Transición aritmética-álgebra: un estudio usando la calculadora con estudiantes de 10-12 años de edad

Universidad Pedagógica Nacional

Presenta:

Alberto Muñoz Castro

Para obtener el título de

Licenciado en Psicología Educativa

Asesor:

Dr. Tenoch E. Cedillo Ávalos

2006

ÍNDICE

RESUMEN

En esta tesis se presentan los resultados del trabajo realizado en torno al proceso de transición de la aritmética al álgebra. Un asunto central en este trabajo fue estudiar las estrategias que generan los estudiantes de 10 a 12 años al resolver ecuaciones utilizando la calculadora. La tesis se basa en la investigación desarrollada por Bruner (1983) sobre la adquisición del lenguaje materno; entre sus principales hallazgos este autor encontró que el lenguaje natural se enseña, y que el proceso de enseñanza se da en la interacción entre la madre y el niño a través de esquemas que él denomina *formatos*. Se retomó lo anterior para llevarlo a la clase de matemáticas creando un ambiente en el aula para generar la posibilidad de que el profesor y los alumnos establezcan vínculos similares a los que se dan entre el niño y su madre en el contexto de la enseñanza del lenguaje algebraico. La recolección de datos se llevó a cabo usando el método de estudio de casos estudiando de manera especial las estrategias desarrolladas por los estudiantes para la resolución de ecuaciones auxiliándose de la calculadora. Los resultados muestran que alumnos del quinto grado de la escuela primaria son capaces de abordar con éxito ecuaciones, generando estrategias propias con base en sus incipientes conocimientos aritméticos, y diversos procesos evolutivos de razonamiento que propició el uso de la calculadora. Las actividades en el aula se centraron en pedir a los alumnos que encontraran el número que falta en ecuaciones de primer grado. Se aprovechó que la máquina ofrece retroalimentación numérica que los alumnos podían entender.

INTRODUCCIÓN

Cuando se habla de matemáticas se piensa en una materia que representa un alto grado de dificultad para los estudiantes. Después de los conocimientos básicos de matemáticas que se enseñan en la escuela pareciera ser que, de todas las asignaturas del currículo escolar, ésta es la que tiene menos que ver con la vida cotidiana, que su aprendizaje es difícil y que la inclusión de esta asignatura en los programas escolares es un filtro para controlar la creciente demanda de ingreso a los sistemas educativos del bachillerato y del nivel superior.

¿Por qué son difíciles las matemáticas? Pueden ser muchas las respuestas y explicaciones, Barberá y Gómez-Graneli (1990) y Bruer (1993), consideran esta disciplina como altamente abstracta, que se fundamenta en un sistema axiomático basado en un método lógico-deductivo y en el uso de un lenguaje formal; además, sus métodos y procedimientos conllevan el rigor de toda disciplina formal. Desde esta perspectiva las matemáticas son vistas como una asignatura de gran complejidad en comparación con otras asignaturas; su aprendizaje requiere la adquisición de un lenguaje formal y estructurado y esto, sumado a las poco exitosas estrategias que se emplean para la enseñanza de este lenguaje, ha provocado en buena medida que los estudiantes vean el estudio de esta materia carente de sentido, debido, entre otras razones, a que muchos profesores no pueden hacer evidente en su práctica docente cotidiana la importancia de sus aplicaciones en las carreras profesionales.

El problema de investigación

Después de la aritmética, el aprendizaje de las matemáticas en la secundaria, y en los niveles educativos subsecuentes, depende en gran medida de la adquisición de un lenguaje formal (el algebraico), si ese lenguaje no se adquiere el aprendizaje matemático se vuelve una actividad compleja para muchos estudiantes (Orton, citado en Pimm, 1987). ¿Por qué no es fácil adquirir este lenguaje? Pimm (1987), Mason (1989), Mason, Burton, Stacey (1984) Mason, Gower, Graham, Pimm (1985) y Kaplan, Yamamoto y Ginsburg (1993), consideran al álgebra como un lenguaje, que además de ser un medio instrumental para efectuar cálculos cada vez más sofisticados, es una herramienta para expresar y justificar generalizaciones y para plantear y resolver problemas.

El aprendizaje del lenguaje algebraico se ha abordado desde la perspectiva de sus distintos usos: (i) como una herramienta para expresar y justificar generalizaciones mediante el uso del concepto de función (Mason, 1984; Cedillo, 1996); (ii) como una herramienta para plantear y resolver problemas mediante ecuaciones (Rojano, 1991b). En esta tesis abordaremos el aprendizaje del lenguaje algebraico en el contexto de la resolución de ecuaciones.

Se propone investigar cómo se da la adquisición del lenguaje algebraico bajo las condiciones que ofrece un ambiente de enseñanza que se diseñará específicamente para este trabajo. En particular, se instrumentará una estrategia didáctica que invite a los alumnos a usar métodos que ellos mismos generen para resolver ecuaciones; de acuerdo con los estudios realizados por Cedillo (2003, 45) se asume como estrategia didáctica: “configuración de los eventos en el aula, siguiendo las formas de razonamiento de los estudiantes”.

Buena parte de esa estrategia didáctica se sustenta en el apoyo de la calculadora, como una herramienta que medie la relación entre los estudiantes y los contenidos de enseñanza. Los reportes de investigación mencionan que el aprendizaje del código algebraico es uno de los principales factores por los que las matemáticas resultan complicadas e inaccesibles para muchos estudiantes (Mason, et. al., 1984). Partimos del supuesto de que si el alumno es capaz de adquirir este lenguaje significativamente, las matemáticas escolares podrían ser accesibles para más estudiantes.

Estudios más recientes (Cedillo 1996, 2001) han centrado su atención hacia esta vertiente, preguntándose sobre la posibilidad de que el alumno pueda establecer algún vinculo de comunicación prelingüística con su maestro y así aprender con mayor éxito el lenguaje matemático, de manera similar a la forma en que se aprende el lenguaje materno. Estas cuestiones se abordarán con mayor amplitud en el capítulo donde se aborda el referente teórico que se adopta en esta tesis.

Respecto al aprendizaje del lenguaje natural, Bruner (1983) se planteó la siguiente pregunta de investigación:

> ¿Cómo es que los niños, aparentemente sin esfuerzo, aprenden algo tan complejo como el lenguaje materno?

Bruner (1982, 1983) se propuso obtener respuestas plausibles a esta pregunta estudiando cómo se dan los vínculos de comunicación que establece el niño con su madre; entre otras cosas sus hallazgos confirmaron que nadie necesitó enseñar a la madre o al niño cómo establecer esos vínculos, éstos se generan debido a la necesidad de comunicarse. “La adquisición del lenguaje, comienza cuando la madre y el niño crean una estructura posible de acción recíproca que puede servir como un microcosmos para comunicarse y para construir un realidad compartida” (Bruner, 1983, 27); a esa estructura le llamó *formato*, que consiste en los vínculos que se forman entre la madre y su hijo para comunicarse y entenderse.

Objetivos

1. Aportar evidencia empírica sobre el alcance de las estrategias intuitivas que generan los alumnos en el proceso de aprendizaje de resolución de ecuaciones con auxilio de la calculadora.
2. Comparar los resultados de esta tesis con los obtenidos sobre resolución de ecuaciones en investigaciones nacionales e internacionales.

Propósitos y estrategias generales

Esta tesis propone que el diseño del ambiente de enseñanza para la adquisición del lenguaje algebraico sea con base en los estudios realizados por Cedillo (1994, 1996, 1998, 2001, 2003). Este autor desarrolla una teoría para la enseñanza y el aprendizaje del álgebra que se fundamenta en la investigación que realizó Bruner (1983) sobre la adquisición del lenguaje materno. Sucintamente expuesto, Bruner propone que los niños son capaces de adquirir el lenguaje verbal sin que se requiera el aprendizaje previo de reglas y definiciones, los significados del lenguaje se generan mediante su uso, este uso es motivado por la necesidad de comunicación que existe entre el niño y su madre. La madre genera una estrategia de comunicación prelingüística mediante el establecimiento de formas de interacción a las que Bruner llama *formatos.* Bruner (1982, 1983) creó el concepto de *formato* para describir la manera en que los adultos crean un ambiente de aprendizaje para el niño, un ambiente en el que el adulto puede interactuar con un sujeto que todavía no es capaz de comunicarse a través del lenguaje. "Un formato es un esquema para la interacción regulada que el niño y el adulto generan juntos. Los formatos regulan la interacción comunicativa antes de que el niño disponga del discurso del léxico gramatical, los formatos constituyen los vehículos para la transición de la comunicación prelingüística al lenguaje" (Bruner, 1983, 28).

Esta tesis consiste en un estudio que se ubica en el proceso de la transición de la aritmética al álgebra y en las formas en que el anclaje en los conceptos aritméticos que presentan estudiantes de 10-12 años de edad pueden aprovecharse -o pueden interferir- en la comprensión y resolución de problemas algebraicos. Nuestra propuesta está enfocada a la creación de formatos en el sentido en que los desarrolla Cedillo (2001, 2003). Esto es, retomaremos lo planteado por Bruner para, guardadas las diferencias esenciales entre el lenguaje natural y el algebraico, llevarlo a la clase de matemáticas para crear un ambiente en el aula que genere la posibilidad de que el profesor y los alumnos establezcan vínculos similares a los que se dan entre el niño y su madre en el contexto de la enseñanza del lenguaje algebraico. Proponemos crear estos formatos a partir de una metodología donde se utilicen como herramienta principal las estrategias desarrolladas por los estudiantes para la resolución de ecuaciones. Este enfoque metodológico se detalla más adelante tomando como base el estudio realizado por Cedillo (1996). Las estrategias que los propios estudiantes generen serán el medio que permita el establecimiento de la comunicación entre un estudiante que aún no sabe álgebra y un profesor que es experto en la materia, situación similar a la que se da entre un niño que todavía no sabe comunicarse con su madre mediante el lenguaje.

La investigación en preálgebra

El papel de la aritmética como punto de partida para la enseñanza del álgebra es aún objeto de controversias, algunos autores consideran la aritmética como un obstáculo que debe superarse, otros la valoran como el nicho en el que pueden cultivarse los primeros conceptos del álgebra.

Varios autores han formulado la hipótesis de que el alumno no puede adquirir el lenguaje algebraico debido al *anclaje* que tiene en la aritmética: “el anclaje se manifiesta en un modo aritmético de pensar y abordar tareas matemáticas que persiste en los alumnos que ya han cursado la escuela secundaria e incluso el bachillerato” (Booth, 1981; Rojano, 1991c; Fogelman, citado en Rosas, 1995, 45). Nosotros nos proponemos obtener datos empíricos que permitan ratificar o refutar esa hipótesis.

Los resultados obtenidos por Rojano (1999a), sugieren que el anclaje en la aritmética no permite al alumno de secundaria pensar de forma algebraica, por ejemplo, al resolver una ecuación como $8x+3=27$. Esta ecuación puede resolverse fácilmente empleando recursos aritméticos, por ejemplo: ¿qué número sumado con 3 da 27? ... 24 ... ¿Qué número multiplicado por 8 da 24? ... 3. Rojano encontró que sólo el 10% de los alumnos acudieron a estrategias aritméticas como la anterior, el resto intentó una respuesta con métodos algebraicos y de ellos el 80% cometió errores al aplicar esos métodos.

Como antes se ha mencionado, hay autores que proponen que la enseñanza del álgebra se fundamente en lo que el estudiante previamente sabe: la aritmética (Vygotsky, citado en Radford, 1999; Cedillo, 2001). Por otra parte se ha realizado investigación que reporta el anclaje en la aritmética como un obstáculo a vencer si queremos que los estudiantes logren desarrollar un pensamiento algebraico. (Gascón, 1989; Chevallard, citado en Nickson, 2000). “En la práctica diaria, es común que los niños establezcan erróneamente una vinculación entre la aritmética y el álgebra, ya que cuando ellos manejan signos algebraicos, pretenden manipularlos a través de las mismas reglas estructurales de la aritmética” (Nickson, 2000, 109).

En esta tesis consideramos que muchas de las dificultades que encuentran los estudiantes para aprender los usos y procedimientos del álgebra no se deben a un problema de orden cognitivo, ni a un problema epistemológico asociado al álgebra, asumimos la premisa de que los problemas relacionados con el anclaje aritmético se derivan de formas específicas de enseñanza, por lo que una vía plausible para encontrar alguna solución es diseñar una estrategia de enseñanza alternativa y obtener evidencia empírica que nos permita contar con más elementos para validar/refutar esa postura.

Esta premisa se relaciona con los resultados obtenidos por Lee y Wheeler (1986), quienes tipificaron como “una desconexión entre la aritmética y el álgebra” la escasa habilidad de los estudiantes de preparatoria para distinguir qué herramienta usar, la aritmética o el álgebra, para abordar una serie de problemas. Sus datos les permitieron concluir que la disociación mencionada se debe en gran medida a una ausencia de significados para los símbolos y estructuras algebraicas. Sus indagaciones sugieren que una vez que los alumnos aprenden los algoritmos algebraicos, ponen de lado la aritmética como un referente semántico para el álgebra y dan paso a un aprendizaje descontextualizado y mecanicista que no les permite dar sentido ni significado al lenguaje algebraico.

Los datos que han arrojado esas investigaciones tienen un sólido respaldo en el hecho de que la gran mayoría de los alumnos de secundaria, al inicio de este nivel, no logran un uso adecuado del lenguaje algebraico. Entre otras, ésta es una razón por la que resulta pertinente continuar realizando investigación al respecto.

Otra postura teórica que orienta el desarrollo del trabajo que aquí se propone, es que si se toma a la aritmética como punto de partida para la adquisición del lenguaje algebraico, y se propicia que los estudiantes usen ese lenguaje de manera que se deriven y se generen significados para ese lenguaje, los alumnos estarán en mejores condiciones para acercarse al dominio que el currículo exige sobre el álgebra escolar (Cedillo, 2001). Pretendemos llevar a cabo esto a través de generar una estrategia didáctica que propicie que estudiantes de 10-12 años de edad aborden la resolución de ecuaciones partiendo de estrategias que ellos mismos generen.

Preguntas de investigación

El primer paso en nuestro marco metodológico consistió en plantear una serie de preguntas que guiaran esta investigación. La formulación de las preguntas nos conduce a determinar qué tipo de información (datos) nos permitirá responderlas y cómo podremos obtener datos relevantes que nos permitan lograr ese propósito.

Al respecto nos planteamos las siguientes preguntas de investigación:

1. ¿Cómo puede aprovecharse el conocimiento aritmético que adquieren los estudiantes durante la escuela primaria como punto de partida para iniciarlos en el uso del lenguaje algebraico como herramienta para resolver ecuaciones?
2. ¿Qué estrategias desarrollan los estudiantes cuando se aborda el tema de resolución de ecuaciones sin acudir a los métodos convencionales?
3. ¿Qué significados asocian los niños a las ecuaciones y a las literales que se usan para simbolizar las incógnitas cuando la enseñanza se basa en estrategias que los mismos estudiantes generan?

4. ¿Qué ventajas/desventajas se generan para abordar los métodos convencionales para resolver ecuaciones cuando se propicia que los estudiantes inicien este tema a partir de estrategias que ellos mismos generan?

Estructura del trabajo

En el Capítulo 1 se describe el *referente teórico* que adoptamos para dar sustento a este trabajo. En este capítulo se presentan los principales conceptos y teorías que se manejan a lo largo de este trabajo de tesis. Se presentan las premisas teóricas de este trabajo a partir de las investigaciones realizadas por Bruner (1982, 1983), Piaget (1985, 1988) y Chomsky (1957) sobre la adquisición del lenguaje, y discutimos las investigación realizada por Cedillo (1996, 1998, 2001, 2003), para establecer una relación entre el aprendizaje del lenguaje materno y el del lenguaje algebraico.

Se abordan también, los referentes teóricos en relación a la metodología, se describe la versión del método de investigación de *análisis cualitativo* y la estrategia de *estudio de casos* que se utilizaron, así como la justificación de su elección; se abordan también los trabajos preliminares a la fase del estudio principal que se denomina *recolección de datos,* así como el *diseño de las actividades*, realizadas en el estudio piloto.

- Elección del método de investigación
- El estudio de casos como estrategia de investigación
- Fases de investigación: recolección de datos
- Diseño de las actividades

En el capítulo 2 se abordan los aspectos metodológicos que guiaron la realización de ésta tesis: los temas tratados, las estrategias diseñadas, las actividades experimentales utilizadas (hojas de trabajo) y la forma en que se abordó la enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones mediante estrategias que los mismos alumnos generan. En este capítulo se pretende hacer evidente la relación entre el método de investigación y la perspectiva teórica. El capítulo se compone de las siguientes secciones, que a su vez corresponden a las etapas en que se desarrolló el proyecto:

- Estudio piloto
- Estudio principal
- Sujetos y fuentes de datos
- Hojas de trabajo
- Ambiente de trabajo en el aula.

Se describen las actividades realizadas tanto en el estudio piloto como en el principal, se abordan los criterios para la elección de los sujetos participantes, la relación del maestro (investigador) y los alumnos así como las fuentes de datos; se expondrán las hojas de trabajo utilizadas, así como la forma en que se organizaron las actividades de enseñanza en el aula, especificando el ambiente de trabajo que se genera en la misma.

En el capítulo 3 se presenta la *Descripción y Análisis de Resultados,* en él se discuten los resultados obtenidos en el trabajo de campo. En esta parte de la tesis se describe con detalle el trabajo realizado por cada alumno, en particular se hace énfasis en las nociones y estrategias que desarrollan los estudiantes cuando el ambiente de enseñanza se basa en la creación de métodos que ellos mismos generan con el apoyo de la calculadora. Los resultados se discuten con base en el referente teórico adoptado para esta tesis.

En el Capítulo 4 se plantean las *conclusiones* que se derivaron de este trabajo. Los resultados de esta tesis se analizan a la luz de lo reportado en la literatura de investigación que se relaciona con el trabajo que hemos realizado.

Se incluyen tres anexos al final del texto de la tesis. En el anexo 1 se presentan el cuestionario inicial; el anexo 2 presenta las actividades de aprendizaje: 2.1. Estudio piloto y 2.2 Estudio principal; y anexo 3 incluye los protocolos de entrevista que se utilizaron para profundizar en el análisis de los datos.

CAPÍTULO 1

REFERENTE TEÓRICO

En este trabajo asumimos que el aprendizaje del álgebra requiere la adquisición de un lenguaje formal y estructurado, no en el sentido de enseñar procedimientos que lleven a una solución determinada, ni de “adquirir conductas u obtener respuestas correctas (...) se trata de aprender a pensar” (Kaplan, Yamamoto y Ginsburg, 1993, 111). Esto implica que, como objeto de enseñanza, el código algebraico no se maneje como un conjunto de reglas y significados vacíos. El aprendizaje del álgebra, en el sentido en que queremos abordarlo en esta tesis, es poder entender su lenguaje como un medio esencial para formular, expresar y comunicar ideas matemáticas, “aprender a pensar matemáticamente” (Pimm, citado en Barbera y Gómez-Graneli, 1990, 23). Pimm hace énfasis en la diferencia entre el estudio de un sistema abstracto, regido por reglas, que resalta las formas estrictas, y la adquisición de la competencia comunicativa sobre determinados objetos, situaciones y fenómenos, con la concomitante importancia otorgada al aspecto oral. En este trabajo adoptamos la postura de que las matemáticas escolares deben ser aprendidas como un sistema de signos para expresar y justificar generalizaciones y como una herramienta para plantear y resolver problemas.

¿Cómo se puede llegar a adquirir ese lenguaje? Desde la dimensión del sistema escolar, la escuela, como un sistema de aprendizaje formal, es la entidad que ofrece los elementos para esta adquisición. La enseñanza, por tanto, podría plantearse considerando concepciones como las que hemos mencionado; la complicación radica en que las matemáticas, y en especial el álgebra, parecen ser inaccesibles para una amplia población, “para una gran mayoría de estudiantes las matemáticas han resultado algo muy difícil de comprender y en muchos casos un obstáculo insuperable” (Küchemann, 1981; Booth, 1984; Lee y Wheeler, 1986; Cedillo, 1999a, 2). Barbera y Gómez-Graneli (1990), Bruer (1993), coinciden en que esas dificultades que hacen poco accesibles las matemáticas se deben a la necesidad de dominar un lenguaje formal, que esto generalmente se intenta con poco éxito a través de un enfoque de enseñanza basado en el método lógico-deductivo.

Frecuentemente las matemáticas son enseñadas bajo enfoques formalistas o centrados en el aprendizaje de los algoritmos. Los profesores explican una serie de procedimientos, como camino único para llegar a un determinado fin, sin preguntarse por qué son válidos esos procedimientos y los resultados que mediante éstos se obtienen. Pareciera que enseñar matemáticas significa sólo crear un sujeto capaz de manipular símbolos numéricos y no numéricos, pero incapaz para darles algún significado. “Lo que importa no es la verdad del resultado obtenido, sino la correlación de procedimientos seguidos” (Barbera y Gómez- Graneli, 1990, 392).

Con los acercamientos centrados en el dominio de los algoritmos se puede conducir al estudiantes a un aprendizaje memorístico, centrado en el dominio de reglas para la operatividad numérica y algebraica, en vez del razonamiento (Bruer, 1993). Se enseñan las matemáticas como partes aisladas y pareciera ser que la aritmética no tiene nada que ver con la geometría, o ésta con el álgebra; así, las clases se convierten en un objeto confuso para los alumnos, que puede dar como resultado que el lenguaje matemático no se adquiera (Mason et al, 1984). Para Bruer (1993, 93) “el principal reto educativo consiste en ayudar a los niños a unir sus conocimientos y habilidades numéricas informales con las primeras reglas formales, nociones y procedimientos que encuentran cuando llegan al aula". Este autor se basó en investigaciones centradas de la Psicología cognitiva sobre la enseñanza de las matemáticas, que han mostrado que los niños de preescolar tienen interés innato por los números, por lo que sería de gran importancia que se aprovecharan como punto de partida los conocimientos previos que los alumnos tienen.

Así se asume como hipótesis que el lenguaje matemático formal exige la manipulación de conceptos y que si éstos se enseñan tomando lo que los alumnos saben previamente, la adquisición de este lenguaje pudiera darse de mejor manera. En el caso del álgebra el punto de partida es la aritmética, ya que algunos de los conceptos básicos de ésta pueden darle significación al álgebra.

Durante los últimos años se ha pretendido que los niños pueden comprender el sentido de la aritmética y usar ésta como herramienta para el entendimiento del álgebra (Nickson, 2000; Cedillo, 2001). Al respecto, Vigotsky (citado en Radford, 1999, 25) sugiere que "el álgebra es también aritmética, pero no es posible entenderlo igual, no es posible tener un entendimiento y habilidad de hacer álgebra sin tener un entendimiento y habilidad de hacer aritmética". La aritmética, por su naturaleza, es sencilla para los niños, con herramientas que ellos pueden usar para pensar.

Premisas teóricas para este trabajo

En este orden de ideas, se asume como premisa teórica que el código algebraico es un lenguaje que se puede adquirir con base en la utilización de la aritmética, y que la aritmética puede favorecer la traducción de un lenguaje natural a un lenguaje universalmente formalizado, el del álgebra, que conduce a la abstracción de la noción de número, de símbolo y de signo. El lenguaje formal aritmético permite también hacer inferencias sobre un problema, asignar significado a sus elementos y llegar a una solución; este lenguaje trata con números concretos y las operaciones con ellos.

Asumimos reportes de investigación en donde se indica: “se aprecia aún, que una considerable mayoría de los alumnos no pueden manejar conceptos algebraicos ni siquiera después de estar en la escuela secundaria”, (Rosas 1995, 45).

La adopción de este referente teórico exige que a los niños se les pueda enseñar considerando las diferencias entre la aritmética y el álgebra, ya que si la brecha entre estas disciplinas no se reconoce, se corre el riesgo de que los niños de manera intuitiva desarrollen estrategias basadas en concepciones erróneas (Chaiklin y Lesgold, 1984; Kieran, 1992; Nickson, 2000). La intuición no se puede utilizar en álgebra con tanta libertad, la situación se agrava aún más cuando se introduce el uso de variables partiendo de la intuición, sin ningún referente para validar el uso correcto de estos símbolos. Los niños construyen sus propios métodos, que frecuentemente no son correctos, estas dificultades se presentan porque ellos carecen de criterios para validar los procedimientos que espontáneamente generan. Entre otros autores (Wertsch, 1991; Kozulin, 1990; Zinchenko, 1985), Vigotsky, (citado en Radford, 1999, 29) concibió el signo "como una herramienta del pensamiento, sugiriendo que así como los seres humanos usan herramientas de labranza para dominar la naturaleza, de la misma manera éstos usan herramientas psicológicas para pensar y dominar el comportamiento".

El lenguaje natural y las matemáticas

La relación que plantea Vigotsky entre pensamiento y lenguaje nos conduce a proponer formas para ayudar al alumno a adquirir el lenguaje algebraico como un medio para expresar y trabajar con ideas matemáticas. Consideremos las matemáticas como un lenguaje y también consideremos la forma de adquisición de otros lenguajes, como la lengua materna. Bruner (1980, 1982, 1985), con base en resultados de su investigación encontró que el lenguaje materno no se enseña y se cuestiona, cómo es posible que el lenguaje sea aprendido por cualquier persona con una inteligencia normal, mientras que en otros campos no ocurre así.

Sin que ninguna de las dos partes (niño-adulto) tenga una preparación formalizada sobre cómo enseñar a hablar, se logra establecer un vínculo que permite generar códigos de comunicación entendibles para ambos. Bruner (1983) creó el concepto de *formato* para estudiar la manera en que los adultos crean un ambiente de aprendizaje para que ellos puedan actuar recíprocamente con un niño que todavía no es capaz de comunicarse a través del discurso. "Un formato es un esquema para la interacción regulada que el niño y el adulto tienen juntos. Los formatos regulan la interacción comunicativa antes de que el niño disponga del discurso del léxico gramatical, los formatos constituyen los vehículos para la transición de la comunicación al lenguaje. En un nivel formal, un formato significa una interacción contingente entre por lo menos dos interlocutores, contingente en el sentido que puede demostrarse que las respuestas de cada miembro dependen de una respuesta anterior del otro" (Cedillo, 2001, 227).

Un formato es un esquema regulado entre el adulto y el niño, que con el tiempo, y según el progreso del niño respecto a ciertas habilidades lingüísticas, el adulto introduce nuevos y más sofisticados elementos que sistemáticamente aumentan la complejidad del nivel de comunicación. Una característica particular de los formatos es que son asimétricos: uno de los interlocutores sabe qué está pasando, mientras el otro sabe menos o absolutamente nada.

Bruner y Ratner (1977) encontraron que los primeros formatos que establecen esa relación de comunicación son los juegos que se dan entre el adulto y el niño, donde se determina una forma implícita de comunicación entendible entre ellos, donde se ponen reglas que ambos respetan, así la interacción en el juego se utiliza como una forma de comunicación en una etapa prelingüística.

El niño aprende mediante la interacción con el adulto una serie de cuestiones que desempeñan el papel de pistas que lo llevan a reconocer un lenguaje, en este proceso se establece un vínculo de comunicación entre la madre (padre) y el niño. Si un niño de esa edad es capaz de aprender el lenguaje materno, ¿un niño en edad escolar, puede aprender el lenguaje algebraico a través de un enfoque similar al que se usa para la enseñanza de la lengua materna? La asimetría de la interacción entre un adulto y un niño que aún no maneja el lenguaje natural nos permite proponer una analogía con la situación que vive el maestro al intentar enseñar el álgebra a un estudiante que todavía no puede expresarse a través de ese sistema de signos (Cedillo, 2001). Negar sin evidencia empírica esta posibilidad sería equivalente a afirmar que para enseñar el complejo lenguaje materno es necesario que los alumnos sepan leer y escribir antes que hablar.

En síntesis, Bruner plantea que el lenguaje materno se enseña, y que este proceso de enseñanza se da en la interacción entre la madre y el niño a través de los esquemas de interacción que él denomina *formatos*. A diferencia de Bruner (1982); Piaget (1985) y Chomsky (1957) proponen teorías distintas.

Noam Chomsky (1957), lingüista estadounidense, propone una de las teorías de mayor impacto en las investigaciones sobre el lenguaje, consideró que "el individuo posee como parte de su equipo biológico una gramática o conjunto de reglas que le permiten construir oraciones” (Chomsky, 1957. 25). Concibió el aprendizaje del lenguaje como el resultado de la acción de un *mecanismo innato de adquisición* que permite al sujeto hablar la lengua de su comunidad, también planteó que el cerebro humano está estructurado especialmente para comprender y reproducir el lenguaje, por lo que no se necesita un aprendizaje formal de éste.

Esta concepción sugiere que la adquisición de la estructura sintáctica formal del lenguaje es completamente independiente del conocimiento del mundo o de una interacción social privilegiada con los hablantes del lenguaje. Según esta postura, Cedillo, (1999a, 3), señala que “la cuestión de los detalles de la adquisición del lenguaje es sobre todo, un problema de desempeño, más que de competencia, que es innata”. De acuerdo con Chomsky el desarrollo del desempeño depende totalmente del desarrollo de otros procesos, como la amplitud de atención y la capacidad del procesamiento de información.

Piaget comenzó a estudiar el campo del desarrollo cognoscitivo mientras veía a sus hijos jugar, observándolos comenzó a considerar sus juegos como confrontaciones con el medio circulante, mediante el juego estaban aprendiendo a adaptarse, “veía toda la conducta en función de una adaptación del individuo a su ambiente” (Morris, 1992, 370) conforme crecían sus hijos, observó que su enfoque ante los problemas ambientales cambiaba de manera radical en distintas edades, Piaget se convirtió en un obsesivo observador de los niños, jugaba con ellos, los interrogaba sobre sus actividades e inventaba juegos para saber como pensaban, estudió un número pequeño de niños en forma exhaustiva mientras efectuaban sus actividades normales; “con el paso de las observaciones fue distinguiendo un patrón, una serie de etapas a través de las cuales, a su juicio pasan todos los niños” (Morris, 1992, 371).

Las investigaciones de Piaget lo convencieron de que el intelecto crece a través de procesos de *asimilación y acomodación*; “la asimilación es el uso de patrones de mentales existentes en nuevas situaciones, en la acomodación, se modifican las ideas existentes en situaciones nuevas" (Coon, 1999,107) consideró que los niños pasan por una serie de etapas en su desarrollo intelectual:

Etapa sensoriomotriz (0 a 2 años), En los primeros 2 años de vida, la mayor parte del desarrollo mental de un niño es no verbal. El niño se interesa, sobre todo en aprender a coordinar movimientos orientados con sus sentidos, aplica las capacidades que tiene en el momento de nacer (succión y prensión), disfruta meterse cosas a la boca: sus dedos, sus juguetes, etc. De manera análoga, tomará instintivamente una sonaja, después de cierto modo se dará cuenta de que el sonido producido proviene de la sonaja, agitando todo lo que agarre tratando de reproducir el sonido y con el tiempo comienza a distinguir entre lo que hace y lo que no hace ruido. De este modo el niño comienza a organizar sus experiencias, asignándolas a categorías a lo que Piaget llamó *esquemas*, constituyendo el primer paso en la conducta intencional y en la solución adaptativa de problemas.

Etapa preoperacional (2 a 7 años), durante este periodo le niño comienza a pensar simbólicamente y a usar el lenguaje, " el pensamiento del niño todavía es muy intuitivo, usa poco el razonamiento y la lógica" (Coon, 1999, 108) su capacidad de recordar y anticipar va creciendo y entonces comienzan a utilizar símbolos para representar el mundo externo, como el lenguaje, estas imágenes se limitan a su experiencia personal inmediata (egocéntrica). Sus nociones de causa y efecto son muy limitadas y todavía se manifiesta cierta capacidad para clasificar objetos y eventos.

Etapa de las operaciones concretas (7 a 11 años), Los niños empiezan a pensar con lógica a clasificar en varias dimensiones y a comprender conceptos matemáticos siempre que puedan aplicar estas operaciones a objetos o eventos concretos. Aprende a considerar más de una dimensión del problema a la vez y a observar un objeto o problema desde diversos ángulos. Hacia los 10 años al niño le es más fácil deducir lo que otra persona está pensando o sabe, (Shantz citado en Morris, 1992), por esa edad se da cuenta de que otro también es capaz de deducir lo que él está pensando.

Etapa de las operaciones formales, el individuo puede aplicar situaciones lógicas tanto a conceptos concretos como abstractos, puede pensar sistemáticamente todas las posibilidades, proyectarse hacia el futuro o recordar el pasado y razonar mediante analogías y metáforas. Los niños de menor edad resuelven problemas complejos probando sus ideas en el mundo real, sus explicaciones son concretas y especificas. Los adolescentes pueden pensar en términos abstractos y probar sus ideas internamente recurriendo a la lógica.

Piaget expone al desarrollo del lenguaje como un subproducto del desarrollo de operaciones cognitivas no lingüísticas. Bajo esta perspectiva el lenguaje es simplemente un síntoma de la semiotización automática de las operaciones cognitivas del desarrollo. “Un problema en esta posición teórica es que no especifica a través de qué medios concretos, estas operaciones cognitivas no lingüísticas propician la capacidad para emplear y reconocer la gramática de predicados, o el sistema de marcadores lingüísticos definido-indefinido de la anáfora, o la capacidad para generar únicamente frases bien formadas, confiando así, con una fe ciega en la inevitabilidad del progreso” (Bruner citado por Cedillo, 1999a, 3).

La investigación de Bruner (1982) va más allá que lo expuesto por Chomsky (1957) y Piaget, (1985). Sugiere que el lenguaje natural no sólo es una consecuencia del desarrollo intelectual, o sólo un resultado del asombroso sistema neurológico con el que estamos dotados los seres humanos, dentro de sus resultados encontró que el lenguaje natural se enseña, que el adulto arregla artificialmente el ambiente de manera que sintonice con las posibilidades de comprensión del niño (Cedillo, 1996).

En el presente trabajo de tesis se concibe a la aritmética como un sistema de signos que los sujetos pueden usar para comunicar y manipular ideas matemáticas y como punto de partida del álgebra. “El lenguaje algebraico resulta ser (como todo lenguaje) una forma (y no un medio) de pensar, comunicar y actuar” (Radford, 1999, 36).

Cedillo (1996) contrasta dos principios relacionados con el aprendizaje de la lengua materna y elige uno de ellos para abordar la instrucción en matemáticas. El primero de esos principios es el siguiente:

Los significados del lenguaje determinan sus diferentes usos.

Muchos libros de texto ejemplifican este principio, se inician con definiciones, ejemplos y reglas sintácticas (significados) y el capítulo se cierra con una serie de problemas que requieren la aplicación de las definiciones reglas y ejemplos que lo antecedieron (usos). Esta es una forma en que muchas generaciones han aprendido matemáticas y en particular álgebra, aunque sería discutible que esta forma realmente funcione, no se puede ocultar que en la práctica es un sistema que deja como resultado una gran cantidad de reprobados, lo que hace plausible la búsqueda de alternativas.

El segundo de esos principios se puede resumir como sigue:

Los usos del lenguaje determinan sus significados.

Este principio implica un aprendizaje que no parte de reglas ni definiciones (significados) y hace descansar en el uso del lenguaje la asignación de significados. El mejor ejemplo de un aprendizaje de este tipo es el caso del lenguaje natural, ciertamente, el lenguaje materno se aprende a través del uso.

Este referente teórico (Bruner, 1983), mostró un buen sustento para abordar la enseñanza del álgebra (Cedillo, 1994, 1995, 1996). Los resultados de estos estudios resaltaron la necesidad de establecer una relación más estrecha entre la aritmética y el álgebra (Cedillo, 1995, 1997) y sugirieron que una manera de fortalecer esa relación es logrando que los estudiantes generen significados para los números y sus operaciones que les permitan ir más allá de aplicar los algoritmos de las operaciones aritméticas eficientemente, de manera que empiecen a trabajar con “lo aún desconocido en un contexto numérico”. (Cedillo, 1999b, 4).

Bajo esta premisa, se asigna a la calculadora el papel de un ambiente en el que los sujetos puedan producir expresiones matemáticas empleando el lenguaje de la aritmética. Un aspecto crucial en este planteamiento es que la producción de esas expresiones se da como una forma de comunicación entre el sujeto y la máquina, lo cual se basa en un uso de la calculadora para realizar actividades que promueven que el sujeto anticipe una respuesta antes de acudir a la máquina, cuando se ejecuta el procedimiento mediante el que el usuario expresa su estrategia, la respuesta de la máquina le ofrece retroalimentación inmediata que le indica si sus mensajes fueron entendidos y recibidos con la intención y el significado que él le daría antes.

El papel de la calculadora

En la década de los noventa se realizaron diversas investigaciones que han aportado evidencia de los beneficios que pueden obtenerse del uso de la calculadora en la clase de matemáticas; esos estudios han ayudado a despejar muchas dudas de los profesores y padres de familia sobre la pertinencia del empleo de la calculadora en el aula. Actualmente ya no se puede sostener la creencia de que el uso de la calculadora puede inhibir el desarrollo de habilidades aritméticas básicas (Shuard; Ruthven; Brolin; citados en Hembree y Dessart, 1992).

También se ha mostrado que la calculadora sirve como apoyo en la resolución de problemas, en particular, se ha encontrado que el uso de la máquina favorece que los estudiantes se concentren en los procesos de solución al hacer descansar el cálculo aritmético en la calculadora.

Otro aspecto favorable es que el uso de la calculadora en el aula permite que los problemas propuestos sean "más realistas", ya que el apoyo que brinda la máquina ayuda a que el profesor introduzca en el planteamiento de problemas datos numéricos que no se restringen al manejo de números enteros, aspecto que en el ambiente del lápiz y el papel limita artificialmente las situaciones que dan contexto a un problema matemático. (Shumway; Shuard; citados en Hembree y Dessart, 1992).

Este trabajo tiene como antecedente estudios sobre el aprendizaje del código algebraico, cuyos resultados resaltaron la necesidad de establecer una relación más estrecha entre la enseñanza de la aritmética y el álgebra (Cedillo, 1995 1997).

Cedillo (1994), realizó un estudio exploratorio basado en el principio: *los usos de lenguaje determinan sus* significados, para indagar el potencial de la calculadora como herramienta cognitiva en el aprendizaje del álgebra. Los resultados alentaron la posibilidad de estudiar los recursos que ofrece la calculadora como apoyo para que estudiantes sin ningún antecedente de enseñanza escolar sobre álgebra abordaran diversas actividades matemáticas mediante estrategias que generaban al seguir sus propias formas de razonamiento. Las respuestas de los estudiantes mostraron que el uso de la calculadora les permitió plantear conjeturas y las validaran o refutaran por sí mismos, lo cual les estimuló a que se aventuraran siguiendo estrategias propias sin necesidad de acudir constantemente al profesor para pedir su aprobación o recordar procedimientos previamente aprendidos. Los resultados de ese estudio ofrecieron evidencia empírica en favor del principio teórico que se empleó para guiar la fase de enseñanza (Cedillo, 1996), posteriormente esos resultados fueron ampliamente revisados mediante un estudio a profundidad donde la calculadora desempeñó el papel de un “micromundo” que exige al usuario el uso de un lenguaje formal, y el profesor desempeñó el papel de un experto en el lenguaje que acompañó a los estudiantes en sus esfuerzos para dar respuesta a los retos matemáticos que cada actividad les planteaba.

En ese estudio se observó que los problemas se plantearon como un juego matemático, además de tener la característica de ser retos que demandan una alta creatividad del estudiante, se plantearon de manera que permitan que el estudiante los confronte con los rudimentos aritméticos de que dispone y, a la vez, invitarlo a proponer generalizaciones. El contexto de la generalización da la oportunidad de abordar el paso de la aritmética al álgebra, es justo en esa transición donde cobra sentido el uso de la calculadora, ya que el lenguaje que se requiere para interactuar con la calculadora es el lenguaje del álgebra, y el ámbito numérico es el que proporciona los criterios para que los estudiantes por sí mismos puedan validar o refutar sus conjeturas.

Cedillo (1999b), plantea que la calculadora es una herramienta que puede emplearse para simular un ambiente en el que el lenguaje que *se habla* es el lenguaje de las matemáticas, concretamente los códigos de la aritmética y álgebra. Con esta herramienta el alumno puede realizar su trabajo y en ocasiones recurrir al apoyo de un experto a través de formatos de interacción preconcebidos por el profesor (en el sentido de Bruner). Cuando hablamos de formatos queremos decir que debe existir un tipo de actividad altamente regulada que propicie que el estudiante pueda prever la intención del profesor y viceversa, además la actividad debe estar estructurada de manera que sea posible la incorporación de elementos matemáticos de orden más complejo que permita al estudiante, con el tiempo avanzar en el conocimiento de la materia que está estudiando.

Los resultados del estudio reportado por Cedillo (1996, 2002) sugieren que el acercamiento al álgebra a través de su uso proporciona una promisoria alternativa para ayudar a los estudiantes en el paso de la aritmética al álgebra.

Aspectos metodológicos

A continuación se abordan los aspectos metodológicos que guiaron la realización de ésta tesis: elección del método de investigación; el estudio de casos como estrategia de investigación y fases de investigación: recolección de datos; se expondrá el diseño de las actividades que fueron utilizadas en el estudio principal y piloto. En el capítulo correspondiente a la metodología se abordará ampliamente el estudio piloto y principal; sujetos y fuentes de datos; hojas de trabajo; y ambiente de trabajo en el aula.

Elección del método de investigación

Dado que una meta importante de esta tesis es estudiar cómo y qué aprenden los alumnos en un ambiente específico de enseñanza, para el desarrollo del trabajo de campo se propone adoptar el método de análisis cualitativo planteado por Miles y Huberman (1984) y la técnica de estudio de casos. Estos autores proponen que dicha forma de análisis de datos permite conocer de manera más detallada los *procesos de solución* que emplean los estudiantes y proporciona un esquema más claro de los alcances y limitaciones de sus aprendizajes.

Esta tesis propone estudiar qué es lo que aprenden los alumnos cuando el ambiente de aprendizaje se basa en el uso de la calculadora. El interés central de esta investigación es analizar las nociones y estrategias numéricas que desarrollan los estudiantes en un ambiente de trabajo donde la ejecución de las operaciones aritméticas no es un fin, sino el medio que permite explorar y generar soluciones a problemas matemáticos.

Otro propósito que orienta esta investigación es estudiar cómo influye en el aprendizaje de los estudiantes el hecho de que el trabajo de cálculo aritmético esté a cargo de una máquina.

Con base en lo anterior podemos considerar que el método se asume como el camino a seguir para lograr una finalidad determinada. En este caso, el *método de análisis cualitativo* se asume como un camino que se va realimentando conforme el proceso de investigación avanza.

La utilización del método cualitativo en esta tesis está apoyada en el modelo que presentan Miles y Huberman (1984). Destacamos que estos autores caracterizan al método de *análisis* mediante tres actividades esenciales: a) el proceso de reducción de datos; b) la representación de datos; y c) el establecimiento de conclusiones. Los autores puntualizan que estas actividades de análisis, junto con la recopilación de datos forman un proceso interactivo y cíclico. De acuerdo con las necesidades del proceso de investigación, los procesos de, a) reducción de datos; b) estructuración y análisis de los mismos; y c) la formulación de las conclusiones, se interrelacionan e influyen unos en otros. El análisis cualitativo es un sistema en el que los datos son fuente de información y de procesos altamente interconectados que dan sentido al proceso indagatorio (Miles y Huberman, 1984, 15).

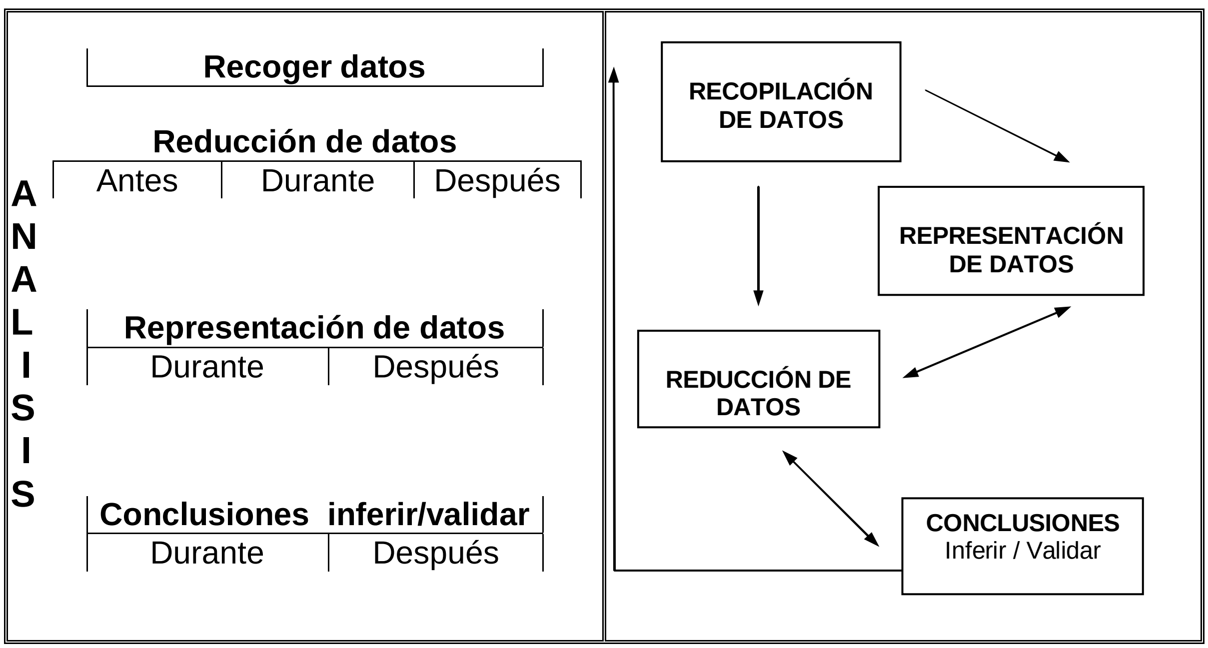
Durante la recopilación de datos se busca sistematizar las ideas que se encuentran inmersas en las actividades realizadas durante el proceso de investigación (Marcelo, citado en Calix, 2000). Los códigos son estructuras que permiten reducir las declaraciones, pero además, representan un esfuerzo interpretativo de investigación. Normalmente, estas ideas generales se registran a través de códigos creados por el investigador, buscando siempre la validez y la objetividad de los resultados. Los códigos se convierten en un auxiliar para transformar los datos primarios en unidades pertinentes y eficaces que permiten una mejor lectura de las características del contenido abordado.

En el cuadro No.1 se presenta un esquema del modelo de Miles y Huberman, en el que se apoya la investigación.

En este modelo el "análisis consiste en tres momentos concurrentes en una actividad: reducción de datos, representación de datos y conclusiones inferir / verificar" (Miles y

Huberman, 1984, 21). En el momento de la reducción de los datos los autores recomiendan una actividad anticipadora o inicial que permite perfeccionar las actividades que tendrán que ver con la representación de los datos o estudio principal, consideramos para esta tesis realizar un estudio piloto que permitirá, entre otras cosas, diseñar las actividades que formen parte del estudio principal.

Cuadro No. 1, Modelo de Miles y Huberman



El tercer momento recomendado en este modelo, consiste en localizar los componentes más significativos que dan sustento a la tarea de búsqueda y que tienen que ver con los propósitos prediseñados en el proyecto de investigación. No obstante, se asume que la parte correspondiente a la representación de datos es una de las más importantes de este proceso, ya que es donde se recolectan y registran los datos a través de la aplicación de actividades específicas.

Otro aspecto que se considera es el proceso de codificación que se requiere, como ya se mencionó, los *códigos* representan un recurso para clasificar la información, la cual se organiza a través de *categorías* para estudiar el fenómeno de tal manera que sea significativo en términos de la investigación que se abordó.

En resumen, “la investigación cualitativa consiste en descripciones detalladas de situaciones, eventos, personas, interacciones y comportamientos que son observables. Además, incorpora lo que los participantes dicen tal y como son expresadas por ellos mismos y no como uno los describe” (Montero, citado en Calix, 2000, 27).

El estudio de casos como estrategia de investigación

Mediante esta tesis investigamos cómo se da *la transición de la aritmética al álgebra.* Para realizar esta indagación se acudió a la técnica de *estudio de casos,* estrategia que forma parte de la investigación cualitativa. El estudio de casos se asume como las formas personales de interiorizar una realidad en el contexto en el cual se desarrollan, como parte de un proceso dinámico y complejo, lo cual implica una relación muy estrecha y constante entre el individuo y la colectividad. Se trata con historias personales que en cierta forma expresan la historia de la mayoría del grupo, entendiendo el testimonio de los involucrados como las valoraciones contenidas en el conglomerado al cual pertenecen; lo que reflejan sus actitudes, sus dudas, sus habilidades y en cierta medida, sus creencias. A través del estudio de casos es posible acceder a representaciones que construyen los sujetos, recuperando en parte el sentido y la lógica de sus actitudes, así como las autopercepciones que al hacerse colectivas forman la trama de conocimiento socialmente aceptado.

El trabajo se ubica en el límite de lo personal y lo social, en ese entendido tratará de revelar una historia global, al interpretar los datos personales de cada uno de los sujetos involucrados en la investigación. “Se podría manejar una *historia coral* en múltiples versiones en la cual interesa tanto la reconstrucción fidedigna de los hechos, como todas las formas de apropiación de un conocimiento y las habilidades que se desarrollan al poner a consideración de los sujetos escolares, formas novedosas de trabajo en el aula” (Cálix, 2000, 45).

Fases de investigación: Recolección de datos

La recolección de datos corresponde a lo que Miles y Huberman (1984) denominan un estudio anticipatorio*.* Se trata de un proceso indagatorio, previo a la ejecución de un estudio principal.

La finalidad de este estudio es poner a prueba los propósitos de un proyecto, las preguntas de investigación, el encuadre con el referente teórico, los instrumentos para la recolección de datos (tareas de enseñanza), la manera de organizar el trabajo en el aula (la elección de las unidades de análisis), la definición de la relación maestro (investigador)-alumno, los contenidos de enseñanza, la definición de las categorías de análisis y su pertinencia con los propósitos de la investigación.

Se consideró para la realización de la recolección de datos un tiempo de una semana, alrededor de 5 sesiones, de 70 minutos cada una. Más adelante se desarrollarán a detalle las características de estas sesiones.

Diseño de las actividades

El diseño de las actividades consideró contenidos matemáticos de aritmética y álgebra, se centró en proponer a los alumnos que encuentren *formas* para resolver las ecuaciones.

Miles y Huberman (1984) establecen tres formas de describir y sistematizar la información obtenida; códigos descriptivos, interpretativos y explicativos. Codificar “es un proceso por el que los datos brutos son transformados sistemáticamente y agregados en unidades que permitan una descripción precisa de las características pertinentes del contenido” (Bradín citado en Calix, 2000).

CAPÍTULO 2

METODOLOGÍA

Estudio piloto

El estudio piloto es una réplica breve, resumida, que sintetiza lo que se hará en el estudio principal. El propósito inicial fue poner a prueba las actividades diseñadas en cuanto al nivel de dificultad de las tareas que se proponen, su pertinencia con los propósitos del estudio principal y obtener información que permita hacer los ajustes correspondientes. Además permitió obtener una experiencia previa y con esto la posibilidad de abordar con mejor oportunidad de éxito y mayor sustento la siguiente fase de investigación (estudio principal). A continuación se reporta, como se llevó a cabo el trabajo de campo durante el estudio piloto y los resultados que de él se obtuvieron.

Escenario escolar

El trabajo de campo se llevó a cabo en la Escuela Primaria particular Celestín Freinet, turno matutino, ubicada en la Delegación Tláhuac. Participaron 18 estudiantes del sexto año y se desarrolló del 31 de marzo al 21 de abril del 2004. Durante este periodo se efectuaron 15 sesiones de trabajo con duración de 50 minutos cada una, de las cuales se distribuyeron de la siguiente forma:

- Cinco sesiones para que los alumnos se familiarizaran con el uso de la calculadora.
- Cinco sesiones para el trabajo con ecuaciones de primer grado que incluyen fracciones.
- Cinco sesiones para el trabajo con ecuaciones de primer grado con una incógnita que tienen soluciones en números enteros y/o decimales y ecuaciones exponenciales.

Actividades que se pusieron a prueba

Durante el estudio piloto se pusieron a prueba 11 hojas de trabajo las cuales fueron diseñadas por Cedillo (1999a). En 2 se propusieron actividades relacionadas con el uso y las funciones de la calculadora y en las 9 restantes se propusieron actividades relacionadas con contenidos que introducen al álgebra basadas en la resolución de ecuaciones de primer grado (ecuaciones con números enteros, decimales, fracciones), para realizar estas actividades propuestas en las hojas de trabajo los alumnos se auxiliaron de una calculadora gráfica que se les proporcionó en préstamo durante el desarrollo del estudio en el salón de clases.

Durante el trabajo de pilotaje se solicitó a los alumnos contestar un cuestionario donde se buscó obtener información acerca de su gusto o rechazo hacia las matemáticas y sobre la experiencia previa en la resolución de ecuaciones de primer grado.

Posteriormente se invitó a los alumnos a resolver las actividades de las hojas de trabajo de la siguiente manera:

- *Familiarización con el manejo de la calculadora gráfica.* Se proporcionaron tres hojas de trabajo para tal actividad.
- *Ecuaciones de primer grado con una incógnita en fracciones.* El propósito principal de estas hojas de trabajo fue que los estudiantes desarrollaran nociones y estrategias que les permitan usar las fracciones comunes en la solución de problemas, se incluyó el tema del valor decimal de las fracciones comunes. Se emplearon cuatro hojas para el trabajo con esta actividad.
- *Ecuaciones de primer grado con una incógnita con números enteros, decimales y potencias*, se abarcaron aspectos relativos a la resolución de este tipo de ecuaciones, además de incluirse ecuaciones exponenciales; se trató de identificar temáticas encaminadas a las relaciones entre los conceptos matemáticos (aritmético y algebraico), la identificación y conceptualización de literales y la simbolización algebraica. Se incluyeron en estas hojas de trabajo algunas actividades que contienen ecuaciones de segundo grado con una incógnita, lo cual no implicó ninguna diferencia para los alumnos. Por tal razón no generó confusión alguna ya que en todos los casos se trataba de *encontrar un número perdido*. Para esta actividad se utilizaron cinco sesiones y seis hojas de trabajo.

Actividad preparatoria

Se propuso a los alumnos realizar actividades en 3 hojas de trabajo, con la finalidad de identificar las principales funciones de la calculadora y se familiarizarse con la forma en que trabaja; a cada uno de los estudiantes se le proporcionó una calculadora; el investigador fue guiando sobre el manejo y función de las teclas. Los alumnos mostraron mucho interés en la actividad, lograron realizar con relativa facilidad la mayoría de los ejercicios, en algunos casos los alumnos recurrían a la asesoría del investigador ya que no comprendían las indicaciones de la hoja de trabajo, pero una vez explicado lo que tenían que realizar, no les ocasionaba mayor problema; se observó que el hecho de concluir rápidamente la hoja de trabajo provocaba que se distrajeran y usaran la calculadora para juegos o incluso para resolver alguna tarea de su libro, además de que esto generó indisciplina en el grupo.

Actividades centrales

Para la actividad con las hojas de trabajo relacionadas con fracciones en ecuaciones de primer grado con una incógnita, se observó que en la primera hoja los alumnos tenían cierto interés, sin embargo, pronto manifestaron confusión al enfrentarse a situaciones a las que no estaban muy familiarizados, a pesar de que el tema de fracciones ya estaba visto con anterioridad en el curso regular de la asignatura de matemáticas, según refirió la maestra del grupo. En las siguientes hojas de trabajo sólo algunos alumnos lograron terminar con éxito, otros lo intentaban pero realizaban mal la actividad, lo que los llevaba a dejar las actividades en blanco o copiar a algún compañero; en términos generales fueron muy pocas las estrategias que los alumnos generaron y por el contrario, se generó confusión en el tema.

Consideramos que algunas de las razones por las que los estudiantes tuvieron dificultad fueron la apatía por el trabajo que mostraron algunos de ellos, la indisciplina grupal que impidió que se concentraran y una de mayor importancia, la baja comprensión lectora que al parecer impedía que los estudiantes abordaran el material escrito, además de la ausencia de conocimiento previo en cómo abordar el tema de fracciones.

En cuanto al uso de la calculadora como herramienta para la resolución de problemas, se observó que los alumnos dejan el trabajo de la operatividad aritmética a la calculadora, donde ingresan los datos y obtienen un resultado. No obstante al preguntar si podrían realizar este problema sin la calculadora, la respuesta fue negativa.

Para las actividades relacionadas con ecuaciones de primer grado con una incógnita (con números enteros, decimales y potencias) se propuso la realización de cinco hojas de trabajo en el mismo número de sesiones. A diferencia de lo anterior, el panorama general fue más alentador, para estas actividades se contó con la presencia de la maestra, lo que provocó control de grupo y menos indisciplina.

Se observó que las actividades propuestas en las primeras hojas de trabajo despertaron interés en los estudiantes, se dio la explicación previa de que en estos ejercicios se trataba de buscar un *número perdido* y que se podían auxiliar de la calculadora para encontrarlo. La actividad se facilitaba en la medida de que se resolviera bien uno de los ejercicios, lo que motivaba para encontrar el siguiente número; para este tema el uso de decimales en la ecuación representó una complicación mínima que la calculadora podía resolver, en estas hojas de trabajo sí se podía identificar alguna estrategia creada por los alumnos; asimismo, fue posible identificar los razonamientos y conceptos que utilizaban para la resolución de la ecuación.

En términos generales el trabajo resultó mejor porque se captó el interés de los alumnos, y se mejoró el control sobre el grupo, los estudiantes lograron resolver la mayoría de los ejercicios de manera exitosa, en varios casos con el auxilio constante del investigador.

De acuerdo con las observaciones realizadas y las respuestas de los alumnos en las ultimas 6 hojas de trabajo, se considera que entre los factores que influyeron en el buen desempeño de los alumnos se encuentran: la disposición e interés que mostraron para realizar las actividades, la persistencia que manifestaron y la iniciativa constante de pedir apoyo al investigador y en algunas ocasiones a la maestra del grupo.

Se observó que a partir de la hoja de trabajo numero 8, en la que se requería el uso del paréntesis en la ecuación (jerarquía de las operaciones), era una situación que no habían abordado previamente, por lo que los caminos que siguieron para solucionar las actividades no se apegaban en muchos de los casos al uso de recursos algebraicos, sino que se valían de sus conocimientos aritméticos para contestar lo que se les pedía. Este resultado es importante porque proporciona indicadores de que los alumnos podían generar alguna estrategia por sí mismos.

En cuanto al tipo de respuestas que los alumnos proporcionaron, gran parte de ellos utilizaron recursos aritméticos para solucionar las situaciones, sólo en algunos casos lograron dar un significado algebraico al uso de las literales.

Conclusiones del estudio piloto

Como resultado de las observaciones y el análisis de las respuestas derivadas de la aplicación del estudio piloto se recabó información que permitió hacer los ajustes que se mencionan a continuación.

Durante el desarrollo de las actividades del estudio piloto se observó que uno de los factores que interfirieron en el desempeño de los estudiantes para realizar las actividades, fue el ambiente de trabajo en el aula, el cual en varias sesiones se vio marcado por el desorden y la indisciplina de los alumnos, lo que provocaba poca atención en el trabajo. Este factor se resolvió con la intervención de la maestra del grupo durante las actividades, por lo que en el estudio principal se solicitó la presencia de la profesora en todo momento. Las intervenciones del investigador se ajustaron para hacer más dinámicas y amenas las actividades, esto se reflejó en una mejor disciplina de los estudiantes, situación que se mantuvo durante el estudio principal.

Otro de los factores que influyó en el desempeño de los alumnos y que en cierta forma propiciaba la indisciplina marcada en el punto anterior, fue el uso de las hojas de trabajo en cuanto al orden de las temáticas tratadas. Para el estudio piloto se optó por comenzar en la primera hoja de trabajo con: solución de ecuaciones de primer grado en fracciones, tema que en general no llamó la atención de los alumnos, ya que la mayoría de ellos no tenía el antecedente de la resolución de este tipo de ecuaciones, por lo que al no saber resolverla preferían dejar o utilizar la calculadora para otra actividad. Durante el cuestionario inicial, actividad previa a la aplicación de las hojas de trabajo, se observó que a los alumnos les llamó la atención el ejercicio relacionado con encontrar *el número que falta*, en una ecuación de la forma ax+b=c, por lo que se optó comenzar en el estudio principal con actividades de este tipo, donde los alumnos tienen un referente aritmético para buscar la solución y al mismo tiempo esto provocaba mayor motivación en ellos.

Los protocolos de entrevista se reeditaron, se les dio un enfoque más práctico para la obtención de datos y su análisis. Se validó la pertinencia de éstos, se eliminan las actividades que contenían una amplia cantidad de ejercicios, limitando para el estudio principal a sólo tres ejercicios, lo que permitió tener información más sustancial y relevante.

A raíz del estudio piloto se pusieron a prueba para su reformulación las preguntas de investigación, con una mejor orientación respecto a los alcances de la investigación.

Otro factor que provocó que el desempeño de los alumnos en el estudio piloto no fuera el que se esperaba; fue el poco tiempo del que se dispuso para la actividad de familiarización con la calculadora, ya que los alumnos, como con cualquier otra herramienta, requieren tiempo para lograr un dominio aceptable del uso de las principales funciones de la máquina. Por lo anterior en el estudio principal se duplicó el tiempo establecido para tal actividad, además de que se tuvo una mejor estimación del tiempo que se requería para hacer el estudio principal.

El estudio piloto se realizó en condiciones reales en un aula de trabajo, es decir se dispuso del espacio y tiempo similar al de otras asignaturas y con todos los integrantes del grupo. De acuerdo con lo anterior y con los datos recabados en el estudio piloto, se considera que es posible llevar a cabo una práctica de este estilo en un aula en condiciones regulares.

El estudio piloto se trabajó con alumnos del sexto año de primaria, se noto que las estrategias que generaron Para el estudio principal se considero trabajar con alumnos de quinto año de primaria, considerándose que

Estudio principal

Escenario

La institución educativa en donde se desarrolló la investigación es una escuela primaria de carácter público llamada *Ernesto García Cabral*, la cual se encuentra ubicada en la Delegación Iztapalapa D. F. La condición socioeconómica de los estudiantes se puede considerar como media baja; la colonia cuenta con servicios públicos como agua, luz, teléfono, biblioteca y áreas verdes.

La escuela tiene un salón de cómputo y un aula en la que se desarrollan las clases del programa “Enciclomedia”, misma que fue utilizada para esta investigación. Esta aula cuenta con computadora, video proyector, equipo de audio, mobiliario adecuado para actividades empleando ese equipo y mesas de trabajo en forma de trapecio, las cuales fueron utilizadas por dos estudiantes al mismo tiempo.

Sujetos y fuentes de datos

La recolección de datos se llevó a cabo en la escuela antes mencionada, con alumnos del quinto año (entre 10 y 11 años de edad). Primeramente, se trabajó con todo el grupo en 13 sesiones de 70 minutos cada una; la atención se centró en 8 alumnos que se observaron mediante la técnica de estudio de casos para estudiar con mayor profundidad las estrategias que generan durante la elaboración de la tarea. Estos alumnos fueron seleccionados de acuerdo con su desempeño en la clase de matemáticas, se tomo en cuenta las consideraciones de la profesora del grupo al respecto y a través de un cuestionario inicial. Se dividió a los alumnos, de la siguiente manera:

1. Abajo del promedio de grupo (dos estudiantes)
2. Promedio de grupo (cuatro estudiantes)
3. Arriba del promedio grupo (dos estudiantes)

La estratificación en bajo, medio y alto se propone para tener una mejor representación del tipo de estrategias que generan niños con distintas habilidades y distintos niveles de motivación.

Fuentes de datos

Las principales fuentes de datos fueron: el trabajo escrito de los estudiantes y entrevistas individuales con los 8 alumnos seleccionados.

Las entrevistas fueron estructuradas con base en los procesos de solución que emplearon esos alumnos para abordar las hojas de trabajo durante las sesiones de clase, se utilizaron dos protocolos para realizar dichas entrevistas. Los protocolos contienen los objetivos de la entrevista, las preguntas de investigación relacionadas con el objetivo y las preguntas dirigidas al trabajo de los alumnos. A continuación se detallan las fuentes de datos utilizadas en este proceso de indagación:

i) Hojas de trabajo, las cuales documentaron el trabajo que se realizó en el aula y permitió el análisis de las respuestas registradas.

ii) Entrevistas individuales. Se realizaron dos entrevistas con cada uno de los sujetos que fueron seguidos mediante la técnica de estudio de casos. La primera entrevista fue realizada a la mitad del estudio y la segunda al concluirlo. Cada entrevista fue videograbada.

Hojas de trabajo

Las hojas de trabajo se emplearon para realizar las actividades durante la fase de campo de esta tesis, esos materiales fueron el recurso para proponer a los estudiantes las actividades que debían realizar, con este fin se emplearon hojas de trabajo para ser abordadas mediante estrategias de resolución de ecuaciones creadas o no por los alumnos y la calculadora. En términos de la investigación, las hojas de trabajo fueron empleadas como fuentes de datos, es decir, fueron los instrumentos que permitieron registrar todas las respuestas e intentos que desarrollan los estudiantes para responder las preguntas planteadas en cada una de las actividades.

El diseño de las actividades está relacionado con los contenidos matemáticos abordados en el proyecto, los cuales se centran en la realización de tareas con ecuaciones.

La estructura de las actividades propuestas se inicia con la presentación de ejercicios que retan al alumno a encontrar un *número perdido* mediante alguna estrategia que ellos mismos generen.

En esta presentación se hacen preguntas al estudiante cuyo propósito es motivarlo a crear una estrategia para la resolución de ecuaciones, el diseño de las actividades tuvo como finalidad que el estudiante las perciba como un juego que consiste en buscar un número perdido. El juego finalizaba cuando lograban crear alguna estrategia de solución.

Es importante considerar que las actividades propuestas no fueron diseñadas como ejercicios en el sentido de propiciar el desarrollo de destrezas mediante la ejecución repetida de un mismo tipo de actividad, sino que estas actividades fueron diseñadas con la finalidad de ofrecer al estudiante experiencias distintas en el manejo del código algebraico. En cada una de las hojas de trabajo se introdujeron nuevos elementos que hacen de cada actividad un problema que plantea un nuevo reto al estudiante en un contexto que le es familiar. En el diseño de las hojas de trabajo de esta tesis, se tomó como base la estructura desarrollada por Cedillo (1999a).

El propósito de estas hojas de trabajo, fue guiar a los alumnos para crear alguna estrategia en la resolución de ecuaciones de la forma $ax+b=c$; se pretendió identificar el sentido que el estudiante otorga a la literal y el manejo de ésta, así como los medios aritméticos que se utilizan para la resolución del problema.

Entrevistas

Para llevar a cabo las entrevistas que se realizaron en el estudio principal de la investigación se utilizaron dos protocolos, la primera entrevista tuvo la finalidad de investigar si el conocimiento aritmético que los estudiantes poseen es una herramienta para la resolución de las ecuaciones, además de identificar las estrategias que generan los alumnos al resolver ecuaciones. Esta entrevista se realizó a la mitad del trabajo de campo y el alumno contó con auxilio de la calculadora.

La segunda entrevista se realizó al concluir el trabajo de campo con el objeto de obtener información a profundidad sobre aspectos específicos que no pueden ser observados a partir del trabajo escrito de los estudiantes ni del registro de información en clase. El objetivo de ésta fue investigar qué significados asocian los alumnos a las literales que se usan para simbolizar las incógnitas en las ecuaciones de primer grado con una incógnita, e investigar qué ventajas o desventajas se generan para abordar los métodos convencionales para resolver ecuaciones cuando se propicia que los estudiantes inicien este tema a partir de estrategias no convencionales que ellos mismos generan. El alumno también contó con el apoyo de la calculadora gráfica durante esta entrevista. Ambas entrevistas se videograbaron y se trascribieron para su análisis.

El trabajo de aula se llevó a cabo durante dos semanas y tres días, los 5 días de clase, en las horas propuestas por la profesora de grupo de acuerdo con sus actividades. Generalmente se utilizó el horario de 15:00 a 16:10 hrs. El trabajo se desarrolló como parte del curso regular que se imparte en la escuela.

Sujetos

Se trabajó con alumnos que cursan el quinto grado de la educación primaria, es un grupo de 26 alumnos de ambos sexos cuyas edades fluctúan entre los 10 y 11 años de edad, de los cuales se seleccionaron a ocho sujetos de acuerdo con su desempeño en la clase de matemáticas, como ya se mencionó.

Ambiente de trabajo en el aula

El investigador se incorporó como profesor del curso de matemáticas. Al inicio de cada sesión se proporcionaba a los alumnos hojas de trabajo previamente preparadas, estos tuvieron la responsabilidad de contestar cuidadosamente cada una de las cuestiones involucradas. Cada estudiante pudo avanzar de acuerdo con sus capacidades y destrezas en el manejo de dichos contenidos. La responsabilidad del investigador consistió en presentar la actividad, recoger los paquetes después de cada clase, revisarlos cuidadosamente, marcar los errores encontrados y devolver las hojas de trabajo en la clase siguiente para que los alumnos corrigieran, en su caso, los puntos marcados por el profesor como incorrectos. El alumno debía corregir los errores marcados antes de proseguir con otra actividad.

La ayuda que el alumno recibía consistió en las orientaciones que el investigador dio por escrito en cada hoja, además de las asesorías que durante la clase se ofrecieron de manera individual con aquellos alumnos que presentaron más problemas de abordar las actividades.

La actividad durante las sesiones de clase se organizó de la siguiente manera:

- Al iniciar la clase los alumnos recibían un sobre que contenía las hojas de trabajo sobre un tema determinado. Los alumnos tomaban su calculadora e iniciaban el trabajo. Se pidió a los alumnos hacer su mejor esfuerzo y avanzaran tanto como les fuera posible. Al finalizar la sesión entregaban su sobre al profesor (investigador); en la siguiente clase recibieron su sobre con las hojas de trabajo que habían resuelto revisadas por el profesor, y las hojas que aún no realizaban. Los estudiantes debían retomar su trabajo haciendo las correcciones señaladas por el profesor. Los alumnos podían elegir trabajar en grupo o individualmente.
- Los alumnos podían completar tantas hojas de trabajo como les fuera posible en cada sesión, la única regla era que no podían entregar su trabajo en blanco, si no entendían algo debían acudir al profesor o a cualquiera de sus compañeros.
- El profesor observó cómo trabajaron los estudiantes y atendió las preguntas que individualmente le plantearon.

CAPÍTULO 3

DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

En este capítulo se presentan y analizan los datos obtenidos mediante la aplicación de las hojas de trabajo y la realización de dos entrevistas con cada uno de los estudiantes que participaron en el estudio de casos. Los resultados que aquí se presentan se refieren esencialmente a los siguientes aspectos:

(i) Logro de los estudiantes.

(ii) Dificultades que enfrentaron los estudiantes.

Los resultados se presentan en el siguiente orden: *nivel alto*, Tomás y Yesica Gabriela; nivel medio: Alondra, Jorge, Adriana y Javier; nivel bajo, Vanessa y Érika. Se describe la evolución de los estudiantes a través de sus logros y dificultades con base en el análisis de sus respuestas a las hojas de trabajo y a cada una de las entrevistas realizadas.

Este capitulo se estructura de la siguiente manera:

- Resultados del cuestionario inicial
- Descripción de las hojas de trabajo
- Logros y dificultades
    - Hipótesis sobre los logros y dificultades de los alumnos.
    - Logro de los alumnos.

Dificultades que enfrentaron los alumnos.

Resumen

Resultados del cuestionario inicial

Previo a la realización de las hojas de trabajo los alumnos del grupo contestaron un cuestionario inicial que permitiera conocer el tipo de población con el que se trabajaba, así como conocer diversos rasgos del perfil de los estudiantes. Dicho cuestionario aborda tres ámbitos: (i) Perfil general del alumno, (ii) Contexto familiar, y (iii) Nociones matemáticas.

El primer ámbito se diseñó para conocer sus datos generales -nombre, edad y fecha de nacimiento- y su autoevaluación como estudiantes en la clase de matemáticas. Se preguntó qué tanto les gusta la materia y cómo se consideran para esta clase (las respuestas se organizaron en muy bueno, bueno, regular y malo); se pretendió obtener un panorama general del gusto por las matemáticas de los alumnos, datos que guiaron al investigador en cuanto a la población con la que se trabajaba y a la forma de abordar las temáticas de las hojas de trabajo.

El segundo ámbito se utilizó para conocer aspectos relacionados con el contexto familiar de los alumnos, se pretendió establecer el tipo de relación que los estudiantes tienen con sus padres, preferentemente, y cómo estas relaciones pueden repercutir en su desempeño en matemáticas, considerándose factores como la motivación, la atención, el nivel socioeconómico y los antecedentes académicos de sus padres; se puede considerar que estos factores pueden influir en el rendimiento positivo o negativo de los alumnos en la clase de matemáticas; además, se les hicieron preguntas que permitieran saber a qué se dedican sus padres y el nivel de estudios que éstos tienen, también se preguntó si habían reprobado algún año escolar, situación que posiblemente tendría que ver con los aspectos antes mencionados.

El tercer ámbito del cuestionario permitió tener una referencia en cuanto a los nociones matemáticas de los alumnos en relación al tema que se abordaría en las hojas de trabajo: ecuaciones. Este ámbito permitió conocer las formas en que resolvían un problema, para así tener un conocimiento inicial de los métodos que los estudiantes utilizan en la resolución de la ecuación; esto también proporcionó un panorama inicial para evaluar a los alumnos en cuanto a su rendimiento (alto, medio, bajo) y más adelante seleccionar a los que se observaron mediante la técnica de estudio de casos. En el cuestionario se pidió a los alumnos encontrar el "número que falta" en ecuaciones como la siguiente: $x + 3.5 = 72$, se les pidió también explicar cómo obtuvieron la respuesta y cómo podrían convencer al profesor de que ésta era correcta. A continuación se presenta el análisis de los resultados obtenidos con este cuestionario.

El total de alumnos del grupo con el que se trabajó tenía 23 alumnos, de los cuales 11 eran mujeres y 12 hombres que cursaban el quinto año de primaria, sus edades fluctúaban entre los 10 y 12 años, de éstos, se seleccionó a 8 alumnos de acuerdo con su desempeño en la clase de matemáticas con ayuda del cuestionario inicial y la opinión de la profesora del grupo. De acuerdo con lo anterior se ubicó a esos ocho alumnos en tres niveles: alto, medio y bajo; 3 fueron hombres y 5 mujeres.

De los 37 alumnos del grupo y con los información que el cuestionario brindó, se obtuvieron los siguientes datos: en el primer ámbito, *perfil general del alumno*, se encontró que el 70% del grupo expresó que les gustan *mucho* las matemáticas, un 26% eligió la opción "*a veces*" y sólo un 4% expresó que les gusta *"poco"* esta materia. En cuanto a su autoevaluación con relación a la materia, se observó que el 53% de los alumnos se considera *"regular"* en la clase de matemáticas, un 43% se considera *"bueno"* y sólo un 4% se considera *"muy bueno"*, por tal, se pudo inferir que el trabajo con el grupo se facilitaría con base en el interés y la disposición que los alumnos mostraron hacia la clase de matemáticas en el cuestionario.

Respecto al segundo ámbito, c*ontexto familiar*, se observó que la población con la que se trabajó es de un nivel socioeconómico medio, la mayoría de los ingresos familiares no son fijos y dependen de un negocio familiar o del trabajo de un oficio (13% de las madres de familia se dedican al comercio y el 39% de los padres se dedican a un oficio), lo que sugiere que la relación entre padres e hijos en cuanto a la motivación y la atención para el estudio o la realización de tareas se limita a los tiempos libres que deja el trabajo y que el apoyo para el estudio y tareas recae en las madres de familia *que se dedican al hogar* (69%, el 9% laboran como obreras y el 9% restante como profesionista en un trabajo fijo), el 69% inicial se ve limitado por el nivel de estudios de esta población: secundaria no concluida (43% de las madres y 47% de los padres de familia). El cuestionario arrojó un dato interesante, ninguno de los padres o madres cuenta con una licenciatura y sólo dos madres de familia (9%) concluyeron la normal de maestros, nivel más alto de estudios que se encontró; lo que hace pensar que el estudio de las matemáticas se limite a realizar operaciones básicas, suma, resta, división y multiplicación, misma que son de empleo común en la vida cotidiana.

De los alumnos participantes se encontró que 6 de ellos habían reprobado algún año escolar (1, primer grado, Érika; 2, segundo; 1, tercero y 2 cuarto), sin embargo, no mostraban apatía por la materia, ponían interés en el trabajo, aunque no lo realizaran bien.

En cuanto al tercer ámbito, *nociones matemáticas,* se observó lo siguiente:

- Al pedirles encontrar el número que falta en una ecuación del tipo $x + 3.5 = 72$, se observó que sólo el 30% de los alumnos logró resolver la ecuación, el 70% restante mostró confusión en el manejo aritmético del punto decimal, lo que los llevó a la manipular la ecuación de forma que se creía estaba bien, al obtener resultados como el siguiente: 3.7, que al sumarlo con 3.5 se obtendría 7.2; se considero a 72 como 7.2, sumándose ambos decimales 7+5=12, posteriormente se sumaron los enteros 3+3=6, se considero para el resultado final, sumar 12 pero como 1.2+6=7.2; en la sección de análisis de resultados, se detallará al respecto.

- De los ocho alumnos seleccionados, sólo dos (25%) lograron encontrar el resultado correcto, los demás cayeron en situaciones como la anterior; en dos casos se dio un resultado en apariencia incongruente, como 64; al pedirles explicación al respecto dijeron que habían sumado 64 + 3.5 = 72, se puede deducir que los alumnos sumaron 3 y 5, eliminando el punto decimal, dando 8, para sumar con 64 y obtener 72. (64+8=72).
- Se detectaron algunos estrategias para la resolución de este problema, mismos que más adelante se explicarán con detalle. Se pudo observar a través de la pregunta nueve del cuestionario (¿Cómo puedes convencerme de que el número que encontraste en la pregunta anterior es la respuesta correcta? Escribe tu respuesta tan claramente que cualquiera de tus compañeros la pueda entender) por qué el alumno eliminaba el punto decimal, como se veía en el ejemplo anterior, por ejemplo, usaba 72 en lugar de 7.2; se encontró que los alumnos del grupo en general trataban de obtener el valor de la incógnita por ensayo y error, sin embargo el punto decimal les causaba problemas a pesar de que podían acudir al uso de una calculadora; algunos alumnos utilizaron 4.2, que al sumarlo con 3.5, obtenían 7.8, este resultado es erróneo, sin embargo al cuestionarles al respecto se menciono: “ésta bien, porque importa el número entero y no el decimal”, solo consideraron obtener 7 como respuesta, sin importar el numero decimal.
- Del total del grupo, 7 alumnos que contestaron correctamente (30%), uno tomó en cuenta sólo los enteros, lo explicó de la siguiente manera: “si se necesitan 72

y tengo 3, ¿cuántos me faltan? 69, pero ahora me faltan dos decimales, entonces descuento uno, 68, y busco los decimales que me faltan (5), para que 68.5+3.5=72...". Al pedirles una explicación cinco de los alumnos mencionaron que la calculadora les había ayudado y que sin ella sería difícil resolverlo, "pero sí se podría sacar". Su método fue el ensayo y error con diferentes números hasta que encontraran el correcto; un alumno explicó que a 72 le restó 3.5 para obtener el resultado, comentó que la maestra en alguna ocasión les había enseñado esa forma, "pero sin decimales, porque así es más fácil", este aspecto se discutirá con mayor amplitud más adelante.

Descripción de las hojas de trabajo

En el capítulo anterior se describieron ampliamente las hojas de trabajo como fuentes de datos en esta investigación, también se hizo mención de sus propósitos dentro de este trabajo, así como el diseño de sus actividades y sus finalidades. En este capítulo se abordará la descripción del contenido de las hojas de trabajo, de las cuales se tomó como base el material desarrollado por Cedillo (1999a), diseño que sirvió para la organización de éstas.

Las hojas de trabajo se dividieron en cuatro secciones que requerían al estudiante realizar las siguientes acciones: enfrentar y resolver una ecuación, verificar sus respuestas, comparar y realizar juicios de su propio trabajo y el sus compañeros, e institucionalizar el conocimiento obtenido, es decir, describir en la hoja de trabajo explicaciones breves respecto al tema, que le permitan al alumno tener un acercamiento a la concepción teórica del tema. Las hojas de trabajo tienen la siguiente estructura:

- Ejecución por parte del alumno
- Verificación
- Comparación de resultados
- Institucionalización del conocimiento

Ejecución por parte del alumno. Cada hoja de trabajo se inició con la presentación de actividades que proponían a los estudiantes encontrar un *número perdido*, se pretendió poner de manifiesto las formas de resolución y estrategias que el alumno utilizaba para enfrentar una ecuación. La estructura de las actividades invitaba al estudiante a enfrentar un reto en forma de juego.

Verificación. Este apartado pedía al estudiante que verificara las respuestas que había dado fueran correctas y requiere que el alumno dé una explicación de cómo obtuvo la solución, esta sección orientó al investigador para detectar la estrategia creada por el alumno.

Comparación de resultados. En esta sección se pretendió que el alumno tuviera un espacio para realizar juicios sobre los reportes de otros estudiantes, para que de esta forma identificara sus posibles errores o aciertos con base en el trabajo realizado por sus compañeros, así mismo podría retroalimentar su propio conocimiento con el de los demás.

Institucionalización del conocimiento. En este apartado pretendemos que el alumno obtenga una conclusión del trabajo realizado; algunas secciones contienen explicaciones que se dan al alumno con la formalidad del conocimiento matemático con la finalidad de que éste complemente sus conocimientos.

En las hojas de trabajo se abordaron los siguientes temas:

- Ecuaciones con una incógnita.
- Ecuaciones con más de una solución.
- Ecuaciones distintas que tienen la misma solución (ecuaciones equivalentes).
- Ecuaciones por tanteos.
- Reducción sistemática de ecuaciones.
- Operaciones inversas para resolver una ecuación.
- Construcción de ecuaciones.

Logros y dificultades.

Hipótesis sobre el logro y dificultades de los alumnos.

Antes de abordar el logro de los estudiantes, es conveniente establecer algunas hipótesis relacionadas con las preguntas de investigación de esta tesis.

Conocimiento aritmético

- ¿Cómo puede aprovecharse el conocimiento aritmético que adquieren los estudiantes en la escuela primaria como punto de partida para iniciarlos en el uso del lenguaje algebraico? Se puede aprovechar el conocimiento aritmético de los alumnos al resolver ecuaciones, ya que es su punto de partida y su principal antecedente para enfrentar una ecuación, mucho dependerá del manejo aritmético para lograr exitosamente la resolución de la ecuación, en los casos donde se presentan dificultades en el manejo de aspectos matemáticos tales como: punto decimal, división y fracciones, es posible que la obtención de la solución de la ecuación no sea la correcta.
- ¿Los alumnos utilizarán su conocimiento aritmético para la resolución de ecuaciones?; si utilizan su conocimiento aritmético, sin embargo es posible que las carencias de orden aritmético que presentan algunos alumnos no les permita obtener correctamente la solución, por lo que a pesar de que los estudiantes sean capaces de crear una estrategia de resolución, no siempre obtendrán resultados correctos.
- ¿Se puede utilizar el conocimiento aritmético como herramienta para resolver ecuaciones de primer grado y la creación de una estrategia que los mismos estudiantes generen? Es el conocimiento aritmético el que permitirá la creación de una estrategia de resolución de ecuaciones, independientemente de que la solución de la ecuación sea correcta o no.

Estrategias que desarrollan los estudiantes

- Los alumnos resuelven ecuaciones de primer grado por medio de un método que la profesora de grupo les enseñó para resolver ecuaciones del tipo $x + 3.5 = 72$, al resultado se le resta 3.5, lo que se obtenga es la solución de la ecuación; para comprobarlo sumamos ese resultado con 3.5 para obtener 72; en caso de que el signo de operación sea negativo, en lugar de restar se suma.

- Los alumnos resuelven estrategias con base al ensayo y error. Al pretender resolver una ecuación, los alumnos escogerán un número al azar que creen que pueda ser la solución, a partir de éste prueban de uno en uno hasta acercarse al número que buscan.

Logro y dificultades de los alumnos

En este apartado se analizaran los datos obtenidos en las hojas de trabajo y las entrevistas realizadas a los 8 alumnos seleccionados para la investigación y seguimiento de estudio de casos, se exponen episodios de las dos entrevistas realizadas y su análisis; cada caso presenta antecedes del sujeto de estudio, mismos que se obtuvieron del cuestionario inicial, en algunos casos el investigador infiere en aspectos relacionados (que no se nombran en el cuestionario inicial) con las características y entorno del sujeto, con base al conocimiento de los alumnos que se obtuvo el trabajo del aula y de algunos datos que el propio sujeto expreso, se tomo en cuanta al realizar estas inferencias, la opinión de la profesora de grupo en relación con cada sujeto.

Primera entrevista

Propósito

La primera entrevista se diseñó para estudiar con mayor profundidad el conocimiento aritmético que los estudiantes tienen como antecedente para la resolución de ecuaciones, también pretendió identificar e indagar qué estrategias convencionales y no convencionales generan los mismos alumnos al enfrentar ecuaciones de una incógnita cuando ésta aparece solamente en uno de los miembros de la ecuación. Para ambos propósitos se permitió que el alumno utilizara la calculadora; se pusieron a prueba conocimientos aritméticos relacionados con la suma, resta, multiplicación y división de decimales, fracciones y uso de potencias; así como la resolución de ecuaciones y los significados que el alumno asigna a la literal.

El caso de Tomás

Antecedentes

Tomás es un alumno de 10 años 11 meses de edad, su nivel es alto de acuerdo a su desempeño en la clase de matemáticas, es el alumno más destacado en esta clase, según refirieron la maestra de grupo y sus propios compañeros; durante la primera entrevista se observó que utiliza diversas estrategias que lo llevaron al logro exitoso de un resultado, se encontró que su conocimiento aritmético le brinda las herramientas suficientes para entender y dar lectura a una ecuación, así como la obtención de una respuesta acertada al problema. La entrevista brindó elementos para corroborar los datos anteriores, a través de ésta se indagó con mayor profundidad qué habilidades matemáticas desarrolla el alumno para enfrentar la solución de ecuaciones de primer grado de la forma ax+b=c, que involucran paréntesis y barras de división como signos de agrupación. Se dio atención especial a observar las habilidades matemáticas y el tipo de lectura que realizó para interpretar las expresiones matemáticas que conforman a una ecuación y la lectura global de ésta; se corroboró también qué intuición desarrolló el alumno sobre los conceptos de incógnita, ecuación y solución de una ecuación.

Datos obtenidos

Tomás utiliza diversas estrategias para solucionar una ecuación, de la forma $10.5 + x = 24$, como se muestra en el siguiente extracto (**E**: entrevistador; **T**: Tomás).

E: Observa la siguiente expresión. ¿Puedes encontrar el número que falta? En una hoja se le mostraba la ecuación $10.5 + x = 24$.

T: Si, es fácil, sólo tienes que ver el resultado, 24, ahora ves este número –señala 10.5- ¿cuántos me faltan para llegar a 24...? –realiza el cálculo mentalmente, sin usar la calculadora y contando en voz baja- si fueran enteros me faltarían 14, menos los 5 décimos, el resultado es 13.5, que si lo sumas con 10.5 nos da 24.

E: ¿Qué le dirías a uno de tus compañeros para convencerlo de que la solución que encontraste es correcta?

T: Pues, le explicaría como ya te dije, o le diría que lo resolviera como la maestra nos enseñó, al resultado 24 le restas los 10.5 y así te da 13.5, ésta es fácil y muchos le entienden mejor así.

E: ¿Cómo se te hace más fácil a ti?

T: De las dos formas, pero me gusta más hacerlo mentalmente, porque me sale más rápido, pero hay ocasiones que es mas fácil como la maestra nos dijo.

E: ¿Qué significa para ti la letra que aparece en la expresión $10.5 + x = 24$?

T: Tiene dos significados, uno sirve para que puedas identificar el número que te falta, la incógnita y el otro sirve para distraerte y que te confundas, ya que puedes pensar que es la incógnita o que es un signo de multiplicación.

E: ¿Y cómo le haces para saber si es uno u otro significado?

T: Puede ser por el tamaño, mira –hace que observe la hoja del ejercicio- la “X” se ve mas chiquita y está como inclinada, si fuera “por” estaría del mismo tamaño de los demás números.

Análisis del episodio

Las respuestas de Tomás mostraron que sus conocimientos aritméticos le permiten enfrentar satisfactoriamente una ecuación como la que se presentó en la actividad antes mencionada, supo leer la ecuación y encontrar la respuesta correcta después de operaciones realizadas por medio de cálculos mentales; manipula directamente los elementos del problema con la seguridad de que con la manipulación de éstos podrá encontrar el resultado; al momento de analizar la ecuación no considero como opción para obtener un resultado el operar con decimales de manera directa, siempre consideró realizar sus operaciones con números enteros, pensando “cuántos le faltaban de 10 para 24”, obteniendo 14, menos los 5 decimos: 13.5. No se preocupó por utilizar de inmediato la calculadora, lo que manifiesta habilidad mental y confianza para realizar las operaciones aritméticas básicas, además del buen manejo y comprensión que da a los números enteros y decimales.

Logros

- Tomás aprovecha el conocimiento aritmético que ha adquirido en la escuela primaria como herramienta para resolver ecuaciones. Creemos que si no tuviera este antecedente aritmético no sería capaz de resolver correctamente un problema de tipo algebraico.

- Se observó a través de esta entrevista que Tomás es capaz de darle un significado a la literal, sus consideraciones respecto a la representación de la literal con x, indican insuficiente claridad al respecto, sin embargo es capaz de deducir que la literal representa una incógnita (en la segunda entrevista se ampliará este logro con mayor profundidad).

- Tomás es capaz de crear una estrategia para llegar a la solución del problema, en este caso: (i) leyendo lo que pide la ecuación (ii) manipulando aritméticamente los elementos del problema, (iii) asociando las relaciones aritméticas para obtener la solución de la ecuación.

Segunda entrevista

Propósito de la entrevista

Investigar con profundidad los significados que asocian los alumnos a las literales que se usan para simbolizar las incógnitas en las ecuaciones, pretendiendo que el estudiante enfrente la solución de ecuaciones donde se involucran paréntesis, barras de división y signos de agrupación, se tomó como punto de partida la siguiente ecuación:

$$4 \times (y - 3) + 2 = 14$$

Datos obtenidos

E: ¿Puedes encontrar el número que falta en la siguiente expresión?

T: Sí. -Observa detenidamente la ecuación, con el dedo índice señala para sí mismo cada uno de los elementos nombrando a media voz varios cálculos aritméticos hasta detenerse en el segundo miembro de la ecuación (14). Después de un momento breve menciona: “es fácil, mira, lo que tienes que hacer es ver lo que te piden, aquí el resultado es 14 ¿no?, y luego está el 2 –lee la ecuación de derecha a izquierda- significa que todo esto –señala en forma circular con el dedo: $4 \times (y - 3)$- debe valer 12 para que cuando lo sumes con 2 te dé 14… ¿Ves?, ahora –piensa unos segundos y con determinación menciona- “y” vale 6, porque es la mitad de 12... pero... es que la “x” podría ser literal, pero no, no porque está indicando que hay que multiplicar, sí... la voy a comprobar –toma la calculadora e ingresa los datos, muy satisfecho, menciona- sí, esta bien, vale 6”.

E: ¿Qué le dirías a uno de tus compañeros para convencerlo de que la solución que encontraste es correcta?

T: Le explicaría como ahorita te expliqué a ti.

E: En la siguiente pregunta identifica las literales (se le presentó la ecuación $2+3\times m=2\times m+7$).

T: Las dos "m".

E: Y qué me dices de las dos "X", ¿serán literales también?

T: -Piensa un momento, "podrían ser, pero no, porque mira, si fueran dos incógnitas, entonces tendríamos 4 incógnitas y no... además si te fijas están señalando que 3 lo multipliques por la incógnita, mira –señala- si no ¿cómo le haces?, se juntarían tres números el 3 y dos incógnitas y sin ningún signo que te diga qué hacer... no, sólo las "m" son las incógnitas".

E: ¿Tienen el mismo valor?

T: Tendrías que hacer el ejercicio para saber.

E: ¿Lo puedes resolver?

T: "Si, -nuevamente se da tiempo para analizar el problema- recurre a la calculadora, comienza a revisar la ecuación a partir del resultado, en voz baja realiza algún cálculo, menciona- yo creo que no valen lo mismo, por que no sale con el mismo valor, mira, si pruebas con 2, te daría 10, pero de este lado (señala el segundo miembro de la ecuación) el resultado con 2 no da 10, porque 2 por 2 más 7 da 11, y si pruebas con tres tampoco en este caso valen lo mismo; la de este lado –izquierdo- vale 3 y la de éste –derecho- vale 2.

Análisis del episodio

Las respuestas de Tomás en esta entrevista, confirman que a partir de recursos aritméticos es capaz de crear estrategias diversas para encontrar la solución de la ecuación $4\times(y-3)+2=14$, crea sus propios métodos y sus formas de operar sobre la ecuación, sin tener que recurrir al método convencional que la maestra de grupo ya enseño para abordar este tipo de problemas. Tomás fue capaz de analizar la ecuación, leyéndola logró establecer que el resultado es 14 y que para llegar a éste se tiene que sumar 2, entonces se tiene que encontrar un 12, derivado de la parte de la ecuación determinada por paréntesis; pudo deducir que el valor de la incógnita era 6, por dos vías, una de ellas considerando la mitad de 12 y otra, porque al tener $4\times(y-3)$ dentro del paréntesis debía ir 3, para que al multiplicarlo por 4 diera 12. Lo que hizo Tomás al leer la ecuación comparando ambos miembros presenta claras similitudes con el método conocido como "cambio de variable", el hecho de dejar en suspenso las operaciones que incluye la expresión $4\times(y-3)$ para considerarla como una sola entidad cuyo valor numérico debe ser 12 sugiere que estaba simplificando la ecuación $4\times(y-3)+2=14$ y la veía como la ecuación más simple $z+2=14$. Como veremos más adelante otros alumnos acudieron a estrategias similares.

Este hallazgo es el resultado de permitir que los alumnos aborden la resolución de este tipo de ecuaciones a partir de los recursos que ellos tienen a su alcance, lo cual parece haber favorecido una lectura eficiente de la ecuación que se observa con poca frecuencia cuando a los estudiantes se les ha enseñado un método que mecanizan con la práctica. A partir de lo que Tomás realizó consideramos que no le resultará extraño aprender el método de "cambio de variable" cuando lo estudie posteriormente en el bachillerato, más adelante se detallara en relación a este método.

En cuanto al manejo de las literales se pudo observar que Tomás identificó a la literal como la incógnita en la ecuación, en un primer momento, mostró dificultad para establecer diferencia entre la literal marcada como "*x*" y el signo de multiplicación "*x*", en la ecuación $2+3\times m=2\times m+7$, estableció, que era una forma de confundir a quien resolvía la ecuación, logro superar esta consideración a través del análisis detallado de la ecuación, descubriendo que el signo no podía ser literal, porque no se podían juntar dos incógnitas sin ser separadas por un signo que indique la operación a realizar, también establece que el valor de las literales presentadas en ambos miembros de la ecuación es el mismo; se puede establecer que sus conocimientos aritméticos lo llevaron a realizar esta deducción.

Consideramos que lo anterior se debe a que es una parte del lenguaje algebraico que el estudiante todavía no adquiere, en particular, lo referente a operar con la incógnita, cuestión que está más allá de los propósitos de esta tesis. El tiempo disponible para el trabajo no permitió abundar en esto para ayudar a Tomás a superar esta dificultad.

Logros

- Creación de estrategias diversas para la resolución de ecuaciones, los cuales llevan a una respuesta acertada a la problemática planteada.
- Se considera que el máximo logro de Tomás es tener la capacidad de resolver una ecuación a través de leerla en forma global. Tomás logra ver la ecuación de globalmente, por ejemplo, ante la ecuación $\frac{2\times(m-5)}{3}+7=9$, planteó lo siguiente:

1. Para obtener el resultado (9), es necesario encontrar un número que agregue algo a siete.
2. Ese número puede ser 2, (ya que $2+7=9$).
3. Por lo que el resultado de $\frac{2\times(m-5)}{3}$, debe ser 2.
4. Con base a un razonamiento de este tipo, trabaja en la resolución de este "nuevo" problema, si se pretende obtener 2, entonces se tiene que encontrar un número que dividido entre 3, dé por resultado 2, éste podría ser el 6, ya que $\frac{6}{3}=2$.
5. Ahora la resolución de la ecuación se ha reducido a resolver $2\times(m-5)=6$, el razonamiento en este caso se centra en obtener un número que restado con 5 y multiplicado por 2, dé 6 (sin atender a la ecuación, Tomás pensó en el número correcto, dijo que hay que revisar la tabla del 2, obteniendo que $2\times3=6$), ahora

ya sabe que el número que tiene que ir dentro del paréntesis es 3, y para obtener un número que restado con 5 se obtenga 3, puede ser 8.

6. El proceso anterior se puede resumir en las siguientes expresiones:

$$2\times(8-5)=6 \qquad \frac{6}{3}=2 \qquad 2+7=9$$

Dificultades

- La principal dificultad que Tomás presentó, es en relación con la significación que otorga a las literales en la ecuación, identificando que la literal puede tener dos significados: por un lado que sea el valor de la incógnita, y por otro, que sea un signo de multiplicación, presenta cierta confusión al respecto en la ecuación $2+3\times m=2\times m+7$, donde determina que las *m* tienen diferente valor, sin embargo, fue capaz de superar tal situación, al resolver la ecuación, determinando el mismo valor de las literales, realizando razonamientos que le permitieron identificar el valor de *m*.

El caso de Yesica Gabriela

Antecedentes

Yesica Gabriela es una alumna de 11 años 3 meses de edad, su nivel escolar es alto de acuerdo con su desempeño en la clase de matemáticas. La maestra de grupo aprecia que es una alumna estudiosa, pero que sus padres la presionan constantemente para obtener la mejor calificación. En la primera entrevista se observó que para resolver una ecuación utiliza el método enseñado por la maestra de grupo antes descrito. Entiende este método a la perfección, lo cual sugiere que su conocimiento aritmético (operaciones básicas) le brinda la herramienta para obtener una solución al problema. Sin embargo, no logra obtener alguna forma de resolución diferente al ensayo y error; terminaba buscando la solución a ecuaciones como $4 \times (y-3)+2=14$ con el método que conocía: “probando” con diversos números. En este caso su primer intento fue con 10.5, al preguntarle por qué, refería que es el número que se le ocurrió, y así continuaba hasta encontrar el valor correcto a través del ensayo y error. En cuanto al significado de las literales, se observó que en un inicio tuvo dificultad, sin embargo sus explicaciones al respecto permiten observar que logró razonar en torno a su significado y se refiere a ellas como un *número perdido* o *incógnita.*

Primera entrevista

El siguiente episodio proporciona datos que confirman las aseveraciones anteriores; al enfrentar la ecuación $10.5 + x = 24$ Yesica contestó lo que se describe a continuación (E, entrevistador, Y, Yesica).

E: Observa la expresión $10.5 + x = 24$, ¿puedes encontrar el número que falta?

Y: “Sí, -toma la calculadora- se tiene que restar 10.5 a 24, le da 13.5, ese es el resultado”. Lo comprueba sumando todo –lo realiza en la calculadora-, “sí da”.

E: Explícame qué hiciste para encontrar esa solución.

Y: "Pues, resté como la maestra nos enseñó, si se indica que sume como aquí, hay que restar, pero si aquí se indica que se reste –señala el primer miembro de la ecuación- hay que sumar".

E: ¿Qué le dirías a uno de tus compañeros para convencerlo de que la solución que encontraste es correcta?

Y: "Enseñándole cómo le hice y después explicándoles".

E: ¿Qué significa para ti la letra que aparece en la ecuación?

Y: Una incógnita, indica que hay que buscar un número perdido.

E: Inventa otra expresión que sea diferente a $10.5 + x = 24$ pero que tenga la misma solución. (Yesica le da otro sentido a la pregunta y responde sobre otro posible método de resolución).

Y: "Pues..., solamente sumando 10.5, 10.10, 10,15 y así sucesivamente hasta que me diera 24, pero es más fácil, restando".

E: Muy bien, pero la pregunta que te hice pide que elabores una expresión diferente, pero utilizando la misma solución, ¿se puede?

Y: "Sí, podría ser el mismo resultado 13.5, entonces sería $13.5 + 10.5 = 24$.

Análisis del episodio

Se pudo observar que la alumna establece una forma de resolución a través del método enseñado por la maestra, el manejo de este método se ve bien dominado, posiblemente por la insistencia de los padres a estudiar lo visto en la escuela. La maestra se refirió a que en otras áreas la alumna llega a aprender de memoria la mayoría de los conocimientos, en las siguientes entrevistas se podrá establecer con mayor claridad esto. Intentó establecer una nueva forma de resolución: s*umar de uno en uno hasta encontrar el número que se busca*, sin embargo indica que la primera forma es más sencilla. La identificación de las literales no le representa confusión alguna.

Logros

- Maneja el método enseñado por su maestra en ecuaciones de la forma $ax + b = c$.
- Establece una posibilidad de resolución diferente al método enseñado por la maestra, utilizando ensayo y error.
- Logra resolver correctamente una ecuación de primer grado con una incógnita.
- Identifica la literal en la ecuación, aparentemente sin ninguna confusión.

Segunda entrevista

Datos obtenidos

E: ¿Puedes encontrar el número que falta en la expresión $4 \times (y - 3) + 2 = 14$?

Y: "Sí, primero hay que encontrar el número que falta, en este caso es *Y*..., -piensa un poco y detiene su lápiz señalando *x*, parece dudar-, aunque..."

E: ¿La literal *x* no es una incógnita?

Y: "Podría ser porque también es una letra, pero no..., porque mira el tamaño de ésta –señala *x*- es más chiquita que la literal *y,* e incluso su forma es diferente, además –se nota convencida después de analizar la ecuación nuevamente- la *x* indica que hay que multiplicar, que 4 multiplica a lo que está dentro del paréntesis, entonces la incógnita es sólo *y,* hay que buscar cuánto vale".

E: ¿Cómo le haces?

Y: "Tienes que encontrar un número que te dé 14, después de hacer varias operaciones..., mira: 4 multiplica a lo que dé una resta de 3 con la incógnita para que luego se sume con 2, lo voy a intentar primero con 5 –toma su calculadora y mete los datos tal y como está la ecuación, obtenido como resultado 10 -, entonces puedo intentar con 6 – repite la operación, en la calculadora se despliega la expresión $4.(6-3)+2=14$ - sí está bien, el resultado es 6".

E: ¿Qué le dirías a uno de tus compañeros para convencerlo de que la solución que encontraste es correcta?

Y: "Que utilicé su calculadora".

Análisis del episodio e identificación de logros

Se pudo observar que la alumna logra resolver la ecuación, aunque inicialmente duda cuál es la incógnita supera este problema con base en una lectura de la ecuación que le indica lo que ésta "le solicita hacer". Al observar que la ecuación es diferente a las propuestas durante sus clases elimina la posibilidad de utilizar el método enseñado por su maestra; detecta las operaciones necesarias para la resolución de ésta y sabe que las operaciones la tienen que llevar a un resultado, (en este caso 14); utiliza el método de ensayo y error resolviendo en dos intentos. Hay que destacar que la calculadora fue una importante ayuda, no se preocupó en razonar sobre la jerarquía de operaciones o en pensar por qué el número 6 era el correcto, no se detuvo a pensar en el significado del paréntesis, sólo manipuló los datos numéricos en la calculadora y obtuvo el resultado; posiblemente sin la calculadora le hubiera sido difícil resolver la ecuación.

Como evidencia para apoyar la aseveración respecto al uso del significado de la literal, recurramos al siguiente episodio que ocurrió en la segunda entrevista. Se utilizó la ecuación $120+5\times p=10\times p+85$.

E: Identifica las literales.

Y: -Revisa la ecuación y marca las dos "*x*"y las dos "*p*"-, éstas son.

E: ¿Estás segura que todas son literales?

Piensa un momento- pues sí, porque todas son letras. –se le recuerda lo expuesto en las sesiones con el grupo respecto a la literal-.

Y: "Ah sí, entonces *"x"*, no es una literal porque representa un signo de multiplicación, entonces la ecuación dice que a 120 hay que sumarle lo que dé, en la multiplicación de 5 por la incógnita... la literal es sólo *p*".

E: ¿Las *"p"* tienen el mismo valor?

Y: Revisa detenidamente la ecuación, parece que la resuelve mentalmente, pero toma la calculadora e ingresa los datos de la ecuación, intenta resolverla, pero se detiene al ver que el segundo miembro tiene también una literal, entonces menciona "si de este lado hay una *"p"* entonces se tiene que hacer una operación, a 10 hay que multiplicarle la incógnita y luego sumarle 85.

E: ¿Entonces los valores de *"p"* son los mismos?

Y: "Sí, porque si fueran diferentes serían distintas letras".

E: ¿Lo puedes resolver?

Y: "Sí, lo puedo intentar con un número... 20..., no da, le voy a bajar a 10, tampoco da, ahora con 5..., tampoco... bueno si le sigues intentando con otro número arriba de 5 te va a dar, sólo se trata de que el resultado sea el mismo de la operación que está del lado del resultado".

Análisis del episodio

En este episodio se puede comprobar que la alumna no identificaba claramente las literales. Las confundió con el signo de multiplicación, se le recordó que durante las sesiones en donde se trabajó con el grupo se discutió que la incógnita se representa con una letra a la que se le llama literal y que no habría que confundir un signo que representa una operación como suma, resta, multiplicación o división con una literal, ya que tienen significados distintos, después de la explicación logró establecer la diferencias y plantear un razonamiento importante: "que el valor de las literales es el mismo, porque es la misma letra" (situación que no se presentó en ningún caso de los 7 alumnos restantes). Esto conduce a considerar que la alumna asocia significados que la llevan a comprender la resolución de un problema, ya no es como en el primer episodio en el que ella no vio a la ecuación más allá del contexto del resultado que la calculadora le proporcionó. En este caso su nivel de razonamiento parece ser más sofisticado, considerando que el valor que le diera a la literal la podía llevar a un resultado correcto y aunque no logró resolver esta ecuación satisfactoriamente, el proceso de solución que eligió eventualmente la llevaría a obtener una respuesta correcta, ya que el análisis de la ecuación en forma global le permitiría identificar relaciones que la llevarían a resolver la ecuación satisfactoriamente. Comprendió también que la forma de obtener un resultado en una ecuación de este tipo la llevaba a manipular la literal en ambos miembros y que la ecuación se podía interpretar como una igualdad.

Las respuestas de esta alumna sugieren que sus antecedentes aritméticos (sobre todo en el manejo de operaciones básicas) fueron el principal factor que le permitió comprender el proceso de resolución de una ecuación. Se puede considerar que el conocimiento aritmético que ha adquirido la estudiante en la escuela primaria le sirve como punto de partida para iniciarla en el uso del lenguaje algebraico como herramienta para resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita, mediante actividades que tiendan un puente entre la aritmética y el álgebra. Consideramos que las actividades que empleadas en este estudio permiten establecer esa conexión porque relacionan los antecedentes elementales de la aritmética con objetos algebraicos que proporcionan a los alumnos una oportunidad para enfrentar la lectura y manipulación del código algebraico en situaciones donde sus conocimientos aritméticos son un referente para asignar significados al nuevo lenguaje (literales, ecuaciones, signos de agrupación y relación de equivalencia).

Yésica utilizó la estrategia de ensayo y error al abordar la resolución de ecuaciones y el método enseñado por la maestra sólo lo utilizó para resolver casos del tipo $x+4=2$, (restar $4-2$ para obtener la incógnita).

Logros

- La alumna utilizó el método de *ensayo y error* para la resolución de ecuaciones, lo cual corresponde a una forma no convencional de obtener una solución. Logró resolver correctamente la ecuación, pero con cierta dependencia de la calculadora, aunque en la segunda entrevista mostró estar consciente de que el razonamiento previo al ingreso de los datos es fundamental para la correcta solución de la ecuación; se puede considerar que la alumna no tendría dificultad para adquirir un manejo del lenguaje algebraico que la lleve a la comprensión y razonamiento de problemas de este tipo y que con la utilización de este conocimiento pueda hacer que la calculadora sea una herramienta que le auxilie en la resolución de problemas algebraicos.
- El principal logro de Yésica es el haber concluido que una ecuación equivale a una relación de igualdad y que los valores de una literal son los mismos cuando estén representados con la misma letra, esta aseveración permite identificar el significado que asigna a las literales que se usan en una ecuación para representar a una incógnita. Consideramos que este significado corresponde de buena manera a una primera noción sobre la que posteriormente puede formularse una definición formal para una ecuación y los términos que la constituyen.

Dificultades

- No logra leer la ecuación de forma general, acude sólo a un método de resolución, lo que la limita para obtener una interpretación más completa de ésta. Sin embargo, sus acercamientos a través del ensayo y error muestran que tiene claro qué significa resolver una ecuación y qué condiciones debe cumplir un valor que ella proponga para ser considerado válido como solución.
- El trabajo auxiliado con la calculadora limitó en un primer momento su razonamiento en la resolución de ecuaciones, ya que sólo ingresaba los datos a la calculadora "probando" con diferentes números posibles. Para la segunda entrevista esta limitación se presentó nuevamente, en menor medida, ya que comprendió que era necesario entender las relaciones cuantitativas contenidas en la ecuación antes de ingresar los datos a la calculadora. Aunque logró esto, finalmente intentó obtener el resultado con el uso de la calculadora, lo cual ratifica el apoyo que le brindaba el uso de la máquina.

El caso de Alondra

Antecedentes

Alondra es una alumna de 10 años 5 meses. Su desempeño en la clase de matemáticas la ubica como una estudiante promedio. La maestra de grupo la describe como una alumna discreta, tanto en calificaciones, como en personalidad al interior del grupo. Sin embargo, se pudo notar que en la hora del recreo destaca como una alumna que organiza juegos y que los compañeros y compañeras de grupo gustan de jugar a lo que ella decida, e incluso le llegan a comprar alguna golosina o alimento; tiene gran carisma y en general con todos los compañeros se lleva bien, es la alumna de menor estatura en el grupo. Es hija de un comerciante y un ama de casa, se autodenomina como una alumna regular en la clase de matemáticas y manifiesta que esta asignatura es de sus preferidas.

Al enfrentar la ecuación $x + 3.5 = 72$ indicó que la maestra de grupo les enseñó una forma para resolver este problema, "*donde se resta el resultado*". Menciona que en este caso no se puede utilizar y recurrió al análisis de la misma, obteniendo que el número que falta es el 37, porque sumado con 35 resulta 72. Para realizar esta actividad se auxilió de la calculadora y aseguró que su trabajo estaba bien hecho, lo que hace evidente su desconocimiento de los números decimales (más adelante se analizará con mayor profundidad este ejemplo). Sin embargo, al enfrentarla a una ecuación como $x + 9 = 18$, no tuvo dificultad, ya que utilizó lo enseñado por la maestra: a 18 se le restan 9, el resultado será 9 que sumados a 9 dan 18. Se pudo confirmar después del análisis de varios ejercicios de este tipo que tiene serias dificultades para trabajar con números decimales.

También se pudo observar que la alumna tuvo dificultades cuando enfrentó ecuaciones como $4 \times (y - 3) + 2 = 14$, en el que se involucran paréntesis y barras de división como signos de agrupación. Al inicio de la actividad parecía que no sería capaz de identificar o inferir qué función desempeña el paréntesis. Sin embargo, después de algunos intentos fallidos consideró a la expresión $4\times(y-3)$ como un solo término de la ecuación –ella se refirió a este notable avance como "eliminar el paréntesis", –que era lo que se le complicaba- para obtener así como primer razonamiento, sin usar la calculadora, que el número que faltaba era 6 usando la expresión $2\times6+2=14$ (fue lo último a que hizo referencia al concluir sus cálculos mentales). En el análisis de la segunda entrevista se tratará esta situación con mayor amplitud. Esta respuesta puede relacionarse con el procedimiento conocido como "cambio de variable", en los términos que se mencionaba anteriormente.

Se pudo observar que la alumna logró resolver las ecuaciones por vía aritmética, y aunque sus antecedentes aritméticos no son los mejores, es claro que son un soporte para ella en la resolución de ecuaciones. Por ello sería posible que estos conocimientos le sirvan como punto de partida para la adquisición del lenguaje algebraico que estudiará en la escuela secundaria.

Primera entrevista

La primera entrevista arrojó datos que permitieron establecer el método de resolución que utiliza la alumna al enfrentar la solución de una ecuación del tipo $10.5+x=24$. Se pudo observar también el tipo de recursos aritméticos que utiliza para tal actividad. Se puso de manifiesto algunas carencias, como se puede apreciar en el siguiente episodio:

E: ¿Puedes encontrar el número que falta en la expresión $10.5+x=24$?.

A: "Sí, tienes que ir probando con varios números, -toma la calculadora e ingresa los datos de la ecuación, sustituyendo x por 10.6-, no es ese número".

E: ¿Por qué elegiste 10.6?

A: -Piensa un instante- "sólo se me ocurrió". Continúa con la resolución del ejercicio, durante esta operación no habla y sólo asiente con la cabeza (sí o no) cuando ha elegido probar con un número intentó con 10.7, 10.8, 10.9 y 10.10, dudando que número continua después del 10.9; al no obtener resultado correcto, intenta con 11, 12 y 13.

E: ¿Ese número –refiriéndome al 13- está cerca del que buscas?

A: "Creo que sí, es que si usas ese da 23.5, si creo que sí..., a ver..., voy a probar como al principio, -utiliza 13.1, 13.2, 13.3, 13.4 y 13.5, al terminar indica- ya, es 13.5".

E: ¿Qué le dirías a uno de tus compañeros para convencerlo de que la solución que encontraste es correcta?

A: Que vea su calculadora y que pruebe con un número y con otro hasta que lo encuentre.

E: ¿Conoces otra forma para resolver una ecuación de este tipo?

A: No.

E: ¿La maestra les ha enseñado a resolver este tipo de problemas?

A: "Sí nos enseñó, pero no para estos problemas".

E: ¿Qué significa para ti la letra que aparece en la expresión?

A: Es el número que falta.

Análisis del episodio

Se observó que la alumna emplea el método de ensayo y error. Comienza utilizando el valor 10.6 porque considera que es un número cercano al primer elemento de la ecuación (10.5). No logra identificar que el método que la maestra les enseñó en clase le podría ayudar a resolver la ecuación de forma más rápida y precisa; se observa que tiene dificultades en el manejo aritmético del punto decimal e incluso utiliza el 10.10, después del 10.9, dudando de la continuidad de la numeración cuando está contando los décimos. Esta problemática se observa en el ejemplo que se mencionó anteriormente. Al resolver la ecuación $x+3.5=72$ afirmó que el valor de la literal es 37. Se puede inferir que elimina el punto decimal y que toma 3.5 como 35, a partir de esto obtendrá "su solución" ensayando con varios valores hasta encontrar 37 como respuesta. Una vez eliminado el punto decimal no logra darse cuenta que puede utilizar el método enseñado por la maestra. Se puede concluir que sus carencias aritméticas la limitan, incluso en el uso de la estrategia de ensayo y error, aunque finalmente logra encontrar una solución correcta a la ecuación con las modificaciones que ella hizo.

Logros

- La alumna acude a la estrategia de ensayo y error para la resolución de ecuaciones, identifica que la finalidad de una actividad de este tipo es encontrar un número que falta, mismo que busca al azar sin analizar las relaciones aritméticas entre los valores con los que intenta dar una respuesta.
- Logra llegar a un resultado, aunque no sea el correcto para resolver la ecuación.

Dificultades

- La alumna mostró dificultad en diversos aspectos aritméticos básicos, como el orden en el sistema decimal -décimas, centésimas, milésimas, diezmilésimas,…, millonésimas-. Esto le complicó la obtención de la incógnita en la ecuación, ya que buscaba el número al azar sin considerar las aproximaciones de la numeración o realizar alguna operación de tipo aritmético que la llevará al resultado correcto.

Segunda entrevista

Datos obtenidos

E: ¿Puedes encontrar el número que falta en la expresión $4\times(y-3)+2=14$?

A: -Analiza detenidamente la ecuación, duda en tomar la calculadora, haciendo cálculos de forma mental- “Primero tienes que ver cuál numero es el que falta, aquí sería éste –señala “y”- y hay que buscar números que te den 14”... –nuevamente ve detenidamente la ecuación y de forma categórica menciona- “es 6 el número que falta; déjame comprobarlo –toma su calculadora ingresando estos datos: $2\times 6+2=14$ -sí, está bien”.

E: Explícame cómo lo lograste.

A: Le sume 1 al 4, me daba 5, pero si a 5 lo multiplicas por 2 y le sumas 2 te va a dar 12, (teclea en la calculadora $2\times 5+2=12$), ése no es; entonces a 4 le sumas 2 y te da 6..., ahora sí, 2 por 6 más 2 da 14, está bien.

E: Revisemos nuevamente la ecuación, ¿qué te pide?

A: Que el 4 multiplica lo que está dentro del paréntesis y lo que te salga lo sumas con 2, así lo hice, ¿ves?

E: ¿Y qué significa este 3 que está dentro del paréntesis?

A: Que es lo que hay que multiplicar por 4.

E: Pero antes de multiplicar, ¿qué hay que hacer con ese 3? ¿Qué te indica la ecuación?

A: Que ése numero que salga del paréntesis tiene que multiplicarse con 4.

E: -Se insiste al respecto- Muy bien, lo que está en el paréntesis multiplica a 4, pero si observas bien este 3 –lo señalo con el lápiz- tiene un signo antes, ¿lo ves?

A: Ah, tú dices este 3... –toma un momento para reflexionar-, pues ya no sé, me hice bolas...(sic.)

E: ¿Qué buscabas originalmente? ¿Recuerdas?

A: El número perdido.

E: ¿Cuál dijiste que era?

A: 6, ése es el número que falta.

E: Si sustituyes el número que falta en la ecuación, ¿qué pasaría?

A: Lo tengo que poner en lugar de *y*, ¿no?, sí... ah... sí, 6 menos 3, da 3 por 4,12 más 2… ¡Ahí está el 14, ya le entendí!

E: ¿La literal x es una incógnita?

A: No, porque esa x te dice que hay que multiplicar.

E: ¿Qué le dirías a uno de tus compañeros para convencerlo de que la solución que encontraste es correcta?

A: Pues, le explicaría paso por paso como me explicaste tú.

Análisis del episodio

Este episodio corrobora que Alondra logró encontrar la solución de la ecuación acudiendo a sus formas no ortodoxas de razonamiento. Como en el episodio anterior en donde eliminó el punto decimal, ahora dejó de considerar los paréntesis que incluían operaciones que aún no podía realizar debido a que en ellos estaba contenida la incógnita. A partir del análisis que hizo de la ecuación se puede inferir que centró su atención en el resultado que quiere lograr (14) revisando los elementos que tiene para tal efecto. Ignoró el 3, que “ha eliminado junto con el paréntesis”, quedándose sólo con los datos que le sirven (4 y 2), para determinar que el resultado es 6, porque 4 x 6 + 2 =14. Su forma aritmética de operar sobre la ecuación le brindó elementos para encontrar ese valor (6) –no al azar- ya que comienza su análisis con el número 4 sumándole 1, no obtuvo un resultado que la satisfaga, por lo que pasó a sumar 4+2=6, obteniendo el valor que ella consideró correcto.

No pudo notar que ese número (6) era el que podía sustituir a la incógnita en la ecuación ya que había “eliminado el paréntesis”, incluso la lectura que le da a la ecuación una vez “eliminado” ese elemento es la correcta: 4 multiplica a 6 menos 3, más 2 igual a 14, por lo que se pudo observar que tiene la capacidad de hacer una lectura adecuada de la ecuación.

Se pudo observar que resolvía la ecuación “eliminando los paréntesis” una especie de cambio de variable, ahora su nueva variable es todo lo contenido en los paréntesis. Sus respuestas en la entrevista sugieren que pudo deducir esto a través de un análisis detallado de la ecuación acompañado de cálculos aritméticos que realizaba mentalmente. Como no registraba sobre el papel esos cálculos le era difícil explicar cómo había logrado resolver la ecuación. Se le tuvo que inducir a indagar en los elementos de los paréntesis de manera muy puntual para que pudiera reconstruir lo que había hecho e hiciera explícito por qué había restado 3 a 6.

Logros

- Obtención de la solución de la ecuación, discriminando elementos que no le son útiles para llegar al resultado.
- Trata de visualizar la ecuación de forma general, trabaja sobre el valor numérico que ocupa el segundo miembro de la ecuación y a partir de ahí determina las operaciones que se deben realizar para llegar a ese resultado.
- Trabaja sólo con los datos contenidos en la ecuación, lo que la aleja de buscar números al azar.
- Pone en juego todos sus conocimientos aritméticos para operar sobre la ecuación.
- Logra entender lo que exige la ecuación para ser resuelta.

Dificultades

- Centra su atención en sólo una forma de resolver la ecuación, sin relacionar posibles resultados que tiene a la mano A pesar de que intenta leer la ecuación de forma general, no lo logra y esto le ocasiona limitaciones.
- Razona sobre posibles formas de operar sobre la ecuación, pero al centrarse en una a la vez, no puede relacionarlas entre sí.
- Existe cierta complicación en el uso de las literales, más no en su interpretación.

El caso de Jorge

Antecedentes

Jorge es un alumno de 11 años un mes, amigo cercano de Tomás. Durante el trabajo de grupo, se sentaban en la misma mesa, por lo que intercambiaban comentarios y respuestas. En varias ocasiones se les observó platicando sobre temas diferentes al trabajo de grupo. Jorge se considera “regular” en matemáticas, se observó que hacía buen equipo con Tomás, lograba entender la mayoría de los temas y se le notaba cierto gusto por la materia aunque él no lo decía. Considera que las matemáticas no son de su preferencia y le gustan a veces. Al interior del grupo Jorge tiene buena aceptación, la maestra lo considera bueno, con desempeño aceptable en la clase de esta asignatura, aunque a veces llega a mostrar apatía, pero en términos generales la educación que ha recibido en casa –así lo expresa la maestra- lo lleva a ser obediente y respetuoso en cualquier caso. Su papá es comerciante, -vende papas- y su mamá es ama de casa, ambos padres tienen inconclusos sus estudios de secundaria y los ingresos familiares dependen del padre.

Las entrevistas con Jorge se realizaron en una sola sesión, ya que se iba ausentar una semana antes de concluir el trabajo. Es considerado como alumno de nivel medio en la clase de matemáticas. En el cuestionario inicial, en un primer acercamiento a las ecuaciones de primer grado del tipo $x+3.5=72$, Jorge contestó que el número que falta es 69.5, al pedirle explicación al respecto mencionó que es lo que la calculadora le daba.

Se infiere que el alumno no consideró los números decimales de la ecuación tanto en el razonamiento de resolución, como en el momento de ingresar los datos a la calculadora, ya que el resultado que ésta le dio fue 72. Se podría considerar cierta problemática en cuanto al uso aritmético de los decimales, sin embargo, en actividades posteriores no presentó dificultad al resolver ecuaciones como: $b+1.03=24.7$ o $m-1.67=30.25$, en ambas ecuaciones encontró el resultado correcto. Según refirió, lo hizo utilizando la forma que la maestra les enseñó durante el curso normal de la clase de matemáticas: “se resta 1.03 a 24.7 y se tiene el resultado 23.6, luego se comprueba sumando 23.6 y 1.03 para que de 24.7”. Del mismo modo explicó su respuesta a la segunda ecuación, pero restando en vez de sumar. Al preguntarle por qué en la ecuación del cuestionario inicial había obtenido 69.5 como respuesta, corroboró que no era el resultado correcto, resolvió nuevamente la ecuación mencionando: “en ese momento no sabía cómo hacer esos ejercicios, hasta que Tomás me dijo que la maestra ya nos había dicho... y me enseñó a hacerlos". Se pudo observar que para resolver las ecuaciones de inmediato tomaba la calculadora e ingresaba los datos correspondientes, no se preocupaba por analizar o razonar los datos de la ecuación, solamente aplicaba la estrategia que sabía le daría resultado.

Con base en la revisión de su trabajo con ecuaciones en el cuestionario inicial, se puede observar que el estudiante tenía dificultades en la compresión de los números decimales. Sin embargo, el uso de la calculadora y el método que le enseñó la maestra del grupo le permitieron superar esta carencia. Su forma de trabajo muestra que da prioridad al aprendizaje memorístico centrado en el dominio de reglas para la operatividad numérica en vez del razonamiento. El alumno aprendió a manipular la ecuación, sin razonar qué lo llevaba a obtener un resultado correcto o por qué ese procedimiento funcionaba bien; en el análisis de algunos episodios de las entrevistas se detallará al respecto.

Primera entrevista

Esta entrevista proporcionó datos que sustentan las aseveraciones anteriores; al enfrentar la ecuación $10.5 + x = 24$, Jorge respondió lo siguiente (E, entrevistador, J, Jorge):

E: ¿Puedes encontrar el número que falta en la expresión $10.5 + x = 24$?

J: Sí, -asiente con la cabeza y toma la calculadora ingresando los datos, rápidamente obtiene el resultado- es 13.5.

E: Explícame qué hiciste para encontrar esa solución.

J: Resté 24 menos 10.5, y me dio el resultado, la letra *x*, la incógnita es 13.5.

E: ¿Por qué decidiste restar?

J: La maestra no dijo que así se hacía, ella nos enseñó esa manera.

E: Si te pido que resuelvas la ecuación $x + 3.5 = 72$, ¿lo lograrías?

J: Si, -repite el procedimiento mencionado en la primera pregunta, obteniendo con la misma rapidez el resultado- 68.5 es la incógnita, la *x*.

E: Esta es la ecuación que resolviste en el cuestionario la primera vez que trabajamos, ¿recuerdas?, aquí obtuviste un resultado diferente en la misma ecuación, ¿por qué?

J: -Revisa el cuestionario, comprobando que sea el suyo, observa la ecuación tomando la calculadora e ingresando los datos - Está mal.

E: ¿Recuerdas cómo obtuviste ése resultado?

J: Ya me acordé..., es que en ese momento no sabía cómo se hacían estos problemas, pero luego Tomás me explicó que la maestra ya nos había enseñado y ahora ya aprendí.

E: ¿Qué le dirías a uno de tus compañeros para convencerlo de que la solución que encontraste es correcta?

J: Que use la calculadora para resolverlo.

E: ¿Qué significa para ti la letra que aparece en la expresión?

J: Es un número que no se sabe cuál es y es el que hay que buscar.

E: ¿Podrías resolver éstas ecuaciones sin la calculadora?

J: A lo mejor sí, pero me costaría más trabajo o me tardaría más en resolverlas.

Análisis del episodio

En esta entrevista se pudo corroborar que Jorge es capaz de resolver una ecuación de primer grado a través de un método convencional con auxilio de la calculadora. Ha aprendido un procedimiento que lo lleva a la resolución de una ecuación, mismo que podrá repetir una y otra vez con el mismo éxito. Más adelante se encontró que al enfrentar al estudiante con una ecuación en apariencia diferente, en donde se podría aplicar el mismo principio, no le fue posible utilizar ese método convencional como vía de solución.

Durante la entrevista se pone de manifiesto que la calculadora, más que una herramienta que apoye la resolución de ecuaciones, se convierte en el medio de resolución, se puede inferir que sin el auxilio de ésta no podría resolver algunas de las ecuaciones. A este respecto es necesario mencionar que, durante el trabajo de campo, Jorge se preocupaba en revisar el idioma de configuración de la máquina (había modelos que sólo utilizaban el idioma inglés para nombrar sus funciones) y al percatarse de que su calculadora estaba en inglés solicitó se le cambiara. Este episodio denota la importancia que él dio a la calculadora.

Se pudo observar que su manejo de los números decimales no es del todo satisfactorio, al resolver la ecuación $x+3.5=72$ sin ayuda de la calculadora obtuvo 69.5 como resultado, ignorando por completo los puntos decimales. Esto hace evidente que no sabía sumar con decimales. Sus conocimientos aritméticos se limitan a las operaciones básicas con enteros positivos, por lo que su introducción al uso del lenguaje algebraico tomando como base esos conocimientos aritméticos se vería dificultado si no se usa la calculadora.

Logros

- Resuelve correctamente ecuaciones de primer grado con una incógnita de manera satisfactoria con ayuda de la calculadora.
- Maneja el método enseñado por la maestra, logrando la resolución de ecuaciones a través de la manipulación de valores numéricos.
- Usa la calculadora para superar sus dificultades aritméticas y como medio de resolución de ecuaciones.

Dificultades

- Mecanización de un método de resolución de ecuaciones que le sirve sólo para el tipo de ecuaciones $ax+b=c$.
- No logra leer la ecuación o analizarla de forma global, sólo manipula los números mecánicamente.

- Utiliza a un método de resolución sin buscar alguno más o considerar la posibilidad de que pueda existir otro, ya que el que utiliza le funciona eficientemente.

Segunda entrevista

Propósito de la entrevista

Con esta entrevista se pretendió investigar los significados que Jorge asigna a las literales, se buscó que el estudiante se enfrentara a la solución de ecuaciones donde se involucran paréntesis, barras de división y signos de agrupación. Para este caso se pretendió corroborar los conocimientos aritméticos del alumno, así como uso del método utilizado en la primera entrevista. Se tomó como base la ecuación $4\times(y-3)+2=14$.

E: ¿Puedes encontrar el número que falta en la expresión $4\times(y-3)+2=14$?

J: -Observa la ecuación detenidamente sin tomar la calculadora… Está difícil, pues...-analiza nuevamente la ecuación dudando en lo que va a decir o hacer- en ésta se pide que el resultado sea 14.

E: ¿Cómo le puedes hacer para lograr resolver esta ecuación?

J: Hay que ver bien, el 4 y luego hay una *x*, entonces 4 por... ¿no? –me observa buscando una respuesta a lo que le digo que continúe- 4 por lo del paréntesis y luego sumarle 2, así ¿no?

E: ¡Muy Bien! Ahora, ¿qué tienes que hacer para encontrar el número que falta?

J: Es que hay que hacer varias operaciones, en el paréntesis hay que hacer una resta y luego una multiplicación, también suma, este paréntesis es para hacer una operación.

E: Correcto, ¿entonces cómo obtienes el número que falta?

J: La *y* es la incógnita, entonces es un número que reste a 3 y que se multiplique por 4 para que sumado con 2 de 14. Ah… Entonces, a ver, si fuera 2... no se puede, por que 2 no se resta con 3, es un número más grande...-toma la calculadora y hace las operaciones al mismo tiempo de que las repite en voz alta- 4 menos 3, da 1 por 4, 4 más 2... no. Entonces 5 menos 3... No el 5 no. A ver, el 6..., Sí, es el 6. –corrobora su repuesta-

E: ¿Qué le dirías a uno de tus compañeros para convencerlo de que la solución que encontraste es correcta?

J: Le explicaría paso por paso como le acabamos de hacer.

E: ¿Se te hizo difícil esta ecuación?

J: Sí, un poco.

Análisis del episodio

Se puede observar que al planteársele la primera pregunta y mientras observaba detenidamente la expresión, trató de leer la ecuación, lo que lo llevó al análisis de la misma. Posiblemente consideraba como premisa básica si podía utilizar el método que ya conocía, se dio cuenta que había que encontrar un resultado (14) y que para ello era necesario hacer más de una operación. Reaccionó leyendo la ecuación *paso por paso*, analizó el primer miembro de la ecuación, reconociendo que 4 multiplica al resultado obtenido de la operación de los paréntesis y que a ese resultado habría que sumarle 2 para que se obtuviera 14, razonamientos que obtuvo sin usar la calculadora. Este logro tiene que ver con la estructura visible de la ecuación, seguramente si no incluyera la expresión en los paréntesis hubiera intentado con el método que ya manejaba, por lo que se puede inferir que no generalizó dicho método para usarlo en una ecuación de este tipo, ni siquiera intento utilizarlo, quizás porque lo había aprendido en forma mecánica y no se percató que podía extenderlo para enfrentar también este caso. Esto sugiere que la enseñanza de ese método se dio abruptamente, antes de que el alumno pudiera apreciar su valía.

Pudo dar significado a los paréntesis, determinando que sirve para “hacer una operación” en este caso una resta, la incógnita menos 3, a partir de este razonamiento pudo comenzar a deducir la posible respuesta. Hasta este momento no utilizó la calculadora, lo que demuestra que la resolución del problema no dependía de la máquina “un número que reste a 3 y que se multiplique por 4 para que sumado con 2 de 14”. En ese momento había logrado leer la ecuación, estableciendo qué es lo que se pide e identificando las operaciones que tiene que realizar para dar respuesta a la actividad. Entonces fue capaz de especular sobre posibles números en relación con la incógnita, pero a partir de un razonamiento guiado por una meta (obtener 14); “tiene que ser más grande”. En el marco de lo que él conoce sobre las operaciones aritméticas observó que no podía restar 3 a 2, por lo que debería ser otro número, por medio del método de ensayo y error prueba de uno en uno hasta encontrar el 6. La calculadora le ha servido como un auxiliar, ya que hace descansar la ejecución de las operaciones básicas en la máquina. Logró encontrar una respuesta correcta razonando aritméticamente “qué es lo que la ecuación pide”.

Logros

- El principal logro de Jorge en relación con la primera entrevista fue poder leer la expresión *–paso por paso-*, lo que le propició una forma de razonamiento que lo condujo a la solución.
- Logró pensar en más de una forma para encontrar una solución, llegando a un resultado correcto.
- Identifica las literales sin confusión alguna, estableciendo que representan al número que se tiene que encontrar.
- Utiliza la calculadora sólo para hacer algunas operaciones, descansa el trabajo aritmético en ella de manera que la resolución de la ecuación no depende de la máquina, sino de lo que él le pida a la máquina hacer.
- Da sentido a la función que desempeña el paréntesis como signo de agrupación.

Dificultades

- Los logros que Jorge ha tenido a través de la segunda entrevista se debieron al análisis que hizo paso por paso de la ecuación, un factor importante en esto fue la orientación que se le brindó. Posiblemente una de las principales dificultades que pueda enfrentar es la falta de motivación por creer que la ecuación es difícil y que pueda abandonar la tarea antes de intentarla. Él no se considera bueno en matemáticas, por lo que es posible que si encuentra dificultades u obstáculos tienda a pensar que no lo puede lograr.

El caso de Adriana

Antecedentes

Adriana es una alumna de 10 años 4 meses, la maestra del grupo la ubica como una de las mejores alumnas, después de Tomás. Refriere que es una estudiante inteligente y con disposición para el aprendizaje de las matemáticas, sin embargo, menciona que *"le hace falta algo"* para ser la mejor, ya que a pesar de que durante las clases se distingue con sus participaciones y tareas, en el examen no puede reflejar su buen desempeño en clase. Según la maestra *"hay algo que la bloquea a la hora del examen, se pone muy nerviosa y es la primera en entregarlo".* Los padres expresaron que es muy nerviosa y exigente consigo misma en aspectos como tareas o puntualidad, no le gusta faltar y se preocupa por cumplir en todo en la escuela. Al interior del grupo se pudo observar que es parte de un subgrupo conformado por 5 alumnas, de las cuales, ella es la más seria. Es un grupo capaz de desestabilizar la clase con ciertos actos de indisciplina, situación que se presentó constantemente durante el trabajo de campo. No obstante Adriana se preocupa por terminar su trabajo, expresa dudas y hace preguntas que le puedan auxiliar. En el cuestionario inicial menciono que le gusta mucho la clase de matemáticas y se considera muy buena para la asignatura (de la muestra total de 23 alumnos, Adriana fue la única que se autocalificó como muy buena en la clase de matemáticas).

Es hija de un comerciante y un ama de casa que no terminaron la secundaria; en el ámbito del conocimiento matemático del cuestionario inicial, se pidió a la alumna resolver la ecuación $x+3.5=72$. Contestó "3.7" sin utilizar la calculadora, se nota que tiene dificultad en el manejo de números decimales. Afirmó con mucha seguridad que la respuesta era correcta ya que la había comprobado en la calculadora, ésta situación no se presentó posteriormente al enfrentarla a ecuaciones del mismo tipo, donde utilizó el método enseñado por la maestra. En el análisis de la entrevista se tratará este asunto más en detalle.

Primera entrevista

Datos obtenidos

Esta entrevista permitió observar el método de resolución que utiliza la alumna para la ecuación $10.5+x=24$ y el tipo de recursos aritméticos que utiliza para realizar tal actividad (E, entrevistador, A, Adriana):

E: ¿Puedes encontrar el número que falta en la siguiente ecuación?

A: Sí, -toma la calculadora y en silencio comienza a trabajar, rápidamente obtiene la solución-.

E: Explícame qué hiciste para encontrar el número que falta.

A: Hay que restar, el 24 menos 10.5 –realiza esta actividad en la calculadora- da 13.5, lo compruebo sumando el resultado con 10.5, si da 24, está bien.

E: ¿En donde aprendiste esta forma de hacerlo?

A: La maestra lo enseñó. También dijo, que si la ecuación es de resta hay que sumar.

E: ¿Qué le dirías a uno de tus compañeros para convencerlo de que la solución que encontraste es correcta?

A: Que lo haga en la calculadora.

E: ¿Qué significa para ti la letra que aparece en la expresión?

A: Es el número que falta y que hay que buscar.

E: Inventa otra expresión que sea diferente a $10.5 + x = 24$, pero que tenga la misma solución.

A: Sumaría poco a poco hasta que me diera el resultado – le da otro sentido a la pregunta, contestando en función de otra posible solución para resolver la ecuación.

Análisis del episodio

Adriana utiliza el método que la maestra enseñó al grupo. Ya se mencionaba anteriormente que la alumna es muy exigente consigo misma por lo que es probable que haya mecanizado el método para poder utilizarlo durante la entrevista individual que sabía se iba a realizar. Por medio de las preguntas que hacía al investigador, durante el trabajo de campo, se observó que la alumna esperaba que se le diera una "fórmula" específica que la llevara a la solución del problema, no intentaba obtener los resultados por medio de razonamientos que ella misma creara; al darle alguna orientación regularmente preguntaba: pero, ¿cuál es la forma correcta para hacerlo bien?, Esperaba que se le enseñara cierto procedimiento. Se pudo notar cierta confusión en ella cuando se daba cuenta que no se le daría una fórmula, como la que encuentra en el método que la maestra les proporcionó. Al momento de la entrevista mostró seguridad en el manejo de ese método, se notó que lo había analizado y estudiado -como si fuera una lección- para reproducirlo en el momento apropiado. Sus antecedentes aritméticos le permitirían resolver la ecuación sin necesidad de la calculadora, siempre y cuando no haya números decimales; al no saber manipular este tipo de números trasformó los términos numéricos de la ecuación como se describió anteriormente. Después de que la alumna contestó el cuestionario inicial, al enfrentarse a ecuaciones semejantes con números decimales, pudo resolver estas ecuaciones con el manejo de dicho método realizando las operaciones en la calculadora, obteniendo resultados correctos. Se infiere entonces, que después del primer acercamiento mecanizó el método para no volver a fallar, situación que consideró la llevaría al éxito al enfrentar cualquier ecuación.

Logros

- Mecanización de un método convencional enseñado por la maestra.
- Obtiene resultados correctos para las ecuaciones que se le propusieron.
- Manipula números decimales auxiliada de la calculadora sin tener un antecedente aritmético correcto sobre esos números, resuelve la ecuación $10.5 + x = 24$ con el uso del método enseñando por la maestra del grupo, sin analizar o intentar comprender los procedimientos que la llevan a la solución.

Dificultades

- No hay razonamiento en cuanto a la(s) posible(s) solución(es) de una ecuación, sólo la mecanización de un método, no busca opciones o caminos distintos que la lleven a la solución o soluciones correctas.
- No logra leer la ecuación, sólo aplica el método que conoce.
- Su tendencia a la mecanización de fórmulas limita una comprensión del tema que le daría más elementos que le facilitarían el uso del lenguaje algebraico más adelante.

Segunda entrevista

Datos obtenidos

E: ¿Puedes encontrar el número que falta en la expresión $4\times(y-3)+2=14$?

A: Es diferente a las otras ¿no?, -analiza la ecuación detenidamente, tecleó en la calculadora la expresión $4\times3+2=14$, de la cual no hizo mención-, pues... no sé.... a lo mejor 3..., pero....

E: Analicémosla paso por paso, primero tenemos que leer la ecuación, veamos que es lo que simboliza cada elemento de la expresión –comienza este análisis de derecha a izquierda-

A: Hay que ver que el resultado debe ser 14, luego el 2, significa que hay que sumar 2 al resultado de... –duda un momento al llegar al paréntesis- primero el 4 multiplica los paréntesis y en los paréntesis...-señala con el lápiz el signo de resta-, aquí hay que hacer otra operación… ¡Ah, sí! Un número que no conocemos, puede ser 3, menos 3 da 0, no es 3, pero lo que salga aquí –señala el paréntesis- es una resta, para multiplicarse con 4 y sumarse con 2. –analiza de esta forma la ecuación y trata de identificar la incógnita- adentro del paréntesis tiene que quedar 3 como ya dije... Ah, puede ser 6, el número que falta es 6 menos 3, queda 3 por 4, 12 más 2 igual a14.

E: ¿Qué le dirías a uno de tus compañeros para convencerlo de que la solución que encontraste es correcta?

A: Que lo haga con la calculadora –realiza las operaciones indicadas por la ecuación en la calculadora comprobando que su respuesta es correcta-.

Análisis del episodio

Adriana intentó obtener la solución de la ecuación, analizando si podía aplicar el método que le había funcionado hasta el momento, al parecer los paréntesis le hizo notar que había diferencias entre una y otra ecuación. Dudo en su posible respuesta, para encontrar la solución tecleó en la calculadora la expresión: $4 \times 3 + 2 = 14$. Se infiere que sustituye a la expresión incluida en los paréntesis considerando que su valor debe ser 3, es el número que multiplica por 4 y que sumado con 2 le da 14. Ignoró por un momento los paréntesis y la incógnita. La orientación dada por el entrevistador sugirió a la alumna una forma de abordar el reto que la condujo a realizar un análisis detallado de la ecuación con la lectura de manera global. Se observó durante el trabajo con el grupo que las asesorías le proporcionaban el punto de partida para llegar a una solución a través de algún razonamiento, mismo que ella no realizaba si no se le proporcionaba alguna orientación y buscaba abordar la ecuación con el método que ella sabía. Durante la entrevista se dio cuenta que habría que llegar a un resultado (14), con el 4 multiplicando a los paréntesis y sumando a 2, identificó la función que desempeña los paréntesis indicando que “dentro de él hay una operación”; de este análisis encontró que el valor “*y”* se tiene que restar con 3, determinando que este numero es 6 para que restado con 3 se obtenga 3. Después de analizar la ecuación y leerla paso por paso logró obtener la solución.

Logros

- Formula la respuesta correcta a través de la lectura de la ecuación y el razonamiento paso por paso de ésta.
- Logra reconocer la función de los paréntesis como signo que agrupa unas operaciones en la ecuación.
- Identifica la incógnita y obtiene su valor sin necesidad de la calculadora.
- Aumenta su autoestima en relación con su capacidad matemática.
- Identifica sus errores y los corrige.

Dificultades

- Requiere de una orientación inicial, misma que si no se le proporciona oportunamente puede producirle desaliento.

El caso de Javier

Antecedentes

Javier tiene 10 años cumplidos, es un estudiante inquieto, pero interesado en el trabajo. Suele juntarse con los compañeros que muestran indisciplina, tanto en el salón de clase como fuera de él, esto le ha generado llamadas de atención o reportes. En general es un alumno que cumple con tareas y participaciones al interior de las clases, mostró gran interés por la calculadora que se utilizó durante el trabajo de campo, mencionó su gusto por las computadoras y los vídeo juegos; regularmente utilizaba los tiempos libres que le quedaban durante el trabajo en indagar más sobre las funciones de la calculadora. Es hijo de un comerciante y un ama de casa, la cual se ocupa de su cuidado y educación; su maestra lo considera en la media del grupo, aunque en ocasiones "flojea", lo que lo lleva al nivel bajo del grupo. No se distingue por ser el mejor estudiante, pero cuando es dedicado puede lograr resultados importantes, como distinguirse en la clase de Educación Física. Se considera bueno para las matemáticas y refiere que esta asignatura le gusta mucho; en el primer acercamiento que tuvo con las ecuaciones en el cuestionario inicial fue de los pocos (sólo 2 de los 8 seleccionados y 7 de la muestra total de 23) que logró resolver la ecuación de manera correcta a través del método convencional enseñado por la maestra, mismo que utilizó más adelante al enfrentar ecuaciones semejantes. En el análisis de la primera entrevista se observaron datos interesantes que se revisan a continuación.

Primera entrevista

Datos obtenidos

E: ¿Puedes encontrar el número que falta en la siguiente ecuación?

J: Sí –toma la calculadora, obtiene el resultado de inmediato- es 13.5.

E: Explícame qué hiciste para encontrar esa solución.

J: Se resta 10.5 a 24.

E: ¿Por qué utilizaste esta forma?

J: Hace poco la maestra nos enseñó.

E: ¿Qué le dirías a uno de tus compañeros para convencerlo de que la solución que encontraste es correcta?

J: Pues que aprenda cómo se hace, si se pide una resta pues se suma y si se pide una suma se resta.

E: ¿Qué significa para ti la letra que aparece en la expresión?

V: Ahí está el número que falta, la incógnita.

Análisis del episodio

Se pudo observar y corroborar lo limitante que resulta ser un método convencional de este tipo introducido prematuramente, no permite la búsqueda de posibles opciones o de razonamientos que lleven a un aprendizaje más significativo, limita incluso a la entrevista misma, con respuestas tan categóricas y contundentes. Parece ser que para el estudiante ésta es una forma de responder satisfactoriamente a las exigencias de la escuela; el análisis de los procesos de resolución empleados por este estudiante a lo largo de las hojas de trabajo permitió observar que de 8 ecuaciones realizadas con este método logró resolver 7 de manera correcta. Esto indica la alta efectividad de esta forma de operar, pero no permite determinar si existen problemáticas alternas o razonamientos que lo lleven a la comprensión, entendimiento y utilización de ecuaciones de este tipo.

Logros

- Resuelve ecuaciones por medio del método enseñado por la maestra.
- Ha mecanizado el método y lo maneja con una alta efectividad.

Dificultades

- Responde de manera automatizada, lo que no permite que genere razonamientos que lo lleven a una mejor comprensión o al análisis de la ecuación.
- El uso mecanizado del método que le enseñó la maestra parece limitar el aprendizaje del alumno, este manejo de las ecuaciones puede ocasionarle dificultades cuando llegue el punto de utilizar las ecuaciones como un recurso para plantear y resolver problemas.

Segunda entrevista

Datos obtenidos

E: ¿Puedes encontrar el número que falta en la expresión $4\times(y-3)+2=14$?

J: No sé, espere –intenta aplicar a esta ecuación el método enseñado por la maestra, intenta simplificar el 2 y el 4- “no se puede como nos lo enseñó la maestra”.

E: ¿Es la única forma de resolución, no se te ocurre otra?

J: -Analiza detenidamente- es que... este paréntesis ¿qué significa?

E: Es un signo de agrupación, vamos a ver: ¿Qué es lo que te pide la ecuación? Hay que comenzar por interpretarla, es decir, leer la ecuación, ¿qué tenemos?

J: -Analiza la ecuación- "Es 4 por..., entonces *y* es una incógnita, ése número se tiene que restar con 3 y luego sumar con 2, ah sí".

E: ¿Cómo sabes cuál es la incógnita?

J: Pues, hay que buscar de número en número hasta encontrar el resultado, se puede empezar con 8... no da, hay que buscarlo... –busca al azar, prueba con 9, 13, 7 y 6-, ya es 6.

E: ¿Qué le dirías a uno de tus compañeros para convencerlo de que la solución que encontraste es correcta?

J: "Ah, pues con la calculadora sí, hubiera sido más fácil", -ingresa los datos tal y como se presentan en la ecuación sustituyendo a "*y*" por 6-, "sí sale".

E: ¿Con el método que utilizabas al inicio, podrías haberle dado solución a la ecuación?

J: No, es que esa forma sólo es para los ejercicios de la otra forma.

Análisis del episodio

Javier fue el único alumno que intentó usar el método enseñado por la maestra como medio de solución para una ecuación de este tipo, intentó incluso manipular sobre "el cambio de signos”: identificó que cada número conlleva un signo, sin embargo no encontró cómo aplicar ese método en esta situación. A pesar de lo anterior Javier pudo hacer razonamientos de tipo aritmético –que ya conoce- como vía para entender “lo que la ecuación solicita”. Fue capaz de identificar de una u otra forma la utilización del paréntesis y la serie de operaciones que se requieren ejecutar para obtener una respuesta, del mismo modo fue capaz de identificar cuál era la incógnita. Encontró una forma de resolución, buscando por ensayo y error establecer el valor de la incógnita. A pesar de sus logros no fue capaz de establecer relaciones que le permitieran encontrar con mayor facilidad el valor de la incógnita, por lo que buscó al azar y un poco fuera del contexto numérico de la ecuación el posible resultado. Comenzó probando con 8 y saltando a 9 y 13, el estudiante encontró la solución por ensayo y error lo que sugiere que entendió la estructura de la ecuación, consiguiendo comprender qué operaciones estaban involucradas en ella, aparentemente esto fue lo que le permitió sustituir la incógnita por distintos valores y verificar si funcionaban correctamente o no. Es importante mencionar su reflexión final: “con la calculadora sería más fácil”, sin embargo, no consideró que aún con la calculadora tendría que haber razonado en torno al valor de la incógnita.

Logros

- Establece razonamientos que lo llevan a la resolución correcta de la ecuación.

- Muestra capacidad para observar y determinar el valor de la incógnita, considerando lo que se debe hacer para llegar a la solución de la ecuación.
- Identificó cuál es la incógnita y la función que tenía en relación con el paréntesis, al número 3 y al signo para restar.
- Logra crear una forma para obtener el valor numérico de la incógnita por medio de ensayo y error.
- Aunque de forma indirecta, logra establecer relación sobre la función de los signos de agrupación, esto es un aspecto importante en la adquisición del lenguaje algebraico.

Dificultades

- Debido a la efectividad del método enseñado por la maestra, no le era posible razonar más allá, esto le limitaba y le producía desánimo al enfrentarse con nuevos retos.
- No estableció relaciones que le permitieran hacer una estimación para el valor numérico de una incógnita, trató de obtenerlo sustituyendo valores al azar.

El caso de Vanessa

Antecedentes

Vanessa, tiene 11 años 3 meses, es una estudiante de baja estatura y delgada para su edad, se nota descuidada en cuanto a su vestir y peinado, gusta de utilizar muchas pulseras de diversos tipos en ambas muñecas, sus padres son obreros. Se observó que Vanessa es de fácil relación con sus compañeros, tanto hombres como mujeres, durante el trabajo de campo no participó activamente, no expresó dudas y se dedicó a realizar su trabajo en silencio. Durante las entrevistas se mostró siempre seria, sólo hablaba cuando se le preguntaba y constantemente miraba la cámara que la grababa. En cuanto a su desempeño escolar, se autocalifica como regular en la clase de matemáticas y refiere que a veces le gustan.

Es una alumna de nivel bajo en la clase de matemáticas según la valoración que hace su maestra; en un primer acercamiento se pidió resolver la ecuación $x + 3.5 = 72$. No utilizó la calculadora para su resolución y escribió en la hoja de trabajo 3 operaciones de las cuales 2 eran sumas ($3.5 + 3.2 = 67$ y $3.5 + 6.4 = 9.9$) y una era resta ($7.2 - 3.5 = 3.2$), mismas que borró al terminar el ejercicio. La segunda operación que hizo le dio un acercamiento al resultado que ella creyó correcto, determinó que el valor de la incógnita era 64 y no 6.4, como lo había utilizado en sus operaciones. Al pedirle explicación al respecto mencionó que sumó 64 y 3.5, obteniendo 72. Esta explicación no revela su razonamiento al respecto, se puede inferir que al no encontrar relación entre las operaciones realizadas, ya que obtenía números con fracciones decimales, optó por interpretar 3.5 como un número no relacionado con la ecuación, sumó ambos valores y obtuvo 8, que sumado con 64 da 72. Así trasformó la ecuación original en otra: $x+3+5=72$. Probablemente esta falsa concepción provenga de alguna explicación que recibió en sus clases respecto a que 3.5 es igual 3+0.5. La alumna intenta poner en juego alguna estrategia que le permita dar una respuesta. Lo anterior sugiere que Vanessa tiene alguna iniciativa para aprender, desafortunadamente sus razonamientos no tienen ningún referente aritmético que le indique actuar sobre un sistema numérico que se rige por ciertas reglas sin admitir el tipo de modificaciones que realizó. Aparentemente, sus carencias en aritmética la llevan a ver los números como una colección de símbolos sobre los que puede actuar libremente. Será interesante observar si el uso de la calculadora le permite superar algunas de estas dificultades en las actividades que realizará posteriormente.

Primera entrevista

Datos obtenidos

La primera entrevista permitió conocer las estrategias que utiliza esta alumna al enfrentarse a la ecuación $10.5+x=24$. Se pudo observar también qué recursos aritméticos utiliza en esa actividad, se pone de manifiesto algunas carencias al respecto.

E: ¿Puedes encontrar el número que falta en la ecuación $10.5+x=24$?

V: Asiente con la cabeza que sí puede hacerlo, observa la ecuación y utiliza la calculadora, duda qué datos debe ingresar, intenta varias veces. Creo que es el 13.5.

E: Explícame qué hiciste para encontrar esa solución.

V: Primero resté 10.5 con 24 y con lo que me saliera sumarlo con 10.5 y sale el resultado (sic)

E: ¿Por qué utilizaste esta forma?

V: Me acordé que la maestra nos dijo eso, antes no me acordaba y me equivocaba.

E: ¿Qué le dirías a uno de tus compañeros para convencerlo de que la solución que encontraste es correcta?

V: Hay que explicarle que debe restar para encontrar la respuesta.

E: Antes de que te acordaras de la forma en que la maestra les explicó, ¿cómo resolvías una ecuación así? se le muestra la ecuación inicial.

V: Pues, buscaba el numero que hiciera falta, pensando en cuál es.

E: ¿Qué significa para ti la letra que aparece en la expresión?

V: Es el número que falta y que hay que buscar.

Análisis del episodio

Vanessa utilizó el método enseñado por la maestra en la clase de matemáticas que se ha mencionado antes. Refiere que recientemente se ha acordado de dicho método y "que antes se equivocaba". Se observó que al resolver ecuaciones de este tipo en las actividades correspondientes al trabajo de campo no utilizó ese método e incluso no pudo resolver satisfactoriamente la mayoría de las ecuaciones. Por ejemplo, en la primera hoja de trabajo (61) se les pidió resolver ecuaciones como $b+1.03=24.7$ y $k-1.5=6.2$; en el primer caso obtuvo como respuesta 246, se puede observar que ignoró el punto decimal en ambos números. En el caso de 1.03, considero que el 0 después del punto decimal invalidaba al 3, por lo que sólo utilizó el 1, por tal transformó la ecuación en $b+1=247$, y concluyó que el número faltante es 246.

En la segunda ecuación obtuvo como resultado 4.7. Se infiere algo semejante a lo anterior y que coincide con el razonamiento mostrado en la ecuación presentada en el cuestionario inicial que se mencionó en los antecedentes de la alumna. Ignora el punto decimal a pesar de que lo escribe en la ecuación ($4.7-1.5=6.2$), utilizando en lugar de ellos 47, 15 y 62 respectivamente. También ignoró el signo para restar, en vez de esto sumó $47+15=62$. Por esto, con los datos $x-15=62$, encontró que 47 era el valor faltante. Vanessa intentó resolver la ecuación con base en razonamientos erróneos, transformó la ecuación de acuerdo a su conveniencia sin considerar ninguna relación aritmética válida. Se nota alguna habilidad en la búsqueda de razonamientos, mismos que no corresponden a las reglas y definiciones de la aritmética, lo que la lleva a obtener poco éxito en la clase de matemáticas.

Logros

- Realiza razonamientos que la llevan a intentar resolver la ecuación, sin embargo, no responden a las reglas y definiciones de la aritmética.
- Muestra disposición para abordar la ecuación, pero de manera errónea.

Dificultades

- Sin la utilización del método convencional no le es posible resolver ecuaciones de la forma ax+b=c correctamente.

- Su base de conocimientos aritméticos no es del todo claro, tiene dificultad para contextualizar las operaciones básicas aritméticas en las ecuaciones.
- Al no saber operar aritméticamente con números decimales modifica la ecuación de acuerdo a lo que ella considera que está bien.

Segunda entrevista

Datos obtenidos

E: ¿Puedes encontrar el número que falta en la expresión $4 \times (y - 3) + 2 = 14$?

V: Sí, hay que ver primero cuál es el número que falta, éste –señala *y*-, después usas tu calculadora. Ingresa los datos tal y como aparecen en la ecuación con todo y paréntesis. Al encontrar la incógnita duda. Éste es el número que falta… se puede intentar ... no sé... con 4, a ver si sale... no... lo intentó con 5, tampoco, con 6 a ver... si es el 6.

E: ¿Por qué decidiste empezar a probar con el número 4?

V: Se me ocurrió.

E: ¿Qué es lo que te pide la ecuación? ¿Cómo puedes leerla? –Durante el trabajo de campo se le explicó cómo leer una ecuación-

V: Analiza la ecuación. Quiere decir que éste 4 multiplica... por este signo de multiplicar, luego a un número hay que restarle 3, luego sumarle 2 y tener 14.

E: ¿Tienes que hacer varias operaciones?

V: Sí, a ver... una multiplicación, una resta y una suma.

E: ¿Qué le dirías a uno de tus compañeros para convencerlo de que la solución que encontraste es correcta?

V: Que lo haga con la calculadora.

Análisis del episodio

Con base en el análisis de la entrevista anterior se puede inferir que al no haber encontrado en la ecuación números decimales, le fue menos complicado leer la ecuación. Le bastó con saber qué es lo que la ecuación le pedía y qué operaciones aritméticas tenía que realizar para llegar a un resultado. El método utilizado para tal efecto fue el de ensayo y error: comenzó con el número 4, verificó que ese valor no arrojaba el resultado que buscaba y haciendo las operaciones correspondientes en la calculadora con el 5 y 6.

No pudo explicar de manera precisa por qué inició probando con el 4, pero se puede inferir que tomó el primer número que encontró en la ecuación. Es preciso mencionar que no es claro si domina aceptablemente el conocimiento de la función de los paréntesis en la expresión. Para ayudarla se le sugirió ingresar los datos en la calculadora, tal como aparecen en la ecuación incluyendo los paréntesis. Consideramos que esta alumna podrá avanzar a pesar de su bajo nivel en la clase de matemáticas, sus logros hasta este momento sugieren que con más atención, por parte del maestro, podrá comprender algunos conceptos básicos de la aritmética que le permitirán tener un mejor desempeño en la clase de matemáticas.

Logros

- Fue capaz de resolver correctamente la ecuación con auxilio de la calculadora y con base en sus razonamientos.
- Logró leer la ecuación identificando la serie de operaciones que se necesitan para obtener un resultado.
- Pudo encontrar el valor de la incógnita a través de un método de ensayo y error.

Dificultades

- Los datos que recabamos sugieren que el conocimiento aritmético insuficiente que muestra la alumna se puede deber a una falta de motivación ocasionada por un historial poco exitoso en la clase de matemáticas. Esto se sustenta en que cada vez que obtuvo un pequeño avance en su aprendizaje se observó en ella una mejor actitud hacia la clase y una mayor autoestima que la estimuló a continuar y ser más consciente de sus limitaciones.
- Esta estudiante muestra la suficiente capacidad para mejorar en la clase, pero consideramos que difícilmente podrá superar sus carencias sin una atención esmerada por parte del maestro. Esperamos que el reporte que se entregó a la maestra del grupo y los episodios que ella atestiguó durante el trabajo de campo, le proporcionen información relevante para atender de manera más adecuada tanto a sus alumnos destacados como para aquellos que evidentemente requieren de un soporte individual.

El caso de Érika

Antecedentes

Érika es una alumna de 12 años cumplidos, la mayor de edad en el grupo, reprobó el primer año. Es retraída, habla poco y en tono muy suave. Se observó que se lleva bien con la generalidad del grupo, físicamente no se nota la diferencia de edad, ya que es de baja estatura y de complexión delgada, no es una alumna que destaque por sus buenas calificaciones en la clase de matemáticas, por el contrario, la maestra informó que pareciera ser "que entiende a su manera". La alumna se autocalifica como "buena para la asignatura" y menciona que a veces le gusta la clase de matemáticas, sin embargo no puede obtener buenas calificaciones en los exámenes y no participa en clase. Su papá es plomero y su mamá es ama de casa, se ve que tiene todo el apoyo y disposición por parte de sus padres.

Para efectos de esta tesis Érika fue considerada en el nivel de bajo rendimiento en la clase de matemáticas. En el cuestionario inicial se le pidió encontrar el número que falta en la ecuación $x+3.5=72$. Contestó que el valor de la incógnita es 64, en un inicio se consideró la posibilidad de que este razonamiento tuviera que ver con el de Vanessa, ya que ambas dieron la misma respuesta, además de tener una relación de amistad muy estrecha. Se indagó al respecto para corroborar o desechar esa posibilidad. Se revisó en vídeo la ubicación de ambas alumnas el día de la aplicación del cuestionario, se observó que aunque estaban cerca no era posible que se pudieran copiar; ya que la ubicación de las mesas de trabajo eran en circulo alrededor del salón, pegadas una de otra.

Se preguntó directamente a Érika cómo había obtenido ese resultado, a lo que contestó: “lo sumé todo… 64 más 3 más 5 y me dio 72”. Se consideró por esto que su respuesta es diferente a la de Vanessa. La respuesta de Érika muestra que no pudo darle sentido a la pregunta que se le planteó y ella de alguna manera generó otra pregunta que la condujo a buscar números que sumaran 72; esto es, su respuesta indica claramente que no sabe operar ni leer números decimales y que el código con el que se expresa una ecuación es totalmente nuevo para ella. Los avances que Érika pueda lograr en el trabajo de campo serán considerados tomando en cuenta esta información como punto de partida.

Primera entrevista

Datos obtenidos

La entrevista permitió observar las estrategias que Érika utiliza para resolver una ecuación del tipo $10.5 + x = 24$, se pudo observar también qué recursos aritméticos utiliza para tal actividad, como se puede apreciar en el siguiente episodio (E, entrevistador, E2, Erika):

E: ¿Puedes encontrar el número que falta en la ecuación $10.5 + x = 24$?

E2: Hay que hacerlo en la calculadora para que salga bien. A partir de este momento trabajó en silencio ingresando datos a la calculadora, tardó 6 minutos en obtener una respuesta. “Ya, es 14”.

E: Explícame qué hiciste para encontrar esa solución.

E2: Hay que meter los datos en la calculadora, así mira, pones 10.5 +, luego el número que creas que es y le das enter, para ver qué sale; y así le vas haciendo hasta que encuentres el número qué es.

E: ¿Por qué 14 es la respuesta correcta?

E2: Porque si sumas 10.5 con 14 te da 24; si hubiera puesto 13, me daría 23.5 y así esta mal.

E: ¿Qué le dirías a uno de tus compañeros para convencerlo de que la solución que encontraste es correcta?

E2: Que utilice la calculadora para que le salga.

E: ¿Qué significa para ti la letra que aparece en la expresión $10.5 + x = 24$?

E2: Es el número que debes encontrar, no se sabe cuál es y hay que encontrarlo.

E: Ya encontraste el número que falta en la expresión $10.5 + x = 24$ ¿Puedes ahora encontrar el número que falta en la expresión $24 = 10.5 + x$?

E2: Analiza por un momento, comparando ambas ecuaciones. “Sí”. Toma la calculadora ingresa los datos, para resolver esta ecuación utilizó 8 minutos, en donde no habló, se le hicieron algunas preguntas tratando de entender sus razonamientos que tampoco contestó, finalmente respondió. “Ya, la respuesta es 13.9”.

Análisis del episodio

Érika dependió totalmente de la calculadora para intentar resolver la ecuación, esto no significa que no haya establecido razonamientos que la guiaran en la búsqueda de la solución, durante los 6 minutos que utilizó para la resolución de la ecuación realizó exploraciones ingresando números diferentes como posibilidades de solución. Hay que considerar que siempre utilizó números naturales. Por ejemplo, al trabajar con la ecuación $24 = 10.5 + x$, tecleó sucesivamente en la calculadora $10.5 + 1 = 11.5$, $10.5 + 2 = 12.5$, $10.5 + 3 = 13.5$, $10.5 + 4 = 14.5$, hasta llegar a 13 y 14, obteniendo, $10.5 + 13 = 23.5$ y $10.5 + 14 = 24.5$; tomó esto ultimo como respuesta correcta. Sus justificaciones al respecto fueron: "Porque si sumas 10.5 con 14 te da 24; si hubiera puesto 13, me daría 23.5 y así esta mal". Considera 24.5 sin tomar en cuenta la fracción decimal, lo cual confirma que su conocimiento de los números decimales es insuficiente y la lleva a cometer este error, no obstante que tiene el auxilio de la calculadora.

Es importante señalar que no establece relaciones en la secuencia de los números, necesitó manipular uno por uno buscando una solución, sin considerar que podía hacer saltos entre los números, es decir, no encontró secuencia lógica entre ellos, situación que la mayoría de sus compañeros sí establecía. Este tipo de razonamiento puede explicar su fracaso en la clase de matemáticas y que se le considere mala en la asignatura, consideramos que en gran parte se debe a que los hechos básicos de la aritmética no están bien establecidos, situación que le dificulta una mejor comprensión del lenguaje algebraico.

Lo anterior fue corroborado mediante las preguntas que se le hicieron en la entrevista, donde no pudo identificar que la segunda ecuación que se le propuso es la misma que la primera e incluso encontró una nueva solución. Se observó que no cuenta con las bases aritméticas necesarias para obtener una respuesta correcta; de los 8 alumnos entrevistados fue la única que no estableció relación alguna entre esas dos ecuaciones para determinar que eran iguales y que sólo los miembros de las ecuaciones estaban cambiados de posición.

Del mismo modo, su trabajo mostró que no ha comprendido las nociones aritméticas básicas, como el orden en los números decimales y sus operaciones, por lo que no tenía otra opción que manipular los decimales auxiliada por la calculadora. Sus intentos de resolución de una ecuación se centran en el ensayo y error sin mostrar indicios de que puede afinar esa estrategia; por ejemplo, prueba de valor en valor a partir de 14, intenta con 15 obteniendo 25.5, se da cuenta que “ya se pasó”, después de pensar por unos momentos, comenzó a probar con números tomados al azar, sin la secuencia que había establecido anteriormente, prueba con 18, 29, 16, y 25, se detiene nuevamente para probar con 13, encuentra 23.5, prueba nuevamente con 14, obteniendo 24.5, observa la primera ecuación (moviendo la cabeza indica que no), prueba con 15 nuevamente, parece que cree que el resultado que busca se encuentra cerca, prueba con 13.1, obteniendo 23.6; finalmente prueba con 13.9, obtiene 24.4 y dice que ha encontrado la respuesta correcta; de lo anterior se observa nuevamente que ignora la fracción decimal de la ecuación.

Logros

- Intenta resolver una ecuación aunque con base en razonamientos que no responden a las reglas y definiciones de la aritmética. Se considera esto como un logro en reconocimiento a la actitud positiva que mostró, esto la mantuvo tratando de completar la actividad a pesar de repetidos intentos fallidos.
- Utiliza el ensayo y error como estrategia de resolución de la ecuación.
- Utiliza la calculadora como herramienta para obtener una solución.

Dificultades

- Sus conocimientos aritméticos básicos no están bien establecidos, esto se refleja en sus intentos erróneos de resolución de una ecuación y en general en un desempeño no satisfactorio en la clase de matemáticas.
- No establece relaciones numéricas ni tiene nociones correctas acerca de la relación de orden en los números decimales.
- "Entiende a su manera", la maestra del grupo anticipó que ésta sería su principal dificultad, ya que la alumna establece razonamientos que ella considera buenos con relación a una lógica que ella misma establece y que no concuerda con las reglas y definiciones de la aritmética. Es importante mencionar que se da cuenta de que no logra tener éxito, sin embargo no cuenta con elementos que le permitan superar los obstáculos que encuentra. Probablemente con el apoyo de la maestra pueda superar gradualmente las dificultades que ahora tiene.

Segunda entrevista

Datos obtenidos

E: ¿Puedes encontrar el número que falta en la expresión $4\times(y-3)+2=14$?

E2: -Analiza detenidamente la ecuación, después de un momento contesta determinadamente- No.

E: ¿No le entiendes?

E2: No... –la vuelve a observar- No sé como.

E: ¿Lo puedes intentar?, vamos a revisar, trata de ver qué te pide, lee la ecuación a partir del 4.

E2: -Piensa un poco, tomando el lápiz señala- 4 por..., ah no, es *x* la incógnita, luego *y* ... no, no le entiendo.

E: ¿Ésta ecuación es diferente a $10.5+x=24$?:

E2: Sí, porque mira no tiene esto –señala los paréntesis- además aquí hay que buscar más números.

E: ¿Cuántos números más hay que buscar?

E: Dos, éste y éste –señala *x* e *y*-

E: Está bien, ¿puedes inventar otra expresión como $4\times(x-3)+2=14$, pero que tenga una solución?

E2: ¿Cómo?

E: Puedes hacer una ecuación que tú inventes, ¿pero que tenga una solución?

E2: Ah, aquí –señala la ecuación- la solución es 14, ¿no? Ese es el resultado; sí puedo -toma la calculadora y al igual que la primera entrevista, trabajó en silencio, ingresó los datos que ella consideraba para su resolución, ocupó 3 minutos para tal actividad. Hice dos mira, ¿están bien? Nada más que ocupé el 13 como resultado, a ver si están bien. (muestra las ecuaciones logradas, en el análisis del episodio se presentan).

E: Muy bien, gracias.

Análisis del episodio

Érika fue la única alumna de los 8 observados que de primera instancia no intentó resolver la ecuación de esta entrevista. Se infiere que no tiene suficiente seguridad en sí misma para enfrentarse a un conocimiento del cual no tiene ningún antecedente, ya que no relaciona la primera ecuación donde no intervienen paréntesis y barras de división con ésta; no puede identificar la incógnita. La confundía con el signo de multiplicación, asegurando que hay dos incógnitas en la ecuación.

La inclusión de los paréntesis fue un obstáculo para ella, a partir de esto no pudo continuar con la lectura de la ecuación. Se dudó en continuar la entrevista, sin embargo, se consideró pertinente terminar el protocolo y ver cómo reaccionaba a la última pregunta, lo cual fue positivo, ya que se logró obtener mayor información sobre las dificultades que tiene. Se observó que al mencionar "una solución" ella entiende por esto el segundo miembro de la ecuación (14) y a partir de esto creó con ayuda de la calculadora "ecuaciones semejantes", tales como:

$$6.4(2-1)2.1=13.4$$

$$6.3(2-1)2.1=13.23$$

Al ingresar los datos a la calculadora, se pudo observar que comenzó a construir la expresión de derecha a izquierda comenzando con el mismo 4, se puede inferir que eligió este número a partir de verlo en la ecuación original ya que posteriormente utilizó el 5 y 6; ingreso en los paréntesis $2-1$, mismos que utilizaría de manera fija en sus posteriores intentos, al igual que el 2.1 que iba a continuación. Se deduce que estos números los eligió a partir del inicio de la secuencia de números enteros 1 y 2; la calculadora le ayudó a resolver cada uno de los intentos que logró, utilizó las siguientes posibilidades:

$$4(2-1)2.1=8.4$$

$$5(2-1)2.1=10.5$$

$$6(2-1)2.1=12.6$$

$$6.1(2-1)2.1=12.81$$

$$6.2(2-1)2.1=13.02$$

$$6.4(2-1)2.1=13.4$$

$$6.3(2-1)2.1=13.23$$

Esto corrobora que la alumna manipula los números decimales de acuerdo con lo que ella considera que está bien. Lo mismo ocurre con las nociones que construyó respecto a las ecuaciones y su solución. No cuenta con un referente distinto al que ella misma genera. Tampoco tiene los argumentos y herramientas necesarias para entender las reglas y definiciones básicas de la aritmética; sus logros en relación con los protocolos usados en las entrevistas son mínimos, lo que pone de manifiesto sus carencias aritméticas; esto le dificulta entender y resolver las ecuaciones que se plantearon. Con base en lo anterior se puede concluir que la alumna está respondiendo a un reto que no puede enfrentar, no cuenta con antecedentes que le permitan solventar las exigencias que le plantea la resolución de las ecuaciones; no tiene un conocimiento sólido de las operaciones aritméticas ni de los números, por lo que las respuestas que produjo están fuera de cualquier situación esperada.

Logros

- Como ya se mencionaba, los logros alcanzados por la alumna son mínimos, sus formas de razonamiento no concuerdan con las reglas de la aritmética y su mejor característica es muestra cierta actitud positiva e iniciativa hacia las matemáticas, situación que la maestra del grupo podría aprovechar en los siguientes aspectos:

    - Las respuestas de la alumna muestran que tiene iniciativa para generar algunos razonamientos y, aunque estos no correspondan a las reglas de la aritmética, se pueden aprovechar como punto de partida para que con el auxilio de su maestra, logre fortalecer sus conocimientos aritméticos aprendiendo de sus errores.
    - Mediante actividades de aprendizaje adecuadas, el uso de la calculadora puede aprovecharse para ayudarle a superar sus carencias en el manejo y aplicación de las operaciones aritméticas básicas. Por ejemplo, las actividades que se encuentran en Sentido Numérico e Iniciación al Álgebra (Cedillo, 1999a).

Dificultades

- Los razonamientos que Érika presenta están determinados en función de lo que ella cree que está bien, pero sus carencias en el conocimiento aritmético le hacen actuar sin ningún marco de referencia, lo que la lleva a presentar limitaciones en aspectos que se supone debería manejar con seguridad. Esta dificultad es notoria en su desempeño en la clase de matemáticas, situación que se debe trabajar posteriormente con la maestra en relación con apoyo que puede brindar a la alumna.

Resumen

Este apartado reporta los logros y dificultades que presentaron los ocho alumnos seleccionados para su seguimiento mediante la técnica de estudio de casos. En función de los resultados del análisis de cada caso, se tomaron en cuenta aspectos relacionados con el referente teórico de esta tesis: la adquisición del lenguaje algebraico, observando de manera especial las estrategias que desarrollaron los estudiantes al resolver ecuaciones de primer grado y los significados que asocian a las ecuaciones y las literales que en ellas se incluyen; estos aspectos se abordarán con mayor precisión en el siguiente capítulo.

Estrategias que desarrollan los estudiantes

Los resultados antes reportados sugieren que los alumnos pueden progresar en el proceso de adquisición del lenguaje algebraico en función del buen manejo de sus conocimientos aritméticos.

Se observó que la estrategia más común que los alumnos desarrollaron a partir del trabajo con ecuaciones fue la de “ensayo y error”, (4 de los 8 alumnos, la utilizaron), esta estrategia fue manejada por los estudiantes en dos momentos, primero la utilizaron como una forma de conocer la ecuación, identificaban los elementos de ésta y trataban de manipular sus datos numéricos. Esta situación propició que los alumnos razonaran, con base en sus conocimientos aritméticos, las formas en que podrían solucionar el problema, tuvieron como punto de partida que la principal finalidad era buscar un “número perdido”, el cual se podía encontrar a través de un número inicial, -seleccionado generalmente al azar- que les diera pautas para probar de “uno en uno” hasta encontrar el que buscaban o el que creían era el correcto.

En un segundo momento, la estrategia de ensayo y error, permitió a los alumnos establecer un análisis detallado de la ecuación. Esta estrategia los condujo a un razonamiento que les permitiera establecer relaciones de tipo aritmético para encontrar el “número perdido” de forma más precisa, logrando con esto una lectura global de la ecuación; este segundo momento permitió que el alumno pasara de una búsqueda al azar, a un análisis y razonamiento de la ecuación. Se observó que Alondra, Javier, Vanessa y Érika utilizaron esta estrategia, en un intento de buscar la incógnita por medio de aproximaciones al azar, considerando posibilidades que no se acercaban al posible resultado, sin lograr en ocasiones, encontrar el resultado, ya que sus conocimientos aritméticos no les proporcionaban un referente que les permitiera aproximarse al número que buscaban o que les diera un punto de partida para dicha búsqueda; debido a esta carencia no fueron capaces de anticipar qué número les daría la posibilidad de encontrara la respuesta.

La estrategia de ensayo y error, auxiliada con el uso de la calculadora, permitió que los alumnos centraran sus razonamientos en las posibles formas de manipular los elementos de la ecuación hizo descansar la realización de las operaciones aritméticas en la máquina, situación que brindó al alumno la posibilidad de superar sus carencias aritméticas como vía de encontrar una posible solución, Adriana y Vannesa fueron los casos más plausibles a este respecto; se pudo observar que sin el auxilio de la calculadora no podrían resolver las ecuaciones; sin embargo, la mayoría de los alumnos logró identificar la importancia de razonar antes de ingresar los datos a la calculadora.

Yesica Gabriela aportó evidencias que muestran el potencial de la estrategia de ensayo y error. Sus respuestas indican que fue capaz de ir más allá y emplear una estrategia que podríamos llamar “ensayo y refinamiento”. Los datos recabados sugieren que si la alumna cuenta con un conocimiento aritmético aceptable, el hecho de plantear actividades con una meta clara (“encontrar el número que falta”) propicia que afinen la estrategia de ensayo y error y avancen en el dominio de un proceso más sistemático que se basa en gran medida en el cálculo mental y la estimación.

Otra de las estrategia que los alumnos utilizaron al resolver ecuaciones fue a partir de la lectura global de la ecuación, en donde los alumnos hacían un análisis de tipo aritmético de lo que la ecuación les solicitaba hacer, identificaban operaciones aritméticas que los llevaran a la posible respuesta revisando de manera puntual los elementos de la ecuación. El principal resultado de esta estrategia fue que los condujo a comparar los miembros de la ecuación, identificando que alguno de ellos se podía reducir a un sólo valor. Por ejemplo, en la ecuación $4\times(y-3)+2=14$, el primer término en su conjunto tiene un valor, "todo esto vale 12", (ver el caso de Tomás). Esta estrategia llevó al alumno a dejar en suspenso una parte de la ecuación, para considerarla como sólo una; este tipo de razonamientos propiciaron en el alumno un nivel de análisis semejante al método conocido como "cambio de variable".

Esta estrategia fue utilizada principalmente por algunos alumnos al resolver ecuaciones donde se involucraron paréntesis y barras de división -sin intervención de números decimales-, lo que facilitó la lectura de la misma. El alumno centraba sus esfuerzos en el análisis de la ecuación empleando razonamientos aritméticos (operaciones básicas suma, resta, división y multiplicación) para manipular la ecuación. En este sentido las respuestas de Tomás indican que fue capaz de crear una estrategia para llegar a la solución de ecuaciones, con base en la lectura global de la ecuación y en el cálculo mental, manipulando aritméticamente los términos numéricos de la misma y asociando relaciones de tipo aritmético para obtener su solución. Al hacer esto mostró ser capaz de resolver ecuaciones a través de leerlas globalmente.

Jorge y Adriana utilizaron estrategias como la anterior, leyendo la ecuación globalmente, el análisis detallado de la ecuación paso por paso les permitió resolver satisfactoriamente las ecuaciones que se plantearon; la lectura global de la ecuación los llevó a establecer relaciones aritméticas como vía de solución identificando los elementos de la ecuación, lo que les llevó a un panorama más amplio de resolución brindándoles cierto razonamiento y comprensión al manipular los elementos de la ecuación. Este tipo de estrategias, con auxilio de la calculadora, coadyuvó a que los alumnos lograran superar sus carencias aritméticas, situación que favoreció un nivel mayor de análisis y razonamiento. Es necesario considerar que la asesoría brindada por el investigador fue un factor determinante en cuanto a motivación para que los alumnos lograran la lectura de la ecuación, Alondra, Adriana y Javier, son casos que ejemplifican lo anterior.

En cuanto a los significados que los alumnos asocian con las ecuaciones y las literales, se puede afirmar que la principal noción que los estudiantes asocian con una ecuación es que es una serie de operaciones en las que se trata de encontrar un "número perdido", un valor que incluye la ecuación pero que no se sabe cuál es, pero que se puede encontrar a través de diferentes estrategias de resolución, como las descritas anteriormente. El "número perdido" se identifica con una letra a la que se llama literal o incógnita como la nombraron algunos de los alumnos. Este tipo de concepciones, se pueden asociar con la idea de que los alumnos relaciona el término "buscar" o "perdido", con situaciones de su interés general, fuera de aspectos relacionados con la escuela. El tipo de actividades propuestas ubicaron al alumno en una situación en que "buscar" le fue divertido y es algo que no implica mayor dificultad; este tipo de nociones llevó a los alumnos a considerar a las ecuaciones como un juego de números, donde hay que buscar algo perdido.

Yesica Gabriela asoció la ecuación con una relación de igualdad, en la que el signo igual (=) funge como eje principal y permite establecer que ambos valores de la ecuación representan lo mismo, por lo que la finalidad principal de la ecuación es encontrar una igualdad.

CAPÍTULO 4

CONCLUSIONES

Este capítulo consta de dos secciones, en la primera se abordan los resultados de este trabajo de tesis en el marco de las preguntas de investigación que la orientan; en la segunda parte se aborda una serie de reflexiones finales, las cuales se enfocan en dos aspectos principales: ventajas y limitaciones, e implicaciones de orden psicológico relacionadas con el referente teórico de esta tesis.

Un propósito central de esta tesis fue obtener datos empíricos que permitieran plantear respuestas plausibles a las siguientes preguntas de investigación:

1. ¿Cómo puede aprovecharse el conocimiento aritmético que adquieren los estudiantes durante la escuela primaria para iniciarlos en el uso del lenguaje algebraico involucrado en la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita?
2. ¿Qué estrategias desarrollan los estudiantes cuando se aborda el tema de resolución de ecuaciones sin acudir a los métodos convencionales?
3. ¿Qué significados asocian los niños con las ecuaciones y las literales que se usan para simbolizar las incógnitas cuando la enseñanza se basa en estrategias no formales?
4. ¿Qué ventajas/desventajas se generan para abordar los métodos convencionales para resolver ecuaciones cuando se propicia que los estudiantes

inicien este tema a partir de estrategias no convencionales que ellos mismos generan?

En la sección que sigue se abordarán estas preguntas de investigación a la luz de los datos y resultados que se obtuvieron en el trabajo de campo. Lo que se discuta respecto a cada una de las preguntas de investigación apuntará hacia el planteamiento de respuestas plausibles a cada una de ellas. Antes de presentar las respuestas a las preguntas de investigación consideramos importante abordar las hipótesis establecidas en el capítulo anterior.

En cuanto a las hipótesis en torno al conocimiento aritmético se corroboró que se puede aprovechar el conocimiento aritmético que adquieren los estudiantes en la escuela primaria, como punto de partida para iniciarlos en el uso del lenguaje algebraico. Sin embargo, se observó en varios alumnos que el manejo del conocimiento aritmético no es el deseable; este tema se ampliará con mayor detalle más adelante. En cuanto a las estrategias que desarrollan los estudiantes, se corroboró que los alumnos progresan en su conocimiento a través de la siguiente secuencia: i) método que la profesora de grupo les enseñó para resolver ecuaciones; ii) estrategias con base en ensayo y error y (iii) ensayo y refinamiento. En el transcurso del análisis de resultados y conclusiones se identificaron más estrategias que se discutirán más adelante.

Respuestas a las preguntas de investigación

Pregunta de investigación 1.

¿Cómo puede aprovecharse el conocimiento aritmético que adquieren los estudiantes durante la escuela primaria para iniciarlos en el uso del lenguaje algebraico involucrado en la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita?

Los datos y resultados discutidos en el capítulo anterior muestran que puede aprovecharse el conocimiento aritmético de los alumnos para iniciarlos en el uso del lenguaje algebraico. Asimismo, la evidencia empírica recabada indica que el uso de la calculadora, mediante actividades de aprendizaje como las empleadas en esta tesis proporciona un andamiaje que propicia, en los estudiantes el empleo de su conocimiento aritmético como referente cognitivo para enfrentar actividades prealgebraicas. Esto les permite avanzar en la transición de la aritmética al álgebra generando significados instrumentales para el simbolismo algebraico basados en fundamentos aritméticos.

Las actividades que realizaron los alumnos en torno a la resolución de ecuaciones permitieron observar que el conocimiento aritmético que adquieren en la escuela primaria es una herramienta poderosa para esa actividad, siempre que esos conocimientos estén aceptablemente comprendidos por el alumno. Los datos que recabamos muestran que el conocimiento aritmético previo permitió a los estudiantes enfrentar ecuaciones de primer grado con una incógnita satisfactoriamente y que la aplicación de las reglas y definiciones de la aritmética llevaron a los alumnos a producir respuestas correctas en la medida que pudieron usar la aritmética como herramienta para el entendimiento del álgebra. Estos hallazgos en el trabajo de los alumnos se relacionan con lo reportado por Nickson (2000) y Cedillo (2001), quienes, con base en resultados de investigación, proponen que la base principal del álgebra es la aritmética y que ésta sirve como punto de partida para el aprendizaje del álgebra.

Lo anterior se observa en el trabajo de Tomás quien pudo resolver correctamente ecuaciones de la forma $ax+b=c$ que incluían signos de agrupación. En la medida en que Tomás se dio cuenta que podía utilizar sus habilidades aritméticas como marco de referencia, fue capaz de leer lo que pide la ecuación. Esto le proporcionó esto un panorama más amplio que le permitió producir respuestas correctas haciendo operaciones por medio de cálculos mentales para manipular los elementos del problema, a través del empleo de relaciones aritméticas, operando sobre los datos de la ecuación sin saber todavía cómo operar sobre “lo aún desconocido”; dicha situación coincide con lo informado por Rojano (1991c), quien señala que el estudiante primeramente aprende cómo utilizar el conocimiento aritmético y, posteriormente, podrá manipular directamente sobre la ecuación, realizando un análisis de los datos del problema, para pasar a la operación y a tratar de entender el por qué del problema, utilizado una herramienta *presimbólica*.

Un hallazgo relevante que proviene del trabajo de Tomás es el papel crucial que juega la prioridad de las operaciones aritméticas como antecedente para el estudio de las primeras nociones del álgebra escolar. Esto se puede observar claramente en la forma en que Tomás resolvió ecuaciones que contienen signos de agrupación. Por ejemplo, el caso de la ecuación $4\times(y-3)+2=14$. Su conocimiento incipiente de la prioridad de las operaciones le permitió superar el hecho de que todavía no sabe cómo operar sobre lo "aún desconocido". Él dejó en suspenso la ejecución de la operación $4\times(y-3)$ porque sabía que "primero son las multiplicaciones y divisiones y después las sumas y restas". Este hecho lo condujo a ver la ecuación $4\times(y-3)+2=14$, como otra más simple, la ecuación $4\times x+2=14$. Nuevamente fue su conocimiento elemental de la aritmética el que le permitió ver que la expresión $4\times(y-3)$ debería valer 12, porque "12+2 es 14". Esto lo condujo a encontrar que $y=6$ porque "6 menos 3 es 3 y $4\times 3+2=14$". Una estrategia similar fue utilizada por otros estudiantes que resolvieron exitosamente este tipo de ecuaciones.

Como se mencionó en el capítulo 4, los alumnos cometen errores que los conducen a razonamientos equivocados. Cuando los conocimientos aritméticos no están bien establecidos, utilizan procedimientos que no siguen las reglas y definiciones de la aritmética. Esta situación se presenta en los casos de Vanessa y Érika, quienes manifestaron carencias en el manejo de los números decimales y otros aspectos aritméticos; a pesar de que mostraron iniciativa y cierta motivación para intentar resolver la ecuación, sus carencias en aritmética las llevaron a ver los números como una colección de símbolos sobre los que, creen, pueden actuar libremente, manejando respuestas y posibilidades de acuerdo con lo que ellas creían que estaba bien, sin ningún referente aritmético.

En relación con el manejo de los números decimales, se observó que Vanessa presenta carencias. Al tratar de resolver la ecuación $k - 1.5 = 6.2$ utilizó 15 y 62 en lugar de 1.5 y 6.2, no encontró relaciones aritméticas en el manejo de los decimales. En el caso de Érika, la problemática en relación con el manejo de los números decimales se observó cuando resolvió la ecuación $24 = 10.5 + x$ tomando 14 y 13 como posibilidades: "si sumas 10.5 con 14 te da 24 –en realidad 24.5-; "si hubiera puesto 13, me daría 23.5 y así esta mal"; considera 24.5 sin tomar en cuenta la fracción decimal, considerando que esta cantidad es igual a 24 y propuso ésta como respuesta correcta de la ecuación. Su conocimiento de los números decimales es insuficiente y la lleva a cometer este error, no obstante que contó con el apoyo de la calculadora. Sus deficiencias en aritmética también se manifestaron al no establecer relaciones en la secuencia de los números, ya que al intentar solucionar una ecuación, necesitó manipular cada uno de los números buscando una solución, sin considerar que podía hacer saltos entre ellos; es decir, no encontró una secuencia en la numeración, la alumna formuló razonamientos que consideraba correctos con una lógica que ella misma establece y que no corresponde a las reglas de la aritmética. Los logros que se registraron de Érika en el trabajo de campo son mínimos, por lo que consideramos que antes de pretender que adquiera el lenguaje algebraico, sería necesario ayudar para que la alumna fortalezca sus bases aritméticas.

Pregunta de investigación 2

¿Qué estrategias desarrollan los estudiantes cuando se aborda el tema de resolución de ecuaciones sin acudir a los métodos convencionales?

Los datos descritos en el capítulo anterior nos muestran cómo los alumnos se apoyaron en diversas estrategias para llegar a proponer respuestas que dieran solución a ecuaciones de primer grado. La calculadora fue un factor importante cuando se les pidió encontrar el *número que falta en la expresión* algebraica, ya que les permitió explorar sus ideas y en algunos casos superar sus carencias aritméticas.

La estrategia más común que generaron los alumnos fue la de "ensayo y error". En esta los alumnos elegían un número, -en ocasiones al azar o en algunos casos estableciendo relaciones aritméticas- el cual creían que pudiera ser la solución; a partir de éste probaban con distintos valores hasta acercarse al número que buscaban. Se observó que Yésica, Alondra, Javier, Vanessa y Érika usaron esta estrategia como forma de solución; sólo Yésica consideró los elementos de la ecuación como parámetro para comenzar a buscar el número que faltaba, identificó que en la ecuación $4\times(y-3)+2=14$, el valor de la incógnita está relacionado con la operación de los paréntesis: "4 multiplica a lo que dé una resta de 3 con la incógnita para que luego se sume con 2, lo voy a intentar primero con 5 – tomó en cuenta los datos de la ecuación, considerando que puede restar 3 a 5 y que es un valor numérico que se puede relacionar directamente con la ecuación -, puedo intentar con 6, ... sí, está bien, el resultado, es 6"; logrando encontrar la respuesta después de dos intentos. En el caso de Alondra se observó que utilizó nueve posibilidades distintas, comenzó con 10.6, valor al que considera como el número siguiente al primer elemento de la ecuación

(10.5). Se notó dificultad en el manejo aritmético del punto decimal, utilizó 10.10 como el siguiente de 10.9; al resolver la ecuación $x+3.5=72$ obtuvo que el valor de la literal es 37 eliminando el punto decimal de 3.5; a partir de esto obtuvo su solución "ensayando" con varios números (9) hasta proponer 37 como respuesta. Sus carencias aritméticas la limitaron, dio aproximaciones al azar sin analizar las relaciones aritméticas entre los números. Finalmente, logró encontrar una solución correcta a esta ecuación.

Javier, Vanessa y Érika trataron de encontrar el valor de la incógnita a través de la misma estrategia, pero sin un referente que les permitiera encontrar el valor correcto de forma más rápida; su búsqueda era al azar, al resolver la ecuación anterior Javier consideró lo siguiente: "hay que buscar de número en número hasta encontrar el resultado, se puede empezar con 8... no da, hay que buscarlo...., (prueba con 9, 13, 7 y 6), ya, es 6". Se observó que su búsqueda no correspondía con la secuencia de los números y no podía anticipar los posibles resultados que obtendría a partir de su primer intento, buscó con 9 y 13, números que lo alejaban del resultado y sin considerar los datos contenidos en la ecuación, situación de la que se percata al utilizar 13; por lo que probó con 7, número que lo aproximó al resultado y al darse cuenta de que estaba cerca, intentó con 6, encontrando finalmente la solución después de cinco intentos.

En el caso de Vanessa se observaron situaciones semejantes, sin embargo sus razonamientos la llevaron a usar procedimientos que con ayuda de la calculadora le permitieron obtener la solución de la ecuación. Comenzó con el valor 4, verificó en la calculadora que ese valor no correspondía con el resultado que buscaba, realizó otros intentos con 5 y 6. No pudo explicar por qué inició probando con el 4, pero se infiere que tomó el primer número que encontró en la ecuación. En el caso de Érika se notaron sus carencias aritméticas en relación con un manejo incorrecto de los números decimales y del orden en los números tanto decimales como naturales. Al pedirle que resolviera la ecuación $24 = 10.5 + x$, tecleó sucesivamente en la calculadora $10.5 + 1 = 11.5$, $10.5 + 2 = 12.5$, $10.5 + 3 = 13.5$, $10.5 + 4 = 14.5$, hasta llegar a 13 y 14, obteniendo, $10.5 + 13 = 23.5$ y $10.5 + 14 = 24.5$; tomando ésto ultimo como respuesta correcta, sin establecer que 24.5, no es el número que le pedía la ecuación y no intentó realizar algún “salto” entre los números que probaba, situación que le facilitaría acercarse a la respuesta. Su trabajo dependió de la calculadora, lo cual le daba la pauta para ingresar el número que seguía; sus antecedentes aritméticos no le permitieron encontrar la solución de la ecuación, buscando posibilidades al azar y sin un referente aritmético que le facilitara el trabajo.

Consideramos que si un estudiante intentó la solución por ensayo y error, implica que de alguna forma entendió la estructura de la ecuación, ya que pudo leer qué operaciones estaban involucradas en ella. De otra manera no podría sustituir la incógnita por distintos valores y verificar si éstos funcionaban correctamente o no.

Otra estrategia que generaron los estudiantes fue hacer una lectura integral de la ecuación comparando ambos miembros, (presenta similitudes con el método conocido como “cambio de variable”). Para explicar dicho método tomaremos como ejemplo la ecuación $5\times(6-x)+3=13$. Consiste en dejar en suspenso las operaciones correspondientes a la expresión $5\times(6-x)$ para considerarla como una sola entidad cuyo valor numérico debe ser 10. Esto permitió a los alumnos simplificar la ecuación, viéndola como una ecuación más simple $z+3=15$. De los 8 alumnos seleccionados 4 de ellos generaron este tipo de estrategia.

Tomás fue el alumno quien de manera más clara utilizó esta estrategia, sus conocimientos aritméticos le permitieron establecer relaciones y razonamientos –sin ayuda de la calculadora- que lo llevaron a encontrar la solución de la ecuación, viéndola de forma conjunta. Por ejemplo, para resolver la ecuación $\frac{2\times(m-5)}{3}+7=9$, identificó que 7 y otro "número" tienen que sumar 9, por lo que $\frac{2\times(m-5)}{3}$ debe ser 2; esto lo llevó a considerar una nueva simplificación de forma semejante: el nuevo resultado es 2, por lo que $2\times(m-5)=6$; mencionó: "hay que revisar la tabla del 2", obteniendo un acercamiento que le dio elementos para considerar 8 como solución; sus antecedentes aritméticos le permitieron razonar en torno a la ecuación y los "pasos a seguir", a partir de operaciones aritméticas.

Alondra, Jorge y Adriana, acudieron a estrategias similares, crearon la estrategia enfrentando ecuaciones en las que no pudieron utilizar el método enseñando por la maestra del grupo, ecuaciones donde se incluían paréntesis y barras de división como signos de agrupación. Este tipo de expresiones permitió el razonamiento y lectura de la ecuación, teniendo un panorama más amplio de las posibilidades para resolver la ecuación.

En los casos de Javier y Adriana, se observó que ambos mecanizaron el método de resolución de ecuaciones enseñado por la maestra, mismo que les brindó elementos para resolver ecuaciones del tipo $ax + b = c$, al enfrentarlos a una ecuación en la que intervenían signos de agrupación, no fueron capaces por sí mismos, de establecer una estrategia de solución. La intervención del investigador fue un apoyo importante para llegar a un razonamiento que les condujera operar sobre la ecuación; el investigador propició la iniciativa de los alumnos al sugerirles que “leyeran lo que pide la ecuación”. Aunque Javier generó sus respuestas con base en el ensayo y error, al momento de manipular los números sus razonamientos se enfocaron a la posibilidad de hacer un cambio de variable; por ejemplo, al resolver la ecuación $4 \times (y-3) + 2 = 14$ mencionó: “es 4 por..., entonces *y* es una incógnita, ése número se tiene que restar con 3 y luego sumar con 2”. Leyó la ecuación de izquierda a derecha, identificando la operación que se tiene que realizar en los paréntesis, dejando en suspenso la multiplicación por 4 e identificando que todo lo anterior se tiene que sumar a 2. Este tipo de razonamientos acercó al alumno a la creación de la estrategia de cambio de variable, misma que le brindó la posibilidad de buscar diversas opciones de encontrar el resultado de la ecuación.

En el caso de Adriana, la orientación del investigador fue determinante para que tomara la iniciativa en relación con la búsqueda de una nueva posibilidad; la mecanización del método enseñando por la maestra le brindaba seguridad al enfrentar ecuaciones, misma que perdió al enfrentar algo que para ella era desconocido y fuera de sus posibilidades. Al enfrentarla con la ecuación $4\times(y-3)+2=14$, se dio cuenta de que habría que llegar a un resultado (14), "con el 4 multiplicando al paréntesis y sumando a 2, identificó la operación que hay en el paréntesis; de este análisis encontró que el valor de *y* se tiene que restar con 3, considerando que este numero es 6 para que restado con 3 se obtenga 3, después de analizar la ecuación y leerla paso por paso logró determinar el resultado; al igual que Javier, Adriana utilizó un acercamiento parecido a la estrategia de cambio de variable, mismo que posteriormente mecanizó al ver que le permitió resolver la ecuación.

Vanessa y Érika generaron estrategias de acuerdo con lo que ellas consideraron que estaba bien. Por no tener un referente aritmético bien establecido, manipularon la ecuación de acuerdo con razonamientos que no corresponden con las reglas y definiciones de la aritmética, usaron el punto decimal como creyeron conveniente, eliminándolo o poniéndolo según creían que estaba bien. Por ejemplo, Vanessa al resolver la ecuación $b+1.03=24.7$, obtuvo 246 como resultado, ignorando el punto decimal en ambos números, llegando a este resultado con auxilio de la calculadora y el método enseñado por la maestra ese resultado. En el caso de Érika, consideró que 24.4 y 24.5 son iguales a 24, a pesar de contar con la ayuda de la calculadora afirmó que $10.5+13.9=24$, sus antecedentes aritméticos mal establecidos en situaciones básicas no le permitieron tener una estrategia de solución válida. Ambas crearon sus propias reglas, considerando que están bien.

Pregunta de investigación 3

¿Qué significados asocian los niños a las ecuaciones y a las literales que se usan para simbolizar las incógnitas cuando la enseñanza se basa en estrategias que los mismos estudiantes generan?

Los datos obtenidos durante el trabajo de campo muestran que los alumnos asociaron a una ecuación el significado de “unas operaciones en que se desconoce un número”, y a la literal que representa a una incógnita el significado de “el número que falta” “o el número que se desconoce”. Estos significados presentan una clara similitud con las definiciones formales que se da a esos conceptos en matemáticas. Las respuestas que dieron los estudiantes sugieren que un acercamiento no formal a esos conceptos permite que los alumnos generen nociones prealgebraicas que son un apoyo importante para posteriormente comprender y aplicar con mayor claridad las definiciones de estos conceptos en sus cursos de matemáticas de la escuela secundaria. Los datos recabados en el trabajo de campo sugieren que este tipo de actividades hace posible tender un puente entre el conocimiento aritmético que poseen los estudiantes y el conocimiento algebraico que posteriormente abordarán en niveles superiores. El ambiente de trabajo en el aula fue creado para guiar la enseñanza del alumno a través de estrategias no formales; el estudio y análisis de cada caso permitió abordar los aspectos que se discuten a continuación.

Yésica Gabriela presentó logros importantes en cuanto a los significados que asocian los alumnos con la ecuación, sugiriendo que ésta equivale a una relación de igualdad, en donde el principal objetivo al resolver la ecuación es obtener el valor de la incógnita manteniendo la igualdad entre sus miembros. Este logro llevó a la alumna a considerar que los valores de una literal son los mismos cuando están representados con la misma letra, situación que se presentó al resolver la ecuación, $120 + 5 \times p = 10 \times p + 85$, identificando que el valor de las "*p*" es el mismo, ya que la letras son iguales, aseveración que la alumna logró a través de la manipulación de los elementos de la ecuación, así como la lectura y análisis de la misma, razonando en torno a los componentes aritméticos que la ecuación ofrece sin recurrir al método convencional enseñado por la maestra. Ninguno de los otros estudiantes logró identificar tan claramente esta situación.

Este hallazgo sugiere que el tipo de actividades propuestas propicia que los alumnos razonen sobre la ecuación; se hace posible también construir un puente entre la aritmética y el álgebra. Dichas actividades permiten establecer esa conexión porque relacionan los antecedentes elementales de la aritmética con objetos algebraicos que proporcionan a los alumnos una oportunidad para enfrentar la lectura y manipulación del código algebraico en situaciones donde sus conocimientos aritméticos son un referente para asignar significados al nuevo lenguaje. El caso de Yesica Gabriela pone de manifiesto la importancia de propiciar, en el desarrollo de una clase en las condiciones que ofrece un ambiente de enseñanza que invite a los alumnos a usar sus propios métodos para resolver ecuaciones.

El caso de Tomás corrobora las aseveraciones anteriores, ya que a través de las actividades realizadas en el trabajo de campo, fue capaz de resolver satisfactoriamente ecuaciones mediante el uso de estrategias generadas por él mismo, como el cambio de variable, situación que requirió la habilidad del alumno para realizar cálculos mentales, llevándolo al razonamiento y lectura global de la ecuación. Consideramos que esta situación que no se presentaría en una clase en la que el ambiente de trabajo en el aula fuera enfocado a la enseñanza de métodos convencionales en la resolución de ecuaciones, partiendo de la formalidad de las reglas y definiciones matemáticas y viendo la ecuación como una colección de números sobre los que hay que operar de acuerdo a una forma específica, dando prioridad al significado formal de una ecuación y posteriormente al uso de ella.

De acuerdo con lo anterior, podemos afirmar que el ambiente de trabajo en el aula, creado específicamente para los logros de los objetivos de esta tesis permitió que el aprendizaje no partiera de reglas ni definiciones (significados) y que dejara descansar en el uso del lenguaje aritmético la asignación de significados, situación que concuerda con las aseveraciones de Cedillo (1996).

Los casos de Alondra y Adriana, mostraron que esa forma de trabajo en el aula les permitió compensar sus carencias aritméticas en cuanto al manejo de los números decimales. Situación en la que la calculadora contribuyó de forma importante, ya que permitió que las alumnas hicieran descansar los cálculos aritméticos en la máquina. Esto les permitió aplicar sus razonamientos para llegar a la solución de la ecuación. Los casos de Jorge y Javier presentaron situaciones semejantes al respecto. Consideramos que esta situación en una clase de primaria en condiciones “normales” no se podría presentar, ya que al no permitir el uso de la calculadora las alumnas encontrarían en las operaciones con números decimales un factor en contra, lo que las llevaría a centrar su atención en esta tarea, sin llegar posiblemente al razonamiento del problema.

El caso de Alondra mostró que en este ambiente de trabajo en el aula fue capaz de resolver ecuaciones a pesar de sus carencias en conocimientos aritméticos (números decimales); aunque en varias ocasiones sus respuestas no fueron correctas, se pudo observar que con asesoría adecuada se puede corregir estas carencias para que la manipulación sobre las ecuaciones sea con base en los razonamientos que ella misma pueda crear, como se observó cuando resolvió la ecuación $4\times(y-3)+2=14$. La alumna pudo abordar paso por paso lo que la ecuación solicitaba, logro clarificar el panorama de resolución y llegar a asignar significados a las literales y su función en la ecuación: “lo tengo que poner en lugar de *y*, -refiriéndose al valor de la incógnita- ¿no?, sí... ah... sí, 6 menos 3, da 3 por 4,12 más 2, ahí esta el 14, ya le entendí”. Este episodio muestra que la alumna fue capaz de entender el *uso* de los elementos de la ecuación, la lectura de la ecuación le permitió utilizar de una u otra manera la estrategia de cambio de variable.

En el caso de Adriana, la asesoría le permitió establecer una estrategia diferente a la que ella conocía que le permitió resolver la ecuación. A través del análisis y razonamiento paso por paso de los elementos de la ecuación, la alumna amplió sus posibilidades para resolver la ecuación, superando sus carencias en el manejo de los números decimales.

Los casos de Javier y Jorge presentaron similitudes en relación con los casos anteriores. Estos alumnos lograron resolver ecuaciones del tipo $ax+b=c$ a través del método convencional enseñado por su maestra. Sin embargo, al enfrentar ecuaciones donde intervienen signos de agrupación se enfrentaban con desánimo, a pesar de la motivación que el investigador intentaba proporcionar.

En los casos de Vannesa y Érika, los significados que asociaron a las ecuaciones de primer grado y a la literal se vieron limitados por la carencia de antecedentes aritméticos discutida anteriormente. Consideramos que ambas alumnas se enfrentaron a un conocimiento nuevo que no pudieron relacionar con la aritmética debido a la fragilidad de las nociones aritméticas que manejan. Sin embargo, estas alumnas mostraron cierta iniciativa e inventiva para enfrentar una actividad poco familiar. Se notó que sus formas de operar quedaron muy lejos de cumplir las reglas y definiciones aritméticas e intentaron hacer lo que les parecía que estaba bien, con base y principios que consideran correctos.

Pregunta de investigación 4

¿Qué ventajas/desventajas se generan para abordar los métodos convencionales para resolver ecuaciones cuando se propicia que los estudiantes inicien este tema a partir de estrategias no convencionales que ellos mismos generan?

La estrategia didáctica utilizada en el aula propició en los alumnos una serie de ventajas y desventajas que se manifestaron de diversas formas y a continuación analizamos. Los datos que recabamos muestran que la propuesta didáctica empleada en esta tesis favoreció que los alumnos resolvieran ecuaciones de primer grado a través de métodos que ellos mismos generaron. Esta situación indica que los estudiantes se percataron de la existencia diversos “caminos” para enfrentar una ecuación, caminos que ellos descubrieron a través de sus propios razonamientos, basados esencialmente en sus antecedentes aritméticos. Esta situación llevó a los alumnos a enfrentar un método convencional enseñado por su maestra de grupo, el cual ha sido explicado anteriormente, por lo que resultó interesante observar cómo decidían que método usar, el propio o el enseñado por su maestra.

En términos generales los estudiantes se enfrentaban con el dilema de recibir dos mensajes en apariencia contrarios. Por un lado, la propuesta de esta tesis que les invitaba a resolver ecuaciones a través de métodos que ellos debían crear, y por el otro tenían la experiencia de resolverlas a través de un método que la profesora de grupo les había transmitido.

El caso de Adriana aportó datos que permitieron analizar lo anterior; por características propias de la personalidad de la alumna, preocupada por estudiar, aprender y cumplir con todo lo que la escuela le pide, mecanizó el método enseñado, de tal manera que le era posible resolver sin ningún problema ecuaciones de la forma $ax+b=c$. Al tratar de resolver ecuaciones que involucraban signos de agrupación, la alumna no fue capaz de hacerlo, esperaba que se le brindara el método de resolución a este tipo de ecuaciones. No tuvo la iniciativa de pensar en nuevas formas de enfrentar la ecuación, limitó sus posibilidades al método enseñado por la maestra. Al parecer que las dos propuestas (la de la tesis y la de la maestra) eran completamente aisladas una de otra. Se puede concluir que al proponer a Adriana resolver ecuaciones con estrategias que ella generara, no fue capaz de usar el método convencional con este referente. Por ello decidió que el método convencional es para un tipo de ecuaciones y el método propuesto en esta tesis es para resolver otro tipo.

En los casos de Tomás y Yesica se pudo notar cierta similitud al enfrentar una disyuntiva como la mencionada anteriormente; Tomás decidió usar el método reenseñado por su maestra cuando le parecía conveniente y acudir a los métodos que el mismo generó en ecuaciones que le parecían más complicadas. Amplió así sus recursos de solución, se dio cuenta que el método que le enseñaron no es un camino único, sino que a través de la manipulación de los datos de la ecuación se puede lograr la resolución de ésta por diferentes medios.

En la tercera pregunta de la primera entrevista contestó: "de las dos formas, -se hace fácil- pero me gusta más hacerlo mentalmente, porque me sale más rápido, pero hay ocasiones que sí es más fácil como la maestra nos dijo". Considera entonces al método convencional como parte de las posibilidades de resolución de una ecuación, aunque da prioridad a las estrategias que él mismo generó, lo anterior le facilitó la manipulación de la ecuación, haciendo que las matemáticas le sean comprensibles y no como una colección de números que carecen de sentido y significado. Estas apreciaciones coinciden con lo establecido por Kaplan, Yamamoto y Ginsburg, (1993, 111), quienes mencionan que el aprendizaje del álgebra requiere la adquisición de un lenguaje formal y estructurado, no en el sentido de enseñar procedimientos que lleven a una solución determinada, ni de "adquirir conductas u obtener respuestas correctas (...) se trata de aprender a pensar"; situación que Tomás cumple.

En el caso de Yesica Gabriela se puede concluir que a través de la creación de estrategias creadas por ella misma tuvo la solvencia para emplear un método convencional que le es práctico, pero que puede complementar o sustituir con estrategias que le son más eficientes y que le dan más elementos para razonar en torno a la ecuación. A través de razonamientos aritméticos que le brindan la posibilidad de crear estrategias de ensayo y error y un acercamiento parecido al de cambio de variable, identificó la naturaleza primordial de una ecuación como una relación de igualdad. Consideramos que no hubiera generado este razonamiento a través del método enseñado por la maestra. De igual forma que Tomás, Yesica Gabriela se inició en el proceso de aprender a pensar, situación que les permitirá la adquisición del lenguaje algebraico sin mayores problemas en sus estudios posteriores. Es necesario informar que ambos utilizaron la calculadora como herramienta para solucionar ecuaciones.

Los casos de Alondra, Javier, Jorge y Vanessa mostraron que el método convencional enseñado por la maestra limitó, en un primer momento, sus posibilidades de encontrar soluciones diferentes. La mecanización de este método los llevó a restringir sus propias posibilidades y, en el caso de Vanessa, al no tener un referente aritmético aceptablemente sólido, la llevó a crear sus propias reglas y formas de operar sobre la ecuación, sin respetar las reglas de la aritmética. Aunque utilizó tanto estrategias convencionales como no convencionales (ensayo y error), aplicó ambas respondiendo a sus propias reglas. En los tres casos (exceptuando en algunas ocasiones a Alondra), al descubrir una nueva posibilidad de solucionar la ecuación a través de estrategias inducidas por el investigador durante las entrevistas, se notó motivación hacia algo que no podían realizar y que, finalmente, llevaron a cabo de manera exitosa, lo que parece haberles producido gusto por la resolución de ecuaciones. Al poder avanzar con éxito los alumnos liberaron inhibiciones y fueron capaces de leer la ecuación paso por paso, lo que les dio un panorama claro de las posibilidades de resolución, logrando identificar incluso el papel que desempeñan los términos que se incluyen en una ecuación, (como paréntesis, signos y literales). Consideramos que las estrategias no convencionales que generaron les dieron pauta para tener más opciones para enfrentar una ecuación.

En el caso de Alondra sus carencias aritméticas no le permitieron obtener siempre una solución correcta, consideramos que al abordar una ecuación con el método enseñado por la maestra, teniendo como antecedente el haber creado estrategias propias, seguramente la conduciría a optar por el método que le diera más posibilidades de éxito. En los cuatro casos se notó que la calculadora les ayudó a compensar sus carencias aritméticas ampliándoles la posibilidad de resolver con éxito. Creemos que en los casos de Alondra y Vanessa, tendrán dificultades para resolver una ecuación si no cuentan con el apoyo de la calculadora.

En el casó de Érika, consideramos que la utilización de estrategias que los mismos alumnos generaron le ocasionarán el mismo tipo de dificultades debido a que no cuenta con un referente aritmético que la lleve a distinguir uno y otro método. Como se ha mencionado, el trabajo de la escuela con la alumna debiera centrarse en que comprenda los principios aritméticos básicos.

Reflexiones finales

Ventajas y limitaciones

El modelo de enseñanza para la transición de la aritmética al álgebra presentado en esta tesis combinó la creación de estrategias generadas por los alumnos y el manejo de la calculadora. Los resultados obtenidos sugieren que este acercamiento parece ser un ambiente que propicia en el estudiante un mayor interés en la clase de matemáticas, específicamente en el área de ecuaciones, además de favorecer que el alumno desarrolle habilidades y estrategias que le facilitarán la comprensión del tema de resolución de ecuaciones que abordará en la escuela secundaria. Asimismo, consideramos que los resultados alcanzados muestran que el acercamiento no formal a la resolución de ecuaciones empleado en esta tesis es un enfoque promisorio para abordar el proceso de transición de la aritmética al álgebra. En particular, en lo referente con la asignación de significados a las literales asociados a valores numéricos, creemos que éste es un buen antecedente para abordar posteriormente el uso de las literales como variables.

En el ámbito de las actitudes, de acuerdo con las observaciones realizadas durante el desarrollo de las actividades, cabe destacar que los estudiantes manifestaron un interés creciente hacia las matemáticas, lo cual sugiere que este ambiente didáctico resultó estimulante para los alumnos. La calculadora y la creación de métodos no convencionales parecen ser elementos que motivan al alumno a aceptar sin mayor cuestionamiento el uso de un nuevo código: el algebraico. El ambiente de enseñanza que se empleó en esta tesis sugiere la combinación de estos elementos como recursos promisorios que pueden favorecer de manera determinante la introducción del estudio del álgebra en los últimos años de primaria. A este respecto Rojano (1991c) observa la casi total ausencia del tema de preálgebra en los programas y propuestas curriculares del nivel primaria (5o y 6o grados) y en el primer grado de la secundaria.

Para Bruer (1993, 93) “el principal reto educativo consiste en ayudar a los niños a unir sus conocimientos y habilidades numéricas informales con las primeras reglas formales, nociones y procedimientos que encuentran cuando llegan al aula”.

Por otra parte, la estrategia didáctica empleado en esta tesis invita al profesor a emplear formas de enseñanza distintas para lograr interesar al estudiante en el estudio del álgebra y de las matemáticas en general; el profesor tiene que estar preparado para analizar estrategias que los mismos alumnos le proporcionan y que posiblemente antes no había tomado en cuenta. Además, el profesor dispone de más tiempo para apoyar directamente a los alumnos que manifiestan carencias que no les permitan avanzar (por ejemplo, Érika y Vanessa), y también dispone de la serie de actividades que previamente se diseñó y que se puede emplear para brindar elementos al alumno que le permitan acceder a los conocimientos que enfrentará en sus estudios posteriores.

Los resultados de este trabajo muestran que este tipo de estrategia didáctica propicia que los alumnos generen una actitud favorable hacia el trabajo en la clase de matemáticas, sin requerir explicaciones complicadas por parte del profesor. Esto se observó durante el trabajo de campo, la mayoría de los alumnos se manifestaron dispuestos al uso de la tecnología (la calculadora, computadora, cañón proyector) y a centrarse a su propio ritmo de trabajo. Hubo alumnos que mostraron apatía, creemos que esto se debió a que desde un principio no se esforzaron en tratar de entender lo que se les pedía y conforme avanzaban las actividades les resultaba de poco interés ya que no entendían la actividad.

En el ambiente de aprendizaje que se empleó, el alumno se siente más atendido por el profesor, ya que éste revisa su trabajo y les brinda la posibilidad de que hagan nuevas preguntas y reflexiones sobre lo ya producido. El desempeño del estudiante con el uso de estos recursos didácticos es más natural y activo, ya que puede transmitir sus ideas y conjeturas comprobando lo que piensa y aprendiendo más significativamente.

Se debe considerar que una de las principales limitaciones de este trabajo se deriva del marco metodológico empleado, ya que la técnica del estudio de casos no permite hacer generalizaciones. Para esto, en una etapa posterior de esta investigación se considera necesario obtener datos provenientes de un estudio longitudinal.

Aspectos psicológicos

En este apartado retomaremos las implicaciones de orden psicológico relacionadas con el principio teórico que se empleó para guiar la fase de enseñanza de este trabajo de tesis; el cual tomó como base las investigaciones realizadas por Bruner (1983), mismas que aportaron evidencia empírica para crear el concepto de *formato,* al estudiar la manera en que los adultos crean un ambiente de aprendizaje que les permite actuar recíprocamente con un niño que todavía no es capaz de comunicarse a través del discurso. Llegando a establecer una forma implícita de comunicación entendible entre ellos, el niño aprende a través de la interacción con el adulto una serie de referentes (que desempeñan el papel de pistas) que lo llevan a reconocer un lenguaje, dando paso a la adquisición del lenguaje materno, sin que ninguna de las dos partes (niño-adulto) tenga una preparación formalizada sobre cómo enseñar a hablar. En este proceso, una de las características de los *formatos* es que son asimétricos: uno de los interlocutores sabe qué está pasando, mientras el otro sabe menos o nada, situación que se presenta en la relación adulto-niño.

Con base en las investigaciones realizadas por Cedillo (2001), se orientó la enseñanza del código algebraico a través de su uso, de manera similar a la forma en que se aprende el lenguaje materno, por lo que el trabajo de campo de esta tesis se rigió por ese principio, donde se basó la enseñanza en actividades que promovieron el uso del código algebraico sin que los alumnos requieran conocer y dominar previamente un conjunto de reglas y definiciones.

Las actividades de trabajo llevaron a que el profesor estableciera con el alumno un vinculo que permitió que los problemas que se plantearon como un juego matemático: *"buscar un número perdido"* desempeñaran el rol de un formato.

Se pudo observar que las actividades de trabajo hicieron factible que alumnos como Tomás y Yesica Gabriela pudieran abordarlas exitosamente con base en el conocimiento aritmético que habían desarrollado en la escuela primaria, sin la necesidad de establecer primeramente una serie de definiciones, ejemplos o reglas sintácticas, dando prioridad a los razonamientos que ellos mismos generaron; este tipo de acercamientos permitió el establecimiento de un formato.

En este marco la calculadora se empleó esencialmente como un medio en el que los alumnos podían producir expresiones matemáticas, además se aprovechó que la máquina podía ofrecer retroalimentación numérica que los alumnos podían entender, como se observó en Yesica Gabriela, Alondra, Adriana, Vanessa, a quienes la calculadora los llevó a establecer razonamientos que acercaron a la resolución de ecuaciones.

La calculadora ofreció al alumno el punto de partida para el razonamiento de ecuaciones, ya que le permitió hacer descansar los cálculos aritméticos en la máquina para concentrar sus razonamientos en el manejo de valores algebraicos que aún no conoce pero que fue capaz de manejar. En algunos casos, los alumnos lograron superar las carencias de tipo aritmético que les permitieron obtener la solución de la ecuación, o al menos producir acercamientos que los aproximaran a la respuesta. La calculadora ofreció al alumno la posibilidad de ver que las ecuaciones no son difíciles y, en un segundo nivel, que es necesario establecer razonamientos para ingresar los datos correctos a la calculadora. Esta visión permitió a los alumnos la posibilidad de enfrentar retos mayores que se mencionan más adelante. Los resultados descritos muestran que la incorporación de la calculadora en el aula favoreció que los estudiantes lograran experiencias exitosas con temas algebraicos.

Un hallazgo importante de este trabajo desde el ámbito de la psicología se puede establecer a través de la actitud favorable que los estudiantes mostraron hacia el trabajo, manifestándose en un aprendizaje aceptable durante el curso. La mayoría de estudiantes fueron capaces de crear estrategias que los llevaron a la resolución exitosa de ecuaciones, estableciendo acercamientos a concepciones algebraicas que están consideradas en niveles educativos más altos; por ejemplo, los estudiantes desarrollaron una noción de la técnica de *cambio de variable.* Este aprendizaje se pudo generar a través de la creación de un formato de interacción que establecieron los alumnos y el profesor en un ambiente de aprendizaje creado específicamente para tal actividad, lo que coincide con las investigaciones de Bruner (1993) señaladas anteriormente.

Los alumnos no mostraron ningún rechazo para usar expresiones algebraicas, aún con ecuaciones que incluían signos de agrupación y que a primera vista parecería de gran complejidad; incluso Vannesa y Erika, con sus limitaciones de tipo aritmético, mostraron iniciativa e interés, lo que las llevó a un nivel de razonamiento mayor en torno a las ecuaciones, logrando la lectura global de las mismas sofisticando el método de ensayo y error, propiciando así un análisis amplio que les permitió generar una estrategia a la que llamamos *ensayo y refinamiento,* situación que no se presentaría al dar prioridad a la enseñanza de reglas y definiciones. Estos resultados muestran que temas que se inician en el nivel de bachillerato pueden introducirse desde los niveles elementales de educación, lo que proporciona elementos que exigen una revisión del curriculum actual en su sentido más amplio (Rojano, 1991c).

Los resultados mencionados arrojan evidencia empírica para proponer que es posible generar un ambiente de enseñanza-aprendizaje semejante a la adquisición del lenguaje materno, como lo menciona Bruner (1993).

REFRENCIAS

Barbera G. y Gómez-Graneli, C, (1990) **Las estrategias de enseñanza y la evaluación de las matemáticas**. Barcelona: Paidos

Booth, L. (1981) Child-Methods in Secondary Mathematics. **Educational Studies in Mathematics. Kluwer Academic Publisher**, 12, 29-41

Booth, L. (1984) Misconceptions leading to error in elementary algebra. **Journal of Struct. Learning**, 8. 125-138

Bruer, J. (1993) **Escuelas para pensar. Matemáticas darles significado.** Barcelona: Paidos

Bruner, J. (1980) **The social context of language acquisition**. Witkin Memorial Lecture, Educational Testing Service, New Jersey: Princeton

Bruner, J. (1982) The formats of Language Acquisition. **American Journal of Semiotics**. 1. 3 .1- 16

Bruner, J. (1985) Vygotsky: a historical and conceptual perspective. In J. V. Werstch (cord), Culture, **Communication and Cognition: Vygotskian perspectives**. 11.1. 26-39

Bruner, J. y Ranter, N. (1977) Games, social exchange and the acquisition of language. **Child Lang**. 5. 391- 401

Bruner, J. (1983) **Child's talk**. New York: Norton

Calix, C. (2000) **Las gráficas y las tablas de funciones como herramientas para la solución de ecuaciones lineales y cuadráticas: una alternativa basada en el uso de la calculadora gráfica**. Tesis Doctoral, México: Escuela Normal de Sinaloa SEP

Cedillo, T. (2003) **De los números al álgebra en secundaria mediante el uso de la calculadora.** México: Enseñanza de las matemáticas con tecnología SEP

Cedillo, T. (2001) Toward an Algebra Acquisition Support System. Mathematical Thinking and Learning. **An International Journal**. 3. 4. 221-259

Cedillo, T. (1999a) **Sentido numérico e iniciación al álgebra**. México: Grupo editorial iberoamericano

Cedillo, T. (1999b) Potencial de la calculadora en el desarrollo del sentido numérico: Un estudio con niños de 11-12 años. **Educación Matemática**. 11. 2. 16-31

Cedillo, T. (1998). **La calculadora en el aula: Un reto para el curriculum actual.** México: Grupo Editorial Iberoamérica

Cedillo, T. (1995) Introducción al Álgebra mediante su uso: Una alternativa factible empleando calculadoras gráficas. **Educación Matemática**, 3, 3, 6-23

Cedillo, T. (1996) **Algebra as a Language in-use: A Study with 11-12 years old Using Graphic Calculators.** Universidad de Londres: Reino Unido. Tesis Doctoral. Instituto de Educación

Cedillo, T. (1994) **Introducing Algebra with Programmable Calculators**. In David Kirshner (Editor) PME-NA XVI. USA: Louisiana State University

Conn, D. (1999) **Psicología, exploración y aplicaciones**, Madrid: Thomson editores

Chaiklin, S. and Lesgold, S. (1984) **Prealgebra students' knowledge of algebraic tasks with arithmetic expressions.** New Orleans: Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association

Chomsky, N., (1957) **Learning and the Structure of Language**. Chicago: University of Chicago

Domínguez, M. (1989) El uso de materiales en la enseñanza del álgebra. **Revista de ciencias de la educación**. 21

Gascon, J. (1999) La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar. **Educación Matemática**. 2 . 1. 77-88

Hembree, R, Dessart, D. (1992) **Research on calculators in mathematics education**. USA: Calculators in mathematics education

Kaplan G., Yamamoto, T. y Ginsburg, P. (1993) **La enseñanza de conceptos matemáticos.** Barcelona: Grijalbo

Kieran, C. (1992) The Learning and Teaching of Algebra. In D. A. Grouws (Ed.), **Handbook of Research on Mathematics. Teaching and Learning**. National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA

Kozulini, A. (1990) **Vygotsky´s Psychology**, Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press

Küchemann, D. (1981) Algebra. In K. Hart, (cord.) **Children's Understanding of Mathematics:** *11-16*. 102-19.

Lee, L., Wheeler, D. (1986) **High school students' conception of justification in algebra.** Michigan, USA: Proceedings of the 8th Annual Meeting PME-NA. East Lansing.

Mason, J. (1989) Mathematical Abstraction Seen as a Delicate Shift of Attention. **For the Learning of Mathematics**, 9. 2. 2-8

Mason, J., Burton, L., Stacey, K. (1984) **Thinking Mathematically.** London: Addison Wesley

Mason, J. Gower, N. Graham, A., Pimm, D. (1985) **Routes to/Roots of Algebra**. Open University: Milton Keynes

Miles, M., Huberman, A. (1984) **Qualitative Data Analysis, a Sourcebook of New Methods.** London: SAGE Publications

Morris, G. (1992) **Psicología Un Nuevo Enfoque**, México: Prentice Hall

Nickson, M. (2000) **Teaching and learning mathematics**. New York: Cassel

Piaget, J. (1985) **La construcción de lo real en el niño.** México: Grijalbo

Piaget, J. (1988) **La Psicología de la Inteligencia**. México: Grijalbo

Radford, L. (1999) El aprendizaje de signos en álgebra Una perspectiva pots-vigotskiana. **Educación matemática**. 11 3. 25-23

Rojano T. (1991a) **Proyecto: competencias en el uso del lenguaje algebraico. Estudio longitudinal de experimentación educativa**. México: PNFAPM-CINVESTAV

Rojano, T. (1991b) Matemáticas en la secundaria. **Infancia y aprendizaje**, 70

Rojano, T. (1991c) El álgebra en el currículo de secundaria. La reforma de los 90tas. **Educación Matemática**. 3. 3. 4-9

Rosas, S. (1995) La composición del álgebra y los números naturales. **Educación Matemática**. 7. 2. 44-58

Vega, V. (1992) **Proyecto competencia en el uso del lenguaje algebraico**. Morelos: U. A. E. M.

Vigotsky, L. (1979) **El desarrollo de las funciones psicológicas superiores**. Barcelona: Grijalbo (publicado en inglés en 1978)

Wertsch, J. (1991) **Voces de la mente. Un enfoque sociocultural para el estudio de la acción mediada**. Madrid: Visor

Zinchenko, V. (1985) Vigotsky´s ideas about units for the analysis of mind en J. Wertsch (cord.) **Comunication and cognition: Vygotskian perspectives**. Cambridge: Cambridge University Press

ANEXO 1
CUESTIONARIO INICIAL

CUESTIONARIO

Nombre: ____

Fecha de nacimiento Año ___________ Mes ____________ Día _______

Edad (en años y meses). ______________________________________

Marca con una **X** la opción que corresponda a tu respuesta

1 ¿Qué tanto te gustan las matemáticas?

a) Mucho b) A veces c) Poco d) Nada

2. ¿Como te consideras a ti mismo como estudiante de matemáticas?

a) Muy bueno b)Bueno c) Regular d) Malo

3. ¿A que se dedica tú mamá?

____

4. ¿A que se dedica tú papá?

____

5. ¿Sabes hasta que año escolar estudio tú mamá?

____

6. ¿Sabes hasta que año escolar estudio tú papá?

____

7. ¿Has reprobado algún año?, ¿Cuál?

____

8. ¿Puedes encontrar el número que falta? Escríbelo en la línea de abajo.

$\boxed{} +3.5=72$

____

9. ¿Cómo puedes convencerme de que el número que encontraste en la pregunta anterior es la respuesta correcta? Escribe tu respuesta tan claramente que cualquiera de tus compañeros la pueda entender.

ANEXO 2
HOJAS DE APRENDIZAJE
Estudio piloto

HOJA DE TRABAJO 1

VALOR POSICIONAL

Escribe en la calculadora el número **796182453**. Supongamos que los nueve dígitos que forman ese número son "invasores espaciales". Para salvar al planeta debes "eliminarlos" uno por uno convirtiéndolos en cero haciendo una sola operación con el número 796182453 y otro número que tú propongas. Por ejemplo, eliminar al "1" quiere decir que hagas una operación para que el número 796**1**82453 cambie a 796**0**82453. Después de que elimines al 1 debes eliminar al 2, luego el 3, y así sucesivamente.

1. Completa la siguiente tabla para mostrar cómo eliminaste a cada "invasor".

Dígito	Operación que hiciste en la calculadora	Resultado
1		796082453
2		796080453
3		796080450
4		796080050
5		796080000
6		790080000
7		90080000
8		90000000
9		0

2. Ahora elimina uno por uno cada uno de los dígitos del número 4983.26715. Completa la siguiente tabla para mostrar cómo eliminaste a cada "invasor".

Dígito	Operación que hiciste en la calculadora	Resultado
1		4983.26705
2		4983.06705
3		4980.06705
4		980.06705
5		980.0670
6		980.0070
7		980
8		900
9		0

HOJA DE TRABAJO 2

LECTURA Y ESCRITURA DE NÚMEROS

1. Escribe en la calculadora los números que están descritos con palabras. Cuando vayas escribiendo los números ve haciendo en la calculadora las sumas que se indican. Si leíste y escribiste correctamente cada cantidad obtendrás el total que se indica. Si el total que obtuviste es diferente del que se indica, revisa tu trabajo y corrige el error que cometiste. Cuando hayas producido los números correctos escríbelos en el cuadro de la derecha.

	CANTIDADES EN PALABRAS	CANTIDADES CON NÚMEROS
a)	siete millones setecientos ochenta mil cuatro, más ciento veinticinco mil cinco, más doce mil uno, más trescientos cuarenta y cinco mil ochenta y siete. **TOTAL:**________________	__________ + __________ + __________ + __________ **TOTAL: 8262097**
b)	trece mil noventa y nueve más veinticinco millones ciento cinco, más ciento veintiocho millones ochenta y seis, más trescientos cinco mil uno. **TOTAL:** ________________	__________ + __________ + __________ + __________ **TOTAL: 153318291**
c)	cuatrocientos treinta y seis mil cien, más un millón dos mil, más quinientos mil veinte, más trescientos mil treinta. **TOTAL:** ________________	__________ + __________ + __________ + __________ **TOTAL: 2238150**
d)	diez millones uno, más dos millones cien, más treinta y siete mil uno, más quinientos cuarenta mil diez. **TOTAL:** ________________	__________ + __________ + __________ + __________ TOTAL: 12577112

2. Inventa una suma con cuatro sumandos como las anteriores. Usa números tan complicados como te sea posible. Verifica que el total que obtienes es el mismo que el que se indica.

CANTIDADES EN PALABRAS	CANTIDADES CON NÚMEROS
________________ más ________________ más ________________ más ________________ **TOTAL:** ________________	__________ + __________ + __________ + __________ TOTAL: 4000136

HOJA DE TRABAJO 3

¿CUÁLES SON LAS FRACCIONES QUE FALTAN?

1. Usa la calculadora para encontrar las fracciones que faltan.

a) $\frac{2}{5}+a=1$
La fracción que falta es: ________________

b) $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+c=1$
La fracción que falta es: ________________

c) $\frac{1}{7}+\frac{1}{4}+\mathrm{f}=1$
$f=$

d) $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+h=2$
$h=$

e) $1\frac{2}{3}+2\frac{1}{4}+3\frac{1}{6}+\mathrm{p}=10$
$p=$

f) $1\frac{2}{5}+2\frac{3}{4}+m+3\frac{1}{6}=11\frac{1}{2}$
$m=$

2. ¿Qué hiciste para contestar las preguntas anteriores? ____________________
____
____
____

3. Usa la calculadora para encontrar las fracciones que faltan.

a) $\frac{2}{3}-x=\frac{1}{5}$
La fracción que falta es:

b) $\frac{3}{4}-y=\frac{3}{8}$
La fracción que falta es:

c) $3-m=\frac{3}{7}$
La fracción que falta es:

d) $\frac{5}{8}-a=\frac{1}{5}$
La fracción que falta es:

e) $\frac{27}{4}-q=6$
La fracción que falta es:

f) $\frac{1}{3}-b-c=\frac{1}{4}$
La fracción que falta es:

4. ¿Encontraste un método para contestar las preguntas anteriores? ¿Cuál es tu método?____
____
____

HOJA DE TRABAJO 4

¿CÓMO ENCUENTRO ESAS FRACCIONES?

1. En cada inciso encuentra dos fracciones cuya suma dé como resultado $\frac{3}{4}$.

a)	b)	c)	d)	e)

2. En cada inciso encuentra tres fracciones cuya suma dé como resultado $\frac{3}{8}$.

a)	b)	c)	d)

3. En cada inciso encuentra tres fracciones que al sumarlas den como resultado $\frac{25}{3}$.

a)	b)	c)	d)

4. En cada inciso encuentra tres fracciones que al sumarlas den como resultado $3\frac{4}{5}$.

a)	b)	c)	d)

5. En cada inciso encuentra tres fracciones que al sumarlas den como resultado $\frac{1}{12}$.

a)	b)	c)	d)

HOJA DE TRABAJO 5

UN POCO DE FRACCIONES Y RESTAS

1. En cada inciso encuentra dos fracciones de manera que al restar una de la otra obtengas $\frac{2}{5}$.

a)	b)	c)	d)	e)

2. En cada inciso encuentra dos fracciones de manera que al restar una de la otra obtengas $\frac{2}{7}$.

a)	b)	c)	d)

3. En cada inciso escribe dos fracciones de manera que al restar una de la otra dé como resultado $3\frac{1}{3}$

a)	b)	c)	d)

4. Encuentra las fracciones que faltan.

a) $\frac{4}{5}-\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{1}{10}$	b) $\frac{3}{7}-\frac{m}{n}-\frac{p}{q}=\frac{1}{24}$	c) $\frac{27}{8}-\frac{d}{f}-\frac{x}{y}=\frac{1}{3}$	d) $\frac{5}{8}-\frac{p}{q}-\frac{a}{b}=\frac{1}{12}$

5. Un pasajero inició su jornada y justo a la mitad de su viaje se quedó dormido. Al despertar se dio cuenta que todavía tenía que viajar la mitad de la distancia que había viajado mientras dormía. ¿Qué parte de toda la jornada permaneció dormido? __________________________ Escribe las operaciones que hiciste para obtener ese resultado

____

____

_____

HOJA DE TRABAJO 6

¿ECUACIONES QUE TIENEN MÁS DE UNA SOLUCIÓN?

1. Una alumna dice que la ecuación $\mathbf{x^2=25}$ tiene dos soluciones: $\mathbf{x_1=5}$ **y** $\mathbf{x_2=-5}$. ¿Estás de acuerdo con ella? ¿Por qué? Escribe tus conclusiones en tu cuaderno de manera que cualquiera de tus compañeros las pueda entender. ______________________________
____
____

2. Un alumno encontró dos soluciones para la ecuación $\mathbf{x^2+x=0}$. ¿Tú también las puedes encontrar? Escribe a continuación tu respuesta y explica cómo razonaste para resolver esa ecuación. ____
____
____
____

3. Otra alumna dice encontró dos soluciones para la ecuación $\mathbf{x^2+x=20}$. Una es $x=4$ y la otra es $x=-5$. ¿Estás de acuerdo con ella? ¿Por qué? Escribe tus conclusiones y compáralas con las de tus compañeros. _______________________________________
____
____

4. Las siguientes ecuaciones tienen dos soluciones. Encuéntralas y verifica tus respuestas usando tu calculadora. No debe haber ningún error en tus respuestas.

$x^2+5=69$ $x_1=$ $x_2=$	$y^2=400$ $y_1=$ $y_2=$	$a^2+2\times a=0$
$x^2-x=90$	$a^2+2=123$	$a^2-7=93$
$c^2-3\times c=10$	$d^2-2\times d=8$	$m^2+3\times m=70$

HOJA DE TRABAJO 7

¿ECUACIONES DISTINTAS QUE TIENEN LA MISMA SOLUCIÓN?

La solución de la ecuación $2 \times y - 4 = 8$ es $y = 6$, porque $2 \times 6 - 4 = 8$. ¿Estás de acuerdo en que 6 también es la solución de la ecuación $5 \times a + 4 = 34$?. ________________

1. Construye otras tres ecuaciones distintas cuya solución también sea 6 ______________________________
   ____
   ____

2. Construye tres ecuaciones distintas que cuya solución sea $y = -4$. ______________________________________
   ____
   ____

3. Construye tres ecuaciones distintas cuya solución sea $b = \frac{2}{3}$.
   Pide a uno de tus compañeros que las resuelva para verificar tus respuestas. __________________________________
   ____
   ____

4. Un alumno dice que *x=2* es la solución de la ecuación $\frac{2 \times (3x + 4)}{3} = x + 2$. ¿Estás de acuerdo con él? ______ Explica a continuación por qué. ______________________
   ____
   ____

5. Construye tres ecuaciones como la de la pregunta anterior que tengan por solución *x=2*. Intercambia con algún compañero(a) tus ecuaciones y resuélvanlas para que verifiquen que todas las ecuaciones que están proponiendo tienen por solución *x=2.* ___________
   ____
   ____
   ____

6. ¿Encontraste un método para construir ecuaciones a partir de una solución que ya conoces? Describe ese método de manera que cualquiera de tus compañeros pueda entenderlo.
   ____
   ____
   ____
   ____
   ____

HOJA DE TRABAJO 8

¿QUÉ ES ESO DE ECUACIONES EQUIVALENTES?

1. A las ecuaciones que tienen la misma solución se les llama **ecuaciones equivalentes**. Por ejemplo, las ecuaciones $7 \times y - 5 = 51$ y $5 \times m + 3 = 43$ son equivalentes porque ambas tienen la misma solución. ¿Cuál es su solución? ______________
____

2. De la siguientes ecuaciones encuentra las que son equivalentes. Justifica tus respuestas.

a) $4 \times a - 2 = 34$ b) $7 \times 5 - 3 = 32$ c) $12 + 4 \times a = 14$

d) $15 + 6 \times y = 18$ e) $2 \times m + 11 = 15$ f) $5 \times b - 1 = 44$

g) $28 - 5 \times p = 3$ h) $23 - 12 \times r = 17$ i) $21 + 8 \times k = 25$

j) $3 \times y + 1 = 0$ k) $20 - 2 \times m = 2$ l) $42 + 4 \times n = 62$

3. Unos alumnos resolvieron las ecuaciones que se muestran a continuación. Revisa sus respuestas, si encuentras respuestas incorrectas corrígelas y muestra la respuesta correcta.

a) $3 \times a + 5 = 41,\ a = 12$	b) $4 \times p - 2 = 20, p = 7$	c) $16 - r = 0\ ,\ r = -16$
d) $20 = \dfrac{5}{k}, k = 4$	e) $2 \times n + 5 = 5\ ;\ n = 0$	f) $\dfrac{2 \times a + 1}{5} = 3\ ;\ a = 7$
g) $(b + 3) \times 2 - 4 = 8\ ;\ b = 3$	h) $7 = \dfrac{3 \times y + 1}{4}\ ;\ y=9$	i) $\dfrac{4 \times a - 1}{3} = 9\ ;\ a = 27$
j) $(2 \times b + 3) \times 5 - 1 = 34\ ;\ b=3$	k) $(2 + 3 \times x) \times 4 = 20\ ;\ x = 1$	l) $\dfrac{2 \times x - 1}{4 - x} = 5\ ;\ x = 3$

HOJA DE TRABAJO 9

¿RESOLUCIÓN DE ECUACIONES POR TANTEOS?

En esta hoja de trabajo te mostraremos la estrategia que usó Rodrigo para resolver ecuaciones. Muy probablemente tú usaste alguna estrategia como la de Rodrigo cuando resolviste ecuaciones. Sin embargo, conocer otras formas para resolver ecuaciones enriquecerá lo que ya sabes. Llamaremos **"tanteo y refinamiento"** a la estrategia que él usó.

A Rodrigo se le pidió que resolviera la ecuación $x^2-9=55$. La estrategia que empleó se puede describir como se hace a continuación:

- Empezó por preguntarse, ¿qué significa x^2? Finalmente su respuesta fue "x^2 representa un cierto número que se va a elevar al cuadrado".
- Después de esto intentó dándole varios valores a x, primero probó con $x=5$, y obtuvo que $x^2=5\times5=25$. Pero $25-9=16$, y el resultado que quería es 55.
- Entonces intentó con un número más grande, $x=9$. Pero $x^2=81$, y $81-9$ no da 55.
- Finalmente encontró la solución: $x=8$. Él estaba seguro de que esa es la solución porque $8^2=64-9=55$. Como $(-8)^2=(-8)\times(-8)=64$, entonces también $x=-8$ es solución de esa ecuación.

¿Cuándo resolviste ecuaciones en las hojas de trabajo anteriores pensaste de manera parecida a como lo hizo Rodrigo? ________ ¿Entendiste cuál es su estrategia? ______ Si tu respuesta es afirmativa resuelve las siguientes ecuaciones usando la estrategia que él empleó.

a) $x^2+15=31$	b) $x^2+31=40$
c) $y^3-10=54$	*d)* $y^4-1=15$
e) $p^2-4=117$	f) $67=p^2+18$

HOJA DE TRABAJO 10

¿PUEDO HACER QUE ESAS ECUACIONES SEAN MÁS SIMPLES?

En esta hoja de trabajo te mostraremos la estrategia que usó Mariana. A ella se le pidió que resolviera la ecuación **5×(a+2)+4=59**. Su estrategia consistió en ver a la ecuación completa y reducirla sistemáticamente a una ecuación más sencilla. La estrategia de Mariana la llamaremos **"construcción de ecuaciones más simples"**. La forma en que ella razonó se describe a continuación.

Primero se preguntó qué significaba la expresión **5×(a+2)**, y se dio cuenta que 5×(a+2) significa que a+2 se debe multiplicar por 5. El problema es que ella que no sabía cuál es el valor de a+2. Después de algunos intentos encontró que no es difícil resolver esa ecuación. Ella razonó como sigue:

- Como 5×(a+2)+4=59, entonces 5×(a+2) debe valer 55, porque 55+4=59. Esto le permitió construir una ecuación más simple: **5×(a+2)=55**.
- De la misma manera encontró que (a+2) debe valer la quinta parte de 55, es decir 11. Eso le permitió reducir la aparentemente difícil ecuación 5×(a+2)+4=59, a una mucho más sencilla: a+2=11, cuya solución es a=9.

1. Comprueba que a=9 es la solución de la ecuación 5×(a+2)__________________________________
2. Resuelve las siguientes ecuaciones usando el método de Mariana. Recuerda que no debes tener errores porque siempre puedes comprobar tus respuestas.

a) $4(x+12)+7=87$

b) $10+3(y-8)=31$

c) $34-2(a-1)=18$

d) $7(b+3)-5=51$

e) $22+\dfrac{p+8}{3}=28$

f) $\dfrac{q-3}{4}+13=16$

HOJA DE TRABAJO 11

¿QUÉ ES ESO DE DESHACER OPERACIONES?

Gerardo y Silvia resolvieron la ecuación **5×(a+2)+4=59** "deshaciendo operaciones". Su estrategia consistió en usar operaciones inversas a las que se muestran en la ecuación. La manera en que razonaron se describe a continuación.

- Primero notaron que si $5\times(a+2)+4=59$, entonces el valor de $5\times(a+2)$ lo podían obtener "**deshaciendo sumar 4**" a través de **restar 4**. Esto lo condujo a la ecuación **$5\times(a+2)=55$**.

- La ecuación $5\times(a+2)=55$ para hacerla más sencilla **"deshicieron multiplicar por 5"** dividiendo entre 5. Con esto obtuvieron la ecuación $a+2=11$, porque $a+2$ es la quinta parte de $5\times(a+2)$, y la quinta parte de 55 es 11.
- Por último resolvieron la ecuación $a+2=11$, "**deshicieron sumar 2**" restando 2. Así encontraron que $a=9$ es la solución de la ecuación $5\times(a+2)+4=59$.

¿Entendiste la estrategia que usaron Gerardo y Silvia? Si tu respuesta es afirmativa resuelve las siguientes ecuaciones como ellos lo hicieron. Usa tu calculadora para realizar esta actividad. Verifica tus respuestas, recuerda que sólo debes producir respuestas correctas.

a) $7(a-8)+25=39$	b) $18+8(b+4)=94$
c) $\frac{2}{5}+5(b-1)=\frac{52}{5}$	d) $\frac{x-8}{2}-2=5$
e) $15+\frac{y+12}{3}=22$	f) $\frac{x-0.5}{8}+5=\frac{93}{16}$
g) $\frac{4(x-5)}{3}-6=-2$	h) $\frac{5(x+3)}{7}+12=17$

ANEXO 2
HOJAS DE APRENDIZAJE
Estudio principal

HOJA DE TRABAJO 61

¿INCÓGNITAS? ¿ECUACIONES?... ¿QUÉ ES ESO?

1. En las siguientes expresiones se ha usado una letra para representar a un número que falta. **El reto es que en cada inciso encuentres el número que falta y que ninguna de tus respuestas sea incorrecta**. Usa tu calculadora para verificar tus respuestas.

a) $b + 1.03 = 24.7$ $b =$	b) $m - 1.67 = 30.25$ $m =$	c) $p - 12.22 = 4.05$ $p =$
d) $4.8 - r = 3.5$ $r =$	e) $\frac{5.2}{n} = 4$ $n=$	f) $5 \times b - 1 = 29$ $b=$
g) $k - 1.5 = 6.2$ $k=$	h) $2 \times c = 11$ $c =$	i) $3 \times a + 1 = 121$ $a =$

2. ¿Hay alguna forma que te permita verificar que tus respuestas son correctas? Discute esto con tus compañeros y anota el método que te parezca más eficaz. ____________
____
____
____

3. Una alumna dice que el número que falta en $4 \times d + 2 = 4$ es 0.5. ¿Estás de acuerdo con ella? ¿Por qué? ____
____

4. Otro alumno dice que el número que falta en $2 \times c = 11$ es 5.5, y una alumna dice que es $\frac{11}{2}$.
¿Quién de los dos tiene razón? ¿Los dos están equivocados? ¿Las dos respuestas son correctas? Discute esto con tus compañeros y anota tus conclusiones.
____
____
____

Resumen

A expresiones como las anteriores, por ejemplo, $3 \times b + 2 = 14$, les llamaremos **ecuaciones**, y a la letra que aparece en una ecuación le llamaremos **incógnita**. Podemos usar cualquier letra del alfabeto para representar una incógnita.

En una ecuación puedes sustituir una incógnita con cualquier valor numérico, por ejemplo, en la ecuación $3 \times b + 2 = 14$ podemos decidir que b valga 5, por lo que $3 \times b + 2 = 3 \times 5 + 2 = 17$. Sin embargo, la condición impuesta por la ecuación es que el valor numérico de $3 \times b + 2$ sea **14**, por lo que $b = 5$ no es el número que buscamos. Observa que sólo cuando $b = 4$, $3 \times b + 2$ es igual a 14. Por esto, diremos que $b = 4$ es la **solución** de $3 \times b + 2 = 14$.

HOJA DE TRABAJO 62

NÚMEROS PERDIDOS

1. ¿Puedes encontrar las soluciones de las siguientes ecuaciones? **El reto consiste en que ninguna de tus respuestas sea incorrecta**. Verifica tus resultados usando tu calculadora.

a) $2 \times a - \frac{1}{3} = 1$	b) $18 = 5 \times a + 3$	c) $27 = 18 \times a + 9$
d) $\frac{5}{7} - b = \frac{1}{4}$	e) $3.4 = c + 1.2$	f) $d \times 4 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$
g) $356 + 2 \times x = 376$	h) $457 = 25 + 2 \times y$	i) $18 + 3 \times y = 45$

2. ¿Encontraste un método para resolver las ecuaciones anteriores? Describe tu método de manera que cualquiera de tus compañeros lo pueda entender. ____________________
____
____

3. Auxíliate de tu calculadora para encontrar los números que faltan y comprobar que tus respuestas sean correctas. Anota en cada espacio las operaciones que hiciste.

a) $2 + 3 \times m = 2 \times m + 7$ $m=$	b) $25 + 3 \times y = 8 \times y + 5$ $y=$
c) $120 + 5 \times p = 10 \times p + 85$ $p=$	d) $18 \times q - 1 = 0$ $q=$
e) $b^3-120=5$ $b=$	f) $b^3+2\times b=12$ $b=$
g) $5^x=3125$ $x=$	h) $2^x=64$ $x=$

HOJA DE TRABAJO 63

¿ECUACIONES QUE TIENEN MÁS DE UNA SOLUCIÓN?

4. Una alumna dice que la ecuación $\mathbf{x^2=25}$ tiene dos soluciones: $\mathbf{x_1=5}$ **y** $\mathbf{x_2=-5}$. ¿Estás de acuerdo con ella? ¿Por qué? Escribe tus conclusiones en tu cuaderno de manera que cualquiera de tus compañeros las pueda entender.

5. Un alumno encontró dos soluciones para la ecuación $\mathbf{x^2+x=0}$. ¿Tú también las puedes encontrar? Escribe a continuación tu respuesta y explica cómo razonaste para resolver esa ecuación.

6. Otra alumna dice encontró dos soluciones para la ecuación $\mathbf{x^2+x=20}$. Una es $x=4$ y la otra es $x=-5$. ¿Estás de acuerdo con ella? ¿Por qué? Escribe tus conclusiones y compáralas con las de tus compañeros.

5. Las siguientes ecuaciones tienen dos soluciones. Encuéntralas y verifica tus respuestas usando tu calculadora. No debe haber ningún error en tus respuestas.

$x^2+5=69$ $x_1=$ $x_2=$	$y^2=400$ $y_1=$ $y_2=$	$a^2+2\times a=0$
$x^2-x=90$	$a^2+2=123$	$a^2-7=93$
$c^2-3\times c=10$	$d^2-2\times d=8$	$\mathrm{m}^2+3\times \mathrm{m}=70$

HOJA DE TRABAJO 64

¿ECUACIONES DISTINTAS QUE TIENEN LA MISMA SOLUCIÓN?

La solución de la ecuación $2 \times y - 4 = 8$ es $y = 6$, porque $2 \times 6 - 4 = 8$. ¿Estás de acuerdo en que 6 también es la solución de la ecuación $5 \times a + 4 = 34$?. ___________________

7. Construye otras tres ecuaciones distintas cuya solución también sea 6 ______________________________________
____
____

8. Construye tres ecuaciones distintas que cuya solución sea $y = -4$. ____
____
____

9. Construye tres ecuaciones distintas cuya solución sea $b = \frac{2}{3}$.
Pide a uno de tus compañeros que las resuelva para verificar tus respuestas. _____________________________________
____
____

10. Un alumno dice que *x=2* es la solución de la ecuación $\frac{2 \times (3x + 4)}{3} = x + 2$. ¿Estás de acuerdo con él? _______ Explica a continuación por qué. ________________________
____
____

11. Construye tres ecuaciones como la de la pregunta anterior que tengan por solución *x=2*. Intercambia con algún compañero(a) tus ecuaciones y resuélvanlas para que verifiquen que todas las ecuaciones que están proponiendo tienen por solución *x=2.* ____________
____
____
____

12. ¿Encontraste un método para construir ecuaciones a partir de una solución que ya conoces? Describe ese método de manera que cualquiera de tus compañeros pueda entenderlo. ____
____
____
____
____

HOJA DE TRABAJO 65

¿QUÉ ES ESO DE ECUACIONES EQUIVALENTES?

3. A las ecuaciones que tienen la misma solución se les llama **ecuaciones equivalentes**. Por ejemplo, las ecuaciones $7 \times y - 5 = 51$ y $5 \times m + 3 = 43$ son equivalentes porque ambas tienen la misma solución. ¿Cuál es su solución? _______________
____

4. De la siguientes ecuaciones encuentra las que son equivalentes. Justifica tus respuestas.

m) $4 \times a - 2 = 34$ n) $7 \times 5 - 3 = 32$ o) $12 + 4 \times a = 14$

p) $15 + 6 \times y = 18$ q) $2 \times m + 11 = 15$ r) $5 \times b - 1 = 44$

s) $28 - 5 \times p = 3$ t) $23 - 12 \times r = 17$ u) $21 + 8 \times k = 25$

v) $3 \times y + 1 = 0$ w) $20 - 2 \times m = 2$ x) $42 + 4 \times n = 62$

4. Unos alumnos resolvieron las ecuaciones que se muestran a continuación. Revisa sus respuestas, si encuentras respuestas incorrectas corrígelas y muestra la respuesta correcta.

m) $3 \times a + 5 = 41,\ a = 12$	n) $4 \times p - 2 = 20, p = 7$	o) $16 - r = 0\ ,\ r = -16$
p) $20 = \frac{5}{k}, k = 4$	q) $2 \times n + 5 = 5\ ;\ n = 0$	r) $\frac{2 \times a + 1}{5} = 3\ ;\ a = 7$
s) $(b + 3) \times 2 - 4 = 8\ ;\ b = 3$	t) $7 = \frac{3 \times y + 1}{4}\ ;\ y = 9$	u) $\frac{4 \times a - 1}{3} = 9\ ;\ a = 27$
v) $(2 \times b + 3) \times 5 - 1 = 34\ ;\ b = 3$	w) $(2 + 3 \times x) \times 4 = 20\ ;\ x = 1$	x) $\frac{2 \times x - 1}{4 - x} = 5\ ;\ x = 3$

HOJA DE TRABAJO 66

¿RESOLUCIÓN DE ECUACIONES POR TANTEOS?

En esta hoja de trabajo te mostraremos la estrategia que usó Rodrigo para resolver ecuaciones. Muy probablemente tú usaste alguna estrategia como la de Rodrigo cuando resolviste ecuaciones. Sin embargo, conocer otras formas para resolver ecuaciones enriquecerá lo que ya sabes. Llamaremos **"tanteo y refinamiento"** a la estrategia que él usó.

A Rodrigo se le pidió que resolviera la ecuación $x^2-9=55$. La estrategia que empleó se puede describir como se hace a continuación:

- Empezó por preguntarse, ¿qué significa x^2? Finalmente su respuesta fue "x^2 representa un cierto número que se va a elevar al cuadrado".
- Después de esto intentó dándole varios valores a x, primero probó con $x=5$, y obtuvo que $x^2=5\times5=25$. Pero $25-9=16$, y el resultado que quería es 55.
- Entonces intentó con un número más grande, $x=9$. Pero $x^2=81$, y $81-9$ no da 55.
- Finalmente encontró la solución: $x=8$. Él estaba seguro de que esa es la solución porque $8^2=64-9=55$. Como $(-8)^2=(-8)\times(-8)=64$, entonces también $x=-8$ es solución de esa ecuación.

¿Cuándo resolviste ecuaciones en las hojas de trabajo anteriores pensaste de manera parecida a como lo hizo Rodrigo? ________ ¿Entendiste cuál es su estrategia? ______ Si tu respuesta es afirmativa resuelve las siguientes ecuaciones usando la estrategia que él empleó.

g) $x^2+15=31$	h) $x^2+31=40$
i) $y^3-10=54$	*j)* $y^4-1=15$
k) $p^2-4=117$	l) $67=p^2+18$

HOJA DE TRABAJO 67

¿PUEDO HACER QUE ESAS ECUACIONES SEAN MÁS SIMPLES?

En esta hoja de trabajo te mostraremos la estrategia que usó Mariana. A ella se le pidió que resolviera la ecuación **5×(a+2)+4=59**. Su estrategia consistió en ver a la ecuación completa y reducirla sistemáticamente a una ecuación más sencilla. La estrategia de Mariana la llamaremos **"construcción de ecuaciones más simples"**. La forma en que ella razonó se describe a continuación.

Primero se preguntó qué significaba la expresión **5×(a+2)**, y se dio cuenta que 5×(a+2) significa que a+2 se debe multiplicar por 5. El problema es que ella que no sabía cuál es el valor de a+2. Después de algunos intentos encontró que no es difícil resolver esa ecuación. Ella razonó como sigue:

- Como 5×(a+2)+4=59, entonces 5×(a+2) debe valer 55, porque 55+4=59. Esto le permitió construir una ecuación más simple: **5×(a+2)=55**.
- De la misma manera encontró que (a+2) debe valer la quinta parte de 55, es decir 11. Eso le permitió reducir la aparentemente difícil ecuación 5×(a+2)+4=59, a una mucho más sencilla: a+2=11, cuya solución es a=9.

3. Comprueba que a=9 es la solución de la ecuación 5×(a+2)+4=59. _________________ ________
4. Resuelve las siguientes ecuaciones usando el método de Mariana. Recuerda que no debes tener errores porque siempre puedes comprobar tus respuestas.

g) $4(x+12)+7=87$	h) $10+3(y-8)=31$
i) $34-2(a-1)=18$	j) $7(b+3)-5=51$
k) $22+\frac{p+8}{3}=28$	l) $\frac{q-3}{4}+13=16$

HOJA DE TRABAJO 68

¿QUÉ ES ESO DE DESHACER OPERACIONES?

Gerardo y Silvia resolvieron la ecuación **5×(a+2)+4=59** "deshaciendo operaciones". Su estrategia consistió en usar operaciones inversas a las que se muestran en la ecuación. La manera en que razonaron se describe a continuación.

- Primero notaron que si $5\times(a+2)+4=59$, entonces el valor de $5\times(a+2)$ lo podían obtener "**deshaciendo sumar 4**" a través de **restar 4**. Esto lo condujo a la ecuación $\mathbf{5\times(a+2)=55}$.

- La ecuación $5\times(a+2)=55$ para hacerla más sencilla **"deshicieron multiplicar por 5"** dividiendo entre 5. Con esto obtuvieron la ecuación $a+2=11$, porque $a+2$ es la quinta parte de $5\times(a+2)$, y la quinta parte de 55 es 11.

- Por último resolvieron la ecuación $a+2=11$, "**deshicieron sumar 2**" restando 2. Así encontraron que $a=9$ es la solución de la ecuación $5\times(a+2)+4=59$.

¿Entendiste la estrategia que usaron Gerardo y Silvia? Si tu respuesta es afirmativa resuelve las siguientes ecuaciones como ellos lo hicieron. Usa tu calculadora para realizar esta actividad. Verifica tus respuestas, recuerda que sólo debes producir respuestas correctas.

i) $7(a-8)+25=39$	j) $18+8(b+4)=94$
k) $\frac{2}{5}+5(b-1)=\frac{52}{5}$	l) $\frac{x-8}{2}-2=5$
m) $15+\frac{y+12}{3}=22$	n) $\frac{x-0.5}{8}+5=\frac{93}{16}$
o) $\frac{4(x-5)}{3}-6=-2$	p) $\frac{5(x+3)}{7}+12=17$

HOJA DE TRABAJO 69

¡ESTO DE LAS ECUACIONES NO ES TAN DIFÍCIL!

1. Construye cuatro ecuaciones parecidas a la ecuación $\frac{5(x+3)}{7}+12=17$. Una vez que las hayas resuelto y comprobado, pídele a un compañero(a) que las resuelva y tú resuelves las que él(ella) inventó.

   ¡Gana el que haya resuelto las ecuaciones del otro sin cometer ningún error!

a)	b)	c)	d)

2. Inventa tres ecuaciones distintas que tengan como solución tu número de lista. La primera de tus ecuaciones no debe contener paréntesis, la segunda debe incluir paréntesis, la tercera debe incluir una barra de división y paréntesis, como las ecuaciones de los incisos g) y h) de la hoja anterior. Una vez que las hayas resuelto y comprobado pídele a un compañero(a) que las resuelva y tú resuelve las él(ella) construyó.

   ¡Gana el que construya correctamente sus ecuaciones y resuelva las ecuaciones del otro sin cometer ningún error!

a)	b)	c)

3. Construye tres ecuaciones que tengan dos soluciones. Una vez que las hayas resuelto y comprobado pídele a un compañero(a) que las resuelva. Gana el que resuelva las ecuaciones del otro sin cometer ningún error.

a)	b)	c)

ANEXO 3
PROTOCOLO Y ACTIVIDADES DE ENTREVISTA

Entrevista 1

Objetivos	*Preguntas de investigación relacionadas con cada objetivo*	*Protocolo de entrevista*
Investigar si el conocimiento aritmético que los estudiantes tienen, es un antecedente para la resolución de ecuaciones de primer gado con auxilio de calculadora gráfica.	¿Se puede resolver una ecuación de primer grado (con una incógnita) a través de un conocimiento aritmético? ¿Qué operaciones de tipo aritmético se realizan para solucionar una ecuación de primer grado? ¿Cómo genera el alumno una estrategia para la resolución de ecuaciones? ¿Qué estrategia se generó al resolver la ecuación? ¿Qué función tiene la calculadora, para la realización de la ecuación?	1. ¿Cómo puedes solucionar el siguiente problema?, se trata de un numero desconocido, (que se representa con una letra), y que sumado con otro nos da un resultado, ¿cómo lo encuentras? $b + 1.03 = 24.7$ 2. ¿Como le hiciste para encontrar el numero que faltaba? 3. ¿Porque elegiste esa forma de resolución? 4. ¿Si te pido que lo resuelvas de otra forma, lo puedes lograr? 5. ¿La calculadora te fue útil para resolver este problema? 6. ¿Sin ella, lo podrías lograr? 7. ¿Cómo es más fácil resolver este tipo de problemas con la calculadora o sin ella? 8. ¿Las clases de matemáticas que llevas comúnmente, te ayudan a solucionar problemas como este?, ¿por qué? 9. ¿Crees que has aprendido más matemáticas ahora que has trabajado con las hojas de trabajo y la calculadora grafica?

		10. ¿Qué es has aprendido? *Nota.- Se utiliza hoja de actividad 1*
Identificar las estrategias que generan los alumnos en la resolución de ecuaciones de primer grado con auxilio de la calculadora.	¿Cómo se resuelve, una ecuación donde intervienen fracciones, se utiliza un procedimiento aritmético? ¿Cuál es el razonamiento del alumno en relación al numero "incógnita"?.	11. ¿Si ahora el problema es como el siguiente, ¿cómo lo resuelves? $\frac{5}{7} - b = \frac{1}{4}$ 12. ¿Se puede resolver igual que el anterior, porque? 13. ¿ Este problema se te dificulta más? 14. ¿ Cómo te ayudas de la calculadora, describe como ingresas los datos? 15. ¿Qué quiere decir o que representa, lo siguiente? $y^2 = 400$ $x^2 + 5 = 69$ 16. ¿Puedes resolver las ecuaciones anteriores?, si es así explícame como le haces. 17. ¿Qué significa la ***y*** y ***x***? 18. ¿ Cuál es más fácil, porque? 19. ¿Puedes realizar las siguientes ecuaciones?

		$48.7xd = 695.4$ $3xa + 1 = 121$ $a^2 + 2 = 123$ 20. ¿Explícame tu método de resolución? 21. ¿Podrías crear un método nuevo? 22. ¿De los siguientes ejercicios, cuál se te hace más fácil a simple vista? 23. ¿Explícame porque y como lo resolverías? $18 + 3xy = 45$ $67 = p^2 + 18$ $\frac{5.2}{k} = 4$ *Nota.- Se utiliza hoja de* actividad 1

HOJA DE ACTIVIDAD 1

1) ¿Cómo puedes solucionar el siguiente problema?

$$b + 1.03 = 24.7$$

2) Si ahora el problema es como el siguiente, ¿cómo lo resuelves?

$$\frac{5}{7} - b = \frac{1}{4}$$

3) ¿Qué quiere decir o que representa, lo siguiente?

$y^2 = 400$ $\qquad$ $x^2 + 5 = 69$

4) ¿Puedes realizar las siguientes ecuaciones?

$48.7xd = 695.4$ $\qquad$ $3xa + 1 = 121$ $\qquad$ $a^2 + 2 = 123$

$18 + 3xy = 45$ $\qquad$ $67 = p^2 + 18$ $\qquad$ $\frac{5.2}{k} = 4$

Entrevista 2

Objetivos	*Preguntas de investigación relacionadas con cada objetivo*	*Protocolo de entrevista*
Investigar que significados asocian los alumnos en relación a las literales que se usan para simbolizar las incógnitas en la ecuacion.	¿Qué significado le otorga el alumno a las literales de una ecuación de primer grado? ¿Cómo identifica el alumno una literal en una ecuación de primer grado? ¿Causa confusión el que la “*x*” represente una literal, pero que al mismo tiempo indique el multiplicar? ¿Es fácil identificar una literal en una ecuación?	1. ¿Puedes solucionar el siguiente problema? 2. ¿Qué representan cada uno de los elementos de esta ecuación? $\frac{2\,xx\,-\,1}{4\,-\,x}\,=\,5$ 3. ¿Qué significan las “x”? 4. ¿Todas las “x” son incógnitas, o representan algo más? 5. ¿Recuerdas que durante las sesiones anteriores dijimos que la incógnita de una ecuación se representa con una letra cualquiera y la llamamos literal? 6. En las siguientes ecuaciones, por favor marca las literales 1) $\frac{5(x+3)x4}{3}+12=17$ 2) $5x(a+2)+4=59$ 3) $120+5xp=10xp+8$ 4) $(2\,+\,3xX\,)x4\,=\,2$

		5) $2+3xm=2xm+7$ 6) $25+3xy=8xy+5$ 7) $457=25+2xy$ 8) $b^3+2xb=12$ 7. ¿Te represento algún problema saber cual es la literal? 8. ¿Cómo identificas a las literales? 9. ¿Si hay dos letras en una ecuación, como dos *x*, ó *x* ö *y*, como identificas a la literal? 10. ¿En el ejercicio 5, se presenta una *x* y dos *m* que representan cada una de ellas? 11. ¿En el caso de las *m* el valor será el mismo? 12. ¿Puedes resolver alguna de las ecuaciones anteriores? *Nota.- Se utiliza hoja de* actividad 2
Investigar que ventajas o desventajas se generan para	¿El alumno tiene un antecedente de resolución de ecuaciones de primer grado?	13. ¿En clase de matemáticas tú maestra o los libros te han

abordar los métodos convencionales para resolver ecuaciones cuando se propicia que los estudiantes inicien este tema a partir de estrategias no convencionales que ellos mismos generan	¿Le han enseñando un método para resolver ecuaciones de primer gado? ¿Genera algún tipo de cuestionamientos el método enseñado? o ¿causa alguna confusión? o ¿no es entendible o no es bien explicado? ¿El alumno genera algún método para la resolución de ecuaciones?	enseñado a resolver este tipo de problemas? $$4.8 - r = 3.5$$ 14. Si es así, ¿cómo te lo enseñaron? 15. ¿Tú resolverías el problema de esa manera? 16. ¿Es práctico el método que te enseñaron? 17. ¿Hay otra forma de resolución, que tu puedas inventar? *Nota.- Se utiliza hoja de* actividad 2

HOJA DE ACTIVIDAD 2

1) ¿Puedes solucionar el siguiente problema?

$$\frac{2\ xx\ -\ 1}{4\ -\ x} = 5$$

2) En las siguientes ecuaciones, por favor marca las literales

1)

$$\frac{5(x+3)x4}{3} + 12 = 17$$

2)

$$5x(a+2)+4=59$$

3)

$$120+5xp=10xp+85$$

4)

$$(2+3xX\ )x4=20$$

5)

$$2+3xm=2xm+7$$

6)

$$25+3xy=8xy+5$$

7)

$$457=25+2xy$$

8)

$$b^3+2xb=12$$

3) ¿En clase de matemáticas tú maestra o los libros te han enseñado a resolver este tipo de problemas?

$$4.8-r=3.5$$

ENTREVISTA FINAL

Objetivos	*Método*	*Actividades*
Indagar con mayor profundidad: Qué habilidades matemáticas desarrollaron los alumnos para enfrentar la solución de ecuaciones de primer grado de la forma ax+b=c, que involucran paréntesis y barras de división como signos de agrupación. Respecto a habilidades matemáticas se dará atención especial a observar el tipo de lectura que realizan los estudiantes para interpretar las expresiones matemáticas que conforman a una ecuación y a la lectura global de una ecuación. Qué intuiciones desarrollaron los alumnos sobre los conceptos de incógnita,	La entrevista se aplicará individualmente a cada uno de los alumnos que fueron seleccionados para ser observados como estudio de casos. Las preguntas de la entrevista se basan en actividades que requieren la solución de una ecuación y se desarrollará a partir de las respuestas que den cada uno de los alumnos (entrevista semi estructurada). Cada una de las ecuaciones que se plantearán en la entrevista serán editadas en una hoja tamaño carta. Se proporcionará al estudiante una hoja a la vez. El estudiante podrá hacer las anotaciones y cálculos que requiera empleando lápiz y papel o usando la calculadora a su elección. Se estima que cada entrevista tenga una duración máxima de 45 minutos. Cada entrevista será videograbada con la finalidad de acudir a los episodios relevantes para este estudio las veces que sea necesario durante el proceso de análisis de datos.	**Actividad 1** Observa la siguiente expresión. ¿Puedes encontrar el número que falta? $10.5 + x = 24$ 1. ¿Cuál es la solución que encontraste? 2. Explícame qué hiciste para encontrar esa solución. 3. ¿Qué le dirías a uno de tus compañeros para convencerlo de que la solución que encontraste es correcta? 4. ¿Qué significa para ti la letra que aparece en la expresión $10.5 + x = 24$? 5. Inventa otra expresión que sea diferente a $10.5 + x = 24$ pero que tenga la misma solución. 6. Ya encontraste el número que falta en la expresión $10.5 + x = 9$ ¿Puedes ahora encontrar el número que falta en la siguiente expresión? $24 = 10.5 + x$ *Nota.- Se utilizó hoja de trabajo 1-A* **Actividad 2** ¿Puedes encontrar el número que falta en la siguiente expresión? $4 \times (y - 3) + 2 = 14$ 1. ¿Cuál es la solución que encontraste?

ecuación y solución de una ecuación.		2. Explícame qué hiciste para encontrar esa solución. 3. ¿Qué le dirías a uno de tus compañeros para convencerlo de que la solución que encontraste es correcta? 4. ¿Puedes inventar otra expresión como $4\times(x-3)+2=14$, pero que tenga la misma solución? *Nota.- Se utilizó hoja de trabajo 2-A* **Actividad 3** ¿Puedes encontrar el número que falta en la siguiente expresión? $\frac{2\times(m-5)}{3}+7=9$ 1. ¿Qué solución encontraste? 2. Convénceme de que tu respuesta es correcta. 3. ¿Cómo le explicarías a un compañero cómo encontrar el número que falta? Intenta hacerlo de manera que cualquiera de tus compañeros pueda entenderte. 4. Puedes construir otra expresión como esa pero que tenga la misma solución? 5. ¿Qué significa para ti la expresión $\frac{2\times(m-5)}{3}+7=9$. 6. Un alumno de otra escuela dice que 4 es el número que falta en la expresión $\frac{2\times(p-5)}{3}+7=9$. ¿Estás de acuerdo con él? *Nota.- Se utilizó hoja de trabajo 3-A*

HOJA DE TRABAJO 1-A

$$10.5 + x = 24$$

$$24 = 10.5 + x$$

HOJA DE TRABAJO 2-A

$$4x(y-3)+2=14$$

HOJA DE TRABAJO 3-A

$$\frac{2x(m-5)}{3}+7=9$$