una persona que promovía la participación de los alumnos.

Respecto al grupo de estudiantes de la escuela pública, éste se integró por 7 hombres y 5 mujeres, inscritos en dos grupos distintos de tercer grado del turno vespertino. A diferencia de la escuela particular, los alumnos de la escuela pública tenían maestros de matemáticas diferentes.

Se eligieron alumnos de segundo y tercer grados de educación secundaria dado que en los comentarios de los programas de estos grados la “demostración” aparece explícitamente como objeto de enseñaza o como herramienta de la actividad matemática de los alumnos. Como actividad matemática, la demostración, de acuerdo con los programas, se encuentra ligada al razonamiento deductivo: “la iniciación gradual al razonamiento deductivo, en situaciones escogidas por el profesor y considerando que la demostración en matemáticas es un objetivo que requiere de tiempo y una preparación cuidadosa" (SEP, 1994, p. 40). Como objeto de enseñanza, la demostración aparece mencionada en los programas de segundo y tercer grados en el área de geometría. En el programa de segundo grado aparece el contenido "Demostraciones del teorema de Pitágoras por descomposición y equivalencias de áreas" (SEP, 1994, p. 47), dentro del tema de equivalencia de figuras y cálculo de áreas geométricas. En el programa de tercer grado aparece el contenido "Demostraciones del teorema de Pitágoras por diversos métodos" (SEP, 1994, p. 50), en el tema del teorema de Pitágoras.

Características adicionales de los alumnos participantes

¿Cuales son las características que se deben poseer para dedicarse al trabajo de la demostración en matemáticas? De entrada, el libro de Simon Singh, *El enigma de Fermat*, da ciertos indicios, con distintos ejemplos, de las características que se deben poseer para llevar a cabo una demostración: tenacidad, audacia, ingenio, decisión y confianza en sí mismo. Estas características parecen ser los ingredientes que distintos matemáticos a lo largo de la historia han desplegado cuando realizaban sus demostraciones. Aunque algunas veces la inspiración humana se complica tanto que las comprobaciones escapan a una solución durante décadas. Tal es el caso de la conjetura del punto que afirma que "es imposible dibujar un diagrama de puntos de tal modo que cada línea tenga por lo menos tres puntos sobre ella" (Singh, 2004, p. 298). La demostración de esta conjetura "solo consistía en una cantidad mínima de conocimientos mezclada con cierto ingenio extra" (Singh, 2004, p. 129). Esta breve información condujo a establecer características deseables en los sujetos que participaron en las actividades experimentales de esta investigación. Primero, la relacionada con el conocimiento matemático necesario y la experiencia en el tema u objeto, que los alumnos debían tener a su disposición para llevar a cabo las acciones de interés de este estudio y, segundo, lo inherente a características individuales de los estudiantes que facilitaran recabar información necesaria para describir los procesos de validación y sus actuaciones al verse enfrentados a la necesidad de comprobar la veracidad de proposiciones matemáticas que ellos formularan. Esto condicionó una estrategia de selección de estudiantes que incluyó: a) La amplitud, es decir, cuánto se quería ensanchar el campo de estudio para llegar a un entendimiento del mismo; así, fue condición integrar a alumnos que se encontraban en casos extremos con respecto al desempeño escolar, es decir, se seleccionó a los estudiantes sin importar cuál era su promedio de aprovechamiento, aunque sí se aseguró que hubiese alumnos con promedios variados, que iban desde 5 hasta 10; b) no fijarse demasiado en el desempeño académico expresado cuantitativamente por medio de una calificación, sino en considerar el razonamiento e ingenio matemático; si algunas demostraciones requieren de una mínima cantidad de conocimiento matemático y una cantidad extra de ingenio, se resaltó que los alumnos que participaran en las actividades experimentales fueran ingeniosos; en este punto se complicó la selección de los participantes, ya que no se pudo determinar objetivamente si un alumno en particular era o no ingenioso, o cuánto lo era; para tratar de subsanar esta dificultad, se recurrió al criterio de los profesores de la asignatura de matemáticas para que nominaran a los alumnos que a su parecer tenían desarrollado un razonamiento e ingenio matemáticos; c) decisión y tenacidad, es decir, el grado de compromiso que un individuo despliega ante una situación en particular; ante esta perspectiva, lo más conveniente fue que participaran en el estudio alumnos que se comprometieran y asumieran la responsabilidad de dar solución a las situaciones experimentales que se les plantearían en el transcurso de la investigación; también se recurrió a los profesores para que emitieran su opinión y mencionaran, de acuerdo con su experiencia basada en el trato diario con sus alumnos, quiénes se comprometían con la resolución de las actividades y tareas escolares.

Instrumentos

Los datos para esta investigación se obtuvieron mediante 7 dispositivos experimentales y de videograbaciones de 8 sesiones de trabajo con los estudiantes, quienes trabajaron con contenidos de geometría. Se escogió la rama de la geometría dado su carácter gráfico, el cual le confiere algunas ventajas sobre la simbología netamente abstracta de otras ramas como, por ejemplo, el álgebra. Sin embargo, esta misma característica gráfica no siempre ayuda a desarrollar una capacidad intuitiva en el alumno, sino que propicia una confusión de lo que en realidad es el objeto de estudio de la geometría con procedimientos propios de un dibujante, logrando únicamente la memorización de propiedades y de procedimientos para el trazado de figuras.

Características de los dispositivos experimentales

Las 7 hojas de actividades aplicadas a las 12 parejas de alumnos, con tareas específicas de geometría, se construyeron conforme al programa de estudios de segundo grado de educación secundaria de la SEP (1994) y a los libros de texto autorizados para este grado. Se agruparon con base en las características que presentan y de acuerdo con los objetivos que se deseaba alcanzar de la siguiente manera:

1.- Actividades para que los alumnos conjeturen, expliquen y emitan un juicio sobre la validez de una afirmación.
2.- Actividades para que los alumnos generalicen inductivamente un resultado matemático.

Siendo uno de los objetivos de la investigación planteada en esta tesis estudiar la riqueza y variedad de procesos de validación mediante los cuales los alumnos comprueban la veracidad de una proposición matemática en el ámbito de la resolución de un problema, se describe el desempeño de los alumnos desde su interacción con la primera actividad hasta la última. Esto permitió tener información para el análisis respectivo de las actividades de este estudio.

Actividades para el planteamiento de conjeturas, explicaciones y emisión de un juicio sobre la validez de una afirmación matemática

Las actividades de este grupo se diseñaron para promover que los alumnos plantearan conjeturas, las comunicaran y, con base en sus explicaciones, se convencieran de la validez de las afirmaciones planteadas en las actividades, acorde a lo establecido en el *Libro para el maestro* de matemáticas de la educación secundaria, en el cual se señala que “es muy importante que la resolución de problemas de geometría desarrolle en el estudiante la capacidad de producir conjeturas, comunicarlas y validarlas” (SEP, 2001b, p. 194).

Primer dispositivo: *Perímetro de un triángulo.* El problema que se planteó a los estudiantes en esta actividad se refirió al establecimiento de un juicio concluyente sobre la verdad o la falsedad de una afirmación relacionada con el perímetro de dos triángulos de distinto tamaño y forma. El enunciado fue el siguiente:

> *El perímetro de un triángulo pequeño es menor*
> *que el perímetro de un triángulo grande.*

El propósito de esta actividad fue indagar la comprensión que los alumnos tenían de la noción de perímetro. En este sentido, los alumnos debían reconocer que el perímetro de un triángulo dependía de las medidas de las longitudes de los lados de dicho triángulo y que lo grande o pequeño de un triángulo con respecto a otro triángulo distinto dependía de las medidas de los tres lados.

Se esperaba que los alumnos, auxiliándose de la visualización, afirmaran que era cierto que el perímetro de un triángulo pequeño era menor que el perímetro de un triángulo grande porque los lados del triángulo pequeño tenían menor longitud que los de otro triángulo que visualmente era más grande. En la validación de esta afirmación se esperaba que los alumnos, auxiliándose de los instrumentos de geometría, como regla o escuadra graduadas, midieran las longitudes de los tres lados de cada triángulo, las sumaran para obtener el perímetro de cada triángulo y compararan ambas sumas.

Segundo dispositivo: *Área de un triángulo*. El problema que se planteó a los estudiantes en esta actividad se refirió al establecimiento de un juicio concluyente sobre la verdad o la falsedad de una afirmación relacionada con el área de dos triángulos de distinto tamaño y forma. El enunciado fue el siguiente:

El área de un triángulo pequeño es menor que el área de un triángulo grande.

Esta actividad tenía como propósito indagar la comprensión que los alumnos tenían de la noción de área. En este sentido, los alumnos debían reconocer que el área de un triángulo dependía de la longitud tanto de la base como de la altura que tenía sobre esa base hacia el vértice opuesto.

En esta actividad se esperaba que los alumnos, auxiliándose en la visualización, afirmaran que era cierto que el área de un triángulo pequeño era menor que el área de un triángulo grande porque la base y la altura del triángulo pequeño tenían menor longitud que la base y la altura de otro triángulo que visualmente era más grande. En la validación de esta afirmación se esperaba que los alumnos, auxiliándose de los instrumentos de geometría, como regla o escuadra graduadas, midieran las longitudes de cualquiera de las tres parejas de base y altura de cada triángulo, utilizaran la fórmula

$$\frac{\text{base x altura}}{2}$$

para obtener el área de cada triángulo y las compararan.

Tercer dispositivo: *Suma de los ángulos interiores de un triángulo*. El problema que se planteó a los estudiantes se refirió al establecimiento de un juicio concluyente sobre la verdad o la falsedad de una afirmación relacionada con la suma de los ángulos interiores de dos triángulos de distinto tamaño y forma. El enunciado fue el siguiente:

> *La suma de los ángulos interiores de un triángulo pequeño es menor que la suma de los ángulos interiores de un triángulo grande.*

Uno de los objetivos de esta actividad fue que los participantes conjeturaran y validaran que la suma de las medidas de los ángulos interiores de cualquier triángulo, sin importar tamaño ni forma, es igual a 180°. Otro objetivo de esta actividad fue que los estudiantes, por medio de un contraejemplo, limitaran la validez de la invariancia de la suma de los ángulos interiores a la geometría plana.

Se esperaba que los alumnos afirmaran que era falso que la suma de los ángulos interiores de un triángulo pequeño era menor que la suma de los ángulos interiores de un triángulo grande, porque esta suma siempre es igual a 180° en cualquier triángulo. En la validación de esta afirmación se esperaba que los alumnos se auxiliaran del transportador y midieran los ángulos interiores en los tres vértices de cada triángulo, los sumaran, compararan las sumas y observaran que obtenían el mismo valor.

Cuarto dispositivo. La actividad 4 tuvo la finalidad de indagar acerca de la comprensión de los alumnos sobre el campo de validez de los cuantificadores *cualquier* y *todos*, así como sobre otras expresiones de cuantificadores que utilizaran en sus explicaciones. Esto incluyó la indagación de qué significado le daban a los cuantificadores dado que exigía delimitación en cuanto al tipo de figuras con las que se trabajara, esto es, a cuáles afectaba la propiedad implicada.

En esta actividad los alumnos debían dar la medida del ángulo interior de un triángulo, como resultado de las manipulaciones aritméticas que hicieran de los valores de los ángulos interiores de los triángulos; es decir, determinar el valor del tercer ángulo interior de un triángulo, a partir de la suma que obtuvieran de los dos ángulos interiores dados y la posterior diferencia con 180° (que es la suma de los tres ángulos interiores). Esto se les planteó con dos triángulos distintos; luego, si los alumnos efectuaban otra acción distinta, como medir ángulos, quería decir que no comprendían el campo de validez de los cuantificadores que utilizaran en sus textos y que dichos cuantificadores estarían dictados por el lenguaje cotidiano del aula.

Actividades para la generalización inductiva de un resultado matemático

Las actividades de este grupo se diseñaron para promover que los alumnos buscaran la regularidad o el patrón de la suma de los ángulos interiores de varios polígonos a partir del análisis del caso particular del triángulo, de modo que plantearan conjeturas, las comunicaran y las validaran. Estas actividades se planearon y elaboraron con base en las diversas situaciones didácticas presentadas en los libros de texto y cuadernos de trabajo autorizados por la Secretaría de Educación Pública (SEP) para el segundo grado de educación secundaria, en el contexto de la resolución de problemas, acorde a lo establecido en el *Libro para el maestro* de matemáticas de la educación secundaria (SEP, 2001b), en el cual se señala que "la inducción y la deducción son inseparables al momento de resolver problemas [...] por lo que los alumnos deberán tener la oportunidad de practicar constantemente ambas formas de razonamiento" (SEP, 2001b, p. 258).

Quinto dispositivo: *Suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero*. El problema que se planteó a los estudiantes se refirió a la comparación de la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero con respecto a la suma de los ángulos interiores de un triángulo. El enunciado fue el siguiente:

> *¿Cómo es el resultado de la adición de los ángulos interiores de un cuadrilátero con respecto al resultado de la adición de los ángulos interiores de un triángulo?*

Con la finalidad de evitar las posibles confusiones que pudieran presentarse con los términos adición (operación aritmética) y suma (resultado de la adición), la redacción original de este enunciado cambió. Inicialmente se redactó la pregunta como sigue:

> *¿Cómo es la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero con respecto al resultado de la suma de los ángulos interiores de un triángulo?*

Este enunciado era gramatical y matemáticamente correcto, pero previendo las posibles confusiones que pudieran tener los alumnos que participaran como sujetos en esta investigación, se cambió “Cómo es la suma” por “Cómo es el resultado de la adición”.

Uno de los objetivos de esta actividad fue que los alumnos conjeturaran y validaran que la suma de las medidas de los ángulos interiores de cualquier cuadrilátero, sin importar tamaño ni forma, es igual a 360°. Otro objetivo fue que los participantes reconocieran que la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es igual al doble de la suma de los ángulos interiores de un triángulo. Un tercer objetivo fue que los alumnos, apoyándose en la validación de la invariancia de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, comprobaran mediante triangulación que la suma de los ángulos interiores de cualquier cuadrilátero es 360°.

Se esperaba que los alumnos reconocieran que la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es mayor, por tener un ángulo más que los triángulos, y que la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero, sin importar tamaño ni forma, es siempre igual a 360°. En la validación de esta afirmación, se esperaba que los alumnos se auxiliaran del transportador y midieran los ángulos interiores en los cuatro vértices del cuadrilátero, los sumaran, compararan esta suma con la de los ángulos interiores de un triángulo, y concluyeran que aquella era el doble de ésta. También se esperaba que los alumnos partieran el cuadrilátero con una de sus diagonales en dos triángulos y multiplicaran esta cantidad de triángulos así obtenidos por 180°.

Sexto dispositivo: *Suma de los ángulos interiores de un pentágono*. El problema que se planteó a los estudiantes se refirió a la comparación de la suma de los ángulos interiores de un pentágono con respecto a la suma de los ángulos interiores de un triángulo. El enunciado fue el siguiente:

¿Cómo es el resultado de la adición de los ángulos interiores de un pentágono con respecto al resultado de la adición de los ángulos interiores de un triángulo?

Uno de los objetivos de esta actividad fue que los alumnos conjeturaran y validaran que la suma de las medidas de los ángulos interiores de cualquier pentágono, sin importar tamaño ni forma, es igual a 540°. Otro objetivo fue que los participantes reconocieran que la suma de los ángulos interiores de un pentágono es igual al triple de la suma de los ángulos interiores de un triángulo. Un tercer objetivo fue que los alumnos, apoyándose en la validación de la invariancia de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, comprobaran por triangulación que la suma de los ángulos interiores de cualquier pentágono es 540°.

Se esperaba que los alumnos reconocieran que la suma de los ángulos interiores de un pentágono es mayor, por tener dos ángulos más que los triángulos, y que la suma de los ángulos interiores de un pentágono, sin importar tamaño ni forma, es siempre igual a 540°. En la validación de esta afirmación, se esperaba que los alumnos se auxiliaran del transportador y midieran los ángulos interiores en los 5 vértices del pentágono, los sumaran, compararan esta suma con la de los ángulos interiores de un triángulo, y concluyeran que aquélla era el triple de ésta. También se esperaba que los alumnos triangularan el pentágono y multiplicaran la cantidad de triángulos así obtenidos por 180°.

Séptimo dispositivo: *Suma de los ángulos interiores de un eneágono*. En esta actividad se plantearon dos problemas. El primero se refirió a la comparación de la suma de los ángulos interiores de un eneágono con respecto a la suma de los ángulos interiores de un triángulo. El enunciado fue el siguiente:

> *¿Cómo es el resultado de la adición de los ángulos interiores de un polígono de* n *lados (se llama eneágono) con respecto al resultado de la adición de los ángulos interiores de un triángulo?*

En el segundo problema que se planteó en esta actividad se pedía a los alumnos escribir una fórmula para calcular la suma de los ángulos interiores de un eneágono. El enunciado fue el siguiente:

> *Escribe una fórmula para calcular la suma de las medidas de los ángulos interiores de un polígono de* n *lados.*

El objetivo de esta actividad fue que los alumnos conjeturaran una fórmula para obtener la suma de los ángulos interiores de un eneágono con base en la exploración organizada de regularidades y patrones en casos particulares (triángulo, cuadrilátero, pentágono, hexágono y heptágono). Se propuso el uso de una tabla para que los alumnos sistematizaran los resultados de los análisis que efectuaran y esto les permitiera reconocer un patrón y proponer una fórmula.

Procedimiento

A continuación se describe lo más relevante de cada una de las etapas de este estudio y de los instrumentos utilizados.

Formación de parejas

Las observaciones del trabajo de 12 parejas de estudiantes de dos escuelas del Distrito Federal que participaron en este estudio se hicieron durante el mes de junio de 2006. Estas observaciones hubieran sido imposibles de realizar sin la colaboración de profesores y la voluntad de los estudiantes. Los alumnos se organizaron libremente en parejas.

Las observaciones fueron realizadas en los recintos escolares de las escuelas pública y privada, durante un horario distinto al de la clase de matemáticas. Las sesiones de trabajo duraron de una hora a hora y media. A continuación se presenta la lista de las parejas, de cada escuela donde se trabajó. En el Colegio Hispano Americano las sesiones de trabajo tuvieron lugar el 13 y el 16 de junio de 2006. En la Escuela Secundaria 39 una sesión tuvo lugar el 13 de junio de 2006; La segunda sesión de trabajo se llevó a cabo el 14 de junio con las primeras tres parejas de la lista y el 19 de junio de 2006 con los restantes.

Segundo grado, Colegio Hispano Americano

Elisa y Alexis	Denisse y Edmundo
Lilian y Esteban	Wendy y Mario
Blanca y Hugo	Karen e Irving

Tercer grado, Escuela secundaria 39; Turno vespertino

Blanca y José	Daniela y Juan
Paola y Emmanuel	Ximena y Fernando
Omar y Jair	Nancy y Carlos

Propósitos de las actividades

Los propósitos planteados para las sesiones de trabajo fueron los siguientes.

Que los alumnos:

- Plantearan conjeturas acerca de la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo (sin importar su forma y tamaño).
- Calcularan el valor del tercer ángulo interior de un triángulo, conocidos los otros dos ángulos.
- Plantearan conjeturas sobre la suma de los ángulos interiores de cualquier cuadrilátero (sin importar su forma y tamaño).
- Plantearan conjeturas sobre la suma de los ángulos interiores de cualquier pentágono (sin importar su forma y tamaño).

- Plantearan conjeturas sobre la suma de los ángulos interiores de cualquier polígono de *n* lados.
- Representaran mediante una fórmula el enunciado del teorema de la suma de los ángulos interiores de un polígono.

Planeación de las actividades con los alumnos

Primera sesión

Inicio (1 min). El maestro saluda al grupo, explica la dinámica de trabajo y organiza las parejas.

Actividad 1 (5 min). Explicación del problema planteado en las hojas impresas de la actividad 1, en la que se incluye la representación de dos triángulos, uno de mayor tamaño que el otro, de los cuales se tiene que juzgar la veracidad o falsedad de la afirmación: *El perímetro de un triángulo pequeño es menor que el perímetro de un triángulo grande*. Los alumnos trabajan en parejas bajo supervisión del maestro para resolver el problema planteado y despúes un integrante de cada pareja expone ante el grupo los detalles de su trabajo realizado. (Materiales utilizados: fotocopias, hojas en blanco, lápices, pizarrón, rotafolios y plumones.)

Discusión (3 min). Se discute con el grupo de estudiantes la forma en que los expositores resuelven el problema planteado en las hojas impresas de la actividad 1; se verifican resultados y se compara con otros posibles procedimientos de las demás parejas.

Actividad 2 (5 min). Explicación del problema planteado en las hojas impresas de la actividad 2, en la que se incluye la representación de dos triángulos, uno de mayor tamaño que el otro, de los cuales se tiene que juzgar la veracidad o falsedad de la afirmación: *El área de un triángulo pequeño es menor que el área de un triángulo grande*. Los alumnos trabajan en parejas bajo supervisión del maestro para resolver el problema planteado y después un integrante de cada pareja expone ante el grupo los detalles de su trabajo realizado. (Materiales utilizados: fotocopias, hojas en blanco, lápices, pizarrón, rotafolios y plumones.)

Discusión (3 min). Se discute con el grupo de estudiantes la forma en que los expositores resuelven el problema planteado en las hojas impresas de la actividad 2; se verifican resultados y se compara con los procedimientos de las demás parejas.

Actividad 3 (15 min). Explicación del problema planteado en las hojas impresa de la actividad 3, en la que se incluye la representación de dos triángulos, uno de mayor tamaño que el otro, de los cuales se tiene que juzgar la veracidad o falsedad de la afirmación: *La suma de los ángulos interiores de un triángulo pequeño es menor que la suma de los ángulos interiores de un triángulo grande*. Los alumnos trabajan en parejas bajo supervisión del maestro para resolver el problema planteado y después un integrante de cada pareja expone ante el grupo los detalles de su trabajo realizado. (Materiales utilizados: fotocopias, hojas en blanco, lápices, pizarrón, rotafolios y plumones.)

Discusión (10 min). El maestro promueve un análisis colectivo de las distintas respuestas dadas al problema planteado en las hojas impresas de la actividad 3, se comparan procedimientos y se explican las bases que sustentan las respuestas de cada pareja. En este punto las parejas exponen sus conjeturas y las validan ante el resto de sus compañeros.

Posibles preguntas que se plantearán (8 min). Una vez que las parejas hayan compartido sus resultados el maestro planteará las siguientes preguntas:

1.- ¿La suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es siempre igual a una misma cantidad?

2.- Si se examina cualquier otro triángulo, que sea diferente a los que utilizaron en esta actividad, ¿el resultado es el mismo?

3.- ¿Por qué piensan que pasa esto?

4.- ¿Varía la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo si se amplía o reduce el triángulo sin cambiar su forma?

5.- Con base en esta actividad, si entre todos ustedes hicieran 200 triángulos y mostraran que la suma de los ángulos interiores de los 200 triángulos es igual a una misma cantidad, ¿esto aseguraría que los ángulos del triángulo 201 también sumarían esa cantidad?

6.- ¿Existe algún triángulo cuya suma de sus ángulos interiores sea diferente a la cantidad que encontraron?

7.- ¿Algunos de ustedes tienen algún triángulo cuyos ángulos interiores no sumen 180°?

8.- ¿Cómo explican este hecho?

Actividad 4 (5 min). Explicación del problema planteado en la hoja impresa de la actividad 4, en la que se pide calcular la medida del tercer ángulo de un triángulo acutángulo dados dos de sus ángulos. Según se explica en la hoja impresa de esta actividad (véase apéndice A), se trata de calcular el valor del tercer ángulo, no de medirlo ni de inferir su medida. Los alumnos trabajan en parejas bajo supervisión del maestro para resolver el problema planteado y después un integrante de cada pareja expone ante el grupo los detalles de su trabajo realizado. (Materiales utilizados: fotocopias, hojas en blanco, lápices, pizarrón, rotafolios y plumones.)

Discusión (3 min). Se discute con el grupo de estudiantes la forma en que resuelven el problema quienes exponen, para verificar resultados y comparar con los procedimientos de las demás parejas.

Conclusión y despedida (2 min). El maestro describe brevemente lo logrado en esta sesión de trabajo y enuncia lo que se tratará en la siguiente sesión; finalmente, se despide.

Segunda sesión

Inicio (1 min). El maestro saluda al grupo y los invita a trabajar con el mismo ánimo con que trabajaron en la sesión anterior.

Resumen (4 min). Se inicia esta segunda sesión resumiendo el trabajo que los estudiantes realizaron en la primera sesión, durante la que resolvieron los problemas planteados en las hojas impresa de las actividades 1 a 4. Se retoman los planteamientos de los problemas resueltos en la primera sesión y el maestro hace un breve resumen de cuáles fueron las respuestas que las parejas de estudiantes proporcionaron (Materiales utilizados: Pizarrón, rotafolios y plumones).

Exposición (3 min). Un integrante de cada pareja, distinto al que expuso en la primera sesión, expone ante el grupo los detalles de su trabajo realizado para resolver el problema planteado en las hojas impresas de la actividad 3. Luego el maestro presenta un breve resumen de la comparación de las conjeturas propuestas por las parejas. (Materiales utilizados: pizarrón, rotafolios y plumones.)

Actividad 5 (10 min). El maestro plantea la cuestión de qué sucede con cuadriláteros: Según se explica en las hojas impresas de la actividad 5 (véase apéndice B), se trata de argumentar qué sucederá con la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero. Los alumnos trabajan en parejas bajo supervisión del maestro para resolver el problema planteado y después un integrante de cada pareja expone ante el grupo los detalles de su trabajo realizado. (Materiales utilizados: fotocopias, hojas en blanco, lápices, pizarrón, rotafolios y plumones.)

Discusión (10 min). Se discute con el grupo de estudiantes la forma en que resuelven el problema quienes exponen, para verificar resultados y comparar con otros posibles procedimientos de las demás parejas. (Materiales utilizados: pizarrón, rotafolios y plumones.)

Actividad 6 (10 min). El maestro plantea un problema análogo al de la actividad 5, pero ahora con pentágonos: Según se explica en las hojas impresas de la actividad 6, se trata de argumentar qué sucederá con la suma de los ángulos interiores de un pentágono. Los alumnos trabajan en parejas bajo supervisión del maestro para resolver el problema planteado y después un integrante de cada pareja expone ante el grupo los detalles de su trabajo realizado. (Materiales utilizados: fotocopias, hojas en blanco, lápices, pizarrón, rotafolios y plumones.)

Discusión (5 min). Se discute con el grupo de estudiantes la forma en que resuelven el problema quienes exponen, para verificar resultados y comparar con los procedimientos de las demás parejas. (Materiales utilizados: pizarrón, rotafolios y plumones.)

Polígonos de n *lados* (1 min). El maestro da instrucciones para desarrollar actividades análogas a las de las hojas impresas de las actividades 5 y 6, partiendo de que se espera que alguno(s) de los alumnos efectúe(n) una enumeración inductiva a partir del trabajo con los triángulos, cuadriláteros y pentágonos; esto es, que para obtener la suma de los ángulos interiores de cualquier polígono, éste se puede *triangular*, contar la cantidad de triángulos formados y multiplicarlos por 180°. (Materiales utilizados: fotocopias, pizarrón y rotafolios.)

Actividad 7 (10 min). Los alumnos trabajan en parejas bajo supervisión del maestro para resolver el problema planteada de los polígonos de *n* lados; integrantes de una de las parejas expone ante sus compañeros los detalles de su trabajo realizado para verificar su respuesta dada a esa pregunta, y después se discute con el grupo de estudiantes la verificación que hicieron de sus respuestas; finalmente, el maestro hace un breve resumen de la comparación de los resultados obtenidos por las parejas (Materiales utilizados: fotocopias, hojas en blanco, lápices, pizarrón, rotafolios y plumones)

*Discusión (*15 min*)*. Una vez que las parejas hayan compartido sus resultados el maestro planteará las siguientes preguntas:

1.- ¿La suma de los ángulos interiores de cualquier polígono siempre se puede obtener por una triangulación del polígono?

2.- Si se examina cualquier otro polígono, que sea diferente a los que utilizaron en esta actividad, ¿el resultado es el mismo?

3.- ¿Por qué piensan que pasa esto?

4.- Con base en esta actividad, ¿qué conjetura se puede hacer sobre la suma de la medida de ángulos interiores de un polígono de *n* lados?

5.- ¿Esto se cumplirá en todos los polígonos?

6.- ¿Existe algún polígono cuya suma de sus ángulos interiores sea diferente a la cantidad que pueden encontrar por triangulación?

7.- ¿Cómo explican este hecho?

Representación simbólica (5 min). El maestro pide a los estudiantes que escriban una fórmula sobre el resultado al que llegaron acerca de la suma de los ángulos interiores de un polígono de *n* lados. Los alumnos trabajan en parejas bajo supervisión del maestro para plantear la fórmula pedida, y después un integrante de cada pareja expone ante el grupo los detalles de su trabajo realizado. (Materiales utilizados: hojas en blanco, lápices, pizarrón, rotafolios y plumones.)

Resumen (2 min). El maestro hace un breve resumen sobre el resultado obtenido de la suma de los ángulos interiores de un polígono de *n* lados y de su representación simbólica mediante una fórmula. (Materiales utilizados: pizarrón, rotafolios y plumones.)

Conclusión y despedida (1 min). El maestro felicita al grupo por sus logros durante las dos sesiones de trabajo y se despide.

Captura de la información

La recolección de información durante el desarrollo de la investigación fue de dos fuentes: la comunicación oral entre estudiantes y con el profesor, y las producciones escritas de los alumnos como resultado de los procesos de validación que siguieron al desarrollar las actividades.

Comunicación oral entre estudiantes y con el profesor

Las 7 actividades diseñadas para esta investigación se agrupan atendiendo a sus características y los objetivos que se deseaban alcanzar. Así, se integran dos grupos de actividades. El primer grupo reúne a las actividades 1, 2, 3 y 4, con las que se promueve el planteamiento de conjeturas, explicaciones y emisión de juicios sobre la validez de una afirmación matemática. El segundo grupo lo forman las actividades 5, 6 y 7, con las que se promueve la generalización inductiva de un resultado matemático.

Con la finalidad de no mezclar actividades de ambos grupos, se dispuso efectuar 2 sesiones de trabajo con los alumnos participantes como sujetos en esta investigación. En la primera sesión se trabajó con las actividades del primer grupo y, en la segunda sesión se trabajó con las actividades del segundo grupo.

Se integraron 6 parejas mixtas de segundo grado y 5 parejas mixtas y una de varones de tercer grado, las cuales se dividieron en cuatro grupos de tres parejas cada uno. Con cada grupo de tres parejas tanto de segundo como de tercer grados, el investigador efectuó 2 sesiones de trabajo (8 sesiones en total). Todas las sesiones se videograbaron.

Para analizar las interacciones en los procesos de comunicación oral entre alumnos y con el profesor, se hizo copia del audio de cada una de las sesiones de trabajo videograbadas, las cuales posteriormente se transcribieron.

Una vez que se tuvieron las transcripciones de todas las sesiones de trabajo, se analizaron las interacciones de los alumnos participantes en esta investigación. Para facilitar la realización de este análisis, se efectuó un cambio de formato de las videograbaciones de 8 mm, obteniéndose copias en discos DVD.

Producciones escritas de los alumnos

Las producciones escritas de los alumnos se recuperaron de las hojas impresas de las 7 actividades que les fueron proporcionadas a cada pareja durante las 2 sesiones de trabajo. Cada actividad incluía, además de una representación de cada problema que los alumnos tenían que resolver, preguntas que debían responderse o peticiones de explicaciones.

Análisis de la información

Para el análisis de la información obtenida de las videograbaciones de las sesiones de trabajo y de la producción escrita de las parejas, se agrupó dicha información según la manera como las parejas de alumnos sabían que las afirmaciones planteadas en las actividades 1, 2, 3 y 4, del primer grupo, eran ciertas o falsas, o cómo las parejas sabían que las sumas de los ángulos interiores de los polígonos de las actividades 5, 6 y 7, del segundo grupo, eran correctas o incorrectas. Los agrupamientos corresponden a los esquemas personales de validación identificados por Harel y Sowder (1998).

El análisis de la información obtenida de las videograbaciones contempló, entre otros aspectos, los siguientes: a) Descripción de la(s) conjetura(s) que orientara(n) el trabajo de cada pareja al ocuparse de cada una de las 7 actividades; b) identificación de los métodos que utilizaron las parejas de alumnos al trabajar con cada una de las 7 actividades para recabar evidencias que les ayudaran a alcanzar conclusiones y resultados; c) identificación de los usos dados a los distintos métodos de recopilación de evidencias; y d) descripción de las interacciones entre los alumnos participantes.

En el análisis de la información obtenida de las producciones escritas de las parejas se consideró la observación de los siguientes aspectos: a) coordinación de las expresiones con las figuras proporcionadas en cada una de las actividades; b) descripción de la conjetura que había guiado su trabajo en la actividad como un antecedente; c) apoyo en las figuras proporcionadas en las hojas impresas de las actividades para facilitar la expresión de sus ideas; y d) uso de notación simbólica.

En este capítulo se describió la metodología de la investigación. Se hizo referencia a las características de los sujetos de investigación; se describieron los propósitos y los contenidos de las hojas de actividades diseñadas para esta investigación y se describió el procedimiento para el desarrollo de la fase experimental.

En el siguiente capítulo se presentará una discusión y análisis de las evidencias recabadas de las sesiones de trabajo con los alumnos de segundo y tercer grados que participaron como sujetos en esta investigación.

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS

El aprendizaje de las matemáticas en el ámbito escolar requiere que los alumnos desarrollen la capacidad de analizar, razonar y transmitir sus ideas de un modo efectivo al plantear, resolver e interpretar “problemas de matemáticas” en diferentes situaciones. Un aspecto fundamental en la resolución de problemas es el planteamiento de una conjetura cuya posterior validación les proporcionará a los alumnos elementos para reestructurar la información intrínseca del problema, elegir la estrategia de resolución pertinente, así como la verosimilitud de la conjetura. Cuando el aprendizaje de los alumnos se limita a la memorización de conceptos, algoritmos y teoremas, su competencia resolutiva de situaciones problemáticas se ve mermada. Así, cuando un alumno se enfrenta a la necesidad de resolver algunas situaciones problemáticas por sí mismo, como elaborar una proposición matemática que parta de una conjetura, y su posterior comunicación y validación, suele no saber qué elementos se necesitan ni dónde puede encontrarlos y, en el peor de los casos, no sabe qué hacer.

En este capítulo se describen y analizan los procesos de validación que emplearon las parejas de alumnos que participaron como sujetos en esta investigación, tanto de segundo como de tercer grado de educación secundaria, para emitir sus juicios de verdad o falsedad referente a las afirmaciones escritas en las tres primeras actividades, así como para determinar la validez de las conjeturas que elaboraron surgidas de la comparación de la suma de los ángulos interiores de un triángulo y de un cuadrilátero (quinta actividad), un pentágono (sexta actividad) y un eneágono (séptima actividad). El capítulo se divide en dos apartados: A*nálisis de las actividades y Tipos de validaciones.* En el primer apartado se describen las acciones de las parejas de alumnos al trabajar con las actividades planteadas en esta investigación; en el segundo apartado se analizan los argumentos ofrecidos por las parejas de alumnos, tomando como base los esquemas de validación propuestos por Sowder y Harel (1998).

Análisis de las actividades

Primera sesión de trabajo

El objetivo principal de la primera sesión de trabajo fue que los estudiantes, trabajando en parejas, se convencieran de la validez o falsedad de las afirmaciones planteadas en tres de las cuatro actividades y las sometieran a prueba para explicar sus decisiones.

Los problemas planteados a los alumnos en esta sesión son, desde el punto de vista de esta investigación, problemas de demostración. No obstante, los problemas tratados por los estudiantes fueron los que reconstruyeron en el marco de las actividades, a partir de las afirmaciones y de sus concepciones correspondientes a la geometría. Las dificultades que se presentaron en los procesos de visualización en las afirmaciones sobre el perímetro y el área se deben a una práctica docente que puede considerarse insignificante, pero que definitivamente confunde a los alumnos. Esta práctica esencialmente consiste en que al trabajar con una figura geométrica, el docente asigna de manera arbitraria dimensiones a los lados de dicha figura, independientemente de las lecturas visuales que ésta ofrezca a los estudiantes. En consecuencia, un lado de una figura geométrica que en apariencia y por comparación con otro lado es menor, resulta mayor por el valor dado por el docente. Así, la explicación de Lilian y Esteban de por qué el área de un triángulo pequeño es menor que el área de un triángulo grande, permite dar cuenta de este vicio. Ellos responden que la afirmación sobre el área es verdadera porque “en estas figuras nosotros estamos asignando los valores”. De la misma manera, Elisa y Alexis explican que la misma afirmación es falsa porque “depende de las medidas que se le den a los triángulos”. Asimismo, Blanca y Hugo condicionan la veracidad de la afirmación a “los valores asignados a los triángulos”, remarcando que “en este caso es verdadera, pues la sustitución de la fórmula para el área en el triángulo pequeño va a ser menor que la del triángulo grande”.

Juicios de las afirmaciones

En el cuadro 4.1 se muestran las opciones escogidas por los alumnos de segundo y tercer grados, en cuanto a la validez de las tres afirmaciones acerca del triángulo: que el perímetro de un triángulo pequeño es menor que el perímetro de un triángulo grande, que el área de un triángulo pequeño es menor que el área de un triángulo grande y que la suma de los ángulos interiores de un triángulo pequeño es menor que la suma de los ángulos interiores de un triángulo grande. Todos los alumnos de segundo grado contestaron de modo concluyente sobre la falsedad o legitimidad de las afirmaciones, mostrando una regularidad en sus respuestas, a excepción de Elisa y Alexis que juzgaron como falsa la afirmación sobre el área. Por su parte, todos los alumnos del grupo de tercer grado no dieron un juicio concluyente sobre la afirmación del área, dejando abiertas las posibilidades. Solamente la afirmación de la actividad 3 es la que, independientemente del grado, fue juzgada como falsa por todos los alumnos que participaron como sujetos en esta investigación.

Cuadro 4.1. Opciones escogidas por los alumnos de segundo y tercer grados

Pareja	Afirmación de la actividad uno	Afirmación de la actividad dos	Afirmación de la actividad tres
Segundo grado			
Denisse y Edmundo	Verdadera	Verdadera	Falsa
Wendy y Mario	Verdadera	Verdadera	Falsa
Karen e Irving	Verdadera	Verdadera	Falsa
Elisa y Alexis	Verdadera	Falsa	Falsa
Lilian y Esteban	Verdadera	Verdadera	Falsa
Blanca y Hugo	Verdadera	Verdadera	Falsa
Tercer grado			
Daniela y Juan	Verdadera	Sin decisión	Falsa
Ximena y Fernando	Sin decisión	Sin decisión	Falsa
Nancy y Carlos	Verdadera	Sin decisión	Falsa
Blanca y José	Sin decisión	Sin decisión	Falsa
Paola y Emmanuel	Verdadera	Sin decisión	Falsa
Omar y Jair	Sin decisión	Sin decisión	Falsa

Los textos

Alumnos de segundo grado

Los resultados de los alumnos de segundo grado mostraron consistencia. Todas las parejas juzgaron como verdadera la afirmación de la actividad 1, y la afirmación de la actividad 2 (excepto la de Elisa y Alexis) y como falsa la afirmación de la actividad tres.

Afirmación de la actividad 1: *El perímetro de un triángulo pequeño es menor que el perímetro de un triángulo grande.*

Todas las parejas juzgaron cierta la afirmación y en sus explicaciones está implícita la idea de que el perímetro de un triángulo depende de la longitud de sus lados y, mientras más grandes sean los lados, mayor será el perímetro. Aunque es importante mencionar que de la lectura de las respuestas y explicaciones que los alumnos dieron se nota una confusión entre área y perímetro, ya que los alumnos creían que de dos figuras la que tiene mayor área tiene por consiguiente mayor perímetro.

Denisse y Edmundo redactaron una explicación confusa al incluir ideas referidas al área:

> *Mientras menos sea el espacio que ocupa una figura,*
>
> *más pequeño es el contorno que ésta tendrá.*

Wendy y Mario fueron escuetos y directos, formulando una explicación marcada por ideas implícitas:

Porque sus medidas son más pequeñas.

Karen e Irving, por su parte, recurrieron a los aspectos métricos de la geometría aunque mostraron cierta confusión al mezclar ideas de perímetro y área:

Porque de acuerdo con su tamaño, en un triángulo pequeño la longitud de sus lados y, base no puede ser mayor, a comparación de uno con mayor tamaño.

Elisa y Alexis, en cambio, recurren a la lógica:

Cuando una figura es más grande tiene mayor perímetro.

Lilian y Esteban también recurrieron a la lógica, ofreciendo una validación basada en la evidencia proporcionada por la comparación de las dimensiones de los dos triángulos:

Porque a mayor tamaño mayor perímetro; además, cuando se comparan las dimensiones de los dos [triángulos] se observa una diferencia entre los mismos.

Blanca y Hugo recurrieron a la geometría métrica y produjeron una explicación en la que la justificación estuvo dada en términos aritméticos:

Porque sus lados miden más y si se suman éstos, es menor el perímetro del triángulo pequeño (por la suma de sus lados).

Afirmación de la actividad 2: *El área de un triángulo pequeño es menor que el área de un triángulo grande.*

Todas las parejas, excepto Elisa y Alexis juzgaron verdadera la afirmación. Dennise y Edmundo, así como Karen e Irving, plantearon la idea de que la medida de la superficie de los triángulos, es decir, su área, era mayor para un triángulo que contuviera a otro en su interior. Por su parte, Lilian y Esteban, así como Blanca y Hugo, recurrieron al cálculo del área de los triángulos para sustentar su convicción y convencimiento.

Denisse y Edmundo aseguraron que la afirmación era verdadera y, al explicar por qué, elaboran un texto que mezcló la lógica y la geometría métrica condicionando la primera a la segunda y plantearon una idea ambigua, sin especificar cuáles eran las medidas de las que hablan:

Mientras más grande es una figura, más superficie será la que ocupe, siempre que sus medidas sean más grandes que las del triángulo pequeño.

Wendy y Mario establecieron que la afirmación era verdadera, pero su redacción fue confusa al explicar por qué, con ambigüedades, e ideas referidas al perímetro y a la clasificación de triángulos por las medidas de sus lados. Además se refirieron únicamente a los triángulos que se proporcionaron en la actividad:

Porque las tres partes del triángulo escaleno son diferentes y más grandes; y en el triángulo isósceles, dos de sus partes son iguales y una diferente.

Karen e Irving determinaron que la afirmación era verdadera y en su redacción lo explicaron de modo claro, conciso y concreto:

Porque mientras más espacio ocupe, su extensión va a ser mayor.

Elisa y Alexis fueron la única pareja de segundo grado que sostuvo que la afirmación era falsa y lo explicaron así:

Depende de las medidas que se le den a los triángulos.

Lilian y Esteban manifestaron que la afirmación era verdadera, y su explicación se basó en aspectos métricos de la geometría ligados al contexto de la actividad, como fue el cálculo del área de los dos triángulos proporcionados en la actividad:

Porque en estas figuras nosotros estamos asignando los valores y, al sacar el área de los dos, el área del pequeño es menor que la del triángulo grande.

Blanca y Hugo señalaron que la afirmación era verdadera y, al igual que Lilian y Esteban, recurrieron a aspectos métricos de la geometría con los triángulos de la actividad para explicar su decisión:

Pero va a depender de los valores asignados a los triángulos; en este caso es verdadero, pues [el resultado de] *la sustitución en la fórmula para el área en el triángulo pequeño va a ser menor que la del triángulo grande.*

Afirmación de la actividad 3: *La suma de los ángulos interiores de un triángulo pequeño es menor que la suma de los ángulos interiores de un triángulo grande.*

Esta afirmación se relaciona con el teorema de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, que se basa en las propiedades de los ángulos formados por una recta trasversal que se interseca con dos rectas paralelas.

Las seis parejas contestaron sin vacilación que la afirmación era falsa, pero en sus textos no explicaron por qué. En las redacciones de las explicaciones que elaboraron todas las parejas, a excepción de Wendy y Mario, se usó un lenguaje “poco natural”, un lenguaje relacionado más con el ámbito escolar: anotaron lo que habían aprendido en sus clases de matemáticas o lo que habían leído u oído previamente. Así, Denisse y Edmundo escribieron:

La suma de los ángulos de cualquier triángulo siempre da 180° sin importar su perímetro o área.

Wendy y Mario elaboraron un texto que fue más confuso que el que redactaron para la actividad anterior, igualmente referido al contexto de la actividad:

Porque a pesar de que sus lados son más grandes, sus ángulos interiores son más chicos.

Karen e Irving, acorde con lo lacónico de sus anteriores mensajes, apuntaron:

*Porque la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo debe resulta*r 180°.

A su vez, Elisa y Alexis escribieron una explicación en la que dejaron implícita la suma de los ángulos:

Porque todos los ángulos interiores de un triángulo miden 180°.

Por su parte, *Lilian* y *Esteban* anotaron:

Porque la suma de los ángulos interiores siempre va a dar 180°.

Blanca y Hugo formularon su explicación en los siguientes términos:

Porque la suma de los ángulos interiores va a ser 180°,   *no importa el tamaño del triángulo: la suma va a ser 180°*

Los alumnos de tercer grado

Los alumnos de tercer grado, a diferencia de los de segundo, no se convencieron de la validez de las afirmaciones; es decir, no pudieron determinar con certeza si las afirmaciones eran ciertas o falsas, a excepción de la tercera afirmación, a la que todos contestaron que era falsa. Los alumnos realizaron dos lecturas de las mismas figuras geométricas: La primera, visual e intuitiva, ligada a su experiencia; la segunda, conceptual y simbólica, derivada del ámbito escolar. Por otra parte, los alumnos tuvieron muy interiorizada una costumbre docente, la cual consistió en dibujar una figura geométrica y asignar de modo arbitrario las longitudes de los lados, sin respetar que dichos valores necesariamente correspondieran con la apariencia de la figura.

Afirmación de la actividad 1: *El perímetro de un triángulo pequeño es menor que el perímetro de un triángulo grande.*

Tres de las seis parejas, las conformadas por Ximena y Fernando, Blanca y José, y Omay y Jair plantearon la posibilidad de que la certeza o falsedad de la afirmación estribaba en la escala. De las restantes parejas, Paola y Emmanuel recurrieron al enunciado de la afirmación para justificar su decisión, Nancy y Carlos recurrieron a la visualización, y Daniela y Juan dieron una explicación confusa.

Daniela y Juan recurrieron a aspectos métricos para explicar por qué la afirmación era verdadera, haciendo referencia a un patrón de medida, pero su explicación fue confusa:

> *Porque se toma con base a una distancia haciendo referencia al triángulo pequeño y designando una mayor magnitud al triángulo mayor.*

Aunque Ximena y Fernando señalaron que la afirmación era verdadera, en su escrito para explicar por qué lo era, plantearon también la posibilidad de que dicha afirmación fuera falsa; mezclaron elementos de lógica con conceptos de escala:

> *Por lógica, dependiendo del tamaño del triángulo que es más pequeño, su perímetro es menor que el triángulo mayor. También puede variar, porque si tenemos un triángulo al tamaño real y lo hacemos a escala, pues pueden ser iguales.*

Nancy y Carlos precisaron que la afirmación era verdadera y recurrieron a la visualización para explicar su convicción, aunque mezclaron en su texto elementos del área con elementos del perímetro, ligados al contexto de la actividad para justificar su decisión:

> *Por lógica, el perímetro de un triángulo pequeño es menor que el de un grande ya que a simple vista se puede observar el tamaño. Y el triángulo* ABC *puede caber en el* DEF*.*

Blanca y José no se decidieron por la falsedad o la veracidad de la afirmación, planteando tres explicaciones en su texto, la primera justificaba la falsedad de la afirmación y las dos restantes la veracidad de la misma. En las explicaciones, recurrieron a la escala como el fiel que decidiría el dilema de la certeza de la afirmación, aunque el mensaje no proporcionó elementos definidos para establecer por qué la afirmación podía ser o no verdadera:

> *Podría ser falsa porque no afirma si hay alguna escala entre ambos triángulos; también podría ser verdadera al existir una escala entre los dos, pero si están en medidas normales, el triángulo mayor tendría mayor perímetro.*

Paola y Emmanuel asumieron que la afirmación era verdadera porque así se establecía en su redacción, además de recurrir a la visualización; mostraron confusión dado que la visión que tenían del tamaño de los triángulos hacía referencia a la superficie:

> *Primero, a simple vista, uno es más grande que el otro, pero es importante recalcar que* [la] *oración afirma y dice que uno es más pequeño que el otro.*

Omar y Jair al igual que Ximena y Fernando estipularon que la afirmación era verdadera, justificando su decisión con la visualización; pero en su explicación introdujeron ideas referentes a la escala, dejando abierta la posibilidad de que la afirmación no fuera verdadera:

> *Nosotros creemos que es verdadera por que es obvia la figura, aunque si algún triángulo estuviera a escala, sería el mismo perímetro (no en realidad, pero sí lo que representa).*

Afirmación de la actividad 2: *El área de un triángulo pequeño es menor que el área de un triángulo grande.*

En esta actividad, ninguna pareja se convenció de la verdad o falsedad de la afirmación y, a pesar de poder medir las dimensiones de cada triángulo y constatar que uno era mayor que otro, la decisión final sólo se podía tomar cuando los valores de las dimensiones se hicieran explícitos, es decir, que se pusieran por escrito en cada figura geométrica.

Daniela y Juan no se convencieron de la certeza o falsedad de la afirmación y no escogieron ninguna opción. Las razones que expusieron para mencionar que la afirmación era “variable” estuvieron ligadas al contexto de la actividad, ya que su explicación retomó los triángulos que se proporcionan en la actividad:

Variable, porque depende de las medidas de los lados o catetos. A simple vista, uno de 2 lados largos y uno corto [triangulo *DEF* de la actividad] *puede parecer de gran área cuando en realidad el otro* [triángulo *ABC* de la actividad] *puede poseer más espacio o área que el otro.*

Por segunda ocasión Ximena y Fernando volvieron a estar indecisos, y de inicio marcaron la opción verdadera pero borraron dicha marca y plantearon dos posibilidades en las que la idea de la escala se encontraba implícita. Esto permitió determinar que los alumnos habían hecho dos lecturas de los triángulos, la primera visual y la segunda simbólica:

Si no se toman las medidas, sería verdadero; pero ya teniendo las medidas, el pequeño puede tener mayor área que el más grande.

Nancy y Carlos, como en la explicación que proporcionaron en la actividad anterior, recurrieron a la visualización para sustentar que la afirmación era verdadera; pero en esta ocasión también dudaron y plantearon la posibilidad de que no lo fuera:

Aquí se da el mismo caso porque a simple vista se ve por el tamaño; pero ya con las medidas, varía porque puede ser viceversa.

Blanca y José, al igual que *Ximena* y *Fernando,* por segunda ocasión no se decidieron por la verdad o falsedad de la afirmación y produjeron un texto confuso:

Es verdadero por la longitud de cada triángulo

y podría variar por sus medidas y sus unidades.

Paola y Emmanuel, a diferencia de la actividad anterior, no tuvieron una decisión y, a pesar de reconocer en su texto que al medir los triángulos el *DEF* resultó mayor que el *ABC*, no pudieron convencerse de la certeza de la afirmación. Esto permite determinar que la costumbre docente de dibujar un triángulo y asignarle valores a los lados de manera arbitraria influye en el pensamiento de los alumnos:

Que no tiene respuesta, ya que aunque uno es más pequeño que otro, las medidas pueden variar. Pero si tomamos como referencia los triángulos de la otra hoja, el DEF *es más grande que el* ABC*. Aunque no tienen valores específicos, los dos podrían tener las mismas posibilidades.*

Omar y Jair elaboraron un texto en el que no aportaron elementos que explicaran por qué decidieron escoger la opción verdadera:

Es lo mismo que la actividad anterior: depende de las medidas, unidades o escala y las figuras.

Afirmación de la actividad tres: *La suma de los ángulos interiores de un triángulo pequeño es menor que la suma de los ángulos interiores de un triángulo grande.*

Al igual que las parejas de segundo grado, las seis parejas de tercer grado contestaron que la afirmación era falsa, aunque en sus explicaciones tampoco proporcionaron razones del porqué. Esta circunstancia contrasta notablemente con la situación de la actividad 2, en la que la totalidad de las parejas de tercer grado no pudieron establecer con certeza un juicio sobre la veracidad de la afirmación. La probable razón de que en esta ocasión los alumnos estuvieran convencidos radica en la tradición escolar: en lo que aprendieron de sus clases de matemáticas o de lo que habían leído o escuchado; más con estos alumnos, porque al momento de la aplicación de los instrumentos de esta investigación, asistían a cursos de regularización para prepararse para su examen de ingreso al nivel medio superior.

El lenguaje que utilizaron los alumnos en las explicaciones de esta actividad 3, fue distinto al lenguaje utilizado en las explicaciones de las actividades 1 y 2. En las explicaciones de las actividades 1 y 2, los alumnos utilizaron un lenguaje natural salpicado con palabras relacionadas con conceptos matemáticos. En contraste, en la redacción de las explicaciones de la actividad 3, incorporaron cuantificadores tales como *todo*, *cualquier* y *todos* e indicadores de temporalidad tal como *siempre,* palabras que evocan el lenguaje utilizado por los profesores en sus aulas.

Así, Daniela y Juan escribieron:

> *Porque no importando las medidas que tengan los lados,*
>
> *deben tener en suma 180° en ángulos interiores.*

En esta ocasión Ximena y Fernando no estuvieron indecisos y asentaron:

Porque por ley los ángulos de todo triángulo,

sea pequeño o grande, suman 180° grados.

Por su parte, Nancy y Carlos anotaron:

Es falsa porque la suma de los ángulos interiores

de cualquier triángulo siempre va a ser 180°.

Blanca y José, a diferencia de las dos ocasiones anteriores, ahora sí tuvieron una decisión:

Falso, porque la suma de todos los ángulos interiores da 180°.

Paola y Emmanuel apuntaron:

La suma de los ángulos de cualquier triángulo son 180°.

Por lo que respecta a Omar y Jair, para ellos en esta ocasión no importaron las medidas, unidades o la escala:

Todas las sumas de los ángulos interiores dan 180°.

Segunda sesión de trabajo

La característica principal de la segunda sesión de trabajo consistió en que los estudiantes, trabajando en parejas, buscaron la regularidad o el patrón de la suma de los ángulos interiores de varios polígonos a partir del análisis del caso particular del triángulo, para que plantearan conjeturas, las comunicaran y validaran.

Los problemas planteados a las parejas de alumnos en esta sesión estaban encaminados a que, al buscar las regularidades y patrones, generalizaran cuál era la suma de los ángulos interiores de un polígono por medio de la exploración organizada y sistemática de las actividades realizadas con los ángulos interiores de triángulos, cuadriláteros y pentágonos.

Actividad 5: Comparación de las sumas de los ángulos interiores del cuadrilátero y del triángulo.

Alumnos de segundo grado

Para determinar cómo era la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero con respecto al resultado de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, las seis parejas de alumnos de segundo grado recurrieron a la medición de los ángulos interiores y al cálculo de la suma de dichos ángulos como medio principal con el cual alcanzaron conclusiones ciertas.

Otro medio que surgió en el trabajo de las parejas con esta actividad fue la triangulación, la cual esencialmente fue vista como un modo que explicaba la suma de los ángulos interiores de los cuadriláteros.

Cinco de las seis parejas, a excepción de la integrada por Wendy y Mario, plantearon una conjetura que orientó su trabajo en la actividad. Las conjeturas planteadas se agruparon en torno a dos ideas principales: La primera, que la suma de los ángulos interiores de los cuadriláteros sumaba 360°, identificada en tres parejas, las integradas por Denisse y Edmundo, Karen e Irving, así como la de Lilian y Esteban; la segunda, que la suma de los ángulos interiores de los cuadriláteros variaba dependiendo de la forma, identificada en dos parejas, las integradas por Elisa y Alexis, así como la formada por Blanca y Hugo.

Denisse y Edmundo

La respuesta de Denisse y Edmundo a la pregunta *¿Cómo es el resultado de la adición de los ángulos interiores de un cuadrilátero con respecto al resultado de la adición de los ángulos interiores de un triángulo?* fue la conjetura con la cual iniciaron su trabajo en la actividad. Esta conjetura tuvo su fundamento en lo recordado por Edmundo de sus clases de matemáticas:

La suma de los ángulos internos de un cuadrilátero es (360°) *el doble de la suma de los ángulos internos de un triángulo (180°).*

Para validar —comprobar, en palabras de Edmundo— esta conjetura, Edmundo decidió medir los ángulos interiores del cuadrilátero y los del triángulo, sumarlos y comparar ambas sumas. Mientras Edmundo se dio a la tarea de medir los ángulos interiores de cada figura geométrica, Denisse efectuó las sumas correspondientes. Es importante hacer notar que al medir los ángulos interiores del triángulo y obtener la suma, Denisse y Edmundo dieron muestra de no haber comprendido el cuantificador que utilizaron en la redacción de su escrito en la actividad 3.

La explicación que Denisse y Edmundo dieron respecto a por qué la suma de los ángulos interiores del cuadrilátero era 360° es la siguiente:

Debido a que cualquier cuadrilátero puede ser formado por dos triángulos.

Esta explicación tuvo como sustento la división que Denisse y Edmundo hicieron del cuadrilátero *ABCD* proporcionado en la hoja impresa de la actividad con una línea recta (diagonal) del vértice *A* al vértice *C*. La triangulación con un sola diagonal no es la única triangulación que realizó esta pareja. En el mismo cuadrilátero esta pareja trazó la diagonal del vértice *B* al vértice *D* (la cual posteriormente fue borrada) que, junto con la diagonal *AC* dividieron al cuadrilátero en cuatro triángulos.

La triangulación del cuadrilátero con cuatro triángulos daba 720°. Ante la disyuntiva de dividir al cuadrilátero con una o dos diagonales, Denisse y Edmundo se decidieron por la división con una sola diagonal, es decir, por la triangulación con dos triángulos, a causa de que el resultado obtenido con dicha triangulación reforzaba lo que previamente sabían y comprobaron efectuando la suma de los ángulos interiores que midieron del cuadrilátero.

Ante el cuestionamiento de si el resultado obtenido de 360° para la suma de los ángulos interiores del cuadrilátero era válido para cualquier cuadrilátero, Edmundo respondió afirmativamente y, ante la nueva pregunta de cómo era que podía asegurarlo, respondió que se podía comprobar midiendo los ángulos interiores de otro cuadrilátero distinto.

Cuando el investigador preguntó si el valor de la suma de los ángulos interiores del cuadrilátero se podía obtener triangulando, Edmundo respondió que sí, pero que era un modo complicado ya que se obtenían seis ángulos, tres de cada triángulo y habría que medirlos todos. Al parecer Edmundo concebía a la triangulación como un medio que explicaba por qué la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero sumaba 360°, y no como un medio para obtener directamente dicha suma.

Karen e Irving

Esta pareja comenzó por analizar cuál de las dos cuestiones planteadas en la hoja impresa de la actividad era a la que se le iba a dar respuesta en primera instancia: si la pregunta referente a cómo era el resultado de la suma de los ángulos interiores del cuadrilátero respecto a la del triángulo, o a la pregunta de cuánto valía la suma de los ángulos interiores del cuadrilátero. Se decidieron por responder primero cuánto sumaban los ángulos interiores del cuadrilátero para así posteriormente comparar el valor que obtuvieran de esa suma con la suma de los ángulos interiores del triángulo.

Para obtener la suma de los ángulos interiores del cuadrilátero, Karen e Irving midieron los ángulos interiores del rombo *ABCD* proporcionado en la hoja impresa de la actividad. De las medidas de los cuatro ángulos interiores obtuvieron una suma igual a 340°. Una vez que tuvieron la suma de los ángulos interiores del cuadrilátero, Irving procedió a medir los ángulos interiores del triángulo; ante el cuestionamiento de Karen de por qué hacerlo si todos los ángulos interiores de los triángulos sumaban 180°, Irving le contestó que quería verificar que la suma fuera 180°, pero Karen le volvió a insistir en que la suma era 180°. Irving se convenció y ya no siguió con la medición de los ángulos interiores del triángulo. Aquí se puede observar que Irving dio muestra de no entender el campo de validez del cuantificador que utilizaron en su escrito en la actividad 3, ya que a pesar de que habían establecido que los ángulos interiores de todos lo triángulos suman 180°, él quería volver a medirlos y sumarlos para asegurarse de ello. De los resultados de las sumas de los ángulos interiores del cuadrilátero y del triángulo, Karen e Irving no pudieron inferir mayores conclusiones, por lo que establecieron que la suma de los ángulos interiores del cuadrilátero siempre sería mayor que la suma de los ángulos interiores de un triángulo. Al cuestionarles por cuánto sería mayor, obtuvieron la diferencia entre ambos valores, la cual les resultó de 260°.

De las pláticas sostenidas con las demás parejas, Karen e Irving recordaron que la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero era de 360°, por lo que se dieron a la tarea de obtener ese valor, puesto que tenían una diferencia de 20°. Al volver a medir los ángulos interiores se dieron cuenta de que habían medido mal un par de ángulos. Al corregir dicha medición, obtuvieron una suma de 360°. La explicación del porqué la suma era igual a 360°, que estos alumnos escribieron, está redactada con base en la medición y la suma de los ángulos interiores sin que aparezca la triangulación del cuadrilátero:

Porque la suma de los ángulos interiores da como resultado 360°.

Hasta este punto fue que los alumnos respondieron a la pregunta *¿Cómo es el resultado de la adición de los ángulos interiores de un cuadrilátero con respecto al resultado de la adición de los ángulos interiores de un triángulo?* Esta respuesta fue resultado del trabajo de Karen e Irving en esta actividad, junto con lo que recordaban de las clases de matemáticas:

La suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero siempre será mayor que la suma de los ángulos interiores de un triángulo ya que la suma de un cuadrilátero será de 360° y la de un triángulo de 180°.

Karen cuestionó si la suma que obtuvieron igual a 360° de los ángulos interiores del cuadrilátero de la hoja impresa de la actividad era la misma para todos los cuadriláteros. Para darle respuesta a esta cuestión, Karen e Irving parten de la conjetura de que la suma de los ángulos interiores del cuadrilátero era de 360° sin importar forma o tamaño. Para probar su conjetura trazaron un trapecio isósceles, midieron y sumaron los ángulos interiores para ver si obtenían 360°.

El resultado que obtuvieron de la suma de los ángulos interiores del trapecio, igual a 360°, les confirmó su conjetura, y con base en estos dos casos (el rombo de la hoja impresa de la actividad y el trapecio que ellos trazaron), generalizaron para todos los cuadriláteros.

Wendy y Mario

La pareja de Wendy y Mario fue la única de segundo grado que no tuvo una conjetura que los orientara para darle respuesta a las tareas planteadas en la hoja impresa de la actividad 5. Wendy y Mario iniciaron la actividad con la medición de los ángulos interiores del cuadrilátero y del triángulo proporcionados en la hoja impresa de la actividad (se puede observar que no entienden el campo de validez del cuantificador que utilizaron en la redacción de su escrito de la actividad 3) haciendo las respectivas sumas para después proceder a compararlas. En el caso del cuadrilátero obtuvieron una suma de 290°, a causa que midieron los ángulos *A*, *B*, *C* y *D* obteniendo valores de 75° para los ángulos *A* y *C*, y de 70° para los ángulos *B* y *D*.

La explicación que estos alumnos dieron respecto a por qué los ángulos interiores sumaron 290°, se redactó con base en su trabajo en esta actividad:

Porque dos ángulos miden 75° y los otros dos miden 70°.

Una vez que la pareja obtuvo el valor de la suma de los ángulos interiores del cuadrilátero procedió a responder a la pregunta de la comparación de las sumas de los ángulos interiores del cuadrilátero y del triángulo. En su respuesta concluyeron que las sumas diferían pero no mencionaron por cuánto:

El resultado de la suma del cuadrilátero es mayor que la suma del triángulo.

Wendy y Mario no estaban pasando por un proceso de generalización ni por un proceso de validación de esa generalización, por lo que su comportamiento recuerda la tradición escolar en la que darle respuesta a la actividad es más importante que conjeturar, dado que percibían las tareas planteadas en la actividad como una serie de *adivinanzas* en donde el profesor (en este caso, el investigador) les revelaría la solución. Como el investigador no aprobó ni desaprobó sus procedimientos, resultados, o escritos, Mario indagó con Edmundo cuáles eran las *respuestas correctas*. Al saber que la suma de 290° de los ángulos interiores del cuadrilátero que había obtenido difería de la que tenían Denisse y Edmundo (360°), Mario le comentó a Wendy que habían medido mal, al tiempo que escribió en su hoja impresa de la actividad los valores de las medidas de los ángulos que midió Edmundo. Cuando el investigador preguntó por qué se dio el cambio en las medidas, Wendy y Mario respondieron que se habían equivocado al medir y que habían corregido. Se les volvió a cuestionar, ahora acerca de cómo se dieron cuenta de que tenían errores, y al no poder contestar, Wendy comenzó a argumentar que midió los ángulos en sentido negativo (en el sentido de las manecillas del reloj) con una escala equivocada y que por esa razón tenían mal las medidas. Una vez más se les preguntó cuánto suman los ángulos interiores del cuadrilátero, respondieron que 360°; pero este valor era un simple número que, al no ser obtenido por un trabajo previo, no les decía nada. Esto es posible aseverarlo a partir de que cuando se les preguntó cómo era el resultado de la suma de los ángulos interiores del cuadrilátero respecto a la suma de los ángulos interiores de un triángulo, Mario respondió sin vacilación que eran iguales, y ante la sorpresa de su compañera corrigió comentando: “Ah, no... lo ‘dobletea’ ¿no?” Cuando se les preguntó si la suma de los ángulos interiores de cuadrilátero era el doble de la suma de los ángulos interiores del triángulo, Wendy respondió que si se triangulaba el cuadrilátero, se obtenían dos triángulos, y que como cada triángulo sumaba 180°, la suma de los ángulos interiores del cuadrilátero era el doble de la de los del triángulo. Este procedimiento, el de triangular, también lo obtuvieron de su compañero Edmundo, sin que hubiera un trabajo previo o esfuerzo de su parte; por lo que al cuestionárseles si se podía triangular cualquier cuadrilátero, ambos respondieron al instante y sin vacilar que no.

Wendy y Mario borraron de su hoja impresa de la actividad la respuesta y la explicación previa, y redactaron una nueva respuesta y explicación, producto de la asesoría que Edmundo les brindó:

El resultado de la suma del cuadrilátero es lo doble que la del triángulo porque si dividimos el cuadrilátero salen dos triángulos y cada triángulo mide 180°.

Porque dos ángulos son iguales. Dos de ellos miden 70° y los otros dos 110°, lo cual da 360 y si partes a la mitad, dan dos triángulos y la suma de ellos da 360°.

Lilian y Esteban

Estos alumnos comenzaron su trabajo con la medición de los ángulos interiores del cuadrilátero para ver cuánto les daba la suma, y posteriormente manifestaron el deseo de medir también los ángulos del triángulo (es posible observar que no comprendían el campo de validez del cuantificador que utilizaron en la redacción de su escrito de la actividad 3) para que una vez obtenidas ambas sumas, procedieran a compararlas.

Esteban y Lilian en realidad querían acumular evidencia mediante la medición y el cálculo geométrico, ya que ellos partieron de una conjetura producto de lo recordado de las clases de matemáticas. Lilian mencionó que le habían enseñado que al número de lados de un polígono se le debía restar 2 y a esa diferencia (que era el número de triángulos en que ese polígono quedaba triangulado), se le debía multiplicar por 180° para obtener la suma de los ángulos interiores del polígono. Así, Lilian y Esteban plantearon la conjetura de que la suma de los ángulos interiores del cuadrilátero era de 360° porque los cuadriláteros estaban formados por dos triángulos y, como la suma de los ángulos interiores de un de un triángulo da 180°, al ser dos, el resultado de la suma de los ángulos interiores del cuadrilátero era 360°.

La medición de los ángulos se les dificultó, teniendo que medir más de una vez ya que los valores que obtenían de las distintas mediciones de los ángulos interiores del cuadrilátero no eran iguales a 360°. Así, primero obtuvieron 250° y, volviendo a medir, con más cuidado, obtuvieron 360°.

La triangulación del polígono cumplió dos funciones para Lilian y Esteban: Primero, la utilizaron para conjeturar el valor de la suma de los ángulos interiores del cuadrilátero y, segundo, la utilizaron para explicar por qué los ángulos interiores del cuadrilátero sumaban 360°. Así, en su escrito en el cual explican el resultado de la suma se lee:

> *Porque al trazar una diagonal en el cuadrado de D a B se forman dos triángulos, y como la suma de los ángulos interiores de un triángulo da 180°, sólo se le suma 180° porque son dos triángulos.*

Aunque Lilian y Esteban recurrieron a la triangulación para conjeturar el valor de la suma de los ángulos interiores del cuadrilátero, esta triangulación sólo fue un modo, recordado de las clases de matemáticas, de obtener la suma; pero comprobar esa suma fue otra cuestión. Para eso se reservaron la medición de los ángulos interiores y su suma posterior tantas veces fuera necesario hasta obtener el valor de 360°. Cuando Blanca refutó este método al triangular el cuadrilátero en cuatro triángulos, Lilian mencionó, sin dar mayor explicación, que no se podía triangular al cuadrilátero en más de dos triángulos, ya que en una clase de matemáticas le habían enseñado que al número de lados del polígono se le debía restar 2, y ese resultado era el número de triángulos en que el polígono quedaba triangulado.

La respuesta que Lilian y Esteban dieron a la pregunta de la comparación entre la suma de los ángulos interiores del cuadrilátero y del triángulo contrasta notablemente con su desempeño en la actividad, ya que en esta respuesta, a pesar de haber sido escrita al final, no se refleja todo el trabajo realizado con la actividad:

Los ángulos del cuadrilátero son mayores con respecto al triángulo.

Elisa y Alexis

Esta pareja comenzó su trabajo en esta actividad con la medición de los ángulos interiores del cuadrilátero *ABCD* proporcionado en la hoja impresa de la actividad y el posterior cálculo de la suma, para después compararla con la del triángulo. Las medidas que obtuvieron para los cuatro ángulos fue la misma: 70°. Consecuentemente, la suma que obtuvieron para el cuadrilátero fue de 280° y lo explicaron con el siguiente mensaje:

Porque [el cuadrilátero] *tiene un ángulo más*
que el triángulo y se suma otro ángulo más.

Una vez que obtuvieron el resultado de la suma de los ángulos interiores del cuadrilátero, procedieron a trabajar en la comparación de este valor con el valor de la suma de los ángulos interiores del triángulo, para lo cual Alexis volvió a medir los ángulos interiores del triángulo para ver, en sus palabras, si salían los 180° *(con esto es posible observar que Alexis no comprendía el campo de validez del cuantificador)*.

En la respuesta que Elisa y Alexis redactaron sobre la comparación entre las sumas, se hizo mención de que el valor de la suma de los ángulos interiores del cuadrilátero era mayor pero no por cuánto, aunque en pláticas con el investigador mencionaron que esa diferencia era de 100°:

Es mayor [la suma de los ángulos interiores del cuadrilátero] *porque tiene cuatro lados, y por lo tanto cuatro ángulos, un ángulo más que sumar.*

Cuando Esteban y Lilian, en la exposición de su trabajo ante las demás parejas, plantearon que la suma de los ángulos interiores del cuadrilátero se podía obtener por triangulación, Alexis argumentó que la triangulación sólo sería válida si los triángulos que se obtuvieran fueran rectángulos, pues si no lo eran, no podían sumar 360° ya que “No hay ángulos de 90° para sacar”. Al parecer, Alexis pensaba en el cuadrado y el rectángulo. Cuando Esteban trianguló con dos triángulos un cuadrilátero cóncavo que dibujó en el pizarrón, obteniendo una suma de los ángulos interiores igual a 360°, Alexis no estuvo de acuerdo y objetó dicha suma manifestando que el cuadrilátero sólo tenía tres ángulos ya que no contaba el ángulo mayor que 180°. Esta objeción la presentó ante el grupo y buscó la aprobación del investigador: “¿No, profesor?” Al momento en que Lilian le hizo notar que le faltó contar el ángulo entrante, Alexis mencionó que no lo contó por que era un ángulo exterior. El investigador intervino y preguntó a la clase qué entendían por ángulo interior y ángulo exterior, a lo que respondieron que un ángulo interior estaba dentro de la figura y que un ángulo exterior es el que estaba fuera de la figura. A pesar de esto, y de ver que el ángulo que decían que era exterior se encontraba dentro de la figura, Alexis insistió en mencionar que era exterior. La razón del porqué lo consideraba así radicaba en la incapacidad de medirlo “Yo no sé si se podría sacar ese ángulo” (se refería al ángulo entrante). Como no podía medir ese ángulo, mejor medía el exterior, que era agudo y sí podía medir.

Además de lo anteriormente expuesto, Elisa y Alexis no consideraban a la triangulación como un método confiable que proporcionara la suma de los ángulos interiores del cuadrilátero, pues el polígono se podía triangular con una diagonal y obtener dos triángulos (lo que significaba una suma de 360°) o se podía triangular con dos diagonales y obtener cuatro triángulos (lo que constituía una suma de 720°).

Blanca y Hugo

Blanca y Hugo, al igual que las demás parejas de segundo grado, midieron los ángulos interiores del cuadrilátero *ABCD* proporcionado en la hoja impresa de la actividad, para posteriormente sumarlos. La suma que obtuvieron fue de 280° y la explicación que escribieron es la siguiente:

Porque [el cuadrilátero] *tiene un lado más que el triángulo.*

Una vez obtenida la suma de los ángulos interiores del cuadrilátero *ABCD*, Blanca y Hugo procedieron a medir los ángulos interiores del triángulo. La medición de un ángulo del triángulo les ocasionó dificultades, pero manifestaron la decisión de medirlo y obtener los 180° que “decíamos la vez pasada, que tanto alegábamos” (se observa que los alumnos no comprenden el campo de validez del cuantificador que utilizaron en la redacción de su escrito en la actividad 3). Blanca y Hugo midieron y sumaron los ángulos interiores del triángulo y, con una expresión de alegría manifestaron su beneplácito porque “sí les salió”. Los alumnos, en respuesta a la pregunta de la comparación de las sumas de los ángulos interiores del cuadrilátero y del triángulo escribieron lo siguiente, que es algo confuso:

Dio mayor el resultado por 100° con respecto al cuadrilátero.

Estos alumnos afirmaban que la suma de los ángulos interiores de los cuadriláteros era 100° mayor que la suma de los ángulos interiores del triángulo porque el cuadrilátero tenía un lado más. Así mismo, Blanca y Hugo aseguraban que el valor de la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero era variable y dependía de la forma del cuadrilátero. Así, en su hoja impresa de la actividad dibujaron un cuadrado y mencionaron que la suma de sus ángulos interiores era de 360° porque estos cuadriláteros, al igual que los rectángulos, tenían cuatro ángulos rectos, y los cuadriláteros semejantes al de la hoja impresa sumaban 280°.

Cuando Esteban dibujó en el pizarrón un cuadrilátero cóncavo, cuya suma de los ángulos interiores (igual a 360°) la obtuvo mediante triangulación, Blanca dividió el cuadrilátero en cuatro y seis triángulos con los cuales rebatió lo mencionado por Esteban. Para Blanca y Hugo la triangulación no era un método confiable que proporcionara la suma de los cuadriláteros, ya que un polígono se puede triangular en dos, cuatro o seis triángulos, arrojando valores distintos (según esta pareja).

Alumnos de tercer grado

En la segunda sesión, en la cual se trabajaron las actividades 5, 6 y 7, la pareja de Omar no asistió a la escuela, por lo que el trabajo que realizó Omar fue individual.

Al igual que los alumnos de segundo grado, las seis parejas de los alumnos de tercer grado también recurrieron a la medición de los ángulos interiores del cuadrilátero y al cálculo de la suma de dichos ángulos, pero a diferencia de los alumnos de segundo grado, en cinco parejas (a excepción de Omar), el cálculo de la suma no se erigió como el medio principal con el cual alcanzaron conclusiones con las cuales respondieron a la pregunta de cómo era el resultado de la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero con respecto al resultado de la suma de los ángulos interiores de un triángulo. El medio que utilizaron estas parejas para alcanzar sus conclusiones fue la triangulación, la cual fue decisiva frente a la medición y cálculo geométrico. Cuatro de las seis parejas observadas, a excepción de la integrada por Ximena y Fernando así como la formada por Nancy y Carlos, plantearon una conjetura que orientó su trabajo en la actividad. En el caso de los alumnos de tercer grado se pudo identificar el planteamiento de las dos conjeturas expuestas para el caso de los alumnos de segundo grado, además de una conjetura no planteada por los alumnos de segundo grado. La primera, referente a que la suma de los ángulos interiores de los cuadriláteros es 360°, fue identificada en dos parejas: las integradas por Daniela y Juan, así como la de Blanca y José. La segunda, relativa a que la suma de los ángulos interiores de los cuadriláteros variaba dependiendo de la forma, se identificó en Omar. La tercera, planteada por la pareja de Paola y Emmanuel, fue expresada en los siguientes términos: “Todos los cuadrados suman 360° en sus ángulos interiores y el *cuadrilátero* proporcionado en la actividad es un *cuadrado,* por lo que su suma también debe ser 360°” (en realidad era un rombo sin ángulo recto).

Daniela y Juan

Juan sabía que la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero era de 360°, y se lo comunicó a su compañera Daniela. Esto se convirtió en la conjetura que orientó su trabajo en la actividad y quedó plasmada en los escritos que redactaron. Esta pareja, en respuesta a la pregunta de cómo era el resultado de la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero con respecto al resultado de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, escribió lo siguiente:

> *La suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero siempre va a ser de 360° porque como es el doble de un triángulo y éste forzosamente siempre dará 180° sin importar las medidas de sus ángulos.*

Daniela tomó el transportador y comenzó a medir los ángulos del cuadrilátero; obtuvo unos valores que al sumarlos le dieron un valor igual a 400°. Ella sabía que había medido mal. Cuando se le preguntó cómo lo sabía, Daniela respondió que la suma de los ángulos interiores del cuadrilátero era el doble de la suma de los ángulos interiores del triángulo. Al cuestionarle cómo sabía que era el doble, ella respondió que si se dividía a la mitad (es importante hacer notar que Daniela no se refería a la triangulación del cuadrado sino a la división aritmética) daba el doble. Esto lo podía asegurar debido a que Juan, al inicio de la actividad, le había dicho que la suma era 360°. En la interacción con el investigador Daniela se dio cuenta de que la división de la que hablaba también podía llevarse a cabo geométricamente y dividió al cuadrilátero con una diagonal formando dos triángulos, los cuales forzosamente tenían que dar

360° (esto es una diferencia con los alumnos de segundo grado, ya que al haber validado previamente que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°, a Daniela le daba plena certeza que la suma de los ángulos interiores del cuadrilátero era de 360°), aunque su explicación escrita fue algo confusa:

> *Como un cuadrilátero siempre va a ser el doble de un triángulo entonces el ángulo siempre dará 360°, ya que ésta es la suma de 180°.*

En esta actividad, Daniela y Juan no midieron los ángulos interiores del triángulo y solamente escribieron el valor de la suma, 180°, dentro del triángulo en su hoja de actividades (a diferencia de los alumnos de segundo grado, quienes sí necesitaron volver a medir los ángulos interiores del triángulo).

Los procedimientos que Daniela y Juan emplearon para la obtención de pruebas fueron la medición y el cálculo, así como la triangulación. La certeza la obtuvieron de la triangulación, apoyándose en la validación realizada para el triángulo en la actividad 3.

Ximena y Fernando

En esta actividad Ximena y Fernando comenzaron por medir los ángulos interiores del cuadrilátero y los sumaron obteniendo un valor igual a 360°. Posteriormente compararon este valor con el de la suma de los ángulos interiores del triángulo. Es importante hacer notar que Ximena y Fernando solamente hicieron referencia a que la suma de los ángulos interiores de un triángulo igual a es 180°, sin medir los ángulos interiores de dicho triángulo (a diferencia de los alumnos de segundo grado, quienes sí necesitaron volver a medir los ángulos interiores del triángulo).

Del trabajo realizado con el cuadrilátero, Ximena y Fernando se dieron cuenta de que si trazaban una diagonal en el cuadrilátero obtenían dos triángulos, y como la suma de los ángulos interiores de un triángulo es de 180°, la suma de los ángulos interiores del cuadrilátero debía ser de 360°. Los escritos que redactaron para explicar por qué la suma de los ángulos interiores del cuadrilátero era de 360° y cómo era esa suma con respecto a la suma de los ángulos interiores del triángulo, retomaron el trabajo de medición y triangulación con el cuadrilátero:

La suma de los cuatro ángulos va a dar 360°, porque si el cuadrilátero lo partiéramos en dos quedarían dos triángulos, y como la suma de los ángulos de un triángulo suman 180°, debe ser de 360°.

Porque, aparte de que ya lo medimos, al partirlo se obtienen dos triángulos, pues son 360°.

Esta pareja obtuvo "pruebas" mediante la medición y el cálculo geométrico, así como la triangulación. Tanto en una como en la otra, obtuvieron 360°. La triangulación otorgó la validez a la suma que previamente habían calculado.

Nancy y Carlos

Nancy y Carlos, al igual que la de Ximena y Fernando, no tenía una conjetura que orientara la búsqueda de su respuesta a las tareas planteadas en la hoja impresa de la actividad 5. Esta pareja comenzó su trabajo midiendo los ángulos interiores del cuadrilátero sin tener idea de lo que debían hacer posteriormente. De la medición pasaron a la suma y obtuvieron 300°. Al igual que las parejas de Daniela y Juan, así como la de Ximena y Fernando, la de Nancy y Carlos, tampoco midieron los ángulos interiores del triángulo y solamente escribieron la suma (180°) en su hojas de la actividad.

Al continuar su trabajo con el cuadrilátero se dieron cuenta de que si trazaban una diagonal del vértice *B* al *D* del cuadrilátero *ABCD*, la suma de los ángulos interiores del polígono sería de 360°:

Porque si se divide a la mitad el cuadrilátero, el resultado es dos triángulos y sabemos que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°.

La suma de los valores de los cuatro ángulos interiores del cuadrilátero obtenidos por medición y cálculo geométrico no fue determinante para esta pareja, puesto que esta suma igual a 300° fue desechada posteriormente sin problemas por la suma de 360° obtenida por triangulación del cuadrilátero.

Después de haber obtenido la suma de los ángulos interiores del cuadrilátero, Nancy y Carlos respondieron por escrito concisamente cómo era esa suma respecto a la suma de los ángulos interiores del triángulo:

El doble de los ángulos interiores de un triángulo.

Blanca y José

José hizo un análisis del rombo dibujado en la hoja de actividades y, por lógica (según él), determinó que los ángulos *D* y *B* del cuadrilátero eran iguales. No supo explicar por qué lo eran, pero estaba convencido de que medían lo mismo y que a su vez los ángulos *A* y *C* también eran iguales (tampoco explicó por qué). De su análisis concluyó que la suma de los ángulos interiores del cuadrilátero era igual a 360°. Su convencimiento se lo comentó a Blanca, quien no se convenció. José decidió comprobárselo, para lo cual midió los ángulos interiores del cuadrilátero y le solicitó a Blanca que los sumara. Al cuestionarle a José cómo era la suma de los ángulos interiores del cuadrilátero con respecto a la suma de los ángulos interiores del triángulo, mencionó que era mayor y, al interrogársele por cuánto, se dio cuenta de que era el doble: “Sí. Un cuadrilátero es el doble de un triángulo”.

José midió los ángulos interiores del cuadrilátero y obtuvo dos ángulos de 70° y dos ángulos de 110°, cuya suma era igual a 360°. En este punto, José había obtenido los 360° de la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero de dos maneras distintas, aunque la primera seguía siendo pura especulación.

José, en su afán por explicarle a Blanca, encontró otro método para obtener la suma de los ángulos interiores: la triangulación. José refirió que si se dividía el cuadrilátero a la mitad daba dos triángulos, y como la suma de los ángulos interiores de cada uno de los triángulos era de 180°, los ángulos interiores del cuadrilátero sumaban 360°.

Después de todo este trabajo, Blanca y José se dedicaron a redactar los escritos solicitados en la hoja impresa de la actividad, los cuales se reproducen a continuación:

Mayor, porque la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero da 360° y la suma de los ángulos interiores de un triángulo da 180°, por lo cual se nota el doble de diferencia de los ángulos de un cuadrilátero a la de un triángulo.

La ley del cuadrilátero dice que los ángulos interiores de cualquier cuadrilátero miden 360°.

Cuando Omar expuso que la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero podía variar, José hizo otra demostración. Para esta demostración centró su análisis en el vértice *B* (aquí retomó su idea original), prolongó los lados *AB* y *BC* del cuadrilátero, mencionando que en el vértice *B* había una circunferencia que era igual a 360°. José sabía que los ángulos *D* y *B* eran iguales (previamente los había medido) y que los ángulos *A* y *C* eran iguales.

José, en su demostración, estableció que el ángulo interior *B* era igual al ángulo opuesto por el vértice y que los otros dos ángulos externos eran iguales entre sí por ser opuestos por el vértice, y que como formaban un círculo su suma era de 360°. El investigador le hizo notar que de los cuatro ángulos que había mencionado solamente el *B* era interior y que los demás ángulos eran exteriores al cuadrilátero y que la suma que se pedía era la de los ángulos interiores. José recurrió a la igualdad de los ángulos correspondientes, y así estableció que el ángulo opuesto por el vértice al ángulo *B* era igual al ángulo interior *D* del cuadrilátero y que el ángulo formado por la prolongación del segmento *AB* y el lado *BC* era suplementario al ángulo *B*, el cual era igual al ángulo interior *A*, y que el ángulo opuesto por el vértice al ángulo suplementario del ángulo *B* era igual al ángulo interior *C*, con lo cual demostró que la suma de los cuatro ángulos interiores del cuadrilátero era igual a 360°.

Los procedimientos que emplearon los alumnos, especialmente José, para la obtención de "pruebas" fueron: la medición y el cálculo, la triangulación y el análisis de los ángulos en un vértice, apoyándose en la igualdad de los ángulos formados por dos líneas paralelas cortadas por una transversal.

Omar

Para empezar su trabajo, Omar planteó su conjetura:

> [La suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero] *puede variar dependiendo de la abertura a la que esté el cuadrilátero y qué tipo de cuadrilátero sea.*
>
> *Y todos los triángulos suman los ángulos interiores 180° y es una constante.*

Para probar su conjetura midió los ángulos interiores del cuadrilátero y obtuvo 70° para los cuatro ángulos. Al sumar los ángulos obtuvo un valor de 280°. La explicación que proporcionó por escrito a por qué había obtenido este valor se refería a los valores medidos de los ángulos:

> *Porque al medir nos da 70° cada ángulo* [interior].

Al escuchar que Emmanuel decía que dos ángulos del cuadrilátero medían 110°, se dio cuenta de que había medido mal, pero no corrigió sus errores, quedando su suma como 280°.

Este valor reforzaba su conjetura dado que sabía que los cuadrados tenían cuatro ángulos de 90° lo que daba una suma de 360°. En este punto tenía dos cuadriláteros en los cuales la suma de los ángulos interiores variaba y, aunque consideró la opción de haber realizado mal las mediciones, esto quedó solamente como mera especulación, afianzándose en su conjetura.

Posteriormente Omar trazó dos diagonales al cuadrilátero dibujado en la hoja impresa de la actividad, pensando que la intersección de las dos diagonales era el centro de una circunferencia que circunscribía al cuadrilátero. Con apoyo en este punto Omar manifestó su interés de medir los ángulos del cuadrilátero, pero no lo hizo.

Cuando Omar escuchó las exposiciones de las actividades realizadas por las otras dos parejas, se dio cuenta de que había medido mal e incluso lo admitió, tal vez por pena, pero volvió a tomar confianza y mencionó que la suma de los ángulos interiores de los cuadriláteros podía variar, aunque no ofreció argumentos. La triangulación como un modo de obtener la suma de los ángulos interiores del cuadrilátero no apareció en el trabajo de Omar.

Paola y Emmanuel

Estos estudiantes comenzaron su trabajo con las tareas planteadas en la actividad con la medición de los ángulos interiores del cuadrilátero. Emmanuel tenía una conjetura:

Todos los ángulos del cuadrilátero proporcionado en la actividad eran agudos. Al medir de un ángulo y obtener 110°, se dio cuenta de que su conjetura era falsa.

Emmanuel planteó entonces otra conjetura: Todos los cuadrados suman 360° en sus ángulos interiores y el cuadrilátero (rombo) proporcionado en la actividad es un cuadrado, por lo que su suma también debe ser de 360°. Los valores que obtuvieron con la medición de los ángulos fueron: dos ángulos de 110° y dos ángulos de 70°, lo que les arrojó una suma cuyo valor era de 360°. Este valor le proporcionó confianza a Emmanuel y, a pesar de que el cuadrilátero no tenía los cuatro ángulos rectos, estaba convencido de que era un cuadrado.

Emmanuel convenció a su vez a Paola de que el rombo proporcionado en la actividad era un cuadrado y que por lo tanto su suma era de 360°. Cuando se les cuestionó cómo lo podían comprobar, Emmanuel recurrió a la triangulación: "Podría decirse que un cuadrado es como dos triángulos unidos; como la suma de los ángulos de un triángulo es de 180° entonces es el doble, 360°". Esto que mencionó Emmanuel lo consideraba absolutamente cierto para los cuadrados, pero cuando se le cuestionó si era válido para todos los cuadriláteros, dudó y ya no lo pudo asegurar. Paola sí creía que todos los cuadriláteros se podían formar por dos triángulos y para comprobarlo sugirió unir varios triángulos y formar los cuadriláteros correspondientes.

Los procedimientos que Paola y Emmanuel emplearon para la obtención de "pruebas" fueron la medición y el cálculo de los ángulos interiores del cuadrilátero de la actividad, con lo cual se convencieron de que el cuadrilátero de la actividad era un cuadrado. Para "comprobar" la suma, triangularon el cuadrilátero.

Actividad 6: Comparación de las sumas de los ángulos interiores del pentágono y del triángulo

Alumnos de segundo grado

En esta actividad cuatro de las seis parejas de segundo grado recurrieron de nuevo a la medición de los ángulos interiores, en este caso del pentágono, y al cálculo de la suma de dichos ángulos como medio principal de formulación de conclusiones para responder la pregunta de cómo era el resultado de la suma de los ángulos interiores de un pentágono con respecto al resultado de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

La pareja integrada por Denisse y Edmundo, aunque también recurrió a la medición y al cálculo, no obtuvieron la certeza por este medio para responder la pregunta de la comparación de las sumas de los ángulos interiores del pentágono y del triángulo. Sus conclusiones y certezas fueron obtenidas de la triangulación. La pareja formada por Karen e Irving fue la única que no recurrió a la medición o al cálculo, sino a la triangulación como medio para obtener sus conclusiones.

En las parejas integradas por Wendy y Mario, y Lilian y Esteban se identificaron dos usos distintos que le dieron a la triangulación. El primer uso, también identificado en la actividad anterior, fue utilizar la triangulación como un modo que explicaba la suma de los ángulos interiores de los pentágonos. El segundo uso fue utilizar la triangulación como un modo alterno para encontrar la suma de los ángulos interiores del pentágono. Las parejas de Denisse y Edmundo, y Karen e Irving, adicionalmente a los dos usos mencionados anteriormente, le dieron un tercer uso a la triangulación: como un modo para comprobar la suma de los ángulos interiores del pentágono.

La pareja de Elisa y Alexis así como la de Blanca y Hugo fueron detractores de la triangulación, en este caso del pentágono, por considerar que un polígono podía triangularse tantas veces como se quisiera y, por tanto, no fue considerada por estos alumnos ni siquiera como un modo confiable para obtener la suma de los ángulos interiores del polígono.

Al igual que en la actividad anterior, en esta actividad cinco de las seis parejas observadas (a excepción de la integrada por Wendy y Mario), plantearon una conjetura que orientó su trabajo en la actividad. Las conjeturas planteadas se agruparon en torno a dos ideas principales: La primera, que la suma de los ángulos interiores de los pentágonos sumaba 540°, identificada en dos parejas, las integradas por Karen e Irving, así como la de Lilian y Esteban; la segunda, que la suma de los ángulos interiores de los pentágonos variaba dependiendo de la forma, identificada en una pareja, la integrada por Blanca y Hugo.

También se identificaron otras conjeturas que surgieron en el transcurso del trabajo de los alumnos durante esta actividad; Esas conjeturas les ayudaron a plantear conclusiones y resultados intermedios que posteriormente utilizaron en sus resultados finales. Así, las parejas de Elisa y Alexis y la de Lilian y Esteban plantearon la conjetura de que todos los ángulos interiores del pentágono *ABCDE* proporcionado en la hoja impresa de la actividad eran obtusos; la pareja de Denisse y Edmundo, planteó dos conjeturas: una, que la suma de los ángulos interiores del pentágono debía terminar en cero; y la segunda, que la triangulación era un método que se podía utilizar para obtener la suma de los ángulos interiores de un pentágono siempre que fuera regular.

Denisse y Edmundo

Al igual que en la actividad 5, Denisse y Edmundo comenzaron con la medición de los ángulos interiores del pentágono y del triángulo proporcionados en la hoja impresa de la actividad, para posteriormente sumarlos y poder comparar los valores de las sumas. Aunque esta pareja utilizó la triangulación del cuadrilátero, no la utilizón de inicio en esta actividad.

Al contrario de la actividad anterior, Edmundo no sabía de manera previa cuánto sumaban los ángulos interiores del pentágono. Una vez que midieron los ángulos interiores del pentágono y los sumaron, obtuvieron un valor igual a 532°. Edmundo se quedó pensativo y manifestó su creencia de haber obtenido una suma equivocada. Al interrogársele por qué pensaba así, respondió que "esperaba un valor cerrado, terminado en cero" dado que los dos valores de las sumas de los ángulos interiores que se obtuvieron en las actividades anteriores (180° para el triángulo y 360° para el cuadrilátero) también habían terminado en cero. Estaba seguro de que se había equivocado, aunque vislumbraba la posibilidad de que el valor de 532° que habían obtenido para la suma de los ángulos interiores del pentágono fuera una excepción. Ante esta duda se decidió a medir nuevamente los ángulos interiores del pentágono, y los valores que obtuvo sumaron 540°. Este valor concordó con su conjetura.

Ahora Edmundo se enfrentaba a la justificación de su respuesta, dicho en sus palabras, y manifestó no saber qué hacer, por lo que tenía que pensar. Mientras

Edmundo medía, Denisse por su cuenta triangulaba el pentágono. El investigador la cuestionó acerca de esa triangulación, a lo que Denisse respondió que creían que el polígono (pentágono) se formaba por tres triángulos. Edmundo apoyó a Denisse pero limitó la triangulación a los pentágonos regulares. Para Edmundo, un pentágono era *regular* si era convexo y tenía lados rectos, en tanto que los pentágonos *irregulares* eran los cóncavos.

Por petición del investigador, Edmundo dibujó en su hoja impresa de la actividad un pentágono cóncavo, irregular en palabras de Edmundo. Acto seguido, el investigador le solicitó a Edmundo que lo triangulara y, ante su sorpresa obtuvo tres triángulos. No lo podía explicar, pero sabía que la suma de ese pentágono también era de 540°, ya que al ser tres triángulos, y al valer la suma de los ángulos interiores para cada triángulo 180°, el producto resulta 540°. El investigador comparó los valores obtenidos por medición y por triangulación y preguntó si la triangulación era un modo válido para obtener la suma de los ángulos interiores de un pentágono, a lo que Edmundo respondió que por triangulación se podía obtener la suma de los ángulos interiores del pentágono, pero que se debía comprobar que era válida. Para él, la comprobación —en sus propias palabras, comprobación de prueba y error— emergía de la medición de los ángulos interiores y su posterior suma de muchos pentágonos. Después de un rato, Edmundo manifestó que ya habían comprobado por qué la suma de los ángulos interiores del pentágono era 540°. Esta comprobación era la triangulación, la cual debía efectuarse sin que las diagonales se cruzaran: “por que si dividimos el pentágono en triángulos sin que ninguno divida a otro”, ya que si esto pasaba, mencionó Edmundo, “se tienen más ángulos, los cuales no forman parte de los ángulos interiores del polígono”. Al parecer, este es el momento en el que dejó de ver a la medición como fuente de certeza y su lugar lo tomó la triangulación.

Una vez que la pareja terminó con su trabajo se dedicó a darle respuesta a las interrogantes planteadas en las hojas impresa de la actividad redactando los siguientes escritos:

La suma de los ángulos interiores de un pentágono es el triple de la suma de los ángulos interiores de un triángulo. Debido a que cualquier pentágono puede formarse por tres triángulos sin cruzar líneas y la suma de los ángulos interiores de tres triángulos da como resultado 540°.

Cuando en la exposición que cada equipo hizo de su trabajo, Irving mencionó que la aseveración de que la suma de los ángulos interiores del pentágono era igual a 540° era válida sólo si los pentágonos eran planos, Edmundo agregó que era cierto y que no importaba que los pentágonos fueran irregulares, siempre que tuvieran líneas rectas.

Karen e Irving

Al contrario de la actividad anterior, esta pareja utilizó la triangulación para obtener la suma de los ángulos interiores del pentágono. Estos alumnos no utilizaron la triangulación en la validación de la suma de los ángulos interiores del cuadrilátero; se dieron cuenta de que se podía hacer de esta manera cuando las demás parejas expusieron su trabajo.

Estos alumnos al triangular el pentágono obtuvieron tres triángulos, dando una suma de 540°. Irving mencionó que iba a comprobar este valor y, para ello, explicó que sólo iba a medir y sumar los ángulos interiores del pentágono para ver si obtenía los 540°. Por su parte, Karen le hizo ver que no necesita hacer eso, ya que al haber triangulado el pentágono era suficiente, por que siendo tres triángulos, y teniendo cada uno una suma de sus ángulos interiores igual a 180°, la suma de los ángulos interiores del pentágono valía 540°. Con esta explicación se puede inferir que Karen comenzó a validar deductivamente.

A pesar de la insistencia de Karen de que no se necesitaba medir los ángulos interiores del pentágono, Irving no se convenció y comenzó a medirlos. Mientras Irving medía los cinco ángulos, Karen se dedicó a responder las cuestiones planteadas en las hojas impresas de la actividad:

> *Es mayor, da 540°, porque dentro del pentágono hay tres triángulos; entonces, al multiplicar 3 por 180°, que es el resultado de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, da 540°. Ya que podemos observar que el pentágono contiene tres triángulos internos y en cada triángulo la suma de sus ángulos mide 180°. Este resultado lo multiplicamos por 3 y nos dio 540°.*

Karen obtuvo la certeza mediante la triangulación; Irving, por lo contrario, la obtuvo de la medición y la suma de los ángulos interiores del pentágono, de tal manera que cuando midió los ángulos interiores del pentágono y los sumó, se alegró de que el resultado fuera el mismo que el que obtuvo por triangulación. Cuando se les cuestionó si la suma de los ángulos interiores obtenida de 540° era para todos los pentágonos, respondieron que sí, siempre que los lados fueran rectos y las figuras fueran planas.

Wendy y Mario

Esta pareja no había logrado acoplarse en el desarrollo de las actividades, por lo que empezaron a tener diferencias, mismas que harían que cada uno trabajara por su cuenta, ignorando el trabajo del otro.

Aunque en la explicación de su trabajo con los cuadriláteros, esta pareja mencionó a la triangulación como un medio que se podía utilizar para obtener la suma de los ángulos interiores de un polígono, hay que recordar que este procedimiento surgió de la orientación que le dio Edmundo a Mario. De tal suerte que comenzaron midiendo los ángulos interiores del pentágono y del triángulo para posteriormente sumarlos y compararlos.

Una vez que efectuaron la suma de los ángulos interiores del pentágono, obteniendo un valor igual a 540°, Wendy trianguló el pentágono con las diagonales *EC*, *AC* y *BE*. Esta triangulación daba cinco triángulos, pues las diagonales *AC* y *BE* se intersecaban. A pesar de haber obtenido cinco triángulos, Wendy hacía referencia a una triangulación del pentágono en tres triángulos iguales, a lo cual el investigador le hizo notar que él veía en su pentágono de la hoja impresa más de tres triángulos. Para mostrar los tres triángulos en que quedaba divido el pentágono, Wendy borró las tres diagonales que había dibujado en el pentágono y verbalmente indicó los tres triángulos de los que hablaba: El triángulo *EDC*, el triángulo *ECA* y el triángulo *ACB*. Mario apuntó que eran tres triángulos diferentes y que ahora había ocho ángulos diferentes. Mario seguía sin poder engancharse con la triangulación y para él la certidumbre provenía de la medición y la suma de los ángulos interiores. Wendy, por su parte, comenzó a ver la triangulación como un medio eficaz para obtener la suma de los ángulos interiores del polígono, aunque, como Mario, la certeza la obtenía de la medición y posterior suma de los ángulos. Esto se refleja en la respuesta que Wendy escribió a la pregunta de comparación de los ángulos interiores del pentágono y del triángulo:

> *El resultado del pentágono es 540° porque, aparte de que sumamos todos sus ángulos, en el pentágono salen tres triángulos y cada triángulo mide 180°.*

En la explicación que dieron de por qué los ángulos interiores del polígono sumaban 540°, estos alumnos recurrieron a las medidas de los ángulos que obtuvieron para explicarlo:

> *Porque tres de sus ángulos miden 110°*
>
> *y dos de sus ángulos miden 105° y dan 540°*

Elisa y Alexis

Esta pareja, al igual que en la actividad 5, comenzó a medir los ángulos interiores del pentágono y obtuvo la suma de estos ángulos. Mientras Alexis medía y sumaba los ángulos interiores del pentágono, Elisa escribió junto al triángulo el valor de la suma de los ángulos interiores (180°) y su justificación estribó en que: “Es que, cómo estuvimos diciendo que todos los triángulos miden 180°, entonces ya, la pusimos de una vez”.

Con esta explicación Elisa dio muestra de haber comenzado a comprender el campo de validez del cuantificador, pero la certeza que le proporcionó esta explicación no la convenció del todo, dado que no hizo ningún intento por convencer a Alexis de que no midiera ni sumara los ángulos interiores del triángulo para comprobar ese valor.

Una vez que Alexis terminó de medir y sumar los ángulos interiores del pentágono y del triángulo, compararon las sumas (429° para el pentágono y 180° para el triángulo) y lo único que escribieron respecto a esta comparación fue que era mayor la suma de los ángulos interiores del pentágono, sin especificar por cuánto o cuántas veces era mayor:

Es mayor porque tiene dos ángulos más.

Posteriormente, Elisa le hizo ver a Alexis que debía haber un error en la medición dado que todos los ángulos interiores del pentágono eran obtusos y él había obtenido un valor de un ángulo agudo. Alexis volvió a medir los ángulos interiores del pentágono y se dio cuenta del error. Esta nueva medición les proporcionó unos valores que al sumarlos daban un total de 540°. La explicación que dieron a este valor es la misma que escribieron previamente en la comparación de las sumas:

Porque tiene dos ángulos más para sumar.

Una vez que acabaron con estas actividades, Alexis, convencido de que no se podía obtener la suma de los ángulos interiores del pentágono con la triangulación, trazó todas las diagonales en el pentágono *ABCDE* con lo que obtuvo diez triángulos y otro pentágono menor en el centro del pentágono *ABCDE*. Volvió a trazar todas las diagonales del pentágono menor, con lo que obtuvo otra vez diez triángulos y otro pentágono más chico en el centro. Esto para Alexis fue evidencia suficiente para refutar a Lilian, ya que no obtenía los tres triángulos que decía Lilian.

Lilian y Esteban

Esta pareja recordaba de sus clases de matemáticas que si triangulaban el pentágono podían obtener la suma de los ángulos interiores, pero no recurrieron a la triangulación como primera opción. Su primera acción consistió en medir los ángulos interiores del pentágono. Esteban interrumpió las mediciones que Lilian efectuaba y comenzó a triangular el pentágono proporcionado en la hoja impresa de la actividad, pero en su triangulación trazó cuatro diagonales (*AD*, *AC*, *BE* y *BD*) y obtuvo ocho triángulos. Sabía por Lilian que esa triangulación era incorrecta ya que obtuvo más triángulos de los que esperaba y lo hizo patente: “No acá me equivoqué”. Lilian, en la actividad 5, había mencionado que para saber el número de triángulos que se obtenían al triangular un polígono se debía restar 2 a la cantidad de lados del polígono. Apoyándose en lo indicado por Lilian, Esteban sabía que de la triangulación del pentágono debía obtener tres triángulos y no ocho.

Ante la equivocación de Esteban, Lilian borró las diagonales que Esteban había hecho y dibujó en el pentágono solamente dos diagonales, *AD* y *DB*, con lo cual obtuvo tres triángulos. Pero Esteban no estaba seguro de esta triangulación y le pidió a Lilian que mejor terminara de medir los ángulos interiores del pentágono. Lilian no sabía por qué Esteban le pedía que dejara la triangulación, pero aun así le hizo caso y comenzó a borrar las diagonales que dibujó en el pentágono. Ante esta situación el investigador preguntó por qué borraban la triangulación, a lo que Esteban respondió que si se trazaran todas las diagonales del pentágono se obtendría una mayor cantidad de triángulos que los tres que decía Lilian. Lilian no pudo refutar lo que mencionó Esteban ni defendió su triangulación ya que lo que había mencionado, de restarle 2 al número de lados del pentágono (5), era algo que recordaba de la clase de matemáticas pero no lo entendía, dado que no sabía ni podía explicar por qué se le debía restar 2 a la cantidad de lados.

Las mediciones de los ángulos interiores del pentágono que hicieron les arrojaron como resultado una suma igual a 350°, valor inaceptable dado que sabían que mediante triangulación debían obtener 540°. En este punto Lilian y Esteban se encontraban confundidos, pues los dos métodos que habían utilizado para obtener la suma de los ángulos interiores del pentágono les habían ocasionado dificultades. Esteban comenzó a hacer un análisis del pentágono llegando a la conclusión de que todos los ángulos interiores eran obtusos y que por lo tanto el valor de 70° que habían obtenido para todos los ángulos estaba equivocado.

Esteban decidió triangular otra vez el pentágono, y obtuvo de nueva cuenta los tres triángulos, que al multiplicarlos por 180° (la suma de los ángulos interiores de cada triángulo) le arrojó un resultado de 540°. Cuando el investigador cuestionó por qué ahora sí se decidió por triangular en tres al pentágono y desechar las triangulaciones que le daban mayor cantidad de triángulos, Esteban contestó que él también se había acordado de lo que Lilian había dicho, aunque no sabían explicarlo ni justificar por qué la triangulación que daba tres triángulos era la que debían utilizar y no las triangulaciones que les daban mayor cantidad de triángulos: "Así es como va".

Cuando en la exposición de los resultados de su trabajo se vieron confrontados por las otras dos parejas, Lilian y Esteban no pudieron explicarles ni convencerlos de por qué solamente debían trazarse tres diagonales en el pentágono (las cuales triangularan en tres al pentágono) y no las diez que decía Alexis, así como tampoco podían explicar por qué se le debía restar dos al número de lados: "Es una cosa ya establecida, como eso de que un número a la potencia cero te da 1".

Para esta pareja la triangulación era un modo —una teoría en palabras de Esteban— que proporcionaba la suma de los ángulos interiores: "Es que nosotros obtuvimos dos respuestas de cómo hacerlo. Una por los triángulos".

La validación para estos alumnos provenía de la medición y de los cálculo. Así, esta pareja se afanó en la medición de todos los ángulos interiores del pentágono, pero a pesar de su esfuerzo no pudieron obtener una suma de 540°, lo que los dejó confundidos. Después de la primera medición de los ángulos interiores, cuyos valores al sumarlos les dieron un total de 350°, realizaron una segunda medición de los ángulos, obteniendo una suma igual a 525°. Los alumnos estában desconcertados: "Debería dar 540°". Ante este resultado, Esteban se afanó en medir los ángulos interiores del pentágono, pero su esfuerzo no se vio recompensado ya que obtuvo una tercera suma igual a 535°, un valor que estaba más cercano a los 540° pero que no era 540°. La suma igual a 535° era un valor que dejó dudas en los alumnos, ya que les faltaban cinco grados: "Para que coincida con esta teoría de los triángulos".

Blanca y Hugo

Esta pareja empezó su trabajo con la actividad midiendo los ángulos interiores del pentágono. Hugo tuvo dificultades al medir y obtuvo valores iguales a 70°. Blanca no estaba convencida de ese valor ya que para ella los ángulos eran obtusos, no agudos, y se lo hizo saber a Hugo, quien reconoció su error después de que Blanca, con la mano, le indicara sobre el ángulo que habían medido la posición en la que ella creía estaría el ángulo recto y hacerle ver a Hugo que el ángulo que habían medido era mayor que el ángulo recto.

Los valores de los ángulos interiores del pentágono que obtuvieron, después de corregir sus mediciones fueron de 110° para todos los ángulos interiores, cuya suma fue igual a 550°. Una vez obtenida la suma de los ángulos interiores del pentágono, Blanca se aprestaba a medir los ángulos interiores del triángulo, pero decidió no hacer la medición y escribió debajo del triángulo 180°, aunque no estaba plenamente segura y su explicación lo dejó entrever: "Pues se supone que [la suma de los ángulos interiores del triángulo] son 180°". Una vez que tuvieron los dos valores de las sumas, la única conclusión que esta pareja obtuvo fue que la suma de los ángulos interiores del pentágono era mayor que la de los del triángulo y así lo manifestaron por escrito, aunque no establecieron por cuánto o cuántas veces era mayor:

Mayor la suma de los ángulos del pentágono que la del triángulo.

Con base en el pentágono con el que trabajaron en la actividad, esta pareja concluyó que la suma de los ángulos interiores de los pentágonos era variable y dependía de la forma: “Depende de sus lados y sus ángulos. Por ejemplo, si éste es un pentágono irregular, pueden estar cerrados los ángulos y pueden medir menos”.

La explicación que escribió esta pareja del valor de la suma de los ángulos interiores del pentágono igual a 550° era distinta a la que proporcionaron verbalmente en interacción con el investigador. Verbalmente manifestaron que la suma era de 550° porque los cinco ángulos medían 110°. Por escrito indicaron que la suma era 540°:

> *Porque [el pentágono] tiene mayor número de lados* [que el triángulo].

Alumnos de tercer grado

En esta actividad se identificaron dos usos distintos que los alumnos de tercer grado le dieron a la medición y al cálculo. El primer uso identificado fue el de constituirse en el medio principal con el cual se comprobó la suma de los ángulos interiores del pentágono. Este uso se identificó únicamente en Omar, quien trabajó solo porque su pareja no asistió el día que se llevó a cabo la segunda sesión de trabajo.

El segundo uso que se identificó en las restantes parejas, a excepción de la integrada por Nancy y Carlos, fue el utilizar a la medición y al cálculo de la suma como un modo para encontrar la suma de los ángulos interiores del pentágono, que posteriormente les ayudaría a acumular evidencia que ratificara o rectificara el valor de la suma de los ángulos interiores del pentágono obtenido por otro medio. Así, Daniela y Juan obtuvieron, por medición y cálculo, una suma igual a 525°, que posteriormente fue desechada por la triangulación. Por su parte, Ximena y Fernando obtuvieron una suma igual a 540°, resultado que les ayudó a decidirse por la triangulación del pentágono con dos diagonales. Asimismo, Paola y Emmanuel obtuvieron una suma por medición y cálculo igual a 540°, que les confirmó que la división que hicieron del pentágono en un triángulo y un cuadrilátero con una diagonal era correcta. Finalmente Blanca y José recurrieron a la medición y al cálculo como un primer medio para obtener una suma igual a 550°. Solamente Nancy y Carlos no recurrieron a la medición y al cálculo de la suma.

Las cinco parejas, a excepción de Omar, triangularon el pentágono en cinco triángulos. Solamente dos de ellas, las integradas por Daniela y Juan, y Ximena y Fernando, triangularon al pentágono en tres triángulos.

De las cinco parejas que triangularon en cinco triángulos el pentágono, solamente la integrada por Daniela y Juan utilizaron esta triangulación, junto con la triangulación en tres triángulos, como evidencia que apoyaba la conjetura de que la suma de los ángulos interiores del pentágono dependía de la forma y el tamaño. De las restantes cuatro parejas, tres de ellas, las integradas por Ximena y Fernando, Blanca y José, y Paola y Emmanuel, desecharon la triangulación en cinco triángulos por considerarla incorrecta, aunque utilizaron distintos métodos para desecharla. Ximena y Fernando recurrieron a la medición y al cálculo, mientras que Blanca y José, y Paola y Emmanuel la desecharon por medio de análisis y razonamiento. Nancy y Carlos, por su parte, no desecharon la triangulación del pentágono en cinco triángulos, solamente ajustaron esta triangulación para que les proporcionara el valor de 540° de la suma de los ángulos interiores del pentágono.

A diferencia de la actividad anterior, en donde la triangulación se erigió como el medio principal que ayudaba a explicar el resultado de la suma de los ángulos interiores del pentágono, en esta actividad la triangulación no se utilizó con esta finalidad. Su lugar lo tomó la medición y el cálculo. Solamente las parejas integradas por Blanca y José, y Nancy y Carlos explicaron el valor de la suma como resultado de una división del pentágono, en un triangulo y un cuadrilátero para Blanca y José, y en cinco triángulos para Nancy y Carlos.

A diferencia de los alumnos de segundo grado, ninguna de las parejas de tercer grado utilizo a la triangulación para comprobar la suma de los ángulos interiores del pentágono. Al contrario de los alumnos de segundo grado, ninguno de los alumnos de tercer grado objetó la triangulación del pentágono y, aunque se dieron dos triangulaciones diferentes, en dos y cinco triángulos, las parejas de tercer grado seguían considerándola como un método que les ayudaba a obtener la suma de los ángulos interiores del polígono.

Al igual que en la actividad anterior, en esta actividad cinco de las seis parejas observadas, a excepción de la integrada por Ximena y Fernando, plantearon una conjetura que orientó su trabajo en la actividad. Las conjeturas planteadas se agrupan alrededor de dos ideas centrales: La primera, que los ángulos interiores del pentágono proporcionado en la hoja impresa de la actividad eran congruentes, identificada en cuatro parejas, las integradas por Daniela y Juan, Blanca y José, Paola y Emmanuel, y en Omar; la segunda, que la triangulación era un método que se podría utilizar para obtener la suma de los ángulos interiores del pentágono, identificada en una pareja, la integrada por Nancy y Carlos.

También se identificaron otras conjeturas que surgieron en el transcurso del trabajo de los alumnos con la actividad. Así, la pareja de Daniela y Juan planteó la conjetura de que la suma de los ángulos interiores del pentágono dependía de la forma, o como la pareja de Paola y José, que planteó la conjetura de que debía haber una regla básica para la suma de los ángulos interiores para cada figura geométrica plana y recta.

Daniela y Juan

A diferencia de la actividad anterior, Juan no sabía el valor exacto de la suma de los ángulos interiores del pentágono, solamente tenía un valor aproximado: “520° más o menos” y se lo comunicó a Daniela. Daniela trianguló el pentágono partiendo del centro del pentágono y dibujando una línea hacia cada vértice del pentágono, con lo que obtuvo cinco triángulos. Para la suma de los ángulos interiores del pentágono multiplicó 180°, por 5 (que eran los triángulos que obtuvo), lo que le dio un resultado igual a 900°. Este valor excedía en mucho a los 520° que esperaban, por lo que sabían que estaban equivocados. Ante esto decidieron medir el ángulo interior *B* del pentágono y multiplicar este valor por 5 ya que consideraron que todos los ángulos interiores del pentágono eran iguales. El resultado que obtuvieron fue de 525°, que era un valor muy parecido a la aproximación de Juan. Con base en la medición y el calculo geométrico esta pareja concluyó que la suma de los ángulos interiores del pentágono era igual a 525°, y lo explicaron por escrito:

> *Porque uno de los ángulos interiores es de 105°*
>
> *y esto multiplicado por cinco da 525°.*

Daniela y Juan se dieron cuenta de que podían triangular el pentágono de otra manera: “Porque es más sencillo con tres”. Así, esta pareja trazó las diagonales *EC* y *AC*, con lo cual triangularon el pentágono en tres triángulos, lo que les arrojaba una suma de los ángulos interiores igual a 540°.

No obstante que Daniela y Juan ya habían obtenido una suma de los ángulos interiores igual a 525° por medio de la medición y el cálculo, esta suma no fue determinante ni tomada en cuenta para que concluyeran que la suma de los ángulos interiores de un pentágono era variable. Las evidencias las obtuvieron de las dos triangulaciones que realizaron.

Aunque en un principio Daniela y Juan manifestaron estar equivocados por haber obtenido un valor de la suma de los ángulos interiores del pentágono igual a 900°, este valor después lo consideraron una prueba, ya que junto con el valor de 540° que obtuvieron de la nueva triangulación concluyeron que la suma de los ángulos interiores del pentágono era variable y que dependía de los triángulos en que se dividiera el pentágono. Esta conclusión la retomaron en la respuesta que dieron por escrito a la pregunta de la comparación de las sumas de los ángulos interiores del pentágono y del triángulo.

> *Hay una gran diferencia entre cada una de ellas. Es dependiendo en la cantidad de triángulos en los que se divide el polígono.*

Cuando las demás parejas expusieron el resultado de su trabajo, Daniela y Juan decidieron que el valor de la suma de los ángulos interiores del pentágono era igual a

540° y borraron el valor de 525° que habían escrito en sus hojas impresas de la actividad, sustituyéndolo por el de 540°.

Ximena y Fernando

Estos alumnos se decidieron por triangular el pentágono proporcionado en la hoja impresa de la actividad, pero tuvieron dificultades dado que realizaron dos triangulaciones: en una obtuvieron tres triángulos y en la otra obtuvieron cinco triángulos. La primera triangulación les arrojó una suma igual a 540°, la segunda triangulación dio una suma igual a 900°. Cuando se les preguntó por cuál triangulación se decidían, los dos alumnos guardaron silencio por un momento y ante la duda decidieron medir los ángulos interiores del pentágono y obtener la suma de esos ángulos para así saber cuál de las dos triangulaciones era la correcta. Para estos alumnos la medición y el calculo geométrico se constituyó, en esta actividad, en un medio para obtener evidencia que les ayudó a discernir cuál de las dos triangulaciones era la correcta.

Así, Ximena y Fernando, después de medir los ángulos interiores y sumarlos, se dieron cuenta de que la triangulación en tres triángulos era la correcta, por lo que procedieron a redactar su respuesta a la pregunta de la comparación entre las sumas de los ángulos interiores del pentágono y del triángulo:

Del pentágono salen tres triángulos tomando en cuenta *la ley sumarían 180° cada uno y como son tres es 540°.*

Nancy y Carlos

Nancy y Carlos decidieron triangular el pentágono para obtener la suma de los ángulos interiores del pentágono. Esta pareja hizo una primera triangulación que después desechó por considerarla incompleta. En esta triangulación trazaron las diagonales *DB* y *DA*, lo que dividió al pentágono en tres triángulos, arrojando una suma de 540°. Esta triangulación no los convenció, así que borraron las diagonales que habían trazado y procedieron a realizar una nueva triangulación en la cual partieron del centro del pentágono y trazaron una línea hacia cada uno de los vértices del pentágono, con lo que obtuvieron 5 triángulos, que al multiplicarlos por 180°, de la suma de los ángulos interiores de cada triángulo, les dio un resultado de 900°. Esta triangulación los convenció porque, según ellos, era más completa ya que utilizaban los cinco vértices del pentágono.

Cuando el investigador cuestionó a Nancy y Carlos respecto a cuál era el valor de la suma de los ángulos interiores del pentágono, concluyeron que la suma podía variar y dependía de la triangulación que se realizara en el pentágono. Esta conclusión fue formulada con base en las dos triangulaciones que efectuaron con el pentágono *ABCDE* proporcionado en la hoja impresa de la actividad, aunque como ya se mencionó, Nancy y Carlos creían que la triangulación en 5 triángulos era más completa.

La respuesta que estos alumnos escribieron a la pregunta de la comparación de las sumas de los ángulos interiores del pentágono y del triángulo retomó la idea de que la suma de los ángulos interiores del pentágono era variable:

La suma de los ángulos interiores de un pentágono puede variar en la división que se dé. En este caso lo dividimos en cinco triángulos de 2 cm por lado. Se puede decir que los triángulos son equiláteros.

Cuando el investigador los cuestionó respecto a cuáles eran los ángulos interiores del pentágono y cuáles eran los ángulos interiores de los cinco triángulos que obtuvieron de su triangulación, Nancy y Carlos se dieron cuenta de que con su triangulación estaban sumando más ángulos que los que correspondían a los ángulos interiores del pentágono. La suma de los ángulos adicionales era igual a 360° que, restada a los 900° que habían obtenido previamente, les daba una diferencia de 540°, que era el valor que había obtenido con su primera triangulación.

Haber obtenido el valor de la suma de los ángulos interiores del pentágono igual a 540° por dos maneras distintas, convenció a esta pareja de que ése era el valor correcto de la suma, aunque no fue lo mismo con la triangulación. Para Nancy y Carlos la triangulación del pentágono en cinco triángulos seguía siendo la más completa, solamente se le tenía que agregar una observación:

Porque si dividimos en cinco triángulos al pentágono, sabemos que cada triángulo tiene 180° ,y si sumamos esa cantidad cinco veces, nos da 900°. Pero llegamos a la conclusión de que sólo queremos los ángulos interiores del pentágono y entonces le restamos 360°, que son los [ángulos] *que no necesitamos y entonces nos da 540°.*

Blanca y José

Esta pareja comenzó su trabajo en esta actividad midiendo los ángulos interiores del pentágono *ABCDE* proporcionado en la hoja impresa. La medida que obtuvieron fue la misma para los cinco ángulos: 110°. La suma de los ángulos les dio un resultado igual a 550°. Este valor dejó un poco pensativos a Blanca y José. Por un instante José pensó que los ángulos tenían diferente medida, pero después recapacitó: “Se me hace algo ilógico o no tal vez”, enunciando a continuación su conjetura: “Como que supongo que tienen la misma abertura en el vértice, en cada lado”.

Después de haber enunciado su primera conjetura, José expuso una segunda conjetura, la cual se refería a que la suma de los ángulos interiores del pentágono igual a 550°, que habían obtenido por medición y cálculo, era la misma para todos los pentágonos sin importar tamaño o forma:

> Debe haber una regla básica [para la suma] de [los] ángulos [interiores] para cada figura geométrica plana y recta. Porque del triángulo [la suma] da ciento ochenta [grados]. Del cuadrado, trescientos sesenta [grados]. Del pentágono, quinientos cincuenta [grados] y no importa de qué tamaño sea el triángulo, el cuadrado o el pentágono. [Las sumas de los ángulos interiores de cada figura] da siempre lo mismo. Entonces debe haber un patrón, supongo, el cual da de todas a todas, de clase de pentágonos, triángulos o cuadrados. Bueno, en este caso son pentágonos, quinientos cincuenta.

José quería acumular evidencia que le ayudara a probar que el valor de la suma de los ángulos interiores del pentágono no dependía de la forma ni del tamaño, por lo que de nueva cuenta conjeturó que podía deducir el valor de la suma de los ángulos interiores del pentágono si los triangulaban en cinco triángulos. Lo que pensaba José era que si partía de un triángulo, al cual lo llamó base, y dibujaba otro triángulo congruente que tuviera un lado común con el triángulo base, el ángulo interior del pentágono sería igual a la suma de los ángulos interiores del triángulo que formaba el lado del pentágono. Ahora, si dibujaba cinco triángulos, todos congruentes, uno después de otro, en el que cada triángulo tuviera un lado en común con su consecutivo, formaría el pentágono y la suma de sus ángulos interiores sería igual a la suma de los ángulos interiores de los triángulos que formaban los lados del pentágono. Pero esta conjetura fue rápidamente desechada porque José se dio cuenta de que en el centro del pentágono confluía un ángulo interior de cada triángulo y que esos ángulos (cinco, por ser cinco triángulos), no eran ángulos interiores del pentágono, y que por tanto no debía contarlos: "Y ése no lo puedo contar, porque sólo estoy fijándome en los ángulos del pentágono. Por eso está mal mi teoría".

José no pudo obtener el valor de la suma de los ángulos interiores del pentágono por otros modos distintos al de medición y cálculo, ya que el tiempo que se le destinó a la actividad se había terminado, por lo que procedió junto con Blanca a darle respuesta a la pregunta de cómo era el resultado de la suma de los ángulos interiores de un pentágono respecto al resultado de la suma de los ángulos interiores de un triángulo. Su escrito es el siguiente:

Mayor, ya que la suma de los ángulos interiores de un pentágono da 550° siempre que sean regulares.

Cuando las parejas expusieron el resultado de su trabajo, Blanca y José se dieron cuenta de que el valor de 550° para la suma de los ángulos interiores del pentágono que habían obtenido difería de la de sus compañeros en 10°. Inmersos en la tradición escolar de responder correctamente a las cuestiones planteadas por el profesor, Blanca y José rápidamente borraron los valores de 550° que tenían escritos en las hojas impresas de la actividad y en su lugar escribieron 540°.

Además, retomaron el modo en que Paola y Emmanuel habían resuelto la actividad y rápidamente redactaron un escrito con las ideas de esta pareja, en el que explicaron por qué el valor de la suma de los ángulos interiores del pentágono era igual a 540°:

Porque si se pudiera dividir la figura [pentágono] *en un triángulo y en un cuadrilátero, si se suman sus ángulos* [180° y 360°]*, da como resultado 540°.*

Omar

Al igual que en la actividad anterior, Omar recurrió a la medición y al cálculo para obtener la suma de los ángulos interiores del pentágono. Omar midió un ángulo y conjeturó que todos los ángulos eran congruentes. El valor de la suma que Omar obtuvo para los ángulos interiores del pentágono fue igual a 540° y lo explicó por escrito en su hoja impresa de la actividad cómo obtuvo este valor:

Porque al medir un ángulo del pentágono

resulta 108° y por 5 es igual a 540°.

Una vez que Omar obtuvo los 540° correspondientes a la suma de los ángulos interiores del pentágono, procedió a comparar este resultado con el de la suma de los ángulos interiores del triángulo. La manera en que procedió quedó resumida en la respuesta que escribió a la pregunta de la comparación de las sumas de los ángulos interiores del pentágono y del triángulo en la hoja impresa de la actividad:

Da tres veces más que el triángulo porque el pentágono o sus ángulos miden 540° y el triángulo 180° y al dividir 540 entre 180 da como resultado 3.

Paola y Emmanuel

Paola y Emmanuel decidieron triangular el pentágono sin tener una idea clara de qué iban a hacer con esta triangulación: "Dividí la figura en cinco triángulos, pero estoy viendo como qué podría hacer con eso". Esta triangulación, como lo expresó Emmanuel, les dio como resultado cinco triángulos, ya que, al igual que las demás parejas de tercer grado que triangularon, dibujaron cinco líneas partiendo todas del centro del pentágono y dirigidas a cada uno de los vértices del polígono. Esta triangulación fue posteriormente desechada porque "quedaba un círculo en medio; quedan ángulos de más".

Borraron las líneas que habían dibujado en su triangulación y trazaron la diagonal *EC* con la que dividieron al pentágono en un triángulo y un cuadrilátero. Con esta nueva división calcularon que la suma de los ángulos interiores del pentágono era igual a 540° ya que “la suma de [los] ángulos [interiores] del cuadrilátero es trescientos sesenta [grados] y [la suma de los ángulos interiores] de los triángulos ciento ochenta [grados], nos salió que eran quinientos cuarenta [grados]”.

Adicionalmente a la división del pentágono en un triángulo y un cuadrilátero, Paola y Emmanuel midieron un ángulo interior del pentágono *ABCDE* y obtuvieron que el ángulo medía 108°. Para obtener el valor de la suma de los ángulos interiores del pentágono, Paola y Emmanuel conjeturaron que todos los ángulos interiores del pentágono eran congruentes, y al multiplicar por cinco los 108° les dio como resultado que la suma valía 540°. Haber obtenido por otro método el mismo valor de la suma, les proporcionó a Paola y Emmanuel la certeza acerca de este valor.

La explicación que esta pareja escribió de por qué la suma era 540°, retomó la medición y el cálculo:

> *Medimos un ángulo del pentágono, y observamos que todos* [los ángulos] *eran iguales. Este ángulo nos dio 108° y al multiplicarlo por 5 (ya que tiene cinco ángulos) nos dio como resultado 540°.*

Actividad 7: Conjeturas sobre la suma de los ángulos interiores de los polígonos de *n* lados

Alumnos de segundo grado

En la actividad 7 la pareja de Wendy y Mario, tuvo una desavenencia irreconciliable que se resolvió dividiendo el trabajo planteado en las hojas impresas. Así, Mario trabajó con la primera hoja impresa de la actividad, esto es, responder cómo era la suma de los ángulos interiores de un polígono de *n* lados con respecto a la suma de los ángulos interiores de un triángulo. Wendy, por su parte, trabajó con la segunda hoja impresa de la actividad, en la cual se pedía la generalización de la suma de los ángulos interiores de un polígono y el planteamiento de una fórmula matemática. La descripción de las actividades realizadas respecto a las conjeturas sobre la suma de los ángulos interiores de los polígonos de *n* lados se refieren únicamente al trabajo realizado por Mario.

Las parejas conformadas por Elisa y Alexis, y Blanca y Hugo, así como Mario, recurrieron únicamente a la medición de los ángulos interiores de los polígonos y al cálculo de la suma de dichos ángulos para responder la pregunta de cómo era la suma de los ángulos interiores de un *n*-ágono (eneágono) con respecto a la suma de los ángulos interiores de un triángulo. La pareja integrada por Blanca y Hugo, así como Mario, utilizó a la medición como un modo de obtener la suma de los ángulos interiores del hexágono proporcionado en la hoja impresa de la actividad 7. La pareja de Elisa y Alexis utilizó la medición para comprobar los valores de las sumas de los ángulos interiores de los polígonos proporcionados en la hoja impresa de la actividad 7.

Las restantes tres parejas de segundo grado se valieron exclusivamente de la triangulación de los polígonos para obtener conclusiones y responder la pregunta de la comparación de las sumas de los ángulos interiores de un eneágono y de un triángulo. Así, la pareja integrada por Lilian y Esteban utilizó la triangulación para encontrar la suma de los ángulos interiores de los polígonos proporcionados en la hoja impresa de la actividad 7. Las parejas de Denisse y Edmundo, y Karen e Irving utilizaron la triangulación para comprobar las sumas de los ángulos interiores de los polígonos proporcionados en la hoja impresa de la actividad 7.

En esta actividad, a diferencia de las dos anteriores, todas las parejas de segundo grado observadas plantearon una o varias conjeturas que orientaron su trabajo. Las conjeturas planteadas se agrupan alrededor de tres ideas: La primera, que la suma de los ángulos interiores de los hexágonos era igual a 720°, identificada en dos parejas, las integradas por Elisa y Alexis, así como la de Lilian y Esteban; la segunda, que el hexágono proporcionado en la hoja impresa de la actividad era regular, identificada en la pareja formada por Blanca y Hugo, así como en Mario; la tercera, que por cada lado que se aumentaba a un polígono se aumentaba en 180° la suma de sus ángulos interiores, identificada en las parejas compuestas por Denisse y Edmundo, Elisa y Alexis, y Blanca y Hugo.

También se identificaron otras conjeturas que ayudaron a las parejas a obtener resultados parciales que finalmente serían utilizados en sus resultados finales. Así, la pareja de Blanca y Hugo planteó que la suma de los ángulos interiores del hexágono proporcionado en la hoja impresa de la actividad debía ser múltiplo de 180° o, como la pareja de Karen e Irving, que planteó la conjetura de que la cantidad de triángulos en que quedaba dividido un polígono después de triangularlo se podía obtener restando 2 al número de lados del polígono.

Denisse y Edmundo

Denisse y Edmundo, con base en el trabajo previo de las actividades 5 y 6, determinaron que la suma de los ángulos interiores del eneágono dependía del número de lados del polígono y que por cada lado que se aumentara a partir del triángulo, la suma aumentaba en 180°:

> *Cada lado más que tenga el polígono, este* [lado] *aumentará 180° en la suma de sus ángulos interiores.*

Con base en su respuesta, Denisse y Edmundo conjeturaron que la suma de los ángulos interiores de un eneágono se obtenía del producto de la diferencia entre n y 3 (de acuerdo con Edmundo, esta diferencia representaba los lados de más que tenía el eneágono respecto al triángulo) por 180°. Esta conjetura no fue probada por esta pareja con los resultados de las sumas previas que habían obtenido en las actividades 5 y 6, y la asumieron como verdadera. Se dieron cuenta de que esa conjetura no era verdadera cuando Karen, en la exposición que realizaron todas las parejas de su trabajo, confrontó la expresión de $(n - 2) \times 180°$ que ella e Irving tenían contra la de Denisse y Edmundo en los valores de las sumas de los ángulos interiores del triángulo, el cuadrado y el pentágono.

Karen e Irving

Karen, en cuanto tuvo la hoja impresa de la actividad 7, comenzó a redactar un escrito que respondiera a la pregunta de cómo era la suma de los ángulos interiores de un eneágono con respecto a la suma de los ángulos interiores de un triángulo. Esta respuesta fue producto de lo recordado por Karen de sus clases de matemáticas:

> *Al número de lados que tiene el eneágono se le resta 2, lo que resulta son los triángulos que conforman la figura. Esa cantidad multiplicada por 180° es la suma de los ángulos interiores de la figura, siempre que tengan líneas rectas.*

Mientras Karen escribía, Irving se propuso comprobar lo que Karen le había dicho: que la cantidad de triángulos en que quedaba triangulado un polígono era igual a la diferencia entre el número de lados del polígono y 2. Para lo cual trazó una diagonal en el cuadrilátero que lo dividió en dos triángulos (4 – 2 = 2), trazó dos diagonales en el pentágono quedando dividido en tres triángulos (5 – 2 = 3) y trazó tres diagonales en el hexágono que lo dividieron en cuatro triángulos (6 – 2 = 4). Para Irving las triangulaciones que efectuó con los polígonos comprobaban lo dicho por Karen.

Mario

Para Mario, la certeza provenía de la medición y el cálculo, es decir, de la medición de los ángulos interiores del polígono y el posterior cálculo de la suma de esos ángulos: “Yo nada más sumo los ángulos y ya”. Para Mario la respuesta de la pregunta planteada en la hoja impresa de la actividad se respondía al obtener la suma de los ángulos interiores del hexágono, dado que era el único polígono del que no sabía cuánto sumaban sus ángulos interiores.

Mario dividió en dos cuadriláteros al hexágono con la diagonal *AD*. De cada cuadrilátero obtuvo la suma de los ángulos interiores. Así, para el cuadrilátero *ABCD* la suma de los ángulos interiores fue igual a 389° y para el cuadrilátero *DEFA* la suma tenía un valor de 340°. La suma de los ángulos interiores del hexágono por lo tanto era 729°. Una vez que tuvo el valor de la suma manifestó el deseo de verificarla, para lo cual sin saber claramente por qué, trazó en el hexágono dos diagonales más, *BE* y *CF*. Estas dos diagonales junto con la primera diagonal que había trazado triangularon al hexágono en seis triángulos.

Como en las actividades anteriores, Mario le solicitó asesoría a Edmundo para ver si era *correcto* lo que había hecho. Edmundo le hizo ver a Mario que la división en seis triángulos no le daba el valor de la suma de los ángulos interiores del hexágono dado que, al cruzarse las diagonales se sumaban a los ángulos interiores del hexágono, los ángulos centrales:

> Nosotros [Denisse y Edmundo] llegamos a la conclusión en los anteriores [se refiere a las actividades con el cuadrilátero y el pentágono] que las líneas [diagonales] no se tenían que cruzar para que nos diera el resultado real, por llamarlo de alguna manera. Y aquí no se cruzan [se refiere a la triangulación que Denisse y Edmundo hicieron en el hexágono] y aquí sí [se refiere a la triangulación que hizo Mario]. Se aumentan los grados porque también tienes que medir los ángulos del centro, éstos de aquí. Éstos también se tendrían que medir y eso nos aumenta el número de grados.

Como resultado de la asesoría que recibió de Edmundo, Mario obtuvo el valor de la suma de los ángulos interiores del hexágono (120°). Con ese valor se propuso obtener las medidas de los ángulos del hexágono que al sumarlos le dieran como resultado 720°. Mario conjeturó que los seis ángulos del hexágono eran iguales, así que dividió los 720° entre 6 y obtuvo 120°. A continuación midió un ángulo y obtuvo el mismo valor. Este valor era prueba suficiente para su conjetura, por lo que, sin medir los otros cinco ángulos, escribió en los seis ángulos interiores del hexágono el valor de 120°.

Una vez resuelta *correctamente* la actividad de la cual era responsable (hay que recordar que se dividió la actividad 7 con Wendy), procedió a redactar una respuesta a la pregunta de la comparación de la suma de los ángulos interiores del eneágono respecto al triángulo. Su respuesta se basó en el trabajo realizado con el hexágono:

Cuatro veces mayor porque da 720 la suma de cada uno de sus ángulos.

Una muestra de que Mario no se implicó en un proceso de validación y que continuó inmerso en proporcionar las respuestas *correctas* a las actividades planteadas por el maestro, fue que al preguntarle el investigador cuál era la respuesta que había dado a la pregunta de la comparación de las sumas de los ángulos interiores de un eneágono respecto a un triángulo, en lugar de leer su respuesta respondió en voz baja: “Salió como al compañero Edmundo. Por cada polígono que se aumenta...[inaudible] se aumenta un triángulo más y [inaudible] 180° más”. Cuando el investigador le pidió que de favor repitiera lo que había dicho, dado que no lo había escuchado, Mario respondió: “No. Está mal dicho”.

Elisa y Alexis

Una vez que Elisa y Alexis tuvieron la hoja impresa de la actividad 7 comenzaron a escribir junto a cada polígono la suma de sus ángulos interiores. Así, en el triángulo escribieron 180°, en el cuadrilátero 360° y en el pentágono 540°. Estos valores habían sido obtenidos en las actividades 3, 5 y 6, y a pesar de haber sido validados en su momento, Elisa y Alexis volvieron a medir los ángulos interiores de cada polígono y los sumaron para verificar que efectivamente los valores anotados de las sumas eran correctos. En el cuadrilátero midieron cuatro ángulos rectos cuya suma resultó de 360° y en el pentágono midieron dos ángulos de 107°, dos de 108° y uno de 110°, que al sumarlos dio un total de 540°.

Una vez seguros de los valores de las sumas de los ángulos interiores del triángulo, el cuadrilátero y el pentágono, Alexis se dio cuenta de que por cada lado que se aumentaba a un polígono, aumenta su suma en 180°, y conjeturó que la suma de los ángulos interiores del hexágono debía ser de 720°, ya que la suma de los ángulos interiores del pentágono era de 540° y, como el hexágono tenía un lado más que el pentágono, al sumarle 180° a 540° el resultado era 720°. Para comprobar su conjetura Alexis midió y sumó los ángulos interiores del hexágono obteniendo un valor igual a 720°.

La respuesta que Elisa y Alexis dieron a la pregunta de la comparación de las sumas de los ángulos interiores de un eneágono y un triángulo retoma la conjetura planteada por Alexis:

> *Siempre va a ser mayor* [la suma de los ángulos interiores de un eneágono, con respecto a la suma de los ángulos interiores de un triángulo] *porque por cada lado que se aumente* [al eneágono respecto al triángulo] *son 180° más.*

Lilian y Esteban

Lilian y Esteban estaban convencidos de que la fórmula (n – 2) x 180°, que recordaban de sus clases de matemáticas, era válida y proporciona el valor de la suma de los ángulos interiores de un polígono, aunque no pudieran explicar por qué al número de lados debía restársele 2.

Aunque Lilian y Esteban recurrieron sistemáticamente a la triangulación de los polígonos para obtener la suma de sus ángulos interiores, estas triangulaciones no dejaron de ser un recurso didáctico empleado en clase por su maestra. Así, Lilian y Esteban, al igual que Elisa y Alexis, a pesar de haber validado las sumas de los ángulos interiores del cuadrilátero y del pentágono en las actividades 5 y 6 respectivamente, volvieron a verificar las sumas de los ángulos interiores del cuadrilátero y del pentágono triangulando estos polígonos. Para el hexágono calcularon la suma de los ángulos interiores restándole 2 a 6 (que eran los lados del hexágono) y multiplicando la diferencia que habían obtenido por 180°. Después de haber obtenido este valor, Lilian y Esteban triangularon el hexágono en cuatro triángulos con la ayuda del trazado de tres diagonales.

A diferencia de las demás parejas de segundo grado, Lilian y Esteban no se dieron cuenta de que la suma de los ángulos interiores de los polígonos aumentaba en 180° respecto al polígono anterior, así que solo concluyeron que la suma de los ángulos interiores de un eneágono era mayor que la de un triángulo:

Será mayor [la suma de los ángulos interiores] *si* [el eneágono] *tiene más de tres lados. Si* [el eneágono] *tiene tres* [lados, la suma de sus ángulos interiores] *será igual* [a la suma de los ángulos interiores del triángulo]. *Ejemplo: Triángulo con rectángulo es mayor por 180°.*

Blanca y Hugo

Blanca y Hugo, con base en el trabajo previo realizado con las actividades 3, 5 y 6, comenzaron a apuntar debajo de cada polígono proporcionado en la hoja impresa de la actividad 7 la suma de sus ángulos interiores. Así, debajo del triángulo escribieron 180°, debajo del cuadrilátero anotaron 360°, y debajo del pentágono 540°. El hexágono era un polígono con el cual no habían trabajado previamente, por lo que, como en las actividades anteriores, se dispusieron a medir los ángulos interiores y obtener la suma de esos ángulos. Blanca y Hugo conjeturaron que el hexágono era regular, por lo que solamente midieron un ángulo obteniendo un valor de 115°. Este valor lo multiplicaron por 6 y el valor que obtuvieron para la suma de los ángulos interiores del hexágono fue igual a 690°.

Para determinar cuántas veces era mayor la suma de los ángulos interiores del hexágono respecto a los ángulos interiores del triángulo, Blanca y Hugo dividieron la suma que habían obtenido, 690°, entre 180°. El cociente fue un valor igual a 3.83. Este valor no les satisfizo, ya que de las actividades 5 y 6 Blanca y Hugo sabían que las sumas de los ángulos interiores del cuadrilátero y del pentágono eran múltiplos de la suma de los ángulos interiores del triángulo y, por tanto, conjeturaron que la suma de los ángulos interiores del hexágono también debía ser múltiplo de la suma de los ángulos interiores del triángulo.

Convencidos de que habían cometido un error al medir el ángulo sobre el cual basaron su cálculo, Blanca y Hugo volvieron a medir con más cuidado y obtuvieron un valor de 120°, que al multiplicarlo por 6, dio un valor igual a 720° para la suma de los ángulos interiores del hexágono. El nuevo valor de 720° lo dividieron entre 180° y obtuvieron un cociente igual a 4. Este resultado apoyaba la conjetura de Blanca y Hugo de que la suma de los ángulos interiores del hexágono debía ser un múltiplo de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, lo que les dio la certeza de que el valor de 720° que habían obtenido para la suma de los ángulos interiores del hexágono era el correcto.

Con base únicamente en el hexágono proporcionado en la hoja impresa de la actividad 7, Blanca y Hugo establecieron que la suma de los ángulos interiores de todos los hexágonos era igual a 720°.

Una vez que tuvieron las cuatro sumas de los ángulos interiores de los cuatro polígonos, Blanca reconoció un patrón en las figuras y se lo comentó a Hugo, quien estuvo de acuerdo. El patrón que Blanca reconoció quedó plasmado en la respuesta que proporcionaron a la pregunta de la comparación de las sumas de los ángulos interiores de un eneágono y de un triángulo:

Que por cada lado más que tenga un polígono va a dar 180° más.

Alumnos de tercer grado

Como ya se ha mencionado Jair, la pareja de Omar, no asistió a la segunda sesión de trabajo, razón por la cual la descripción de las actividades en el caso de Omar, se refieren únicamente al trabajo realizado por éste.

A diferencia de los alumnos de segundo grado, ninguno de los alumnos de tercer grado recurrió a la medición o al cálculo de la suma de los ángulos interiores de los polígonos. Fue la triangulación de los polígonos el medio exclusivo del cual los alumnos de tercer grado se valieron para responder la pregunta de la comparación de las sumas de los ángulos interiores de un eneágono y un de triángulo. Así, la pareja integrada por Nancy y Carlos utilizó a la triangulación para encontrar la suma de los ángulos interiores del octágono que propusieron. Las demás parejas utilizaron la triangulación para comprobar las sumas de los ángulos interiores de los polígonos proporcionados en la hoja impresa de la actividad 7.

De Omar y las cinco parejas observadas, solamente la pareja integrada por Ximena y Fernando no planteó una conjetura que orientara su trabajo en la actividad. En el caso de los alumnos de tercer grado se pudo identificar el planteamiento de dos de las tres conjeturas expuestas para el caso de los alumnos de segundo grado. La primera referente a que la suma de los ángulos interiores de los hexágonos era igual a

720°, identificada en la pareja formada por Blanca y José. La segunda, relativa a que por cada lado que se aumentaba a un polígono, se aumentaba en 180° la suma de sus ángulos interiores, identificada también en la pareja compuesta por Blanca y José.

También se identificaron otras conjeturas. Así, la pareja de Daniela y Juan planteó que la suma de los ángulos interiores de un eneágono dependía de la cantidad de triángulos en los que se dividía ese eneágono. Omar propuso que debía haber una constante en los lados de cada figura. La pareja de Paola y Emmanuel planteó que la suma de los ángulos interiores del hexágono debía ser el cuádruplo de la suma de los ángulos interiores del triángulo. Nancy y Carlos propusieron que la suma de los ángulos interiores de un octágono se podía obtener por triangulación, y la pareja integrada por Blanca y José planteó que la suma de los ángulos interiores de un eneágono se obtenía multiplicando *n* por 180°

Daniela y Juan

Daniela y Juan concluyeron que la suma de los ángulos interiores del eneágono iba en aumento y que dependía de la cantidad de triángulos en los que se podía dividir el polígono, y así lo escribieron:

> *Va en aumento dependiendo en cuántos triángulos se pueda dividir el polígono siempre que no sea el mismo número de lados del polígono.*

En la redacción de su respuesta, Daniela y Juan dejan explícito que fue la triangulación de los polígonos el medio principal con el cual alcanzaron conclusiones para responder la pregunta de la comparación de las sumas de los ángulos interiores de un eneágono y de un triángulo. Y aunque manifestaron la restricción de no tener en una triangulación la misma cantidad de triángulos que de lados, en plática con el investigador esa situación no fue restringida, al punto de que sirvió de base a esta pareja para plantear la fórmula matemática de la suma de los ángulos interiores de un polígono.

Daniela y Juan manifestaron que había dos formas de triangular un polígono para obtener la suma de sus ángulos interiores. La primera forma que Daniela y Juan mencionaron fue retomada de las explicaciones de las demás parejas en las sesiones de discusión:

> Por ejemplo, un cuadrilátero se puede dividir en dos triángulos. Eso da 360°, que sería el doble de ciento ochenta. Después, un pentágono se divide en tres triángulos y da quinientos cuarenta. Y así van sucesivamente. Por ejemplo el hexágono se divide en cuatro triángulos y la suma da setecientos veinte.

Como Daniela y Juan no triangularon los polígonos de esta manera, no pudieron darse cuenta de que los triángulos que resultaban de la triangulación se podían obtener restándole 2 al número de lados del polígono.

La segunda forma en la que se podía triangular un polígono, descrita por Daniela y Juan, se basa en su trabajo, ya que ellos procedieron de esa manera:

> Hay una segunda manera de sacarlo. La segunda manera sería dividiendo el polígono dependiendo los lados que tenga, y a eso la suma de lo que salga se le restarían trescientos sesenta. Por ejemplo, éste es un hexágono, da ciento ochenta por seis, pero se le restarían trescientos sesenta. Y la razón sería el punto de unión porque aquí se forma completamente un círculo y esta medida de los ángulos no nos sirve. Entonces sería más sencillo por esta manera.

Para estos alumnos fue más sencillo triangular el polígono de la segunda manera, ya que fue resultado de su trabajo.

Ximena y Fernando

Las respuestas que Ximena y Fernando escribieron a las preguntas de la comparación de las sumas de los ángulos interiores de un cuadrilátero y de un pentágono respecto a la suma de los ángulos interiores de un triángulo en las actividades 5 y 6 retomaron las triangulaciones que hicieron de esos polígonos. Así, en la actividad 5, Ximena y Fernando escribieron que la suma de 360° resultaba de dividir en dos triángulos al cuadrilátero y en la actividad 6 escribieron que la suma de 540° era consecuencia de los tres triángulos en que quedó dividido el pentágono.

Como la suma de los ángulos interiores del eneágono dependía de los triángulos en que quedara dividido, a Ximena y Fernando se les complicó proporcionar una respuesta a la pregunta de comparación de esa suma con la suma de los ángulos interiores de un triángulo, ya que no pudieron establecer en cuántos triángulos quedaba dividido el eneágono.

Sabían de los resultados obtenidos en las actividades 5 y 6 que los cuadriláteros se triangulaban con dos triángulos y que los pentágonos se triangulaban con tres triángulos, y verificaron nuevamente estas triangulaciones con el cuadrilátero y el pentágono proporcionados en la hoja impresa de la actividad 7. El hexágono era una figura con la que no habían trabajado, así que la triangularon con tres diagonales, las cuales dividieron al hexágono en cuatro triángulos.

Con base en estos resultados Ximena y Fernando establecieron que la suma de los ángulos interiores del eneágono dependía del polígono y de su cantidad de lados, y así lo manifestaron por escrito:

Puede variar, pues los lados que te den de un polígono no siempre van a ser los mismos.

Nancy y Carlos

Aunque Nancy y Carlos en las actividades 3, 5 y 6 habían obtenido las sumas de los ángulos interiores del triángulo, el cuadrilátero y el pentágono respectivamente, no retomaron los resultados de ese trabajo previo e iniciaron la actividad 7 midiendo los ángulos interiores del triángulo proporcionado en la hoja impresa de la actividad y triangulando el cuadrilátero, el pentágono y el hexágono, también proporcionados en la misma hoja impresa de la actividad 7.

Nancy y Carlos tenían dudas de las triangulaciones que habían efectuado en los polígonos, ya que en la actividad 6 habían triangulado el pentágono en cinco triángulos y a la suma que obtuvieron de multiplicar 5 por 180°, debieron restarle 360° porque había cinco ángulos adicionales en el centro del pentágono, que no formaban parte de los ángulos interiores del pentágono. Esta dificultad se repitió con el cuadrilátero, ya que trazaron dos diagonales que dividieron al cuadrilátero en cuatro triángulos. En plática con el investigador, Nancy y Carlos se dieron cuenta de que la división que habían hecho del cuadrilátero de la actividad 7 en cuatro triángulos presentaba la misma situación que la división que habían hecho del pentágono de la actividad 6, había que restarle también 360°, ya que en el centro del cuadrilátero había cuatro ángulos adicionales que no formaban parte de los ángulos interiores del cuadrilátero.

Nancy y Carlos se dieron cuenta de que las diagonales que trazaran en los polígonos no debían intersecarse, ya que de lo contrario obtendrían sumas de los ángulos interiores a las que deberían restar 360°, por haber ángulos de más en el centro del polígono. Así, en el pentágono trazaron dos diagonales que lo triangularon en tres triángulos y en el hexágono trazaron tres diagonales que lo triangularon en cuatro triángulos.

Para dar respuesta a la pregunta de la comparación de las sumas de los ángulos interiores de un eneágono y de un triángulo, Nancy y Carlos decidieron que como un eneágono podía ser cualquier polígono, su eneágono sería un octágono (n = 8 lados). La suma de los ángulos interiores del octágono la obtuvieron con ayuda de la triangulación. La respuesta que escribieron en la hoja de la actividad explica cómo obtener la suma de los ángulos interiores del octágono:

Un eneágono puede ser cualquier polígono con cualquier número de lados. Tomamos como base un octágono, el cual dividimos en seis triángulos. Como en cada triángulo sus ángulos interiores miden 180°, lo multiplicamos por 6 y da 1080°.

Blanca y José

Blanca y José, con base en los resultados de las sumas de los ángulos interiores del triángulo, el cuadrilátero y el pentágono, determinaron que la suma de los ángulos interiores del eneágono dependía del número de lados del polígono y lo expresaron de la siguiente manera:

> Por cada lado [que tenga de más un eneágono respecto al triángulo] se duplica el valor [de la suma de los ángulos interiores] del triángulo. O sea, [la suma de] los ángulos interiores de un triángulo siempre va a dar ciento ochenta [grados]. Los de un cuadrilátero dan trescientos sesenta, o sea, el doble de un triángulo. Los de un pentágono dan quinientos cuarenta, el triple de los de un triángulo. Así, por cada lado que se vaya agregando, se van agregando otros ciento ochenta grados más a la figura.

Apoyándose en esta idea, José conjeturó que la suma de los ángulos interiores del hexágono proporcionado en la hoja impresa de la actividad debía ser igual a 720°. Para verificar este valor, Blanca y José triangularon el hexágono. Una vez que fue verificado el valor de la suma de los ángulos interiores del hexágono, Blanca y José redactaron una respuesta a la pregunta de la comparación de las sumas de los ángulos interiores de un eneágono respecto a un triángulo:

> *El patrón de medida sería 180°, por lo que cuando*
>
> *se aumenta un lado a una figura, aumentan 180°.*

Blanca y José conjeturaron que la suma de los ángulos interiores de un eneágono se obtenía del producto entre la cantidad de lados del polígono y 180°. Esta conjetura no fue probada por esta pareja con los resultados de las sumas de los ángulos interiores del cuadrilátero, del pentágono o del hexágono, y la asumieron como verdadera. Cuando el investigador preguntó cuanto valía la suma de los ángulos interiores de un decágono, José multiplicó 180° por 10 lo que le dio un valor igual a 1800°.

Omar

Una vez que Omar tuvo la hoja impresa de la actividad 7, escribió junto al triángulo el valor de la suma de sus ángulos interiores, 180°. A un lado del cuadrilátero escribió la expresión aritmética 180° x 2 y el resultado de esa operación, 360°. Contiguo al pentágono escribió la expresión aritmética 180° x 3, así como el resultado de esa operación, 540°. Omar conjeturó que los demás polígonos debían cumplir con este patrón. Así que junto al hexágono proporcionado en la hoja impresa escribió la expresión aritmética 180° x 4 y el resultado de esa operación, 720°. Además también escribió los valores de las sumas de los ángulos interiores del heptágono, el octágono, el nonágono y el decágono y dejó por escrito la idea de que la serie continuaba indefinidamente con la expresión “y así sucesivamente.”

Una vez que Omar hubo escrito las sumas de los ángulos interiores del eneágono desde n = 3 hasta n = 10, comenzó a buscar la manera de generalizar la cantidad de triángulos en los que se podía triangular un eneágono y planteó la conjetura (“teoría” la llamó Omar) de que debía haber una constante en los lados de cada figura geométrica. Después de un rato y habiendo analizado sus resultados, se dio cuenta de que la constante de que hablaba, era la diferencia entre la cantidad de lados del eneágono y 2, ya que esa diferencia era igual a la cantidad de triángulos en los que quedaba dividido el eneágono.

En su respuesta a la pregunta de la comparación de las sumas de los ángulos interiores de un eneágono respecto a un triángulo, Omar retomó su conjetura:

> *Los lados que tenga dicha figura o polígono debe ser constante en cada figura por sus lados y es la suma o multiplicación de 180° y de los lados se restan 2 y se multiplica por 180°.*

Paola y Emmanuel

Paola y Emmanuel conjeturaron que la suma de los ángulos interiores del hexágono proporcionado en la hoja impresa de la actividad debía ser el cuádruplo de la suma de los ángulos interiores del triángulo. Esta conjetura fue resultado del reconocimiento de un patrón en las sumas de los ángulos interiores del triángulo, del cuadrilátero y del pentágono. Así, Paola y Emmanuel sabían que la suma de los ángulos interiores del triángulo era igual a 180°; que la suma de los ángulos interiores del cuadrilátero era el doble que la del triángulo, es decir 360°, porque los cuadriláteros se triangulaban con dos triángulos, y que la suma de los ángulos interiores del pentágono era el triple que la del triángulo, es decir 540°, porque los pentágonos se triangulaban con tres triángulos. Siguiendo el patrón, Paola y Emmanuel conjeturaron que "éste [el triángulo] es de ciento ochenta. Éste, como es un cuadrilátero, es 360°, éste [el pentágono] sería el triple y éste [el hexágono] tendría que ser el cuádruplo" porque "se divide éste [el hexágono] en cuatro triángulos". Paola y Emmanuel comprobaron su conjetura triangulando el cuadrilátero, el pentágono y el hexágono en la hoja impresa de la actividad 7.

Para responder a la pregunta de cómo era la suma de los ángulos interiores del eneágono con respecto a la suma de los ángulos interiores del triángulo, Paola y Emmanuel generalizaron el patrón de los triángulos restándole 2 al número de lados del polígono: "Le restas 2 y son los triángulos que caben en él". La redacción final de esta generalización es la respuesta a la pregunta de la comparación de las sumas:

Dependiendo de los lados que tenga [el eneágono]*,* *se le resta 2 a ese valor y nos deja el total de triángulos.*

Generalización inductiva del teorema de la suma de los ángulos interiores de un polígono y su fórmula matemática

En el cuadro 4.2 se muestran las diferentes fórmulas producidas por los alumnos en la resolución del problema de la generalización de la suma de los ángulos interiores de un eneágono. Cinco de las seis parejas de segundo grado y tres de las seis parejas de tercer grado llegaron a una fórmula correcta. De las seis parejas de segundo grado, cuatro llegaron a la solución $(n - 2) \times 180°$. En el caso de las parejas de tercer grado, solamente dos llegaron a la misma solución. Después de la discusión grupal sobre la forma en que resolvieron el problema de la generalización, verificándose y comparándose las fórmulas de todas las parejas, una pareja de segundo grado y una pareja de tercer grado modificaron su fórmula original.

Cuadro 4.2. Fórmulas matemáticas producidas por los alumnos para obtener la suma de los ángulos interiores de un eneágono

Pareja		
Segundo grado	Fórmula planteada	Fórmula planteada después de la discusión grupal
Wendy [y Mario]	$(n - 2)\ 180°$	
Karen e Irving	$y = (n - 2)\ (180°)$	
Blanca y Hugo	$n = (L – 2) \times 180°$	
Denisse y Edmundo	$180°\ (n - 3)$	$180°\ (n - 2)$

Cuadro 4.2. (Continuación)

Pareja		
Segundo grado	Fórmula planteada	Fórmula planteada después de la discusión grupal
Elisa y Alexis	180° (número de triángulos formados)	
Lilian y Esteban	$n - 2 = m$ (180°)	
Tercer grado		
Nancy y Carlos	Sin fórmula	
Ximena y Fernando	Sin fórmula	
Omar	n = (*Número de lados* − 2) x 180°	
Paola y Emmanuel	$n = (n - 2)$ (180°)	
Daniela y Juan	(n • 180°) − (360°)	
Blanca y José	(n)(180°)	(n − 2) (180°)

Alumnos de segundo grado

Como ya se mencionó, Wendy y Mario se dividieron el trabajo planteado en las hojas impresas de la actividad 7. Wendy fue responsable de generalización la suma de los ángulos interiores de un polígono y su fórmula matemática. Así que la descripción de las actividades se refiere únicamente al trabajo realizado por Wendy.

Wendy y las cinco parejas de segundo grado generalizaron y escribieron una fórmula para el teorema de la suma de los ángulos interiores de un polígono. De las seis fórmulas escritas, tres de ellas son del tipo (n − 2) x 180°, y las tres fórmulas restantes son (n − 3) x 180°, 180° x (número de triángulos formados) y n − 2 = m x (180°).

Las fórmulas de tipo (n − 2) x 180° fueron producidas por Wendy y las parejas integradas por Karen e Irving, y Blanca y Hugo. Estos alumnos no presentaron problemas particulares para reconocer el patrón de los triángulos formados en el polígono respecto al número de lados del polígono. Una vez reconocido este patrón, pudo ser generalizado y expresado matemáticamente con fórmulas casi idénticas, en el caso de Wendy, idéntica a la fórmula *(n − 2)* x 180°.

La fórmula (n − 3)180° fue producida por Denisse y Edmundo, quienes se basaron en la idea de que cada lado que se aumentaba a un polígono después del triángulo, sumaba otros 180° a la suma de sus ángulos interiores con respecto al triángulo. Así, según Edmundo, se debía restar 3 a la cantidad de lados, ya que 3 eran los lados del triángulo y el resultado eran los lados de más que tenía el eneágono con respecto al triángulo. En la discusión grupal, Denisse y Edmundo probaron, a insistencia de Karen, su fórmula con los valores de las sumas de los ángulos interiores del cuadrilátero y del pentágono; al ver que la fórmula no daba los valores esperados, la corrigieron para dejarla finalmente como (n − 2)180°.

Elisa y Alexis, al trabajar en las actividades 5, 6 y 7, utilizaron la medición y el cálculo como método con el cual validaron todas las sumas de los ángulos interiores de los polígonos. Esta pareja fue la principal detractora de la triangulación, ya que no la consideraban un medio confiable para obtener la suma de los ángulos interiores de un polígono; según estos alumnos, un polígono podía triangularse con cuantos triángulos se quisiera. Así, cuando se vieron en la necesidad de llenar la columna del número de triángulos formados en el cuadro proporcionada en la hoja impresa de la actividad 7, no pudieron reconocer el patrón entre el número de lados del polígono y el número de triángulos formados, ni generalizarlo, quedando su fórmula como 180° (número de triángulos formados).

A pesar de que Lilian y Edmundo se sabían de memoria el enunciado del teorema de la suma de los ángulos interiores de un polígono, por sus clases de matemáticas, y recurrir constantemente a este teorema en las actividades 5, 6 y 7 para calcular las sumas de los ángulos interiores del cuadrilátero, el pentágono, el hexágono y el heptágono, no pudieron generalizar a partir del trabajo con las actividades propuestas ni traducir la enunciación del resultado a la expresión matemática $(n - 2)180°$. La fórmula que produjeron fue $n - 2 = m\ (180°)$, donde m es la cantidad de triángulos formados dentro del polígono después de triangularlo.

Alumnos de tercer grado

A diferencia de los alumnos de segundo grado, dos de las parejas de los alumnos de tercer grado, las integradas por Nancy y Carlos, y Ximena y Fernando, no pudieron producir una fórmula de la generalización de la suma de los ángulos interiores de un polígono. De las cuatro fórmulas producidas por los alumnos, dos son del tipo $(n - 2)\ 180°$ y las otras dos son $(n \bullet 180°) - (360)$ y $(n)(180°)$.

Las fórmulas de tipo (n − 2) 180° fueron producidas por Omar y la pareja de Paola y Emmanuel. Estos alumnos, al igual que los alumnos de segundo grado, no presentaron problemas particulares para reconocer el patrón de los triángulos formados en el polígono respecto a su número de lados, ni para generalizarlo, por lo que las fórmulas que produjeron son casi idénticas a la fórmula (n − 2) 180°.

La fórmula (n • 180°) − (360°), en donde n es el número de lados del polígono, producida por Daniela y Juan, puede considerarse correcta. Esta fórmula tuvo su origen en el modo en que esta pareja trianguló los polígonos. Daniela y Juan triangularon los polígonos tomando como punto de inicio el centro de cada polígono y de ahí trazaron segmentos de recta a cada uno de los vértices del polígono, con lo que obtuvieron la misma cantidad de triángulos que de lados. Se dieron cuenta de que los ángulos del centro del polígono, de donde partían todas los segmentos, formaban una circunferencia, la cual no era parte de los ángulos interiores del polígono, por lo que esta medida debía restarse.

La fórmula (n)(180°), que produjo la pareja de Blanca y José, tuvo el mismo origen que la fórmula que produjeron Daniela y Juan, sólo que en el caso de Blanca y José no se dieron cuenta de que debían restar la circunferencia formada en el centro del polígono. En la discusión grupal, José probó, a insistencia de Omar, su fórmula con los valores de las sumas de los ángulos interiores del cuadrilátero y del pentágono, y al ver que la fórmula no daba los valores esperados, la corrigió para dejarla finalmente como (n − 2) 180°.

Tipos de validaciones

En esta parte se evidenciará la diferencia importante que existe entre la imagen que pueden causar las producciones escritas de los alumnos y la realidad de los procesos de validación realizados en las sesiones de trabajo.

Esta investigación retoma las categorías ideadas por Harel y Sowder (1998) como parte de un estudio en el que se indagaba acerca de los esquemas personales de validación de alumnos de bachillerato. Harel y Sowder establecieron que "Un esquema personal de validación de una persona consiste en lo que persuade y convence a esa persona", y clasificaron estos *esquemas personales de validación* en: esquemas de *convicción externa*, *empíricos* y *analíticos*. Cada uno de ellos se subdivide en varias clases, las principales de las cuales se citan en el cuadro 4.3.

Cuadro 4.3. Esquemas personales de validación, según Harel y Sowder.

Esquemas personales de validación		
De convicción externa	Empíricos	Analíticos
Rituales Autoritarios Simbólicos	Inductivos Perceptuales	Transformacionales Axiomáticos

Para analizar las respuestas de los alumnos que participaron en esta investigación educativa, se adaptó la clasificación anterior, suprimiendo las subcategorías innecesarias, definiendo nuevas subcategorías. Así, entre los esquemas *empíricos* se introducen los *experimentales*, porque se han encontrado alumnos que precisan de la manipulación física para llevar a cabo su argumentación. Según las características del procedimiento que utilicen, estos últimos esquemas se dividen en experimental *estático* y *dinámico*. Los esquemas *inductivos* se clasifican atendiendo a la base que utilizan los alumnos: basados en ejemplos –el alumno emplea uno o más ejemplos para convencerse a sí mismo–; o basados en procedimientos –el alumno valida con el planteamiento de uno o varios procedimientos de resolución, los cuales al arrojar el mismo resultado convencen al alumno y lo ayudan a convencer a los otros–. Como resultado se tiene el cuadro 4.4.

Cuadro 4.4. Esquemas personales de validación utilizados en esta investigación.

<table>
<tr><td colspan="4">Esquemas personales de validación</td></tr>
<tr><td>De convicción externa</td><td colspan="2">Empíricos</td><td>Analíticos</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Autoritarios
Simbólicos</td><td colspan="2">Experimentales</td><td rowspan="5">Transformacionales
Axiomáticos</td></tr>
<tr><td>Estáticos</td><td>Dinámicos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Inductivos</td></tr>
<tr><td>Con base en ejemplos</td><td>Con base en procedimientos o falsamente inductivos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Perceptuales</td></tr>
</table>

En el cuadro 4.5 se presenta una imagen global de los diferentes tipos de validaciones encontrados.

Cuadro 4.5. Tipos de validaciones

		Procesos de validación de Convencimiento externo		Procesos de validación Empíricos			Procesos de validación Analíticos	
Pseudónimos de los estudiantes	Actividades	Autoritaria	Simbólica	Experimentales	Inductivos	Perceptuales	Transformacional	Axiomática
Segundo grado								
Denisse y Edmundo	1			X				
	2		X					
	3	X		X				
	5	X		X				
	6					X		
Wendy y Mario	1			X				
	2		X					
	3		X					
	5			X				
	6			X				

Cuadro 4.5. Tipos de validaciones (Continuación)

		Procesos de validación de Convencimiento externo		Procesos de validación Empíricos			Procesos de validación Analíticos	
Pseudónimos de los estudiantes	Actividades	Autoritaria	Simbólica	Experimentales	Inductivos	Perceptuales	Transformacional	Axiomática
Karen e Irving	1			X				
	2		X					
	3	X		X				
	5			X	X			
	6			X		X		
Elisa y Alexis	1			X				
	2		X					
	3			X				
	5			X				
	6			X				

Cuadro 4.5. Tipos de validaciones (Continuación)

		Procesos de validación de Convencimiento externo		Procesos de validación Empíricos			Procesos de validación Analíticos	
Pseudónimos de los estudiantes	Actividades	Autoritaria	Simbólica	Experimentales	Inductivos	Perceptuales	Transformacional	Axiomática
Lilian y Esteban	1			X				
	2		X					
	3	X		X				
	5			X				
	6	X		X				
Blanca y Hugo	1			X				
	2		X					
	3	X		X				
	5			X	X			
	6			X				

Cuadro 4.5. Tipos de validaciones (Continuación)

		Procesos de validación de Convencimiento externo		Procesos de validación Empíricos			Procesos de validación Analíticos	
Pseudónimos de los estudiantes	Actividades	Autoritaria	Simbólica	Experimentales	Inductivos	Perceptuales	Transformacional	Axiomática
Tercer grado								
Daniela y Juan	1			X				
	2							
	3	X		X				
	5	X						
	6				X			
Ximena y Fernando	1							
	2							
	3	X		X				
	5			X				
	6					X		

Cuadro 4.5. Tipos de validaciones (Continuación)

Pseudónimos de los estudiantes	Actividades	Procesos de validación de Convencimiento externo		Procesos de validación Empíricos			Procesos de validación Analíticos	
		Autoritaria	Simbólica	Experimentales	Inductivos	Perceptuales	Transformacional	Axiomática
Nancy y Carlos	1			X				
	2							
	3	X		X				
	5			X				
	6					X		
Blanca y José	1							
	2							
	3			X				
	5				X		X	
	6			X				

Cuadro 4.5. Tipos de validaciones (Fin)

		Procesos de validación de Convencimiento externo		Procesos de validación Empíricos			Procesos de validación Analíticos	
Pseudónimos de los estudiantes	Actividades	Autoritaria	Simbólica	Experimentales	Inductivos	Perceptuales	Transformacional	Axiomática
Paola y Emmanuel	1							
	2							
	3	X		X				
	5			X				
	6			X				
Omar y Jair	1							
	2							
	3	X						
	5			X	X			
	6			X				

A continuación se presenta el análisis detallado de los procesos de validación identificados en los sujetos que participaron en esta investigación, organizándolos alrededor de los esquemas de validación.

Procesos de validación de convencimiento externo

Esta categoría corresponde a los procesos de validación en los que se hace uso de un esquema personal de validación de convencimiento externo; en estos procesos los estudiantes se convencen a sí mismos o convencen a otros utilizando una fuente exterior a ellos. Los procesos de validación de convencimiento externo se dividen en autoritarios y simbólicos.

Autoritarios

Son procesos de validación en los que la convicción deriva de una autoridad, la cual puede ser un libro de texto, una guía de estudio o una persona, tal como el profesor.

De las doce parejas participantes se observó que, a excepción de las parejas formadas por los alumnos de segundo grado Wendy y Mario, Elisa y Alexis, y la pareja de alumnos de tercer grado, Blanca y José, exteriorizaron una fuente de autoridad externa en la actividad 3 y dos parejas volvieron a citar una fuente externa (Denisse y Edmundo, alumnos de segundo grado, en la actividad 5; Daniela y Juan, alumnos de tercer grado, en la actividad 6). Las parejas que se basaron en una autoridad como medio de validación, se refirieron en primer lugar al maestro y a una ley establecida; en segundo lugar, a un libro o a una guía (en este caso, de preparación para el examen de colocación a la educación media superior), y en tercer lugar, a un compañero. Como se puede notar, las autoridades a las que hacen referencia los alumnos se encuentran exclusivamente en la escuela.

En los casos en que la validación tuvo como fuente una ley establecida, los alumnos recurrieron al paso del tiempo para reafirmar su convicción, y ante la cuestión de por qué se le debía creer a esa ley, Edmundo, alumno de segundo grado, contestó: “Pues sí porque ya lleva muchos años como ley entonces ya se comprobó muchas veces”. A su vez, ante la misma pregunta, Omar, alumno de tercer grado, dio esta respuesta: “Pues sí, han pasado muchos años y siguen creyendo lo mismo. Sí”.

En varios casos se observó que la validación basada en la autoridad sirvió a las parejas como medio de verificación, como el fiel de una balanza contra el cual contrastar los resultados que se obtuvieron por otro medio. Así, se tuvo a Juan, quien en la actividad 6 referida a la suma de los ángulos interiores de un pentágono, ante el resultado de 900° que le proporcionó Daniela, como consecuencia de multiplicar 5 por 180°, no lo aceptó y le informó que había una equivocación. Al preguntar como sabían que había una equivocación, respondieron que no había salido el resultado que esperaban y, ante la cuestión de cuál era el valor que esperaban, se dio el siguiente diálogo:

Daniela: [Dirigiéndose a Juan] ¿Cuánto?

Juan: Quinientos veinticinco.

Daniela: Quinientos...veinticinco o algo.

Investigador: ¿Quinientos veinticinco?

Juan: Quinientos veinte.

Investigador: ¿Quinientos veinte?

Daniela: Quinientos veinte más o menos.

Investigador: ¿Y por qué esperabas ese valor?

Daniela: ¡No sé! Porque él [se refiere a Juan] ya lo sabía.

Investigador: [Dirigiéndose a Juan] ¿Tú ya sabías que sumaban 520°?

Juan: No me acordaba pero si en la guía [se refiere a la guía de estudio para el examen del COMIPENS] que estaba leyendo...

Investigador: ¿En la guía qué? ¿De preparación para el examen del COMIPENS? ¿Sí?

Juan: Ajá. Ahí dice que en un triángulo la suma son 180°, un cuadrado 360°, pentágono ¿qué será? 520°.

En otros casos se observó que la validación sustentada en la autoridad sirvió a las parejas como punto de referencia del cual extrajeron sus propias conclusiones por otros medios. Así, se tiene a la pareja de segundo grado integrada por Denisse y Edmundo, quienes en la actividad 5 plantearon que la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero era el doble de la suma de los ángulos interiores de un triángulo. Al cuestionárseles la fuente de dicha información, Edmundo respondió que lo había leído previamente pero no recordaba en dónde, y agregó: “Pero lo vamos a comprobar”. Al cuestionarlo respecto a cómo iban a efectuar dicha comprobación, Edmundo respondió: “Midiendo los ángulos del cuadrilátero y del triángulo y sumándolos”.

Simbólico

Los procesos simbólicos de validación están marcados por el convencimiento que emana de la manipulación simbólica de determinados conceptos, propiedades o situaciones, las cuales pueden o no tener un significado subyacente. El convencimiento simbólico fue observado especialmente en las parejas de segundo grado, como medio de validación en la actividad 2.

Validación aritmética con referencia al tamaño de las figuras

Las parejas dieron una explicación que hizo referencia al tamaño o extensión de las superficies y validaron con una secuencia de cálculo. Esta situación se pudo observar en dos parejas de segundo grado, la integrada por Denisse y Edmundo, y la formada por Karen e Irving. En ambos casos la certeza que proporcionó la manipulación aritmética es de índole distinta al planteamiento original de estas parejas. Si las parejas hubieran superpuesto el triángulo pequeño en el grande, ya sea recortándolo o trazándolo, esta acción estaría acorde con sus explicaciones.

Denisse y Edmundo

Esta pareja de segundo grado, inmediatamente después de recibir las hojas de la actividad 2, marcaron como verdadera la afirmación y comenzaron a redactar un texto (véase p. 128) donde explicando por qué lo era. Este escrito, en palabras de Edmundo, constituía la teoría, la cual tenía que ser confrontada con la práctica, es decir, debía comprobarse y, ante la pregunta de cómo comprobarla, Edmundo contestó: “Tomando las medidas del área de cada uno de los triángulos y comparándolas”. Al preguntarle cómo tomaría las medidas de esas áreas, Edmundo hizo referencia a “una fórmula matemática”. La fórmula a la que hizo referencia es “base por altura entre 2”. Así, la teoría fue contrastada con un medio práctico que no fue de la misma clase.

Karen e Irving

Esta pareja de estudiantes de segundo grado, en su explicación (véase p. 128) de por qué la afirmación de la actividad 2 era verdadera, hicieron referencia a la diferencia entre tamaños de los triángulos. Pero su convicción radicó en la manipulación aritmética, es decir, en el cálculo de las áreas de los triángulos que se proporcionaron en las hojas de la actividad. Así, después de medir base y altura de cada triángulo, determinan que el valor del área del triángulo *ABC* era de 3.99 cm^2, y que el área del triángulo *DEF* era igual a 17.5 cm^2. De la diferencia entre ellas provino su convencimiento. Pero su actuar no acabó ahí. Decididos a verificar el área del triángulo *DEF*, decidieron utilizar otra base y su correspondiente altura, pero el nuevo resultado, 13.75 cm^2, no fue el mismo que el que obtuvieron antes. Este nuevo valor era a su vez mayor que el obtenido para el triángulo *ABC*. No supieron ni pudieron explicar la diferencia, además de que tampoco pudieron decir cuál de los dos valores, 17.5 cm^2 o 13.75 cm^2, era el correcto; pero esto no menoscabó su convencimiento, cualquiera de los dos era mayor que el obtenido para el triángulo *ABC*: “Pero esto sí lo comprobamos, o sea de todas formas” (Karen).

Validación aritmética sin comprensión del concepto de área

Las parejas validan con la manipulación aritmética, pero muestran falta de significado del concepto de área. Esta condición se puede distinguir en dos parejas de segundo grado, la compuesta por Lilian y Esteban, y la constituida por Elisa y Alexis. Los ejemplos que se presentan conciernen a Lilian y Alexis, pero se hace mención de sus correspondientes parejas dado que no mostraron interés en corregir lo que sus compañeros expresaron. Aunque Lilian y Alexis, con sus respectivas parejas, validaron con el cálculo del área de cada triángulo y su consecuente comparación para determinar cuál de los dos era el mayor, cuándo se les presentaron dos triángulos con la misma área pero distinta forma, manifestaron que los tamaños eran diferentes pero que el área era la misma, mostrando una falta comprensión del significado de área. Así, Lilian señaló: “¡Bueno es la misma área! Y añadió: “pero diferente tamaño”. Por su parte, Alexis indicó: “Éste aunque sea más grande tiene la misma área que el pequeño”.

Otras posibles explicaciones sobre esta situación son o que ambos alumnos confundieron la forma de un triángulo con su tamaño o que el tamaño de un triángulo para estos alumnos esté determinado por la longitud de los lados de cada triángulo.

Validación aritmética sin referencia al área

Las parejas validaron únicamente con la manipulación aritmética sin referencia al concepto de área. Los ejemplos que corresponden a la validación que se basó esencialmente en la utilización de la fórmula de la obtención del área de un triángulo, se pueden observar en las parejas de segundo grado integradas por Wendy y Mario, y Blanca y Hugo.

Wendy y Mario

La convicción de Wendy y Mario se debió a la obtención de dos valores numéricos por medio del cálculo y su posterior comparación. Estos valores eran lo que importaba para estos alumnos dado que se obtuvieron de sus cálculos; pero no corresponderían a las medidas de las áreas de los dos triángulos en las hojas de la actividad 2. Tuvieron presente la fórmula para calcular el área y la recitaron sin problema al preguntárselas. Sabían que necesitaban las longitudes de la base y la altura para sustituirlas y efectuar el cálculo, pero al realizar las mediciones de los dos triángulos, la pareja no supo obtener la altura que correspondía a una base determinada. Así, midieron las longitudes de los tres lados de cada triángulo y, al cuestionarles sobre las bases y sus alturas correspondientes que iban a tomar en cuenta en cada cálculo, Wendy indicó que para el triángulo *ABC* la base era el lado *BC* y su altura correspondiente era el lado *AC*. En el triángulo *DEF*, Wendy señaló el lado *EF* como base y mostró indecisión con la altura, dado que señaló los dos lados *DE* y *DF* como alturas. Para el triángulo *ABC* calcularon un área de 4.82 cm^2, la cual fue el resultado de multiplicar la longitud del lado *BC*, 3.7, por la longitud del lado *AC*, 2.7, y posteriormente dividir el producto, 9.64, entre 2. Para el triángulo *DEF*, ante la indecisión de cuál era la altura, efectuaron una multiplicación con las longitudes de los tres lados del triángulo. De este modo, multiplicaron 9, que era la longitud del lado *DF*, por 11, que era la longitud del lado *DE*, y este producto por 3.5, que era la longitud del lado *EF*. Posteriormente dividieron el producto entre 2. El valor que obtuvieron de estas operaciones fue de 173.25.

Al comparar los valores obtenidos de ambos cálculos, 4.82 y 173.25, no les quedó ninguna duda de la certeza de la afirmación: “Bueno, que es verdadera” (Wendy).

Blanca y Hugo

Esta pareja también presentó dificultades para determinar la altura que correspondía a una base determinada; pero su problemática fue menos aguda que la que mostraron Wendy y Mario. Las alturas que Blanca y Hugo marcaron en cada triángulo tuvieron una característica que compartieron: escogieron el lado que sería la base, midieron y determinaron el punto medio como resultado de dividir entre 2 la longitud de la base en cuestión. Posteriormente trazaron una línea recta que tuvo por punto inicial el punto medio de la base y por punto final el vértice opuesto a la base. Con este procedimiento establecieron que para el triángulo *ABC* la base medía 3.7 cm y su altura, 2 cm; para el triángulo *DEF*, la base midió 3.5 cm y su altura correspondiente midió 10 cm. Después de sustituir estos valores en la fórmula y efectuar los cálculos numéricos, obtuvieron que la medida del área del triángulo *ABC* era igual a 3.7 cm^2 y la del triángulo *DEF* era de 17.5 cm^2. La certidumbre de la veracidad de la afirmación de que el área de un triángulo pequeño es menor que el área de un triángulo grande, provino de la comparación de los valores de áreas obtenidos. Así, Blanca respondió por qué creía que la afirmación era verdadera: “Es verdadero, pues la sustitución de la fórmula para el área en el triángulo pequeño va a ser menor que la del triángulo grande”.

Procesos de validación empíricos

En los procesos de validación empíricos la certidumbre de los alumnos se basa en la prueba y el error, en aseverar como verdad lo que obtienen como resultado de uno o varios ejemplos verificados. Los procesos de validación empíricos se escinden en experimentales, inductivos y perceptuales.

Experimentales

Atañen al proceso de validación en el cual los alumnos alcanzan conclusiones cuya certeza radica en la manipulación física. Según las características del procedimiento que utilicen, este esquema puede dividirse en experimental *estátic*o y experimental *dinámic*o.

Experimental estático

La categoría se refiere al proceso de validación en el que los estudiantes consideraban a la medición como una fuente de certidumbre para alcanzar conclusiones ciertas. Este proceso de validación fue bastante utilizado por las parejas de estudiantes de ambos grados, pudiéndose observar que en distintas actividades recurrieron a este proceso de validación como comprobación deductiva escrita. Es así como en las actividades 1, 3, 5 y 6 se pudo observar que las parejas recurrieron a la medición como medio de validación.

En la actividad 1, cinco de las seis parejas de segundo grado, con excepción de Elisa y Alexis, y dos de las seis parejas de tercer grado, las formadas por Daniela y Juan, y Nancy y Carlos, al validar que el perímetro de un triángulo pequeño era menor que el perímetro de otro triángulo mayor, midieron con regla o escuadras graduadas las longitudes de los lados de cada triángulo. Luego sumaron esos valores y los compararon para determinar cuál era mayor.

En la actividad 3 todas las parejas de segundo y de tercer grados recurrieron a la medición; en este caso de ángulos, y los sumaron llegando a resultados significativos respecto a la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

En la actividad 5, las seis parejas de segundo grado y Omar, alumno de tercer grado (Jair el compañero de Omar no asistió a la escuela el día que se desarollo la actividad 5) volvieron a considerar a la medición de los ángulos interiores, en este caso de los cuadriláteros, y el cálculo de su suma como un medio que les sirvió para validar.

En la actividad 6, cuatro parejas de segundo grado, las integradas por Wendy y Mario, Elisa y Alexis, Lilian y Esteban, y Blanca y Hugo, así como Omar, alumno de tercer grado, hicieron uso de la medición de los ángulos interiores y del cálculo aritmético para validar cuál era la suma de los ángulos interiores de un pentágono.

El proceso de validación basado en la experimentación adquirió diferentes sentidos en el trabajo realizado por las parejas, presentándose dos casos: el de las parejas que utilizaron el proceso de validación experimental estático para decidir, y el de las parejas que lo utilizaron para comprobar.

Uso del proceso de validación experimental estático como medio de decisión

Este caso se observó en dos parejas, ambas de segundo grado, la integrada por Elisa y Alexis y la formada por Wendy y Mario. En ambos casos, en la actividad 3 manifestaron primeramente su intención de medir y sumar los valores que obtuvieran de los ángulos interiores de cada triángulo como medio para poder decidir si la afirmación de la actividad era cierta o falsa. Aunque al final las dos parejas manifestaron que la afirmación era falsa, sus convicciones se dirigieron por caminos opuestos.

Elisa y Alexis

Alexis inmediatamente después de haber leído las indicaciones que se proporcionaron en las hojas de la actividad 3, le sugirió a Elisa medir los ángulos interiores de los triángulos y, ante la pregunta del investigador de para qué hacerlo, Alexis respondió que era para “Poder sacar la respuesta. Si es verdadera o si es falsa”. La respuesta por sí misma, sin el contexto del actuar de la pareja durante la actividad, sugiere que los resultados que alcanzaran serían consecuencia de lo que arrojara la experimentación, es decir, que su conclusión estaría influida por las sumas que obtuvieran de los dos triángulos proporcionados en la actividad, pero esto no fue así.

La suma que esta pareja obtuvo del triángulo *ABC* (el pequeño) fue de 180° y la suma que obtuvo del triángulo *DEF* (el grande) fue de 192°. Ante estos resultados, lo que se podría esperar es que los alumnos creyeran que habían confirmado la afirmación de la actividad 3, la cual mencionaba que la suma de los ángulos interiores de un triángulo pequeño era menor que la suma de los ángulos interiores de un triángulo grande. Sin embargo, con estos resultados la pareja manifestó sin lugar a dudas que la afirmación era falsa. Al parecer no les ocasionó ningún conflicto haber obtenido una suma menor en el triángulo chico que la que obtuvieron en el triángulo grande. ¿Por qué entonces esta pareja asegura que la afirmación es falsa a pesar de haber obtenido resultados que indican lo contrario? Esto se aclara con la explicación que proporcionaron Elisa y Alexis por escrito, y con los comentarios que hicieron al investigador durante el desarrollo de la actividad. La explicación escrita fue: “Porque todos los ángulos interiores de un triángulo miden 180°”; en la que, aunque al inicio de la actividad mencionaron que iban a medir y sumar los ángulos interiores para decidir sobre la falsedad o certeza de la afirmación, en realidad sabían de antemano, con base en su experiencia escolar, que la suma de los ángulos interiores de un triángulo era igual a dos rectos (180°). Un comentario que apoya esta hipótesis fue el realizado por Elisa, quien después de haber medido y sumado los ángulos interiores del triángulo *ABC* comentó: “El primero sí midió 180°”. Cuando el investigador les preguntó sobre la certeza de la afirmación, Alexis categóricamente manifestó su convicción acerca de por qué la afirmación era falsa: “Porque tiene que tener, todos los triángulos miden 180°”. Cuando el investigador les hizo notar que obtuvieron una suma de ángulos interiores distinta de 180° y les preguntó a qué creían que se debía, Alexis sin vacilar respondió: “[El triángulo] debe de estar mal hecho”. Para Alexis no existía la posibilidad de que se hubiera equivocado al realizar las mediciones de los ángulos: el triángulo debía estar mal hecho porque para el no existían triángulos cuya suma de sus ángulos interiores fuera mayor que 180°.

De lo anteriormente expuesto se puede mencionar que Elisa y Alexis sabían de antemano, de sus clases de matemáticas, cuánto sumaban los ángulos interiores de un triángulo y el proceso de validación experimental estático se utilizó como medio para comprobarlo. Necesitaron sólo un ejemplo para verificarlo. El resultado que no se ajustó simplemente se desechó sin tomarlo en cuenta ni prestarle la menor importancia.

Wendy y Mario

Al igual que Elisa y Alexis, Wendy y Mario manifestaron su intención de medir los ángulos interiores de cada triángulo, para posteriormente sumar estos valores y "ver si la respuesta es verdadera o falsa". En el caso de estos alumnos, la experimentación sí dictó la conclusión a la que arribaron.

Después de medir incorrectamente los ángulos interiores de cada triángulo, determinaron que la suma de los ángulos interiores del triángulo *ABC* (el pequeño) era de 540° y que la suma de los ángulos interiores del triángulo *DEF* (el grande) era de 360°. Estos resultados contradecían la afirmación, dado que la suma de los ángulos interiores del triángulo pequeño era mayor que la suma de los ángulos interiores del triángulo grande. Como consecuencia, estos alumnos determinaron que la afirmación era falsa y lo explicaron así: "Porque a pesar de que sus lados [del triángulo *DEF*] son más grandes [con respecto a los lados del triángulo *ABC*] sus ángulos interiores son más chicos". ¿Por qué estos alumnos sí tomaron en cuenta los resultados que obtuvieron a diferencia de Elisa y Alexis? Es posible que Wendy y Mario no se acordaron de la clase en que la maestra les enseño el teorema de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, y al no tener referencia de qué era lo que podían esperar como resultado, confiaron sin dudar en los resultados que obtuvieron de su experimentación. Lo que hay que hacer notar es que esta pareja se fió plenamente del resultado que obtuvo de sólo un ejemplo, el proporcionado en las hojas de la actividad, y lo sostuvieron sin cuestionarlo.

Uso del proceso de validación experimental estático como medio comprobación

El uso de la experimentación como medio de comprobación se observa con dos sentidos distintos. El primer sentido identificado es el de *medio de validación*. El segundo sentido reconocido es el de utilizar al proceso de validación experimental estático como *instrumento de debate* entre los dos miembros de una misma pareja.

Primer sentido: Medio de verificación

Tanto las parejas de segundo, integradas por Karen e Irving, Lilian y Esteban, y Blanca y Hugo, así como las parejas de tercer grado, compuestas por Daniela y Juan, Nancy y Carlos, Ximena y Fernando, Omar y Jair, y Paola y Emmanuel, de su experiencia escolar previa manifestaron inmediatamente después de leer la afirmación de la actividad 3, que era falsa; recurrieron a la medición y suma de los ángulos interiores de cada triángulo para verificar su certidumbre. De este modo se escucharon expresiones como: “Medimos los ángulos para ver si es cierto lo que dijimos” (Daniela, alumna de tercer grado); “Checar si lo que dijimos es cierto” (Fernando, alumno de tercer grado).

Dos de las parejas de segundo grado, las formadas por Lilian y Esteban, y Blanca y Hugo, y dos de tercer grado, las integradas por Nancy y Carlos, y Paola y Emmanuel, se refirieron a esta validación como una comprobación. Así, cuando Lilian y Esteban sostuvieron que “la suma de los ángulos interiores de un triángulo siempre da 180°”, por ser “algo ya establecido”, y ante la pregunta del investigador de que mencionen quién lo estableció, Esteban respondió que no sabía, pero inmediatamente después agregó: “¡Pero si hiciéramos la prueba!” A lo cual Lilian otorgó su aprobación con un sí. Por su parte Blanca y Hugo también aseguraron que “la suma de los ángulos interiores da siempre 180°. No importa el tamaño del triángulo”. Y cuando se les preguntó como podían asegurarse de ello, Blanca señaló: “Comprobándolo con el transportador”. Así mismo, cuando el investigador se dirigió a Nancy y Carlos y les preguntó para qué medían los ángulos interiores de los triángulos, Nancy respondió: “Para comprobar”. Finalmente cuando el investigador cuestionó a Paola y Emmanuel sobre por qué creerle a su maestro de matemáticas cuando simplemente les decía que la suma de los ángulos interiores de un triángulo era 180° sin ofrecerles ninguna prueba, Paola respondió: “Ya lo comprobamos”. Ante esta respuesta el investigador indagó respecto a lo que se referían por co

mprobación, a lo cual Paola contestó que midieron con el transportador de ángulos cada ángulo interior, los sumaron y obtuvieron como resultado 180°.

El que los alumnos se refirieran a la validación como una comprobación se ve reforzado por las acciones llevadas a cabo por las parejas en la actividad 5, la cual estuvo relacionada con la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero, y en la actividad 6, la cual estuvo relacionada con la suma de los ángulos interiores de un pentágono. Los ejemplos representativos que se exponen a continuación son de dos parejas de segundo grado, las integradas por Denisse y Edmundo, y por Lilian y Esteban.

Denisse y Edmundo. Después de haber medido y sumado los ángulos interiores del cuadrilátero *ABCD* proporcionado en las hojas de la actividad 5, Edmundo comprobó lo que al inicio de la actividad sabía previamente: que la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero era igual a 360°. Al intentar explicar por qué la suma daba como resultado ese valor, se dio cuenta de que si trazaba una diagonal en el cuadrilátero se formaban dos triángulos y como la suma de los ángulos interiores de cada triángulo era de 180°, el valor de la suma de los ángulos interiores de ambos triángulos, que a su vez correspondían a los ángulos interiores del cuadrilátero, daban por resultado 360°.

Edmundo es quien introdujo la idea de triangular el cuadrilátero, pero esta triangulación la utilizó para explicar, no para validar. Cuando el investigador lo cuestionó acerca del campo de validez de la suma de los ángulos interiores de los cuadriláteros, Edmundo respondió que la suma, igual a 360°, era válida para todos los cuadriláteros. Su seguridad provino de la *comprobación* que se podía efectuar con otro cuadrilátero distinto al trabajado en la actividad, es decir, si se medían y sumaban los ángulos interiores de otro cuadrilátero, el resultado sería de 360°. La geometría métrica se impuso a la triangulación; así mediante la triangulación se explicó y mediante la medición y la suma se comprobó.

Lilian y Esteban. Lilian y Esteban en la actividad 6 sabían que la suma de los ángulos interiores de un pentágono era de 540°. Estos alumnos recordaban de la clase de matemáticas que para obtener la suma de los ángulos interiores de un polígono debían restarle 2 al número de lados del polígono, y que debían multiplicar ese resultado por 180°. Así, habiendo restado 2 a los 5 lados del pentágono, obtuvieron 3 que al multiplicarlo por 180° arrojó un valor de 540°. Lilian afirmaba, de memoria, que la resta representaba la cantidad de triángulos en los que quedaba triangulado el polígono. De este modo, para Lilian y Esteban la triangulación era un procedimiento que proporcionaba la suma de los ángulos interiores.

La medición y el cálculo, por el contrario, se erigieron como el medio que Lilian y Esteban utilizaron para validar la suma de los ángulos interiores de un polígono. Cuando estos alumnos quisieron obtener el valor de 540° midiendo y sumando los ángulos interiores del pentágono proporcionado en la hoja impresa de la actividad 6, no pudieron, a pesar de haberlo medido con esmero en varias ocasiones. En un primer intento obtuvieron una suma de 350°, en un segundo intento obtuvieron una suma de 525° y un tercer intento obtuvieron una suma de 535°, que fue lo más cercano a 540° que pudieron obtener. El no haber obtenido 540° por medición y suma, fue una cuestión que dejó con dudas a los alumnos ya que no pudieron hacer coincidir los valores obtenidos por triangulación y por medición. En este caso, la geometría métrica también se impuso a la triangulación: la triangulación se constituyó en un modo alterno para encontrar la suma de los ángulos interiores del polígono y la medición y la suma se erigieron como un medio para comprobar.

Segundo sentido: Instrumento de debate

Este sentido, como ya se apuntó, se observó en dos parejas, una de segundo grado y otra de tercer grado. El proceso de validación experimental estático se constituyó para estas parejas como un fiel de una balanza, como un elemento con la capacidad necesaria para dirimir controversias. En el caso de Denisse y Edmundo, para determinar quién de los dos tenía la razón; en el caso de Blanca y José, para determinar el campo de aplicación del teorema.

Denisse y Edmundo. Ante la afirmación de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo pequeño era menor que la suma de los ángulos interiores de un triángulo grande, estos alumnos no concordaron en sus apreciaciones. Denisse sostenía que la afirmación era verdadera y Edmundo que era falsa. Denisse planteó una explicación en la cual recurrió al área que ocupaba cada triángulo, estableciendo una relación entre el área y la suma de los ángulos de un triángulo siendo para ella lógico pensar que un triángulo que tuviera menor área tendría por consiguiente una suma también menor de sus ángulos interiores con respecto a la de un triángulo grande. Por su parte, Edmundo no explicaba, sólo recitaba algo que se tenía bien memorizado: “En todos los triángulos, si sumas sus ángulos siempre te dan 180°”. Como ambos alumnos no podían llegar a un acuerdo, dado que ninguno de los dos convencía al otro, Edmundo le preguntó a Denisse: “¿Quieres ver?” Y le propuso medir los ángulos interiores de cada triángulo y sumarlos. Después de efectuar las acciones propuestas por Edmundo, la pareja obtuvo valores de 180° para las sumas de ambos triángulos, lo que finalmente dirimió la controversia.

Blanca y José. En el caso de esta pareja de tercer grado, la controversia se presentó en el sentido de la amplitud del campo de aplicación de la afirmación. José expuso que la suma de los ángulos interiores de todo triángulo era de 180°, pero Blanca decía que la afirmación solamente era válida para los triángulos rectángulos. José aceptó con reservas esta restricción y, como no estaba convencido plenamente, le propuso a Blanca medir y sumar los ángulos interiores de los triángulos proporcionados en la actividad, que por cierto no eran triángulos rectángulos, y ver qué resultado obtenían.

Midieron y sumaron los ángulos interiores de cada triángulo y obtuvieron 180°. Este resultado confirmaba lo que José había mencionado en un principio: “Así que reanudo mi teoría, que era cierta, que la suma de todos los ángulos interiores de cada triángulo da 180°”, y refutó la restricción que Blanca había planteado.

Experimental dinámico

Esta categoría corresponde al proceso de validación que se caracteriza por recurrir al plegado o rasgado de papel. El ejemplo corresponde a la pareja de segundo grado formada por Karen e Irving, aunque tal parece que utilizar el rasgado de papel fue entendido por ellos más como un recurso didáctico empleado en el aula que como un medio confiable que proporcionara entendimiento y convencimiento.

Ante el comentario de Irving de que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo era algo que estaba establecido, el investigador lo cuestionó para saber la fuente de esta afirmación. Karen e Irving responden al unísono que dicha fuente era la maestra de matemáticas. Una vez más el investigador cuestionó a esta pareja, pero ahora la pregunta versó sobre si la maestra había comprobado esta afirmación de alguna manera. Nuevamente la pareja contestó al mismo tiempo, entablándose el siguiente diálogo entre ellos:

> Karen e Irving: Sí.
>
> Karen: Recortamos, bueno hicimos un triángulo y recortamos sus...
>
> Irving: Lo dividimos en...en tres triángulos, ¿No?
>
> Karen: Ese día yo...yo no vine a la escuela.

Investigador: (Risas)

Irving: Entonces, ¿qué hicimos?

Karen: ¡Sí! Fue cuando los recortamos.

Irving: Ahhh,...sí…recortamos los ángulos y los pegamos de tal manera que su ángulo fuera 180°.

Karen: Así como un circulito.

Irving: Ajá.

Karen: La mitad.

Una vez que entre los dos recordaron la secuencia de acontecimientos realizados en el aula, Irving reprodujo la experiencia con un triángulo de papel, indicando los pasos que iba realizando:

Irving: Hicimos como un triángulo sus... esquinas... marcando... haciendo como triangulitos chiquitos... ahhh, necesito una regla.

Investigador: Mhhh.

Irving: Quitamos sus... eh... sus ángulos interiores.

Investigador: Ajá.

Irving: Y aquí los cortamos.

Investigador:¿Y luego?

Irving: Los unimos y se supone que tiene que dar 180°.

Investigador: ¿Y cómo sé que tienen que dar 180°?

Irving: Que te da una... que te da una línea recta.

Investigador: ¿Y qué? ¿Qué tiene esa línea recta?

Irving: Este... que si lo mides... aquí un... suponiendo que aquí en el centro está el puntito que marca la división entre los ángulos...

Investigador: Ajá.

Irving: Te va a dar un ángulo de 180°.

Investigador: Entonces alinearon y forman un ángulo de 180°.

Irving: Ajá... Eso fue lo que nos explicó la maestra.

Este último comentario de Irving resume que el rasgado de papel es un recurso didáctico, utilizado por su maestra, para que con ayuda de la visualización pudieran entender. De ninguna manera esta experiencia fue utilizada por Karen e Irving como un medio que proporcionara argumentos que dieran elementos de certeza y de convencimiento.

Inductivos

En esta categoría se clasifican los procesos de validación que se sustentan en un esquema personal de validación inductivo, en los cuales los alumnos para convencerse o convencer a los demás hacen uso de la observación repetida de objetos o acontecimientos de la misma índole, estableciendo una conclusión general que es considerada como verdad. Los procesos de validación inductivos se dividen atendiendo a la base que sustenta las observaciones; así, se tienen los inductivos basados en ejemplos y los inductivos basados en procedimientos o falsamente inductivos.

Inductivos basados en ejemplos

Un alumno que utiliza un proceso de validación inductivo basado en ejemplos plantea uno o más ejemplos para convencerse a sí mismo o a otros. Estos ejemplos los considera evidencia convincente de la verdad de un caso general. Este proceso de validación se observó en dos parejas de segundo grado, las integradas por Karen e Irving, y Blanca y Hugo, así como también en Omar, alumno de tercer grado.

Con respecto a Omar y la pareja integrada por Blanca y Hugo, el proceso de validación emergió por la misma razón: validar que la suma de los ángulos interiores del cuadrilátero era variable, es decir que dependía de la forma. En el caso de Karen e Irving, el proceso se presentó al validar la conjetura de que la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero era de 360°, sin importar forma, siempre que los cuadriláteros tuvieran líneas rectas.

La manera en que procedió Omar en la actividad 5 fue similar a la manera en que procedieron Blanca y Hugo en la misma actividad. Los alumnos comenzaron midiendo los ángulos interiores del cuadrilátero proporcionado en la hoja impresa de la actividad 5, y de los valores medidos obtuvieron una suma de 280°. Para estos alumnos la suma de los ángulos interiores de los cuadriláteros era variable y dependía de la forma del cuadrilátero; para justificarlo, plantearon el ejemplo del cuadrado: los cuadrados tienen cuatro ángulos rectos, por lo que la suma de sus ángulos interiores es de 360°. En ese momento los alumnos tenían dos ejemplos que confirmaban que la suma de los ángulos interiores del cuadrilátero era variable.

Karen e Irving, por su parte, recurrieron al planteamiento de otro ejemplo para validar que la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero era de 360°. Después de medir los ángulos interiores del cuadrilátero proporcionado en la hoja impresa de la actividad 5 y rectificar dichas mediciones, Karen e Irving obtuvieron una suma de 360°. Esta suma fue cuestionada por Karen respecto al campo de validez, es decir, si dicha suma era o no válida para todos los cuadriláteros. Karen e Irving decidieron plantear otro ejemplo: trazaron un trapecio isósceles, midieron sus ángulos interiores y calcularon la suma. El resultado que obtuvieron, de 360°, les convenció de que la suma era válida para todos los cuadriláteros: “También nos dio lo mismo. Hicimos otro tipo de cuadrilátero, un trapecio, y nos volvió a dar el mismo resultado; 306°, de la suma de los ángulos interiores”.

Los ejemplos presentados de Omar, así como de Blanca y Hugo, y Karen e Irving, comparten una característica: los alumnos solamente recurrieron al planteamiento de un ejemplo adicional al proporcionado en la hoja impresa de la actividad, y con base en la observación de dos casos, generalizaron para todos los cuadriláteros.

Inductivos basados en procedimientos o falsamente inductivo

Un alumno que utiliza un proceso de validación inductivo basado en procedimientos plantea varios cálculos con un procedimiento del mismo tipo o utiliza varios procedimientos de distinta clase con los cuales, al resolver la actividad, obtiene el mismo resultado. Este tipo de validación se considera como falsamente inductivo ya que la generalización se efectuó con un solo caso analizado. El proceso de validación basado en procedimientos, o falsamente inductivo, se observó en tres parejas de tercer grado: las integradas por Daniela y Juan, Nancy y Carlos, y Blanca y José cuando validaban la suma de los ángulos interiores de un pentágono planteada en la actividad 6.

En los casos de Daniela y Juan, y Nancy y Carlos, su proceso de validación tuvo como base un único procedimiento: la triangulación del pentágono en tres y cinco triángulos. En el caso de Blanca y José, el proceso de validación se basó en cuatro procedimientos distintos: análisis lógico, medición y suma, triangulación, e igualdades de triángulos formados por dos rectas paralelas cortadas por un transversal.

Procedimientos del mismo tipo o clase

El modo en que procedieron Daniela y Juan, y Nancy y Carlos, fue el mismo, ejemplificándose este actuar con la descripción de las actividades realizadas por Daniela y Juan. Para Daniela y Juan la suma de los ángulos interiores de un pentágono era variable. Esta afirmación la sustentaron después de haber obtenido dos valores distintos para dicha suma utilizando un mismo procedimiento: la triangulación.

La primera triangulación fue efectuada por Daniela, quien partiendo del centro del pentágono trazó segmentos de línea a cada uno de los cinco vértices del pentágono, con lo que obtuvo 5 triángulos iguales. Al multiplicar 180° (que correspondía a la suma de los ángulos interiores de cada triángulo) por 5 (por ser 5 triángulos en los que dividió el pentágono), obtuvo una suma de 900°.

La segunda triangulación les dio una suma de 540°. En esta triangulación Daniela y Juan trazaron las diagonales *EC* y *AC*, las cuales dividieron al pentágono en 3 triángulos.

De las dos sumas, la de 900° y la de 540°, ambas obtenidas por triangulación, Daniela y Juan se convencieron de que la suma de los ángulos interiores de un pentágono era variable y dependía de los triángulos en que se dividiera al pentágono.

Procedimientos de distinto tipo o clase

Se observaron procedimientos de validación de distinto tipo o clase en la pareja de Blanca y José, y el ejemplo concierne a José, quien desplegó distintos procedimientos de cálculo de la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero, para explicarle a Blanca y posteriormente a Omar, por qué esa suma era de 360°. José, basado en la lógica según sus propias palabras, efectuó un análisis del rombo proporcionado en la hoja de actividades. De dicho análisis concluyó que los ángulos *D* y *B* del cuadrilátero, así como los ángulos *A* y *C* eran congruentes respectivamente y sumaban 360°. No supo explicar por qué los ángulos eran respectivamente iguales, ni por qué sumaban 360°, pero estaba convencido de ello. Ante la desconfianza de Blanca, José decidió comprobar lo que decía y midió los ángulos interiores del cuadrilátero, los cuales fueron sumados por Blanca a petición de José. La suma obtenida fue de 360°. Posteriormente José trianguló el cuadrilátero obteniendo dos triángulos; como la suma de los ángulos interiores de cada uno de los triángulos era de 180°, los ángulos interiores del cuadrilátero sumaban 360°. En este punto José había obtenido los 360° de la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero de tres maneras distintas: la primera, por lógica, aunque seguía siendo pura especulación; la segunda por medición y cálculo de la suma, y la tercera por triangulación.

Un cuarto procedimiento surgió cuando Omar expuso que la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero podía variar. José efectuó un análisis en el vértice *B*, retomando su primer procedimiento, y con base en la igualdad de los ángulos formados por dos rectas y una transversal, y en la igualdad de los ángulos opuestos por el vértice, demostró que la suma de ángulos interiores del cuadrilátero era de 360°.

Todos los procedimientos que utilizó José lo llevaron al mismo resultado: 360°. La certeza y el convencimiento que adquirió de haber obtenido el mismo valor por distintos medios le dio seguridad para ampliar el campo de validez de la suma y generalizar este resultado en todos los cuadriláteros a partir de un único caso "la ley del cuadrilátero dice que los ángulos interiores de cualquier cuadrilátero miden 360°".

Perceptuales

Los alumnos que validaron sobre la base de las lecturas visuales, que pudieron percibir de un solo dibujo y las utilizaron para realizar inferencias que los convencieran y les ayudaran a convencer a los demás, hicieron uso de un proceso de validación empírico perceptual. La característica más importante de este tipo de proceso es que los alumnos fueron incapaces de anticipar los resultados completos o precisos de las inferencias que realizaron.

El surgimiento de este tipo de validación se observó en cuatro parejas: dos de segundo grado, las formadas por Denisse y Edmundo, y Karen e Irving; y dos de tercer grado, integradas por Ximena y Fernando, y Nancy y Carlos. Estos casos se observaron en el desarrollo de la actividad 6. De segundo grado se expone el caso de Denisse y Edmundo, y de tercer grado el de Nancy y Carlos.

Denisse y Edmundo

Para determinar cuánto valía la suma de los ángulos interiores del pentágono proporcionado en la hoja impresa de la actividad 6, Denisse y Edmundo midieron y sumaron los ángulos interiores. Este procedimiento les dio una suma de 532°. Esta suma no convenció a Edmundo, quien estaba convencido de que se había equivocado, ya que dicha suma no terminaba en cero como las del cuadrilátero y la del triángulo. Edmundo volvió a medir los ángulos interiores, obtuvo un valor de 540°, valor que sí correspondía a su conjetura. Una vez obtenida la suma de 540°, Denisse y Edmundo se enfrentaron a la validación de dicha suma; utilizaron la triangulación, debiendo cumplir con una condición: las diagonales que se trazaran en el pentágono no debían cruzarse, ya que de hacerlo se tendrían ángulos adicionales a los interiores del pentágono.

Esta triangulación fue explicada a Mario cuando en la actividad 7 pidió la asesoría de Edmundo para ver si la triangulación en seis triángulos que había hecho del hexágono era *correcta*. Edmundo le hizo ver a Mario que al haber cruzado las diagonales con las que trianguló el hexágono había sumado seis ángulos centrales, que no correspondían a los ángulos interiores del hexágono, por lo que la suma que había obtenido era incorrecta.

Nancy y Carlos

Nancy y Carlos triangularon el pentágono de dos maneras diferentes. La primera triangulación fue desechada por considerarla incompleta, dado que las 2 diagonales que trazaron solo utilizaban tres de los cinco vértices del pentágono. Esta suma era igual a 540°. La segunda triangulación fue aceptada por ambos alumnos ya que, según ellos, era más completa porque utilizaban los cinco vértices del pentágono. Para esta suma obtuvieron un valore de 900°.

En interacción con el investigador, Nancy y Carlos se dieron cuenta de que con la segunda triangulación habían sumado 5 ángulos de más, los centrales que formaban un círculo en el centro del pentágono. Para obtener el valor correcto de la suma, Nancy y Carlos restaron a los 900° los 360° que correspondían al círculo.

Haber obtenido el mismo valor de 540° para la suma de los ángulos interiores del pentágono por triangulaciones distintas convenció a esta pareja de que ese era el valor correcto de la suma.

Procesos de validación analíticos

En los procesos de validación analíticos los argumentos que se dan son generales y en ellos se hace uso de razonamientos matemáticos en vez de ejemplos. Estos procesos se pueden clasificar en transformacionales o axiomáticos.

Procesos de validación transformacionales

Mediante un proceso de validación transformacional, el alumno se convence o es convencido deductivamente considerando aspectos generales de una situación, implicando razonamiento orientado al caso general.

Este proceso fue seguido por José, quien se interesó en mostrar que Omar estaba equivocado. De los resultados que obtuvo Omar en la resolución de la actividad 5, surgió la cuestión de que la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero dependía del tipo y de la forma del cuadrilátero. José mencionó que Omar estaba equivocado y que la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero era de 360°. Al preguntar el investigador a José por qué pensaba eso, el alumno respondió que había una demostración a la cual llamó “de estilo gatito”, haciendo referencia a un par de segmentos de líneas rectas paralelas que son cortadas por dos transversales que a su vez son segmentos de líneas rectas paralelas. Este “gato” lo obtuvo José al prolongar por ambos extremos los cuatro segmentos de líneas rectas que formaban al cuadrilátero *ABCD* proporcionado en la hoja de la actividad 5.

Después de prolongar las rectas, José centró su análisis en uno de los vértices del paralelogramo, el *B*, y explicó que los cuatro ángulos que se formaron por la prolongación de los segmentos de líneas rectas *AB* y *BC* formaban un círculo completo, es decir que los cuatro ángulos sumaban 360°. El investigador le comentó a José que el círculo del que hablaba estaba formado por el ángulo interno *B* y por otros tres ángulos que eran externos al cuadrilátero. Entonces José recurrió a la igualdad de los ángulos correspondientes y estableció así que el ángulo opuesto por el vértice al ángulo *B* era igual al ángulo interno *D* del cuadrilátero; que el ángulo formado por la prolongación del segmento de línea recta *AB* y el lado *BC* era suplementario al ángulo *B*, el cual era igual al ángulo interno *A*, y que el ángulo opuesto por el vértice al ángulo suplementario del ángulo *B* era igual al ángulo interno *C*, con lo cual demostraba que la suma de los cuatro ángulos interiores del cuadrilátero era igual a 360°.

El papel que desempeñó la imagen gráfica en la demostración que efectuó José fue crucial, ya que el paralelogramo proporcionado en la hoja impresa de la actividad le dio la oportunidad de efectuar su análisis. Si el cuadrilátero hubiera sido otro, por ejemplo un trapecio isósceles o un romboide, José no hubiera podido hacer el mismo análisis. La prolongación de las líneas del paralelogramo fue una especie de detonador de la intuición que lo impulsó en la construcción de su deducción.

Los argumentos deductivos que expuso José se apoyan en el postulado I.2 de la geometría euclidiana, que establece que es posible prolongar en línea recta un segmento; en el corolario de la proposición I.15 de los *Elementos* de Euclides, que señala que si dos segmentos se cortan, producen en la intersección ángulos que suman cuatro ángulos rectos, y en la proposición I.29 de los *Elementos* de Euclides, que dice que dos rectas paralelas cortadas por un transversal forman con esta ángulos correspondientes iguales.

Procesos de validación axiomáticos

Un proceso de validación axiomático va más allá que el proceso de validación analítico transformacional. En un proceso de validación axiomático el alumno también reconoce que el sistema matemático descansa en enunciados que son aceptados sin prueba. Sin embargo, en el estudio de esta investigación educativa llevado a cabo para esta tesis no se observaron ejemplos que correspondieran a un proceso de validación axiomático.

En este capítulo se realizó una discusión y un análisis de la información recabada de las actividades trabajadas con los alumnos que participaron como sujetos en esta investigación. El análisis se centró en las validaciones de las afirmaciones planteadas en las actividades 1, 2 y 3, así como en las validaciones de las sumas de los ángulos interiores de un triángulo, un cuadrilátero, un pentágono y de la generalización de la suma de los ángulos interiores de un polígono convexo.

En el próximo capítulo se destacaran los principales resultados obtenidos del análisis e interpretación de la información empírica a la luz de las preguntas de investigación; se elaborarán algunas reflexiones e implicaciones didácticas que emergen de la realización de este estudio sobre la importancia que tienen los procesos de validación, así como también algunas reflexiones e implicaciones que atañen a la investigación y se formularan las conclusiones obtenidas.

CAPÍTULO 5

DISCUSIÓN

El objetivo de esta investigación educativa fue identificar, describir, clasificar y analizar procesos de validación, insertos en la resolución de problemas, mediante los cuales los alumnos comprueban la veracidad de determinada proposición matemática.

Este capítulo consta de tres secciones. En la primera, se presenta una discusión y reflexiones guiadas por las preguntas de investigación con base en los resultados obtenidos del análisis e interpretación de la información empírica expuesta en el capítulo 4, y en las consideraciones teóricas abordadas en el capítulo 2. En la segunda sección, se elaboran algunas reflexiones e implicaciones didácticas sobre la importancia que tienen los procesos de validación, así como también algunas reflexiones e implicaciones que atañen a la investigación En la tercera sección, se formulan las conclusiones obtenidas.

A través de la resolución de problemas los alumnos hacen uso de las matemáticas que han aprendido para dar respuesta a las preguntas planteadas en el contexto de una situación problemática, buscan conexiones entre diferentes representaciones, logran diferentes vías de acceso trabajando varios enfoques, generan criterios para validar las interpretaciones y los modelos matemáticos, y construyen y hacen evolucionar los conceptos matemáticos como respuesta a sus propias preguntas.

En la resolución de problemas el planteamiento de conjeturas proporciona elementos que ayudan a interpretar y restructurar la información intrínseca del problema, además de guiar la actividad misma de resolución al idear una estrategia. La posterior validación de la conjetura ratificará o rectificará la estrategia de resolución.

La validación de la conjetura pasará por un proceso de validación, el cual tiene como base el proceso empleado por el alumno para convencerse de la verdad de la conjetura sustentada en la observación. Un proceso de validación tiene una mayor oportunidad de ser generado cuando los alumnos se responsabilizan del problema y su resolución.

Se estableció una categorización de los procesos de validación con base en los esquemas de validación elaborados por Harel y Sowder (1998), adaptándose como se muestra en el cuadro 5.1.

Cuadro 5.1. Clasificación de procesos de validación con base en esquemas personales de validación.

<table>
<tr><td colspan="4">Procesos de validación</td></tr>
<tr><td>De convicción externa</td><td colspan="2">Empíricos</td><td>Analíticos</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoritarios
Simbólicos</td><td colspan="2">Experimentales</td><td rowspan="2">Transformacionales
Axiomáticos</td></tr>
<tr><td>Estáticos</td><td>Dinámicos</td></tr>
</table>

Cuadro 5.1. (Conclusión)

<table>
<tr><td colspan="4">Procesos de validación</td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td colspan="2">Inductivos</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>Con base en ejemplos</td><td>Con base en procedimientos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Perceptuales</td></tr>
</table>

En las actividades planteadas a los alumnos (véanse los apéndices A y B), se contemplaron tareas para que conjeturaran, explicaran y emitieran juicios sobre la validez de aseveraciones sobre el perímetro, el área y la suma de los ángulos interiores de un triángulo, así como tareas para que buscaran la regularidad o patrón en la suma de los ángulos interiores de varios polígonos a partir del análisis de casos particulares, generalizaran ese patrón, y elaboraran una fórmula matemática de ese patrón generalizado.

Con base en la orientación teórica en el desarrollo de cada actividad se analizaron los procedimientos que siguieron los alumnos, trabajando en parejas, para convencerse de la veracidad de las conjeturas. Asimismo, se analizaron dichos procedimientos en la interacción de los estudiantes en grupo y con el investigador.

Discusión y reflexiones guiadas por las preguntas de investigación

Caracterización de las conceptualizaciones de la comprobación en matemáticas de los alumnos de segundo y tercer grados de educación secundaria en México

Del análisis de los resultados se estableció una categorización de las conceptualizaciones de los alumnos de segundo y tercer grados de educación secundaria que participaron como sujetos en esta investigación, referentes a la comprobación. Se categorizaron en dos tendencias de acuerdo con características similares: a) la comprobación como una manera de verificar el resultado de un problema, y b) la comprobación como un procedimiento con etapas ordenadas de manera lógica para tratar determinado problema matemático.

La comprobación como una manera de verificar el resultado de un problema

Bajo esta tendencia, las referencias de los alumnos incluyeron alusiones al cálculo aritmético y geométrico, del siguiente estilo:

> "Sí. *Comprobándolo* con el transportador. Midiendo los ángulos interiores del triángulo y sumándolos. La suma daría 180°"; "Para ver si estamos bien. *Para comprobarlo*"; "Sumando las cantidades para ver si... *para comprobar* si es lo que pensamos"; "Nada más *estaba comprobando* los cuatro triángulos del hexágono"; "Midiendo los ángulos. *Para comprobar*. Para ver si da los 180°", y "Ya lo vimos. *Ya comprobamos*".

En los alumnos de segundo grado hubo 12 referencias a la comprobación como verificación de un resultado: Edmundo hizo 5 referencias; Karen, Irving y Blanca hicieron 2 referencias cada uno, y Denisse lo hizo en una sola ocasión. En los alumnos de tercer grado hubo 5 referencias a la comprobación como verificación: Dos de Nancy, y Jair, Paola y José hicieron referencia a la comprobación en una ocasión cada uno. Así, el total de las referencias a la comprobación como verificación de resultados fue de 17.

El sentido de la comprobación como verificación de un resultado lo han desarrollado los alumnos de manera “natural” en la escuela, acorde con los objetivos especificados en el plan y los programas de estudio de 1993 para matemáticas, en los cuales se da énfasis a la conveniencia de que los mismos alumnos reconozcan, al verificar los resultados, si los procedimientos que emplean al resolver un problema los llevan a la solución correcta del mismo.

Así, en aritmética se “comprueba” la suma volviendo a realizar la adición de los sumandos en otro orden, la resta se comprueba sumando la diferencia al sustraendo, y la división se comprueba obteniendo el producto del cociente y el divisor. En álgebra, las raíces de una ecuación se comprueban sustituyendo los valores de dichas raíces en la ecuación. Todas estas acciones tienen la función de verificar la validez de un resultado, el tratado en cuestión.

La comprobación como un procedimiento con etapas ordenadas de manera lógica para tratar determinado problema matemático

Las referencias de los alumnos clasificados en esta categoría tuvieron la función de establecer la validez de un procedimiento que se debe seguir, o implican que la repetición de varios ejercicios da validez a determinada proposición matemática. Sólo hubo dos referencias asociadas a esta tendencia. Una, hecha por Edmundo, alumno de segundo grado ("Ya comprobamos, porque llegamos a la conclusión de que las líneas [diagonales] no se tenían que cruzar para que nos diera el resultado real. Si dividimos el pentágono en triángulos sin que ninguno divida a otro, sumando los ángulos interiores nos da como resultado 540°"); y la otra, por Jair, alumno de tercer grado: "Lo hemos comprobado muchas veces. Hemos hecho ejercicios".

Motivos en los alumnos de segundo y tercer grados de educación secundaria en México que los estimulan a emprender un proceso de validación y comprobación de una proposición matemática

Entre los motivos que se identificaron en los alumnos que participaron como sujetos en esta investigación, para emprender un proceso de validación en situación de resolución de problemas, se tienen los siguientes: a) la "apropiación" del problema por parte del alumno, b) el deseo de explicar o verificar sus acciones a los compañeros, y c) La interacción social.

La "apropiación" del problema por parte del alumno

Un proceso de validación tiene una alta oportunidad de ser puesto en marcha cuando los alumnos se apropian del problema. Para lograr que los alumnos se apropien de los problemas, se hace necesario un cambio en los principales elementos que determinan la relación entre el profesor y sus alumnos, ya que la clase es un sitio de interacción de costumbres y creencias. Los profesores deberán dejar de constituirse en jueces calificadores que validan o invalidan los resultados generados por sus alumnos, con la finalidad de promover la independencia y responsabilidad de sus alumnos para que sean ellos mismos los que administren y controlen su actividad. Los alumnos, a su vez, deben tener una actitud participativa, crítica y creativa, que les ayude a evaluar sus producciones y las de sus compañeros, y de este modo dejar de pensar que las actividades planteadas por sus profesores son como “juegos de adivinanza”, en los cuales dichos profesores son los encargados de revelar las soluciones.

Cuando el profesor logra que un alumno se “apropie” de un problema, dicho alumno formulará los problemas en sus propios términos, experimentará, conjeturará y verificará su solución, y en caso de requerirlo reformulará sus conjeturas, para ajustarlas a las evidencias que vaya encontrando en su experimentación.

Cuando el alumno se “apropia” efectivamente de un problema, elabora sus proposiciones matemáticas, las cuales entran en una dialéctica de prueba y verificación, en un proceso de validación, el cual estará motivado por el deseo de saber si lo que pensó era en realidad verdadero.

El deseo de explicar o verificar sus acciones a los compañeros

Cuando los alumnos resuelven un problema pasan por un proceso que los puede llevar a recorrer diferentes etapas como son: aceptar el desafío, formular las preguntas adecuadas a cada caso, clarificar el objetivo, definir y ejecutar el plan de acción y evaluar la solución. Todo esto implica una inmersión en un proceso de validación en el cual el alumno debe explicar o justificar sus actuaciones a los compañeros. El deseo de explicar sus acciones llega a constituirse en una causa que lo motiva a validar. Así, se tiene el ejemplo de José, alumno de tercer grado, quien en la actividad 5 generó tres procesos de validación, cada uno de ellos con esquemas de prueba de un nivel más elevado que el anterior, como resultado de explicarle a Blanca, su compañera de equipo, por qué la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero era 360°.

La interacción social

Cuando los alumnos se compenetraron y fueron capaces de discutir sus ideas sin imponer su criterio, logrando coordinar sus puntos de vista, trabajando juntos por un fin común, el proceso de validación tuvo una alta posibilidad de ser generado.

Aunque no se puede negar que la interacción social motivó la puesta en marcha de los procesos de validación, esta interacción no explica por sí sola esta motivación. Omar, en la segunda sesión, trabajó solo porque su pareja de equipo, Jair, no asistió a la escuela el día que se implemento dicha sesión. Esta situación no impidió el surgimiento de los procesos de validación que Omar implementó a lo largo de las actividades. Por otra parte, las diferencias entre los puntos de vista de Wendy y Mario, y su incapacidad para resolver sus conflictos ocasionó que la interacción social se convirtiera en un obstáculo que dificultó la puesta en marcha de los procesos de validación.

Los ejemplos de Omar, Wendy y Mario parecen contradecir a la interacción social como motor de los procesos de validación. Pero estos ejemplos no son realmente contradictorios. Lo que muestran es la dificultad de lograr que el aula proporcione un ambiente creativo en el cual las interacciones fluyan libremente. Así, aunque Omar pudo efectivamente generar procesos de validación, éstos se caracterizaron por tener una base empírica. La falta de un compañero con quien confrontar sus ideas le obstaculizó la implementación de un proceso de validación de un nivel más elevado.

Tipos de comprobaciones que son capaces de elaborar los alumnos de segundo y tercer grados de educación secundaria en México

Los tres tipos de esquemas personales de validación (de convicción externa, empíricos, y analíticos) propuestos por Harel y Sowder, retomados en esta investigación, permitieron identificar, diferenciar y analizar 8 tipos diferentes de procesos de validación utilizados por los alumnos de segundo y tercer grados de educación secundaria que participaron como sujetos en esta investigación. Dentro de un mismo proceso de resolución de los problemas, planteados en las 7 actividades implementadas en las 2 sesiones de trabajo, se pudieron observar distintos procesos de validación para una misma pareja de estudiantes. Los procesos de validación que se identificaron son los siguientes: a) autoritarios, b) simbólicos, c) experimentales estáticos, d) experimentales dinámicos, e) inductivos basados en ejemplos, f) inductivos basados en procedimientos o falsamente inductivos, g) perceptuales, y h) transformacionales.

Procesos de validación autoritarios

Nueve de las doce parejas observadas, se refirieron a una fuente de autoridad externa. Dichas fuentes tuvieron como sustento a personas o elementos que se encontraban en la escuela. Así, las referencias al maestro o a una ley establecida tuvieron una mayor frecuencia, 9 en total. Respecto a las referencias a un libro o una guía de estudio se asociaron dos menciones. Por lo que toca a la referencia a un compañero más avanzado, fue proporcionada una sola vez.

Los procesos de validación autoritarios tuvieron dos usos distintos entre los alumnos que recurrieron a este tipo de proceso. El primer uso identificado fue el de utilizar al proceso de validación autoritario como fuente de certeza para plantear una conjetura. El segundo uso se relacionó con el sentido mayoritario que los alumnos le dieron a la comprobación, de medio de verificación de un resultado.

El primer uso es una convicción en la validez de una afirmación, que reconoce la necesidad de comprobarla. Así, cuando Edmundo, alumno de segundo grado, en la actividad 5, estableció que había leído que la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero era el doble de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, también manifestó la necesidad de comprobarla.

En el segundo uso se puede considerar que se trata de una manifestación de confianza ingenua según la cual los estudiantes reconocen en las fuentes externas, una autoridad que bajo ninguna circunstancia les mentiría. Este comportamiento se favorece con el actuar del profesor en clase cuando se erige como la persona que aprueba o desaprueba un resultado. El ejemplo atañe a Emmanuel, alumno de tercer grado, quien en la actividad 3 mencionó que la suma de los ángulos interiores de un triángulo era 180°, y al cuestionarle porque lo aseguraba, Emmanuel contestó: “De la clase. El maestro dice”.

Procesos de validación simbólicos

El proceso de validación simbólico fue observado especialmente en todas las parejas de segundo grado al trabajar con las tareas planteadas en la actividad 2. Los alumnos que recurrieron a este tipo de proceso de validación, dieron justificaciones basadas en procedimientos y manipulaciones simbólicas. En todos los casos, las parejas dieron cadenas de procedimientos que correspondían a una secuencia de cálculo, identificándose tres tipos diferentes: a) la secuencia de cálculo proporcionó una evidencia de clase distinta al planteamiento original de los alumnos, b) la secuencia de cálculo evidenció una falta del significado del concepto de área, y c) la secuencia de cálculo no hizo referencia al concepto de área.

En el primer tipo, interactuaron dos clases de evidencias: la proporcionada por la visualización y la proporcionada por la secuencia de cálculo, aunque fue esta última la que otorgó certidumbre a los estudiantes. Así, las lecturas visuales que se hicieron de las figuras geométricas tuvieron la función de explicar, mientras que el cálculo geométrico tuvo la función de validar.

En el segundo tipo, los resultados mostraron que los alumnos realizaron dos lecturas de las figuras geométricas: La primera visual y la segunda simbólica. Estas dos lecturas generaron una confusión entre tamaño y forma. Así, dos figuras geométricas de distinta forma, pero de igual área, fueron vistas como de diferente tamaño, a pesar de la constatación de la igualdad de dichas áreas con ayuda del cálculo geométrico.

En el tercer tipo el proceso de validación se basó en la evidencia proporcionada por la secuencia de cálculo, sin que la evidencia visual apareciera explícitamente en dicho proceso. Aunque en la actividad se tenían figuras geométricas, hubo una clara ruptura entre geometría y aritmética. El aspecto geométrico solo sirvió para reconocer el tipo de figura geométrica y la correspondiente fórmula matemática que serviría para calcular su área respectiva. Una vez que se tuvo dicha fórmula, el problema adquirió un tinte aritmético: se convirtió en una cuestión de cálculo.

Procesos de validación experimentales estáticos

El proceso de validación experimental estático es el que apareció mayoritariamente en todas las parejas observadas, sin importar el grado escolar. Este proceso de validación tuvo como fuente de certidumbre a la medición, la cual llegó a adquirir entre los alumnos el carácter de comprobación deductiva escrita. Este proceso de validación lo utilizaron los alumnos con dos intenciones: la primera, como un medio de decisión, y la segunda como una comprobación.

La diferencia entre estas dos intenciones estriba en que en la primera intención las conclusiones obedecieron a los resultados obtenidos de la experimentación, mientras que en la segunda intención las conjeturas fueron validadas con ayuda de la experimentación. Así, el sentido de decisión no probó ni validó resultados, solamente refinó el conocimiento y acumuló evidencia. Este sentido fue observado en Wendy y Mario, alumnos de segundo grado, quienes al trabajar con las tareas planteadas en la actividad 3 manifestaron primeramente la intención de medir y sumar los ángulos interiores de cada triángulo para establecer si la afirmación, de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo pequeño era menor que la suma de los ángulos interiores de un triángulo grande, era verdadera o falsa.

El segundo sentido, el de comprobación, fue aquel en el que partiendo del planteamiento de una conjetura, los alumnos experimentaron con los triángulos para confirmar o modificar dicha conjetura. Este sentido se observó en ocho parejas, tres de segundo grado y cinco de tercero, quienes en términos generales, después de haber leído la afirmación de la actividad 3, manifestaron que era falsa y recurrieron a la experimentación para darle certeza a su convencimiento. Este sentido sirvió tanto para verificar resultados como para dirimir controversias que surgieron en el transcurso del trabajo en parejas de los alumnos que les ayudaron a alcanzar conclusiones y resultados intermedios, que posteriormente influenciarían sus resultados finales, como en el caso de Blanca y José, alumnos de tercer grado, quienes en la actividad 3 tuvieron una discrepancia en la amplitud del campo de aplicación de la afirmación, dado que José manifestó que la suma de los ángulos interiores era de 180° para todos los triángulos, mientras que Blanca apuntaba que la suma de 180° solo era para los triángulos rectángulos.

Procesos de validación experimentales dinámicos

El proceso de validación experimental dinámico correspondió al proceso que se caracterizó por el empleo del plegado o rasgado de papel. Aunque es necesario aclarar que este proceso fue entendido más como un recurso didáctico. Karen e Irving, alumnos de segundo grado, fueron los únicos que recurrieron al plegado y rasgado de papel, después de recordar que su profesora de matemáticas en clase les había comprobado que la suma de los ángulos interiores de un triángulo era 180°, utilizando los tres ángulos que había rasgado de un triángulo de papel. Esos ángulos los había acomodado, como piezas de un rompecabezas, de modo que se mostrara que formaban un ángulo llano.

Procesos de validación inductivos

En un proceso de validación inductivo, los alumnos entendieron la validación como la comprobación de una conjetura en uno o varios casos. Este tipo de proceso de validación fue utilizado por Karen e Irving, y Blanca y Hugo, alumnos de segundo grado, y por Omar, alumno de tercer grado. En los tres casos, los alumnos validaron para un todo un campo de figuras geométricas, basándose en dos ejemplos.

Procesos de validación falsamente inductivos

En un proceso de validación falsamente inductivo, los alumnos comprobaron la conjetura de un caso particular, con la ayuda de uno o más procedimientos, pudiendo ser de la misma clase o de clase diferente. Este proceso se consideró falsamente inductivo, ya que la validación se sustentó en un único caso. El proceso de validación basado en procesos o falsamente inductivos se observó en Daniela y Juan, Nancy y Carlos, y así como en Blanca y José, todos alumnos de tercer grado.

Procesos de validación perceptuales

Cuatro parejas, dos de segundo grado y dos de tercero, basaron su proceso de validación en las percepciones visuales, que pudieron realizar de los dibujos proporcionados en las hojas impresas de las actividades. En todos los casos, el proceso de visualización perceptual surgió con la triangulación del pentágono, en dos sentidos diferentes. El primero, relacionado con la validación de la triangulación como método de cálculo de la suma de los ángulos interiores del polígono. El segundo, relacionado con la triangulación como comprobación deductiva de la suma de los ángulos interiores del polígono. En este último sentido, solamente Denisse y Edmundo, alumnos de segundo grado, reconocieron explícitamente a la triangulación como una comprobación.

Procesos de validación transformacionales

El proceso de validación transformacional es aquel en el cual el alumno se convence o es convencido por un proceso deductivo. Este proceso fue seguido únicamente por José, pareja de Blanca (ambos alumnos de tercer grado), quien hizo un razonamiento particular y completo del cuadrilátero (paralelogramo) proporcionado en las hojas impresas de la actividad 5. Por razonamiento particular se entiende que José razonó sobre un objeto en particular: el paralelogramo. Por completo se entiende que el razonamiento de José fue completo y correcto. El papel que desempeñó la imagen gráfica en el razonamiento que efectuó José fue decisivo, ya que, de haber sido otro el cuadrilátero, por ejemplo un trapecio, José no hubiera podido hacer el mismo razonamiento.

En el cuadro 5.2. se muestra el total de veces que los distintos procesos de validación fueron seguidos por los alumnos que participaron como sujetos en esta investigación.

Cuadro 5.2. Frecuencia con que los alumnos recurrieron a los distintos tipos de procesos de validación.

Tipo de proceso de validación	Frecuencia de recurrencia entre los alumnos de segundo grado	Frecuencia de recurrencia entre los alumnos de tercer grado	Frecuencia total de recurrencia
Autoritario	6	6	12
Simbólico	7	No apareció	7
Experimental estático	20	14	34
Experimental dinámico	1	No apareció	1
Inductivo	2	1	3
Falsamente inductivo	No apareció	3	3
Perceptual	2	2	4
Transformacional	No apareció	1	1

El que los alumnos hayan validado mayoritariamente con un proceso de validación experimental estático se explica de dos maneras diferentes. La primera explicación tiene como sustento la reiterada alusión de que el conocimiento se basa y avanza con ayuda del método científico. De este modo, las matemáticas pudieron llegar a ser consideradas por los alumnos como una ciencia experimental, la cual tiene su fundamento en la observación y experimentación. Acorde con esto, los alumnos decidieron, la mayoría de las veces, sustentar su convencimiento en la medición, ya fuera de las longitudes de los lados de los triángulos, de las bases y alturas correspondientes de los triángulos o de los ángulos interiores de triángulos, cuadriláteros o pentágonos.

Otra posible explicación de que los alumnos hayan recurrido al proceso de validación experimental atañe a la concepción que tengan dichos alumnos de lo que significa trabajar con polígonos. En este sentido, los alumnos vieron a los polígonos como figuras geométricas que se prestaban suficientemente bien para cálculos. Lo cual es congruente con un proceso de que valide con base en mediciones y cálculos geométricos, ya sean de perímetro, área o suma de ángulos interiores. Al fin y al cabo los alumnos están acostumbrados a calcular algo cada vez que tienen enfrente un polígono.

Por otra parte, lo que *persuade* y *convence* a los alumnos que participaron como sujetos en esta investigación no es algo fijo y determinado, sino variable. Esta variedad se manifestó en

1.- La amplia gama de procesos de validación exhibidos por los alumnos.
2.- La abundancia de respuestas, de una misma persona, que presentan rasgos de distintos procesos de validación.

Por lo que los alumnos se encontraban en un estado de transición bajo la influencia de distintos esquemas, no siendo plenamente conscientes ni de sus diferencias ni de sus limitaciones; por consiguiente, utilizaron uno u otro según las peculiaridades de lo que se les proponía o emplearon varios procesos de validación al mismo tiempo. En consecuencia, no parece conveniente –en principio– hablar de los procesos de validación de tales alumnos, sino de procesos de validación que *siguieron* los alumnos para resolver un determinado problema.

El planteamiento de conjeturas por parte de los alumnos
vs *las conjeturas dadas por el maestro para ser aplicadas*

Para discutir sobre esta cuestión, se recurrirá al planteamiento de algunas preguntas, las cuales guiaran la reflexión. ¿Permiten los maestros de secundaria que sus alumnos expresen sus dudas? ¿Puede un alumno cuestionar lo que dice su profesor? ¿Puede un alumno plantear una conjetura e indagar sobre la veracidad de dicha conjetura? Los profesores que se dedican a exponer su cátedra, en raras ocasiones proponen un trabajo de descubrimiento y experimentación por parte de sus alumnos. Estos profesores no discuten resultados ni estrategias de solución de ejercicios y problemas con sus alumnos, solamente aprueban o desaprueban. Un profesor que se dedica a dar su clase, no considera el trabajo en equipo, la discusión en grupo, la elaboración de conclusiones, y la exposición de clase como puntos centrales en la actividad de los alumnos. Las consecuencias estriban en una actitud pasiva y displicentes de los alumnos como receptores de las explicaciones del profesor o como aprendices que deben ejercitarse en la aplicación de las técnicas y procedimientos convencionales para mejorar la soltura en el manejo de dichas técnicas o procedimientos. Esta situación se evidencia con el ejemplo de Wendy y Mario, alumnos de segundo grado, quienes en las actividades 5, 6 y 7 no pasaron por un proceso de generalización de la suma de los ángulos interiores de los polígonos, ni por uno de validación de esa generalización, al no poder plantear conjeturas que los guiaran en la resolución en las tareas propuestas en dichas actividades, se dedicaron a responder *correctamente* dichas tareas.

Fomentar que los alumnos sean los que elaboren conjeturas y las validen reviste una importancia mayúscula en su proceso de aprendizaje, dado que es por medio de estas conjeturas que los alumnos se guían en el proceso de resolución de un problema. Este proceso de resolución es un medio que desarrolla el razonamiento matemático en los alumnos, al mismo tiempo que ayuda a generar una actitud positiva hacia las matemáticas. Esto se pudo evidenciar con el ejemplo de Karen e Irving, alumnos de segundo grado, quienes fueron desarrollando su razonamiento matemático al ir planteando y validando conjeturas de su autoría, en las tareas propuestas por las actividades, con procesos de validación de niveles cada vez más elevados. Así en la primera actividad, estos alumnos validaron solamente con un proceso experimental estático; en la actividad 2 validaron únicamente con un proceso simbólico; en la actividad 3 validaron con base en dos procesos: uno autoritario que les sirvió para plantear la conjetura, y el otro experimental estático que fue con el que comprobaron dicha conjetura; en la actividad 5 también validaron con dos procesos: uno experimental estático utilizado para plantear la conjetura, y otro inductivo que comprobó la conjetura; finalmente, en la actividad 6 validaron su conjetura, establecida con base en un proceso experimental, con un proceso de validación perceptual.

Cuando se les permite a los alumnos plantear conjeturas, comunicarlas y validarlas se fomenta en dichos alumnos la capacidad de autosuficiencia, para que se vuelvan independientes y se responsabilicen de su aprendizaje. Su actitud hacia las matemáticas se volverá más participativa, crítica y creativa. El ejemplo concierne otra vez a Karen, pareja de Irving, quien por iniciativa propia, cuestionó si la suma de 360° que ella e Irving habían obtenido para el cuadrilátero propuesto en la actividad 5 era válida para todos los cuadriláteros. Este cuestionamiento llevo a Karen e Irving a trazar un cuadrilátero distinto al de la actividad para verificar si la suma de sus ángulos interiores también era de 360°.

Posibles consecuencias en el aprendizaje de las matemáticas al omitir el uso de procesos de validación

Hacer caso omiso de los procesos de validación condiciona un acuerdo implícito entre alumnos y profesor cuando se encuentran en un aula: los alumnos están ahí para escuchar lo que el profesor tiene que decir, y el profesor está ahí para enseñar, para dictar su cátedra.

Cuando el profesor es el encargado de enseñar, el alumno aprende matemáticas de dos maneras: memorizando resultados y definiciones y practicando rutinariamente procedimientos. Aprender así las matemáticas conlleva la negación de brindarle la oportunidad al alumno de desarrollar su razonamiento deductivo por medio de procesos de validación consistentes en conjeturar, explicar, argumentar, probar y comprobar.

Si al alumno, al hacer matemáticas, le basta con limitarse a la aplicación de un algoritmo y a la realización de cálculos para llegar al resultado, en el momento en que se enfrente a la necesidad de resolver algunas situaciones problemáticas por sí mismo, como elaborar una proposición matemática que parta de una conjetura, y su posterior comunicación y validación, no sabrá qué elementos se necesitan ni dónde podrá encontrarlos y, en el peor de los casos, no sabrá qué hacer.

Reflexiones e implicaciones

Las primeras demostraciones que se estudian como tales en la educación secundaria en México, están relacionadas con la geometría. Su tratamiento aparece en los programas de segundo y tercer grados, relacionados en ambos casos con el teorema de Pitágoras. Sin embargo, una de las debilidades de la enseñanza y el aprendizaje de estas demostraciones radica en cómo se aborden estas demostraciones en el aula.

Si el profesor, para demostrar el teorema de Pitágoras, plantea una situación problemática en la que los alumnos se vean en la necesidad de establecer un proceso de validación, consistente en elaborar una conjetura, explicarla, argumentar y comprobarla, así como también los resultados que obtengan, no solo estarán demostrando el teorema, sino que también estarán desarrollando diversas operaciones mentales generales tales como *abstraer, concretar, analizar, sintetizar, comparar, clasificar, particularizar, y generalizar*.

Por el contrario, si el profesor expone el teorema de Pitágoras reducido a su expresión algebraica, los alumnos considerarán al teorema como una información más que deben aprenderse de memoria y las demostraciones (visuales o preformales) que realice el profesor de dicho teorema serán tomadas por sus alumnos como recursos didácticos que fueron utilizados con la finalidad de que *entendieran*.

El sentido de verificación que los alumnos participantes en esta investigación le atribuyeron a la demostración, ya ha sido documentado por investigadores internacionales de la didáctica de las matemáticas. Hacer evolucionar este sentido implica que los profesores, además de verificar resultados, promuevan la justificación de dichos resultados.

Algunas de las implicaciones didácticas para el aula son las siguientes:

1.- La lectura y elaboración de comprobaciones, surgidas de un proceso de validación, cumplen objetivos que van más allá del convencimiento de que una determinada afirmación es verdadera. Pueden, por ejemplo, ser fuente de reflexión sobre la definición de los objetos matemáticos implicados, poner a prueba el repertorio de ejemplos, o invitar a hacer explícitos los atributos compartidos por todos los ejemplos del concepto, es decir, al establecimiento de propiedades de ese concepto que quizás hasta ese momento no eran conocidas. Lo anterior llama a la reflexión por parte de los profesores acerca de cómo, cuándo y por qué comprobar.

2.- Abordar la comprobación con una mayor libertad, permitiendo la existencia de diálogo, debate y comunicación, pero habría que buscar situaciones suficientemente atractivas para que los alumnos participen en la elaboración de un proceso de validación.

3.- Hay que tener cuidado en crear buenos entornos de aprendizaje, cuidando que la interacción social no sea un obstáculo para el acercamiento a la comprobación, ya que hay casos en los que los estudiantes no son hábiles en coordinar sus diferentes puntos de vista, o en superar su conflicto sobre una base científica.

4.- Los profesores deben realizar valoraciones del comportamiento de sus estudiantes en el proceso de validación ante el colectivo, estimulando las actitudes positivas y señalando las que aún deben ser mejoradas, fomentando la atención personalizada y a la diversidad. De esta manera se propicia la creación de una comunidad matemática al interior del aula.

5.- Las comprobaciones de proposiciones matemáticas son un punto neurálgico para los estudiantes en el estudio de las matemáticas, por lo que el profesor debe incentivar la *tenacidad, perseverancia, esfuerzo, disciplina y constancia* a lo largo del proceso de resolución de un problema de demostración, para así llegar a lograr la *independencia* en la realización de las comprobaciones; se convierten en un *reto intelectual* ante el deseo de adquirir nuevos conocimientos, métodos de trabajo y desarrollo del pensamiento en sentido amplio.

6.- Las intervenciones de los docentes deben mantener la incertidumbre de la solución del problema o de la validez de las conjeturas, para permitir que sean los propios alumnos los encargados de generar un proceso de validación. Entre las intervenciones se pueden mencionar las siguientes: No se debe responder las preguntas que realicen los alumnos cuando éstos busquen una aprobación, debiendo devolverse dichas preguntas al grupo para que sean los propios alumnos los encargados de dar respuesta; no convalidar ni invalidar resultados; solicitar mayores explicaciones al tomar respuestas de forma literal o al plantear la falta de entendimiento de una respuesta, y dejar asentada la duda respecto a la validez de una respuesta.

7.- En lugar de hacer varias demostraciones geométricas, quizá convenga centrarse en una demostración desde varias perspectivas, y hacer ver esa necesidad.

La acumulación de evidencias y la elaboración de pruebas son solo algunos de los aspectos de los procesos de validación. Otro aspecto lo constituye el análisis crítico de dichas evidencias. Queda pendiente indagar cuáles son las respuestas que pueden provocarse en un alumno al presentarle un contraejemplo que invalide una proposición matemática.

Existen también profundizaciones posibles de temas abordados aquí y cuestiones que recién ahora se ven interesantes para investigar. Entre ellas se pueden mencionar:

¿Cómo fomentan los profesores los procesos de validación?

¿Qué aporta el plegado o el rasgado de papel a los procesos de validación?

¿Cómo conceptúan los profesores de secundaria la comprobación?

¿Qué tipos de comprobaciones son capaces de realizar los profesores de secundaria?

Conclusiones

De los resultados obtenidos y discutidos se concluye lo siguiente:

— En términos generales, ni el tipo de escuela (pública o privada) ni el grado que cursaban los alumnos que participaron como sujetos en la investigación fueron características determinantes para que los alumnos de segundo y tercer grados conceptualizaran a la comprobación como una verificación de resultados.

— Hacer evolucionar la concepción de la comprobación como una verificación de resultados en los alumnos implica que el profesor plantee actividades a los alumnos que los inicien gradualmente en el razonamiento deductivo.
— Para hacer prosperar los procesos de validación en las aulas de clase, se hace necesario reconocer que las matemáticas son una elaboración humana, proveniente de cerebros humanos y, por lo tanto, constituyen un producto cultural. En este sentido los profesores deben darse a la tarea de convertir al aula en una comunidad matemática, en un laboratorio de conocimientos, de discusión de ideas. Así, para estar en sintonía con la creación de una comunidad matemática, se demanda un cambio en las prácticas docentes, que se enfoque más hacia el aprendizaje de los alumnos, que a la enseñanza de los mismos, para que se atienda más a la personalidad de los alumnos, sus experiencias, sus propuestas y razonamientos y, cuando haya trabas, la intervención del profesor sirva para orientar los modelos organizados por los alumnos, impulsar sus conjeturas, sus supuestos y llevarlos a que vean si tienen posibilidad de ser aplicados.
— Los resultados muestran una tendencia de los alumnos, sin importar el grado ni el tipo de escuela (pública o privada) a utilizar los procesos de validación experimentales estáticos como el principal medio para comprobar una conjetura.
— Ninguno de los alumnos de tercer grado validaron las afirmaciones vertidas en las actividades 1 y 2. Esta incapacidad para validar dichas afirmaciones se explica con base en una costumbre docente que influyó en el pensamiento de los alumnos. La costumbre docente se relaciona con la asignación de las longitudes de los lados de manera arbitraria al dibujo de una figura geométrica, sin que dichos valores

necesariamente correspondan a la apariencia de la figura. Esta costumbre provoca en los alumnos dos concepciones de los polígonos: una, basada en una concepción delimitada por el aspecto figurativo de los polígonos, en la cual, dicho polígono se reduce a una imagen concreta e inmóvil; y la otra, de los profesores, sustentada en una concepción determinada por el aspecto conceptual deslindado del aspecto figurativo del polígono, en el cual aparecen las representaciones, y las figuras geométricas adquieren movilidad. No es de extrañarse que los alumnos de tercer grado no hayan podido validar las afirmaciones ya que estaban enfrentadas dos concepciones de los polígonos, que resultaron inconciliables.

- De todos los alumnos que participaron como sujetos en esta investigación, solamente dos parejas de tercer grado no pudieron escribir una fórmula de la generalización de la suma de los ángulos interiores de un eneágono. Esto se explica en la incapacidad del reconocimiento del patrón en las sumas de los ángulos interiores del triángulo, del cuadrilátero y del pentágono. Dicha incapacidad probablemente se deba a que los alumnos de tercer grado tenían un año más de haber estado más tiempo sujetos a la influencia de la instrucción impartida en la escuela y, el actuar del profesor influye en el pensamiento de los alumnos. En contraparte, los alumnos de segundo grado fueron más receptivos a las tareas planteadas en las actividades, con ideas más frescas y con mayor disponibilidad para validar las afirmaciones.
- Los alumnos de segundo grado al trabajar con las actividades 5, 6 y 7, y comparar las sumas de los ángulos interiores de un cuadrilátero, de un pentágono y de un eneágono, respectivamente, con respecto a la suma de los ángulos interiores de un

triángulo, volvieron a calcular la suma de los ángulos interiores de este último, midiendo y realizando la correspondiente suma, a pesar de haber expresado en forma escrita y verbal que dicha suma era de 180° para todos los triángulos, sin importar tamaño o forma. Este actuar se explica de tres maneras distintas:

1.- La primera, es que los alumnos no comprendían el campo de validez de los cuantificadores que habían utilizado.

2.- La segunda, acorde con el sentido de verificación que los alumnos le dieron a la comprobación. Si la comprobación fue entendida como una verificación de un resultado, es natural y lógico que los alumnos verificaran que la suma de los ángulos interiores de todos los triángulos con los que trabajaron efectivamente les diera 180°, ya que los triángulos proporcionados en las hojas impresa de las actividades 3, 4, 5, 6, y 7 eran de formas y tamaños distintos.

3.- La tercera explicación versa sobre la idea de que los alumnos consideraran a las comprobaciones realizadas sobre los polígonos como comprobaciones únicas, que solamente eran válidas para el polígono tratado en cuestión. Así estos alumnos no pudieron apreciar el aspecto genérico del ejemplo, como representante de una clase de polígonos.

— Para hacer avanzar a la comprobación, entendida como la de un solo caso, o como la verificación de resultados, a un sentido genérico, se requiere que los alumnos reconozcan que una figura geométrica representa a toda una clase de polígonos.

REFERENCIAS

Alibert, D. (1988). Towards new customs in the classroom. *For the Learning of Mathematics, 8* (2), pp. 31-35.

Arsac, G., Balacheff, N., y Mante, M. (1992). Teacher's role and reproducibility of didactical situations. *Educational Studies in Mathematics. 86*, pp. 5-29.

Balacheff, N. (1982). Preuves et demostration en Mathématiques au Collège. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *3*(3).

Balacheff, N. (1987). Processus de preuves et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18*(2), pp. 147-176.

Balacheff, N. (1990). Beyond a Psychological Approach: the Psychology of Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics*, *10*, (3).

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogota: Una empresa docente.

Balacheff, N., y Laborde, C. (1985). Lenguajes simbólicos y pruebas en la enseñanza de las Matemáticas: un enfoque sociocognitivo. En Mugny, G., y Perez, J. (Eds.), *Psicología social del desarrollo cognitivo*, pp. 265-288. Barcelona: Editorial Anthropos.

Barbin, E. (1994). *The meanings of mathematical Proof. On relations between history and mathematical education*. En Joby, M (Comps.), *In Eves' circles [MAA Notes, No. 34],* pp. 41-52. Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Barrón, H., Sánchez, A., y Arteaga, R. (2003). *Cuaderno de actividades. Matemáticas 2 secundaria*. México: Ediciones SM.

Bell, A. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics, 7*, pp. 23-40.

Bosch, C. y Gomez, C. (1999). *Matemáticas 2 Secundaria.* México: Editorial Nuevo México.

Brousseau, G. (1977) *Estudio local de procesos de adquisición en situaciones escolares*, Boletín del IREM de Bordeux No. 18.

Brousseau, G. (2000). Educación y didáctica de las matemáticas. *Educación Matemática*, *12*(1), pp. 5-38.

Carrión, V. (1993). Un recurso para la enseñanza de la geometría. *Educación Matemática,* 5(1), pp. 11-45.

Carter, J. y Ferrucci, B. (2003). Survey of paper cutting, folding and tearing in mathematics textbooks for prospective elementary school teachers. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, Winter, 2003.

Castañeda, F. (2004). *Visualización y Matemáticas*. En: http://divulgamat.ehu.es/weborriak/TestuakOnLine/03-04/PG03-04-fcataneda.pdf (Consulta más reciente: 5 de junio, 2007).

Chavez, U., Chavez, J., García, S., Reyes, M., Tavera, C., y Villar, E. (2001). *Sigma 2. Educación secundaria segundo grado*. México: Grupo Editorial Norma Educativa.

Chazan, D. (1993). High School Geometry Students' Justification for their View of Empirical Evidence and Mathematical Proof. *Educational Studies in Mathematics*, *24*, pp. 359-387.

Cruz, T. (1999). *200 tareas. Matemáticas 2*. México: Ediciones matemáticas fáciles.

Curiel, M., Tavera, C., y Villar, E. (2001). *Rayuela. Cuaderno de ejercicio de matemáticas 2*. México: Grupo Editorial Norma Educativa.

D'Amore, B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Italia: Pitagora Editrice Bologna.

Davis, P. (1993). Visual theorems. *Educational Studies in Mathematics*, *24,* pp. 333-344.

De Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras,* (24), pp. 17-24.

De Villiers, M. (1991). Pupils' need for conviction and explanation within the context of geometry. *Pythagoras,* (26), pp. 18-27.

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon,* (26), pp. 15-29.

Diccionario de la Lengua Española (1988). Madrid: Espasa-Calpe.

Dubnov, Y. (2003). *Errores de las demostraciones geométricas*. México: LIMUSA.

Duran, R., Rivera, M., López, G., y Pérez, E. (2003). *Creatividad en el desarrollo de la inteligencia. Cuaderno de trabajo de matemáticas 2*. México: Esfinge.

Duval, R. (1992). Argumenter, demontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive. *Petit x,* (31), pp. 37-61.

Duval, R. (2003). Voir en mathematiques. En E. Filloy (Ed.), *Matemática Educativa. Aspectos de la investigación actual*, pp. 41-76. México: CINVESTAV-IPN y Fondo de Cultura Económica.

Escareño, F., Mancera, E., y Espinosa, H. (2001). *Matemáticas. Enfoque de resolución de problemas 2*. México: Trillas.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Netherlands: D. Reidel Publishing.

Fischbein, E. (1983). Intuition and proof. *For the Learning of Mathematics*, *3*(2), p. 9.

Fischbein, E. (1990). Intuition and information processing in mathematical activity. *International Journal of Science Education*, *XIV*(1), p. 31.

Fischbein, E., y Kedem, I. (1982). Proof and certitude in the development of mathematical thinking. En A. Vermandel (Ed.), *Proceedings of the Sixth Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* pp. 128-131. Antwerp.

Fischbein, Efraim. (1999). *Conocimiento intuitivo y conocimiento lógico en la actividad matemática*. México: Pitagora Editrice Bologna y Grupo Editorial Iberoamérica.

Flores, A. (1993). Un tratamiento geométrico de la inducción matemática: Pruebas que explican. *Miscelánea Matemática*, 19, pp. 11-23.

Flores, J., y Lechuga, M. (2000). *Matemáticas...¿para qué? 2 Ejercicios para secundaria*. México: Editorial Nuevo México.

Fredericksen, (1984). Implications of cognitive theory for instruction in problem solving. *Review of Educational Research*, 54, pp. 363-408.

Fridman, L. (1995). *Metodología para resolver problemas de matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

García, E. (2002). *El profesor de matemáticas en secundaria: formación y desempeño en el aula*. Educación matemática de la FES Acatlan-UNAM, México. [Tesis de Maestría inédita]

García, M., y Delgado, A. (2002). *Invitación a las matemáticas 2. Actividades de exploración, juegos y ejercicios*. México: Prentice Hall.

García, M., Rivera, M., y Durán, R. (2001). *Estrategias matemáticas 2. Cuaderno de actividades complementarias*. México: Esfinge.

Giordano, M. (2005). *Racionalidad matemática y mediación semiótica en el campo de experiencia de las transformaciones* geométricas. Línea de especialización en Educación matemática de la UPN, México. [Tesis de Doctorado inédita]

Godino, J. y Recio A. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, *19*,*3*, pp. 405-414.

Godino, J., Recio A. (1997). Approaching rational geometry: from physical relationships to conditional statements. En *Proceedings of the Twenty one International Conference on the Psychology of Mathematics Education*, pp. 313-320. Lahti. Finland.

González, M., Ríos, R., y González, R. (2000). *Matemáticas 2. Cuaderno de trabajo*. México: Castillo.

Guirette, R. (2004). *Pruebas sin palabras: un estudio de casos con profesores de* bachillerato. Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav, México. [Tesis de maestría inédita]

Guzman, M. (1996). *El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en análisis matemático*. Madrid: Pirámide.

Hanna, G. (1989). Proofs that prove and proofs that explain. En *Proceedings of the Thirteenth International Conference on the Psychology of Mathematics Education*, pp. 45-51. Paris.

Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of Proof. *For the Learning of Mathematics*, *15*(3), pp. 42-49.

Harel, G., y Sowder, L. (1998). Student's proof schemes: Results from exploratory studies. En Dubinski, E.; Schoenfeld, A., y Kaput, J. (Eds), *Research on Collegiate Mathematics Educatio*n, vol. III., pp. 234-283. Providence, USA: American Mathematical Society.

Heinze, A. y Reiss, K. (2003). Reasoning and proof. Methodological knowledge as a component of proof competence. En Mariotti, M. (Ed.), *International Newsletter of Proof*, (4) p. 6.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics 24*, pp. 389-399.

Hoyles, C. (1997). The curricular shaping of students' approaches to proof. *For the Learning of Mathematics 17*, pp. 7-16.

Ibañez, M. (2001). Cuatro cuestiones en torno al aprendizaje de la demostración. En Moreno, M., Gil, F., Socas, M. y Godino, J. (Eds.), *Actas del quinto simposio de la sociedad española de investigación en educación matemática*, pp. 11-26. Almería.

INEE [Instituto Nacional para la Evaluación Educativa]. (2005). *Indicadores del sistema educativo nacional*. México: Instituto Nacional para la Evaluación Educativa.

Knipping, C. (2001). Towards a comparative analysis of proof teaching. En A. Vermandel (Ed.), *Proceedings of the Twenty fifth Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, pp. 249-256. Utrecht.

Ledesma (1994). Estudio de cónicas con papel. *Educación Matemática*, *6*,2, pp. 87-100.

Levenson, G. (1995). *The Educational Benefits of Origami.* En: http://www.sadako.com/fold/edbens.html (Consulta más reciente: 5 de junio, 2007).

Mariotti, M. (1998). La intuición y la prueba: Reflexiones sobre los aportes de Fischbein. *Preuve, International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof.* En: http://www.cabri.net/Preuve/Newsletter/981112Theme/981112ThemeES.html (Consulta más reciente: 5 de junio, 2007).

Martin, W., y Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal in Mathemetics Education*, 20, pp. 41-51.

Mason, J., Burton, L., y Stacey, K. (1987). *Thinking Mathematically.* Nueva York: Addison Wesley.

Mercado, M. (2004). *Del descubrimiento de resultados geométricos en un ambiente de geometría dinámica a la formulación de conjeturas y su prueba: Un estudio con alumnos de bachillerato*. Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav, México. [Tesis de doctorado inédita]

Moore, R. (1990). *College students' difficulties in learning to do mathematical proofs*. Universidad de Georgia. [Tesis de doctorado inédita]

Nelsen, R. (1993). *Proofs without words: Excercises in visual thinking*. Washington, DC, EE. UU.: The Mathematical Association of America.

Nelsen, R. (2002). Proofs without words: The area of an arbelos. *Mathematics Magazine*, *75*(2), p. 144.

OCDE (2004). *Marcos teóricos de PISA 2003: la medida de los conocimientos y destrezas en matemáticas, lectura, ciencias y resolución de problemas.* Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia, Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo.

Parra, B. (1990). Dos concepciones de resolución de problemas de matemáticas. En: Alarcón, J. y Rosas, R (coord.). *La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria. Lecturas*. 1995, pp. 13-32. México: SEP.

Polya, G. (1969). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Editorial Trillas.

Ramos, A., y Montejano, A. (2001). *Cuaderno de actividades para segundo grado de educación secundaria*. México: Ángeles Editores.

Reid, D. (1995). *The need to prove*. Universidad de Alberta, Edmonton. [Tesis de Doctorado inédita]

Rivière, V. (2001). *Convencer y formalizar: Papel y límites de la demostración en secundaria*. En: http://www.quadernsdigitals.net/index.php?accionMenu=hemerateca.VisualizaArticuls IU.visualiza&articulo_id=6221 (Consulta más reciente: 5 de junio, 2007).

Ross, K. (1998) Doing and proving: The place of algorithms and proof in school mathematics. *American Mathematical Montly*, *3*, pp. 252-255.

Sánchez, E., Ávila, R., y Yáñez, G. (2002). *Matemáticas. Cuaderno de trabajo educación secundaria 2*. México: Editorial Patria.

Sánchez, E., Hoyos, V., Guzmán, J., y Sáiz, M. (2000). *Matemáticas 2 segundo grado*. México: Editorial Patria.

Santos, L. (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Schoenfeld, A. (1987). What's all the fuss about metacognition? En A. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education*, pp. 189-215. Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically Problem Solving, metacognition and sense making in mathematics. En D. A. Grouwns (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, pp. 334-370. Nueva York: Macmillan Publishing Co.*

SEP [Secretaría de Educación Pública]. (1994). *Plan y programas de estudio 1993. Educación Básica Secundaria*. México: SEP.

SEP [Secretaría de Educación Pública]. (2001a). *La enseñanza de las Matemáticas en la escuela secundaria. Lecturas. Primer nivel. Programa nacional de actualización permanente*. México: SEP.

SEP [Secretaría de Educación Pública]. (2001b). *Libro para el Maestro. Matemáticas. Educación Secundaria*. México: SEP.

SEP [Secretaría de Educación Pública]. (2001c). *Secuencia y organización de contenidos. Matemáticas. Educación Secundaria*. México: SEP.

SEP [Secretaría de Educación Pública]. (2001d). *Fichero de actividades didácticas. Matemáticas. Educación Secundaria*. México: SEP.

SEP [Secretaría de Educación Pública]. (2001e). *Juega y aprende matemáticas: Propuestas para divertirse y trabar en el aula.* México: SEP, Libros del rincón.

Selden, A., y Selden, J. (1996). The Role of Logic in the Validation of Mathematical Proofs. En: http://www-cabri.imag.fr/Preuve/Newsletter/980304.html (Consulta más reciente: 5 de junio, 2007).

Silverman, F. y Nevada, N. (1996). *Origami: In Creasing Geometry in the Classroom*. En: http://web.archive.org/web/20011121132404/http://www.fascinating_folds.com/learningcenter/increasing.htm (Consulta más reciente: 5 de junio, 2007).

Simon, H. (1973). The structure of ill-structured problems. *Artificial Intelligence*, 4, pp. 181-201.

Singh, S. (2004). *El enigma de Fermat*. Barcelona: Planeta.

Szendrei, J (1996). Concrete Materials in the classromm. En Bishop et alt. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. (1991a). Reflections. En Tall, D. (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, pp. 251-260. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Tall, D. (1991b). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. En Tall, D. (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, pp. 3-21. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Tall, D. (1994). Understanding the Processes of Advanced Mathematical Thinking. *Conferencia en el International Congress of Mathematicians.* Zurich.

Tall, D. (1995). *Cognitive development, representations and proof*. (Reporte presentado en la conferencia *Justifying and Proving in School Mathematics,* Institute of Education, Londres, Diciembre 1995, pp. 27-38.)

Valiente, S., y Valiente, S. (2001). *Matemáticas 2 secundaria*. México: Ediciones Castillo.

Valiente, S., y Valiente, S. (2002). *Matemáticas 2 secundaria. Cuaderno de trabajo*. México: Ediciones Castillo.

Vicario, V., y Carrillo, J. (2004). *Concepciones del profesor de secundaria sobre la demostración matemática. El caso de la irracionalidad de √2 y las funciones de la demostración*. En: http://www.uco.es/~malmamaa/Simposio_Cordoba/3-Vicario_Carrillo.pdf (Consulta más reciente: 5 de junio, 2007).

Vidal, R. y Díaz, M. (2004), *Resultados de las pruebas PISA 2000 y 2003 en México. Habilidades para la vida en estudiantes de 15 años.* México: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

Weber, K. (2002). Beyond proving and explaining. Proofs that justify the use of definitions and axiomatic structures and proof that illustrate technique. *For the Learning of Mathematics*, *22*(3), pp. 14-17.

Zeistz, P. (1999). *The art and craft of problem solving*. New York: John Wiley & Sons.

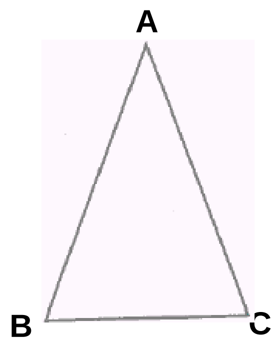
Apéndice A. Actividades para que los alumnos conjeturen, expliquen y emitan un juicio sobre la validez de una afirmación

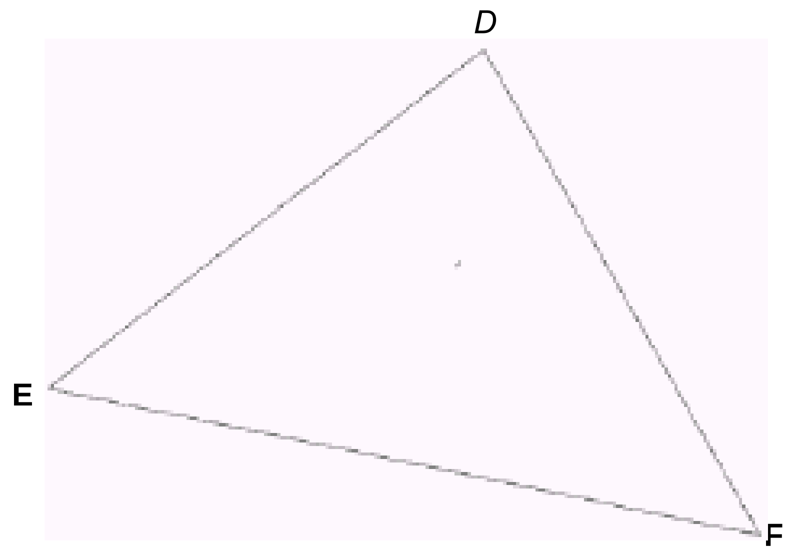
Actividad 1

Juzguen si es falsa o verdadera la siguiente afirmación. Marquen con una X la opción que escojan. Expliquen por qué.

El perímetro de un triángulo pequeño es menor que el perímetro de un triángulo grande. ☐ Falsa ☐ Verdadera

Con estos dos triángulos, uno pequeño y otro grande, verifiquen su respuesta.





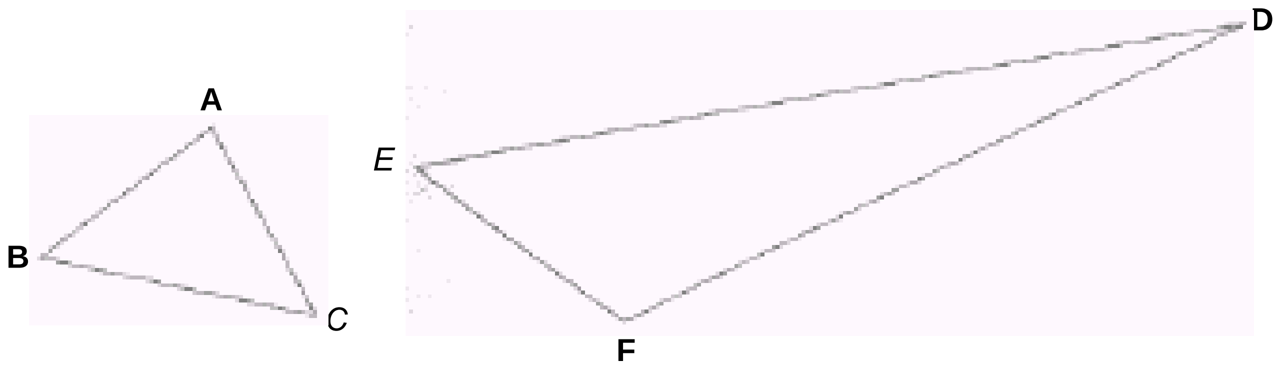
Actividad 2

Juzguen si es falsa o verdadera la siguiente afirmación. Marquen con una X la opción que escojan. Expliquen por qué.

El área de un triángulo pequeño es menor que el área de un triángulo grande.

☐ Falsa ☐ Verdadera

Con estos dos triángulos, uno pequeño y otro grande, verifiquen su respuesta.



Actividad 3

Juzguen si es falsa o verdadera la siguiente afirmación. Marquen con una X la opción que escojan. Expliquen por qué.

La suma de los ángulos interiores de un triángulo pequeño es menor que la suma de los ángulos interiores de un triángulo grande. ☐ Falsa ☐ Verdadera

Con estos dos triángulos, uno pequeño y otro grande, verifiquen su respuesta.

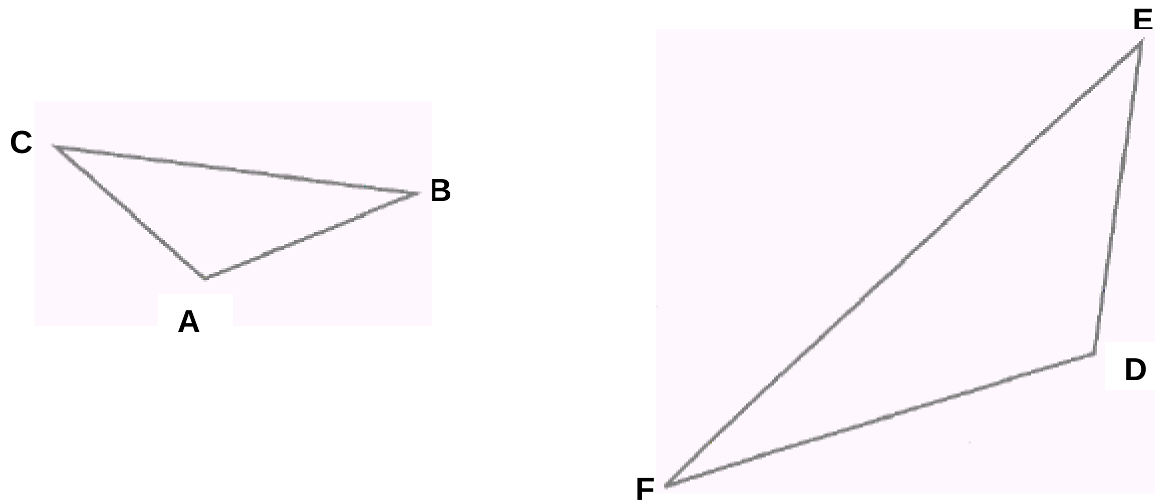


Figura 1.

¿Cuánto suman los ángulos interiores del triángulo *ABC*? ___________________

¿Por qué?

____

____

____

____

¿Cuánto suman los ángulos interiores del triángulo *DEF*? ___________________

¿Por qué?

____

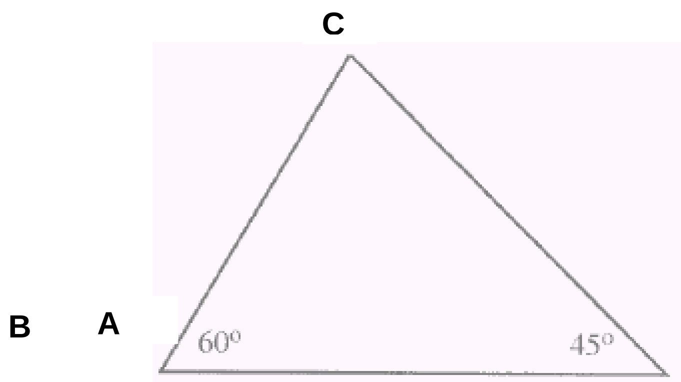
____

____

____

Actividad 4

En el siguiente triángulo se dan las medidas de dos de sus ángulos interiores. ¿Cuánto mide el tercer ángulo interior del triángulo?



____

Dados los siguientes ángulos, anota sobre la línea la medida que debe tener un tercer ángulo para que los tres sean los ángulos interiores de un triángulo.

$\angle A = 55°$

$\angle B = 73°$

$\angle C =$ __________

$\angle A + \angle B + \angle C =$ __________________

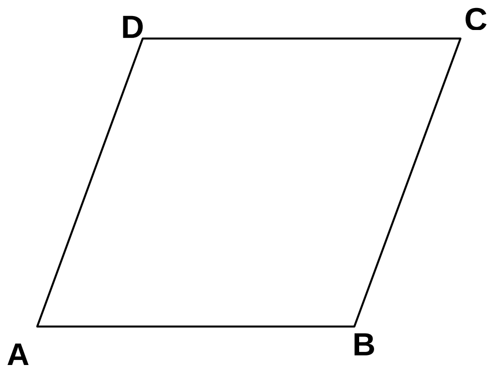
Apéndice B. Actividades para que los alumnos generalicen inductivamente un resultado matemático

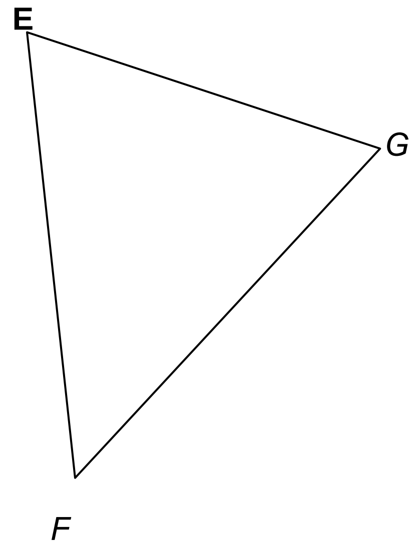
Actividad 5

Respondan la siguiente pregunta. Expliquen su respuesta.

¿Cómo es el resultado de la adición de los ángulos interiores de un cuadrilátero con respecto al resultado de la adición de los ángulos interiores de un triángulo?

Con estos dos polígonos, uno un cuadrilátero y otro un triángulo, verifica tu respuesta.





¿Cuánto suman los ángulos interiores del cuadrilátero *ABCD*? ________________

¿Por qué?

____

____

____

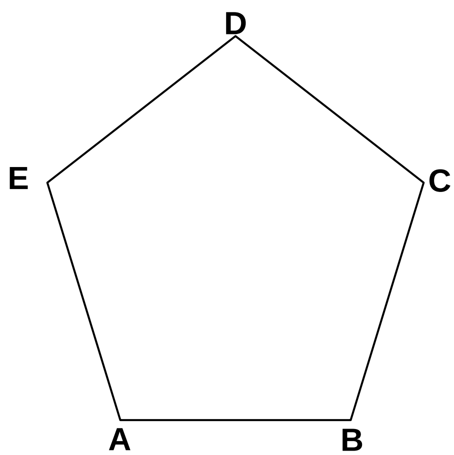
____

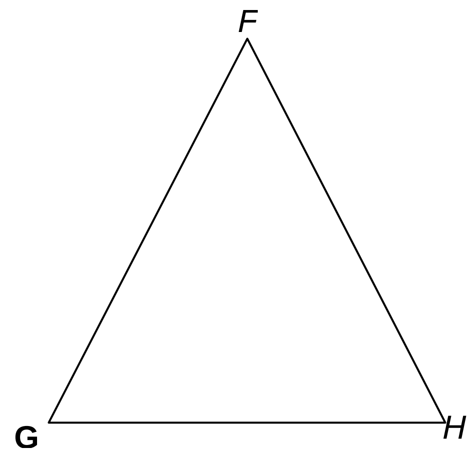
Actividad 6

Respondan la siguiente pregunta. Expliquen su respuesta.

¿Cómo es el resultado de la adición de los ángulos interiores de un pentágono con respecto al resultado de la adición de los ángulos interiores de un triángulo?

Con estos dos polígonos, uno un pentágono y el otro un triángulo verifica tu respuesta.





¿Cuánto suman los ángulos interiores del pentágono *ABCDE*? ________________

¿Por qué?

____

____

____

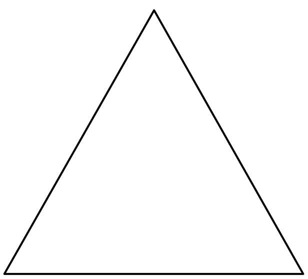
____

Actividad 7

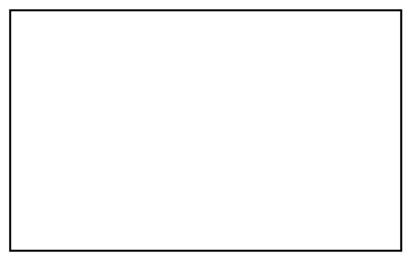
Respondan a la siguiente pregunta. Expliquen su respuesta.

¿Cómo es la suma de los ángulos interiores de un polígono de *n* lados (se llama eneágono), con respecto a la adición de los ángulos interiores de un triángulo?

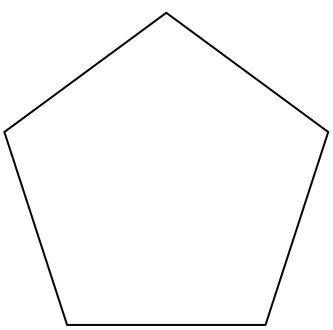
Con estos polígonos, verifica tu respuesta.



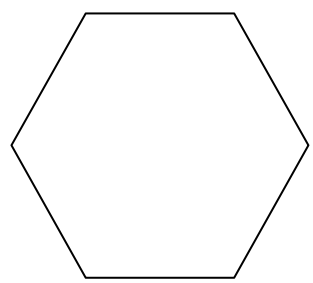
$n = 3$



$n = 4$



$n = 5$



$n = 6$

Completen la siguiente tabla.

Polígono	Número de lados del polígono	Número de triángulos formados	Suma de las medidas de los ángulos interiores del polígono
Triángulo	3	1	
Cuadrilátero	4		
Pentágono	5		
Hexágono			
Heptágono (7 lados)			
Eneágono (*n* lados)			

¿Cuál es la relación entre el número de lados de un polígono y el número de triángulos en que queda dividido?

____

____

____

____

Escriban una formula para encontrar la suma de las medidas de los ángulos interiores de un polígono de *n* lados.

Apéndice C

ASUNTO: SOLICITAR AUTORIZACIÓN PARA REALIZAR OBSERVACIONES DENTRO DEL PLANTEL

7 de junio de 2006

Sor María Isabel Vargas Balderas
Directora General del Colegio
... ...
PRESENTE

El que suscribe C. Ing. Químico Ernesto Germán Larios Matuk estudiante de la Maestría en Desarrollo Educativo en la línea de especialización de Educación Matemática, impartida en la Universidad Pedagógica Nacional, plantel Ajusco, solicito de la manera más atenta se me permita el acceso a las instalaciones del plantel los días martes 13 y viernes 16 del mes en curso, para llevar a cabo una serie de actividades elaboradas para recopilar información necesaria para mi trabajo de investigación, indispensable para elaborar la tesis que al ser sometida al escrutinio del jurado, servirá como elemento de análisis para mi examen profesional de grado.

Mi tema de investigación se relaciona con los procesos de validación de proposiciones matemáticas que los alumnos de la educación secundaria ponen en juego al cuestionarles la validez de una afirmación matemática. Mi objeto de investigación se encuentra enmarcado en el campo de la geometría, centrado en contenidos del programa de segundo grado vigente.

Por tal motivo solicito me permita trabajar con doce alumnos de segundo grado, seis varones y seis mujeres. La metodología para llevar a cabo las sesiones de trabajo se puede resumir de la siguiente manera: Los alumnos se organizaran en parejas mixtas y, atendiendo a las facilidades para registrar las actividades de los alumnos, se dividirán las 6 parejas formadas en dos grupos de 3 parejas cada grupo. Con cada grupo de 3 parejas se llevarán a cabo dos sesiones de trabajo, cada una de una hora y media. La primera sesión se implementará el martes 13 de junio y, la segunda el viernes 16 de junio. Con la finalidad de registrar de forma objetiva el trabajo de los alumnos solicito se me permita grabar las sesiones en audio y video.

Agradezco de antemano su amable atención y quedo de usted en espera. Sin otro particular, aprovecho la ocasión para enviarle un cordial saludo.

Respetuosamente

Ing. Químico Ernesto Germán Larios Matuk
Profesor de enseñanza secundaria
Maestrante de la MDE