UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

PROGRAMA EDUCATIVO DE PSICOLOGÍA EDUCATIVA

RAZONAMIENTO PROPORCIONAL DE ESTUDIANTES DE SECUNDARIA ESCOLARIZADA Y ABIERTA

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE LICENCIADO EN PSICOLOGÍA EDUCATIVA

Ψ

PRESENTAN:
MORALES RÍOS GILDARDO
ROLDÁN ROSALES ANGÉLICA

DIRECTORA DE TESIS: DRA. SILVIA ALATORRE FRENK

FEBRERO DE 2007

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

La tesis que presentamos denominada “razonamiento proporcional de estudiantes de secundaria escolarizada y abierta”, pretende analizar las respuestas que pueden dar estos estudiantes al ser enfrentados con problemas que invocan un razonamiento proporcional. Lesh, Post y Behr (citados en Alatorre, 2004) han definido el razonamiento proporcional como una forma de razonamiento matemático, que involucra un sentido de covariación, comparaciones múltiples, y la capacidad para almacenar y procesar mentalmente varias porciones de información. Este proceso involucra métodos de pensamiento cualitativo, que requiere de una habilidad mental que Piaget ha asociado con el nivel de desarrollo cognitivo de las operaciones formales.

La inquietud nace a partir de nuestra labor académica como docentes de matemáticas de nivel secundaria pues en el desempeño académico ha existido la interrogante de cómo nosotros propiciamos que el alumno construya y se apropie de los diversos contenidos que se pretende que adquiera en la escuela. De ahí la inquietud investigativa para responder a las siguientes preguntas:

- ¿Cómo resuelven los estudiantes los problemas matemáticos que invocan un razonamiento proporcional?
- ¿Existe una relación de la posibilidad de resolver adecuadamente estos problemas con dos factores presentes ente los estudiantes de secundaria, a saber la edad y el sistema de enseñanza?
- ¿Cómo se desarrollan los procesos del pensamiento en la resolución de problemas, y además influye la edad o el sistema de escolaridad en ellos?

Lo que pretendemos en esta tesis es analizar el bagaje cognitivo (intuiciones, conocimientos adquiridos, experiencia cotidiana) con el que cuenta el individuo, e indagar en su respuesta la estrategia que genera para dar solución a diversos problemas que invocan un razonamiento proporcional. Nosotros pretendemos llegar a conocer y analizar los procedimientos que ocurren dentro del sujeto para poder ir comparando qué tipo de razonamiento tiene un sujeto con respecto a otro. Además, desde nuestra perspectiva resulta interesante indagar si las respuestas que dan los sujetos son determinadas por su edad y por el sistema de enseñanza que cursan, o si responden de acuerdo a las situaciones vividas en su experiencia cotidiana.

Dado que la actividad humana involucra procesos de razonamiento y factores de experiencia cuando se desempeña cualquier clase de funciones, nos interesa:

- Estudiar algunos comportamientos de estudiantes de secundaria escolarizada (adolescentes) y abierta (adultos).
- Entender la respuesta del alumno a una pregunta, es decir la manera en que su pensamiento opera. De este modo habremos de explicar el tipo de razonamiento que emplea el individuo con base en las estrategias que use en la resolución de problemas matemáticos que invocan un razonamiento proporcional.
- Conocer el proceso que lleva al sujeto a dar una respuesta a un problema en específico, pues desde que el individuo se enfrenta al problema hay un proceso de interpretación y de comprensión, y empieza a trabajar cognitivamente para llegar a una solución. Cuando expresa la solución lo hace mediante una codificación al lenguaje usual, lo que le permite producir una respuesta. Esta respuesta nos permite analizar el tipo de estrategia que utiliza el sujeto en los problemas planteados (Alatorre, 2004).
- Analizar las ejecuciones de los alumnos ante tareas matemáticas, tanto simples como complejas, como formas de entender el proceso de construcción del conocimiento matemático.

El objetivo principal de esta investigación es indagar si las formas de resolver problemas que invocan un razonamiento proporcional empleadas por diversos alumnos de secundaria difieren según la edad o el sistema de aprendizaje que han cursado.

Para ello también pretendemos:

Analizar y comparar las estrategias que utilizan sujetos de diferentes edades e igual escolaridad en la resolución de diversos problemas de razonamiento proporcional.

El razonamiento proporcional es una capacidad que se desarrolla en la secundaria. Nos interesa comparar dos clases de personas que son estudiantes de secundaria. Por un lado los adolescentes que cursan la secundaria escolarizada, y por otro los adultos que son los estudiantes de secundaria abierta. Vamos a estar comparando a estos estudiantes y a la vez los dos sistemas de secundaria. Por tanto en el primer capítulo se halla una visión general de los actores educativos (profesor-adolescente vs. asesor-adulto), así como una revisión general de la secundaria escolarizada y abierta. También se encuentra una revisión del desarrollo cognitivo, en la cual hemos seguido la concepción Piagetiana y Vigotskiana, y tendremos un acercamiento a las matemáticas, como una aproximación a los problemas que se trabajarán en el trabajo de campo, abordando en particular el razonamiento proporcional.

Una manera de acercarnos al pensamiento del individuo es la entrevista. La entrevista de corte clínico de Piaget brinda los elementos necesarios para seguir el curso del pensamiento que un individuo emplea, pues a medida que el sujeto va explicando sus creencias o su manera de resolver el problema y lo va justificando, nos va permitiendo formular otras preguntas nuevas e incluso plantearle contradicciones con sus propias creencias para ver cómo las resuelve. Es decir, replantear cada vez nuevas preguntas, con el fin de ir más a fondo en cuanto a la forma de pensar en la resolución de determinado problema, sin que esto nos lleve a abandonar el punto de partida cuando el estudiante nos da una respuesta contradictoria o insuficiente para analizar la estrategia que está empleando. Las preguntas que se van planteando son cada vez más profundas, lo cual nos permite como investigadores entrever los significados cognitivos que el estudiante dará en las respuestas que va generando. Como psicólogos educativos creemos que es importante manejar adecuadamente la entrevista, pues ésta nos permite tener elementos indispensables para una formación profesional dentro del campo laboral. Por tanto en el segundo capítulo se encuentra la parte metodológica del trabajo de campo que hemos realizado, el cual cuenta con diez entrevistas de corte clínico de Piaget aplicadas a estudiantes de secundaria escolarizada y abierta con problemas que invocan un razonamiento proporcional. En este capítulo se presentan los instrumentos con los que se realizaron las entrevistas, así como la metodología para clasificar las respuestas de los estudiantes; se exponen también algunos procedimientos que permiten el análisis de los resultados.

La presente tesis parte de explorar las formas naturales o espontáneas en que los estudiantes razonan ante ciertos problemas matemáticos. Las posibles respuestas de los estudiantes nos muestran la diversidad de estrategias y los diferentes momentos del proceso de resolución de determinado problema. Las estrategias cognitivas que el sujeto emplee proporcionarán información relacionada con el proceso de pensamiento que tiene cada individuo. Por tanto en el tercer capítulo se desarrollan las aportaciones que consisten en los resultados obtenidos a partir de los datos que obtuvimos al realizar las entrevistas.

Por último realizamos un recuento de los logros y aportaciones obtenidas que personal y profesionalmente obtuvimos en la realización de este trabajo de investigación.

1 MARCO TEÓRICO

La enseñanza secundaria parece concretar buena parte de las esperanzas y críticas que generan los sistemas formales. Por una parte, las familias y los alumnos la consideran a menudo como la vía principal de ascenso social y económico. Es hoy día, creencia ampliamente difundida que, para que haya desarrollo, es necesario que un porcentaje elevado de la población siga estudios secundarios. Por otra, se le acusa de no conseguir que los adolescentes estén preparados para la enseñanza superior, y tampoco para el ingreso al mundo laboral. Además, se sostiene que las asignaturas que en ella se enseñan no son las adecuadas y que no se da suficiente importancia a la adquisición de actitudes y valores.

Es decir, el contexto en el que se desarrolla el proceso de aprendizaje del estudiante de secundaria ofrece pocas posibilidades de que sea relevante para el alumno. Pues, "generalmente los contenidos y aprendizajes que se dan en las instituciones educativas están separados de las actividades y de la cultura en la que se encuentran, provocando con esto una desvinculación entre el conocimiento formal y el informal. Esto afecta de manera directa el proceso de aprendizaje de los estudiantes, ya que para ellos no es significativo ni motivante lo que puedan aprender" (Reyes et al, 1998, p. 223).

Deja de lado además, que el estudiante pasa por una etapa transitoria de cambios fisiológicos, psicológicos, sociales e intelectuales. Estos aspectos desempeñan un papel de primer orden en la adquisición de conocimientos y la extensión a nuevas formas de pensamiento, y sin su consideración es imposible entender los significados que construye el alumno de los contenidos que se le enseñan en la escuela.

1.1 DOS SISTEMAS, DOS EDADES

La educación básica en nuestro país se clasifica en dos sistemas: escolarizado y abierto. Ambos tienen como finalidad que todos los mexicanos tengan oportunidad de cursar sus estudios de manera que esto les permita tener un mejor desarrollo humano. En este apartado se realizará una revisión general de los principales rasgos que caracterizan por una parte al sistema de escolaridad (escolarizado y abierto) y por otra a los actores educativos (adolescentes y adultos), con el fin de tener un acercamiento contextual sobre el conocimiento de las características de los mismos estudiantes, pues en este nivel educativo es donde se enfoca sustantivamente la presente investigación.

1.1.1 SECUNDARIA ESCOLARIZADA: Estudiantes adolescentes

En educación secundaria en la modalidad escolarizada el programa de Modernización Educativa estableció los siguientes propósitos a través de su modelo pedagógico: profundizar y ampliar los aprendizajes realizados en la primaria; además crearla con etapa completa por sí misma capaz de formar para el trabajo y la vida social plena (S.E.P., 1994). Dicho modelo orientó el plan de estudios de la secundaria, que fue el resultado de la aplicación de una prueba operativa como estrategia de evaluación de todos los elementos que intervinieron en las puestas en marcha de los planes y programas de estudio.

De acuerdo a la reforma del artículo tercero constitucional promulgada el 4 de marzo de 1993, la educación secundaria tiene un carácter obligatorio y se constituye como parte del ciclo básico: “Seis grados de enseñanza obligatoria no son suficientes para satisfacer las necesidades de formación básica de las nuevas generaciones (se refiere a la educación primaria), es hasta ahora que el desarrollo alcanzado por el sistema educativo hace posible que la escolaridad de nueve grados sea una oportunidad real para la mayoría de la población y no sólo una meta consagrada por la Ley”(ibidem, p.10). Estas reformas incluyen a su vez modificaciones en la estructura curricular, la cual plantea que la enseñanza va a ser por asignaturas en lugar de áreas, cuya aplicación oficial y general se da a partir del ciclo lectivo 1993 -1994. Los cambios se derivan del Acuerdo Nacional para la Educación Básica en mayo de 1992. (ibidem).

En el periodo de Ernesto Zedillo como Presidente de la República se realizó un diagnóstico sobre la calidad y cobertura educativa, que sirvió como base para el planteamiento del Programa de Desarrollo Educativo 1995-2000, cuyos propósitos fundamentales son: lograr la equidad, la calidad y la persistencia de la educación. Las estrategias y acciones que presenta se articulan en torno a cinco ámbitos del quehacer en educación básica:

1) la reorganización y funcionamiento del sistema de educación básica,
2) los métodos, contenidos y recursos de la enseñanza,
3) la formación, actualización y superación de maestros y directivos,
4) la equidad educativa, y
5) los medios electrónicos en apoyo a la educación (SEP, 2004b).

En el documento se establecieron propuestas en cuanto a la evaluación con el propósito de medir los resultados educativos y abrir paso a la construcción de indicadores de eficiencia, equidad y aprovechamiento. Sin embargo, no se han visto datos que proporcionen información sobre ésta.

En el gobierno de Vicente Fox, la SEP tiene como propósito esencial crear condiciones que permitan asegurar el acceso de todas las mexicanas y mexicanos a una educación de calidad, en el nivel y modalidad que la requieran y en el lugar donde la demanden. (ibidem).

El sistema escolarizado en nivel secundaria tiene entre otros objetivos estratégicos, garantizar que todos los niños y jóvenes que cursen la educación básica adquieran conocimientos fundamentales, desarrollen las habilidades intelectuales, los valores y las actitudes necesarios para alcanzar una vida personal y familiar plena, ejercer una ciudadanía competente y comprometida, participar en el trabajo productivo y continuar aprendiendo a lo largo de la vida. (ibidem)

De acuerdo al Programa Nacional de Educación (S.E.P., 2004), la educación básica nacional estará dirigida a que la relación que se establece entre el maestro y sus alumnos propicie el desarrollo de las competencias fundamentales del conocimiento y el deseo de saber, y faculte al educando a continuar aprendiendo por su cuenta, de manera sistemática y autodirigida.

Según el Programa de Educación Secundaria, el profesor frente a grupo tiene entre otras responsabilidades, seleccionar y organizar las actividades que en el año escolar deberá realizar, en la forma en que considere más conveniente, para propiciar el aprendizaje de sus alumnos. Sin embargo existen limitaciones que debe considerar en su planeación. Es decir el maestro tiene la facultad de modificar el orden de los contenidos y organizar su enseñanza en la forma que considere más adecuada para el aprendizaje de sus alumnos. Por tanto, las recomendaciones que se le hacen al maestro son:

- Diseñar su curso de manera que ningún contenido sea sacrificado ni se deje en su totalidad para el final.
- Procurar que los alumnos utilicen con frecuencia los conocimientos adquiridos con anterioridad.

Según José Fernández (1991) las condiciones que debe tomar en cuenta el profesor son:

- conocer previamente la fundamentación teórica en la que se basa.
- conocer su estructura, dinámica, posibilidades y limitaciones.
- seleccionar la técnica en función de los objetivos que se quieran alcanzar.
- elegir las estrategias que resulten más prácticas, por conocimiento, experiencia previa, grado de dificultad.

Pérez (1994) nos dice que el profesor debe entenderse como un profesional comprometido con el conocimiento, que actúa a la manera de un artista, o un clínico en el aula, que investiga y experimenta, que utiliza el conocimiento para comprender los términos de la situación (el contexto, el aula, los grupos y los individuos), así como para diseñar y construir estrategias flexibles adaptadas a cada momento, cuya eficacia y bondad experimenta y evalúa de forma permanente.

Según la teoría psicopedagógica denominada constructivismo, el aspecto más importante a tener en cuenta a la hora de enseñar consiste en "conocer lo que el alumno sabe" (Sánchez y Calviño, 1993, p.12), lo cual indica que se deben considerar los conocimientos previos del alumno. La razón de esto parece estar en el modo en que se organiza la información en el cerebro, donde existe una jerarquía conceptual, modificable, en la que los conocimientos menos importantes están unidos a otros más amplios y generales. El aprendizaje, se dice entonces, es significativo si la nueva información se relaciona con los conceptos ya conocidos o con otros, que remplazan a los anteriores (ibidem).

Durante la educación secundaria escolarizada, se produce un desarrollo importante de habilidades motoras y cambios físicos relacionados con la pubertad, que tienen relación con la imagen y la identidad sexual. Por lo tanto, la actividad del profesor debe estar guiada por las características de sus alumnos. Deberá ajustar la secuencia y organización de contenidos, así como también elegir métodos que se ajusten a las necesidades y ritmos que más beneficien.

Efectivamente, entre las principales características de los estudiantes de este sistema de escolaridad tenemos varias que son propias de su edad.

De acuerdo a Conde y Vidales (2000), la adolescencia comprende de los 12 a los 18 años. Entre los intereses predominantes en esta etapa toman sello definitivo los sociales y los intelectuales. Las conductas típicas están sujetas a los cambios del metabolismo interno que repercuten en el aspecto físico exterior y originan la preocupación por la aparición de las características sexuales secundarias. Se presenta una crisis psicológica y un conflicto entre la dependencia y la independencia; el comportamiento se torna inestable, desequilibrado e imprevisible; surge la crisis de identidad personal y una pugna por la madurez intelectual, social y emocional. Es un período de ajuste difícil en que emocionalmente el adolescente es más problema para sí mismo que para los demás. Se presenta exhuberancia, depresión, sobre actividad y se piensa con insistencia en ciertos problemas.

Según Piaget (citado en Delval, 1997a), en la adolescencia se producen importantes cambios en el pensamiento que van unidos a modificaciones en la posición social. El carácter fundamental de la adolescencia es la inserción en la sociedad de los adultos y por ello las características de la adolescencia están muy en relación con la sociedad en la que se producen. El individuo se inserta en esa sociedad, pero tiende a modificarla. Para ello elabora planes de vida, que consigue gracias a que puede razonar no sólo sobre lo real, sino también sobre lo posible. Las transformaciones afectivas y sociales van unidas indisolublemente a cambios en el pensamiento. La adolescencia se produce por una interacción entre factores sociales e individuales.

La madurez cognitiva en esta etapa de desarrollo alude a la capacidad para pensar de forma abstracta, hecho que se alcanza ordinariamente durante la adolescencia, según Piaget (citado en Papalia y Wendkos, 1999), entre los 11 y 20 años. Los adolescentes pueden entonces pensar no sólo en función de lo que observan en una situación concreta, sino que pueden imaginar una variedad infinita de posibilidades, pueden pensar en situaciones hipotéticas, considerar todos los aspectos de una situación y plantearse un problema intelectual de forma sistemática.

1.1.2 SECUNDARIA ABIERTA: Estudiantes adultos

La Secundaria Abierta, en nuestro país, brinda la oportunidad para que toda persona mayor de 15 años acredite el nivel medio básico. Forma parte del Plan Nacional de Educación para Adultos; se basa en el auto-didactismo y en la solidaridad social. Por medio de los libros expresamente diseñados para esta modalidad, el alumno estudia en el lugar y a la hora que más le convenga, sin necesidad de asistir a un lugar determinado. El sistema respeta el ritmo de aprendizaje del educando y le permite atender a sus actividades laborales y familiares, lo cual se traduce en un mejoramiento de su vida personal y social.

De acuerdo con la Ley Federal de Educación, seleccionamos tres aspectos que en materia de educación corroboran y fundamentan el Sistema de Enseñanza Abierta:

- Se da igual reconocimiento a la educación escolar y a la extraescolar;
- Se enfatiza un nuevo proceso de enseñanza-aprendizaje en el cual se promueve el aprender a aprender; y
- Se propone un sistema de acreditación independiente de las formas de aprender (INEA, 2001).

El Plan Nacional de Desarrollo 2001-2006 establece que las políticas públicas que impulsará se distinguirán por una franca decisión de promover la innovación en todos los ámbitos, siempre bajo el imperativo de acrecentar el desarrollo humano. Estas ideas del Plan Nacional de Desarrollo se aplican, por una parte, al conjunto del Sistema Educativo Nacional en su vertiente de educación escolarizada, formal, que es la vía habitual por la que las personas acceden a los beneficios de la escuela. Pero también deben aplicarse al vasto universo de la educación no formal; y dentro de esta segunda vertiente deben distinguirse dos enfoques, uno contenido en el otro. Por una parte, la oferta educativa que está orientada a construir los conocimientos y habilidades básicas a quienes no pudieron obtenerlas en la edad convencional y a través de la escolaridad formal. Como la educación básica debe proporcionar el bagaje esencial para la vida en una sociedad democrática moderna, este enfoque puede designarse con la expresión educación para la vida. Desde esta perspectiva el INEA brinda la oferta educativa que está enfocada a desarrollar habilidades específicas, de diverso tipo, que se requieren para ocupar de manera efectiva posiciones diversas en el aparato productivo. Ésta se designa como educación para el trabajo (SEP, 2004a), y conforma el segundo enfoque, comprendido dentro del anterior.

El actual modelo de Educación Abierta ofrece a los adultos interesados en seguir aprendiendo e iniciar o concluir su secundaria, una experiencia formativa que dé respuesta a sus necesidades, intereses y expectativas, para mejorar sus condiciones de vida (INEA, 2001).

Es decir, el actual modelo de educación que imparte el INEA se refiere a la educación para la vida (MEV), tratándose de personas jóvenes y adultas que necesitan trabajar para su propio sustento y el de sus familias; la educación básica, o para la vida, debe tener una orientación práctica que, además de ampliar el horizonte cultural, abra mejores oportunidades de inserción laboral a quienes se beneficien de ella. Lo anterior es factible por el valor instrumental que tiene el dominio de la lectoescritura, las matemáticas y otros elementos del currículo de la educación básica (SEP, 2004a).

En el Sistema de Educación Abierta, la enseñanza es impartida en su mayor parte por jóvenes que se encuentran realizando su servicio militar nacional o que cursan el nivel medio superior; hay también algunos especialistas con diferentes perfiles profesionales. Muchos de los docentes del nivel secundaria en el sistema abierto carecen de la preparación psicopedagógica que debe poseer un educador de adolescentes y adultos.

El asesor es la persona que desea ayudar al estudiante, estimularlo para que alcance el autodidactismo, ayudarlo en el proceso de aprendizaje a resolver sus dudas y orientarlo para lograr los objetivos de acreditación de la secundaria. Es decir, para facilitar el proceso de aprendizaje debe favorecer y estimular la participación individual y el trabajo en grupo, coordinar y orientar las actividades. En este sistema de enseñanza, no se trata de transmitir información y enseñar conocimientos acabados, sino de guiar a las personas que integran el grupo para que ellas mismas construyan sus conocimientos.

El artículo 13º de la Ley Nacional de Educación para Adultos (1976) lo define: El asesor es auxiliar voluntario del proceso de educación para adultos y tiene a su cargo:

- Promover interés por el estudio;
- Organizar y orientar círculos de estudio; y
- Conducir personas analfabetas y educandos en general (ibidem).

Se requiere un nivel superior a la secundaria (por lo menos la preparatoria) pero además debe dedicarse a un área y profundizarla. La forma en que están planeados los contenidos y la naturaleza de un Sistema Abierto exige mayor investigación por la amplitud y profundidad de los mismos; pero no tiene que asesorar en todos, pues le es imposible conocer a fondo cada uno.

Entre las principales características de los estudiantes de este sistema de escolaridad tenemos varias que son propias de su edad y los hacen particularmente diferentes del sujeto adolescente.

El ser adulto jurídicamente, equivale a arribar a la mayoría de edad, que actuar bajo su propia responsabilidad y no depender ya de otros. En el caso de nuestro país, la mayoría de edad se encuentra descrita en la Constitución Mexicana y en el Código Civil, que se deriva de la primera. Por tanto, adulto es aquella persona que ha cumplido 18 años, que puede ejercer los derechos de ciudadano y aceptar sus responsabilidades; pero la Ley Nacional de Educación para Adultos incluye en ese término a todos los que tengan de 15 años en adelante, ya que para ingresar al sistema escolarizado es necesario tener menos de 15 años.

De acuerdo con Vidales (2001) el adulto pasa por dos etapas:

- **Juventud,** comprende de los 18 a los 30 años. Entre los intereses predominantes se refuerzan los sociales e intelectuales y se adquieren vivamente los económicos y los políticos. Entre las actitudes sobresalientes, se presenta la necesidad de elegir carrera y surge la necesidad de hacer planes aún dentro de la incertidumbre. Surge la neurosis de la “mayoría de edad” acompañada de los sentimientos de ansiedad. Se empieza a desarrollar una madurez fisiológica y hay menos conflictos emocionales, que previamente.

- **Madurez**, comprende de los 30 a los 50 años. Entre los intereses predominantes de esta etapa están los de tipo económico y los sociales. Entre las actitudes sobresalientes se aminora el placer por la novedad, se presentan frustraciones por sueños no realizados, ya no se puede argüir la falta de experiencia, aumentan las preocupaciones y los sentimientos de culpa, hay preocupación por la acertada elección de carrera o de pareja;

todos los problemas aumentan y ya no hay justificaciones y muy pocas compensaciones. Aumenta la dignidad, el poder, el prestigio, el conocimiento, las habilidades; el adulto se enfrenta con más posibilidad de éxito a los problemas y encuentra objetivos más satisfactorios.

Psicológicamente el término adulto se emplea como sinónimo de madurez de la personalidad y pretende indicar el adulto cabal, o sea el individuo responsable, que posee las características personales de dominio de sí mismo, seriedad y juicio; sin embargo la edad cronológica del adulto no va a la par con la madurez de la personalidad (Ludojoski, 1986).

El adulto es pues, un educando, no sólo porque esté cursando la escuela primaria o secundaria sino porque también a lo largo de su vida se encuentra constantemente aprendiendo. En este proceso podría necesitar la ayuda de los demás, que en este caso se convierten en sus educadores, “cada adulto es necesariamente un ser en situación y solamente en la medida que él mismo con o sin la cooperación de otros, logra resolver las necesidades de su situación de modo real y concreto, logrará también dar sentido y plenitud humana a su existencia, es decir será un hombre educado” (ibidem,1986, p. 47).

Todas las personas, hombres y mujeres, jóvenes y adultos, independientemente de su ocupación, de su manera de vivir y de pensar, de que no hayan asistido a la escuela o que tengan un determinado nivel de estudios, tienen experiencias y conocimientos que les han permitido dar respuesta a situaciones de su vida diaria y que pueden aplicar y compartir para seguir aprendiendo.

En conclusión se puede decir que aunque guiado por diferentes motivos e intereses o frenado por diversas circunstancias ajenas a él, un individuo adulto está capacitado para adquirir conocimientos siempre y cuando éstos sean los adecuados y respondan a sus necesidades psicológicas y sociales más próximas.

1.2 DESARROLLO COGNITIVO

El hablar del aprendizaje del alumno de secundaria nos remite a sus procesos cognitivos, los cuales entran en una fase importante de desarrollo del pensamiento. Desde esta perspectiva, las aportaciones de la psicología a la educación han estado escindidas en dos posturas: la piagetiana, que básicamente afirma que el desarrollo cognitivo es producto de un proceso interno, y la vigotskiana, que atribuye dicho desarrollo a circunstancias externas.

1.2.1 PIAGET

Una de estas posturas sostiene que el crecimiento personal ha de entenderse básicamente como el resultado de un proceso de desarrollo en buena medida interno a las personas, es decir, el desarrollo mental se va construyendo de manera continua; durante éste, el individuo va añadiendo elementos cada vez más complejos que le permiten el paso de una etapa de desarrollo a otra posterior. En cada periodo del desarrollo se presentan estructuras mentales nuevas, y en su construcción el sujeto pasa de un proceso mental a otro más complejo, lo que le va permitiendo llegar a más y mejores niveles de organización que lo llevarán al logro del equilibrio.

Desde esta postura, Piaget nos dice que el conocimiento se tiene que estudiar a partir de lo que sucede en el interior del individuo. Para este autor, el conocimiento es un proceso de acciones físicas y/o mentales en relación con los objetos, imágenes y símbolos que los lentes de percepción del individuo han encerrado dentro de un modelo que le es familiar. Los objetos son descubiertos en el mundo de la experiencia directa, mientras que las imágenes y los símbolos pueden derivarse no sólo del mundo real, sino también de la memoria (citado en Delval 1997a).

Cuando Piaget habla de conocimiento nos dice que éste es un repertorio de acciones, en vez de un inventario de información archivada, es decir, el conocimiento es el proceso de actuar en vez de una colección de información. Dice que “todo conocimiento está continuamente en curso de desarrollo y pasa de un grado de conocimiento menor a otro que es más completo y efectivo” (citado en Cueli et al, 1997, p. 413).

Por tanto el desarrollo tiene lugar por medio de la actividad constructiva del sujeto con el objeto de conocimiento, lo que quiere decir que no es un proceso que depende sólo de determinaciones biológicas, ni tampoco de las influencias ambientales. Partiendo de las capacidades heredades, que son posibilitantes, y por medio de su actividad, va seleccionando elementos del medio, los que puede asimilar y los va incorporando y modificando, dando lugar a estructuras más complejas que suponen un progreso sobre las anteriores (Delval, 1997b).

Para Piaget, toda nueva adquisición implica construir, es decir, aprender implica construir, en donde la construcción es relacionada por el alumno con los esquemas que ya posee, los cuales ha ido construyendo en la relación que ha tenido con el medio que lo rodea. Por consiguiente, se puede decir que el sujeto realiza la construcción todos los días y en casi todos los contextos en los que se desarrolla su actividad diaria.

Pero ¿cómo, cuándo y por qué cambia el conocimiento? Desde esta postura Piaget dice que el organismo tiende a adaptarse a su medio del modo más satisfactorio, utilizando esquemas que son técnicas de la adaptación al nuevo conocimiento. También dice que un esquema es la estructura o la organización de acciones que son transferidas o generalizadas por la repetición de circunstancias similares o análogas; se refiere a los esquemas como estructuras individuales, minisistemas que con la acción se generalizan a otros eventos (Cueli et al, 1997).

En palabras de Delval (1997a), un esquema es una sucesión de acciones (materiales o mentales) que tienen una organización y que son susceptibles de repetirse en situaciones semejantes; menciona algunas características de los esquemas, entre ellas las siguientes:

- Están compuestos por una serie de acciones encadenadas, que se suceden en un orden establecido.
- Pueden ejecutarse mediante acciones reales de tipo motor que modifican materialmente el ambiente o de forma mental, sin acciones externas.
- Suceden en un orden establecido, y en general no pueden alterarse.

- ❖ Se realizan de una manera automática, sin necesidad de una actividad consciente.
- ❖ No son una pura forma de almacenar el conocimiento sino que sirven para actuar sobre el mundo real o mental.

Como se puede ver, entre sujeto y objeto de conocimiento existe una relación dinámica y no estática; el sujeto es activo frente a lo real e interpreta la información proveniente del entorno. La idea central es que el desarrollo intelectual constituye un proceso adaptativo caracterizado por el hecho de que la adquisición de los conocimientos se lleva a cabo mediante dos procesos complementarios: la asimilación y la acomodación.

El individuo lleva a cabo la **adaptación** a su medio con el fin de satisfacer sus necesidades; esta adaptación está acompañada de medios o esquemas, los cuales son su repertorio en cualquier momento, y cuando se enfrenta al problema de satisfacer sus necesidades inspecciona el medio para percibir cómo la estructura aparente parece cuadrar armónicamente con el esquema actual.

Cuando encuentra lo que considera un buen apareamiento logra su adaptación. Este proceso de aparear los estímulos del medio a los modelos mentales ya existentes no es sólo cuestión de ingerir la realidad objetiva del mundo. Al contrario, el individuo revive los eventos del mundo con el fin de adaptarlos al modelo de un esquema ya existente.

El proceso de incorporar eventos del mundo, al aparear las características percibidas de estos eventos a los esquemas existentes se llama **asimilación**. Algunas veces la estructura percibida de los eventos no puede aparearse a los esquemas existentes; cuando esto sucede hay dos consecuencias que pueden resultar:

- ❖ La primera es que el evento no se asimile o se ignore.
- ❖ La segunda no es un abierto rechazo al medio percibido, sino una falta de satisfacción y esfuerzo continuo para lograr ese apareamiento.

Por tanto, la asimilación remodela la información que recibe del exterior para incorporarse a los esquemas ya existentes. Se produce siempre que un organismo utiliza algo de su medio y lo incorpora a sus estructuras mentales.

El proceso complementario de la asimilación es la acomodación, proceso que se refiere a la tendencia de ajustarse a un objeto nuevo; es decir, cambiar los propios esquemas de acción para acomodarlos a un objeto nuevo. Por tanto la función de este término es revisar o añadir a los esquemas las características reajustadas del medio que no pueden ser ignoradas o distorsionadas.

Piaget usa el término de acomodación para identificar este proceso de alterar los esquemas existentes para permitir la asimilación de los eventos que de otro modo serían no incorporables. Ningún evento es perfectamente idéntico a los pasados eventos que se utilizaron para la formación de los esquemas, pues existe siempre un grado de disparidad de los esquemas viejos con los eventos nuevos.

Para Piaget, la infancia es una sucesión de etapas que conducen a la edad adulta mediante la conquista de un equilibrio entre dos mecanismos: “la asimilación y la acomodación”. Estos dos mecanismos son indisociables. Consideremos al ser humano como un sujeto y al mundo que le rodea como un objeto. Por una parte, el sujeto actúa sobre el objeto (asimilación): incorpora (asimila) la experiencia en sus propias estructuras como el organismo asimila un manjar en forma de glúcidos y lípidos.

Por otra parte, el objeto actúa sobre el sujeto (acomodación): la experiencia no es siempre idéntica, por lo que las estructuras se modifican en función de ésta. Estas dos acciones no sólo no son independientes, sino que tienen lugar al mismo tiempo.

El niño muy pequeño no distingue entre él mismo y el mundo que le rodea. A medida que va cobrando conciencia de sí mismo se diferencia del mundo exterior. Al convertirse en sujeto, debe llegar a encontrar poco a poco un equilibrio en sus relaciones con el mundo exterior. Llega a este equilibrio por medio de ejercicios y conductas espontáneos.

Tanto en el desarrollo mental como en el orgánico el individuo tiende al logro de un equilibrio, es decir, el desarrollo mental se construye de manera continua. Durante esta construcción el individuo va añadiendo elementos cada vez más complejos que le permiten el paso de una etapa de desarrollo a otra posterior; es decir, en cada periodo se presentan estructuras mentales nuevas y en su construcción el sujeto pasa de un nivel mental a otro más complejo. Esto le va permitiendo llegar a más y mejores niveles de organización que lo llevarán al logro del equilibrio.

El punto de vista de Piaget sobre el proceso de internalización puede expresarse en términos de “esquemas que reflejan las regularidades de la acción física de los individuos”. Es decir el énfasis de Piaget se ubicó en la interacción del niño pequeño con la realidad física, lo cual lo llevó a examinar la representación de objetos (citado en Orobio y Ortiz, 1997).

De acuerdo a Piaget (citado en Cueli et al, 1997), el equilibrio no es el único factor del desarrollo intelectual; en total son cinco:

- Maduración.
- Experiencia física.
- Experiencia lógico matemática.
- Transmisión social.
- Equilibración.

1) Maduración. Plan genético que va desplegándose de manera gradual. Los efectos genéticos no son nunca vistos aisladamente; aunque bien merece la pena absorberlos de la corriente de la vida, cuando se persiguen fines analíticos.
2) Experiencia física. Existe un factor que actúa recíprocamente con los efectos genéticos, llamado experiencia física y que el niño utiliza para separar las diferentes posibilidades de los objetos físicos. El conocimiento que obtiene el individuo se adquiere de la experiencia física, se inicia en los objetos físicos.
3) Experiencia lógico matemática. Resulta de la misma naturaleza de las acciones que el niño emprende acerca de los objetos que lo rodean. Cuando lo hace, éstos devuelven la acción, por así decirlo, y entonces se da la experiencia física.

Pero existe otra clase de eventos que resultan de la elaboración de relaciones entre sus acciones y los objetos. Piaget cuenta que un niño de cuatro o cinco años de edad estaba en un patio y contaba piedras; las formó en fila y contó: uno, dos, tres, hasta llegar a diez; las contó de atrás para adelante y volvió a contar hasta llegar a diez; las puso en círculo y las volvió a contar: diez. Lo que este niño comprendió, nada tiene que ver con las propiedades físicas de las piedras, sino con las relaciones existentes entre ellas. Lo que realizó exactamente fue una organización de sus actos con respecto a las piedras. El concepto de diez no es ninguna propiedad de las piedras, sino una construcción elaborada por la mente del niño. La experiencia es esa construcción y otras similares, y se le llama lógico matemática para distinguirla de la experiencia física. El conocimiento se elabora a partir de las acciones en relación con los objetos.

4) Transmisión social. En la transmisión social el conocimiento proviene de las personas, o dicho de otra manera, la adquisición del conocimiento de otra persona se produce mediante la transmisión social.
5) Equilibración. Éste en sí integra a los otros cuatro factores. En realidad es parte de ellos, hasta tal punto que es difícil concebir la equilibración como un factor separado de los demás. Piaget concibe el desarrollo intelectual como un proceso continuo de organización y reorganización de estructuras, de modo que cada nueva estructura integre en sí misma la anterior. A pesar de que este proceso es continuo, sus resultados no lo son; además, resultan diferentes en su aspecto cualitativo a lo largo del tiempo.

La unidad de conocimiento más importante para Piaget es la operación, la cual es una regla dinámica especial que se deriva de las acciones de los niños con los objetos y que conlleva el conocimiento de la capacidad de uno para invertir un estado de cosas en la acción o en el pensamiento. La capacidad de planear mentalmente una serie sucesiva de acciones y luego retroceder paso a paso hasta el inicio de la misma, es también una operación.

Piaget decidió dividir el curso total del desarrollo en unidades denominadas periodos o estadios. Cada una de estas etapas del desarrollo se describe en función de lo mejor que el niño puede hacer en esa etapa. Pero creemos que habrá conductas aprendidas prematura o tardíamente.

La teoría de Piaget supone que existe una serie sucesiva de etapas en el desarrollo cognoscitivo, por lo que postula la existencia de cuatro:

1) la sensoriomotora, de cero a dieciocho meses aproximadamente;
2) la preoperatoria, de los dieciocho meses a los siete años aproximadamente;
3) la de las operaciones concretas, de los siete a los doce años aproximadamente, y
4) la de las operaciones formales, de los doce años aproximadamente en adelante.

Las etapas son continuas, ya que cada una de ellas se levanta sobre la anterior y se deriva de ella. Piaget piensa que en el proceso ninguna etapa es prescindible, puesto que en cada una de ellas toma algo de la realización de la anterior o anteriores (Cueli et al, 1997).

Según Piaget, todo conocimiento y en especial el entendimiento lógico-matemático, que constituyó su principal centro de atención, se deriva en primera instancia de las acciones propias sobre el mundo.

De acuerdo a Gardner (2001), a continuación describimos brevemente el desarrollo lógico matemático del estadio de las operaciones concretas al de las operaciones formales piagetianos del desarrollo intelectual.

1) Estadio sensoriomotriz (0-18 meses)
2) Estadio preoperatorio (18 meses a 7 años)

3) Estadio de las operaciones concretas (7 a 12 años)

Las actividades descritas en el estadio preoperatorio pueden ser realizadas físicamente en el mundo material: es decir, el infante manipula los dulces o canicas al involucrarse en operaciones numéricas. Sin embargo, semejantes actividades también se pueden realizar en forma mental. Y después de algún tiempo, las actividades de hecho se internalizan. El infante no necesita tocar los objetos; sencillamente puede hacer las comparaciones, sumas o restas requeridas en su pensamiento y de todos modos obtendrá la respuesta correcta. Estas actividades (físicas o mentales) siguen estando restringidas a objetos físicos; a éstas Piaget las llama operaciones concretas.

El niño es capaz de realizar la operación entendida como acción interiorizada que ha sido posible después de la acción real con los objetos y la reflexión sobre ella. Esto implica que las estructuras específicas de la inteligencia en esta época –la forma de conocer, el pensamiento mismo- se han interiorizado suficientemente, por un lado las representaciones y por otro las acciones como para realizar a nivel interno operaciones con imágenes de las cosas externas y sus acciones sobre éstas. Es característico de este estadio un tipo de pensamiento atado siempre a la realidad fenoménica, a la cual necesita manipular directamente con la imaginación, con una constatación de los fenómenos reales como única manera de entenderlos y sin posibilidad de operar mentalmente con los conceptos de estos fenómenos. A lo largo de este estadio el niño va adquiriendo las nociones de ciertas cantidades físicas, de ciertas cualidades del continuo (longitud, tiempo, masa, área, velocidad, fuerza, etc.) lo que presupone la adquisición de estas magnitudes. La operación con distintas cualidades físicas del continuo y la adquisición y extensión de la noción de número natural llevan a desarrollar una primera noción de medida y de proporcionalidad. Esta aparece en una primera idea de fracción como comparación entre dos números para expresar cambios de unidad y también como operadores, en la expresión de un cambio.

4) Estadio de las operaciones formales (12 años en adelante)

En esta etapa el niño desarrolla el razonamiento y la lógica para resolver toda clase de problemas, y las estructuras cognoscitivas alcanzan su madurez, es decir, su potencial de raciocinio y pensamiento se encuentra en su máxima expresión, siempre y cuando las operaciones formales estén bien desarrolladas.

El adolescente adquiere la capacidad de hacer operaciones mentales formales. Ahora no sólo puede operar con los objetos mismos, y no sólo con imágenes mentales o modelos de estos objetos, sino también con palabras, símbolos, o series de símbolos (como ecuaciones) que representan objetos, además de realizar actividades con objetos. Puede expresar un conjunto de hipótesis e inferir las consecuencias de cada una. En donde en una ocasión sus actividades físicas transformaron los objetos, ahora las operaciones mentales transforman conjuntos de símbolos. En donde antes el infante sumó canicas a cada montón y declaró confiado que los totales se mantienen iguales, ahora agrega símbolos a cada miembro de una ecuación algebraica, con el conocimiento seguro de que se ha conservado la equivalencia.

Estas capacidades para manipular símbolos son “esenciales” en ramas superiores de las matemáticas, en las que los símbolos representan objetos, relaciones, funciones u otras operaciones. Los símbolos que deben ser manipulados también pueden ser palabras, como en el caso del razonamiento silogístico, la formulación de hipótesis científicas y otros procedimientos formales.

El pensamiento separado del nivel de lo concreto se extiende con libertad al campo de lo posible a través de las nuevas operaciones de la lógica de proposiciones que se adquiere paulatinamente. Ante un fenómeno cualquiera, antes de hallar la causa concreta que lo produce, el niño se sitúa en el plano hipotético-deductivo y, mediante las operaciones proposicionales, va separando las hipótesis verdaderas de las operaciones proposicionales, y

> separa las hipótesis verdaderas de las que no lo son hasta dar con la específica del caso que estudia. Hay que tener en cuenta que la deducción no trabaja sobre los datos que se ven, sino que trabaja sobre hipótesis. Este es el razonamiento hipotético-deductivo. A nivel de lenguaje, no sólo ha adquirido la posibilidad de formular más proposiciones (hacer más frases) sino de combinarlas entre sí (más frases y más relacionadas). Ahora el niño disocia la forma del contenido, y gracias a las operaciones proposicionales, puede combinarlos con todo el conjunto de posibilidades. Las operaciones formales son, como dice Piaget, operaciones de segunda potencia, o sea operaciones sobre operaciones concretas (así, por ejemplo la proporción es una relación de relaciones). Presuponen las operaciones del estadio anterior que quedan agrupadas en estructuras superiores que las integran en un solo conjunto. (citado en Fiol y Fortuna, 1990).

En este periodo se producen asociaciones de conceptos que pueden dar lugar a nuevos conceptos, es decir, es posible formar ideas de otras ideas. Esta capacidad para manejar conceptos y reconocer relaciones entre ellos, tiene lugar al comienzo de esta etapa educativa de enseñanza secundaria obligatoria. Piaget sostiene que la adquisición de conceptos tiene lugar en periodos evolutivos que son paralelos a algún tipo de maduración fisiológica y que denomina estadios.

En la propuesta piagetiana, esta última etapa denominada formal está caracterizada por presentar los siguientes aspectos (adaptados de Piaget for Educators, p. 139 citado en Macnab y Cummine, 1992).

- Abstracción reflexiva. La habilidad para razonar sin referencia a una experiencia concreta.
- Pensamiento proposicional. La habilidad para pensar teóricamente en las consecuencias de los cambios sufridos por los objetos y acontecimientos.
- Lógica combinatoria. La habilidad para razonar acerca de combinaciones de variables en un problema.

- Razonamiento inductivo. Capacidad para construir modelos generales a partir de ejemplos particulares.
- Razonamiento deductivo. Razonamiento a partir de proposiciones generales hasta las conclusiones particulares.

En este proceso existe un grado de solapamiento entre estos cinco aspectos, y algunos pueden presentar una extensión en el joven. Pero tomados globalmente, indican bastante bien los diferentes estilos de pensamiento implicados en la transición desde modelos de pensamiento concreto a formales. Macnab y Cummine (1992) manifiestan que el pensamiento operacional concreto es el tipo de pensamiento característico de muchos niños sobre los 10 años aproximadamente, pero en muchos casos se extiende hasta la adolescencia y aún más allá.

Por tanto pensamos que una fuente importante de dificultades en el aprendizaje es el conflicto causado en el niño cuyo pensamiento está todavía en la etapa operacional concreta pero al que se le requiere que haga frente a operaciones formales. Es decir, la evolución cognitiva del individuo desde el pensamiento concreto al formal es función del tiempo. Por tanto si un estudiante no ha alcanzado la etapa apropiada en su evolución para entender una cierta idea o un proceso, entonces es poco aconsejable tratar de enseñarle, pues el proceso de enseñanza no puede ir más de prisa que el ritmo tomado por la evolución cognitiva, aunque la materia sea bien enseñada como pueda serlo.

Piaget, después de haber realizado observaciones, se dio cuenta de que ciertas conductas se repetían regularmente en determinadas etapas de la vida del hombre, por lo que, en su afán de tratar de entender el desarrollo de la inteligencia, dividió secuencialmente este desarrollo en los periodos que acabamos de escudriñar, los cuales van regularmente a la par con el crecimiento cronológico del niño. Cabe aclarar que hay niños que alcanzan un determinado nivel de desarrollo antes o después que otros. Es decir que desde nuestra perspectiva, la forma de dividir las etapas no siempre se cubre en realidad de manera tajante, como si a partir de una edad fija forzosamente se tenga que iniciar la etapa siguiente, por lo que algunas características de una etapa determinada pueden presentarse, aunque el niño no se encuentre cronológicamente hablando en esta etapa del desarrollo. Por ejemplo se han hecho estudios en Gran Bretaña (véase Wollman y Lawson, 1978, citado en Fiol y Fortuny, 1990) que muestran que mucho más de la mitad de los adolescentes no han alcanzado el estadio de las operaciones formales. En realidad reafirman lo que se observa en los últimos cursos de educación secundaria, la mayoría de los alumnos no están en las operaciones formales, sino quizás en las operaciones concretas o en fase de transición de un estadio a otro. Por tanto vale la pena tener en cuenta que una persona puede utilizar modos de pensamiento formal en relación a ideas que le son familiares y en cambio utilizar el razonamiento concreto en otras.

Sleeper (citado por Carretero, 1993) ilustra la teoría del desarrollo cognitivo de Piaget, como el pensamiento en términos de su estructura más que de su contenido. Se centra en las reglas mediante las cuales un individuo procesa la información, en la calidad de sus operaciones mentales y en la forma más que en el contenido de los juicios. El pensamiento debe ser analizado de la misma manera. Para aplicar la teoría del desarrollo cognitivo al proceso de aprendizaje, el educador debe considerar los aspectos centrales de su asignatura dentro de un marco evolutivo. Primero debe identificar los elementos conceptuales más destacados, y después especificar la manera en que los estudiantes de diferentes niveles entienden los contenidos de la asignatura.

En suma, la teoría de Piaget trata de explicar específicamente el proceso de desarrollo, referido principalmente a la formación de conocimientos; dice que el conocimiento se adquiere por medio de una relación activa con el mundo, y por tanto “el crecimiento cognoscitivo del niño es resultado de la utilización de las capacidades que maduran para relacionarse con las personas y los objetos” (citado en Cueli, 1997). Considera que desde el principio las conductas son complejas; estas conductas se van construyendo y por tanto cambian a lo largo del desarrollo.

El modelo de crecimiento de Piaget es biológico, pues aunque afirma que la maduración regula la aparición de las funciones cognitivas, no puede efectuarse ningún crecimiento intelectual sin un medio que le preste apoyo, es decir que desde nuestra perspectiva, el individuo requiere la interacción con personas y no sólo con objetos.

Entre los principales rasgos de la postura de Piaget tenemos que:

- El desarrollo es un proceso constructivo
- Hay una interacción continua entre organismo y medio
- El sujeto elabora estructuras
- Los procesos de asimilación, acomodación y equilibrio
- Se dan por etapas llamadas estadios

1.2.2 VIGOTSKY

La otra postura, encabezada por Vigotsky, afirma por el contrario que el crecimiento personal es más bien el resultado de un proceso de aprendizaje en buena medida externo a las personas, de manera que la educación debe orientarse a promover y facilitar la realización de aprendizajes culturales específicos.

De acuerdo con lo anterior los vigotskianos hablan del pensamiento compartido, del conocimiento conjunto, de la participación guiada, y muchos consideran que la posición de Vigotsky es constructivista. Esto es porque concibe al sujeto como un ser eminentemente social y al conocimiento como un producto social, atribuye una importancia básica a las relaciones sociales, y considera que la educación debe promover el desarrollo sociocultural y cognitivo del alumno. Vigotsky comprobó que el alumno aprende eficazmente cuando lo hace en un contexto de colaboración e intercambio con sus compañeros (Carretero, 1993).

La propuesta de Vigotsky se fundamenta en la creación de Zonas de Desarrollo Próximo, las cuales se presentan en un contexto interpersonal (maestro-alumno), lo que un niño es capaz de hacer hoy con ayuda de alguien, mañana podrá hacerlo por sí mismo. Por lo cual, el maestro toma un papel más directivo y provee un contexto de apoyo (andamiaje) amplio. A medida que aumenta la competencia del alumno en este dominio, reduce su participación sensiblemente (citado en Reyes et al, 1999). La zona de desarrollo próximo puede verse como “la distancia entre el nivel del desarrollo real del niño tal y como puede ser determinado a partir de la resolución independiente de problemas y el nivel más elevado de desarrollo potencial, tal y como es determinado por la resolución de problemas bajo la guía del adulto o en colaboración con sus iguales más capacitados” (citado en Orobio y Ortiz, 1997, p. 70).

En esta investigación nos hemos interesado en lo que Vigotsky llama Zona de Desarrollo Actual, la cual se entiende como el proceso culminado hasta el momento, como los ciclos que ya se han realizado. Lo que pretendemos indagar es hasta dónde el individuo ya llegó en términos de un recorrido que, suponemos, habrá de realizar. Pues cuando decimos que un individuo ya sabe resolver determinado problema, nos referimos a su capacidad de realizarlo solo, sin ayuda de otras personas.

Vigotsky (citado en Delval, 1997a) afirma la importancia que tiene la instrucción formal en el crecimiento de las funciones psicológicas superiores, la memoria, la inteligencia y especialmente el lenguaje- que se adquieren primero en un contexto social y luego se internaliza. Este autor se interesa principalmente por los determinantes sociales del desarrollo, manteniendo que el desarrollo del individuo es indisociable de la sociedad en la que vive, que le transmite formas de conducta y de organización del conocimiento, que el sujeto tiene que interiorizar. Es decir, Vigotsky defiende que, necesariamente, las funciones psicológicas superiores aparecen al inicio en su forma externa, planteamiento que concreta en los siguientes términos: “Toda función psicológica superior ha sido externa porque ha sido social en algún momento anterior a su transformación en una auténtica función psicológica interna” (citado en Orobio y Ortiz, 1997).

De acuerdo con la teoría de Vigotsky (citado en Cueli et al, 1997) las habilidades intelectuales o patrones de pensamiento que una persona muestra no son determinadas en forma primaria por factores innatos –inteligencia heredada o habilidad mental-, sino que son producto de las actividades practicadas en las instituciones sociales en donde el individuo crece. Por tanto la historia de la sociedad en la cual un niño crece y la historia de su desarrollo, en términos de sus experiencias en esa sociedad, son ambas de gran importancia para modelar los estilos que usará para pensar.

Entre las investigaciones que Vigotsky realizó entre pensamiento y lenguaje, concluyó que el pensamiento del niño y el habla comienzan como dos funciones separadas, no necesariamente conectadas entre ellas, pues son como dos círculos que no se tocan. Uno representa el pensamiento no verbal; el otro, el habla no conceptual. Conforme el niño crece, los círculos se unen y se sobreponen; esto significa que el niño empieza a adquirir conceptos que tienen etiquetas de palabras. Un concepto significa una abstracción, una idea que no representa un objeto particular, sino más bien una característica común compartida con diversos objetos. Los dos círculos nunca se sobreponen completamente, pero la parte en común llega a ser prominente si el niño se desarrolla particularmente en un medio cultural elevado. En realidad siempre queda algún pensamiento no verbal y algún habla no conceptual. Desde esta perspectiva, Vigotsky admitió que su modelo de interacción no era aún perfectamente claro, pero dijo que: “El progreso en pensamiento y el progreso en el habla no son paralelos. Sus dos curvas de crecimiento se cruzan y se encuentran. Pueden enderezarse y correr paralelas de lado a lado; aún unirse durante algún tiempo, pero se volverán a separar finalmente” (ibidem, p. 423).

Vigotsky creyó en la educación formal e informal del individuo mediante el lenguaje, el cual tiene una fuerte influencia en el nivel del pensamiento conceptual que alcanza. Y al ampliar su punto de vista más allá del desarrollo del niño, sugirió que los pasos mediante los cuales el pensamiento y el lenguaje del niño evolucionan son semejantes a aquellos que han propiciado que la humanidad evolucionase durante milenios.

Una diferencia fundamental que subyace a la línea de razonamiento sobre los cambios cualitativos y el papel de la mediación es la distinción entre funciones psicológicas elementales y superiores. La estrategia general de Vigotsky consistía en examinar cómo las funciones psicológicas como la memoria, la atención, la percepción y el pensamiento aparecen primero en forma primaria para luego cambiar a formas superiores. Vigotsky distingue entre la línea de desarrollo natural y la línea de desarrollo social o cultural (citado en Wertsch, 1995).

Los estudios de Vigotsky le permitieron concluir que el desarrollo del pensamiento conceptual es en realidad un modo de organizar el medio, abstraer y etiquetar ciertas cualidades compartidas por dos o más fenómenos.

De acuerdo a Vigotsky, los principales pasos que sigue el niño para organizar los fenómenos percibidos son:

1) pensamiento en grupos desorganizados
2) pensamiento en categorías
3) pensamiento en conceptos.

Etapa 1. El pensamiento en grupos desorganizados. Durante este periodo agrupa elementos y puede asignarles etiquetas, con base en que hay uniones por casualidades en la percepción del niño. Esto se puede realizar mediante:

a) Reagrupamiento por ensayo y error.
b) Organización del campo visual
c) Grupos rearreglados.

Etapa 2. Pensamiento en categorías. Los objetos individuales se unen en la mente del niño, no sólo por sus impresiones subjetivas, sino por medio de uniones que existen entre los objetos. En una categoría, las uniones entre los componentes son hasta cierto grado concretos y factuales, en lugar de abstractos y lógicos. Cinco tipos de categorías se suceden, uno tras otro, durante esta etapa del pensamiento:

a) Categorías asociativas, basadas en cualquier factor de unión que el niño percibe, como color, figura o cercanía de un objeto.
b) Colecciones, por categorías, que contienen cosas que se complementan, una a la otra, para hacer un todo. Éstas se agrupan por contraste, en vez de similaridad.

c) Categorías en cadena, que involucran un conjunto consecutivo de ítems individuales, con una unión significativa y necesaria entre un eslabón y el siguiente, como en el juego de dominó.
d) Categorías difusas, que se dan en agrupamientos donde existe fluidez en el atributo que une los elementos individuales.
e) Categorías de seudoconcepto, que a primera vista aparentan agruparse con base en el pensamiento conceptual verdadero; pero cuando la etiqueta puesta por el niño es objetada por el examinador el menor muestra que es incapaz de racionalizar la condición de agrupamiento adecuadamente.

Etapa 3. Pensamiento en conceptos. En el umbral de esta etapa final se da el desarrollo de pensamiento en dos caminos: síntesis y análisis, que convergen para hacer posible el pensamiento conceptual.

a) El primer camino se establece mediante una secuencia de categorías, pues la principal función del pensamiento complejo es el agrupamiento o la síntesis de los fenómenos que tienen aspectos en común.
b) El segundo camino lleva al pensamiento conceptual, al seguir el proceso de separar o analizar fenómenos para abstraer elementos de ellos.

Vigotsky localizó el principio de la abstracción en el punto donde el niño identifica modos por cuyo medio los objetos son similares en grado máximo, esto es, iguales en la mayor cantidad de maneras posibles.

Durante este proceso de desarrollo mental, el lenguaje ha servido como una herramienta significativa para la actividad de pensamiento. La operación intelectual de formar conceptos, de acuerdo con Vigotsky, es guiada por el uso de palabras como medio activo para centrar la atención, para abstraer ciertas cosas, sintetizándolas y simbolizándolas mediante un signo. Así pues, a través de los siglos se ha pensado que el lenguaje que emite una persona, tanto oral como escrito, sirve como una ventana por la cual se ven las operaciones de su mente (citado en Cueli et al, 1997).

El principal rasgo de la postura de Vigotsky es que el desarrollo es indisociable del ambiente social.

Creemos que el desarrollo no puede concebirse al margen del aprendizaje, ya sea escolar o informal. Es decir, si la adquisición del pensamiento abstracto o formal en el estudiante depende en gran parte del sujeto, cabe preguntarse si al menos buena parte de esa experiencia se adquiere en la escuela.

Esta pregunta la abordaremos en un área específica del conocimiento: las matemáticas, pues éstas son un resultado del intento del hombre por comprender y explicarse los sucesos que acontecen a su alrededor. El área particular de las matemáticas en la que trabajaremos es el razonamiento proporcional.

1.3 ACERCAMIENTO A LAS MATEMÁTICAS

Los años de enseñanza secundaria constituyen un eslabón precedido por la enseñanza primaria y seguido por otro que conduce a la enseñanza media superior o a la inserción en el mundo del trabajo. Debería así preparar, aunque no con carácter inmediato, para ambas posibilidades, teniendo muy presente cuál es la situación de los alumnos a quienes va dirigida: características individuales, conocimientos adquiridos, aptitudes desarrolladas, valores promovidos, intereses y actitudes ante el aprendizaje de la asignatura (en este caso de matemáticas), proyectos personales, escolares y profesionales.

Las matemáticas son un producto del quehacer humano y su proceso de construcción está sustentado en abstracciones sucesivas. Muchos desarrollos importantes de esta disciplina han partido de la necesidad de resolver problemas concretos. Y como ejemplo de ello tenemos que los números tan familiares para todos, surgen de la necesidad de contar y son también una abstracción de la realidad que fue desarrollándose durante el tiempo.

La enseñanza matemática en la educación obligatoria tiene como una de sus finalidades fundamentales la de dotar a los alumnos de una competencia matemática adecuada para permitirles enfrentarse a las demandas de su entorno social y cultural en sus distintas esferas: educativa, laboral, privada, social y comunitaria. Esta finalidad global implica que la educación matemática puede y debe contribuir tanto al desarrollo como a la socialización de los alumnos; y en particular, que debe contribuir a la adquisición por parte de los alumnos de un conjunto amplio de capacidades necesarias para actuar como ciudadano competente, implicado, crítico y activo: capacidades de pensamiento autónomo e independiente, de exploración e indagación, de pensamiento divergente y creativo, de identificación y de resolución de problemas diversos, en situaciones extra-matemáticas reales, de análisis y valoración de los usos y papeles de las matemáticas en el contexto social (S.E.P., 2004a).

De acuerdo a Valiente (2000), las matemáticas proveen a las personas de conceptos, procedimientos y formas de razonamiento, les ayudan a comprender lo que hay en su entorno y en otras disciplinas. Desde esta perspectiva, la enseñanza de las matemáticas en los niveles básicos tiene como propósitos:

- Transmitir al alumno parte del acervo cultural de la sociedad.
- Desarrollar nociones y conceptos que les sean útiles para comprender su entorno.
- Proporcionar un conjunto de procedimientos e instrumentos del pensamiento que les permitan el acceso al conocimiento y actividad humana.

En la escuela secundaria el aprendizaje de las matemáticas deberá favorecer en el estudiante: la apreciación de su trabajo personal, su capacidad para explorar y buscar soluciones a problemas, y su aptitud para comunicar, analizar y justificar sus afirmaciones (ibidem).

Uno de los objetivos de la enseñanza escolarizada es tratar con conocimientos especializados. Hasta hace poco se consideraba que el profesor es el protagonista inicial del proceso de enseñanza-aprendizaje y que el alumno se limita a aceptar pasivamente aquello que se le propone, sin tener una participación activa en la construcción de lo que aprende. Hoy sabemos que los conocimientos así adquiridos se olvidan fácilmente y no quedan integrados en las estructuras lógicas de los alumnos ni parecen fortalecer su pensamiento matemático. Como consecuencia, estos conocimientos sólo pueden utilizarse en condiciones muy similares a aquellas en las que fueron recibidos. Actualmente se propone una forma de aprender significativamente: que el alumno reconstruya los conceptos, que el aprendizaje se base en la actividad creadora y en el descubrimiento de las nociones por parte del alumno, y que sea él quien descubra y proponga formas de resolver problemas (Cantoral et al, 2000).

En la construcción de los conocimientos matemáticos, los individuos también parten de experiencias concretas. Paulatinamente, y a medida que van haciendo abstracciones, pueden prescindir de los objetos físicos. La comunicación, la interacción y la confrontación de puntos de vista ayudan al aprendizaje y a la construcción de conocimientos.

De acuerdo a Sánchez y Calviño (1993) la enseñanza de las matemáticas en la etapa de Educación Secundaria obligatoria debe tener como objetivo contribuir a desarrollar en los alumnos y alumnas las capacidades siguientes:

- Utilizar las formas de pensamiento lógico para formular y comprobar conjeturas, realizar inferencias y deducciones, y organizar y relacionar informaciones diversas relativas a la vida cotidiana y a la resolución de problemas.
- Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos, y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados.
- Actuar en situaciones cotidianas y en la resolución de problemas de acuerdo con modos propios de las actividades matemáticas tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la

flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.

- Conocer y valorar las propias habilidades matemáticas para afrontar las situaciones que requieran su empleo o que permitan disfrutar con los aspectos creativos, manipulativos, estéticos o utilitarios de las matemáticas.

Los programas de matemáticas en México tienen como propósito central, que los alumnos aprendan a utilizar las matemáticas para resolver problemas, no solamente los que se resuelven con los procedimientos y técnicas aprendidos en la escuela, sino también aquellos cuyo descubrimiento y solución requiere de la curiosidad y la imaginación creativa (S.E.P., 1993).

Es decir, la enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria oficial tiene como propósito general el desarrollo de las habilidades operatorias, comunicativas y de descubrimiento de los alumnos. Para ello, éstos deben desarrollar sus capacidades para:

- Adquirir seguridad y destreza en el empleo de técnicas y procedimientos básicos a través de la solución de problemas.
- Reconocer y analizar los distintos aspectos que componen un problema.
- Elaborar conjeturas, comunicarlas y validarlas.
- Reconocer situaciones análogas (es decir, situaciones que desde un punto de vista matemático tienen una estructura equivalente).
- Escoger o adaptar la estrategia adecuada para la resolución de un problema.
- Comunicar estrategias, procedimientos y resultados de manera clara y concisa.
- Predecir y generalizar resultados.
- Desarrollar gradualmente el razonamiento deductivo (ibidem)

En la escuela secundaria abierta, el modelo educación para la vida y el trabajo tiene el propósito general de desarrollar y favorecer competencias básicas para que las personas jóvenes o adultas resuelvan problemas tanto de su vida cotidiana como de las ciencias, la tecnología y el arte (INEA, 2001).

Entre las competencias básicas que se desarrollan en este modelo de educación para la vida y el trabajo, en el área de las matemáticas se encuentran:

- Resolución de problemas: se espera que la persona joven o adulta utilice sus propias ideas y maneras de resolver un problema usando dibujos, palabras, números y figuras.
- Razonamiento matemático: se espera que la persona joven o adulta platique, escriba y utilice sus ideas matemáticas para apoyar sus conclusiones al proponer la solución a un problema (ibidem).

Desde esta perspectiva, cabe resaltar la importancia de la utilización de las matemáticas: nos sirven como instrumento para resolver no sólo problemas de índole académico sino también cotidianos en todos los ámbitos de la vida: desde el reparto de juguetes entre los niños, hasta cuestiones a las que se enfrenta el individuo en la vida cotidiana, laboral, profesional, etc.

Por otro lado la psicología ha tenido influencia en la didáctica de las matemáticas, porque un gran número de psicólogos ha orientado su investigación hacia el estudio de los procesos de adquisición de la matemática.

Si quisiéramos describir el proceso de desarrollo del pensamiento matemático tendríamos que considerar que éste suele interpretarse de distintas formas:

- Se le entiende como una reflexión espontánea que los matemáticos realizan sobre la naturaleza de su conocimiento y sobre la naturaleza del proceso de descubrimiento e invención en matemáticas.
- Se le entiende como parte de un ambiente científico en el cual los conceptos y las técnicas matemáticas surgen y se desarrollan en la resolución de tareas.

- Se le entiende como parte del ambiente cotidiano, es decir que se desarrolla en todos los seres humanos en el enfrentamiento de la vida diaria a múltiples tareas (Cantoral et al, 2000).

El currículo de matemáticas y los métodos de enseñanza han sido inspirados durante mucho tiempo sólo por ideas que provienen de la estructura de las matemáticas formales y por métodos didácticos fuertemente apoyados en la memoria y en la algoritmia. En estas circunstancias, con frecuencia el estudiante se encuentra imposibilitado de percibir los vínculos que tienen los procedimientos con las aplicaciones más cercanas a la vida cotidiana; y se priva entonces de experimentar sus propios aprendizajes en otros escenarios distintos de los que provee el salón de clase (ibidem).

La teoría psico-pedagógica más en boga, el constructivismo considera que el aspecto más importante a tener en cuenta consiste en conocer lo que el alumno sabe. Esto supone identificar el repertorio de conocimientos del alumno, que sean relevantes para lo que queremos enseñar. Y la razón de esto parece estar en el modo en que se organiza la información en el cerebro, donde existe una jerarquía conceptual modificable en la que conocimientos menos importantes están unidos a otros más amplios y generales. El aprendizaje, se dice entonces, es significativo si la nueva información se relaciona con los conceptos ya conocidos o con otro que reemplaza a los anteriores.

Otro aspecto importante en el proceso de aprendizaje es la motivación. Orobio y Ortiz (1997) mencionan que para motivar a los estudiantes es menester proponerles una situación problemática para que cada uno la asuma según sus potencialidades y, de esta manera, llegar a ser lo que todavía no es, lo que en términos de la escuela soviética se denomina zona de desarrollo próximo.

El hombre, como el universo, está en continua evolución. El aprendizaje es una de las principales causas de la evolución del hombre. Emplear, en cada momento, los útiles más apropiados para hacer general este aprendizaje es el problema primordial de la enseñanza. De este modo, el currículo se entiende como el conjunto de conocimientos que socialmente se considera que tienen más valor para la mayoría de los estudiantes, aquí y ahora, y de los métodos más eficaces para la transmisión de estos conocimientos (Sánchez y Calviño, 1993).

Los objetivos generales de etapa no son objetivos evaluables. No se pretende con ellos establecer conductas observables, sino capacidades o competencias que pueden manifestarse de muy diversas maneras. En realidad, persiguen la consecución de capacidades cognitivas, afectivas, motrices, de relación interpersonal y de inserción social, entre las cuales la siguiente:

- Elaborar y desarrollar estrategias personales de identificación y resolución de problemas en los principales campos del conocimiento mediante la utilización de unos hábitos de razonamiento objetivo, sistemático, riguroso y aplicarlas espontáneamente a situaciones de la vida cotidiana. (Ibidem).

1.3.1. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

En los últimos años la resolución de problemas en matemáticas ha adquirido una gran atención, hasta el punto de ser considerado el aprendizaje de la resolución de problemas como la principal razón del estudio de matemáticas (Peralta,1995).

Como es bien sabido las matemáticas permiten resolver problemas en diversos ámbitos, como el científico, el técnico, el artístico y la vida diaria. Si bien todas las personas construimos conocimientos fuera y dentro de la escuela que nos permiten enfrentar dichos problemas, estos conocimientos no bastan para actuar eficazmente en la práctica diaria, pues los procedimientos generados en la vida cotidiana para resolver situaciones problemáticas muchas veces son largos, complicados y poco eficientes, si se les compara con los procedimientos convencionales que permiten resolver las mismas situaciones con más facilidad y rapidez. Por tanto el contar con las habilidades, los conocimientos y las formas de expresión que la escuela proporciona permiten la comunicación y comprensión de la información matemática presentada a través de medios de distinta índole.

Si bien es evidente que las matemáticas deben estudiarse en la escuela, es conveniente enfatizar su valor social, que va mucho más allá que su mera utilidad escolar. Las matemáticas se estudian fundamentalmente porque, en la vida real, son imprescindibles para el funcionamiento de nuestra sociedad y no simplemente porque sean una asignatura escolar.

La utilidad de la matemática en la vida cotidiana, la ciencia y la tecnología tiene una relación directa y estrecha con los problemas. También el desarrollo del razonamiento, de capacidades de análisis y síntesis y de la inteligencia está vinculado indiscutiblemente a la resolución de problemas. En todas las culturas se pueden identificar algunas actividades como contar, medir, localizar, diseñar y explicar, que están vinculadas con problemas matemáticos importantes.

De acuerdo a Mancera (2000), un problema es una situación que nos hace pensar, y cuando estamos frente a un problema:

- ♦ No sabemos de manera inmediata la forma en la que podemos resolverlo, es decir, no podemos saber de manera inmediata cómo vamos a proceder, no será posible aplicar de manera inmediata un procedimiento rutinario o una fórmula.
- ♦ Encontrar la solución a un problema requerirá poner en juego todas nuestras capacidades y conocimientos, es decir, dispara varios dispositivos mentales, como la búsqueda de analogías, simulaciones, la transformación de parte del enunciado, o la traducción a situaciones aritméticas, algebraicas o geométricas.
- ♦ Podemos hacer algo para resolverlo, esto es, no inmoviliza, se piensa que se puede abordar y trabajar con las posibilidades personales. Si se tiene la idea de que no se puede hacer nada, entonces no representará un problema, simplemente es algo que se planteó pero no se asume.

En la enseñanza de las matemáticas, la concepción que se tiene sobre los problemas es variada. Algunos profesores piensan y los conceptualizan como acertijos, ejercicios, aplicaciones y otras variantes. Independientemente de la concepción que se sustente, los problemas deben ser una situación que despierte el interés del estudiante (Escarreño y Mancera, 1993), además de ser el objeto mismo del conocimiento y el generador de toda la información matemática. Un enunciado no es un problema cuando la respuesta es conocida con anterioridad por el alumno, pero tampoco cuando no puede arribar a ella debido a que no tiene los elementos de conocimiento necesarios.

Un problema es el enfrentamiento con situaciones novedosas y desconocidas. Además los problemas matemáticos proporcionan una oportunidad para repasar y consolidar importantes ideas matemáticas así como un foco en los procesos de resolución de problemas. Los problemas pueden ser una introducción para ver las conexiones matemáticas y lograr una comprensión de los conceptos matemáticos.

Los alumnos que pasan por la escuela están cada vez más habilitados a trabajar con ejercicios rutinarios y estereotipados hasta el punto que no piden que las situaciones que describen los ejercicios tengan sentido. A continuación describimos las diferencias entre ejercicios y problemas:

- ❖ En los ejercicios el alumno dispone de procedimientos de tipo automático: reglas, algoritmos, fórmulas que permiten obtener una respuesta de manera más o menos inmediata. Realizar ejercicios comporta la aplicación de estas técnicas automatizadas a unas tareas que ya son conocidas por el alumno, por ejemplo aplicar el algoritmo de la suma o aplicar a una tarea una fórmula previamente explicada por el profesor.
- ❖ En los problemas la situación es nueva para el alumno y se requiere de algún proceso de reflexión o de toma de decisiones sobre la secuencia de pasos a seguir para resolverlo. Resolver un problema comporta utilizar las técnicas ya conocidas de modo estratégico para alcanzar una solución. La resolución de problemas requiere además, por el hecho de remitir a situaciones nuevas y abiertas, estrategias, conceptos y actitudes que lleven al alumno a persistir en la búsqueda de una solución, implicando así una mayor demanda cognitiva y motivacional (Resnick y Ford, 1990).

En muchos casos los problemas que se les proponen a los alumnos tienen un carácter marcadamente artificial y cerrado en sí mismo, no remiten a tareas matemáticas con sentido y sirven esencialmente a objetivos de utilización más o menos directa de fórmulas o algoritmos previamente presentados, por ejemplo en muchos casos se presentan problemas del tipo resolver una ecuación cuadrática.

Varios autores se han dedicado a investigar acerca de la enseñanza de resolución de problemas matemáticos. Tenemos por una parte a Polya (citado en Mancera, 2000) quien considera cuatro etapas en los procesos de resolución de problemas.

- Comprensión del problema. En este paso se trata de entender bien el problema planteado analizando detalladamente el enunciado hasta fijar con precisión la incógnita, los datos y las condiciones, estudiando la compatibilidad, suficiencia y unicidad de los mismos.
- Concepción de un plan. En este momento, el estudiante se convierte en un investigador en pequeño y debe de intentar desarrollar al máximo su capacidad creativa para ello. Tendrá que acudir a la intuición, la perspicacia y la imaginación que le lleven a conseguir el resultado adecuado que constituya la clave para después de seguir los pasos correctos llegar a la solución.
- Ejecución de un plan. una vez que se ha ideado el plan de resolución, hay que ejecutarlo, con las demostraciones y cálculos oportunos.

Desde nuestra perspectiva el método de Polya propicia la actitud investigadora del estudiante mediante el descubrimiento basado en su propio esfuerzo, pues el procedimiento de resolución de problemas de este autor es un excelente plan detallado para cumplir con el objetivo. Sin embargo, se debe tener en cuenta el trabajo creador de cada estudiante, ya que es algo muy personal. Por tanto podríamos decir que en la resolución de problemas debemos tener una habilidad práctica, como la natación: sólo se puede aprender mediante la imitación y la práctica.

Por su parte, Schoenfeld (ibidem) reflexiona sobre los aspectos que intervienen en la resolución de problemas:

- Los recursos: que se refieren a los contenidos matemáticos.
- La heurística: es decir, las estrategias que se poseen.
- El control: no basta poseer conocimientos y estrategias, es necesario saber cuándo y cómo utilizarlas.
- El sistema de creencias, es decir las concepciones que se poseen sobre las matemáticas, sobre sí mismo, etc.

Fenton (citado en Priestley, 1999) describe seis habilidades principales que se deben llevar a cabo en la tarea de solución de problemas:

1. Reconocer un problema a partir de ciertos datos.
2. Formular hipótesis para la solución con base a la información con que cuenta.
3. Reconocer las implicaciones lógicas de las hipótesis, es decir organizar la información ya sea mediante la comparación, clasificación u ordenación secuencial de la información con que cuenta.
4. Reunir los datos con base en las implicaciones lógicas. Proceso de generación de la información ya sea mediante la experimentación, investigación, observación o el cálculo.
5. Interpretar los datos. Proceso de utilización de la información, ya sea mediante la interpretación, generalización, análisis, inferencias o establecimiento de analogías.
6. Evaluar las hipótesis.

El proceso se inicia a partir de una situación que representa un problema. El estudiante elabora una hipótesis para explicar el problema utilizando sus conocimientos previos y reúne información para probar el alcance de la misma.

Se puede decir que el proceso para la solución de problemas incluye la mayor parte de las facultades mentales esenciales. Los alumnos que han desarrollado la capacidad de dominar con éxito esas facultades poseen, por lo mismo, las herramientas necesarias para recibir, procesar y aplicar información. El proceso para la solución de problemas requiere, asimismo, que los estudiantes apliquen todas sus habilidades de procesamiento para resolver el problema en cuestión.

Los pasos y habilidades que de acuerdo a Priestley (1999) participan en el proceso de solución de problemas son:

- Definir y plantear el problema. Por principio, el problema deberá ser definido y planteado con suma precisión. El alumno será capaz de identificar la idea principal, los elementos fundamentales y la razón por la cual una situación determinada se presenta como problemática. Además, deberá establecer las semejanzas y las diferencias de ese problema en particular con otros problemas previamente resueltos por él. Por último deberá determinar aquella información que resulte importante para la solución del problema, así como cuestionar determinados aspectos del mismo.
- Pensar en cómo lo va a resolver. Esta etapa es importante en el proceso de solución de problemas pues consiste en determinar lo que se va a hacer en relación con el problema. La persona debe decidir, basándose en la información con que cuenta, sobre las posibles alternativas de acción.
- Evaluación del plan. Para determinar los planes de acción, la persona deberá considerar los posibles resultados. A partir de esto último, la persona optará por llevar a la práctica un plan determinado.

Priestley (1999) muestra la forma de un modelo integrado, mediante el procesamiento de la información, en el cual es deseable que los estudiantes activen plenamente sus procesos verbales y sus habilidades para el lenguaje. De éstos el primero contribuye a la línea de nuestra investigación. Pues como investigadores nos permite entrever los significados que el estudiante construye en el proceso de resolución de problemas matemáticos. Para este autor el lenguaje es el elemento programador de nuestra mente; pues es éste el que nos permite ordenar con sentido los estímulos sensoriales que nos afectan; sin el lenguaje no tendríamos manera de recibir, procesar, almacenar y aplicar la información de que somos receptores.

En el modelo del procesamiento de la información aplicado a la resolución de problemas, en este caso matemáticos, primeramente se tiene acceso o entrada de la información al cerebro ya sea mediante la percepción, la escucha, la observación, o el reconocimiento de la información recibida; como segundo paso en la integración de la información el estudiante puede resolver el problema mediante la comparación, asociación, formación de parejas, categorización, ordenación en series, o bien puede transferir, inferir, criticar o predecir la información con la que encuentra una solución posible al problema que se le planteó. Y por último genera una respuesta de acuerdo a sus intuiciones, creencias, conocimientos previos, etc. (ibidem).

Cuando en la vida diaria se presenta una situación problemática, de acuerdo a Peralta (1995) en primer lugar, será preciso investigar cuál es el problema, ya que frecuentemente se encuentra entremezclado con otros y unido a ciertos hechos ajenos al problema en sí. En segundo lugar se deberá tener la técnica apropiada para buscar el procedimiento que nos lleve a la resolución del problema en cuestión.

Por ello, es importante que al alumno se le ayude a disponer de un medio matemático accesible para adentrarse en la resolución de problemas; esto se puede lograr haciendo uso de estrategias que lo lleven a despertar su curiosidad e interés hacia las matemáticas y tener la oportunidad de descubrir sus capacidades y aficiones. Puede descubrir, sin embargo, que un problema de matemáticas puede ser tanto o más divertido que un crucigrama, o que un vigoroso trabajo intelectual puede ser un ejercicio tan agradable como un ágil juego de tenis (Polya, 1978).

Debemos entender que un problema no implica exclusivamente la aplicación de fórmulas o rutinas. “Se espera que un problema propicie la reflexión. Sin embargo, algunos de esos problemas son para gente experimentada o deseosa de una gimnasia mental, lo cual no se presenta de manera característica en nuestros estudiantes, con ellos más bien se quiere motivar esa curiosidad y actitud de búsqueda” (Santos, citado en Escarreño y Mancera, 1993, p.80). Es decir que algunos alumnos sienten que las matemáticas son un conjunto de procedimientos inconexos y arbitrarios que se les dan para que memoricen; un importante porcentaje de ellos aprenderá a usar estos procedimientos de manera mecánica, sin emplear verificaciones de sentido, tales como ver si un problema pide realmente una solución o verificaciones de la realidad.

El aprendizaje de los algoritmos no necesariamente le posibilita al alumno entender la finalidad de su uso, o más aún, entender de manera clara cuándo debe utilizarlo. Por tanto en su enseñanza radica la importancia de desarrollar estrategias de resolución de problemas en los alumnos, mediante las tareas del aula y de la vida cotidiana y no sólo con el uso de algoritmos.

Desde nuestra perspectiva es conveniente fomentar la formulación de preguntas, de manera que el alumno mejore su capacidad de reflexión, expresión y relación con los demás. También es aconsejable estimularle a la formulación de problemas, facilitándole así esas mismas aptitudes, y, además, la comprensión de enunciados, la creatividad, la imaginación y la precisión en el uso de la terminología matemática.

Las estrategias generales para la resolución de problemas son los procedimientos que han de guiar la elección de las técnicas y los procesos que deben llevarse a cabo para ese fin. Con ellas se trata de aumentar la capacidad de aproximarse a un problema para, mediante la experimentación y la elaboración de conjeturas, llegar a la solución; posteriormente habrá de realizarse una comprobación y una reflexión sobre la validez de los métodos empleados.

La enseñanza de las matemáticas debería asegurar que el alumno pudiese disponer de estrategias que le permitan tomar decisiones sobre qué conocimientos utilizar a partir de las condiciones que envuelven la situación que se deberá resolver y, por lo tanto planificar, regular y evaluar la propia actuación con la intención de ajustarla en todo momento (Monereo y Badia, 2002). Lester (citado en Santos, 1997) afirma que una práctica común en la instrucción matemática es que los maestros muestran a los estudiantes solamente los movimientos correctos al resolver un problema. Por ejemplo siempre seleccionan el método adecuado, trabajan correctamente las operaciones y obtienen una solución correcta. Los estudiantes piensan que resolver problemas es un acto de seleccionar una serie de trucos que son solamente accesibles a unos cuantos.

A continuación presentamos dos propuestas de la Educación Secundaria para resolver problemas matemáticos:

Por una parte, en la Educación Secundaria Escolarizada, Sánchez y Calviño (1993) proponen las siguientes estrategias para resolver problemas:

- ♦ Identificación, en problemas numéricos de los datos conocidos de los que se pretende conocer, y distinción entre los relevantes y los irrelevantes.
- ♦ Reducción de problemas numéricos a otros más sencillos, para facilitar su comprensión y resolución: sustitución de los datos por otros más simples, estudios de casos particulares antes de afrontar el caso general.
- ♦ Identificación de las operaciones adecuadas para la resolución de problemas numéricos.

Por otra parte, en lo que corresponde al Sistema de Enseñanza Abierta, la secuencia didáctica que propone el INEA para abordar el trabajo con problemas de las matemáticas es la siguiente:

- ♦ Comprender el problema
- ♦ Estimar cuál podría ser la solución posible.
- ♦ Compartir con sus compañeros los resultados de la estrategia empleada

El modelo de educación para la vida y el trabajo del INEA (2001) tiene el propósito general de desarrollar y favorecer competencias básicas para que las personas jóvenes o adultas resuelvan problemas tanto de su vida cotidiana como de las ciencias, la tecnología y el arte. Entre estas competencias lo más importarte para el INEA es que los estudiantes desarrollen habilidades del pensamiento, razonamiento, participación, opinión y habilidad de escuchar de sus compañeros y no que se realicen planas y planas de ejercicios, números y cuentas.

Lo que aquí entendemos por resolución de problemas, es un proceso complejo que se basa en la formulación de preguntas, el análisis de situaciones, la traducción de resultados, la realización de esquemas, el planteamiento de conjeturas, etc. Por tanto la resolución de problemas implica la integración de conocimientos, reglas lógicas, técnicas y destrezas que el estudiante necesita para resolver cualquier problema en este caso problema matemático.

Con esto concluimos lo que a nuestro criterio son los procedimientos escolares que los anteriores autores mencionan acerca de la resolución de problemas. En este proyecto creemos que es implícita y personal la manera en que cada estudiante resuelve los problemas. No pretendemos estudiar la corrección de las respuestas dadas por el estudiante en el momento de la entrevista sino seguir el curso de la intuición del pensamiento del estudiante con el fin de conocer lo que Vygotsky llama la Zona de Desarrollo Actual en la que se encuentra el sujeto, es decir, el nivel real de desarrollo determinado por la capacidad de resolver un problema sin la ayuda o colaboración de otra persona. Sólo en contadas ocasiones exploramos la Zona de Desarrollo Próximo planteando nuevas preguntas que pretenden indagar hasta dónde puede llegar el estudiante con una ayuda externa.

De acuerdo con Fischbein (citado en Alatorre, 1994), las respuestas de un individuo no pueden reducirse a estereotipos preconstruidos, como los instintos, ni adquiridos, como los reflejos condicionados. La complejidad de las circunstancias frecuentemente lleva al individuo a responder con base en una estimación global intuitiva de las posibilidades.

A continuación escudriñaremos las características generales que Fischbein (citado en Alatorre, 1994) da del origen de las intuiciones:

- ♦ Afirma que responden a una de las necesidades más intrínsecas del ser humano, que es la necesidad de la acción.
- ♦ Arguye que son fenómenos evolutivos, y su estructura cambia con la experiencia y el desarrollo intelectual general; se adaptan a las reglas implícitas sobre las que se basan las decisiones del sujeto. Aunque la herencia y el medio ambiente pueden contribuir al desarrollo de la

intuición, uno de los principales componentes de la articulación consistente que caracteriza a la intuición es la experiencia individual.

- Considera que la fuente básica de los conocimientos intuitivos es la experiencia acumulada por una persona en condiciones relativamente constantes, y que esta experiencia puede ser la común a la experiencia humana, la determinada por el entorno geográfico-cultural, o la determinada por la práctica del individuo en diferentes dominios.

Fischbein establece una compleja serie de clasificaciones: las intuiciones pueden ser primarias (que se forman antes de un proceso educativo) o secundarias (que son intuiciones educadas, formadas con un cierto bagaje de conocimientos previos). Además, pueden ser afirmativas o conjeturales, anticipativas o conclusivas, preoperatorias, operatorias o postoperatorias. La intuición, en sus distintos aspectos varía de un individuo a otro.

Para Fischbein (citado en Alatorre, 1994) los conocimientos intuitivos son formas de conocimiento inmediato y proveedores de certeza que una persona va afinando a lo largo de la vida. Estos conocimientos dan una respuesta a la necesidad de la acción y a los requerimientos de ésta: inmediatez, continuidad, flexibilidad, firmeza, eficiencia. Son confiables y conforman estructuras coherentes, verificadas por la experiencia, que les dan estabilidad y credibilidad; ayudan a resumir la información, a suplir sus insuficiencias y a interpretarla de manera conductualmente significativa. Estos conocimientos son obvios, autoevidentes, globales, sintéticos y compactos, consistentes, implícitos. Son perseverantes, coercitivos, resistentes, difícilmente cuestionables; no son necesariamente espontáneos. Conllevan una sensación intrínseca de convicción, de certeza. Tienen estatus de teoría, aunque no necesariamente son correctos, y se pueden extrapolar. Están basados de manera evolutiva en procedimientos mentales automatizados, estabilizados e integradores, así como en la experiencia individual y en la inteligencia.

Las maneras intuitivas que tienen las personas para resolver problemas pueden interpretarse como estrategias. A continuación revisaremos diversas formas de conceptuar las estrategias de resolución de problemas.

Beltrán (1996) nos dice que las estrategias son una especie de reglas o procedimientos intencionales que permiten al sujeto tomar las decisiones oportunas de cara a conformar las acciones que caracterizan el sistema cognitivo. En este sentido el pensamiento estratégico comprende las estrategias empleadas al solucionar un problema y los procesos de decisión que llevan aparejadas la selección de la estrategia y la evaluación del progreso.

Para Freudenthal (citado en Alatorre, 2004) las estrategias son patrones generales de pensamiento en matemáticas que desarrollamos para facilitar las cosas y que solemos utilizar inconscientemente, aunque intentamos organizarlos axiomáticamente; se aprenden por redescubrimiento, por imitación, por el uso o explicándolos a otras personas.

En los diversos problemas que el estudiante habrá de resolver, las estrategias cognitivas que emplee nos permitirán conocer el tipo de razonamiento que tiene. Y de acuerdo a Orobio y Ortiz (1997) las estrategias cognitivas son:

- ♦ La realización verbal de las acciones, que consiste en hacer con las palabras las mismas acciones que los estudiantes hacen con los objetos, a través de la capacidad lingüística al sustentar sus afirmaciones usando diversas formas argumentativas, desde el lenguaje común hasta el lenguaje formal.
- ♦ El manejo de diferentes niveles de representación, los cuales dan cuenta del dominio de objetos de un sistema conceptual en diferentes contextos y situaciones, desde los rutinarios o comunes hasta los simbólicos.

Las estrategias se pueden entender como un conjunto interrelacionado de funciones y recursos, con los que el estudiante cuenta, lo cual le permite generar esquemas de acción que le hacen posible resolver en el ambiente escolar, laboral o familiar situaciones generales o específicas. Estas estrategias con las que el estudiante cuenta le permiten incorporar y organizar selectivamente la información para solucionar problemas de diversos órdenes.

De acuerdo a Alatorre (2004), una estrategia es un mecanismo de solución utilizado para resolver problemas, que tiene cierta estructura lógica y que puede ser reproducido en otros problemas del mismo tipo. En el caso particular de las estrategias para resolver el tipo de problemas con el que trabajaremos, la autora propone diferentes clasificaciones, las cuales serán abordadas en el apartado 2.5.

En esta línea de investigación tratamos de conocer la zona de desarrollo actual a partir de lo que hasta ese momento conocen los estudiantes. La entrevista de corte clínico de Piaget permitirá dar cuenta de la manera en que su comprensión va incluyendo elementos explicativos de una situación determinada. Las estrategias cognitivas empleadas por los diferentes estudiantes, permiten tener elementos que revelan las formas de pensar de los estudiantes y la zona de desarrollo actual debido a la comprensión que han logrado desarrollar en un momento determinado. Por tanto el análisis de los registros permite, entre otras cosas:

- ♦ Conocer cómo están comprendiendo los alumnos

Entonces, el esfuerzo de los investigadores se orienta a canalizar las producciones de los estudiantes con el propósito de comprenderlos y tratar de explicar la manera en que aparecen los distintos estilos de pensamiento en los que, a su vez, se expresan diversas maneras de razonamiento. A nuestro juicio, tal deberá ser el contenido de un informe académico que, en este caso, mostraría la zona de desarrollo actual de los estudiantes en el contexto de la realización de una actividad compleja a través de la cual el estudiante manifieste su forma de pensar. Por tanto en este proyecto la forma de dar cuenta de la etapa de evolución y del estado de la zona de desarrollo actual de los estudiantes en problemas que invocan un razonamiento proporcional se centra principalmente en la capacidad para:

- ♦ Solucionar problemas.

- Argumentar y contraargumentar.

Desde esta perspectiva la interacción intuición-argumentación expresada en diferentes formas de solución de problemas, aparece en forma evidente en las justificaciones dadas por los estudiantes.

A partir de la problemática recién planteada, se consideró centrar la atención en cierto tipo de problemas matemáticos: los de comparación de razones, que son problemas que pueden invocar un razonamiento proporcional, aunque con frecuencia las personas usan estrategias de otros tipos para resolverlos. En particular, se tomó como objetivo general para el trabajo indagar si se pueden reconocer tendencias asociadas a la edad o sistema de enseñanza en las estrategias que diversos estudiantes emplean para resolver problemas que invocan un razonamiento proporcional.

1.3.2 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDAD

Conviene aquí hacer algunas reflexiones acerca de lo que se entiende por razonamiento proporcional. Para algunos autores el razonamiento proporcional "es una forma de razonamiento matemático, involucra un sentido de covariación, comparaciones múltiples, y la capacidad para almacenar y procesar mentalmente varias porciones de información. El razonamiento proporcional tiene mucho que ver con la inferencia y la predicción e involucra métodos de pensamiento tanto cualitativos como cuantitativos" (Lesh, Post y Behr, citados en Alatorre, 2004).

De este modo habremos de entender que en el razonamiento proporcional influyen por un lado, el pensamiento sobre tópicos matemáticos y, por otros, procesos avanzados del pensamiento como:

- abstracción,
- justificación,
- visualización,
- estimación o razonamiento bajo hipótesis (citado en Cantoral et al, 2000).

El razonamiento proporcional debe operar sobre una red compleja de conceptos, unos avanzados y otros más elementales. Quizá por ello los estudiantes no puedan entender lo que es una operación compleja, a menos de que entiendan en un cierto nivel que va más allá del solo manejo de técnicas asociadas y que deben articularlos bajo diferentes contextos de representación, como un procesamiento icónico de la información (ibidem).

El razonamiento proporcional se trata en la escuela oficial con los jóvenes que tienen entre 15 y 16 años aunque empieza desde 4° de primaria. Sin embargo también se desarrolla a lo largo de la vida de los seres humanos, y por ello la enseñanza de las matemáticas en la escuela debería tomar en cuenta dicha evolución. Por tanto, cabe preguntarse si el razonamiento proporcional que emplean diferentes sujetos que cursan el mismo nivel de escolaridad es resultado de un proceso interno del sujeto, o de un proceso de aprendizaje externo al individuo, o una interacción entre ambos.

Piaget y sus colaboradores (citado en Fiol y Fortuny, 1990) situaron la edad en que empieza la utilización correcta de la estrategia proporcional entre los once y los catorce años. Sin embargo, otros investigadores (Karplus y Peterson, ibidem) pusieron en evidencia que un gran número de alumnos al final de la escuela secundaria e incluso en edad universitaria no han logrado adquirir un entendimiento funcional de la proporcionalidad.

A continuación realizaremos una breve revisión de dos términos básicos de acuerdo con las preguntas de la línea de investigación que nos ocupa en este proyecto, mismos que son fundamentales en la indagación acerca del razonamiento proporcional.

- Razones
- Proporciones

Por una parte tenemos que una razón es una pareja ordenada de números o de valores de magnitud (Freudenthal, citado en Alatorre, 2004). Una razón se denota usualmente como a:c (lo que se lee “a es a c”), donde el número a es el antecedente y el número c el consecuente (ibidem).

De acuerdo con los planes y programas de estudio del nivel medio básico de la SEP (1996), la noción de razón surge de comparar dos números o magnitudes a través de su cociente. El INEA dice que la razón es una comparación de dos cantidades mediante una división. Y como ejemplo se muestra que la razón de asesores a personas jóvenes y adultas en un círculo de estudio es de 1 a 8, o sea 1/8, o de 1:8 (INEA, 2001).

Sin embargo para Kieren (citado en Alatorre, 2004) una *razón* es un índice de comparación más que un número. En este caso el símbolo a/b representa una relación entre dos cantidades. Por ejemplo 2/3 que puede interpretarse como 2 de cada 3 personas tienen el cabello negro o como se hace en el deporte, un jugador realizó correctamente una tarea 2 veces en 3 intentos. Una observación similar la hace Freudenthal (citado en Alatorre, 2004), al señalar que cuando la razón a:b se interpreta como la fracción a/b o como el cociente a÷b se le quita a la razón lo que la hace válida como razón.

En un problema de comparación de razones intervienen dos razones, por ejemplo a1:c1 y a2:c2. Estos cuatro números se pueden representar en un arreglo, que es una expresión de la forma (a1,c1)(a2,c2) (Alatorre, 2004).

Los cuatro números que intervienen en una comparación de razones pueden favorecer o desfavorecer que los sujetos que resuelven la comparación utilicen determinadas estrategias (ibidem).

Después de analizar las razones Alatorre (2004) encuentra que hay dos tipos: las tasas y las razones parte-parte-todo.

A) Tasas

De acuerdo a Alatorre (2004), las tasas:

- Son cantidades dimensionales (están en un espacio de medida),
- Relacionan dos unidades de medida diferentes.

Ejemplo: Dos niñas (A y B) caminan distinta cantidad de cuadras en distintos tiempos (minutos). ¿Cuál niña camina más rápido, o caminan a la misma velocidad?

En el ejemplo anterior podemos ver que las unidades de medida de los dos términos de la razón son distintas: el antecedente (espacio recorrido) se mide en número de cuadras y el consecuente (tiempo empleado en recorrer el espacio) se mide en minutos.

B) Razones parte-parte-todo:

De acuerdo a Alatorre (2004), las razones parte-parte-todo:

- Son adimensionales,
- Relacionan dos unidades de medida iguales.

Se pueden distinguir dos tipos de esta clase de razones:

B.1 Mezcla

Ejemplo. En dos jarras (A y B) se confecciona agua de jamaica con distintas cantidades de vasos con concentrado de jamaica y con agua. ¿En cuál jarra la preparación tiene sabor más fuerte a jamaica, o tienen el mismo sabor?

En el ejemplo anterior podemos ver que las unidades de medida de los dos términos de la razón son la misma: tanto el antecedente (jamaica) como el consecuente (agua) se miden en cantidad de vasos (Alatorre, 2004).

B.2 Mezcla probabilística

Ejemplo. En dos botellas (A y B) se echan distintas cantidades de canicas azules y amarillas. Sólo se puede agitar una de las dos y sacar una canica de ella; si la canica que salga es azul entonces se obtiene un premio. ¿Cuál botella conviene agitar, o da igual?

En este ejemplo también podemos ver que las unidades de medida de los dos términos de la razón son la misma: tanto el antecedente (azules) como el consecuente (amarillas) se miden en cantidad de canicas (Alatorre, 2004).

Por otra parte, una proporción consta de dos razones que guardan una equivalencia entre sí. Por ejemplo a1:c1 = a2:c2. Según la SEP, la proporcionalidad resulta de comparar los valores de dos listas de números o cantidades variables para ver si guardan la misma razón entre sí (S.E.P., 1996).

En la programación de Matemáticas de Enseñanza Secundaria Obligatoria, tenemos que el tema de proporciones tiene entre sus objetivos.

- Utilizar la división para comparar números.
- Resolver proporciones, utilizando la propiedad producto de medios igual al producto de los extremos.
- Reconocer y resolver problemas que involucran proporciones.
- Aplicar el factor de proporción para determinar las dimensiones de una figura semejante a otra.
- Aplicar la semejanza a situaciones reales.
- Reconocer sucesos aleatorios y asignarles su probabilidad.

Entre los conceptos que habrán de tratarse en el tratamiento del azar para cubrir los anteriores objetivos se encuentra:

- Divisiones.
- Razones y proporciones.
- Propiedades fundamentales de las proporciones.
- Proporcionalidad directa. Interés simple.
- Idea de figuras semejantes.
- Aplicación de problemas reales.
- Frecuencias relativas. Probabilidad.

Y en específico en el concepto de magnitudes proporcionales habrá que dar:

- Significado de la proporcionalidad de magnitudes
- Expresiones usuales de la proporcionalidad: los “tantos” por algo, tasas y factores de proporción y conversión

De acuerdo a lo anterior los procedimientos que se proponen son:

- Utilización de la división como comparación en situaciones reales: razones.
- Representación de tablas numéricas en las que se pueda observar la proporcionalidad entre los número que en ellas aparecen.
- Justificación de la propiedad fundamental de las proporciones.
- Identificación de magnitudes directamente proporcionales
- Aplicación de la proporcionalidad de cálculo de algunas magnitudes proporcionales: interés y razones.
- Identificar experimentos aleatorios equiprobables y asignarles probabilidad, mediante el recuento de casos favorables y casos posibles (citado en Sánchez y Calviño, 1993).

Fiol y Fortuny (1990) observan que ya que una proporción es una relación que se establece entre relaciones, el niño no puede construirla en el estadio de las operaciones concretas. Pero puede gradualmente:

- Establecer compensaciones aditivas $a + b = c + d$
- Comparar por diferencia $a – c = d – b$
- Formular correlaciones cualitativas, como por ejemplo: Lisboa es a Portugal como Roma es a Italia, o árbol es a bosque como abeja es a enjambre, o ladrido es a perro como maullido es a gato.
- Comparar cualitativamente la relación entre variables, por ejemplo: a más.. más, o a menos… menos… etc.

- Concebir fracciones, e incluso en algunos casos comprender la igualdad de dos fracciones "uno es a dos, como cincuenta es a cien".
- Iniciar las compensaciones multiplicativas del tipo xy = zv. Hay que tener en cuenta que las compensaciones multiplicativas se relacionan directamente con la noción de proporción, puesto que si se tiene ab = a'b'; también se tiene por definición a/a' = b'/b. Pero, y como afirman Inhelder y Piaget (citado en Fiol y Fortuny, 1990), desde el punto de vista psicológico, comprender la proporción empieza siempre por el descubrimiento de una compensación, pero en cambio parece que comprender una compensación multiplicativa no tiene por qué pasar por la comprensión inicial de la proporción.

$$a / a' = b' / b \longrightarrow ab = a'b'$$

La familiaridad de los niños con números pequeños les permite pasar con cierta familiaridad a compensaciones multiplicativas. Pero hay que tener en cuenta que cuando se trata de magnitudes poco conocidas es difícil conseguirlo en estas edades. Podemos decir que esto es paralelo a lo que ocurre en la comprensión de problemas de proporción con la intervención de diferentes variables como el tamaño de los números, si las magnitudes que intervienen en el problema son continuas o no, familiares al estudiante o no, etc.

Fiol y Fortuny (1990) justifican la importancia de la proporcionalidad en la enseñanza de las matemáticas por las siguientes razones:

1. Desde finales de la primaria y en todo el período de la secundaria, se puede considerar que en matemáticas el tema de la proporcionalidad es núcleo a partir del cual se unifican las líneas básicas de nociones como:

- Razón y proporción
- Fracción y número racional
- Número decimal y problema de la medida
- Cambio de unidades

- Problemas de repartos proporcionales
- Problemas de regla de tres
- Porcentajes
- Probabilidad.

2. En las Ciencias y la Técnica la proporcionalidad es uno de los instrumentos más importantes. Nos encontramos con que frecuentemente muchos de los conceptos de Física y Química son en realidad nombres dados a relaciones de proporcionalidad, como por ejemplo: la velocidad, la aceleración, la densidad, la presión, las concentraciones, las dilataciones.

3. Además el concepto de proporcionalidad aparece incluso a finales de primaria en el currículo de Ciencias Sociales bajo distintas formas: densidad de población, tasa de natalidad, así como en la lectura de mapas y de diversos tipos de gráficos.

4. Pero la proporcionalidad es importante no sólo desde el punto de vista de las Ciencias, sino que también tiene una importancia fundamental desde el punto de vista del desarrollo de la inteligencia. Así la epistemología genética la considera uno de los esquemas operativos fundamentales del estadio de las operaciones formales (Inhelder y Piaget, citados en Fiol y Fortuny, 1990).

Dada la importancia de la proporcionalidad no debe extrañarnos que haya sido objeto de muchos estudios en los últimos treinta años. Seguramente lo más interesante durante estos años de investigación ha sido el cambio del punto de vista desde donde se lleva a cabo. Se ha pasado de considerar el razonamiento proporcional como una manifestación de una estructura cognitiva o habilidad global, a un trabajo más diferenciado centrado en el estudio de los procedimientos usados de forma espontánea por los alumnos en la resolución, con éxito o sin él, de los problemas de proporcionalidad, lo que lleva a estudiar diversas estrategias, unas correctas, otras erróneas y las variables que intervienen en su resolución (citado en Fiol y Fortuny, 1990).

Entre los temas que están presentes en la razón y la proporcionalidad tenemos a las fracciones, semejanza y probabilidad. El trabajo sobre fracciones precederá a la proporcionalidad; la semejanza y la probabilidad serán posteriores. La proporcionalidad es sólo un ejemplo de una relación matemática pero tiene tales aplicaciones generales que, habitualmente, se le da un tratamiento separado y detallado dentro del currículo de matemáticas. Su diferenciación puede dar a la proporcionalidad una importancia injustificada en el pensamiento de los estudiantes, hasta el punto de que lleguen a considerar todas las relaciones en términos proporcionales. El libro Ratio, de Hart (citado en Macnab y Cummine, 1992) contiene una evidencia sobre la diferenciación mediante el siguiente ejemplo. Si 100 hojas de papel cuestan $58 pesos, ¿cuánto costarán 250 hojas? La pregunta sólo puede ser respondida suponiendo que existe una razón fija o un costo unitario, aún no establecido. Puede ser apropiado suponerlo pero muchos estudiantes establecen el mismo supuesto en situaciones completamente injustificadas. En el supuesto que emplearan el costo unitario los estudiantes harían explícita la razón fija pero puede introducir lo que parecen valores poco realistas. Esto aparece ilustrado en el siguiente ejemplo:

Si todos los cuadernos cuestan lo mismo y 3 cuestan 7 monedas, ¿cuál es el costo de 5, 7, 9? En este ejemplo los cuadernos cuestan 7/3 cada uno, así que 5 costarán 5X7/3 y así sucesivamente. El principio de proporción puede desarrollarse como una forma alternativa de conseguir calcular la razón fija. Este enfoque debería reforzarse a través de consideraciones más intuitivas como por ejemplo, el doble de cuadernos costará el doble. Una vez que se establece el principio de proporcionalidad para cálculos de razón fija la forma de la proporción puede proceder sin referirse a la razón fija.

Ya en la educación primaria y desde la aritmética la proporcionalidad aparece en algunos trabajos con las tablas de multiplicar o con razones. El razonamiento proporcional ha sido descrito como la piedra que es simultáneamente la coronación del edificio de la escuela elemental y la primera piedra del edificio de la escuela secundaria (Lesh, Post y Behr, citados en Alatorre, 2004).

Piaget (véase también Freudenthal, citado en Fiol y Fortuny, 1990). estudió diversos aspectos y presentaciones del concepto de proporcionalidad. A partir de 1946 estudia el movimiento y la velocidad; la noción de proporción interviene cuando se trata de comparar dos movimientos siendo distintos los espacios recorridos y los tiempos empleados. En 1951 estudia con Inhelder el desarrollo de la noción de azar en el niño; la idea de probabilidad aparece, por ejemplo, cuando se atribuye el mismo valor a dos casos favorables sobre cuatro posibles o a tres casos favorables sobre seis posibles. Piaget y otros, 1968, se enfocan en el estudio de las funciones, y entre ellas el de la función lineal, estudiada en unos ejemplos hoy ya clásicos (peces que comen según su longitud), considerando primero ejemplos de magnitudes discontinuas, y en segundo lugar, de magnitudes continuas. La razón principal para el estudio de las proporciones en el dominio espacial es que, según Piaget, el análisis de los estadios es mucho más fácil que en el terreno no geométrico. Y esto ya que antes de saber razonar sobre figuras semejantes, el niño tiene que saber discernir, sólo por simple percepción, si determinadas figuras están en la misma razón o no. Así afirma: “la génesis de la proporción se tiene que buscar en la percepción de las figuras”.

Los problemas que contienen razones y proporciones y por tanto invocan un razonamiento proporcional pueden ser de dos tipos:

A) Problemas de valor perdido, también denominados de cuarta proporcional. Se plantean tres de los términos de la proporción y se busca el término que falta. Estos problemas se pueden resolver con “regla de tres”.

Ejemplo: Tres kilogramos de carne cuestan $144.00, ¿cuánto costarán siete kilogramos de la misma carne?

B) Problemas de comparación de razones. Se proporciona información sobre las cuatro cantidades involucradas en dos razones, y el objetivo es responder si una de las razones es mayor, menor o igual que la otra (Alatorre, 2002). Éste es el tipo de problemas con el que se trabaja en esta investigación.

Ejemplo: Si 3 kilos de carne de res cuestan $144.00, y 7 kilos de carne de pollo cuestan $210, ¿qué está más barato, la de res, la de pollo, o están igualmente caras?

El desarrollo del conocimiento de proporcionalidad empieza a los once años, constituye una culminación respecto al estadio anterior (siete a once años), que es básicamente de elaboración de las operaciones concretas del niño, período de formación que culminará en un período de equilibrio alrededor de los catorce a quince años o quizás más adelante. Al final de las operaciones concretas hay ciertos avances y formalmente se podría decir que empieza por ahí de los 11 años.

Cerraremos este capítulo con unas reflexiones acerca de las fracciones porque éstas son importantes en la vida cotidiana y nos permiten conocer la forma en que el individuo puede resolver diversos problemas que se le presentan en diversos ámbitos de su vida como pueden ser el escolar, familiar, laboral etc.

El conocimiento de las fracciones encierra en sí mismo el aprendizaje de diferentes conceptos, los cuales en conjunto tienen la finalidad de ser empleados como una herramienta (Del Río, citado en Reyes et al, 1997), para solucionar problemas con fracciones.

Planchart (citado en Ramírez, 1994) identificó, con respecto al aprendizaje de las fracciones que:

- Existe tendencia a concebir a la fracción como dos números enteros no relacionados y a manejarlos de manera independiente.
- Existe cierta facilidad para identificar la parte cuando el todo está dividido en un número de partes que coincide con el denominador de la fracción. Cuando se requiere del uso de la equivalencia en la identificación de una fracción la situación se vuelve más compleja.

Desde nuestra perspectiva, en la resolución de problemas que contienen fracciones se requiere del desarrollo de ciertas estrategias para poder resolver problemas planteados en las actividades formales. Y como ejemplo de ello podemos decir que en la resolución de fracciones se fomentan estrategias para su solución, empero lo que muchas veces desarrollan los estudiantes es el aprendizaje de algoritmos. Por otra parte, también se ha afirmado que el dominio de las fracciones puede ser importante en la capacidad de resolver problemas de proporcionalidad: las fracciones preceden a la proporcionalidad en la enseñanza.

Debido a todo esto, en esta investigación se ha considerado, además de los dos tipos citados de problemas de comparación de razones, algunos problemas de comparación de fracciones, con la finalidad de comparar las maneras que tienen los sujetos para resolver unos y otros. Esto es, hemos tomado a manera de control, dos problemas que contienen fracciones, uno de manera icónica y otro en forma simbólica.

Ejemplo: Dos jóvenes (A y B) tienen cada uno una pizza, y cada quien se ha comido distintas rebanadas de la suya. ¿Cuál de los dos jóvenes ha comido más pizza, o han comido la misma cantidad?

En el otro ejemplo se plantean dos fracciones (A y B) [que corresponden a los cocientes parte-todo], y se pregunta cuál es mayor, o si son iguales.

2 METODOLOGÍA

En este capítulo se presenta el aspecto metodológico de las entrevistas de corte clínico de Piaget, las cuales fueron aplicadas a diversos estudiantes que cursan la secundaria en los sistemas escolarizado y abierto, en la resolución de problemas matemáticos de comparación de razones. La resolución de los problemas planteados se tomó como el recurso para llegar al conocimiento de las estrategias empleadas.

Inicialmente se describe el escenario de donde provinieron los estudiantes de secundaria escolarizada y abierta, con el fin de que el lector se acerque al contexto educativo en donde se desenvuelven los sujetos entrevistados. Después referimos la técnica empleada para hacer posible este trabajo, la entrevista de corte clínico de Piaget, donde se plantea el por qué y para qué ir más a fondo en cuestión de conocer la manera en que el sujeto resuelve los problemas de razonamiento, en este caso de razonamiento proporcional. Continuamos con la presentación de los instrumentos: cuatro problemas de comparación de tasas, cuatro problemas de comparación de razones parte-parte-todo y dos problemas de comparación de particiones. Procedemos a mostrar la clasificación de las respuestas que permitieron catalogar las estrategias que los estudiantes dieron en los diversos problemas. Finalizamos con los pasos que dimos para hacer posible estas entrevistas y su análisis en la parte de procedimientos.

2.1 CENTRO ESCOLAR

Las escuelas de donde procedieron los estudiantes de sistema escolarizado y abierto son las siguientes:

La escuela secundaria escolarizada diurna de donde procedieron cinco de los estudiantes entrevistados, se encuentra ubicada en el primer cuadro de la Delegación Xochimilco. Con respecto a la escuela secundaria abierta (INEA), también se encuentra ubicada en la misma Delegación.

2.2 SUJETOS

Los sujetos con los que se trabajó son:

- ❖ Cinco adolescentes que cursan la secundaria escolarizada
- ❖ Cinco adultos (mayores de 25 años) que cursan la secundaria abierta♣

Con respecto a los alumnos de la escuela secundaria escolarizada, podemos decir que son jóvenes hijos de familia, entre 12 y 15 años de edad cronológica, los cuales se encuentran en el colegio en un horario de 7:00 a 14:00 Hrs. de lunes a viernes.

Los alumnos del sistema abierto que se consideraron son personas adultas que asisten de manera irregular a recibir asesorías, por lo menos dos veces a la semana 2 o 3 horas debido a diversos motivos como pueden ser laborales o familiares.

La forma de selección de los estudiantes de ambos sistemas fue accidental, pues se les solicitó a los estudiantes que participaran de manera voluntaria. Una breve semblanza biográfica de los diez sujetos se encuentra en el Anexo 1.

2.3 TÉCNICA

La técnica que se llevó a cabo es la entrevista de corte clínico de Piaget, quien desarrolló esta técnica después de percatarse que al utilizar cuestionarios éstos falsean la intención del entrevistado. El punto medular de esta técnica radica en "no limitarse a registrar la respuesta que da el estudiante a la pregunta que se le ha formulado, sino en dejar que converse" (Claparède, citado por Alatorre, 1994). Esto nos permite replantear cada vez nuevas preguntas, con el fin de ir más a fondo en cuanto a la forma del pensar en la resolución de determinado problema sin abandonar el punto de partida; es decir que las preguntas que se van planteando cada vez más profundas, le permiten a los investigadores entrever los significados cognoscitivos que el estudiante da, en las respuestas que va generando, sobre todo cuando el estudiante nos da una respuesta contradictoria o insuficiente para analizar la estrategia que está empleando.

♣ Aunque el INEA considera entre sus alumnos a los mayores de 15 años, en este estudio se consideraron solamente personas mayores de 25 años.

La entrevista consiste en una conversación con los sujetos mediante preguntas preestablecidas y otras que se van formulando con base en las respuestas dadas por cada individuo; este movimiento de la pregunta a la respuesta y de la respuesta a una nueva pregunta tiene una direccionalidad: la centración en las respuestas. Por otra parte, no necesariamente se le plantean al sujeto todas las preguntas preestablecidas, sino que de acuerdo con sus respuestas algunas preguntas subsecuentes no se plantean.

Como lo que nos interesa es ver cómo se manifiesta el razonamiento proporcional en la adolescencia y la adultez, tenemos varias posibilidades respecto a cómo elegir a nuestros sujetos y diseñar la experiencia. Lo que se hizo fue elegir un grupo de sujetos que se encontraban cursando su educación secundaria (cinco en escolarizada y cinco en abierta), se les plantearon las preguntas que se previeron y se compararon los resultados. Este método, que suele llamarse transversal, consiste en el estudio de distintos grupos de sujetos de diferentes edades para ver cómo cambian las conductas y permite obtener datos evolutivos en poco tiempo y examinar varios sujetos (Delval, 1997a). Claro está que en nuestro caso los sujetos pertenecen no sólo a grupos de edad diferentes, sino también a diferentes sistemas de escolaridad. Por esta razón, si se llegaran a encontrar diferencias entre ambos grupos no se podrían atribuir a uno solo de estos factores (edad y sistema), sino a su mezcla.

2.4 INSTRUMENTOS

Consideramos que para invocar un razonamiento proporcional, es importante retomar ejemplos de la vida cotidiana, por lo cual las historias involucradas en cada uno de los problemas que se presentaron a los estudiantes de secundaria fueron tomados de la tesis doctoral de Alatorre (2004). El instrumento consta de 10 contextos: cuatro problemas de comparación de tasas, cuatro de comparación de razones y, a modo de control, dos de comparación de particiones. Cada uno de los problemas se podrá plantear en quince situaciones numéricas diferentes. A continuación se presentan los contextos y posteriormente la estructura numérica utilizada.

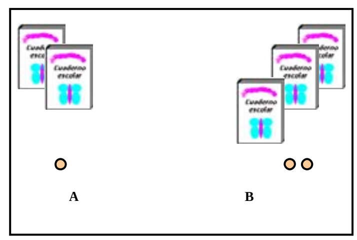
2.4.1 CONTEXTOS

Cada una de las preguntas generadas se presenta al sujeto en una tarjeta de 5” x 8”. La reproducción de las tarjetas se encuentra en el Anexo 1.

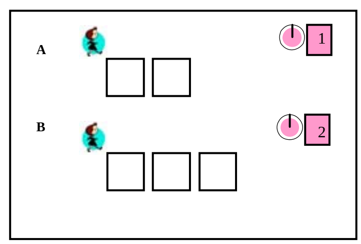
Las siguientes líneas describen los diez tipos de problemas, los cuales se presentaron a los individuos de manera gráfica. Se describen por separado los contextos (cuatro de comparación de tasas, cuatro de razones parte-parte-todo y dos de comparación de particiones).

CUATRO PROBLEMAS DE COMPARACIÓN DE TASAS

- *C: Cuadernos*. En dos tiendas (A y B) se compraron distintas cantidades de cuadernos por distintos precios (en monedas). ¿En cuál tienda son más baratos los cuadernos, o están igualmente baratos en ambas?

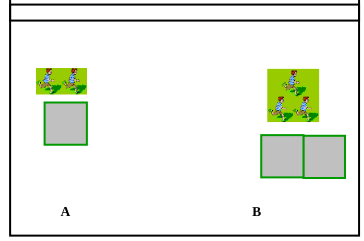


- *V: Velocidad*. Dos niñas (A y B) caminan distinta cantidad de cuadras en distintos tiempos (minutos). ¿Cuál niña camina más rápido, o caminan a la misma velocidad?

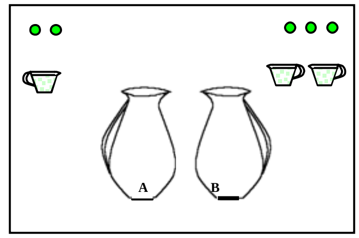


- *D: Densidad: (Versión de jardines)*. En dos jardines (A y B) se van a plantar distintas cantidades de plantas en distintas parcelas formadas por pedazos cuadrados de tierra. ¿En cuál jardín las plantas quedarán más apretadas, o quedan igualmente apretadas?

  (Versión de patios). En dos escuelas (A y B) van a jugar distintas cantidades de niños en distintos patios formados por baldosas cuadradas. ¿En cuál escuela los niños quedarán más apretados para jugar, o quedan igualmente apretados?



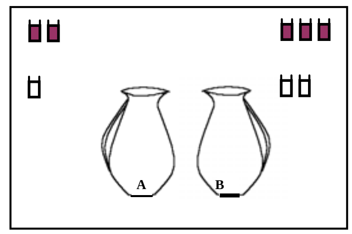
- *L: Limonada*. En dos jarras (A y B) se confecciona limonada con distintas cantidades de limones y distintas cantidades de agua azucarada (tazas). ¿En cuál jarra la preparación tiene sabor más fuerte a limón, o tienen el mismo sabor?



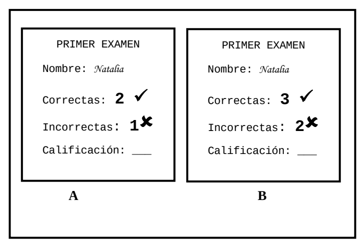
CUATRO PROBLEMAS DE COMPARACIÓN DE RAZONES PARTE-PARTE-TODO

Los primeros dos son problemas de mezclas y los últimos son de probabilidad.

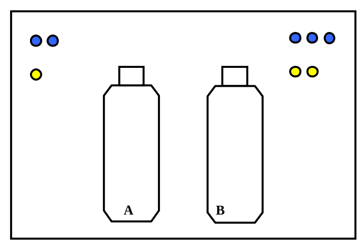
- *J: Jamaica*. En dos jarras (A y B) se confecciona agua de jamaica con distintas cantidades de vasos con concentrado de jamaica y con agua. ¿En cuál jarra la preparación tiene sabor más fuerte a jamaica, o tienen el mismo sabor?



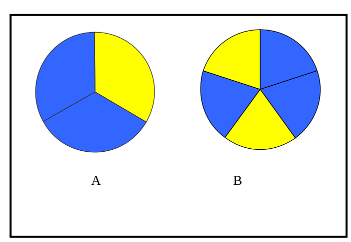
- *E: Exámenes*. Una niña presentó dos exámenes (A y B), en los que obtuvo distintas cantidades de respuestas correctas e incorrectas. ¿En cuál examen tuvo mejores resultados, o le fue igual en los dos? Pregunta adicional: ¿qué calificación obtuvo en cada examen?



- *B: Botellas de canicas* (urnas). En dos botellas (A y B) se echan distintas cantidades de canicas azules y amarillas. Sólo se puede agitar una de las dos y sacar una canica de ella; si la canica que salga es azul entonces se obtiene un premio. ¿Cuál botella conviene agitar, o da igual?



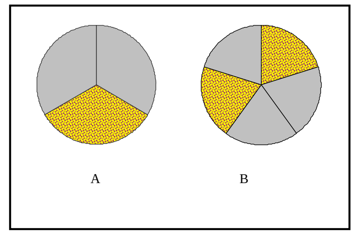
- *R: Ruletas*. Dos ruletas (A y B) constan de distintas cantidades de sectores azules y amarillos; en cada ruleta todos los sectores tienen la misma área. Se puede girar con rapidez una de las dos y detenerla; si se detiene sobre un sector azul entonces se obtiene un premio. ¿Cuál ruleta conviene girar, o da igual?



DOS PROBLEMAS DE COMPARACIÓN DE PARTICIONES

Pretenden dar una idea del nivel de operatividad en fracciones alcanzado por los sujetos, el primero a partir de una pura representación gráfica y el segundo con la escritura convencional simbólica de las fracciones.

- *P: Pizzas*. Dos jóvenes (A y B) tienen cada uno una pizza, y cada quien se ha comido distintas rebanadas de la suya. En gris (el color del plato) aparecen las rebanadas que ya se comieron y en anaranjado las que no han sido comidas. ¿Cuál de los dos jóvenes ha comido más pizza, o han comido la misma cantidad?



- *F: Fracciones*. Se plantean dos fracciones (A y B) [que corresponden a los cocientes parte-todo]. ¿Cuál es mayor, o son iguales?

$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$
A	B

2.4.2 ESTRUCTURA NUMÉRICA

Los diez contextos dieron lugar a preguntas con los mismos quince arreglos de estructura numérica. Es decir, cada uno de diez contextos dio lugar a una serie de quince preguntas, las mismas para cada uno. Así, el instrumento consta de un total de ciento cincuenta preguntas. No se pretendía que todas estas preguntas fueran contestadas por cada sujeto sino que en cada problema, dependiendo de las respuestas a las primeras preguntas, se elegían algunas del total.

Para presentar la estructura numérica fue necesario utilizar los términos “antecedente” y “consecuente” de una tasa o razón. En los diez contextos presentados, estas cantidades son como se presenta en la siguiente tabla:

CONTEXTO	ANTECEDENTE	CONSECUENTE
Cuadernos	Cuadernos	Monedas
Velocidad	Cuadras	Tiempo
Densidad	Plantas	Cuadros de tierra
Densidad	Niños	Cuadros de patio
Limonada	Limones	Agua azucarada
Exámenes	Respuestas correctas	Respuestas incorrectas
Agua de jamaica	Jamaica	Agua
Botella de canicas	Canicas azules	Canicas amarillas
Ruletas	Sector azul	Sector amarillo
Pizzas	Sector gris	Sector anaranjado

Cada problema de comparación de razones o tasas involucra dos objetos y cuatro números: el antecedente y el consecuente de cada uno de los dos objetos. En todos los ejemplos gráficos recién presentados, el antecedente y el consecuente del lado A valen respectivamente 2 y 1, y los del lado B valen respectivamente 3 y 2. Una manera abreviada de escribir esta información es mediante el ***arreglo*** (2,1)(3,2). Es el arreglo correspondiente a la cuarta pregunta. La estructura numérica de las demás preguntas se presenta en la siguiente tabla:

Estructura Numérica de los problemas

PREGUNTA	ARREGLO
1	(2,3) (2,3)
2	(1,4) (3,2)
3	(2,3) (2,2)
4	(2,1) (3,2)
5	(3,3) (1,1)
6	(2,2) (3,2)
7	(3,3) (2,0)
8	(2,1) (4,2)
9	(2,5) (1,3)
10	(3,6) (1,2)
11	(5,2) (7,3)
12	(4,6) (2,3)
13	(3,2) (5,3)
14	(2,4) (3,5)
15	(8,4) (4,2)

2.5 CLASIFICACIÓN DE LAS RESPUESTAS

La siguiente sección está dedicada a las posibles estrategias de solución de los problemas antes señalados. Ante ellos los estudiantes muestran una diversidad de estrategias. Las estrategias cognitivas que un sujeto emplea proporcionan información relacionada con las diversas actividades que el estudiante desarrolla al resolver el problema.

Podemos decir que en el proceso de interpretación se pueden identificar algunos indicadores asociados con la estrategia de solución de cada problema, de tal manera que se identificó la estrategia empleada en cada solución con base en su expresión verbal, sus gestos, movimientos oculares, etc, mismos que son necesarios para el análisis de los resultados.

El sistema para clasificar las posibles estrategias usadas por los individuos ante problemas de comparación de razones ha sido desarrollado por Alatorre (1994, 2004). A continuación se describen sus categorías.

Básicamente, Alatorre (1994, 2004) clasifica las estrategias en sencillas y compuestas; a su vez las estrategias sencillas pueden ser centraciones y relaciones. Además de las estrategias, en algunos casos puede haber diversos mecanismos de solución. Por otra parte, todas estas estrategias pueden también ser clasificadas según su estatus de corrección.

2.5.1 CENTRACIONES

En estas estrategias de solución el individuo se centra sólo en una de tres clases de elementos del arreglo: los totales, los antecedentes o los consecuentes. El sujeto elige el objeto en el que hay más elementos (centración positiva) o en el que hay menos (centración negativa) o bien, puede decir "da igual" (centración de igualdad).

Para describir lo anterior, tenemos:

CT. Centraciones en los Totales, cuando:

{CT-}	El sujeto elige el objeto en el que la cantidad total es menor
{CT+}	El sujeto elige el objeto en el que la cantidad total es mayor
{CT=}	El sujeto dice que da igual, porque en los dos objetos hay la misma cantidad total

CA. Centraciones en los Antecedentes, cuando:

{CA+}	El sujeto elige el objeto en el que el antecedente es mayor
{CA-}	El sujeto elige el objeto en el que el antecedente es menor
{CA=}	El sujeto dice que da igual, porque los antecedentes de ambos objetos son iguales

C. Centraciones en los Consecuentes, cuando:

{CC+}	El sujeto elige el objeto en el que el consecuente es mayor
{CC-}	El sujeto elige el objeto en el que el consecuente es menor
{CC=}	El sujeto dice que da igual, porque los consecuentes de ambos objetos son iguales

Ejemplos:

- Cuando el arreglo es (2,1)(3,2), como en los ejemplos gráficos anteriormente presentados, las justificaciones que se podrían presentar son las siguientes (ejemplos del contexto Botellas de canicas).

{CT-}	La cantidad total es menor		A porque tiene menos canicas
{CT+}	La cantidad total es mayor		B porque tiene más canicas
{CA+}	El antecedente es mayor		B porque tiene más canicas azules
{CA-}	El antecedente es menor		A porque tiene menos canicas azules
{CC+}	El consecuente es mayor		B porque tiene más canicas amarillas
{CC-}	El consecuente es menor		A porque tiene menos canicas amarillas

- Cuando el arreglo es (1,4)(3,2), se podría presentar la siguiente justificación:

{CT=}	La cantidad total es igual		= porque tienen igual cantidad de canicas

- Cuando el arreglo es (2,3)(2,2), se podría presentar la siguiente justificación:

{CA=}	El antecedente es igual		= porque tienen igual cantidad de canicas azules

♦ Cuando el arreglo es (2,2)(3,2), se podría presentar la siguiente justificación:

{CC=}	El consecuente es igual		= porque tienen igual cantidad de canicas amarillas

2.5.2 RELACIONES

En esta estrategia de solución el sujeto considera paralelamente dos clases de elementos y establece una relación entre ellos; después compara los resultados en dos parejas. La relación inicial puede ser una de orden, de adición-sustracción o proporcional.

En las relaciones de orden se compara si el antecedente está en ventaja, empate o desventaja con respecto al consecuente.

Es decir, cuando:

{RO+}	El sujeto elige el objeto en el que el antecedente está en ventaja, ($a>c$), cuando en el otro objeto el antecedente está en desventaja ($a<c$), o bien,
	El sujeto elige el objeto en el que el antecedente está en ventaja, ($a>c$), cuando en el otro objeto el antecedente empata con el consecuente ($a=c$), o bien,
	El sujeto elige el objeto en el que el antecedente empata con el consecuente ($a=c$), cuando en el otro objeto el antecedente está en desventaja ($a<c$).
{ROe}	El sujeto elige el objeto en el que el antecedente empata con el consecuente ($a=c$), cuando en el otro objeto el antecedente está en ventaja ($a>c$).
{RO=}	El sujeto dice que “da igual” cuando en ambos lados el antecedente está en ventaja ($a>c$) o bien, cuando en ambos lados está en desventaja ($a<c$).

Ejemplos:

- ♦ Cuando el arreglo es (1,4)(3,2), la justificación {RO+} que se podría presentar es la siguiente: “La botella B porque tiene más canicas azules que amarillas mientras que la otra tiene más canicas amarillas que azules”.

- ♦ Cuando el arreglo es (2,2)(3,2),La justificación {RO+} que se podría presentar es la siguiente: “La botella B porque tiene más canicas azules que amarillas mientras que la otra tiene igual de canicas azules que amarillas”.

- ♦ Cuando el arreglo es (2,3)(2,2), la justificación {RO+} que se podría presentar es la siguiente: “La botella B, porque tiene igual cantidad de canicas azules y amarillas, mientras que la otra tiene menos azules que amarillas”.

- ♦ Cuando el arreglo es (2,2)(3,2), la justificación {ROe} que se podría presentar es la siguiente: “La botella A, porque tiene la misma cantidad de canicas azules y amarillas”.

- ♦ Cuando el arreglo es (2,1)(3,2), la justificación {RO=} que se podría presentar es la siguiente: “Da igual, porque en las dos botellas hay más canicas azules que amarillas”.

El segundo tipo de relaciones corresponde a las relaciones sustractivas, en las cuales se comparan antecedente y consecuente, con el fin de cuantificar la diferencia. Este tipo de estrategia es de naturaleza aditiva o sustractiva.

{RS+}	El sujeto elige el objeto en el que el resultado de la diferencia antecedente menos consecuente es mayor.
{RS}-	El sujeto elige el objeto en el que el resultado de la diferencia antecedente menos consecuente es menor.
{RS=}	El sujeto dice “da igual” porque en ambos lados las diferencias de antecedente menos consecuente son iguales.

Ejemplos:

- ♦ Cuando el arreglo es (1,4)(3,2), la justificación {RS+} que se podría presentar es la siguiente: “La botella B, porque si se quitan parejas de canicas amarillas y azules, queda 1 azul en la botella B y 3 amarillas en la botella A".

- Cuando el arreglo es (2,1)(3,2), la justificación {RS=} que se podría presentar es la siguiente: "Da igual, porque en ambas botellas la diferencia es la misma, hay una canica azul más que las amarillas".

El último tipo de relaciones corresponde a las de proporcionalidad, que también parten de la comparación del antecedente y consecuente, pero ésta se realiza de forma multiplicativa.

Es decir:

{RP+}	El sujeto elige el objeto en el que el cociente (antecedente/consecuente) o (antecedente/total) es mayor (o algún mecanismo equivalente)
{RP=}	El sujeto dice que da igual porque en ambos lados los cocientes (antecedente/consecuente) o (antecedentes/total) son iguales (o algún mecanismo equivalente).
{RP´}	Se produce un error aritmético.

Ejemplos:

- Cuando el arreglo es (1,3)(2,5), una posible justificación {RP+} que se podría presentar es la siguiente: "La botella B, porque en la botella A uno de cada cuatro canicas es azul, mientras que en la botella B le faltaría una canica amarilla para estar igual".
- Cuando el arreglo es (2,1)(4,2), una posible justificación {RP=} que se podría presentar es la siguiente: "Da igual, porque tanto en la botella A como en la B hay el doble de canicas azules que amarillas".

2.5.3 ESTRATEGIAS COMPUESTAS

En estas estrategias de solución el sujeto considera dos o más estrategias simples, las cuales pueden quedar asociadas de diversas maneras en una estrategia compuesta, en donde cada una puede ser dominante o dominada. Es decir, si E1 y E2 son dos estrategias, pueden formar cuatro posibles estrategias compuestas:

{E1 & E2}	**Conjunción:** Tanto E1 como E2, llevan a la misma decisión y se apoyan mutuamente. Tanto E1 como E2 son dominantes.
{E1 ¬ E2}	**Exclusión:** E1 lleva a la elección de un objeto o a la decisión “da igual” y E2 lleva a la elección del otro objeto, pero E1 prevalece. E1 es dominante y E2 es dominada.
{E1 * E2}	**Compensación:** E1 lleva a la elección de un objeto y E2 lleva a la decisión “da igual”, pero E1 prevalece. E1 es dominante y E2 es dominada.
{E1 ⊥ E2}	**Contrapeso:** E1 lleva a la elección de un objeto y E2 lleva a la elección del otro objeto, y la decisión es “da igual”. Tanto E1 como E2 son dominadas.

Ejemplos:

{E1 & E2}	(2,3) (1,8)	**{CA+ & CT-}** La botella A porque tiene más canicas azules y además tiene menos canicas.
{E1 ¬ E2}	(2,3) (1,2)	**{CA+ ¬ CT-}** La botella A porque tiene más canicas azules a pesar de que la botella B tiene menos canicas.
{E1 * E2}	(2,3) (1,4)	**{CA+ * CT=}** La botella A porque tiene más canicas azules aunque tienen la misma cantidad de canicas las dos botellas.
E1 ⊥ E2	(2,3) (1,2)	**{CA+ ⊥ CT-}** Da igual, aunque la botella A tiene más canicas azules, pero por el otro lado tiene menos canicas la botella B, por tanto da igual.

2.5.4 MECANISMOS

Entre las respuestas obtenidas en esta investigación, algunas no pueden ser clasificadas según el sistema de estrategias. Se trata de respuestas que expresan una manera de pensar en la que cada estudiante muestra un estilo personal de resolución de problemas.

Alatorre (2004) argumenta que los mecanismos no alcanzan el estatus de estrategias, no son repetibles y no se puede predecir a qué decisión llegaría un sujeto que las utilizase.

Ejemplo:

De Aproximación

Aparece cuando el sujeto observa la representación gráfica del problema, ya sea la que se le presenta a él en los contextos de Pizza y Ruletas, o la que él mismo dibuja en el contexto de Fracciones, y resuelve la pregunta estimando las áreas observadas.

De Tamaño y Dispersión

Aparece cuando el sujeto observa la representación gráfica del problema, que se puede presentar en el contexto de ruletas. Algunos sujetos tienden a elegir la ruleta con una mayor porción continua de color azul y otros tienden a elegir la ruleta en la que los sectores azules estén más dispersos.

Otros

Aparecen cuando el sujeto observa la representación gráfica del problema, ya sea la que se le presenta en el contexto de Pizzas de índole geométrica, en el contexto Botellas que tiene que ver con concepciones de azar y especialmente en el contexto de fracciones en donde se aprecian fallas sustanciales en el concepto de fracción.

2.5.5 ESTRATEGIAS CORRECTAS, POTENCIALMENTE CORRECTAS E INCORRECTAS

De acuerdo a Alatorre (2004), las estrategias correctas son aquellas que cada vez que se pueden aplicar coinciden con el resultado formal, ya sea directamente (como {RP+} y {RP=}) o indirectamente, lo que ocurre cuando son algebraicamente equivalentes al resultado formal. Pueden ser estrategias simples o compuestas; las primeras son las relaciones de orden {RO+}, y entre las segundas están las estrategias compuestas del estilo de la conjunción {CA+ & CC-} (cada vez que en un objeto el antecedente es mayor y el consecuente es menor que en el otro, las razones en él son mayores que en el segundo). En adelante al conjunto de centraciones y composiciones correctas lo denominaremos CCC.

La estrategias potencialmente correctas son aquellas que cuando la estructura numérica es tal que una composición correcta lleva a la elección de un lado (A o B), y un sujeto justifica la elección de ese lado sólo mediante una de las estrategias simples de la composición, cabe la posibilidad de que esté considerando el otro componente, pero no lo esté verbalizando. En estos casos decimos que la justificación es una expresión potencialmente incompleta de una justificación correcta, lo cual abreviamos diciendo que la estrategia es potencialmente correcta (Alatorre, 2004). Esto puede ocurrir en las preguntas 1, 2, 3 y 6.

Las estrategias incorrectas son aquellas que cuando se pueden aplicar, no son algebraicamente equivalentes al resultado formal. Están incluidas en esta categoría la mayoría de las centraciones, la relación de orden de igualdad y las relaciones sustractivas.

Las siguientes tablas presentan las distintas clases de estrategias de acuerdo con su estatus de corrección. En la primera tabla se presentan las estrategias correctas, potencialmente correctas e incorrectas para las preguntas 1 a 7 del instrumento, y en la segunda tabla se presenta lo mismo para las preguntas 8 a 15, con la salvedad de que en estas últimas las únicas estrategias correctas son {RP+} y {RP=}, por lo que no hay estrategias potencialmente correctas.

En cada caso se presenta, junto con el arreglo que describe la estructura numérica de la pregunta, las posibles estrategias que pueden acompañar a cada decisión (Dec): A, B o da igual (=). Cabe resaltar que a la decisión correcta (A, B o =) se puede llegar mediante el uso de una de las posibles estrategias correctas o bien mediante una estrategia incorrecta. Sólo en el primer caso la respuesta es correcta. Por ejemplo, en la pregunta 2, cuyo arreglo es (1,4)(3,2), se puede elegir el lado B por tener mayor antecedente (3>1) y menor consecuente (2<4) que el lado A, es decir por la composición correcta {CA+ & CC–}, pero también se puede argumentar a favor de B diciendo que el antecedente rebasa por 1 al consecuente mientras que en A el antecedente es rebasado por 3, es decir por la estrategia incorrecta {RS+}.

Por ello no basta saber la decisión del sujeto sino que es imperativo conocer, mediante un análisis cualitativo, qué estrategia utilizó para llegar a esa decisión.

RESPUESTAS CORRECTAS, POTENCIALMENTE CORRECTAS E INCORRECTAS EN LAS PREGUNTAS 1 A 7

Preg	Arreglo	Respuestas correctas		Respuestas potencialmente correctas		Respuestas incorrectas	
		Dec	Estrategias simples y compuestas	Dec	Estrategias simples	Dec	Estrategias simples
1(*)	(3,3)(3,3)	=	{RP=}, {CA= & CC=}, {CA= & CT=}, {CC= & CT=}	=	{CA=}, {CC=}, {CT=}	=	{RS=}
1(**)	(2,3)(2,3)	=	{RP=}, {CA= & CC=}, {CA= & CT=}, {CC= & CT=}	=	{CA=}, {CC=}, {CT=}	=	{RO=}, {RS=}
2	(1,4)(3,2)	B	{RP+}, {RO+}, {CC- * CT=}, {CA+ * CT=}, {CA+ & CC–}	B	{CA+}, {CC–}	A	{RS–}
						B	{CA–}, {CC+}, {RS+}
						=	{CT=}
3	(2,3)(2,2)	B	{RP+}, {RO+}, {CC- * CA=}, {CT- * CA=}	B	{CC–}, {CT–}	A	{CT+}, {RS–}
						B	{CC+}, {RS+}
						=	{CA=}
4	(2,1)(3,2)	A	{RP+}			A	{CT–}, {CA–}, {CC–}
						B	{CA+}, {CC+}, {CT+}
						=	{RO=}, {RS=}
5	(3,1)(1,1)	=	{RP=}			A	{CA+}, {CT+}, {CC+}
						B	{CA–}, {CT–}, {CC–}
						=	{RS=}
6	(2,2)(3,2)	B	{RP+}, {RO+}, {CA+ * CC=}, {CT+ * CC=}	B	{CA+}, {CT+}	A	{CA–}, {CT–}, {RS+}, {ROe}
						B	{RS–}
						=	{CC=}
7	(3,3)(2,0)	B	{RP+}, {RO+}, {CC–}			A	{CA+}, {CT+}, {CC+}, {RS–}, {ROe}
						B	{CT–}, {CA–}, {RS+}

*: en Pizzas y Ruletas

**: en los demás contextos

RESPUESTAS CORRECTAS E INCORRECTAS EN LAS PREGUNTAS 8 A 15

Preg	Arreglo	Respuestas correctas		Respuestas incorrectas	
		Dec	Estrategia simple (*)	Dec	Estrategias simples
8	(2,1)(4,2)	=	{RP=}	A	{CT–}, {CA–}, {CC–}, {RS–}
				B	{CA+}, {CT+}, {CC+}, {RS+}
				=	{RO=}
9	(2,5)(1,3)	A	{RP+}	A	{CA+}, {CT+}, {CC+}, {RS–}
				B	{CA–}, {CT–}, {CC–}, {RS+}
				=	{RO=}
10	(3,6)(1,2)	=	{RP=}	A	{CA+}, {CT–}, {CC+}, {RS–}
				B	{CA–}, {CT+}, {CC–}, {RS+}
				=	{RO=}
11	(5,2)(7,3)	A	{RP+}	A	{CA–}, {CT–}, {CC–}, {RS–}
				B	{CA+}, {CT+}, {CC+}, {RS+}
				=	{RO=},
12	(4,6)(2,3)	=	{RP=}	A	{CA+}, {CT+}, {CC+}, {RS–}
				B	{CA–}, {CT–}, {CC–}, {RS+}
				=	{RO=}
13	(3,2)(5,3)	B	{RP+}	A	{CA–}, {CT–}, {CC–}, {RS–}
				B	{CA+}, {CT+}, {CC+}, {RS+}
				=	{RO=}
14	(2,4)(3,5)	B	{RP+}	A	{CA–}, {CT–}, {CC–},
				B	{CA+}, {CT+}, {CC+}
				=	{RO=}, {RS=}
15	(8,4)(4,2)	=	{RP=}	A	{CA+}, {CT+}, {CC+}, {RS+}
				B	{CA–}, {CT–}, {CC–}, {RS–}
				=	{RO=}

* En estas preguntas no hay correctas que sean centraciones, estrategias compuestas ni respuestas potencialmente correctas

2.6 PROCEDIMIENTOS

Primeramente al iniciar las entrevistas consideraremos lo que dice Perkins (1981), quien menciona varios puntos que son necesarios antes de empezar las entrevistas:
Invitar al sujeto a que:

- Diga lo que esté en su mente, no guardándose lo que pueda considerar como conjetura o idea vaga.
- Hable en tono que se oiga.
- No sólo trate de describir lo que está representado en forma gráfica.

El método de trabajo fue a nivel de entrevista en el que:

- El estudiante pensó en voz alta.
- El entrevistador siempre trató de reducir su participación a un mínimo y a veces cuestionaba al estudiante acerca de algo que no era claro. Al igual que los maestros, como entrevistadores, tuvimos que entender muy bien el proceso cognitivo, escuchar y observar a los estudiantes cuidadosamente para tener una idea razonable acerca de qué clase de operaciones mentales usan al resolver los problemas que invocan un razonamiento proporcional. En este sentido la participación del entrevistador se redujo con frecuencia a preguntar en cada respuesta que no era clara ¿por qué?

En la entrevista se usó un material concreto (ver el Anexo 1) el cual fue manipulable. Al entrevistado se le hicieron preguntas con base en el material, es decir, que la entrevista aplicada al estudiante se inició con un contexto que contenía preguntas preestablecidas.

Se usó video cámara y no hubo límite de tiempo. Posteriormente se transcribieron las entrevistas y se extrajo la parte más representativa de cada respuesta (ver el Anexo 2).

A partir de ahí se analizó la estrategia que empleó cada sujeto en cada pregunta.

El análisis de los resultados se realizó de diversas maneras.

Por una parte se procedió a un análisis cuantitativo, para lo cual se le dio un valor de corrección a cada respuesta, y se definieron distintos conjuntos de respuestas, que fueron clasificados en diversos grupos. Estos procedimientos conforman los apartados 3.6.1 y 3.6.2.
Por otra parte se realizó un análisis cualitativo que incluye un retrato cognitivo de cada sujeto.

2.6.1. INDICADOR PARA EL ANALISIS CUANTITATIVO: EL PUNTAJE ÍNDICE DE CORRECCIÓN (PIC)

De acuerdo con las distintas clases de estrategias que usaron los entrevistados, en este trabajo se consideran tres tipos de respuestas según su corrección: correctas, potencialmente correctas e incorrectas (ver el apartado 3.5.4). Alatorre (2004) arguye que desde un punto de vista estricto, sólo se puede considerar como correctas las respuestas marcadas como tales, y por lo tanto son las únicas que deben considerarse para esa contabilidad. Sin embargo agrega que desde un punto de vista más laxo, también las respuestas denominadas "potencialmente correctas" podrían ser consideradas como correctas; en todo caso no son marcadamente incorrectas, aunque desde luego tampoco son "totalmente" correctas. Para esta autora la opción salomónica ha sido la construcción de un "Puntaje-Índice de Corrección" (PIC) calculado de la siguiente manera:

- A cada respuesta correcta se le asigna un punto.
- A cada respuesta potencialmente correcta se le asigna medio punto. También se asigna medio punto a las respuestas con elección correcta (A, B o da igual) pero sin justificación clasificada en estrategias (por ejemplo, las descripciones).
- A cada respuesta incorrecta se le asigna cero puntos.

Para cualquier conjunto de respuestas se suman los puntos así obtenidos en el conjunto y se expresa la suma como un porcentaje del total de respuestas del conjunto.

Las 1096 respuestas obtenidas se clasifican como sigue:

	Correctas	Potencialmente Correctas	Incorrectas	Total
Total	601	167	328	1096
Porcentaje	54.8	15.2	29.9	100

Los resultados de la tabla anterior pueden convertirse en puntajes PIC de la siguiente manera:

$$PIC = \frac{100\ (601x1+167x0.5+328x0)}{1096} = 62$$

Es decir, los sujetos que participaron en esta investigación obtuvieron un PIC global promedio de 62.

Los conjuntos de respuestas se pueden definir de acuerdo con diversos criterios. Por ejemplo, una forma de analizar los resultados obtenidos es de acuerdo con los contextos, lo que da lugar a la siguiente tabla.

	CORRECTAS	POTENCIALMENTE CORRECTAS	INCORRECTAS	TOTAL♣	PIC
TASAS	338	62	93	493	75
MEZCLA	114	32	70	216	60
PROBABILIDAD	95	29	95	219	50
PARTICIONES	54	44	70	168	45
TOTAL	601	167	328	1096	62

Es decir, en tasas se tiene un puntaje más alto que el promedio, mientras que los problemas de mezcla tienen un puntaje cercano al promedio, y particiones y probabilidad tienen puntajes más bajos que el promedio.

El puntaje índice de corrección así calculado equivale a considerar, por una parte, el porcentaje de respuestas estrictamente correctas (54.8% del total de las respuestas

♣La cantidad total de respuestas en cada tipo de contexto depende de las preguntas que se le plantearon a cada sujeto, que como se explicó en el apartado 2.4.2 fue una cantidad variable.

correctas), por otra parte, el porcentaje de respuestas correctas junto con el de potencialmente correctas (54.8% + 15.2% = 70%) y calcular el promedio de los dos: PIC =(54.8 +70)/2=62. Es decir, el PIC es lo que está a medio camino entre los dos puntos de vista acerca de la corrección, el estricto y el más laxo.

Con esto no se pretende que el PIC sea el portador de una verdad absoluta, pero sí es un indicador que puede facilitar las indagaciones acerca del nivel de resultados correctos en diversos grupos de respuestas. En ese sentido, el PIC se puede considerar también como un indicador del grado de dificultad de una pregunta o un grupo de preguntas. Sea como fuere, el análisis cuantitativo que permite el PIC no es la única vía de análisis, sino sólo un complemento a un análisis cualitativo acerca del tipo de estrategias utilizadas en cada grupo de respuestas.

2.6.2 COMPORTAMIENTO DE ACUERDO A LA DIFICULTAD

Al analizar la estructura numérica de las preguntas de comparación de razones o tasas, Alatorre (2004) definió 86 situaciones distintas. Posteriormente las agrupó en tres *niveles de dificultad*, que definió como sigue:

- Un primer nivel, L1, está conformado por las situaciones en las que pueden ser correctamente aplicadas, además de las relaciones de proporcionalidad {RP+} y {RP=}, las relaciones de orden {RO+} o bien las estrategias CCC. En el cuestionario aplicado en esta investigación, son de nivel L1 las preguntas 1, 2, 3, 6 y 7 (ver primera tabla del apartado 2.5.5).
- En un segundo nivel, L2, se encuentran las tres situaciones de proporcionalidad en las que solamente son correctamente aplicables las estrategias {RP=}. Son de nivel L2 las preguntas 5, 8, 10, 12 y 15 del instrumento (ver tablas del apartado 2.5.5).
- En un tercer nivel, L3, se ubican las ocho situaciones en las que las únicas estrategias correctamente aplicables son las {RP+}. Son de nivel L3 las preguntas 4, 9, 11, 13 y 14 del cuestionario aplicado (ver tablas del apartado 2.5.5).

GRUPOS DE RESPUESTAS

Alatorre (2004) establece una forma de agrupar conjuntos de respuestas de acuerdo a los valores PIC alcanzados en los tres niveles de dificultad. Definió cuatro grupos distintos que denominó A, B, C y D.

El grupo A se determinó de acuerdo a las siguientes características:

- Valores relativamente altos en L1
- Valores bajos o muy bajos en L2
- Valores muy bajos en L3

En este grupo se encuentran respuestas correctas de tipos CCC y {RO+} en las preguntas del nivel L1, pero estas estrategias no permiten la resolución en L2 ni en L3.

El grupo B se clasificó de acuerdo a las siguientes características:

- Valores altos en L1
- Valores medios en el nivel L2
- Valores bajos en el nivel L3

Dentro de este grupo podemos apreciar que los valores PIC en el nivel de dificultad L2 están cerca de la mitad entre L1 y L3, lo que hace que las gráficas sean cercanas a las líneas rectas. En este grupo se encuentran respuestas con un uso adecuado de CCC y {RO+} en L1, y algunos usos de {RP=} en L2. Sin embargo, las aplicaciones de {RP+} en L3 son menos exitosas que las de {RP=} en L2.

El grupo C se definió de acuerdo a las siguientes características:

- Valores altos en L1
- Valores en L2 prácticamente a la par con el nivel L1
- Valores relativamente bajos en L3

En este grupo se encuentran usos eficientes tanto de CCC y {RO+} como de {RP} en L1 y con la misma eficiencia usos de {RP=} en L2, pero todavía se detectan algunas dificultades para el uso de {RP+} en L3.

Finalmente, el grupo D se clasificó de acuerdo a las siguientes características:

- Los valores que se alcanzan en los tres niveles L1, L2 y L3 son prácticamente los mismos, es decir, altos.

En estas respuestas no hay dificultades ni para aplicar CCC, {RO+} ó {RP} en L1, ni para aplicar {RP=} en L2, ni para aplicar {RP+} en L3.

En resumen, los cuatro grupos se comportan de acuerdo con los siguientes niveles:

	L1	**L2**	**L3**
A	Altos	Bajos o muy bajos	Muy bajos
B	Altos	Medios	Bajos
C	Altos	Altos	Bajos
D	Altos	Altos	Altos

Estos cuatro grupos sirven para clasificar conjuntos de respuestas. Dichos conjuntos pueden ser por ejemplo según tipo de contexto o según edad.

Los cuatro grupos (A, B, C, D) tienen un orden cognitivo. Según Alatorre (2004), para cada contexto cada sujeto pasa progresivamente por comportamientos de tipo A, B, C y D (aunque su desarrollo se puede detener en cualquiera de estas etapas). La graduación A, B, C, D también se puede entender como una graduación en la calidad de las respuestas, de la más baja a la más alta.

3 ANÁLISIS DE RESULTADOS

Después de las contribuciones teóricas y metodológicas que se desarrollaron hablaremos de las aportaciones que consisten en los resultados obtenidos en los análisis de los datos, y trataremos de responder las preguntas básicas que nos planteamos en la realización de este proyecto: ¿Qué procedimientos espontáneos utilizan los alumnos para resolver problemas de razonamiento proporcional?, ¿qué características tienen esos procedimientos? y ¿hay diferencias entre jóvenes y adultos en el uso de esos procedimientos? En este capítulo se reúnen los principales resultados obtenidos acerca del desempeño que tuvieron en el momento de la entrevista los sujetos entrevistados. Además, se realiza un análisis cuantitativo y cualitativo de dicha información.

En este capítulo abordaremos las preguntas: ¿Cómo contestaron las preguntas los diez sujetos entrevistados? ¿Qué tipo de estrategias utilizaron en cada una? ¿Cuántas fueron clasificadas como estrategias? ¿Cómo contestaron los sujetos a preguntas con distintos grados de dificultad? ¿y a preguntas de distintos contextos? ¿Puede atribuirse a la edad o al sistema de enseñanza alguna diferencia en la manera de responder?

En el análisis de los resultados, consideramos lo que dicen Inhelder y Piaget (citado en Fiol y Fortuna, 1990) acerca de la resolución de problemas de proporcionalidad: algunos estudiantes parecen no entender el problema, otros sólo utilizan parte de la información, otros más relacionan los datos sólo de forma cualitativa, otros utilizan estrategias equivocadas (aditivas, por ejemplo) y finalmente están los que contestan comparando razones utilizando la estructura multiplicativa. Estas últimas estrategias corresponden a lo que Alatorre (2004) ha llamado {RP}; sin embargo, como se señaló en 2.5.5, nosotros reconocemos también como correctas, en aquellas estructuras numéricas en que se pueden aplicar, las centraciones y composiciones correctas CCC y las relaciones de orden que llevan a elección de uno de los dos objetos {RO+}; en este sentido nos apartamos de la posición clásica piagetiana.

Por otra parte, analizamos algunas de las variables que afectan a la resolución de los problemas de este tipo:

- Dentro de las variables centradas en los alumnos, la edad y el sistema de enseñanza de la secundaria
- Dentro de las variables centradas en el problema, el contexto (problemas de tasa, parte, parte-todo o de probabilidad) y la estructura numérica (en particular los tres niveles de dificultad L1, L2, L3)

Primeramente presentamos los resultados generales de los diez sujetos entrevistados. Después echamos una mirada cuantitativa mediante la aplicación del puntaje índice de corrección PIC y la clasificación en grupos de respuestas (ver 3.6.2), y posteriormente una mirada cualitativa a través del análisis de las estrategias utilizadas. En estos dos ejercicios paralelos nos ocuparemos de las respuestas de cada sujeto a cada tipo de contexto (tasa, mezcla, probabilidad y partición); así mismo mostramos las estrategias correctas e incorrectas que los estudiantes emplearon al resolver los problemas. Continuamos con el estudio de cada individuo y reunimos todos los elementos para poder hablar de cada sujeto entrevistado y dar una visión general de su comportamiento al resolver los problemas planteados. Para finalizar realizamos un análisis comparativo entre los sujetos que cursan ambos sistemas de enseñanza de secundaria, escolarizada y abierta.

Como las muestras obtenidas no son ni representativas ni suficientemente grandes no se pueden generalizar conclusiones a ninguna población y lo que se observe en especial en la última parte de este capítulo sólo puede servir de base para plantear nuevas preguntas de investigación.

Por último podemos decir que todo el procedimiento analítico que se muestra alude a las preguntas específicas que se plantearon en la investigación con sus contextos específicos, y se refiere así mismo a los sujetos en concreto con los que se trabajó, con sus edades, sus escolaridades y sus estilos personales de responder.

3.1 RESULTADOS GENERALES

Primeramente podemos decir que de cada uno de los diez sujetos entrevistados, se obtuvo entre 103 y 118 respuestas; en total obtuvimos 1096 respuestas. Ese número no es el resultado de diez sujetos multiplicado por ocho contextos y por 15 arreglos numéricos, porque por una parte no todas las preguntas se les plantearon a todos los sujetos (dependiendo de las respuestas que iba dando cada sujeto se eliminaban algunas preguntas) y por otra parte hubo casos en los que un sujeto dio varias respuestas sucesivas a una misma pregunta. Estas respuestas se pueden clasificar como sigue:

Respuestas dadas mediante	Total
Estrategias	961
Mecanismos e incomprensiones	42
Sin Justificación y descripciones	93
Total	1096

Las “respuestas sin justificación o descripciones” se deben en su mayor parte a no hacer una pregunta básica a los sujetos: ¿por qué? Al mismo tiempo también se debió a que los entrevistados en ocasiones sólo optaban por señalar lo que a simple vista era muy obvio sin dar las razones de su elección. Es por ello que estas respuestas fueron clasificadas de esta manera.

Como ya se dijo en el apartado 2.5.5, las estrategias pueden ser clasificadas como correctas, potencialmente correctas o incorrectas. Los mecanismos fueron todos clasificados como incorrectos, y de acuerdo a lo señalado en el apartado 2.6.1 las respuestas descriptivas o sin justificación con la elección correcta se trataron como potencialmente correctas y las demás como incorrectas. De esta manera se obtuvo lo siguiente:

Respuestas	Total
Correctas	601
Potencialmente correctas	167
Incorrectas	328
Total	1096

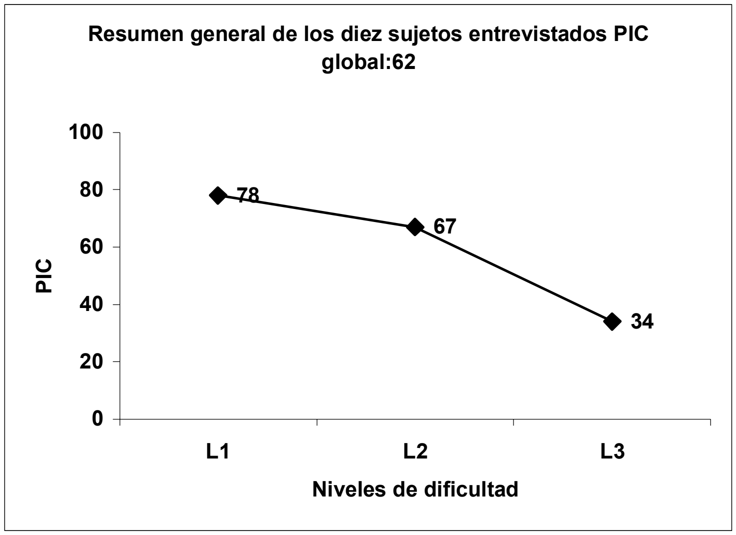
En cuanto al puntaje índice de corrección PIC, de acuerdo con los resultados obtenidos por contextos, tenemos la siguiente tabla tomada del apartado 2.6.1:

Problemas de:	Total	PIC
Tasa	493	75
Mezcla	216	60
Probabilidad	219	50
Partición	168	45
Total	1096	62

Y de acuerdo a los niveles de dificultad (ver apartado 2.6.2) tenemos lo siguiente:

Nivel de Dificultad	Total	PIC
L1	461	78
L2	336	67
L3	299	34
Total	1096	62

Esto indica que a mayor grado de dificultad en la resolución de problemas de razonamiento proporcional los sujetos entrevistados efectivamente cometían mayor cantidad de errores en sus respuestas, lo que se puede apreciar en la siguiente gráfica:



En general el comportamiento del grupo de los diez sujetos entrevistados es de tipo B y un PIC global de jóvenes y adultos de 62. En L1 tiene su más alto PIC (78). En este nivel de dificultad todos los sujetos prefirieron principalmente el uso de las estrategias más fáciles CCC y {RO+} a las de razonamiento proporcional {RP}. Sin embargo se nota en el declive que de L1 a L2, al grupo de trabajo se le dificultó resolver los problemas planteados en L2 y mucho más en L3. Es decir, que en la utilización de estrategias elegían con mayor frecuencia estrategias que no necesariamente requieren un conocimiento formal, sino que apelan a procedimientos informales. Esto se nota en L2 y L3 donde necesariamente tienen que resolver los problemas mediante el razonamiento proporcional, en L2 con {RP=} y en L3 con {RP+].

Al mismo tiempo podemos decir que de las 459 respuestas que dieron en el nivel de dificultad L1 el grupo de los 10 entrevistados, 290 fueron correctas, de las cuales el 35% son CCC, el 22% {RO+} y el 6% {RP}. En L2 tenemos que de las 336 respuestas sólo fueron correctas 211, lo que equivale al 63% en este nivel de dificultad. Y en L3 de las 301 respuestas sólo 99 fueron correctas, lo cual representa el 33% de intentos acertados.

En forma general a estos sujetos entrevistados se les facilitaron los problemas de L1 porque se pueden resolver de diferentes maneras, tuvieron un comportamiento intermedio en los problemas de proporcionalidad y un comportamiento bajo en problemas de no proporcionalidad que sólo pueden ser resueltos mediante {RP+}.

Otra comparación global que conviene hacer aquí es entre jóvenes y adultos:

Grupo de Trabajo	Total	PIC
Adultos	540	67
Jóvenes	546	58
Total	1096	62

De la tabla anterior tenemos que el grupo de adultos presentó un PIC ligeramente mayor que el de los jóvenes, en cuanto a las respuestas correctas que dieron a los problemas de razonamiento proporcional. Esto puede sugerir una mejor comprensión por parte de los adultos en la resolución de los problemas planteados.

3.2 RESPUESTAS POR TIPO DE CONTEXTO Y SUJETOS

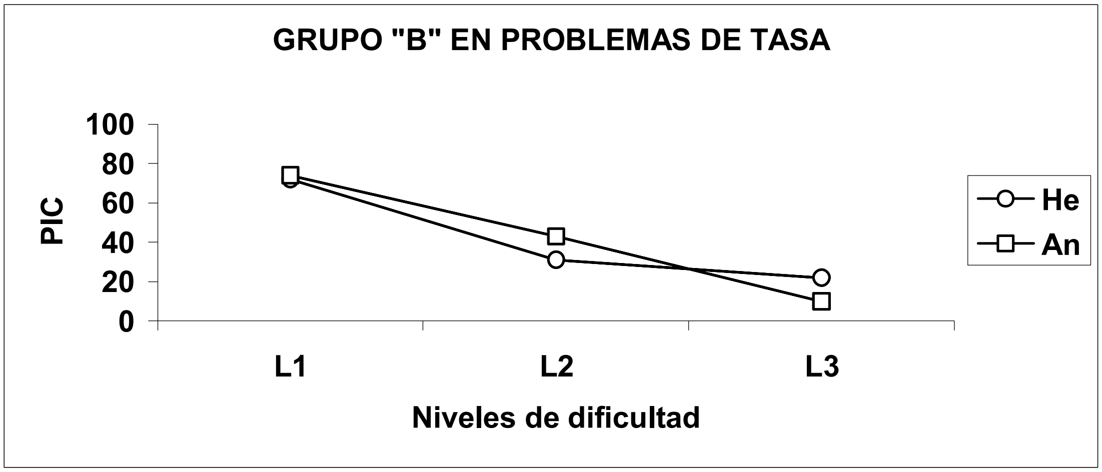
En este apartado lo que pretendemos es realizar un escrutinio de los cuatro distintos tipos de contexto que conforman los cuestionarios. Se analizan las respuestas obtenidas, agrupando por tipos de contexto: tasa, mezcla, probabilidad y partición. En cada tipo de contexto nos interesa conocer el desempeño de cada sujeto en los tres niveles de dificultad; esto permite clasificar dicho desempeño en uno de los cuatro grupos (A, B, C o D) descritos en 2.6.2. Por ejemplo Héctor (He) responde en el grupo A en problemas de probabilidad, en el B en problemas de tasa y de mezcla y en el C en problemas de partición.

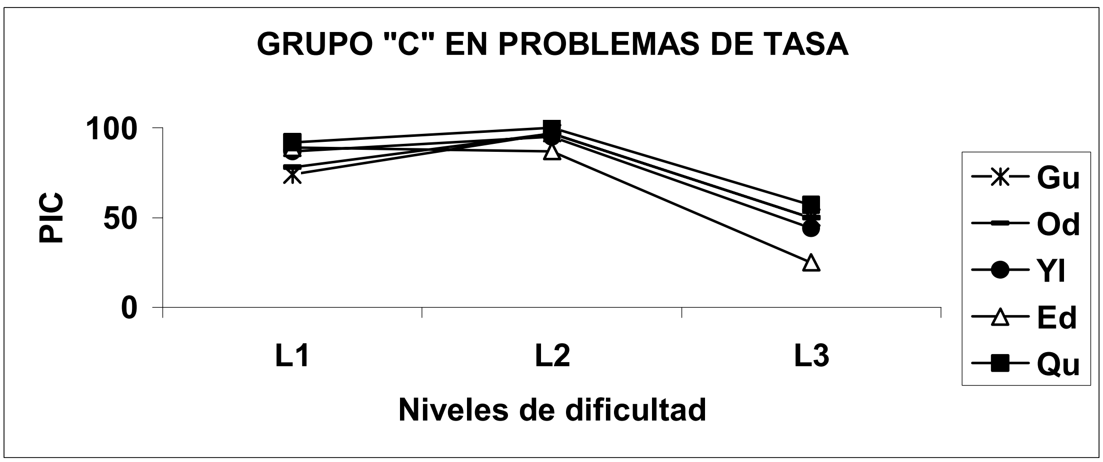
Mostraremos estos resultados de dos maneras. Por una parte las gráficas permitirán mostrar que los desempeños clasificados en un mismo grupo son efectivamente similares. Por otra parte en el resumen de dichos comportamientos buscaremos una comparación entre los dos conjuntos que nos interesan: jóvenes y adultos.

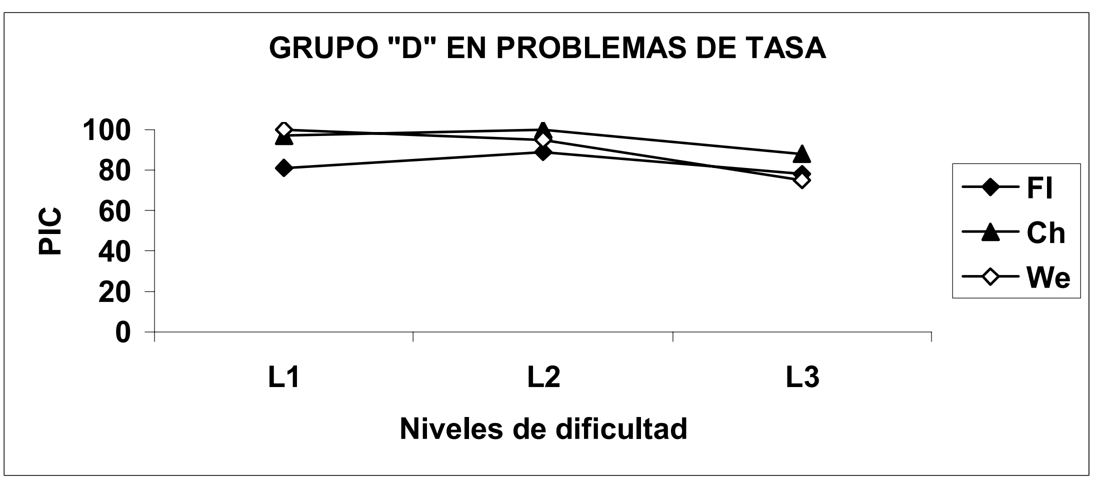
3.2.1 GRÁFICAS

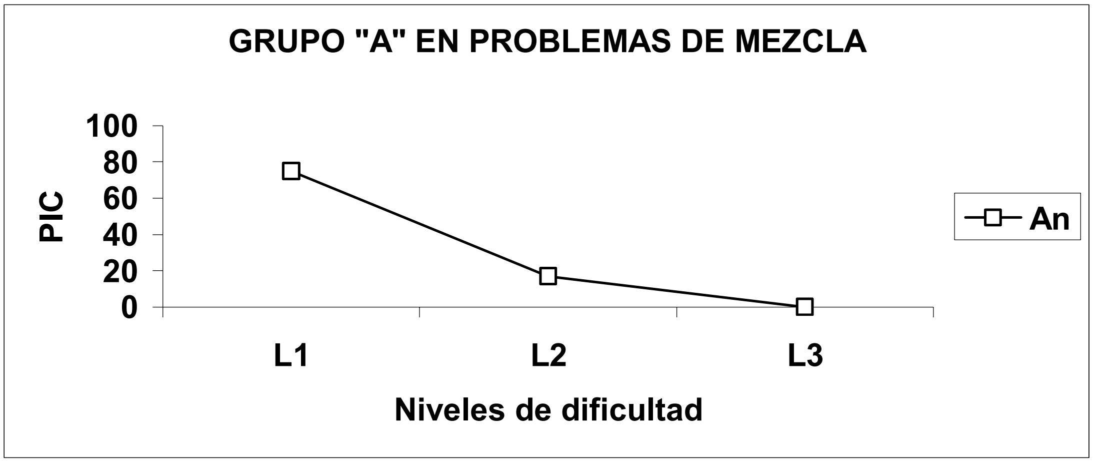
Para ver con detalle las respuestas de los sujetos entrevistados, se estudió el comportamiento de cada uno de los diez estudiantes en cada uno de los cuatro tipos de contextos. Las gráficas a las que dio lugar este tipo de análisis fueron amalgamadas por tipo de perfil de grupo; de esta forma para cada tipo de contexto (tasa, mezcla, probabilidad y partición) se presentan dos o tres gráficas según los grupos (A, B, C ó D) que se registraron y en cada una de ellas se tienen las representaciones (entre una y ocho) de los sujetos en ese grupo.

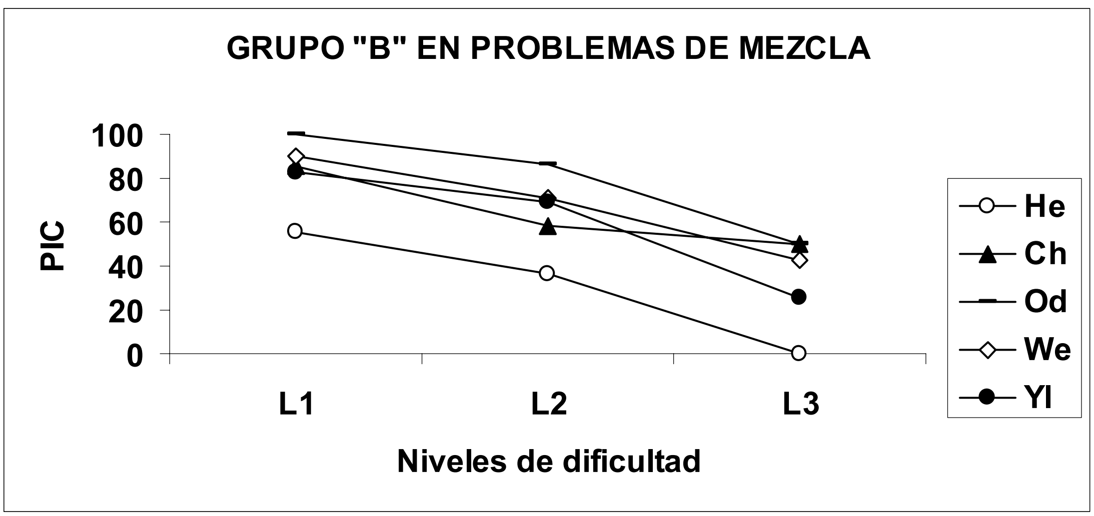
Como se verá, los sujetos pueden variar de grupo según el contexto: no necesariamente están en el mismo grupo en todos los contextos: en general se puede decir que si están en un grupo en problemas de tasa, están en el mismo o uno peor en problemas de mezcla, y en el mismo o uno peor que ése en problemas de probabilidad.

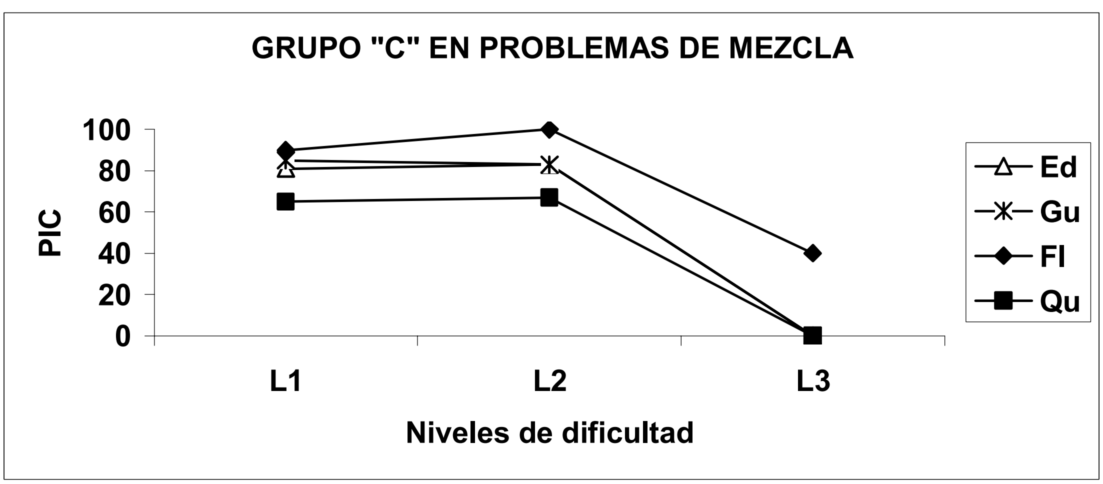

GRUPO "B" EN PROBLEMAS DE TASA
PIC
100
80
60
40
20
0
L1
L2
L3
Niveles de dificultad
He
An

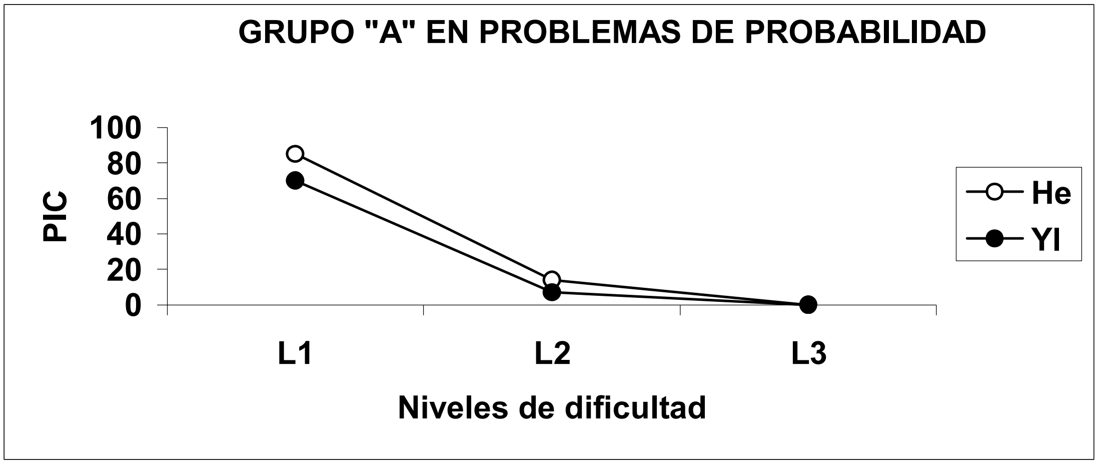

GRUPO "C" EN PROBLEMAS DE TASA
PIC
100
50
0
L1
L2
L3
Niveles de dificultad
Gu
Od
Yl
Ed
Qu

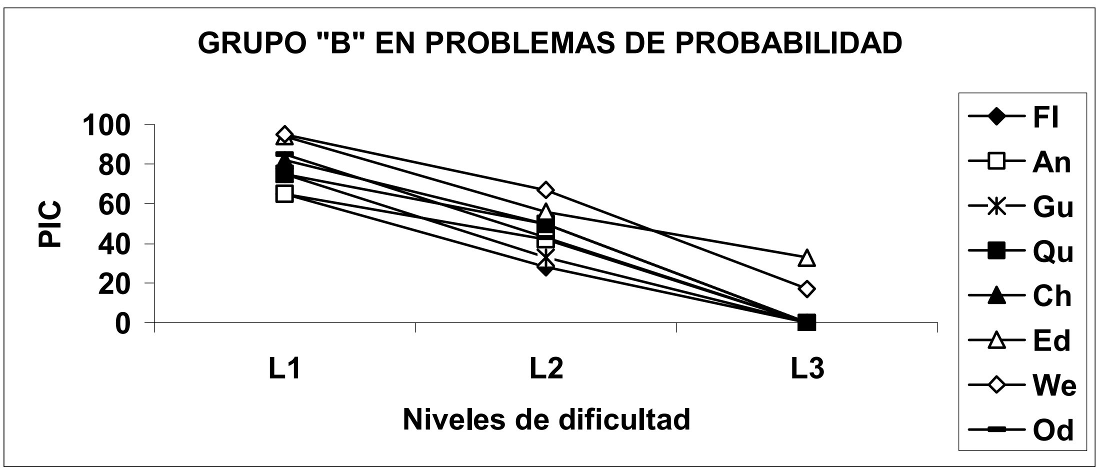

GRUPO "D" EN PROBLEMAS DE TASA
PIC
100
80
60
40
20
0
L1
L2
L3
Niveles de dificultad
Fl
Ch
We

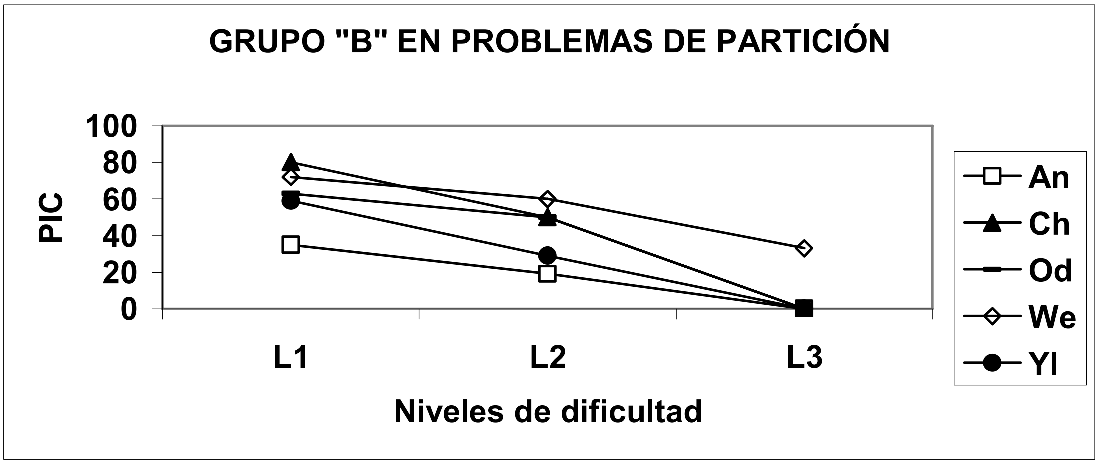

GRUPO "A" EN PROBLEMAS DE MEZCLA
PIC
100
80
60
40
20
0
L1
L2
L3
Niveles de dificultad
An

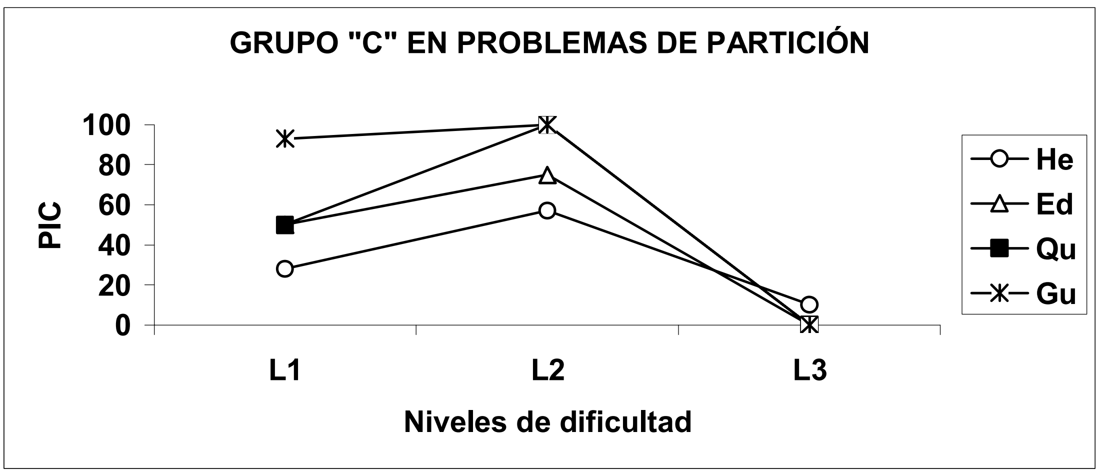

GRUPO "B" EN PROBLEMAS DE MEZCLA
PIC
100
80
60
40
20
0
L1
L2
L3
Niveles de dificultad
He
Ch
Od
We
Yl

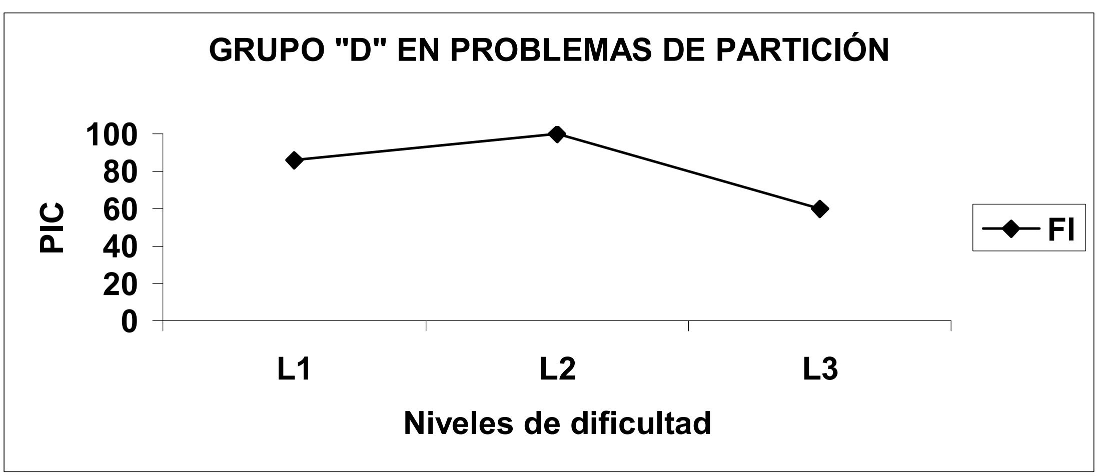

GRUPO "C" EN PROBLEMAS DE MEZCLA
PIC
100
80
60
40
20
0
L1
L2
L3
Niveles de dificultad
Ed
Gu
Fl
Qu


GRUPO "A" EN PROBLEMAS DE PROBABILIDAD
PIC
100
80
60
40
20
0
L1
L2
L3
Niveles de dificultad
He
Yl


GRUPO "B" EN PROBLEMAS DE PROBABILIDAD
PIC
100
80
60
40
20
0
L1
L2
L3
Niveles de dificultad
Fl
An
Gu
Qu
Ch
Ed
We
Od


GRUPO "B" EN PROBLEMAS DE PARTICIÓN
100
80
60
40
20
0
PIC
L1
L2
L3
Niveles de dificultad
An
Ch
Od
We
Yl


GRUPO "C" EN PROBLEMAS DE PARTICIÓN
100
80
60
40
20
0
PIC
L1
L2
L3
Niveles de dificultad
He
Ed
Qu
Gu


GRUPO "D" EN PROBLEMAS DE PARTICIÓN
100
80
60
40
20
0
PIC
L1
L2
L3
Niveles de dificultad
Fl

Salvo en problemas de partición los diferentes sujetos dentro de un mismo grupo se comportan homogéneamente, lo cual corrobora que los grupos están bien definidos. Además se corrobora lo que afirma Alatorre (2004) en el sentido de que hay un orden cognitivo A,B,C,D, donde el grupo D contiene las respuestas cognitivas más adelantadas.

Encontramos que el grupo A (respuestas menos acertadas) sólo se presenta en mezcla y probabilidad y que los grupos más numerosos fueron los grupos B y C, que además ocurren en los cuatro contextos; por ejemplo en los problemas de tasa el grupo C es el que tiene la mayor cantidad de sujetos y en problemas de mezcla, de probabilidad y partición, es el grupo B.

Se puede ver que en problemas de tasa hay respuestas cognitivas más adelantadas, ya que hay tres en el grupo D, cosa que no se alcanzó en otros contextos.

En el otro extremo los problemas de probabilidad son lo que tienen respuestas cognitivas más elementales: dos sujetos en el grupo A, una gran mayoría en el grupo B y ningún sujeto en los grupos C y D.

De los resultados obtenidos de los diez sujetos que participaron en esta investigación encontramos que:

En los problemas de tasa resultó que más entrevistados resolvieron este tipo de problemas dentro del grupo C aunque de ellos la mayoría fue adultos. Y sólo tres respondieron dentro del grupo D, de los cuales son dos adultos y una joven.

En los problemas de mezcla tenemos que el conjunto más fuerte de entrevistados estuvo en el grupo B, de los cuales fueron dos jóvenes y tres adultos. Seguidamente el grupo C fue abundante en cuanto al número de estudiantes pues en este grupo respondieron dos jóvenes y dos adultos a estos problemas.

En los problemas de probabilidad la mayoría de los sujetos entrevistados resolvieron dentro del grupo B, y no hubo respuestas en el grupo C ni en el D. Esto indica que tanto a jóvenes como a adultos la resolución de problemas de probabilidad les resulta igualmente difícil.

Por último, en los problemas de particiones el grupo más fuerte de entrevistados estuvo en el grupo B, mientras que en el grupo D sólo estuvo una adulta.

Se corrobora entonces también ora afirmación de Alatorre (2004): los problemas más fáciles de resolver son los de comparación de tasas, luego los de comparación de razones parte-parte-todo en mezclas, y finalmente los más difíciles son los de comparación de razones parte-parte-todo en situación de probabilidad. En cuanto a los problemas control de comparación de particiones, su dificultad se ubica entre los de tasa y los de mezcla.

3.2.2 RESUMEN DE GRUPOS DE RESPUESTAS POR CONTEXTO

De acuerdo a las respuestas dadas por los sujetos entrevistados, procedimos a realizar un análisis de acuerdo al tipo de gráfica que en cada contexto obtuvieron los sujetos entrevistados. En la tabla siguiente encontramos la recopilación de los resultados de los sujetos entrevistados por contexto, y según sus comportamientos (A, B, C o D).

	TASA		**MEZCLA**		**PROBABILIDAD**		**PARTICIÓN**	
	Jóvenes	**Adultos**	**Jóvenes**	**Adultos**	**Jóvenes**	**Adultos**	**Jóvenes**	**Adultos**
A			An		He	Yl		
B	An He		He We	Ch Od Yl	An Gu Ed We	Fl Ch Qu Od	An We	Ch Od Yl
C	Ed Gu	Yl Od Qu	Ed Gu	Fl Qu			He Ed Gu	Qu
D	We	Fl Ch						Fl

En la resolución de problemas de tasa encontramos que los adultos obtuvieron un buen comportamiento, pues ninguno de ellos se clasificó en el grupo A o B, mientras que sí hubo dos adolescentes clasificados en el grupo B. En mezclas tenemos que el comportamiento de los sujetos entrevistados estuvo a la par entre los adolescentes y adultos, excepto en el Grupo A donde hubo un adolescente y ningún adulto. Los de probabilidad fueron los contextos más difíciles para adolescentes y adultos pues la totalidad de los entrevistados tuvo un comportamiento cuando mucho de tipo B. En particiones hubo gran similitud en el comportamiento de jóvenes y adultos, salvo que sólo una adulta alcanzó el nivel D.

3.3 ESTRATEGIAS UTILIZADAS

Después de analizar cuantitativamente los resultados obtenidos, en este apartado revisamos las distintas estrategias correctas e incorrectas que los estudiantes emplearon al resolver los diversos problemas que se les plantearon. Escudriñamos en la medida que fue posible qué tipo de razonamiento utilizan los sujetos para resolver los distintos problemas; deseamos conocer el tipo de estrategias que utilizaron en sus respuestas correctas e incorrectas; esto es, deseamos saber, cuando fueron correctas, cómo lo hicieron, y cuando fueron incorrectas, en dónde fallaron. Primero abordaremos las estrategias correctas y luego las incorrectas, y realizaremos el análisis por niveles de dificultad: el nivel L1 es más fácil, después el nivel L2 es intermedio y el L3 es más difícil.

La siguiente tabla es un resumen general de las estrategias utilizadas en las respuestas correctas que los entrevistados dieron a las preguntas dadas. En la tabla cada nivel de dificultad (L1, L2, L3) corresponde a varias columnas y cada sujeto es un renglón. Como dijimos antes, en L2 y L3 las únicas estrategias correctas son, respectivamente, {RP=} y {RP+}, pero en L1, además de las estrategias {RP} puede haber centraciones y composiciones correctas (CCC) y las relaciones de orden {RO+}. Los números en cursivas en L1 reflejan la distribución de estas posibilidades entre las respuestas correctas; esto es, son porcentajes sobre la cantidad de respuestas correctas. Por ejemplo, Ana (An) tuvo 49 respuestas en el nivel L1; de ellas 22 fueron correctas, de las cuales fueron once (50%) CCC y once relaciones de orden {RO+}.

RESPUESTAS CORRECTAS

		L1					L2		L3	
				Porcentajes sobre N			{RP=}		{RP+}	
		T	N	CCC	{RO+}	{RP}	T	N	T	N
Jóvenes	An	49	22	*50*	*50*	*0*	35	9	26	1
	Ed	44	31	*61*	*39*	*0*	34	26	28	5
	Gu	46	30	*37*	*50*	*13*	29	23	30	8
	He	48	20	*75*	*20*	*5*	38	12	24	2
	We	47	41	*51*	*29*	*20*	37	30	33	18
Adultos	Ch	44	35	*60*	*23*	*17*	31	23	28	17
	Fl	45	28	*64*	*29*	*7*	34	23	32	19
	Od	46	30	*53*	*37*	*10*	35	25	34	11
	Qu	45	28	*61*	*32*	*7*	30	25	27	8
	Yl	45	25	*52*	*44*	*4*	33	15	39	10

T= cantidad total de respuestas en cada nivel
N= cantidad total de respuestas correctas en cada nivel

En el nivel L1 de dificultad encontramos que todos los sujetos prefirieron el uso de las estrategias más fáciles CCC y {RO+} a las de razonamiento proporcional {RP}; tres de los adolescentes y cinco adultos emplearon mayoritariamente CCC, y dos adolescentes emplearon con mayor frecuencia {RO+} al resolver los problemas. Es además notable que dos adolescentes (Ana y Eduardo) no emplearon un solo razonamiento proporcional.

La siguiente tabla es un resumen general de las estrategias utilizadas en las respuestas incorrectas que los entrevistados dieron a las preguntas dadas. Cada nivel de dificultad (L1, L2 y L3) corresponde a un grupo de renglones y cada sujeto es un renglón en cada una de ellos. Los posibles errores son centraciones (C), relaciones de orden incorrectas ({RO=} o {ROe}, marcadas colectivamente como {RO}), relaciones aditivas ({RS+} ó {RS=}, marcadas como {RS}), intentos infructuosos de una relación de proporcionalidad (RP'), mecanismos diversos o respuestas descriptivas o sin justificación, con elección incorrecta. Bajo las columnas correspondientes a cada uno de estos errores, los números en cursivas reflejan la distribución de estas posibilidades entre el total de respuestas incorrectas. Por ejemplo, Gustavo (Gu) tuvo 46 respuestas en el nivel L1; de ellas, 3 fueron incorrectas, de las cuales 2 (67%) fueron centraciones y una (33%) fue un mecanismo.

RESPUESTAS INCORRECTAS

		Nom	T.	N.	C.	{RO}	{RS}	{RP'}	Mec	Des S.J
L1	Jóvenes	**An**	49	8	*100*					
		Ed	44	2	*50*			*50*		
		Gu	46	3	*67*				*33*	
		He	48	8	*38*	*12*			*25*	*25*
		We	47	2	*50*	*50*				
	Adultos	**Ch**	44	1					*100*	
		Fl	45	1	*100*					
		Od	46	1					*100*	
		Qu	45	5	*80*			*20*		
		Yl	45	2		*50*			*50*	
L2	Jóvenes	**An**	35	21	*52*	*38*	*5*	*5*		
		Ed	34	8	*25*	*25*	*37*	*13*		
		Gu	29	5	*40*	*40*			*20*	
		He	38	23	*78*	*4*			*9*	*9*
		We	37	7			*57*	*43*		
	Adultos	**Ch**	31	7	*57*		*14*		*29*	
		Fl	34	6	*50*				*50*	
		Od	35	4	*75*	*25*				
		Qu	30	5	*80*	*20*				
		Yl	33	11	*55*		*9*		*27*	*9*
L3	Jóvenes	**An**	26	25	*36*	*36*	*16*		*8*	*4*
		Ed	28	23	*13*	*4*	*27*	*52*	*4*	
		Gu	30	22	*23*	*36*	*9*	*23*	*9*	
		He	24	20	*85*	*5*		*5*		*5*
		We	33	15	*7*		*40*	*53*		
	Adultos	**Ch**	28	11	*36*		*18*	*46*		
		Fl	32	13	*39*		*23*	*15*	*23*	
		Od	34	20	*30*	*10*	*10*	*20*	*20*	*10*
		Qu	27	19	*47*	*11*		*42*		
		Yl	39	25	*60*			*20*	*16*	*4*
					Porcentajes sobre N					

T= cantidad total de respuestas en cada nivel
N= cantidad de respuestas incorrectas en cada nivel
C= centraciones, Mec= mecanismos, D= descripciones S.J.= sin justificación

Se evalúa que en el nivel L1 de dificultad todos los estudiantes adolescentes tuvieron errores consistentes en centraciones y sólo dos en {RO}; hubo sólo un caso de {RP'} y dos mecanismos. En cuanto a los adultos sólo dos tuvieron errores de centraciones y uno de {RO}; también un solo {RP'} y tres mecanismos. En este nivel ninguno de los entrevistados incurrió en {RS}. También apreciamos que la mayoría de los errores en la resolución de problemas en este nivel de dificultad son de los jóvenes.

En el nivel de dificultad L2 encontramos que la mayoría de los errores fueron nuevamente de los adolescentes. Cuatro de ellos incurrieron en centraciones y {RO}, tres estudiantes jóvenes presentaron como estrategias incorrectas {RS} y dos presentaron mecanismos. Los cinco adultos presentaron errores consistentes en centraciones, dos de ellos en {RO} y otros dos en {RS}, y tres incurrieron en diversos mecanismos. Es notable que ningún adulto tuvo intentos fallidos de aplicar {RP=}, que es la única estrategia correcta en L2, mientras que entre los adolescentes hubo tres en esta situación.

En el nivel L3 de dificultad los diez entrevistados presentaron errores consistentes en centraciones. La mayoría de los adolescentes incurrieron en errores consistentes en {RO}, {RS}, {RP'} y diversos mecanismos. Los adultos presentaron principalmente intentos fallidos {RP'}; tres estudiantes presentaron errores de tipo {RS} y otros tres diversos mecanismos, y sólo dos cometieron errores de tipo {RO}. Aunque como en los niveles anteriores los jóvenes presentaron más errores que los adultos, la diferencia es menor en L3 de lo que es en L1 y L2.

Sin embargo, incluso dentro de estos niveles de dificultad existen muchas disparidades. Podríamos hablar de un estilo cognitivo personal en cada momento de la vida, es decir cada persona tiene sus estrategias favoritas y estrategias que nunca utiliza. Por tanto a continuación revisaremos los estilos personales que cada sujeto entrevistado dio en la resolución de los problemas de razonamiento proporcional.

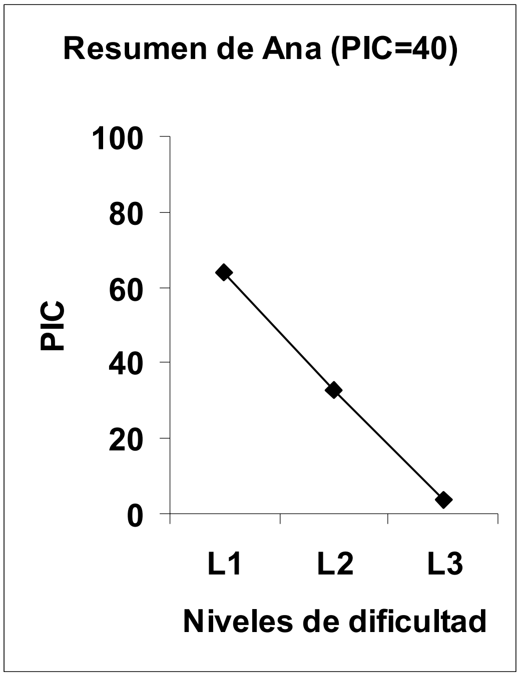
3.4 RETRATOS COGNITIVOS

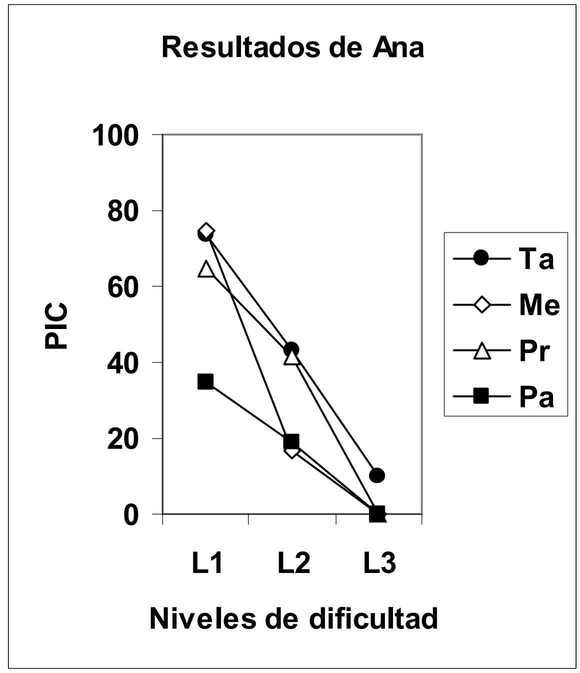
En las secciones anteriores de este trabajo nos dedicamos a estudiar por una parte las dimensiones relacionadas con el tipo de contexto y el nivel de dificultad, y por otra las estrategias utilizadas.

Ahora centramos nuestra atención en cada sujeto y juntaremos la información obtenida acerca de cada quien en las secciones 3.2 y 3.3. Esto nos dará información acerca de los grupos de desempeño en cada tipo de contexto y acerca de las estrategias que lo llevaron a contestar correcta o incorrectamente. En su conjunto toda esta información nos describe *un momento del desarrollo cognitivo del sujeto en su manera de enfrentar este tipo de problemas.* A este conocimiento que obtenemos de un instante en el proceso cognitivo del sujeto lo llamaremos “retrato cognitivo”.

A continuación presentamos el retrato cognitivo de cada uno de los estudiantes en orden alfabético de acuerdo con el sistema escolar (escolarizado y abierto). Para cada persona se presentan dos gráficas de concentración de resultados: la primera se refiere al resumen general del comportamiento en los tres niveles de dificultad; la segunda alude a los cuatro tipos de problemas (tasa, mezcla, probabilidad y partición) en los tres niveles de dificultad. Posteriormente se hace un análisis de su desempeño en cada nivel de dificultad y de las estrategias utilizadas, para finalizar con una visión global del sujeto.

RETRATO COGNITIVO DE ANA





Ana tiene el PIC general más bajo de todos los sujetos (PIC=40). En general su comportamiento es de tipo B excepto en los problemas de mezcla donde obtuvo un comportamiento tipo A.

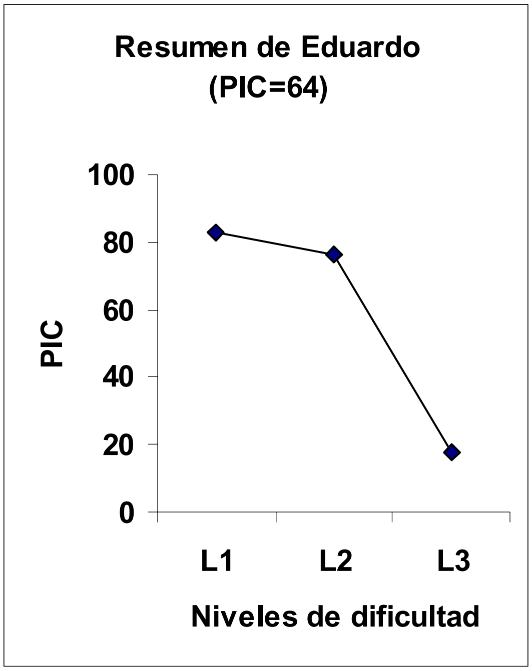
En L1 tiene su más alto PIC (64). En este nivel las estrategias correctas fueron CCC (50%) y {RO+} (50%), y los errores de este nivel son todos ellos centraciones.

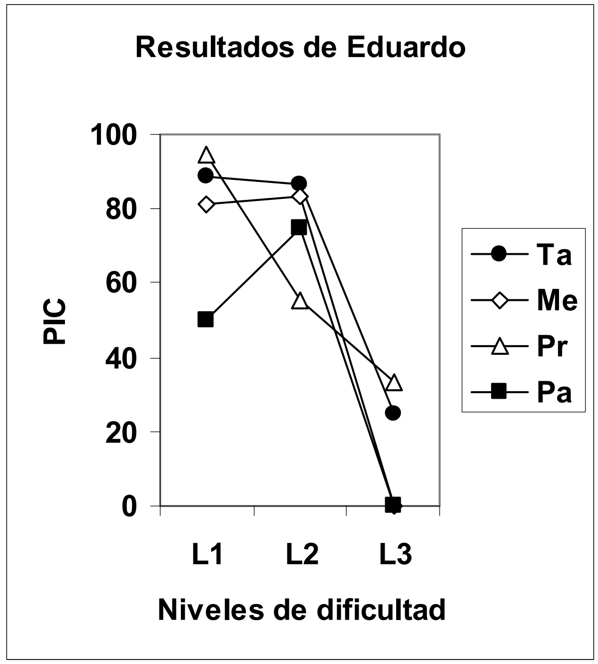
En L2 tiene un PIC intermedio (33). Logra {RP=} en 26% de los casos. Los errores de este nivel son mayoritariamente centraciones, seguidas de {RO}, un caso de {RS} y uno de {RP'} (intento infructuoso de {RP=}).

En L3 tiene el PIC más bajo (4). Sus errores de este nivel son principalmente relaciones {RO} y {RS}, y centraciones con algunos mecanismos. Sólo tuvo un {RP+} en un problema de tasas.

En resumen, a Ana se le dificultan las {RP}, aunque un poco menos {RP=} que {RP+}. Usa preferentemente centraciones y {RO}, que en L1 le pueden llevar a respuestas correctas, y en L2 y L3 necesariamente la llevan a incorrecciones.

RETRATO COGNITIVO DE EDUARDO





Eduardo tiene un PIC general intermedio dentro de los adolescentes (PIC= 64). En general su comportamiento es de tipo C, excepto en los problemas de probabilidad donde obtuvo un comportamiento tipo B. Cabe señalar que en particiones tuvo mejor desempeño en L2 que en L1.

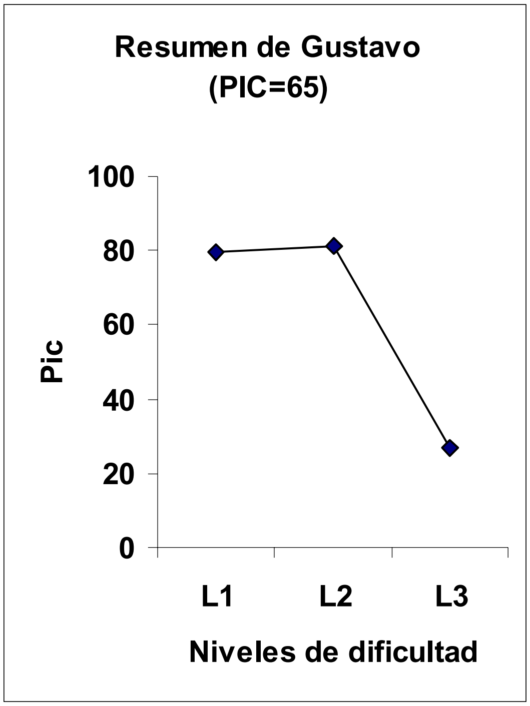
En L1 tiene su más alto PIC (83). En este nivel las estrategias correctas fueron CCC (61%) y {RO+} (39%), y los dos errores de este nivel fueron una centración y un {RP'}.

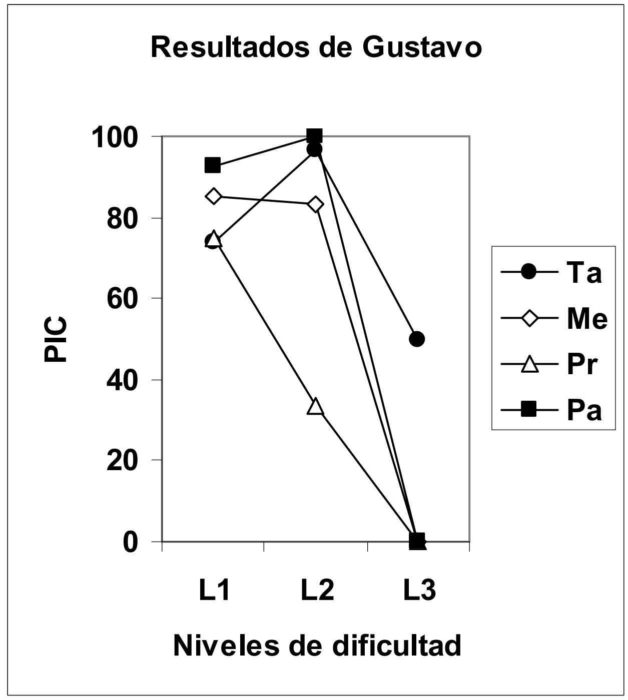
En L2 tiene un PIC intermedio (76%). Logra {RP=} en 76% de los casos y sus errores de este nivel son mayoritariamente {RS}, seguidos de centraciones y {RO}, habiendo un caso de {RP'}.

En L3 tiene el PIC más bajo (18%). Logra {RP+] en sólo 18% y sus errores son principalmente RP', seguido de RS y centraciones.

Recapitulando, Eduardo usa estrategias sencillas en L1 CCC y {RO+}, y su único intento de {RP} es fallido. Esto está relacionado con su poco éxito en L3, donde 12 de sus 17 intentos de {RP} son fallidos. En cambio en L2 tuvo un mejor desempeño. La diferencia en sus desempeños en L2 y L3 es la mayor comparada con los demás sujetos. Usa {RP=} en situaciones de proporcionalidad (L2) y está en proceso de aprender el uso de {RP+} en situaciones de no proporcionalidad (L3). Sin embargo, tanto en L2 como en L3 incurre frecuentemente en relaciones aditivas ({RS}).

RETRATO COGNITIVO DE GUSTAVO





Gustavo tiene un PIC general que se ubica en un rango intermedio comparado con los demás adolescentes (PIC= 65). En general el comportamiento de Gustavo es de tipo C, excepto en los problemas de probabilidad donde obtuvo un comportamiento tipo B. Cabe señalar que en tasas obtuvo mejores resultados en L2 que en L1.

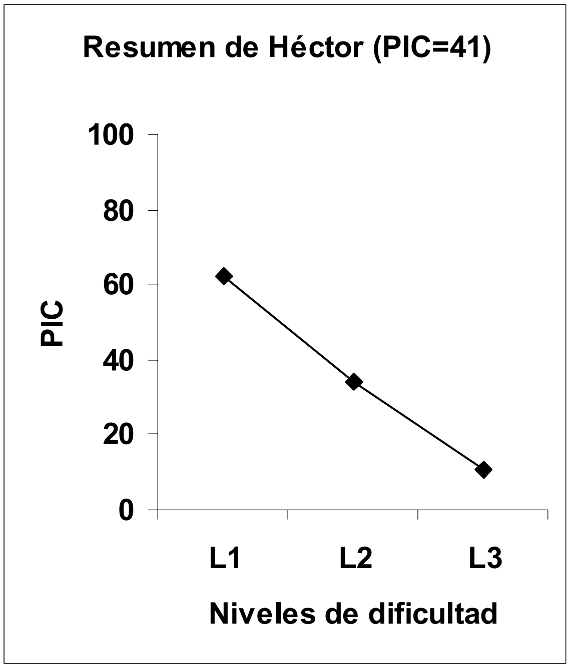
En L1 tiene un PIC= 79. En este nivel las estrategias correctas fueron {RO+} (50%), CCC (37%), y {RP} (13%), y los errores de este nivel fueron dos centraciones y un mecanismo de tamaño.

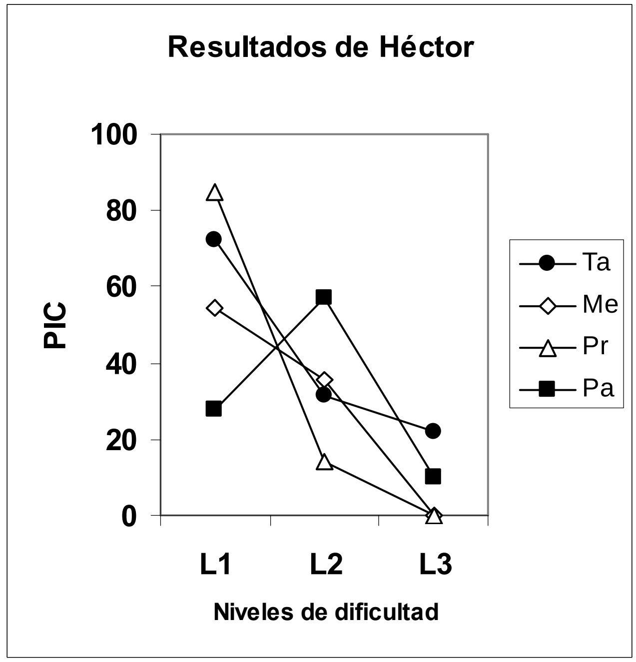
En L2 tiene el PIC=81, siendo éste el más elevado. Logra {RP=} en 79% de los casos. Los cinco errores de este nivel son dos centraciones, dos {RO} y un solo mecanismo de tamaño.

En L3 tiene el PIC más bajo (27). Logra {RP+} en 27% de los casos; sus errores de este nivel son mayoritariamente {RO}, seguidos de centraciones, {RP’}, algunos {RS} y mecanismos.

En resumen, Gustavo usa una variedad de estrategias correctas en L1, incluyendo 4 usos de {RP+}. También hay una variedad, pero esta vez de estrategias incorrectas, en L3 y de sus 13 intentos de {RP+} sólo 8 son exitosos. Donde obtiene mejores resultados es en L2 donde todos sus intentos de {RP=} son exitosos. Como en el caso de Eduardo, el alto porcentaje de éxito en L2 y el menor porcentaje en L3 acompañado de un número significativo de {RP’}, sugieren que este adolescente está en proceso de aprendizaje del uso de {RP+}.

RETRATO COGNITIVO DE HÉCTOR





Héctor tiene el PIC general de 41 siendo éste uno de los más bajos. En general el comportamiento de Héctor es de tipo B, excepto en los problemas de probabilidad donde obtuvo un tipo A, y en problemas de partición un tipo C aunque con mejores resultados en L2 que en L1.

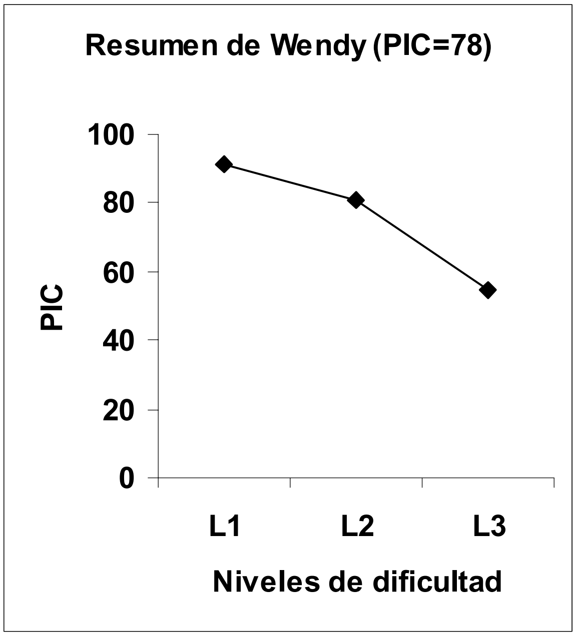
En L1 tiene su más alto PIC (63). En este nivel las estrategias correctas fueron CCC. (75%), {RO+} (20%) y {RP}, y los errores fueron primero centraciones, seguidas de mecanismos de error y un {RO}.

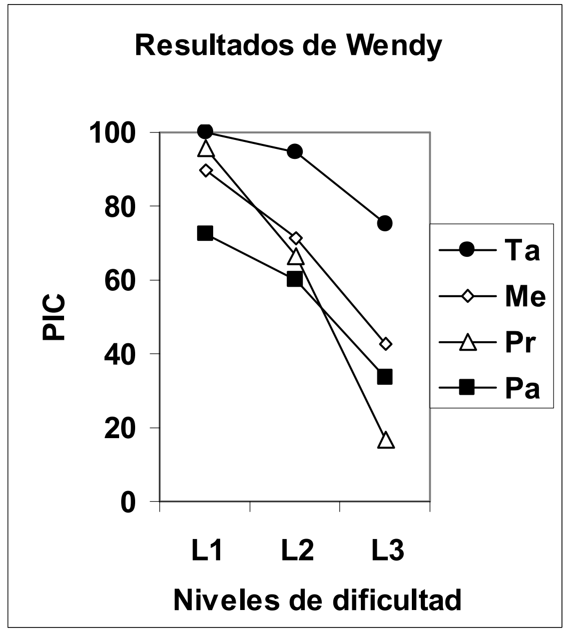
En L2 tiene un PIC=34. Logra {RP=} en 32% de los casos. Los errores de este nivel son mayoritariamente las centraciones.

En L3 tiene el PIC más bajo (10). Sólo en dos ocasiones logra {RP+}. Sus errores de este nivel son mayoritariamente centraciones.

En resumen, a Héctor se le dificultan las {RP}. Usa preferentemente centraciones, que en L1 lo pueden llevar a respuestas correctas, y en L2 y L3 necesariamente lo llevan a incorrectas. Podría pensarse que Héctor está empezando a usar razonamiento proporcional en situaciones proporcionalidad (L2). De los 20 intentos de {RP} que tuvo, 15 fueron {RP=} exitosos y sólo 2 fueron {RP+} exitosos.

RETRATO COGNITIVO DE WENDY





Wendy tiene el PIC general más alto entre los diez entrevistados (PIC=78). En general el comportamiento de Wendy es de tipo C. Al analizar por contexto obtuvo un comportamiento de tipo B en todo, excepto en los problemas de tasas donde obtuvo un comportamiento tipo D.

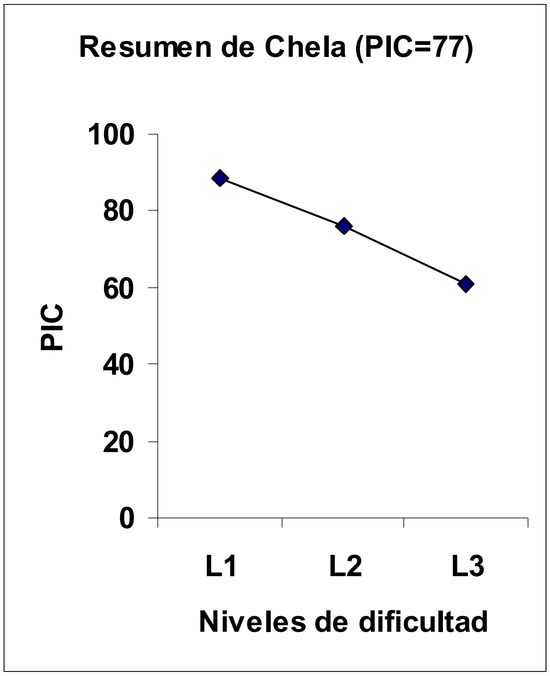
En L1 tiene el más alto PIC (91). En este nivel las estrategias correctas fueron CCC (51%), {RO+} (29%) y {RP} (20%), y los errores de este nivel fueron solamente dos: una centración y un {RO}.

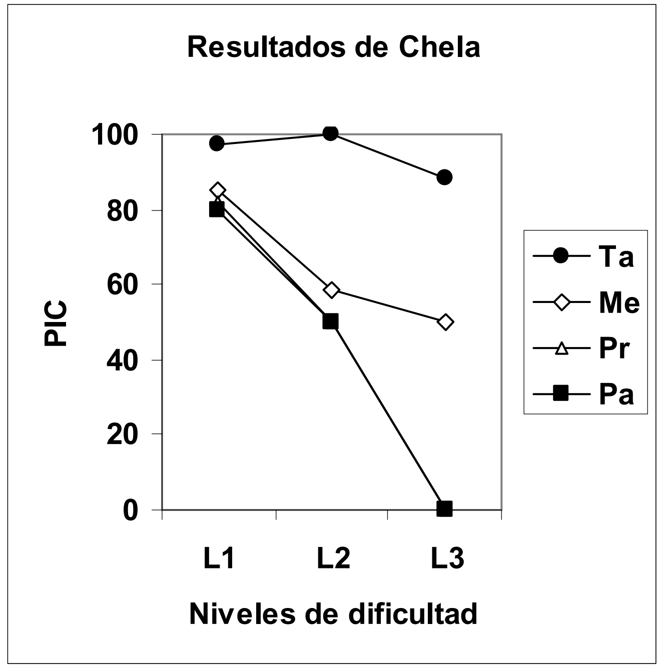
En L2 tiene un PIC=81. Logra {RP=] en 81% de los casos y los errores de este nivel son {RS} y {RP'}.

En L3 tiene su PIC más bajo (55). Logra {RP+} en 55% de los casos, y sus errores de este nivel son principalmente {RP'}, {RS} y centraciones.

En resumen, a Wendy se le facilita las {RP}, sobre todo en situaciones de proporcionalidad (L2). En L1 usa diversas estrategias correctas, lo que le da un desempeño muy alto. Manifiesta todavía dificultades en el nivel L3, donde comete errores en la aplicación de {RP+}. A pesar de tener los mejores resultados de este grupo de sujetos, Wendy incurre en el incorrecto razonamiento aditivo {RS} en los porcentajes más altos: 57% de los errores en L2 y 40% en L3.

RETRATO COGNITIVO DE CHELA





Chela tiene el PIC general más alto de todos los adultos (PIC = 77). En general su comportamiento es de tipo B excepto en los problemas de tasas donde obtuvo un comportamiento tipo D.

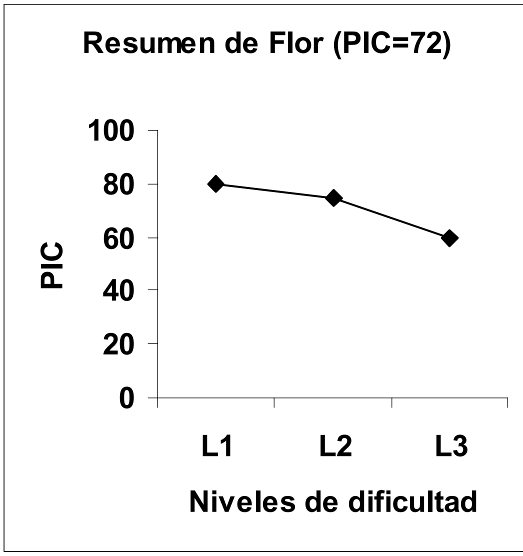
En L1 tiene su más alto PIC (89). En este nivel las estrategias correctas fueron CCC (60%), {RO+} (23%), y {RP} (17%), y sólo hubo un mecanismo de tamaño.

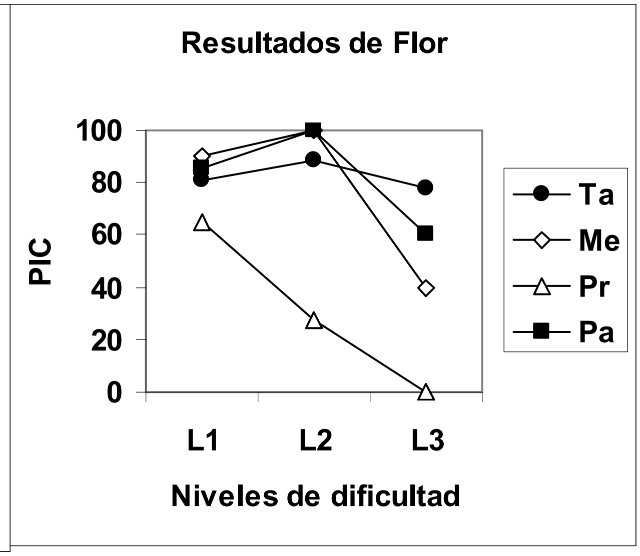
En L2 tiene un PIC intermedio (76). Logra {RP=} en un 74% de los casos. Los errores de este nivel son mayoritariamente las centraciones, seguidas de dos mecanismos (distribución y error en fracción), y un caso de {RS}.

En L3 tiene el PIC más bajo (61). Logra {RP+} en 61% de los casos. Sus errores de este nivel son principalmente intentos infructuosos de relación de proporcionalidad {RP'} y centraciones, con un par de {RS}.

En resumen, tres cuartas partes de las veces en L2 y L3 avanza por buen camino, en L2 lo logra siempre, en L3 algunas veces se equivoca ({RP'}).

RETRATO COGNITIVO DE FLOR





Flor ocupa el segundo lugar en los adultos en cuanto a su PIC (73). En general el comportamiento de Flor es de tipo C. Al analizar por contexto, obtiene comportamientos de tipo B en probabilidad, C en mezclas y particiones (donde logra mejores resultados en L2 que en L1), y D en tasas.

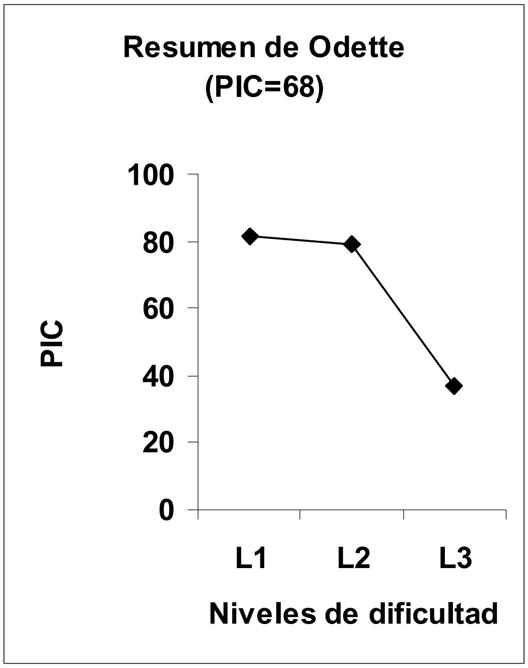
En L1 tiene su más alto PIC (80). En este nivel las estrategias correctas fueron CCC (64%), {RO} (29%) y {RP} (7%), hubo un solo error en una centración.

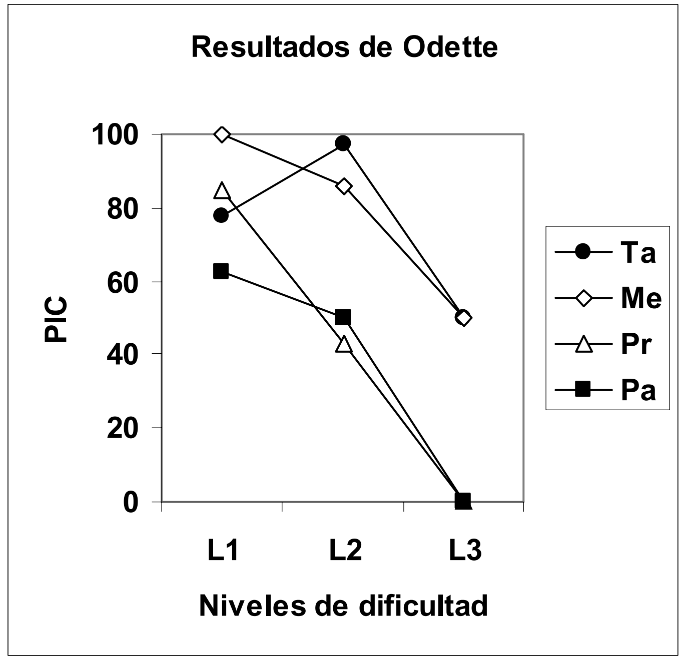
En L2 tiene un PIC= 75. Logra {RP=} en 68% de los casos y los errores de este nivel son centraciones y mecanismo de tamaño

En L3 tiene el PIC más bajo (59). Logra {RP+} en 59% de los casos y sus errores de este nivel son centraciones, {RS} y mecanismos, así como dos casos de {RP'}.

En resumen, Flor cuenta con diversas estrategias que la llevan a aciertos en L1 pero que al intentar usarlas en L3 la pueden llevar a errores. En L2 usa menos variedad de estrategias incorrectas y con menor frecuencia. Aunque su desempeño en L2 es mejor que el de L3, la diferencia entre ambos niveles es la menor comparada con los demás sujetos.

RETRATO COGNITIVO DE ODETTE





Odette tiene un PIC general de 68, ocupa el tercer lugar entre los adultos. En general el comportamiento de Odette es de tipo C. Al Analizar por contexto tuvo un comportamiento de tipo B en todos ellos excepto en los problemas de tasas donde obtuvo un comportamiento tipo C.

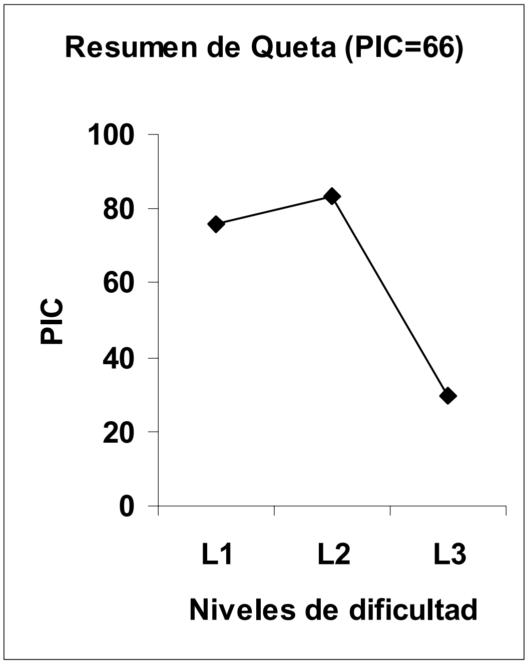
En L1 tiene su más alto PIC (82). En este nivel las estrategias correctas fueron CCC (53%), {RO+} (37%), {RP} (10%), y sólo hubo un error, un mecanismo de error en fracción.

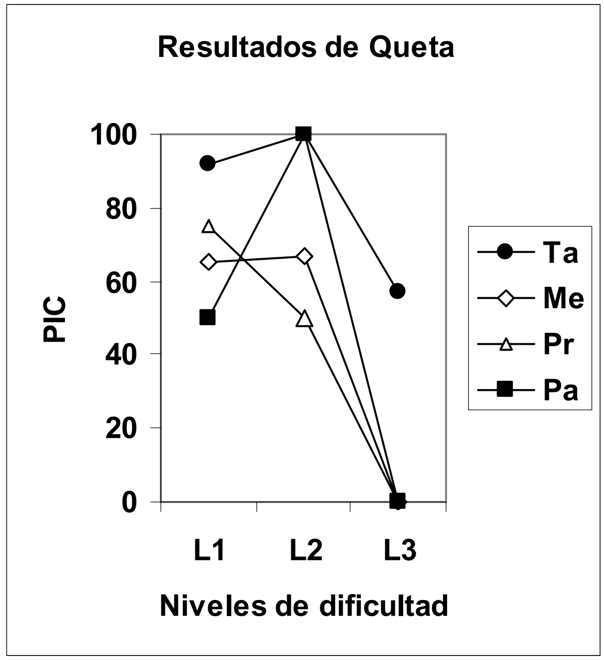
En L2 tiene un PIC (79). Logra {RP=} en 71% de los casos y los errores en este nivel son tres centraciones y un {RO}.

En L3 tiene el PIC más bajo (37). Logra {RP+} en 32% de los casos. Sus errores de este nivel son mayoritariamente centraciones seguidas de {RP'} y mecanismos de aproximación, con algunos {RO} y {RS}.

En resumen, Odette utiliza una variedad de estrategias, que en L1 le permiten acertar pero en L3 la llevan a fracasar. No así en L2, donde casi siempre utiliza, acertadamente, {RP=}.

RETRATO COGNITIVO DE QUETA





Queta tiene en general un PIC de 66, el cuarto entre los adultos. En general el comportamiento de Queta es de tipo C, excepto en los problemas de probabilidad donde obtuvo un comportamiento tipo B. En particiones tuvo un mejor desempeño en L2 que en L1.

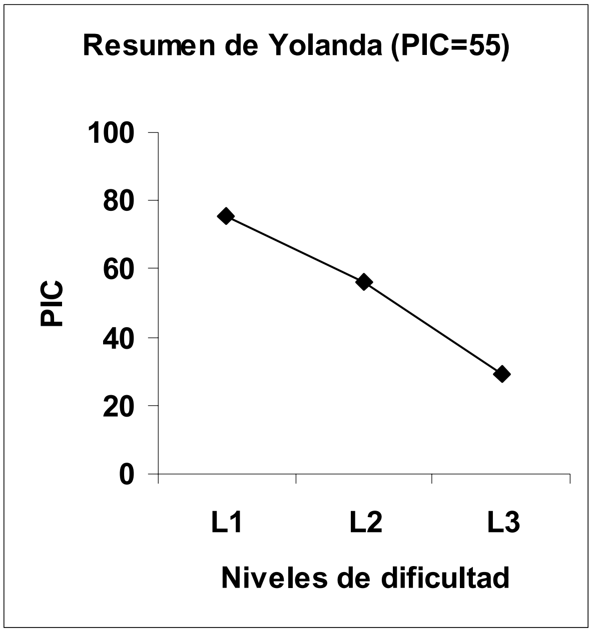
En L1 tiene un PIC=76. En este nivel las estrategias correctas fueron CCC (61%), {RO+} (32%) y {RP} (7%), y los errores de este nivel fueron principalmente centraciones seguidas de un {RP’}.

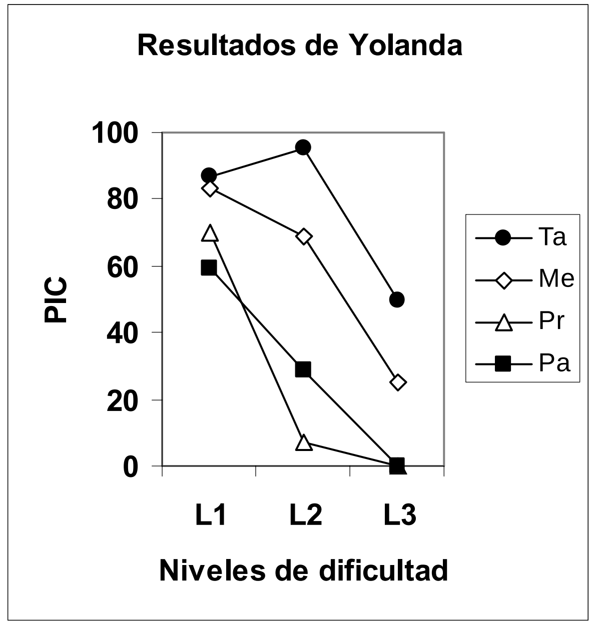
En L2 tiene un PIC=83. Logra {RP=} en 30% de los casos, lo que es el mayor porcentaje entre los sujetos entrevistados. Los errores de este nivel son mayormente centraciones y un {RO}.

En L3 tiene el PIC más bajo (30). Logra {RP+} en 30% de los casos y sus errores de este nivel son centraciones y {RP’} seguidas de {RO}, con fallidos {RP’}

Queta dispone de recursos diversos en L1 y usa adecuadamente {RP=} en L2. Sin embargo su desempeño en L3 es muy bajo, comete ahí diversidad de errores entre los que destaca {RP’}.

RETRATO COGNITIVO DE YOLANDA





Yolanda tiene el PIC más bajo de todos los adultos (55). En general su comportamiento es del tipo B, excepto en los problemas de tasas donde obtuvo un comportamiento tipo C, y en los problemas de probabilidad donde obtuvo un comportamiento tipo A.

En L1 tiene su más alto PIC (76). En este nivel las estrategias correctas fueron CCC (52%), {RO} (44%) y {RP} (4%), y los errores fueron sólo dos: un {RO} y un mecanismo de tamaño.

En L2 tiene un PIC de 56. Logra {RP=] en 45% de los casos y sus errores de este nivel son mayoritariamente centraciones, seguidas de mecanismos y un {RS}.

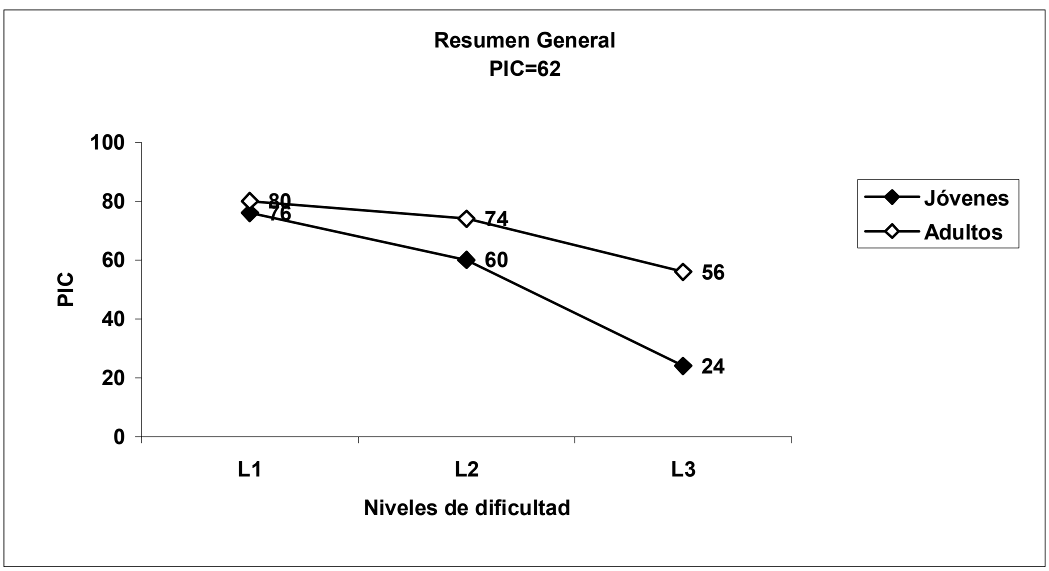
En L3 tiene el PIC más bajo (29). Logra {RP+] en 26% de los casos y sus errores de este nivel son principalmente centraciones, seguidas de {RP'} y diversos mecanismos.

En resumen a Yolanda se le dificultan las {RP} aunque un poco menos {RP=} que {RP+}. Usa preferentemente centraciones, que en L1 le pueden llevar a respuestas correctas y en L2 y L3 la llevan a incorrecciones.

3.5 COMPARACIÓN DE LOS SUJETOS EN AMBOS SISTEMAS DE ENSEÑANZA SECUNDARIA

Con base en los análisis anteriores, ahora centraremos nuestra atención en la comparación de los dos grupos de sujetos: uno formado por cinco jóvenes de entre 13 y 15 años que cursan 2º ó 3º de secundaria en el sistema escolarizado y otro formado por cinco adultos de entre 29 y 37 años que cursan 2º ó 3º de secundaria en el sistema abierto. Después de una comparación global presentamos los resultados obtenidos por tipo de contexto refiriéndonos a los adultos y jóvenes en los tres niveles de dificultad, para después finalizar con una visión global de cada grupo de sujetos entrevistados.

A continuación presentamos de manera gráfica los resultados obtenidos por los dos grupos de trabajo, adultos y jóvenes, en los tres niveles de dificultad.



En la gráfica podemos encontrar algunas diferencias que llaman la atención. Aunque ambos grupos contestan de manera similar las preguntas que se les plantean en el nivel de dificultad L1, al avanzar en el grado de dificultad de las preguntas planteadas se nota que en L2 hay un mejor desempeño de los adultos, pues aunque ambos PICS descienden, es más fuerte el descenso en jóvenes que en adultos.

En L3 esta diferencia se hace aún más grande, ya que aquí se da un descenso que manifiesta que los adultos tuvieron mejor desempeño que los jóvenes.

En general el comportamiento del grupo de los cinco adultos es de tipo C, y el grupo de los cinco jóvenes tuvo un comportamiento de tipo B.

Presentamos a continuación un resumen descriptivo de los resultados obtenidos.

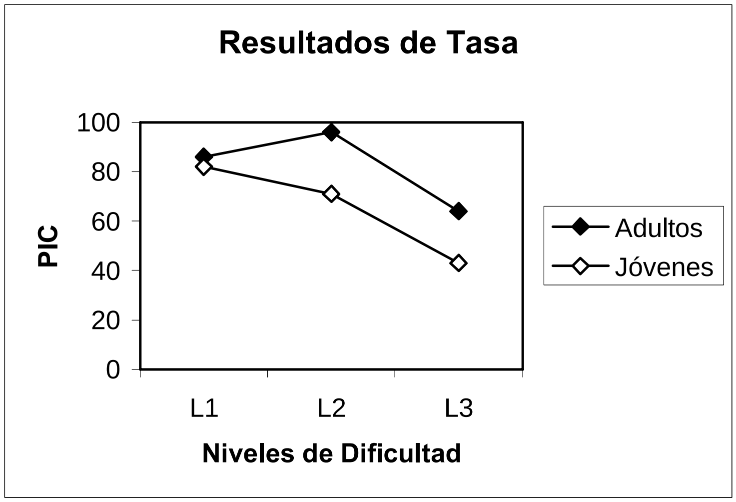
Con respecto a las respuestas correctas que los dos grupos dieron en cada nivel de dificultad, tenemos que:

- En L1, de las 234 preguntas planteadas a los jóvenes fueron correctas 144, lo que equivale al 62% del total de preguntas en este nivel de dificultad, de las cuales fueron 33% CCC, 23% {RO+} y 6% {RP}. Los adultos respondieron correctamente 146 de las 225 preguntas planteadas, lo que equivale al 65% del total de preguntas en este nivel de dificultad, de las cuales fueron 35% CCC, 24% {RO+} y 6% {RP}. Con esto podemos dar cuenta que en este nivel de dificultad la diferencia entre ambos grupos es mínima. Ambos grupos utilizaron tanto las estrategias fáciles CCC y {RO+} como las más difíciles {RP} con frecuencias similares. En L1, donde puede haber distintas maneras correctas de resolver los problemas, es decir donde se pueden utilizar diversas estrategias, unas más fáciles, más intuitivas, más informales y otras más formales, ambos grupos recurren a estas opciones de maneras similares.

- En L2 de las 173 preguntas planteadas a los jóvenes 100 fueron contestadas correctamente usando {RP=}, lo que representa el 58% de logros obtenidos. De las 163 preguntas planteadas a los adultos se obtuvo 111 respuestas correctas, lo que representa el 68% de logros en este nivel de dificultad. Esto muestra que los adultos tuvieron un mejor desempeño al responder las preguntas planteadas en L2, pues utilizaron más la estrategia {RP=} que los jóvenes con una diferencia de un 10% entre ambos grupos de sujetos. Dentro de este nivel sólo es aplicable la estrategia correcta {RP=} donde se da el uso de razonamiento proporcional en situaciones de proporcionalidad.

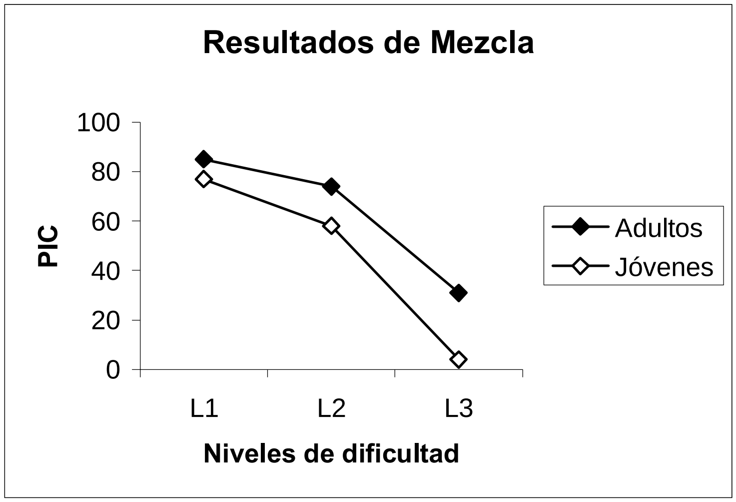
- En L3 de las 141 planteadas, los jóvenes respondieron correctamente 34, lo que representa el 24% de logros De las 160 preguntas que se les plantearon a los adultos 65 fueron correctas, lo que representa el 41% de respuestas correctas en este nivel de dificultad. Podemos entonces decir que en el mayor grado de dificultad, los adultos responden con mayor corrección los problemas de razonamiento proporcional, puesto que utilizaron la estrategia {RP+} con mayor frecuencia que los jóvenes, con una diferencia de 17% entre un grupo de sujetos y otro. En este nivel la única estrategia correctamente aplicable es {RP+} donde se da el uso de razonamiento proporcional en situaciones de no proporcionalidad

Con el fin de conocer las diferencias entre los dos grupos de investigación, a continuación se presentan cuatro gráficas que aluden a los cuatro tipos de contextos (tasa, mezcla, probabilidad y partición), con el fin de llevar a cabo una comparación de los dos grupos entrevistados.



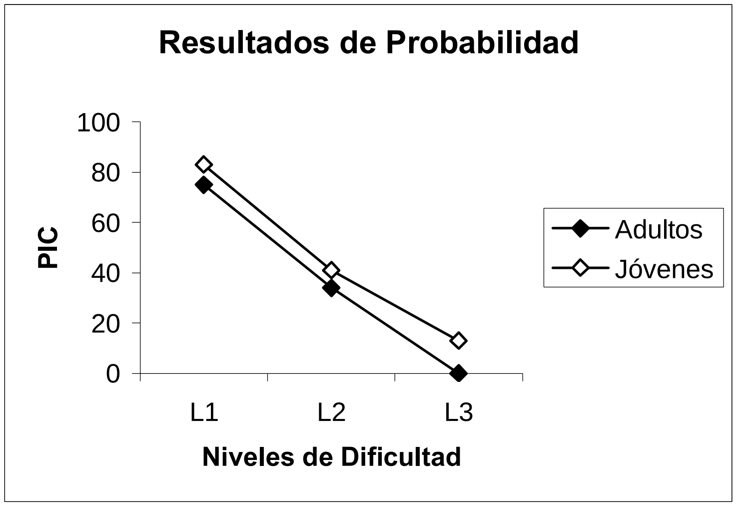
En los problemas de tasa encontramos que la diferencia que se presentó en el nivel de dificultad L1 es mínima pues sólo hubo 4 PICS de diferencia entre un grupo de sujetos y otro. Se nota que no les costó mucho trabajo el entender los problemas de L1 a ambos grupos de sujetos. Esto muestra que en la resolución de los problemas utilizaron diversas estrategias para resolverlas adecuadamente. Una diferencia mayor la encontramos en L2 pues empieza a haber un descenso mayor en los jóvenes que en los adultos, pero los adultos demuestran un ligero repunte entre L1 y L2. Esto nos indica que los adultos en L2 tuvieron más respuestas correctas aplicando {RP=}, es decir en situaciones de proporcionalidad usaron más el razonamiento proporcional que los jóvenes. En L3 es donde fue también marcada la diferencia entre un grupo y otro, pues entre ellos hubo una diferencia de un poco más de 20 PICS. En este nivel se da un descenso que indica que también los adultos aplicaron más la estrategia correcta {RP+}, es decir que usaron más el razonamiento proporcional que los jóvenes.

En general el comportamiento de los jóvenes es de tipo B y el de los adultos es de tipo C. En este tipo de problemas (cuadernos, velocidad, densidad y limonada) los adultos presentaron un mejor desempeño, sobre todo en L2, y aunque en L3 hubo descenso, también en este nivel de dificultad resolvieron mejor los problemas que los jóvenes.



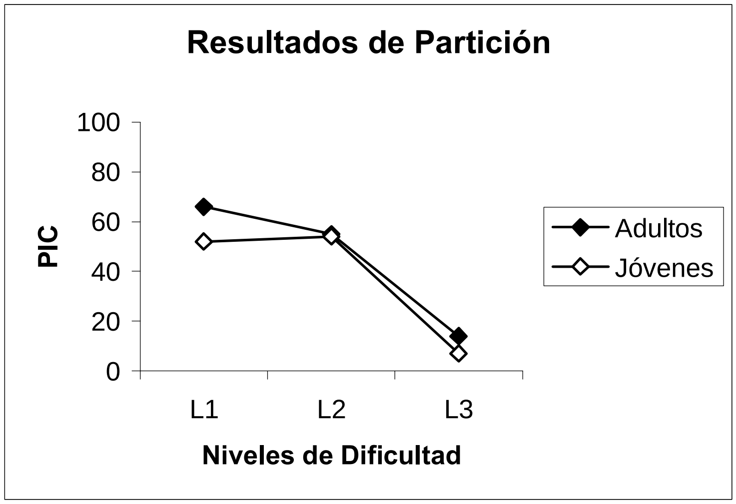
Esta gráfica muestra que en los problemas de mezcla también se dio una diferencia, pues el desempeño de los adultos se fue manteniendo por encima de los jóvenes. En un inicio en L1 hay poca diferencia entre ambos grupos de sujetos, casi pudiera decirse que coinciden en ese nivel en cuanto a la comprensión de los problemas. Al pasar del nivel L1 al L2 ambos tienen un descenso en ese sentido pero teniendo una puntuación más baja los jóvenes que los adultos. Aquí es visible que en situaciones de proporcionalidad los adultos responden de mejor manera, es decir que utilizaron más un razonamiento proporcional con {RP=} que los jóvenes. Ahora bien, en la última parte, que corresponde a L3, ocurre que los jóvenes tienen un descenso tal que pareciera que los problemas de mezcla de ese nivel les son incomprensibles al grado de llegar casi a una puntuación de cero, mostrando una diferencia de 27 PICS respecto a los adultos. Esto nos indica que los adultos utilizaron más la estrategia {RP+} aplicando un razonamiento proporcional en situaciones de no proporcionalidad, aunque sin llegar al nivel de PIC=64 que mostraron en los problemas de tasa.

En general el comportamiento tanto de los jóvenes como de los adultos está entre los tipos B y C. Podemos decir que en los problemas de mezcla (exámenes y agua de jamaica) los adultos respondieron mejor, sobre todo en L2 y L3, pues en comparación con los jóvenes los adultos usaron más {RP} en L2 ({RP=}) y en L3 ({RP+})



En esta gráfica se muestra que tanto para los jóvenes como para los adultos se fue dando un descenso muy marcado en la resolución de los problemas de probabilidad desde L1 hasta L3. Este es el único tipo de contexto donde los jóvenes responden un poco mejor que los adultos. En L1 ambos grupos obtienen casi la misma puntuación. Al pasar del nivel L1 a L2 se da una caída muy marcada en ambos, mostrando que en situaciones de proporcionalidad en problemas de probabilidad aplicaron un poco mejor la estrategia {RP=} los jóvenes. Pero donde más marcada es la diferencia es en L3, pues ahí los adultos llegaron a una puntuación de cero, dejando en claro que los problemas de probabilidad en realidad se les dificultan mucho cuando es necesario utilizar {RP} en situaciones de no proporcionalidad, mientras que los jóvenes no salieron tan bajos como los adultos aunque obtuvieron un PIC muy bajo: también se aprecia que tuvieron problemas para utilizar un razonamiento proporcional que los llevara a utilizar la estrategia correcta.

En general el comportamiento de los jóvenes y adultos es de tipo B en los problemas de probabilidad (botellas de canicas y ruletas). Los jóvenes respondieron ligeramente mejor, sobre todo en L3, en donde los adultos no tuvieron un solo acierto mostrando que en situaciones de no proporcionalidad los jóvenes responden de mejor manera.



En esta gráfica se aprecia que en los problemas de partición los jóvenes están en cierta desventaja en comparación con los adultos en L1, pues los adultos aplicaron correctamente más las estrategias que llevan exitosamente a la resolución de los problemas, pero mantienen el mismo puntaje entre L1 y L2, no así los adultos que sí mostraron un descenso marcado encontrándose ambos grupos casi igual en L2, pues en este nivel aplicaron de manera similar las estrategias correctas los dos grupos de sujetos, es decir que en este tipo de problemas tuvieron un razonamiento proporcional en situaciones de proporcionalidad aplicando la estrategia correcta {RP=} en dicha resolución. Ahora bien, al pasar de L2 a L3 ambos grupos inician un descenso marcado, yéndose aún más abajo la puntuación de los jóvenes que los adultos, aunque en realidad la diferencia en L3 no es mucha entre unos y otros. Con esto se demuestra que en este tipo de problemas en L3 tienen casi la misma dificultad para aplicar la estrategia correcta {RP+}.

En los problemas de partición (pizzas y fracciones) en general el tipo de comportamiento de los jóvenes es de tipo C y el de los adultos es de tipo B.

4 CONCLUSIONES

Con este capítulo final pretendemos hacer por un lado un análisis de las aportaciones metodológicas y de los resultados obtenidos de las entrevistas realizadas; y por otro un recuento de los fundamentos teóricos de Piaget y Vigotsky. Finalizaremos con las aportaciones a nivel educativo que a partir de este trabajo se pueden tener.

En la parte medular del trabajo, la metodología juega un papel preponderante, pues en ella tenemos la herramienta que permite un análisis a las respuestas dadas por los sujetos, y por lo tanto lo que posibilita llegar a resultados que pueden ser analizados y comparados. De esta muestra no representativa obtuvimos que:

- Las estrategias como herramienta metodológica nos permitieron entender y clasificar los significados que los estudiantes daban a las preguntas planteadas y sus maneras de responder a ellas. Un resultado global acerca de las estrategias es que las más utilizadas por los sujetos fueron las centraciones simples o compuestas, que fueron funcionales en las preguntas más fáciles, pero no en las que tienen mayor grado de dificultad como son las que necesariamente se tienen que resolver con un razonamiento proporcional.

- La entrevista permitió detectar una serie de características del modo en que los sujetos abordan los problemas estudiados, entre los que se puede mencionar:

  - la dificultad de los entrevistados para expresar sus ideas en la resolución de los problemas,
  - la inconsistencia general en la elección de estrategias para la resolución de los problemas,
  - el uso de diferentes estrategias en la resolución de un mismo problema,

- ♣ la obviedad con la que se les aparecían las respuestas a ciertos problemas,

- ❖ Los tres niveles de dificultad resultaron ser una herramienta de análisis muy productiva, pues nos permitieron escudriñar con más facilidad las respuestas dadas de acuerdo con el nivel de dificultad de las preguntas, es decir con el tipo de estrategias correctas que se pueden aplicar en cada uno de acuerdo a su estructura numérica.
- ❖ Las categorías para los contextos de los problemas resultaron también ser una herramienta muy fructífera pues nos permitieron analizar y diferenciar el desempeño logrado.

- ❖ La comparación entre jóvenes y adultos resultó muy interesante, pues la edad y el sistema escolar eran una inquietud inicial de esta investigación en cuanto a la resolución de estos problemas, ya que desde un inicio se pretendía un análisis comparativo acerca de las formas de resolver los problemas de razonamiento proporcional de ambos grupos: adolescentes y adultos.

Con respecto a los resultados en el grupo entrevistado los problemas de comparación de razones que se les facilitaron más fueron los de tasa, seguidos por los de mezcla, y los que se les dificultaron más fueron los de probabilidad. Esto puede deberse a que en los problemas de tasas se trata de distintas cantidades y eso facilitó el ejercicio comparativo de los cuatro números, porque se tienen dos en una categoría y otros dos en la otra categoría, es más fácil separarlos. Por otra parte los problemas de parte-parte-todo, a pesar de que en ellos se puede hablar de un total porque se trata de una sola cantidad, son más difíciles, sobre todo los de probabilidad que tienen el componente extra del azar.

Pudimos determinar las variaciones que hubo entre los tres niveles de dificultad, y de los resultados obtenidos de este trabajo podemos decir que a este grupo de sujetos entrevistados se les facilitaron los problemas que se pueden resolver de diferentes maneras (L1), pues en ellos para resolverlos los sujetos prefirieron principalmente el uso de las estrategias más fáciles, y que los que requieren de procedimientos formales o semiformales (L2 y L3) se les dificultaron más, sobre todo en situaciones de no proporcionalidad (L3). Pues en estos niveles sólo se pueden resolver los problemas mediante el razonamiento proporcional.

También consideramos importante mencionar que en los grupos de respuestas que dieron los sujetos entrevistados y que se clasificaron en cuatro grupos (A, B, C y D), el comportamiento fue homogéneo dentro de cada grupo. Efectivamente, en cada uno de ellos las gráficas que se obtuvieron tenían un comportamiento muy similar unas de otras, salvo que en los problemas de partición.

Pareciera que en los resultados obtenidos a los adultos les va mejor, pero hay tanta variabilidad entre un adulto a otro, y de joven a joven que quizás con una muestra mayor se podrían encontrar otros resultados que indiquen lo contrario.

Más que hablar de variación *entre* los dos grupos lo que salta a la vista en los retratos cognitivos es la gran variación *dentro* de cada uno de ellos. Por tomar sólo un indicador, el PIC global que tuvieron los adultos fue de 67 y los jóvenes de 58, eso quiere decir que globalmente hablando los adultos tuvieron 67% de respuestas correctas más o menos, y los jóvenes un 58%; esto es una pequeña diferencia que no podemos decir que es una diferencia real o no porque hay mucha variación interna. Otro indicador es el rango: el PIC de los jóvenes varía de 40 a 78, y el de los adultos de 55 a 77. Y al comparar estos dos rangos, si acaso se podría conjeturar que un PIC tan bajo como 40 sólo es posible entre los jóvenes, pero por lo demás no se puede decir con certeza que los jóvenes tengan ni peores ni mejores valores que los adultos. Es decir, en estos grupos de entrevistados encontramos que hay una tendencia a que los adultos obtuvieron resultados ligeramente mejores en problemas de tasa, mezcla y partición, pero esto no deja de ser precisamente eso: una tendencia. Por lo demás, las muestras de sujetos no son ni representativas ni suficientemente grandes como para permitir un análisis estadístico inferencial.

Sería muy aventurado o arriesgado decir que los adultos o jóvenes están en posible ventaja unos de otros por el solo hecho de tener más instrucción o más experiencia vivida dentro de las aulas escolares. Pero aún así, haciendo una comparación entre los mismos sujetos de un grupo (edad o sistema), encontramos muchas diferencias en su modo de responder y así mismo en sus errores, y no era garantía que dos personas perteneciesen al mismo grupo de sujetos para que respondieran igual.

El resultado principal en esta investigación radica en que hay tantas variaciones en las formas individuales de resolver los problemas que no se puede decir que ni la edad ni la escolaridad influyan de manera directa sobre el comportamiento de los sujetos al resolver estos problemas que invocan un razonamiento proporcional.

Por otra parte, si se rescata la tendencia observada en el sentido de que los adultos del sistema abierto podrían tener mejores resultados en algunos contextos que los jóvenes del sistema escolarizado, cabría preguntarse cómo serían los resultados de las otras dos combinaciones de ambos clasificadores: adultos en el sistema escolarizado y adolescentes en el abierto. La primera no es posible porque el sistema escolarizado no contempla alumnos adultos, pero la segunda si es posible: hay jóvenes de 15 a 18 años en el sistema abierto. Una siguiente etapa de la investigación aquí iniciada podría ser el estudio de las respuestas dadas por jóvenes de este último grupo a los problemas planteados. Si ellos responden como los adultos de este estudio, se podría plantear que las diferencias son atribuibles al sistema, y solo hacen como los adolescentes de este estudio, se puede decir que las posibles diferencias se deben a la edad de los sujetos.

De los fundamentos teóricos empleados en esta investigación, encontramos que:

- ❖ Para Piaget el desarrollo mental se va construyendo de manera continua, como un proceso interno a las personas, por medio de una relación activa con el mundo. A la par con el crecimiento fisiológico se van teniendo unidades denominadas estadios. Desde esta postura se diría que en esta muestra la mayoría de alumnos de secundaria escolarizada y abierta no están en el estadio de las operaciones formales, sino quizá en las operaciones concretas o en fase de transición de un estadio a otro, y como se observó al analizar las estrategias que los estudiantes dieron, utilizan modos de pensamiento formal en algunas ocasiones y en otras emplean el razonamiento concreto. Esto nos indica que un mismo sujeto se encuentra en distintos estadios incluso dentro de un área, en este caso la del razonamiento proporcional.

- ❖ Para Vigotsky el desarrollo mental se va construyendo de manera continua, como un proceso externo a las personas, por medio de una relación activa con el medio. Desde esta postura es posible comprender una experiencia que ocurrió a menudo en las entrevistas: en ocasiones bastó una pregunta para que el entrevistado cambiara su modo de resolución de uno incorrecto a uno correcto. Una interpretación es que la entrevista se basaba en la Zona de Desarrollo Actual del sujeto, pero que la simple pregunta lo movía a la Zona de Desarrollo Próximo: el sujeto aprendía.

Desde nuestra perspectiva consideramos que ambas posturas describen el desarrollo del individuo, es decir que se da una especie de mezcla de ambas y que van moldeando a ese sujeto que está dispuesto a aprender. Con esto concluimos que el desarrollo intelectual no puede concebirse al margen del aprendizaje, ya sea escolar o informal, pues creemos que el desarrollo depende en gran medida tanto de la historia de la sociedad en la cual se desarrolla el niño como de las experiencias que va adquiriendo, pues ambas son vitales para moldear estilos cognitivos del pensamiento. Es decir, ambas aportaciones teóricas son complementarias y sólo se requiere flexibilidad en cuanto a los estadios de desarrollo que Piaget definió.

Finalmente, con respecto a las aplicaciones que en el ámbito educativo puede tener esta tesis, consideramos que en primer lugar en un ambiente educativo se tienen que considerar las diferencias cognitivas de cada sujeto, porque aunque se trabaje en un sistema escolar en donde aparentemente todos los sujetos tienen las mismas características de edad cognitiva, no siempre existirán las condiciones necesarias en cada uno de ellos para lograr que todos aprendan a la par. Pensamos que ése es uno de los posibles factores que intervienen en el fracaso escolar. Desde nuestra perspectiva el docente frente a grupo debe considerar el abanico de estrategias con que cada sujeto cuenta, lo cual implica que en las escuelas se debería practicar la asesoría de manera individualizada, para conocer en la medida de lo posible, todas las estrategias correctas e incorrectas que el educando tiene, de tal forma que cada persona pueda elegir entre las correctas la que más se le facilite y le resulte óptima para cada situación, y también de tal forma que el docente pueda corregir las que son incorrectas. Esto conllevaría a que cada individuo potenciara su propio estilo cognitivo y la zona de desarrollo próximo.

Una educación que considere las capacidades de cada sujeto y se ajuste a su nivel permitirá hacerle más significativo el aprendizaje a los sujetos, pero eso sólo se puede lograr cuando se tiene un pleno conocimiento de lo que concierne a una educación más adaptable a los individuos.

BIBLIOGRAFÍA

Aberastury, Arminda y Knobel, Mauricio (1990). *Adolescencia normal: Informe Psicoanálitico.* México:Paidós.

Aguilar, Armando (1991). *El paradigma cibernético en el estudio de las emociones. Investigación psicológica*. México:Paidós.

Alatorre, Silvia (1994).*Respuestas intuitivas de adultos a problemas de probabilidad. Algunas aportaciones metodológicas. Tesis de maestría.* México: UPN.

Alatorre, Silvia (2004). *¿A, B, o da igual? Estudio sobre el razonamiento proporcional. Tesis de doctorado.* México: IPN.

Beltrán, Jesús (1996). *Procesos, estrategias y técnicas de aprendizaje.* México:Santillana.74

Carretero, Mario (1993). *Constructivismo y educación.* Zaragoza, Esp.:Edelvives.

Cantoral R, Farfán R., Cordero F., Alanís J., Rodríguez R. y Garza A. (2000). *Desarrollo del pensamiento Matemático.* México:Trillas.

Coll, Cesar (1996). *Constructivismo y la educación escolar: ni hablamos siempre de lo mismo ni lo hacemos siempre desde la misma perspectiva epistemológica.* Barcelona:Universidad de Barcelona.

Conde, Silvia y Vidales, Ismael (1999). *Formación cívica y ética 1.* México:Larousse.

Conde, Silvia y Vidales, Ismael (2000). *Formación cívica y ética 2.* México:Larousse.

Constitución Política de los Estados Unidos Mexicanos (1994). México:Fernández editores.

Cueli, José, Reidl Lucy, Martí Carmen, Lartigue Teresa y Michaca Pedro (1997). *Teorías de la personalidad.* México:Trillas.

Delval, Juan (1997a). *El Desarrollo Humano.* México:Siglo XXI.

Delval, Juan (1997b). *Crecer y pensar: La construcción del conocimiento en la escuela.* México:Paidós.

Díaz, Rogelio (1994). *Psicología del Mexicano.* México:Trillas.

DLE: Diccionario de la lengua española (1970). Madrid:Espasa-Calpe.

Escareño, Fortino y Mancera, Eduardo (1993). *Matemáticas 1*. México:Trillas.

Fernández, José (1991). *El proceso administrativo*. México:Diana.

Fiol, Ma.Luisa y Fortuny Josep (1990). *Proporcionalidad directa: La forma y el número:* Madrid: Síntesis.

Hernández, Fernando y Sancho, Juana Ma. (1993). *Para enseñar no basta con saber la asignatura.* Barcelona:Paidós.

Gardner, Howard (2001). *Estructuras de la mente, la teoría de las inteligencias múltiples.* México:Fondo de cultura económica.

Ideal (1992). *Perfil de Formación de Maestros. Trayectoria y prospectiva de la Modernización Educativa.* (1989-1994) México.

I.N.E.A (2001). *Modelo de Educación para la Vida.* México:INEA.

I.N.E.A (2004). *Modelo de Educación para la Vida.* México;INEA.

Izquierdo, Enrique (1990). *Influencia del pensamiento de Moisés Sáenz en el proyecto, creación y funcionamiento de la Escuela Secundaria Mexicana (1925-1930).* México:UNAM.

Jackson, Phillip (1992). *La vida en las aulas.* Madrid:Morata.

Jones Beau Fly (1998). *Estrategias para enseñar a aprender*. Buenos Aires, Arg: Aíque.

León, Antoine (1991). *La psicopedagogía de los adultos*. México:Siglo XXI.

Ley Federal de Educación (1974). México:SEP.

Ley Nacional de Educación para Adultos (1976). México:SEP.

Ludojosky, Luis (1986). *Andragogía, Educación del Adulto.* Buenos Aires, Argentina:Guadalupe.

Macías, Eduardo y Valdez, Tamayo (2000). *Ser adolescente.* México:Trillas.

Macnab,D.S. y Cummine, J.A. (1992) Tr. Carlos Maza Gómez. *La enseñanza de las matemáticas de 11 a 16*. España, Visor.

Mancera, Eduardo (2000). *Saber matemáticas es saber resolver problemas.* México:Iberoamérica.

Martínez Beltrán, J. (1995). *Enseño a pensar*. Madrid:Bruno.

Mckinney, John, Fitzgerald, Hiram y Strommen, Ellen (1982). *Psicología del desarrollo edad adolescente.* México:Manual Moderno.

Mejía, Raúl (1976). *Moisés Sáenz; educador de México.* México:Federación Mexicana.

Monclaús, Antonio (1997). *Educación de Adultos, Cuestiones de Planificación y Didáctica*. México:Siglo XXI.

Monereo, Carles y Badia, Antoni (2002). *Ser estratégico y autónomo aprendiendo.* Barcelona, Esp:Gráo.

Nanneti, Guillermo (1951). *Manual de Educación de Adultos.* Washington: UNESCO.

Orobio, Héctor y Ortiz, Marina (1997). *Educación matemática y desarrollo del sujeto.* Santa Fe de Bogotá:Cooperativa Editorial Magisterio.

Papalia, Diane y Wendkos, Rally (1999). *Psicología.* México:Mc Graw Hill.

Peralta, Javier (1995). Principios didácticos e históricos para la enseñanza de la matemática. España:Huerga Fierro

Pérez, Angel (1994). *El aprendizaje escolar. La didáctica operatoria y la cultura en el aula*. España: Morata.

Polya, George (1978). *Cómo plantear y resolver problemas.* México:Trillas.

Priestley, Maureen (1999). *Técnicas y estrategias del pensamiento crítico*. México:Trillas.

Ramírez, Ma. Dolores (1994). *Matemáticas 1.* México: Santillana

Reglamento Interior de Educación Pública (1978) México: Diario Oficial del 27 de febrero de 1980.

Resnick, Lauren y Ford, Wendy (1990). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos.* Barcelona: Paidós.

Resnick, Lauren y Klopter, Leopoldo (1997). *Curriculum y Cognición.* Buenos Aires:Aique.

Reyes, Marisol, Picazo Azucena, Castillo Mónica y Pérez Cuauhtémoc (1998). *La psicología en la educación básica: Enseñanza de las fracciones en ambientes de aprendizaje situado*. México:U.P.N.

Rueda, M. y Díaz Frida (2000). *Evaluación de la docencia.* México:Paidós.

Sánchez, Augusto y Calviño Santiago (1993). *Matemáticas de educación secundaria obligatoria.* Madrid: Escuela Española.

Sánchez, José Antonio (1992). *La educación de adultos:* tesis de licenciatura. México:U.P.N.

Santaló, Luis A. (1999). *Enfoques hacia una didáctica humanista de la matemática*. Argentina:Troquel.

Santos, Luz Manuel (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas.* México:Iberoamericana.

S.E.P. (1945) *Creación del instituto federal de capacitación del magisterio.* México:SEP.

S.E.P. (1976). *Folleto de información para estudiantes de secundaria abierta.* México:SEP.

S.E.P. (1978). *Reglamento Interior de la SEP: Sistemas Abiertos.* México:SEP.

S.E.P. (1993). *Planes y Programas de Estudio.* México:SEP.

S.E.P. (1994). *Sistemas Educativos Nacionales: México. Informe realizado por Germán Alvarez.* Madrid:OEI.

S.E.P. (1995-2000). *Programa de modernización educativa.* México:SEP.

S.E.P. (1996) *Libro para el maestro, Educación Secundaria.* México:SEP.

S.E.P. (2004a). www.sep.gob.mex/wb2/sep-514matemáticas.

S.E.P. (2004b). www.2ac.sep.gob.mx/ajuste_prog.htm/#cap:2.

Valiente, Santiago (2000). *Didáctica de la matemática.* Madrid:La Muralla.

Vidales, Ismael (2001). *Psicología General.* México: Limusa.

Villarreal, Tomás (1967). *Estrategias de aprendizaje*. México:Oaisis.

Wertsch, James (1995). *Vigotsky y la formación social de la mente.* México:Paidós.

ANEXO 1

SEMBLANZA DE LOS SUJETOS

	ANEXO 1
Nombre e iniciales, edad y escolaridad	**Semblanza biográfica**
Ana (An) 13 años 2º secundaria	Estudia en una secundaria oficial. Entró a la primaria a los 6 años. Vive y estudia en Xochimilco (D.F.). Es la primera de cuatro hijos de una madre dedicada al hogar y un padre que hace limpieza en un hospital. Cuando termine la secundaria, quiere estudiar la preparatoria.
Eduardo (Ed) 15 años 3º secundaria	Es originario de Xochimilco (D.F.), su mamá trabaja por su cuenta haciendo figuras de chocolate, y su papá es empleado. Tiene un hermano mayor y una hermana menor. Los problemas le parecieron medio confusos, piensa que sí había matemáticas en ellos. Para hacer sus tareas estudia por su cuenta. Al terminar la secundaria quiere seguir estudiando la preparatoria.
Gustavo (Gu) 14 años 3º secundaria	Estudia 3º de secundaria en la secundaria técnica No. 94. Dedica al estudio media hora o una hora en las tardes. Le ayudan con sus tareas su papá o su hermana. Convive más con su mamá. A ver televisión dedica cuatro o cinco horas. Su papá es vendedor en una tienda, su mamá trabaja en intendencia en el Tec. Tiene una hermana más grande, de 18 años, que terminó una carrera de informática. Según Gustavo, todo es matemáticas. En la escuela le va más o menos en matemáticas, a veces se le hacen muy tediosas. Él nació en el D.F, su papá también. Son de Xochimilco todos, menos la mamá que nació en Tula. Su mamá hizo una carrera de enfermería, el papá llegó a bachillerato. Los ejercicios le parecieron divertidos.
Héctor (He) 13 años 2º secundaria	Estudia en la Secundaria Técnica 28 en Xochimilco. Él puede estudiar solo, pero necesita ayuda porque hay veces que le cuestan trabajo las cosas. Le cuestan trabajo las matemáticas, otras materias no tanto. Sí cuenta con apoyo, sí se prepara y sí le ayudan. Tiene un hermano menor, en 2º de primaria. Su mamá es la que trabaja, el papá no vive con ellos. Estudia solamente porque sabe que tiene que salir adelante y ayudar a su mamá. También se va a tener que ayudar a sí mismo. Pero rara vez le pone atención al estudio. En la escuela sí hace los trabajos, pero estudia en la casa no. Lo que le gusta es la historia mexicana.

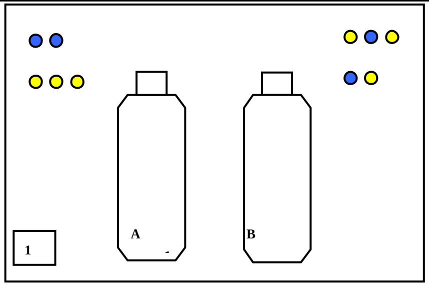
Wendy (We) 14 años 2º secundaria	Está cursando la secundaria en Xochimilco (D.F.). No sabe todavía a qué tipo de escuela va a ir cuando salga de la secundaria, tal vez a la preparatoria de Coyoacán. Sólo tiene una hermana menor. Sus dos padres trabajan, la madre en un centro de desarrollo infantil, el padre no sabe dónde. En general no le ayudan con las tareas, el padre a veces, cuando es de dibujar. Si tiene dudas le pregunta al maestro o a alguna compañera, o revisa sus apuntes.
Chela (Ch) 36 años 3º secundaria	Empezó la secundaria aproximadamente hace un mes y medio o dos meses, cree que en un mes más la termina, sólo le faltan dos programas: matemáticas, operaciones avanzadas y México nuestro. El libro de matemáticas, dice, le ayuda a uno con los exámenes, se ayuda comprobando con la calculadora. Entró al INEA para hacer la secundaria, quiere seguir con la preparatoria: le gusta. Es constante para conseguir lo que le gusta. Tiene tres hijos, uno de 22, uno de 15 y una de 10, además de dos nietas. Le fue difícil ser mamá a corta edad.
Flor (Fl) 37 años 3º de secundaria	Está por terminar la secundaria abierta. Entró a la primaria a los 5 1/2 años y a la secundaria a los 11 ½. Reprobó matemáticas en 1º , falló el extraordinario y después quedó embarazada y abandonó los estudios. Es ama de casa, tiene una hija de 21 años y una de 10. Es originaria de Xochimilco (D.F.), una de tres hermanos; sus padres no terminaron la primaria. Cuando termine la secundaria, quiere estudiar la preparatoria y una carrera de informática.
Odette (Od) 29 años 3º secundaria	Estudia en la secundaria abierta en Xochimilco (D.F.). Terminó la primaria a los 12 años y llegó hasta 1º de secundaria, pero dejó la escuela para casarse. Trabaja y tiene dos hijos.
Queta (Qu) 30 años 3º secundaria	Está en la secundaria abierta, está a punto de terminar, le falta sólo una materia. Estudia con los asesores de la escuela, va a clase cuando no entiende. Después de la secundaria quiere seguir estudiando, porque para conseguir trabajo ya piden la secundaria. Quiere seguir la prepa abierta, ahí mismo donde está. Hasta donde pueda, después terminar la prepa verá qué más. Le gusta la psicología. Es soltera sin hijos.
Yolanda (Yl) 29 años 2º secundaria	Está estudiando en la secundaria abierta de Xochimilco (D.F.). Es originaria del Estado de Durango. Terminó la primaria a los 13 años y después de dedicó a trabajar y a sus dos hijos. Trabaja en el hogar y en ventas.

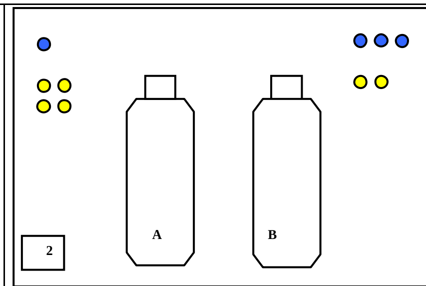
ANEXO 2

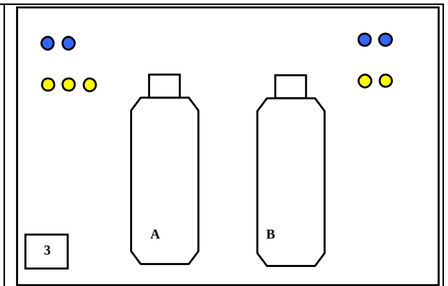
INSTRUMENTOS

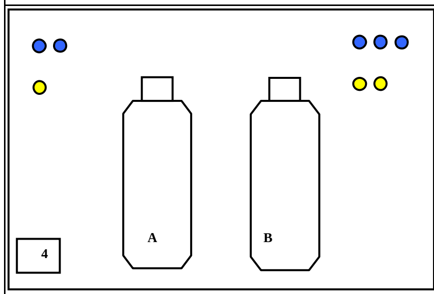
B:

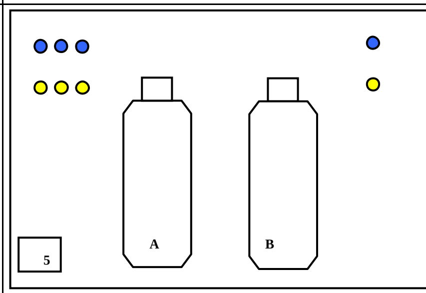
BOTELLAS DE CANICAS

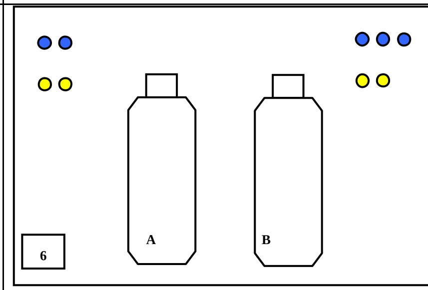


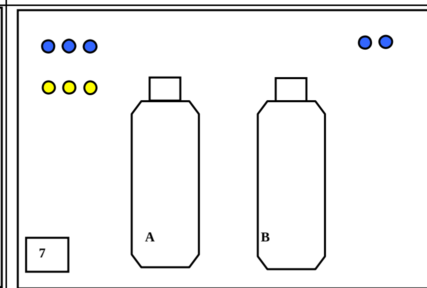


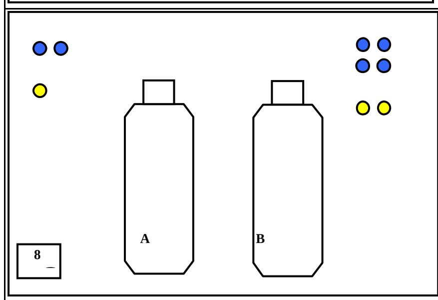


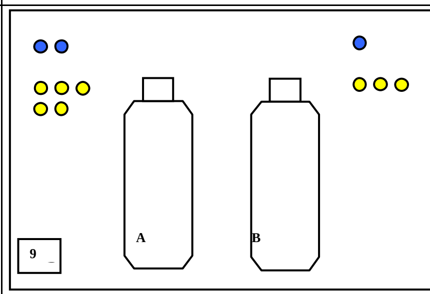


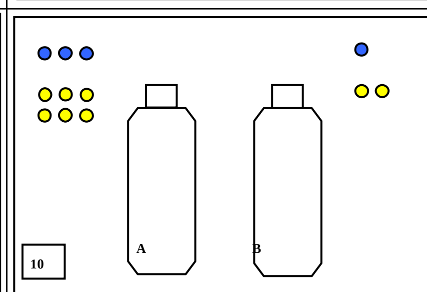


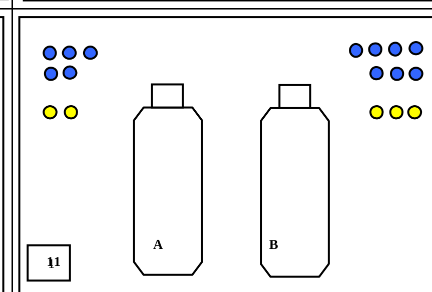


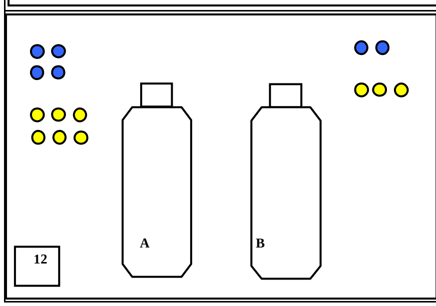


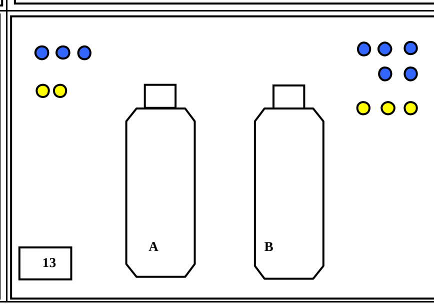


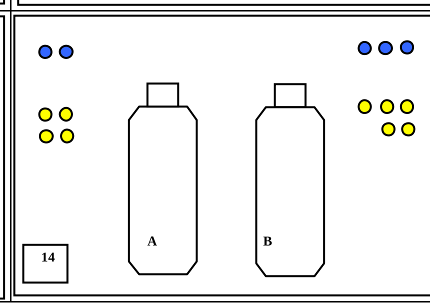


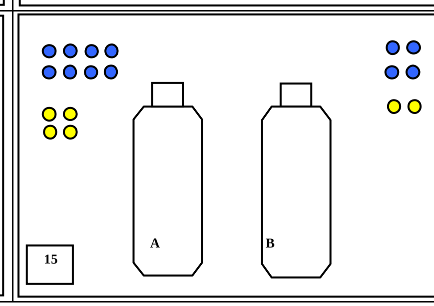






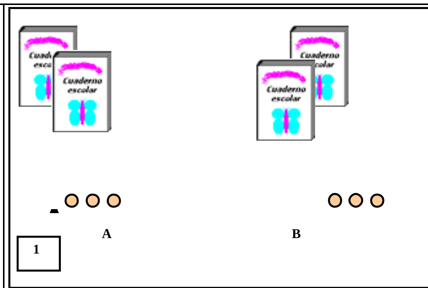


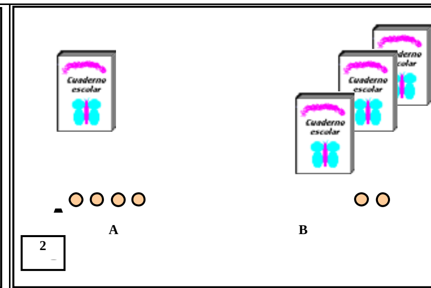


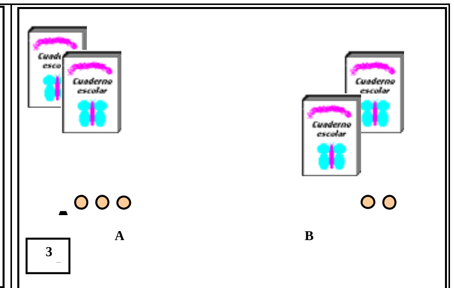


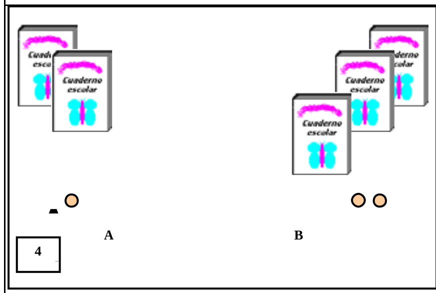
C:

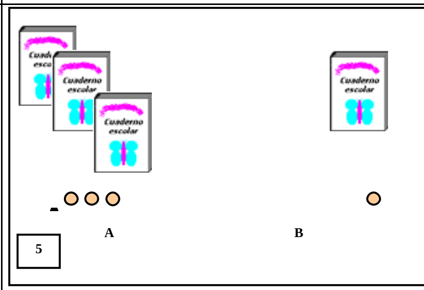
CUADERNOS

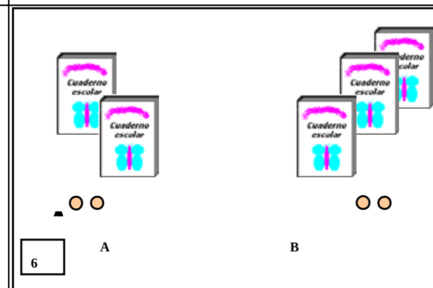

1
A
B

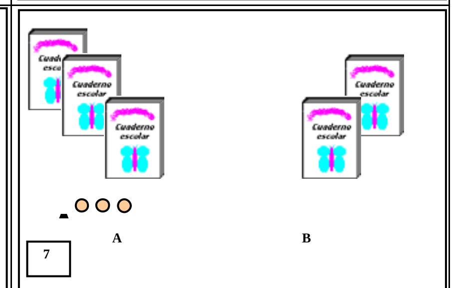

2
A
B

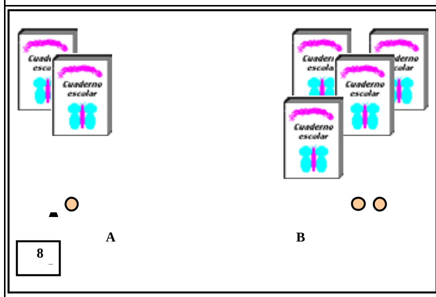

3
A
B

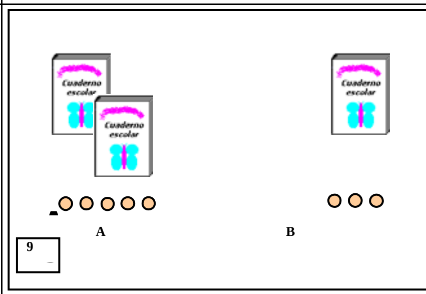

4
A
B

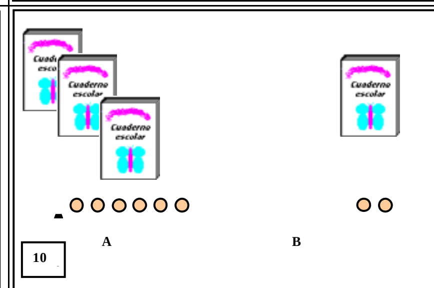

5
A
B

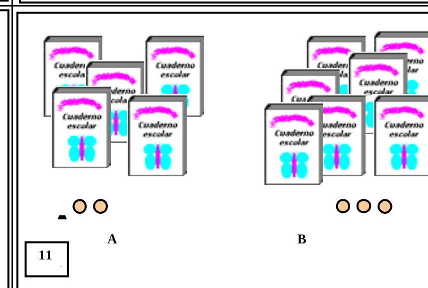

6
A
B

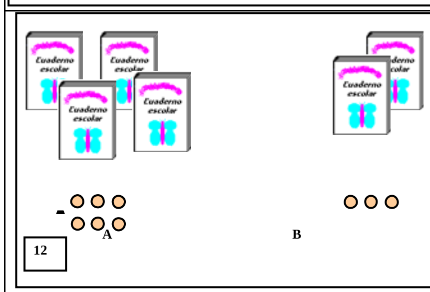

7
A
B

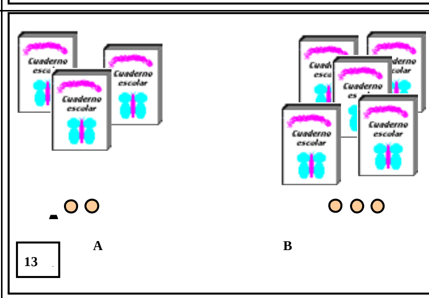

8
A
B

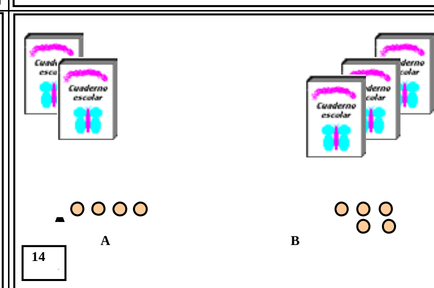

9
A
B

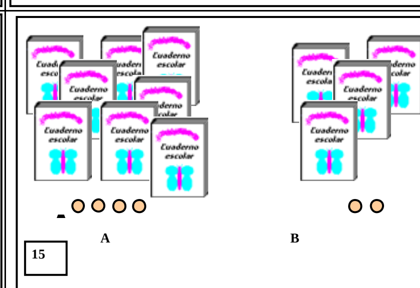

10
A
B


11
A
B


12
A
B


13
A
B

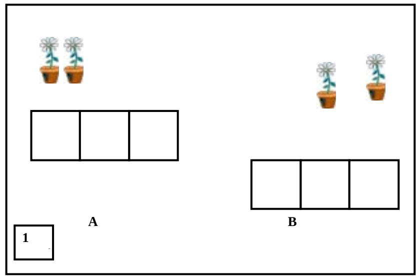

14
A
B

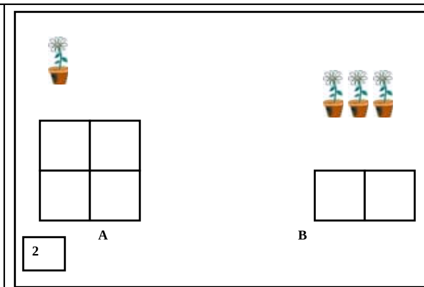

15
A
B

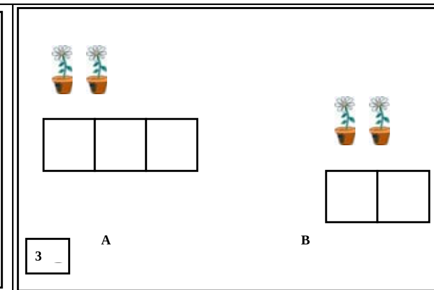
D:

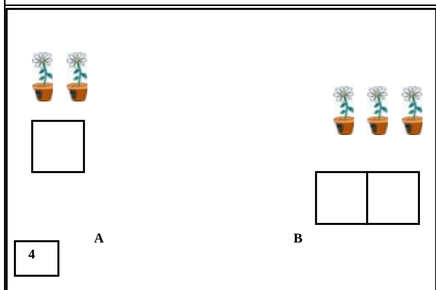
DENSIDAD

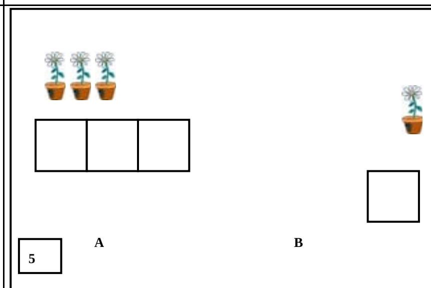
(versión con flores en jardines utilizada en las entrevistas Yl, An, Od)

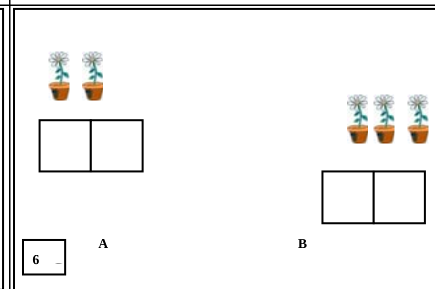


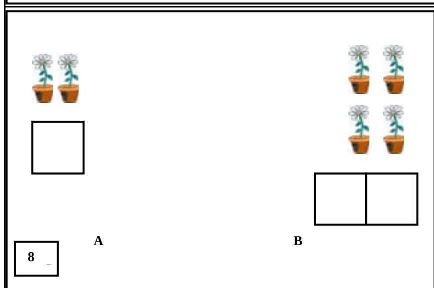


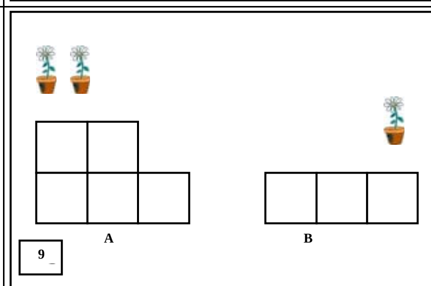


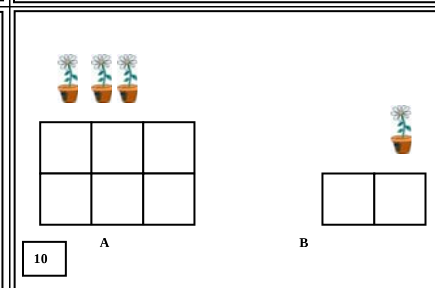


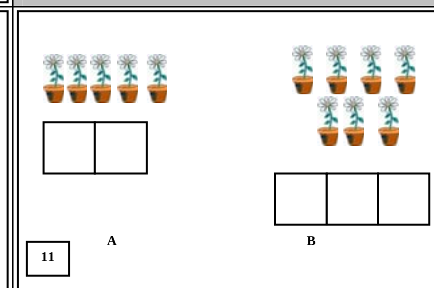


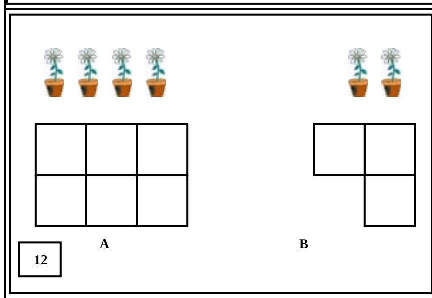


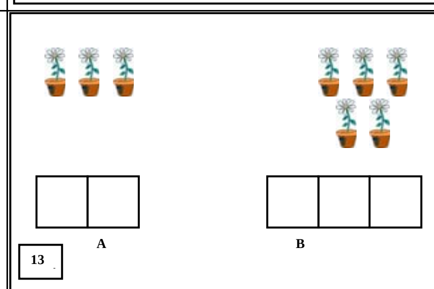


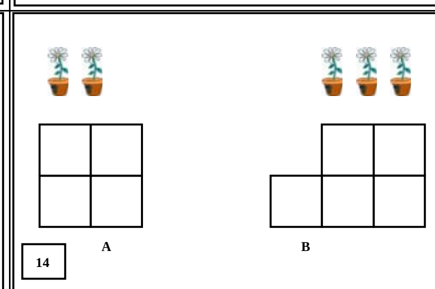


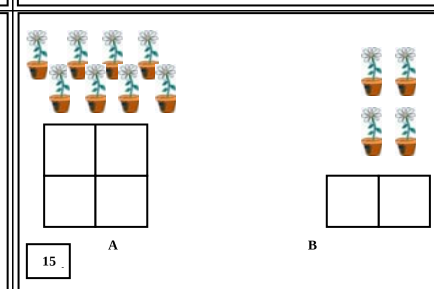








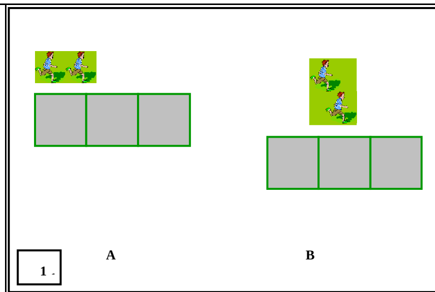


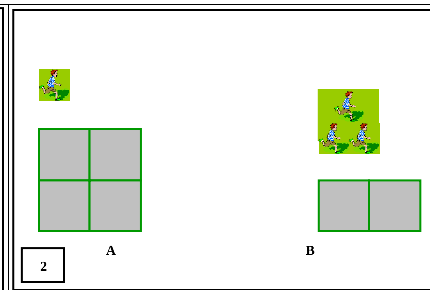


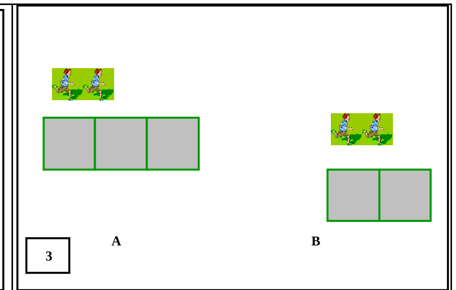
D:

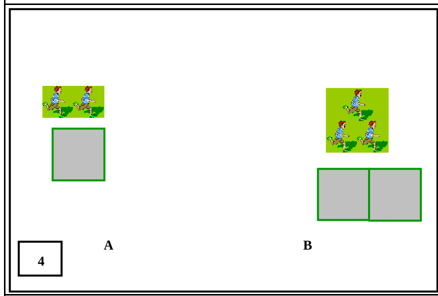
DENSIDAD

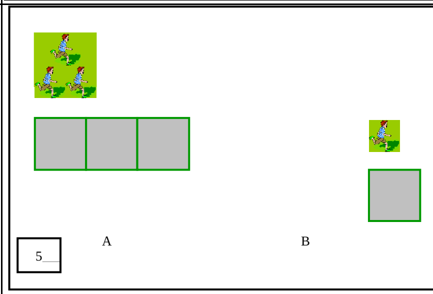
(versión con niños en patios utilizada en las entrevistas Fl, Ag, He)

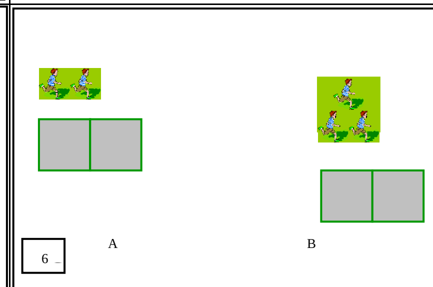


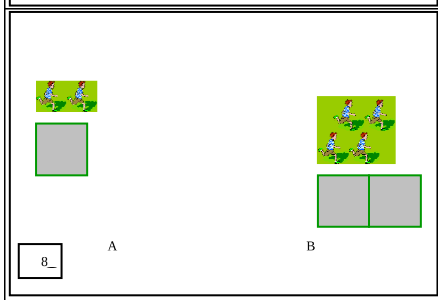


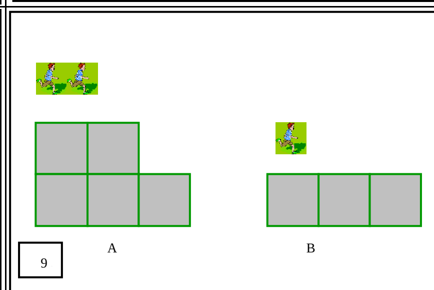


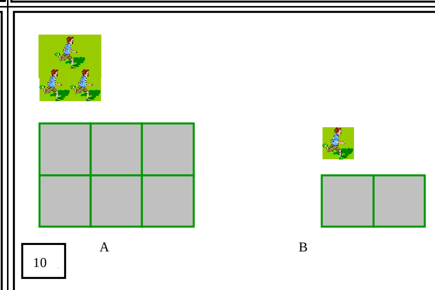


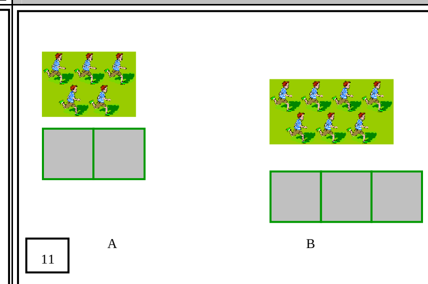


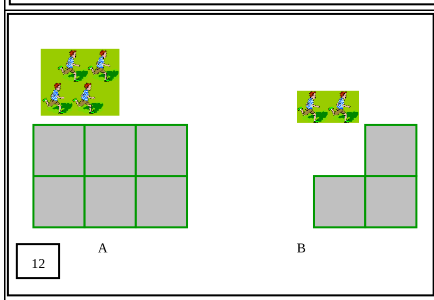


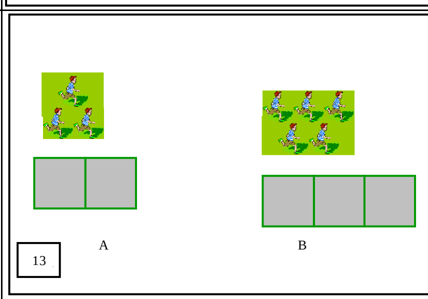


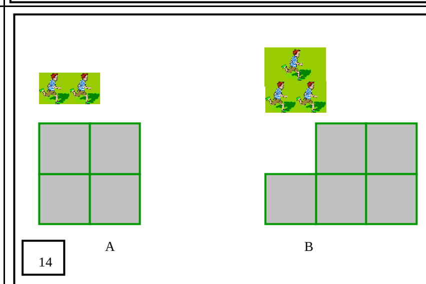


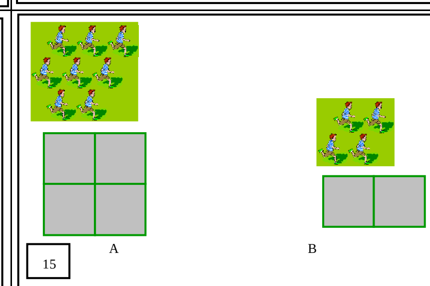












E:

EXÁMENES

1

A — PRIMER EXAMEN
Nombre: *Natalia*
Correctas: **2** ✓
Incorrectas: **3** ✖
Calificación: ___

B — SEGUNDO EXAMEN
Nombre: *Natalia*
Correctas: **2** ✓
Incorrectas: **3** ✖
Calificación: ___

2

A — PRIMER EXAMEN
Nombre: *Natalia*
Correctas: **1** ✓
Incorrectas: **4** ✖
Calificación: ___

B — SEGUNDO EXAMEN
Nombre: *Natalia*
Correctas: **3** ✓
Incorrectas: **2** ✖
Calificación: ___

3

A — PRIMER EXAMEN
Nombre: *Natalia*
Correctas: **2** ✓
Incorrectas: **3** ✖
Calificación: ___

B — SEGUNDO EXAMEN
Nombre: *Natalia*
Correctas: **2** ✓
Incorrectas: **2** ✖
Calificación: ___

4

A — PRIMER EXAMEN
Nombre: *Natalia*
Correctas: **2** ✓
Incorrectas: **1** ✖
Calificación: ___

B — SEGUNDO EXAMEN
Nombre: *Natalia*
Correctas: **3** ✓
Incorrectas: **2** ✖
Calificación: ___

5

A — PRIMER EXAMEN
Nombre: *Natalia*
Correctas: **3** ✓
Incorrectas: **3** ✖
Calificación: ___

B — SEGUNDO EXAMEN
Nombre: *Natalia*
Correctas: **1** ✓
Incorrectas: **1** ✖
Calificación: ___

6

A — PRIMER EXAMEN
Nombre: *Natalia*
Correctas: **2** ✓
Incorrectas: **2** ✖
Calificación: ___

B — SEGUNDO EXAMEN
Nombre: *Natalia*
Correctas: **3** ✓
Incorrectas: **2** ✖
Calificación: ___

7

A — PRIMER EXAMEN
Nombre: *Natalia*
Correctas: **3** ✓
Incorrectas: **3** ✖
Calificación: ___

B — SEGUNDO EXAMEN
Nombre: *Natalia*
Correctas: **2** ✓
Incorrectas: **0** ✖
Calificación: ___

8

A — PRIMER EXAMEN
Nombre: *Natalia*
Correctas: **2** ✓
Incorrectas: **1** ✖
Calificación: ___

B — SEGUNDO EXAMEN
Nombre: *Natalia*
Correctas: **4** ✓
Incorrectas: **2** ✖
Calificación: ___

9

A — PRIMER EXAMEN
Nombre: *Natalia*
Correctas: **2** ✓
Incorrectas: **5** ✖
Calificación: ___

B — SEGUNDO EXAMEN
Nombre: *Natalia*
Correctas: **1** ✓
Incorrectas: **3** ✖
Calificación: ___

10

A — PRIMER EXAMEN
Nombre: *Natalia*
Correctas: **3** ✓
Incorrectas: **6** ✖
Calificación: ___

B — SEGUNDO EXAMEN
Nombre: *Natalia*
Correctas: **1** ✓
Incorrectas: **2** ✖
Calificación: ___

11

A — PRIMER EXAMEN
Nombre: *Natalia*
Correctas: **5** ✓
Incorrectas: **2** ✖
Calificación: ___

B — SEGUNDO EXAMEN
Nombre: *Natalia*
Correctas: **7** ✓
Incorrectas: **3** ✖
Calificación: ___

12

A — PRIMER EXAMEN
Nombre: *Natalia*
Correctas: **4** ✓
Incorrectas: **6** ✖
Calificación: ___

B — SEGUNDO EXAMEN
Nombre: *Natalia*
Correctas: **2** ✓
Incorrectas: **3** ✖
Calificación: ___

13

A — PRIMER EXAMEN
Nombre: *Natalia*
Correctas: **3** ✓
Incorrectas: **2** ✖
Calificación: ___

B — SEGUNDO EXAMEN
Nombre: *Natalia*
Correctas: **5** ✓
Incorrectas: **3** ✖
Calificación: ___

14

A — PRIMER EXAMEN
Nombre: *Natalia*
Correctas: **2** ✓
Incorrectas: **4** ✖
Calificación: ___

B — SEGUNDO EXAMEN
Nombre: *Natalia*
Correctas: **3** ✓
Incorrectas: **5** ✖
Calificación: ___

15

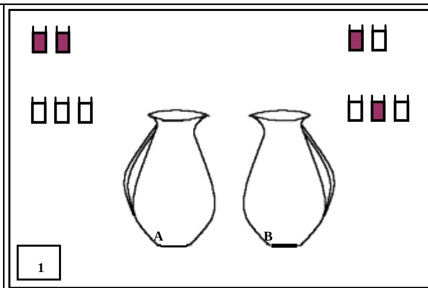
A — PRIMER EXAMEN
Nombre: *Natalia*
Correctas: **8** ✓
Incorrectas: **4** ✖
Calificación: ___

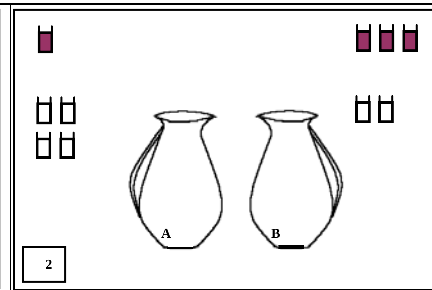
B — SEGUNDO EXAMEN
Nombre: *Natalia*
Correctas: **4** ✓
Incorrectas: **2** ✖
Calificación: ___

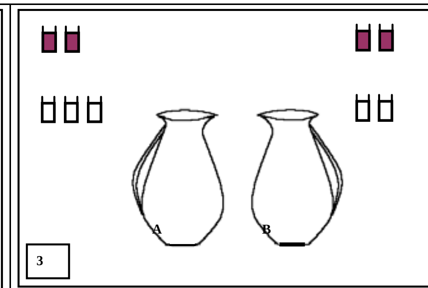
F: *FRACCIONES*	$\frac{2}{5}$ $\frac{2}{5}$ 1	$\frac{1}{5}$ $\frac{3}{5}$ A B 2	$\frac{2}{5}$ $\frac{2}{4}$ A B 3
$\frac{2}{3}$ $\frac{3}{5}$ A B 4	$\frac{3}{6}$ $\frac{1}{2}$ A B 5	$\frac{2}{4}$ $\frac{3}{5}$ A B 6	$\frac{3}{6}$ $\frac{2}{2}$ A B 7
$\frac{2}{3}$ $\frac{4}{6}$ A B 8	$\frac{2}{7}$ $\frac{1}{4}$ 9	$\frac{3}{9}$ $\frac{1}{3}$ 10	$\frac{5}{7}$ $\frac{7}{10}$ 11
$\frac{4}{10}$ $\frac{2}{5}$ 12	$\frac{3}{5}$ $\frac{5}{8}$ 13	$\frac{2}{6}$ $\frac{3}{8}$ 14	$\frac{8}{12}$ $\frac{4}{6}$ 15

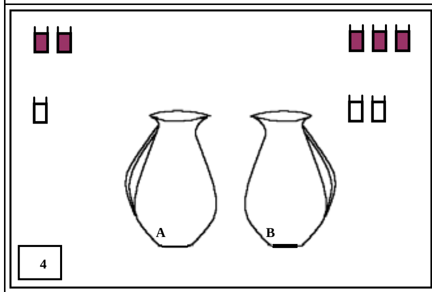
J:

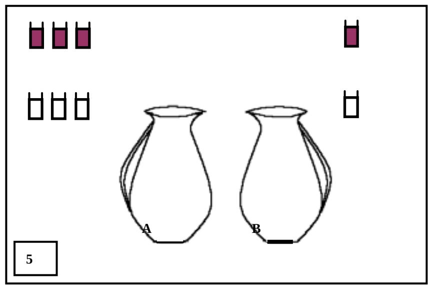
AGUA DE JAMAICA

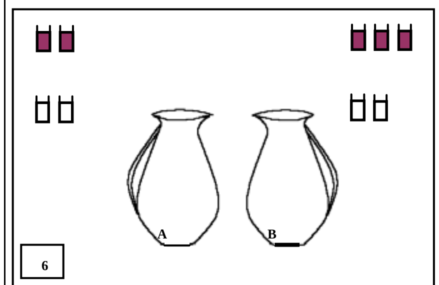


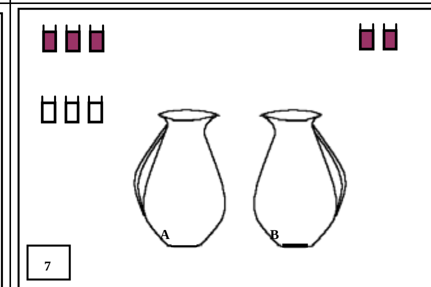


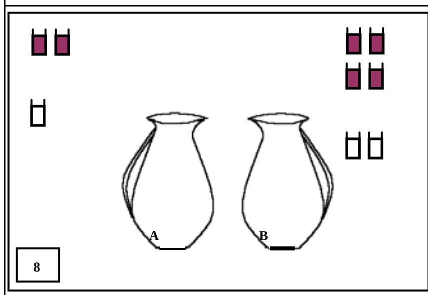


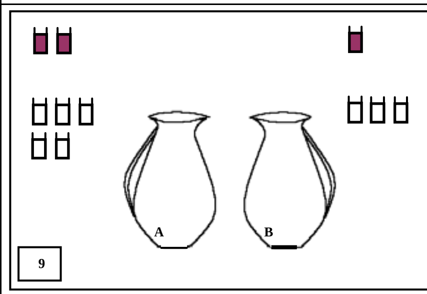


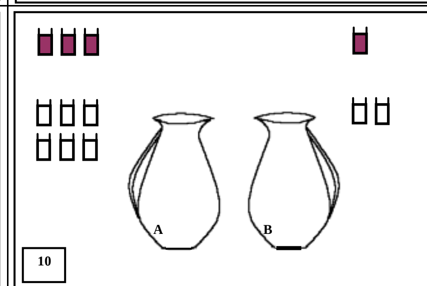


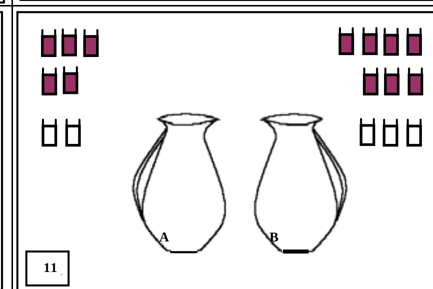


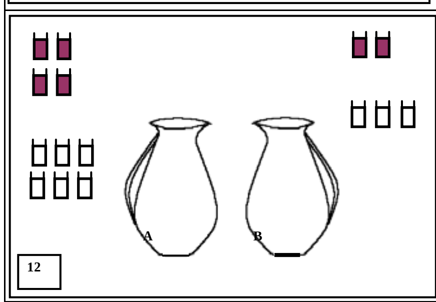


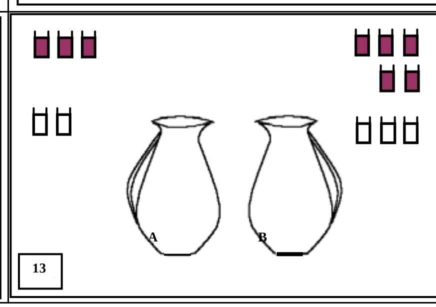


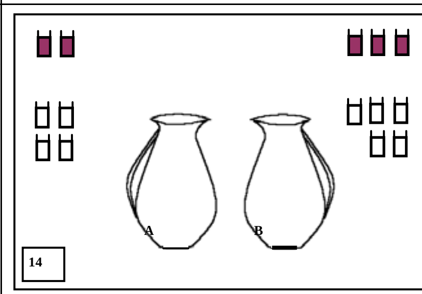


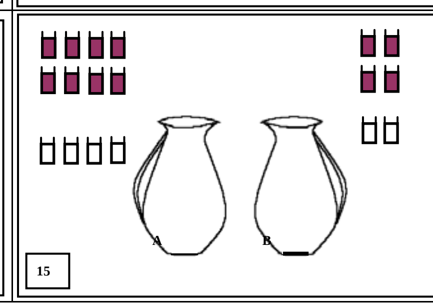






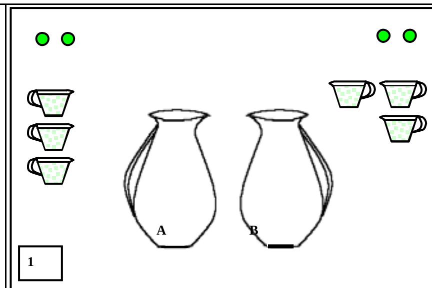


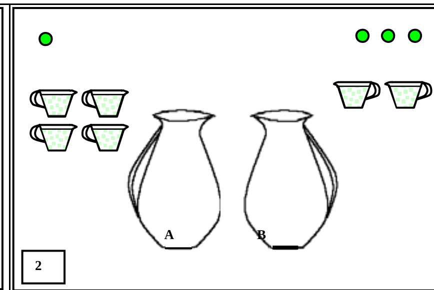


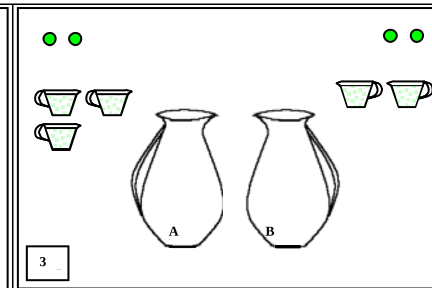


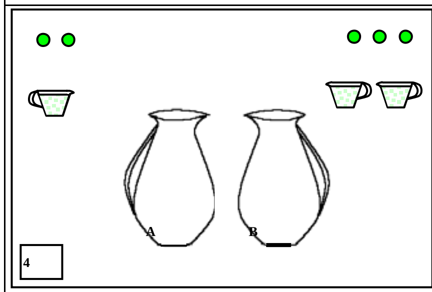
L:

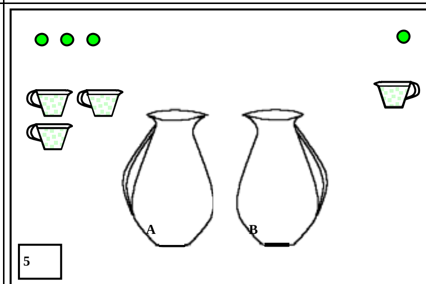
LIMONADA

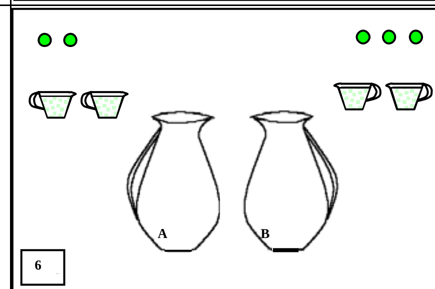

A
B
1

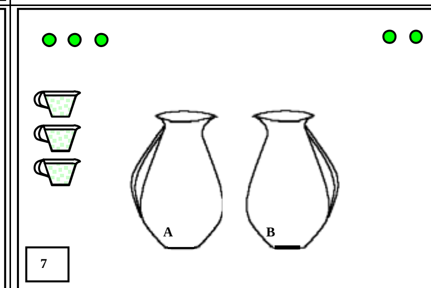

A
B
2

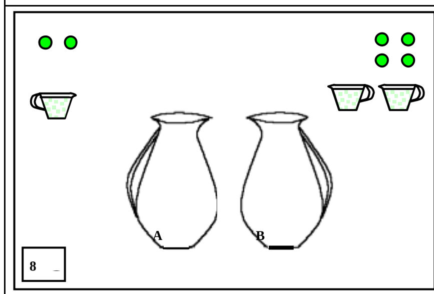

A
B
3

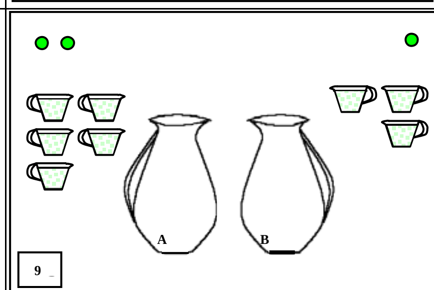

A
B
4

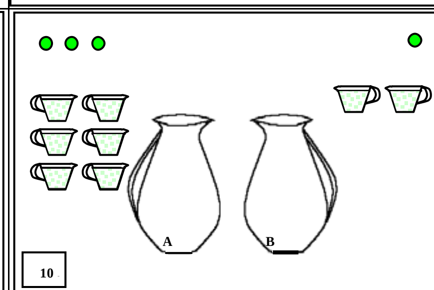

A
B
5

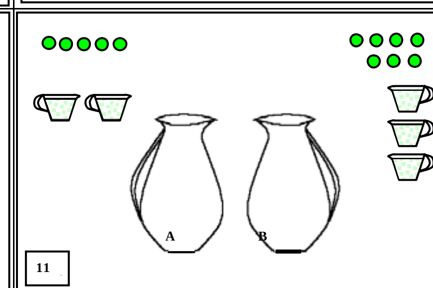

A
B
6

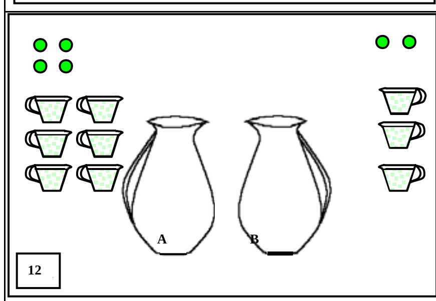

A
B
7

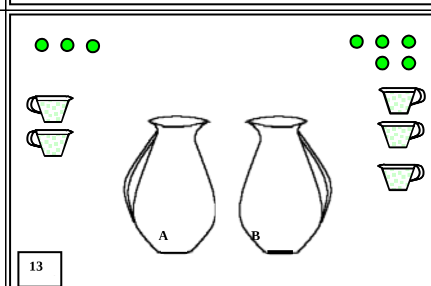

A
B
8

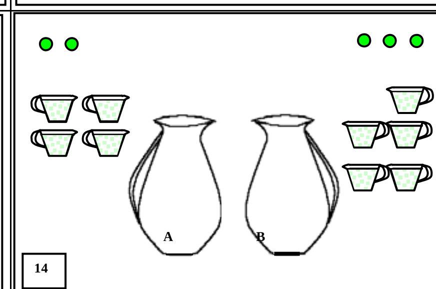

A
B
9

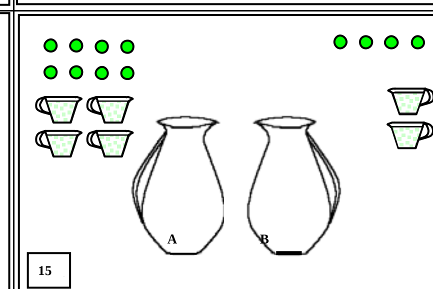

A
B
10


A
B
11


A
B
12


A
B
13


A
B
14


A
B
15

P:

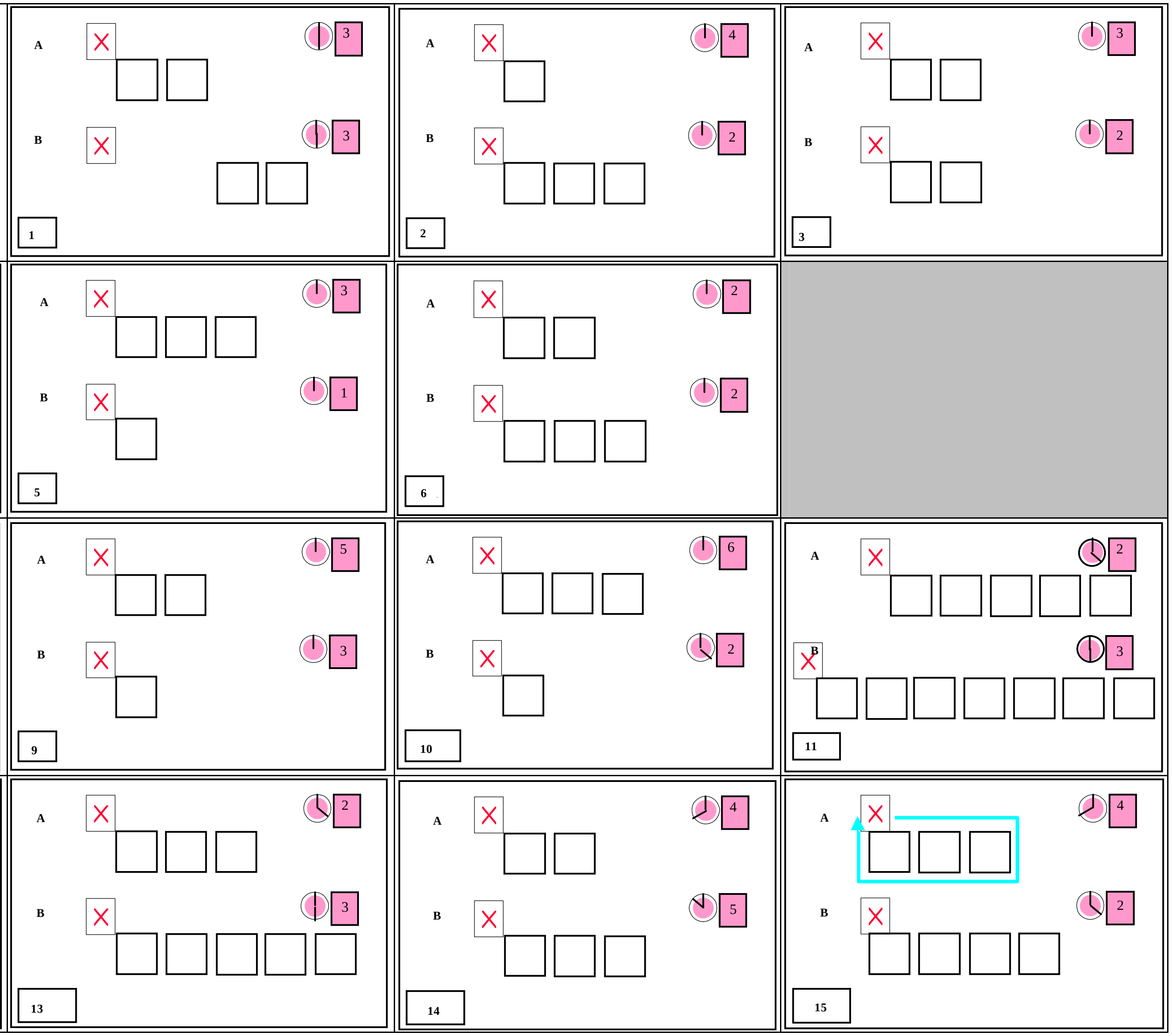
PIZZAS

	A B 1	A B 2	A B 3
A B 4	A B 5	A B 6	A B 7
A B 8	A B 9	A B 10	A B 11
A B 12	A B 13	A B 14	A B 15

R: **RULETAS**	A B 1	A B 2	A B 3
A B 4	A B 5	A B 6	A B 7
A B 8	A B 9	A B 10	A B 11
A B 12	A B 13	A B 14	A B 15

V:

VELOCIDAD


A
3
B
3
1
A
4
B
2
2
A
3
B
2
3
A
1
B
2
4
A
3
B
1
5
A
2
B
2
6
A
1
B
2
8
A
5
B
3
9
A
6
B
2
10
A
2
B
3
11
A
6
B
3
12
A
2
B
3
13
A
4
B
5
14
A
4
B
2
15

ANEXO 3

RESPUESTAS INTERPRETADAS

RESPUESTAS INTERPRETADAS

En este anexo se reproducen los extractos de las respuestas de los sujetos que mejor reflejan su manera de pensar, la interpretación que les fue dada y su puntaje de acuerdo con su estatus de corrección.

Cada respuesta está precedida por su clave: Las iniciales del nombre del sujeto (mayúscula, minúscula), la letra inicial del contexto (un carácter), el número de la pregunta (dos dígitos) y, cuando hubo más de un intento, el número del intento precedido de un guión. Después de un punto se anota decisión del sujeto: “A” por “lado A”, “B” por “lado B”, e “=” por “da igual”. Después de dos puntos sigue el extracto de justificación del sujeto. Posteriormente se apunta la interpretación asignada a la respuesta, seguida del valor P que indica si la respuesta es correcta (P=1), potencialmente correcta (P=0.5) o incorrecta (P=0).

Las estrategias compuestas pueden ser conjunciones {E1 & E2} (se lee “E1 y E2”), exclusiones {E1 ¬ E2} (se lee “E1 a pesar de E2”), compensaciones {E1 * E2} (se lee “E1 con E2”, o contrapesos {E1 ⊥ E2} (se lee “por una parte E1 pero por otra E2”).

Los mecanismos distintos de las estrategias aparecen con la sigla MEC, y pueden ser de aproximación, de dispersión, de tamaño, de aleatoriedad, geométrico, o de error en fracciones. Las respuestas que no fueron interpretadas se anotan como S.J. (sin justificación) o como Descr (respuestas descriptivas).

EXTRACTO DE JUSTIFICACIONES

An,B01. =: Las dos botellas tienen la misma canicas {CA=} P=0.5
An,B02. B: Tiene más azules... que amarillas. {RO+} P=1
An,B03. B: En B son igual azules que amarillas. {RO+} P=1
An,B04. =: En las dos hay más azules que amarillas. {RO=} P=0
An,B05. =: Tiene el mismo número de amarillas y azules. {RP=} P=1
An,B06. B: Tiene más azules... que amarillas. {RO+} P=1
An,B07. =: En A está igual, tiene el mismo número de amarillas y azules, y en la B nomás tiene puras azules. {CC- ⊥ ROe} P=0
An,B08. =: En la A hay más azules que amarillas y en la B también. {RO=} P=0
An,B09. =: Hay más amarillas en las dos botellas. No saldría eso, tiene menos probabilidad de salir azul. {RO=} P=0
An,B10. =: Tiene más amarillas que de azules. {RO=} P=0
An,C01. =: S.J. P=0.5
An,C02. B: Hay más cuadernos por menos monedas. {CA+ & CC-} P=1
An,C03. B: Son dos monedas por dos cuadernos, y en la A son tres monedas por dos. Descr. P=0.5
An,C04. =: En las dos conviene..., porque pagas una moneda más por otro cuaderno. {RS=} P=0
An,C05. =: En la A te dan tres cuadernos por tres monedas, y en la B un cuaderno por una moneda. Sale lo mismo, si compras un cuaderno te va a salir igual allá que acá. {RP=} P=1
An,C06. B: Son el mismo número de monedas, y en B te llevas tres cuadernos. {CA+ * CC=} P=1
An,C07. B: Te los regalan. {CC-} P=1
An,C08. B: En A son dos cuadernos, sale mejor en la otra: te dan dos cuadernos por otra moneda. {RS+} P=0
An,C09. A: Saldrían a dos cincuenta, y en la otra sale a tres pesos. {RP+} P=1
An,C10. =: Si compras en A un cuaderno te sale lo mismo que acá. {RP=} P=1
An,C11. B: Te dan otros dos cuadernos por otra moneda. {RS+} P=0
An,C12-1. A: Te están dando a uno cincuenta cada cuaderno. {RP'} P=0
An,C12-2. =: En A te están dando a uno cincuenta cada cuaderno - (¿Y en B?) - También. Da lo mismo. {RP=} P=1
An,C13. B: Por otra moneda te dan otros dos cuadernos. {RS+} P=0
An,D01. =: S.J. P=0.5
An,D02. B: Son tres, y nada más hay dos cuadritos. {CA+ & CC-} P=1
An,D03. B: Están las dos juntas. {CC-} P=0.5
An,D04. =: Van a quedar igual de apretadas todas las flores. Las dos flores se pondrían en el cuadrito y quedarían un poquito apretadas, y en la otra también. {RO=} P=0
An,D05. =: Apretadas no van a quedar. Porque se pueden distribuir, en la A se pueden distribuir las tres flores y en la B como está muy chiquito el cuadrito, queda una. {RP=} P=1
An,D06. B: Hay más flores y está muy chiquito el cuadrito para las tres. {CA+ * CC=} P=1

An,D08-1. =: En la A hay dos flores y un cuadro muy chiquito, y en la B hay dos cuadros y cuatro flores, entonces quedarían muy apretadas. {RO=} P=0
An,D08-2. B: Tiene más flores. {CA+} P=0
An,D09. =: Quedarían bien las dos. S/J. P=0
An,D10. =: Tampoco quedarían apretadas. S/J. P=0
An,E01. =: S.J. P=0.5
An,E02. B: Sacó más correctas que incorrectas. {RO+} P=1
An,E03. =: Sacó el mismo número de correctas. {CA=} P=0
An,E04. B: Tiene más buenas que malas - (Pero en la A también) - Sí, pero aquí hay tres y ahí hay dos. {CA+ * RO=} P=0
An,E05. A: Sacó más buenas que malas. Sacó más en el A que en el B. {CA+} P=0
An,E06. B: Sacó más buenas en el B. {CA+} P=0.5
An,E07. B: Sacó más buenas. No sacó ni una mala. {CC- & RO+} P=1
An,E08. B: Tiene más buenas que en el A. {CA+} P=0
An,E09. A: Tiene más buenas que en el B. {CA+} P=0
An,E10. A: Tiene más buenas. {CA+} P=0
An,F01. =: S.J. P=0.5
An,F02. B: Tiene mayor denominador, el número de arriba. {CA+} P=0.5
An,F03. A: El denominador es más grande. {CT+} P=0
An,F04. B: Denominador y numerador más grande que el otro. {CA+ & CT+} P=0
An,F05. A: Los dos son más grandes que.... {CA+ & CT+} P=0
An,F06. B: (¿Son más grandes?)-Sí. {CA+ & CT+} P=0.5
An,F07. A: (¿Son más grandes?)-Sí. {CA+ & CT+} P=0
An,F08. B: (¿Son más grandes?)-Sí. {CA+ & CT+} P=0
An,F09. A: [Misma razón que en las anteriores]. {CA+ & CT+} P=0
An,F10. A: [Misma razón que en las anteriores]. {CA+ & CT+} P=0
An,F11. B: [Misma razón que en las anteriores]. {CA+ & CT+} P=0
An,F12. A: [Misma razón que en las anteriores]. {CA+ & CT+} P=0
An,F13. B: [Misma razón que en las anteriores]. {CA+ & CT+} P=0
An,F14. B: [Misma razón que en las anteriores]. {CA+ & CT+} P=0
An,F15. A: [Misma razón que en las anteriores]. {CA+ & CT+} P=0
An,J01. =: S.J. P=0.5
An,J02. B: Son más vasos de jamaica... que agua. {RO+} P=1
An,J03. B: Hay igual número de jamaica que de agua. {RO+} P=1
An,J04. =: Se le echa uno más de jamaica que de agua. {RS=} P=0
An,J05. =: Tiene el mismo número de agua que de jamaica. {RP=} P=1
An,J06. B: Tiene más vasos de jamaica que de agua. {RO+} P=1
An,J07. B: Tiene pura jamaica. {CC-} P=1
An,J08. =: Tiene más jamaica que de agua. {RO=} P=0

An,J09. =: No, no sabe, tiene menos jamaica que agua... Tienen la misma..., hay más agua que jamaica. {RO=} P=0
An,J10. =: Hay más agua en las dos. {RO=} P=0
An,J11. =: La B tiene más jamaica que agua - (La A también) - Están iguales. {RO=} P=0
An,L01. =: S.J. P=0.5
An,L02. B: Hay más limones que vasitos, sería más concentrado a limón. {RO+} P=1
An,L03. B: Tiene menos tazas de azúcar. {CC-} P=0.5
An,L04. =: Hay más limones que tazas en las dos. {RO=} P=0
An,L05. A: Hay más limones que en la B. {CA+} P=0
An,L06. B: Hay más limones que en la A. {CA+} P=0.5
An,L07-1. A: Hay más limones que en la B. {CA+} P=0
An,L07-2. B: Tiene puro limón... No tiene agua, tiene puro concentrado de limón. {CC-} P=1
An,L08. =: Las dos, porque tienen más limones que agua. {RO=} P=0
An,L09. =: En las dos hay más agua que limón. {RO=} P=0
An,L10. =: En las dos hay más agua que limón. {RO=} P=0
An,P01. =: S.J. P=0.5
An,P02. B: Tiene más gris... que naranja. {RO+} P=1
An,P03. =: (¿Porque hay dos grises en los dos?) -Sí, por eso. {CA=} P=0
An,P04. =: Hay dos, de los grises son dos. Juntando esto con esto en B sale esto en A. MEC: aproximación. P=0
An,P05. =: Juntando los tres grises de A, es igual que esto en B. MEC: aproximación. P=0.5
An,P06. B: Tiene tres pedacitos grises - (¿Y A?) - Se comió dos. {CA+} P=0.5
An,P07. B: S.J. P=0.5
An,P08. =: Juntando todos los grises de B da igual que aquí en A. MEC: aproximación.P=0.5
An,P09. =: Juntando los grises da lo mismo. MEC: aproximación. P=0
An,P10. =: Juntando los grises. MEC: aproximación. P=0
An,R01. =: Tienen el mismo color azul. {CA=} P=0.5
An,R02. B: Hay más azul que amarillo. {RO+} P=1
An,R03. =: Hay el mismo color de azul. {CA=} P=0
An,R04. =: (En A) hay más azul... hay más azul que amarillo... (En B) también hay más azul. {RO=} P=0
An,R05. =: Es el mismo número de azul que el otro lado, están iguales [el azul y el amarillo]. {RP=} P=1
An,R06. B: El mismo número de azul, es más azul que amarillo, y en el A hay el mismo. {RO+} P=1
An,R07. B: S.J. P=0.5
An,R08. =: Juntando la azul de este lado con esto en B, queda lo mismo que esto en A. MEC: aproximación.
An,R09. =: En A hay más amarillo, más amarillo que azul. En B, más amarillo que azul. {RO=} P=0
An,R10. =: Da lo mismo. Hay más amarillo que azul. {RO=} P=0
An,V01. =: S.J. P=0.5
An,V02. B: Caminó más cuadras - (¿No las caminó más despacio? ¿Por qué no?) - Porque ahí dice que hizo dos minutos. {CA+ & CC-} P=1
An,V03. B: Hizo dos cuadras en menos tiempo. {CC- * CA=} P=1
An,V04. B: Hizo más tiempo pero caminó más cuadras. {CA+ ¬ CC-} P=0

An,V05. =: Si B caminara tres cuadras, haría el mismo tiempo que hizo A. {RP=} 1P=
An,V06. B: Hizo el mismo tiempo pero caminó más cuadras. {CA+ * CC=} P=1
An,V08. B: B dobló las cuadras y dobló el tiempo, pero es más importante que dobló las cuadras, y entonces caminó más rápido. {CA+ * RP=} P=0
An,V09. A: Caminó más cuadras e hizo más tiempo, y B hizo nada más tres minutos y caminó nomás una cuadra. {CA+} P=0
An,V10. =: Si B caminara tres cuadras, haría el mismo tiempo que A. {RP=} P=1
Ed,B01. =: Tienen las mismas pelotitas amarillas que azules. {CA=&CC=} P=1
Ed,B02. B: Son más azules ... que amarillas. {RO+} P=1
Ed,B03. B: Son las mismas pelotitas. En la A no. Es que tiene más posibilidad que caigan las amarillas que las azules. {RO+} P=1
Ed,B04. B: Son más pelotitas azules que en la A. {CA+} P=0
Ed,B05. B: Son menos canicas. {CT-} P=0
Ed,B06. B: Son más canicas azules que amarillas. {RO+} P=1
Ed,B07. B: Son nada más azules. {CC-} P=1
Ed,B08. =: Aquí B de una pelotita amarilla son dos azules, y aquí en A es lo mismo. {RP=} P=1
Ed,B09. A: Una pelotita azul tiene tres amarillas y una azul tiene dos. Y aquí B tiene tres pelotitas igual que aquí A, pero aquí A tiene dos nada más. {RP+} P=1
Ed,B10. =: Por cada pelotita azul hay dos amarillas. {RP=} P=1
Ed,B11. =: Por cada amarilla hay dos azules, y siempre sobra una azul. {RP’} P=0
Ed,B12. B: Estas A cuatro tienen par cada una y éstas B dos también. Aquí A sobran dos amarillas, y aquí en B nada más una. {RS+} P=0

Ed,C01. =: En las dos tiendas venden los cuadernos al mismo precio, venden dos cuadernos por tres monedas, en las dos tiendas. {CA=&CC=} P=1
Ed,C02. B: Descripción.P=0.5
Ed,C03. B: Por una moneda porque en A te cobran una moneda más y no te dan más cuadernos. {CC-*CA=} P=1
Ed,C04. =: Cada moneda es una libreta, entonces aquí B dos monedas pues son dos libretas, queda una, y aquí A una moneda una libreta queda una. {RS=} P=0
Ed,C05. =: Una moneda por cada cuaderno. {RP=} P=1
Ed,C06. B: Aquí B es como si te estuvieran regalando una libreta. {RO+} P=1
Ed,C07. B: No te cuestan nada. {CC-} P=1
Ed,C08. B: Supongamos que por cada libreta es una moneda, serían dos libretas por dos monedas y regalarían dos. Y aquí A por un cuaderno te dan uan moneda y te darían uno. {RS+} P=0
Ed,C09. A: Supongamos que cada libreta cuesta tres monedas, entonces auí A la libreta la están dando a dos monedas. {RP+} P=1
Ed,C10. =: Por cada libreta son dos monedas. {RP=} P=1
Ed,C11. B: Aquí A sobran tres cuadernos y aquí B cuatro, entonces es un cuaderno más. {RS+} P=0
Ed,C12. A: Aquí A son seis monedas por dos libretas y le regalan dos. {RP’} P=0
Ed,D01. =: Tienen el mismo espacio para jugar, tanto la B como en la A. {CC=} P=0.5
Ed,D02. B: Aquí B tendría que compartir un niño su cuadro con el otro y aquí A los cuatro sería para él.. {RO+} P=1
Ed,D03. B: Porque en la A tiene un cuadro más para jugar. {CC-} P=0.5

Ed,D04. =:	En un cuadro tienene que jugar dos, uno se queda en un cuadro y dos tienen que compartir uno, igual que A. {RP'} P=0
Ed,D05. =:	Tienen un cuadro para cada quien. {RP=} P=1
Ed,D06. B:	Es un niño más, y se supone que cada cuadro es para un niño. {RO+} P=1
Ed,D08. =:	En cada cuadro tienen que jugar dos niños. {RP=} P=1
Ed,D09. A:	Suponiendo que cada niño tiene que tener tres cuadros, éste niño A tiene tres, entonces este se queda con dos. {RP+} P=1
Ed,D10. =:	Cada niño tiene dos cuadros para jugar. {RP=} P=1
Ed,D11. =:	Un cuadro tiene que ser a fuerzas para tres, suponiendo que éstos B dos cuadros son para estos cuatro niños; y este B cuadro sobra para estos tres, este A cuadro es para estos dos niños, y este A cuadro es para estos tres. {RP'} P=0
Ed,D12. =:	Tienen los mismos cuadros para jugar. {RP=} P=1
Ed,E01. =:	En los dos exámenes … tuvo la misma cantidad de respuestas correctas, y la misma cantidad de respuestas incorrectas. {CA=&CC=} P=1
Ed,E02. B:	Tuvo más respuestas correctas que incorrectas {RO+} P=1
Ed,E03. B:	En la B tuvo menos respuestas incorrectas que en la A. {CC-} P=0.5
Ed,E04. =:	En las dos tuvo una respuesta menos incorrecta. {RS=} P=0
Ed,E08. =:	En los dos exámenes tuvo la mitad pero de incorrectas. {RP=} P=1
Ed,E09-1. B:	Menos respuestas incorrectas. {CC-} P=0
Ed,E09-2. =:	Tuvo más de la mitad malas. {RO=} P=0
Ed,E10. =:	Más de la mitad incorrectas … fueron menos las correctas. {RO=} P=0
Ed,F02. B:	Es más grande tres quintos que un quinto. S.J P=0.5
Ed,F03. A:	El cinco es más grande que el cuatro. {CT+} P=0
Ed,F04. B:	Tres es mayor que dos. {CA+} P=0
Ed,F05. A:	Seis es más grande que dos {CT+} P=0
Ed,J01. =:	Ninguna tiene más y ninguna tiene menos del sabor de jamaica. {CA=&CT=} P=1
Ed,J02. B:	Tiene tres vasos, y nada más ésta A tiene uno. {CA+} P=0.5
Ed,J03. B:	Va a ser menos agua. {CC-} P=0.5
Ed,J04. =:	Aquí B cada vaso de jamaica tiene uno de agua, entonces sobra uno. Aquí Aun vaso de jamaica tiene uno. {RS=} P=0
Ed,J05. =:	Misma cantidad de agua y de jamaica en las dos. {RP=} P=1
Ed,J06. B:	Un vaso más de jamaica y en el A es la misma cantidad de jamaica que de agua. {RO+} P=1
Ed,J07. B:	No le va echar agua. {CC-} P=1
Ed,J08. =:	Por cada vaso de agua son dos de jamaica. {RP=} P=1
Ed,J09. B:	Por cada tres vasos de agua es uno de jamaica, entonces en la A son dos vasos por uno de jamaica y uno de jamaica por tres de agua. Entonces faltaría uno de agua. {RP'} P=0
Ed,J10. =:	Por cada vaso de jamaica son dos agua. {RP=} P=1
Ed,J11. =:	Por cada vaso de agua son dos de jamaica, entonces sobraría un vaso de jamaica por cada jarra. {RP'} P=0
Ed,J12. =:	Por cada vaso de jamaica son tres de agua. {RP=} P=1
Ed,J13. B:	Por cada vaso de jamaica es uno de agua, y sobrarían dos de jamaica. Y aquí A sobraría nada más uno de jamaica. {RS+} P=0
Ed,L01. =:	Las dos tienen la misma cantidad de limones y la misma cantidad de tazas de azúcar. {CA=&CC=} P=1
Ed,L02. B:	Aparte de que tiene un limón más la A tiene dos tazas de azúcar … más que la B. {CC-&RO+} P=1

Ed,L03. B: Por cada limón es una taza de agua azucarada, aquí A es una taza más de agua azucarada {RO+} P=1
Ed,L04. =: Por cada limón es una taza de agua azucarada … por cada limón es una taza de agua azucarada, los dos tienen un limón más {RS=} P=0
Ed,L05. =: Por cada limón es una taza de agua azucarada, entonces no sobra ni taza azucarada ni limón. {RP=} P=1
Ed,L06. B: Aunque las dos tienen lo mismo de taza de agua azucarad, sobra un limón. {CA+*CC=} P=1
Ed,L07. B: No tiene agua azucarada. {CC-} P=1
Ed,L08. =: Por cada dos limones es una taza azucarada. {RP=} P=1
Ed,L09. =: Por cada limón .. son dos tazas azucaradas…. En las dos jarras sobraría una taza de agua azucarada. {RP'} P=0
Ed,L10. =: No sobran ni limones ni agua, ni tazas de agua azucarada …. Pongamos que por cada limón son dos tazas. {RP=} P=1
Ed,L11. =: en cada taza son dos limones, sobraría un limón en las dos jarras. {RP=} P=1
Ed,L12. =: Son dos limones por … tres tazas, entonces no sobra ni de limón ni de tazas. {RP=} P=1

Ed,P01. =: Los dos han comido tres triángulos, y les sobran tres triángulos … de pizza. {CA=&CC=} P=1
Ed,P02. B: Hay más triángulos vacíos que en el A. {CA+} P=0.5
Ed,P03. B: Los triángulos vacíos son más grandes que los de la A. {CT-} P=0.5
Ed,P04. B Si los juntáramos sería una mitad. {RP'} P=0
Ed,P05. =: Si juntamos los espacios vacíos … los dos se han comido la mitad de la pizza. {RP=} P=1
Ed,P06. =: Si estos dos B cachos de pizza los juntáramos, quedaría la mitad. Y si éstos A dos los juntáramos, igual quedaría la mitad {RP'} P=0
Ed,P07. B: No sobra ni un cacho de pizza. {CC-} P=1
Ed,P08. =: Supongamos que éste, estos B dos triángulos de pizza los pasáramos aquí (dos espacios grises de la parte superior de B), tendría la misma forma (señala ambas pizzas). {RP=} P=1
Ed,P09. =: Uniendo este pedazo de pizza (sector gris de abajo en A) aquí (sector gris de arriba en A), quedaría la misma figura. {RP'} P=0
Ed,P10. =: Juntando las pizzas que se han comido, queda este B espacio. {RP=} P=1
Ed,R01. =: A y B tienen los mismos triángulos y el mismo color. {CA=&CC=} P=1
Ed,R02. B: Son más triangulos azules que amarillos, y en la A hay más amarillos que azules. {RO+} P=1
Ed,R03. B: Son los mismos triangulos amarillos que azules, y en la A son más, amarillos que azules. {RO+} P=1
Ed,R04. =: Aunque en la B sean dos triángulos (amarillo de B) ocupan el mismo espacio que en la de la A (amarillo de A).Si juntamos el azul aquí B, sería el mismo espacio. {Mec. Aprox.} P=0
Ed,R05. =: Cada triangulo azul tiene su triangulo Amarillo. {RP=} P=1
Ed,R06-1. B: Son un poco más pequeños los triángulos amarillos. {CT+} P=0.5
Ed,R06-2. B: Es un triángulo más azul que amarillo. {RO+} P=1
Ed,R07. B: Todo es azul. {CC-} P=1
Ed,R08-1. =: El azul, tanto en la B como en la A ocupa la tercera parte del círculo. {RP=} P=1
Ed,R08-2. =: Hay más triángulos azules en el círculo que amarillos. {RO=} P=0
Ed,R09. A: Aquí A un triángulo azul son tres amarillos y aquí A un triangulo azul son dos amarillos. En la A son menos amarillos. {RP+} P=1
Ed,R10. =: Por cada triangulo azul son dos amarillos. {RP=} P=1
Ed,R11. =: Por cada amarillo son dos azules. {RP'} P=0

Ed,R12. B: Si a seis amarillos le restamos cuatro azules nos quedarían dos amarillos, si a dos azules le restamos, no, si a tres amarillos le restamos dos azules nos quedaría uno, entonces tendría más posibilidad en la B. {RS+} P=0
Ed,V01. =: Caminan las mismas cuadras y se tardan el mismo tiempo.. {CA=&CC=} P=1
Ed,V02. B: Es menos tiempo el que hace en recorrerlo … en recorrer las cuadras. {CC-} P=0.5
Ed,V03. B: A pesar de que son las mismas cuadras, la niña A se tarda un segundo más que la niña B. {CC-*CA=} P=1
Ed,V04. B: Porque e s capaz de recorrer una cuadra en un segundo {RP'} P=0
Ed,V05. =: Por cada cuadra un segundo {RP=} P=1
Ed,V06. B: En lo que la niña A recorre dos cuadras en dos segundos, la niña B recorre tres cuadras en dos segundos. {CA+*CC=} P=1
Ed,V08. =: Por cada dos cuadras en un segundo. {RP=} P=1
Ed,V09. A: Recorre cada cuadra … dos punto cinco, y la niña B la recorre, recorre una sola cuadra en tres segundos. {RP+} P=1
Ed,V10. =: En dos minutos cada cuadra. {RP=} P=1
Ed,V11. B: Recorre media cuadra más por un segundo. {RP'} P=0
Gu,B01. =: En las dos hay dos azules y tres amarillas. {CA=&CC=} P=1
Gu,B02. B: Hay más canicas azules que en la A. {CA+} P=0.5
Gu,B03. B: Hay la misma cantidad de azules que de amarillas. {RO+} P=1
Gu,B04-1. A: Solamente hay una canica amarilla. {CC-} P=0
Gu,B04-2. =: En las dos sobra una canica azul. {RS=} P=0
Gu,B05. =: Tanto en la A tanto en la B, hay la misma cantidad de canicas azules que amarillas. {RP=} P=1
Gu,B06. B: En la B hay más canicas azules que amarillas, y en la A hay la misma cantidad. {RO+} P=1
Gu,B07. B: Simplemente hay puras azules. {CC-} P=1
Gu,B08. =: En la B hay cuatro azules y dos amarillas, que serían lo doble de la A. {RP=} P=1
Gu,B09. =: No creo que caiga ninguna azul, porque hay amarillas más que azules. {RO=} P=0
Gu,B10. A: Obvio, en las dos hay más, pero creo que siendo tres canicas azules podría una de las agitadas caer la azul. {CA+ * RO=} P=0
Gu,B11. =: En las dos, tanto en la A o en la B, hay más canicas azules que amarillas. {RO=} P=0
Gu,B12. =: No creo, porque hay más canicas amarillas que azules, y una de ésas no creo que llegue a caer la azul. {RO=} P=0
Gu,C01. =: S.J. P=0.5
Gu,C02. B: Me están dando tres cuadernos en veinte pesos y un cuaderno en cuarenta pesos. Descr. P=0.5
Gu,C03. B: Me están dando dos cuadernos en veinte pesos, y en la A me están dando dos por treinta pesos. Descr. P=0.5
Gu,C04. A: En A si compro ocho cuadernos me saldrían en cuarenta pesos, y en B si compro seis cuadernos me saldrían en cuarenta pesos. {RP+} P=1
Gu,C05. =: En B me cuesta uno diez pesos, y en A tres treinta, me saldrían diez pesos cada uno. {RP=} P=1
Gu,C06. B: En la A me saldrían en diez pesos cada uno - (¿Y en la B, como en cuánto te saldrían?) - [calculadora: 20/3=] Saldrían como a seis pesos. {RP+} P=1
Gu,C07. B: Me están regalando los cuadernos. {CC-} P=1
Gu,C08. =: En las dos tiendas me están dando dos cuadernos por diez pesos. {RP=} P=1
Gu,C09. A: Por un peso me sale más barato, porque si compro dos cuadernos en la B me saldrían en seis pesos, y en la A me están dando dos cuadernos en cinco. {RP+} P=1
Gu,C10. =: Un cuaderno me sale en dos pesos en la B, y en A me sale igual a dos pesos. {RP=} P=1

Gu,C11. A: En B si compro otros siete cuadernos me saldrían catorce cuadernos en sesenta pesos. Y en A si compro quince cuadernos me saldrían en sesenta pesos. {RP+} P=1|

Gu,C12. =: De dos cuadernos son tres pesos y de cuatro son seis en la A. Descr. P=0

Gu,C13. B: Si en B compro diez cuadernos me salen en sesenta pesos, y si compro nueve en la A me salen en sesenta pesos igual. Por un cuaderno, pero me conviene más. {RP+} P=1

Gu,C14. B: Si compro seis cuadernos en la B serían cien pesos, y si compro seis cuadernos en la A serían ciento veinte pesos. {RP+} P=1

Gu,C15. =: De cuatro cuadernos en A serían veinte pesos. En B cuatro, veinte pesos. {RP=} P=1

Gu,D01. =: En cualquiera de los dos patios les dieron tres cuadros. {CC=} P=0.5

Gu,D02. B: En la B son tres niños y les dan dos cuadros, y en la A es un niño y le dan cuatro cuadros. Descr. P=0.5

Gu,D03. B: En B sería un cuadro para cada niño, y en A les sobra un cuadro. {RO+} P=1

Gu,D04. =: En A son dos niños compartiendo un espacio, les faltaría espacio, igual en el B porque son tres niños y les están dando dos cuadros. {RO=} P=0

Gu,D05. =: Sería un cuadro para cada niño en el A, y un cuadro para el solo niño que está en el B. {RP=} P=1

Gu,D06. B: En el B son dos cuadros para tres niños, y en el A es dos cuadros para dos niños, que les correspondería de a un cuadro para cada niño. {RO+} P=1

Gu,D08. =: En A están dando un cuadro para dos niños, y en B sería dos niños en cada cuadro. {RP=} P=1

Gu,D09-1. =: En ninguno de los dos, porque son cinco cuadros para dos niños en el A y tres cuadros para un niño en el B, quedarían casi igual. {RO=} P=0

Gu,D09-2. A: En A son cinco cuadros, se podrían dividir en dos cuadros y medio cada uno, y en el B son tres cuadros para un solo niño. {RP+} P=1

Gu,D10. =: En A les correspondería a dos cuadros a cada uno. Y en el B es un niño y dos cuadros, que saldría igual a dos cuadros que le correspondería a cada uno de los del A. {RP=} P=1

Gu,D11. =: En A saldrían dos niños en cada cuadro y el que sobra podría estar un rato en uno y un rato en el otro. En B serían igual, dos en cada cuadro y sobra uno. {RP'} P=0

Gu,D12. =: En A nada más están aumentando, les están duplicando en la A lo que en el B. {RP=} P=1

Gu,E01. =: S.J. P=0.5

Gu,E02. B: En las dos le hicieron cinco preguntas, en la A tuvo nada más una respuesta buena, en el B tuvo tres malas y dos buenas. {CA+ * CT=} P=1

Gu,E03. B: En el B le hicieron cuatro preguntas y tuvo dos buenas, en el A tuvo cinco preguntas y tuvo dos buenas y tres malas. Descr. P=0.5

Gu,E04. =: En la A superó la, tuvo más buenas que malas, igual en el B, tuvo más buenas que malas. {RO=} P=0

Gu,E05. =: En el A le hicieron seis preguntas y tuvo la mitad buenas y en el B igual le hicieron dos preguntas y tuvo una buena y una mala. {RP=} P=1

Gu,E06. B: En A tuvo la mitad contestadas y en el B tuvo más buenas que malas. {RO+} P=1

Gu,E07. B: Le hicieron dos preguntas y las dos preguntas las tuvo bien, y en el A le hicieron seis y tuvo cinco. {CC-} P=1

Gu,E08. =: En el A le hicieron tres preguntas y en el B le duplicaron a seis, e igual tuvo dos buenas en el A y cuatro buenas en el B. {RP=} P=1

Gu,E09. A: Más buenas en el A que en el B. {CA+} P=0

Gu,E10. A: Contestó más preguntas bien en la A que en la B - (¿No importa que también hayan sido más preguntas?) - Ajá, pero contestó más que en el B. {CA+} P=0
Gu,F02. B: [Calculadora] Voy a dividir uno entre cinco, va a salir a punto dos, ahora voy a dividir tres entre cinco y me va a salir punto seis. {RP+} P=1
Gu,F04. =: [Calculadora] Voy a dividir dos entre tres y me sale a punto seis, y tres entre cinco a punto seis. {RP'} P=0
Gu,F07. B: [Calculadora] Voy a dividir tres entre seis, va a salir a punto cinco. Dos entre dos a uno. {RP+} P=1
Gu,F11. =: [Calculadora] Voy a dividir cinco entre siete y va a salir a punto siete, y voy a dividir siete entre diez y me va a salir a punto siete. {RP'} P=0
Gu,J01. =: S.J. P=0.5
Gu,J02. B: Hay más concentrado de jamaica que agua normal, y en la A hay más agua normal que concentrado. {RO+} P=1
Gu,J03. B: Hay la misma cantidad de concentrado que de agua normal, y en la A hay más agua normal que concentrado. {RO+} P=1
Gu,J04. =: En los dos sobra un vaso de concentrado. {RS=} P=0
Gu,J05. =: Hay la misma cantidad de concentrado que de agua normal. {RP=} P=1
Gu,J06. B: Hay más concentrado que agua normal, y en la A hay la misma cantidad de concentrado que de agua normal. {RO+} P=1
Gu,J07. B: Nada más hay concentrado. {CC-} P=1
Gu,J08. =: En la A hay dos vasos de concentrado y un vaso de agua normal, y en la B simplemente nada más los duplican, por cuatro de concentrado y dos de agua normal. {RP=} P=1
Gu,J09. B: En las dos hay más agua que concentrado, pero hay más agua normal en la A que en la B. {CC- * RO=} P=0
Gu,J10. =: Lo que están haciendo en B es que el agua normal gana más por una. En la A se pasa por seis vasos como en la B se pasa por un vaso, entonces sabrían igual. {RP=} P=1
Gu,J11. =: En las dos hay más agua concentrada que agua normal. {RO=} P=0
Gu,L01. =: S.J. P=0.5
Gu,L02. B: Hay más limones que azúcar en la B, y en la A hay más azúcar que limones. {RO+} P=1
Gu,L03. B: En la B hay la misma cantidad de limones que azúcar, y en la A hay más azúcar que limones. {RO+} P=1
Gu,L04. =: En las dos hay más limones que azúcar. {RO=} P=0
Gu,L05. =: En las dos hay la misma cantidad de limones y de agua azucarada. {RP=} P=1
Gu,L06. B: En la B hay más limones que agua azucarada, y en la A hay la misma cantidad de agua azucarada y la misma cantidad de limones. {RO+} P=1
Gu,L07-1.B: Nada más hay limones. {CC-} P=1
Gu,L07-2 =: En la B hay solamente limones, y en la A hay limones y azúcar, entonces saldría igual. {CC- ⊥ ROe} P=0
Gu,L08. =: En la A hay dos limones y una taza de agua azucarada, y lo que están haciendo en la B es nada más duplicarlo. {RP=} P=1
Gu,L09. B: En las dos hay más tazas que limones, pero en la A hay más tazas que en la B. {CC- * RO=} P=0
Gu,P01. =: S.J. P=0.5
Gu,P02. B: Las pizzas están divididas en la misma cantidad, entonces B se comió tres pedazos y A se comió un pedazo. {CA+ * CT=} P=1
Gu,P03. B: Hay más parte gris que pizza [sic] en el A. {RO+} P=1
Gu,P04. =: Si unimos los dos pedazos de pizza de B sale una cantidad igual a la de A, entonces si unimos estos tres grises de B sale lo gris de A. MEC: aproximación. P=0

Gu,P05. =: B se comió exactamente la mitad, pero A se comió igual la mitad pero en diferentes partes, si unimos las tres partes grises se forma una como la de B. {RP=} P=1

Gu,P06. B: Si unimos en B las partes que no se comió, no nos da ni la mitad, y en A si las unimos nos da la mitad. {RO+} P=1

Gu,P07. B: Se acabó toda la pizza. {CC-} P=1

Gu,P08. =: Si a B le quitamos las líneas que atraviesan nos da una figura igual a A [además de quitar líneas desplaza las rebanadas para que quede B igual que A]. {RP=} P=1

Gu,P09. =: Si juntamos las pizzas de A sería toda la pizza de B, y los dos grises de A sería el gris de B. Mec: aproximación. P=0

Gu,R01. A: De un solo lado están los tres colores azules y del otro lado los tres amarillo, sin en cambio en la B están dispersos y es más de suerte en la B que en la A. Mec: tamaño. P=0

Gu,R02. B: Primera, porque en la B hay más cantidad de color azul que en la A. Y segunda, porque en la B están dos colores azules juntos y uno separado. CA+& Mec. Tamaño. P=0.5

Gu,R03. B: Hay la misma cantidad de azul y de amarillo, y en la A hay más amarillo que azul. {RO+} P=1

Gu,R04. =: En las dos hay más azul que amarillo. {RO=} P=0

Gu,R05. B: Las dos tienen la misma cantidad de azul que amarillo, pero en la B nada más tiene dos divisiones. MEC: tamaño * RP=.0

Gu,R06. B: Hay más azul que amarillo, y en la A hay la misma cantidad. {RO+} P=1

Gu,R07. B: Es totalmente azul. {CC-} P=1

Gu,R08. =: Tiene la misma cantidad de azul - (¿que qué?) - que el color amarillo en las dos. {RO=} P=0

Gu,V01. =: S.J. P=0.5

Gu,V02. B: B recorre tres cuadras en dos minutos, mas sin en cambio A recorre una en cuatro minutos. Descr. P=0

Gu,V03. B: B está recorriendo dos cuadras en dos minutos, que corresponde un minuto a cada cuadra, y A en tres minutos dos cuadras, correspondería a minuto y medio cada cuadra. {RP+} P=1

Gu,V04-1. B: Hay una cuadra más. {CA+} P=0

Gu,V04-2. A: A está recorriendo en medio minuto una cuadra. Si le aumentamos otra, recorriera esas tres cuadras en un minuto y medio. {RP+} P=1

Gu,V05. =: Las dos recorren cada cuadra en un minuto. {RP=} P=1

Gu,V06. B: B hace el mismo tiempo que A al recorrer sus cuadras pero ella está recorriendo tres. {CA+ * CC=} P=1

Gu,V08. =: Si a B le quitamos dos cuadras, saldrían en un minuto las dos cuadras. {RP=} P=1

Gu,V09. A: A está recorriendo cada cuadra en dos minutos y medio, B está recorriendo una cuadra en tres minutos. {RP+} P=1

Gu,V10. =: Ana está recorriendo tres cuadras en seis minutos, lo que sería dos minutos en cada cuadra, es lo que recorre B en una cuadra. {RP=} P=1

Gu,V11. =: [Calculadora: 3/7= y 2/5=] Caminarían punto cuatro segundos las dos en cada cuadra. {RP'} P=0

Gu,V12. =: A le están duplicando lo que tiene B. {RP=} P=1

Gu,V13. =: [Calculadora] Dividí dos entre tres, me salió a punto seis, ahora voy a dividir tres entre cinco. Igual, caminan igual. {RP'} P=0

He,B01. =: La A tiene tres canicas amarillas abajo y dos arriba, E: dos azules. Ajá, dos azules. Y aquí arriba tiene dos amarillas y una azul y dos, y dos este, dos canicas, una amarilla y una azul, pero como son cinco canicas en total, si la bot…, ahora sí, en cada botella, en cada botella hay dos canicas azules. {CA=&CC=} P=1

He,B02. B: Porque tiene tres canicas azules y dos canicas amarillas. Entonces tengo más posibilidades de sacar una azul que una amarilla, y en la A sería al revés o sea aquí igual son cinco canicas. {(CA+&CC-)*CT=} P=1

He,B03. B: Porque nada más tiene cuatro canicas, dos amarillas y dos azules, aunque puedo sacar una amarilla y una azul …. Pues son en número de canicas que amarillas y azules en la B. {RO+} P=1

He,B04. A: Aquí B tiene dos canicas amarillas, y puede caerme una amarilla, ero lo que tiene la A es que la a tiene dos azules y una amarilla, pero nada más tiene una, y prefiero yo ésta A porque tiene menos, lo que interesa es sacar la azul. {CC-} P=0

He,B05-1. B: Porque nada más es una y una porque, este, en la A son tres y tres. {CT-} P=0

He,B05-2. =: Aquí A tengo tres oportunidades … Y en la B nada más tengo una, pero las canicas amarillas de la A son tres y las canicas amarillas de la B son, ahora sí es una … yo escogería las dos porque pues de todas maneras podría tener las mismas posibilidades de ganar. {RP=} P=1

He,B06. B: Aquí B pues tiene cinco y aquí A tiene cuatro, pero esas cuatro son dos y dos en la A, entonces puedo igual sacar amarilla o azul, pero aquí B puedo sacar … tengo más canicas azules que más que, más canicas amarillas, o sea tengo más azules y tengo más posibilidades de ganar. {RO+} P=1

He,B07. B: Aquí nada más tengo dos canicas azules. {CC-} P=1

He,B08. B: En la B tiene dos amarillas y cuatro azules y yo este, las revuelvo y tengo más posibilidades de sacar mi premio, ahora sí de sacar la azul. {CA+} P=0

He,B09. A: Aunque hay más canicas amarillas en las dos, pero en la A tiene dos canicas azules … y en la B tienen una azul, entonces aunque no tengo muchas posibilidades, sé que tengo dos canicas azules y puede salir en la botella A. pero yo si tengo, si yo, si sale, este, si yo juego con la botella B que tiene cuatro canicas, tres azules, tres amarillas y una azul, este, ahora sí perdería porque tiene más amarilla que azul … En la A … porque aunque tengo pocas oportunidades, tiene más azules que la B. {CA+*RO=} P=0

He,B10. B: Nada más tiene dos amarillas y una azul … y en la A tiene seis amarillas y tres este, tres azules … tengo pocas posibilidades … porque son seis contra tres … aquí B son dos y una … yo quisiera tener menos amarillas para sacar la azul. {CC-*RO=} P=0

He,C01. =: Porque me están tanto el mismo precio. {RP=} P=1

He,C02. B: Porque me venden tres cuadernos por dos monedas y en la tienda A me dan, me compro un cuaderno y me cuesta cuatro monedas. Y es mejor comprar algo, comprar algo, comprar este, tres cuadernos por dos monedas y no que me quiten mi dinero en la tienda A. {Desc.} P=0.5

He,C03. B: Porque en la A me dan los mismos cuadernos pero me dan, me los vendan a tres monedas, y en la B me dan igual la misma cantidad de cuadernos, pero son dos monedas, entonces me conviene más ahí B, porque es más barato. {CC-*CA=} P=1

He,C04. B: En la A me dan un cuaderno, dos cuadernos por una moneda, pero en la B me dan tres cuadernos por dos monedas, porque pues aunque me dan en la A dos cuadernos por una moneda …. En la B me dan tres por dos … pero tengo tres cuadernos, y en la A nada más me dan dos por una moneda. {CA+¬CC-} P=0

He,C05. B: Incomprensión. P=0

He,C06. B: Porque pues ahí me dan tres cuadernos por dos monedas, y en la A me dan dos cuadernos por dos monedas. Pero en la B me dan más que en la A. {CA+} P=0.5

He,C07. B: Me las regalan. {CC-} P=1

He,C08. A: Porque pues….ahí tan siquiera ahora sí que me lo están vendiendo a una moneda, y ellos me lo están vendiendo a dos, aunque me da más cuadernos, pero pues yo creo que sería la A. {CC-¬CA+} P=0

He,C09. A: Porque me dan dos cuaderno… , y.,, me dan dos cuadernos, prefiero comprar dos cuadernos por cinco monedas, que comparar un cuaderno por tres monedas, porque me sale, aunque me gaste más monedas pero ya compro, ya compro más cuadernos. {CA+¬CC-} P=0

He,C10-1. A: S.J P=0.

He,C10-2. =: Aquí A cada uno vale dos monedas en este A paquete pero si la B, pues en la B si hubiera en la B pues yo escogería… pues yo creo que igual que aguí, igual que acá. {RP=} P=1

He,C12-1. A: Porque ahí me lo dan a seis monedas, ahora sí a seis monedas, y en la tienda B me lo están dando a… a tres, este moedas por … dos cuadernos. Porque aquí A son cuatro cuadernos. {CA+} P=0

He,C12-2. =: Porque ahora sí este…, si cada cuaderno, si un paquete cuesta tres monedas en la tienda B … si yo quiero comprar otro paquete en la tienda B y el paquete tiene dos, son igual tres monedas. {RP=} P=1

He,D01. =: S.J. P=0.5

He,D02. B Nada más tienen muy poco espacio en el patio. {CC-} P=0.5

He,D03. B: Porque es este, el lugar es más estrecho, y en el A está más amplio, o sea más… largo. {CC-} P=0

He,D04. A: Porque pues aquí nada más ponen un cuadrito de patio para jugar. {CC-} P=0

He,D05. B: Nada más tiene un cuadrito, cun cuadro un niño y aquí A pues tienen tres cuadritos, está más grande el patio A que el patio B. {CC-} P=0

He,D06. =: S.J. P=0

He,D08-1. A: Es poco espacio y en la B tiene un poco…, tiene un poco más que en la A. {CC-} P=0

He,D08-2. =: Porque si son cuatro niños, y hay un espacio tan aquí B que, aquí cuatro niño y aquí está el patio que no, creo que no puedan caber, que estuvieran tan apretados, y aquí si da igual, pero aquí lo único que cambia son los niños. {RO=} P=0

He,E02. B: Porque correctas tiene tres e incorrectas tiene dos, y en A nada más tiene una correcta y cuatro incorrectas. {Desc.} P=0.5

He,E03-1. B: Porque tiene … son cuatro preguntas en total. {CT-} P=0.5

He,E03-2. =: Porque correctas tiene dos, correctas tiene dos; incorrectas tiene tres, incorrectas tiene dos … porque de todas maneras saca, sería mala calificación. {CA=} P=0

He,E04-1. B: Porque tiene tres, incorrectas tiene dos. En el A nada más tuvo correctas, tuvo dos, incorrectas tuvo una. {CA+} P=0

He,E04-2. =: Porque de todas maneras sacó incorrectas. {RO=} P=0

He,E04-3. A: Aquí como son tres preguntas, supongo en total. {CT-} P=0

He,E05-1. =: Porque pues correctas tres incorrectas tres … En el B correctas una, incorrectas una. {Desc.} P=0.5

He,E05-2. A: Aquí A tan siquiera fueron seis preguntas en total, de perdida un seis un siete en la A. {CT+} P=0

He,E05-3. =: Sacó la mitad de seis y sacó la mitad de dos, una y una, tres y tres. Pues sería igual. {RP=} P=1

He,E06. B: Porque ahí tiene correctas tres, incorrectas dos; y en la A tiene correctas dos, incorrectas dos. Entonces el chiste es el que tenga más buenas, y más buenas tiene el examen B. {CA+} P=0.5

He,E07. B: Porque no tiene incorrectas ninguna. {CC-} P=1

He,E08. B: Porque pues tiene más correctas en el B que en el A. {CA+} P=0

He,E09. A: En las dos ahora si estuvo mal … debe de tener más buenas, y más buenas tuvo en el A. {CA+*RO=} P=0

He,F02. B: El numerador es el que vale, o sea el tres es el que puedo decir que cuenta, entonces el mayor es el B. {CA+} P=0.5

He,F03. A: Porque … el denominador, este, es más bajo que el.., el cuatro es más bajo que el cinco. {CT+} P=0

He,F04-1. B: El denominador es el más, es más grande… voy hacer una pequeña operación. (calculadora: teclea 5x3=)…Aquí B me salió quince (escribe), y aquí A me salió… seis (escribe) y la más grande, bueno , aquí la que salió más grande fue la B. {CT+} P=0

He,F04-2, B : Hice una multiplicación en B me salió 15 y en A me salió 6. {Mec. Error en Fracc.} P=0

He,F05-1. B: S.J. P=0

He,F05-2. A: Es más grande el denominador. {CT+} P=0

He,F05-3. A: A ver (dibuja un circulo, lo parte a la mitad, ilumina una mitad), un medio, esto podríamos decir, esto es un medio, esto que marcamos. … pero si yo quiero tres sextos, yo lo voy hacer así, no sé, puede ser de esta manera (dibuja arriba del anterior tres círculos y parte cada uno en tres, luego ilumina los tres tercios del primer círculo y los tres tercios del segundo). {Mec. Error en fracc.} P=0

He,F07. A: Mayor éste A, porque…, lo que hice fue sacar una multiplicación, aquí B son cuatro (escribe) y aquí a son dieciocho (escribe). Entonces la más grande será ésta A. {Mec. Error en fracción} P=0

He,J01. =: Tienen la misma cantidad de concentrado de jamaica en al A y en la B, igual la misma agua en la A y en la B. {CA=&CC=} P=1

He,J02. B: Desc. P=0.5

He,J03. B: Tiene menos agua… La A tiene tres vasos de agua y tiene dos concentrados de jamaica, y la B tiene dos concentrados de jamaica y tiene dos de agua, {CC-} P=0.5

He,J04. B: Tiene más cantidad de…, de jamaica. {CA+} P=0

He,J05. B: Porque tiene uno y uno, sabría más fuerte. {CT-} P=0

He,J06. A: Porque tiene, tiene la misma cantidad. {ROe} P=0

He,J07. B: S.J. P=0.5

He,J08. =: En la B me está representando lo doble que acá A ¿si? Porque aquí A son dos y aquí B son cuatro, dos de jamaicas y cuatro de jamaica y aquí una de agua y dos de agua. {RP=} P=1

He,J09. B: Porque aquí tiene tres vasos de agua y uno de jamaica … y en la A no … tiene cinco vasos de jamaica, jamaica perdón, de agua y dos de jamaica. {CC-} P=0

He,J10. B: Porque pues tiene menos agua que en la A. {CC-} P=0

He,L01. =: En la A y B tienen dos limones y tres con ag, tres tazas con agua azucarada, y en la otra tiene dos limones y tres tazas de agua azucarada. {CA=&CC=} P=1

He,L02. B: Porque pues aquí tiene más limón, y dos tazas de agua azucarada. {CA+&CC-} P=1

He,L03. B: Porque ahí tiene dos limones y dos tazas de agua azucarada, y en la A, y en la A no, porque tiene tres, tres tazas de agua azucarada y dos limones, y el chiste es que debe saber, debe de saber a limón. Desc.P=0.5

He,L04. A: Porque aquí A nada más tiene una taza de agua azucarada. {CC-} P=0

He,L05. B: Porque si yo quiero que esté más fuerte… debe de saber mucho a limón… pero aquí en la A tiene tres limones y tres tazas de agua azucarada. {CC-} P=0

He,L06. B: Porque aunque las dos tienen la misma cantidad de agua azucarada, la B tiene más limones que la A. {CA+*CC=} P=1

He,L07. B: No tiene ninguna, ninguna taza azucarada. {CC-} P=1

He,L08. B: Hay más limón que ésta A. {CA+} P=0

He,L09. B: Tiene un limón pero tiene, tiene tres tazas de agua azucarada, y en la A no porque tiene, cinco aguas de, cinco tazas de agua azucarada y dos limones. {CC-} P=0

He,L10. B: Ahí tiene dos tazas de agua azucarada y en la A no, porque nada m,tiene sies y tres limones … si porque en cada una de ellas hay más tazas de agua azucarada que limones. {CC-} P=0

He,E01. =: En el A, y en B igual. E incorrectas tres y en el B igual también tienen tres, entonces igual. {CA=&CC=} P=1

He,P01. =: S.J P=0.5

He,P02-1. A: S.J.P=0

He,P02-2. B: Beto comió más pizza porque él nada más dejó dos rebanadas, y este Alejandro dejó cuatro. {CC-} P=0,5

He,P03. =: Porque nada más los dos comieron dos rebanadas. {CA=} P=0

He,P04. B: Porque pues él se comió tres rebanadas, y este Alejandro nada más se comió dos. {CA+} P=0

He,P05. =: Los dos comieron la mitad de la pizza. {RP=} P=1

He,P06. B: Él se comió tres. Y Alejandro, su pizza de él está dividida a cuatro rebanadas, entonces este, él nada más se comió dos y Beto se comió tres rebanadas. {CA+} P=0.5

He,P07. B: S.J. P=0.5

He,P08. =: Lo que se comió Alejandro y Beto es lo mismo, pero lo único que … cambia es la forma de la pizza. {RP=} P=1

He,P09. =: Lo único que cambia es cómo partieron la pizza de Alejandro. {RP'} P=0

He,P10. =: La misma explicación que di en la tarjeta anterior …. Comieron la misma cantidad de pizza y .. sí, comieron igual, tres rebanadas nada más. {RP=} P=1

He,P11. A: S.J. P=0

He,P12. =: (cuenta sobre A y B y luego parte en dos cada sector de B, vuelve a contra), el mismo procedimiento que hice en las tarjetas anteriores. Igual, comieron la misma …, la misma pizza. {RP=} P=1

He,R01. B: Mec. Disp. P=0

He,R02. B: Tengo tres oportunidades, y en la A nada más tengo una oportunidad. {CA+} P=0.5

He,R03. B: Porque en la A tiene tres amarillos … Y en B tiene la misma cantidad, pero es poca cantidad de amarillos y azules…. No quiero que tenga muchos amarillos para sacar la… para sacar ahora sí el color azul. {CC-*CA=} P=1

He,R04. A: En las dos tiene más azules que amarillas … pero la A tiene … menos amarillo. {CC-*RO=} P=0

He,R05. B: Tan siquiera tiene, está dividido a la mitad … tiene … un azul y un Amarillo, y aquí A tres azules y tres amarillos. {CT-} P=0

He,R06. B: Tiene más azules y en la A no. B tiene más azul que amarillo. {RO+} P=1

He,R07. B: Tiene puro azul. {CC-} P=1

He,R08. B: La A tiene dos y un Amarillo, entonces pues como tiene más este, más azules la B, pues me voy, ahora sí yo escojo la B. {CA+} P=0

He,R09. A: La A tiene pocos azules, pero en la B tiene nada más una azul y tiene tres amarillos … en la A … tiene cinco amarillos y dos azules, pero tan siquiera ahí tengo dos, y en la B nada más tengo uno. {CA+*RO=} P=0

He,R10. A: Tiene más azules que la B. {CA+} P=0

He,V01. =: Recorren las mismas cuadras, aunque el reloj no esté en la misma posición. {CA=} P=0.5

He,V02. B: Porque .. pues está recorriendo menos ahora sí menos tiempo. {CC-} P=0.5

He,V03. B: Son las mismas cuadras … pero la niña B camina más rápido porque aquí el dos puede representar horas, minutos … cualquiera de esas dos. {CC-*CA=} P=1

He,V04. A: La niña A nada más hace dos cuadras. {CC-} P=0

He,V05. =:	Fueron las dos, lo único que hizo, lo que pasó con la A, fue de que ella caminó más, pero hizo las mismas, ahora sí caminó las mismas camino tres cuadras, pero hizo el mismo tiempo en cada cuadra. {RP=} P=1
He,V06. B:	Porque pongámoslo así, que la A se haya cansado, no sé, si hubiera sido la, la A hubiera tenido una cuadra más, pues ella A pudo llegar una hora más, no sé, tres horas, cuatro horas vamos a suponer, pero yo creo que la B. {RO+} P=1
He,V08-1. =:	La niña B caminó dos cuadras una hora… y entonces es igual. {RP=} P=1
He,V08-2.A:	En B representa dos, cuatro cuadras. {CA-*RP=} P=0
He,V09-1. A:	Recorrió … dos horas, con treinta .. minut, … una cuadra, y la otra cuadra la recorrió dos horas con treinta minutos. La B recorrió tres horas una cuadra, entonces la que caminó más aprisa creo que fue la A. {RP+} P=1
He,V09-2. B:	S.J. P=0
He, V09-3.A:	La niña A … hizo en una cuadra, hizo dos horas con treinta minutos, y la niña B hizo tres horas. La que caminó más aprisa fue la niña A. ¿por qué? Porque la niña A hizo dos horas con treinta y la niña B hizo tres horas exactas, ahora sí exactas. {RP+} P=1
He,V10. =:	Fue igual, porque la niña A recorre, recorrió tres cuadras, hizo seis horas en esas tres cuadras, pero cada cuadra, en cada cuadra hizo dos horas cada una, y esta B niña hace dos horas en una cuadra, entonces fue lo mismo. {RP=} P=1
We,B01. =:	Hay la misma cantidad de azules, canicas azules como amarillas. {CA=&CC=} P=1
We,B02. B:	Más canicas azules …. Que la otra. {CA+} P= 0.5
We,B03. B:	En ésta B sería igual la probabilidad de que saliera tanto como amarilla como azul, y en ésta A es menos probable que salga la azul, porque hay una de más amarilla. {RO+} P=1
We,B04-1. B:	Si elegimos la A hay una, una diferencia nada más, igual en la B, nada más hay una canica de más. {CA+} P=0
We,B04-2. =:	Nada más hay una diferencia de canicas. {RS=} P=0
We,B05. =:	En la A tenemos tres azules y tres amarilla, o sea que tanto pueden salir como azules como amarillas. Y en la B nada más hay una y una. {RP=} P=1
We,B06. B:	Tenemos una canica azul de más. {RO+} P=1
We,B07. B:	A fuerzas sale azul. {CC-} P=1
We,B08. B:	En ésta B tenemos dos amarillas y si serían dos amarillas, tapamos dos azules, entonces nada más quedan dos azules que pueden salir, de más probabilidad. Y en ésta si tapamos ésta (canica azul de A) nada más hay una probabilidad. {RS+} P=0
We,B09. B:	En ésta a tenemos tres amarillas y pues es más probable que salga una amarilla… en ésta B pues nada más tenemos dos amarillas de sobra. {RS+} P=0
We,B10. B:	También gana la amarilla, pero escogería la B, porque en ésta A hay más cantidad de, de ... canicas amarillas, y en ésta B nada más hay una. {RS+} P=0
We,C01. =:	Tres monedas por dos cuadernos, y acá B tres monedas por dos cuadernos. {CA+&CC=} P=1
We,C02. B:	Hubieras comprado, por cuatro monedas, seis cuadernos. {RP+} P=1
We,C03. B:	Hubieramos comprador tres cuadernos. {RP+} P=1
We,C04. A:	En ésta A cuesta cada cuaderno cero punto cinco, y en ésta B cero punto seis. {RP+} P=1
We,C05. =:	Una moneda por cada cuaderno. {RP=} P=1
We,C06. B:	En ésta B compramos un cuaderno de más por la misma cantidad. {CA+*CC=} P=1
We,C07. B:	No pagamos nada. {CC-} P=1
We,C08. =:	Dos por cada moneda. {RP=} P=1

We,C09. A: En ésta A porque en ésta pagamos solamente cinco monedas por dos cuadernos, y en ésta B hubiéramos pagado seis monedas por dos cuadernos. {RP+} P=1
We,C10 =: Cada cuaderno nos cuesta dos monedas. {RP=} P=1
We,C11. A: 2/5 (calculadora) cuatro centavos. Y es ésta B son dos, cuatro, seis, siete (calculadora: 3/7=). Sale prácticamente lo mismo, gastamos nada más dos décimas de centavo más. {RP+} P=1
We,C12. =: Si compramos B otros dos pagaríamos otras tres y saldrían a seis. {RP=} P=1
We,C13-1. B:Sólo por una moneda más, dos cuadernos más.{RS+} P=0.5
We,C13-2. =: 2/3 cuadernos (calculadora), sale cero punto seis, y en ésta B serían 3/5, cero punto seis. {RP'} P=0.5
We,C14. B: En esta B voy a dividir 5/3. Sale a uno punto seis…Y en ésta A salen, cuatro entre dos…en la B salen cuatro centavos menos que la A. {RP+} P=1
We,C15. =: Aquí la B nada más por dos monedas cuatro cuadernos, y si aquí A compramos por dos monedas, también compramos la mitad de los cuadernos, entonces si aquí A son ocho, serían cuatro. {RP=} P=1
We,D01. =: Nada más hay dos niños en las dos escuelas, y las mismas baldosas. {CA=&CC=} P=1
We,D02. B: En dos, B en dos de éstas (baldosas) caben tres niños, entonces, éste A que nada más es uno tiene sus cuatro cuadritos para jugar él solo. {CA+&CC-} P=1
We,D03. B: Tienen un cuadrito para cada quien, y en ésta A podría ser un cuadrito y medio para cada quien. {RP+} P=1
We,D04. A: En éste B cada niño tendría una tercera parte de dos enteros, y entonces los de acá a tendrían media parte de un entero. {RP+} P=1
We,D05. =: A cada uno tendría un cuadrito para cada uno, y en ésta B pues si, tiene su propio cuadrito. {RP=} P=1
We,D06. B: Compartirían la tercera parte y en éste A comparten un cuadrito por cada quien. {RP+} P=1
We,D08. =: Comparten dos, por decirlo, dos niños cada cuadro, y acá A igual dos niños por cuadro. {RP=} P=1
We,D09. A: (toma la calculadora) Voy a dividir los cinco cuadritos entre los dos niños, cada niño compartiría dos y medio cuadritos, y creo que B le conviene porque comparte tres cuadros para él solo. {RP+} P=1
We,D10. =: Cada niño le toca dos cuadros, igual acá B a un niño le tocan dos cuadros. {RP=} P=1
We,D11. A: Voy a dividir los dos cuadritos entre los cinco niños (calculadora) y ….. Y ahora voy a dividir los tres cuadritos entre los siete niños (calculadora), y sale en ésta B por dos mi, eh, centésimas de cuadrito, este, quedan más apretados B. {RP'} P=0.5
We,D12. =: Lo reparten B entre los dos niños, les toca de medio cuadro, y acá A cada dos niños se reparten medio cuadro, les toca a medio, igual a estos B dos les toca a medio. {RP=} P=1
We,E01. =: No le fue mejor porque tuvo más incorrectas que correctas. {RO=} P=0
We,E02. B: Son la misma cantidad de preguntas, pero acá A tuvo dos más incorrectas que en ésta. {CC-*CT=} P=1
We,E03. B: En ésta B tiene dos correctas, igual que en ésta A, pero ya saca más calificación en ésta B porque en ésta A tuvo una de más incorrecta que en ésta B. {CC-*CA=} P=1
We,E04. B: Si dividiéramos tres entre dos, tiene punto cinco de más en éste B … entonces en éste A tiene sólo la mitad. {RP'} P=0
We,E05. =: La misma cantidad de buenas que de malas. {RP=} P=1
We,E06. B: Tiene una correcta de más. {RO+} P=1
We,E07. B: No tuvo ninguna incorrecta. {CC-} P=1
We,E08. =: Tuvo la mitad de incorrectas que de las correctas. {RP=} P=1

We,E09. A: Divido 10 entre siete, y lo multiplico por la cantidad de correctas que tuvo (calculadora), y saca más calificación en ésta A porque saca dos punto ocho … y en ésta B dos punto cinco. {RP+} P=1

We,E10. =: Saca el doble de incorrectas que de correctas, igual acá A saca el doble que de aca. {RP=} P=1

We,F02. B: Porque hay tres …, tres quintos …. Y en ésta A sólo hay un quinto. {CA+} P=0.5

We,F03. B: Porque dos cuartos es la mitad del entero y dos quintos es como … un poquito menos de la mitad. {RO+} P=1

We,F04. =: (calculadora) Voy a dividir un entero, que sería uno, entre las partes que son, sería el número de abajo, cinco, uno entre cinco, y luego lo voy a multiplicar por el número de arriba, en ésta B sale cero punto seis (escribe). Y uno entre tres, por dos (calculadora), cero punto seis. {RP'} P=0

We,F05. =: Porque si dividimos mmh un circulito en seis partes, tres representa la mitad (dibuja debajo de A un círculo, lo divide en seis, ilumina tres), y si dividimos un circulito en dos partes representa la mitad (dibuja debajo de B un círculo, lo divide en dos, ilumina uno). {RP=} P=1

We,F06. B: (dibuja un circulo junto a A, lo parte en cuatro, ilumina dos) ésta la dividimos en cuatro partes, representan lo que son dos … si ésta B la dividimos en cinco partes, mmh ¿cuántos? Tres: uno, dos, tres (dibuja un círculo en B, lo divide en cinco, ilumina tres). Es un poquito pasadita de la mitad. {RO+} P=1

We,F07. B: Porque dos medios son un entero, y en ésta A tres medios (sic) es un medio. {RP+} P=1

We,F08. =: Si multiplicamos éste A por dos (escribe) salen cuatro, y éste por dos (escribe), salen seis. {RP=} P=1

We,F09. A: Porque en éste B sale cero punto veinticinco (escribe 0.25) y en éste A ceo punto veintiocho. {RP+} P=1

We,F10. =: Dividimos éste A entre tres (escribe) toca a uno, dividimos éste entre tres (escribe) y toca a tres. {RP=} P=1

We,J01. =: Tenemos A,B dos vasos de jamaica y tres de agua. {CA=&CC=} P=1

We.J02. B: Un vaso de jamaica de más y en ésta A tenemos, este, más cantidad de agua y menos cantidad de jamaica. {RO+} P=1

We,J03. B: Igual cantidad de agua como de jamaica. {RO+} P=1

We,J04. =: Tenemos un vaso de jamaica de diferencia nada más. {RS=} P=0

We,J05. =: Misma cantidad de jamaica que de.agua. {RP=} P=1

We,J06. B: Hay un vaso de más (vaso de jamaica) {RO+} P=1

We,J07. B: Sólo le pondríamos jamaica. {CC-} P=1

We,J08. B: Tendríamos DOS Vasos de más de jamaica, y en ésta a sólo uno. {RS+} P=0

We,J09. B: Hay solo … en Este A sale menos concentrado, porque hay un vaso de más para que salga igual que éste B. {RS+} P=0

We,J10. =: Si las jarras se supone que son iguales, este, saldría lógicamente menos agua en ésta B pero saldría más concent… saldrían, más concentradas las dos porque sobra la mitad de cada grupo de agua y de jamaica. {RP=} P=1

We,J11. B: Tenemos, mmh, siete vasos de jamaica y sólo tres de agua, y en ésta A tenemos, eh, cinco de jamaica y dos de agua. Entonces nada más taparía estos dos (tapa con los dedos dos vasos de jamaica de A) y quedarían tres, quedarían tres vasos de jamaica. Entonces en éste B quedarían, taparía éstos tres (tapa tres vasos de jamaica de B) y quedarían estos cuadro de jamaica. {RS+} P=0

We,J12. B: Tenemos dos, dos vasos de más (agua de de A), y en ésta B sólo tendríamos una vaso de más (agua de B) {RS+} P=0

We,L01. =: Hay tanto las mismas cantidad de ….. agua azucarada como de limones. {CA=&CC=} P=1

We,L02. B: Aquí B sobra un limón, y aquí A pues no, prácticamente tenemos más agua que limón, entonces acá B como sobra uno va a saber más a limón. {RO+} P=1

We,L03. B: Es la misma cantidad de agua que de limón, y en ésta A hay una taza de agua de más. {RO+} P=1

We,L04. A: Ésta B … estos dos limones irían con esta taza, entonces acá (tercer limón de B) nada más iría un limón por taza. Si aquí a tuviéramos otra taza y otros dos limones saldría, saldría, lo mismo de sabor. {RP+} P=1
We,L05. =: Estamos ocupando limón por taza. {RP=} P=1
We,L06. B: Estamos ocupando la misma cantidad de agua A,B; pero en ésta B estamos ocupando más cantidad de limón que en ésta A. {CA+*CC=} P=1
We,L07. B: Tengo solo limón. {CC-} P=1
We,L08. =: Estamos ocupando dos limones por taza. {RP=} P=1
We,L09. A: En ésta B estamos ocupando tres tazas por un limón ….. faltaría una taza para que saliera lo mismo. {RP+} P=1
We,L10. =: Acá B estamos ocupando dos tazas por cada limón, y acá A ocupamos dos tazas por este limón, dos tazas por este limón, y dos tazas por este limón. {RP=} P=1
We,L11. A: En ésta A se estarían ocupando dos limones y medio (escribe 2 ½ sobre los limones de A) por tazas …. Aquí B están ocupando dos limones y un tercio por taza. {RP+} P=1
We,L12. =: Aquí A eh, cuatro limones, que es el doble de éste B por seis tazas, que es el doble también. {RP=} P=1
We,L13. B: Acá A dividiría tres entre dos (calculadora), sale a punto cinco (escribe9. Entonces saldría más concentrada ésta B porque tenemos una décima mayor de limón que en ésta A. {RP+} P=1
We,L14. B: Sobra un limón y una taza, eh, esta B va a tener sólo uno de más que en ésta A. {RP+} P=1
We,L15. =: Ocupamos el doble de limones por, por la cantidad de tazas, entonces acá A hay ocho, ocho limones, cuatro tazas; B cuatro limones, dos tazas. {RP=} P=1
We,P01. =: Se comieron tres pedazos por cada uno y sobran tres pedazos. {CA=&CC=} P=1
We,P02. B: Porque al A todavía le sobran cuatro pedazos. {CC-} P=0.5
We,P03. =: Nada más que ésta A todavía le sobran tres, y a ésta B nada más le sobran dos. {CA=¬CC-} P=0
We,P04. A: (divide en dos los grises de A), partimos estos dos, se comió cuatro rebanadas y ésta B nada más se comió tres. {RP'} P=0
We,P05. =: (divide en tres cada uno de los sectores de B) … me sobran … B se comió tres rebanadas y éste A también. {RP=} P=1
We,P06. B: Se comió una rebanada más que éste A. {CA+} P=0.5
We,P07. B: Se comió toda. {CC-} P=1

We,P08. =: Porque se comieron cuatro pizzas cada uno {RP'} P=0
We,P09. =: (divide en dos el sector gris de B) dos. {RP'} P=0
We,P10. B: (divide en dos el sector gris de B). Se comió una rebanada más que el A. {RP'} P=0
We,R01. =: Hay B tres amarillos y A tres amarillos, y B tres azules y A tres azules. {CA=&CC=} P=1
We,R02. B: Tenemos dos, dos, este … dos tre, ¿triángulos?, eh, más de, más azul …. Que en éste A, que hay más amarillo y es más probable que salga el amarillo. {CA+&CC-} P=1
We,R03. B. En ésta B tendríamos la misma probabilidad de sacar azul como amarilla, y en ésta A tendríamos menos probabilidad, porque hay un triángulo de más amarillo. {RO+} P=1
We,R04. A: En ésta A porque tendríamos cuatro, este, azules y sólo dos amarillos, y en ésta B solo tendríamos tres azules y dos amarillos. {RP'} P=0
We,R05. =: En ésta B tenemos la mitad amarillos y la mitad azules, y en ésta A igual, mitad amarillos, mitad azules. {RP=} P=1
We,R06. B: Tenemos un tiangulito de más azul. {RO+} P=1

We,R07. B: Porque es todo azul. {CC-} P=1
We,R08. =: Tenemos dos amarillos, dos amarillos y cuatro azules A y cuatro azules B. {RP=} P=1
We,R09. A: Tenemos dos azules A y B. Dos azules A y dos azules B …. Hay A un amarillo de menos, y acá B un amarillo de más. {RP+} P=
We,R10. B: En ésta A tenemos el doble de amarillos que de azules, y en ésta B tenemos sólo dos de más amarillos que azules. {RP'} P=0
We,V01. =: Las dos niñas caminaron dos cuadras en tres minutos. {CA=&CC=} P=1
We,V02. B: Hubiera, en cuatro minutos hubiera caminado seis cuadras. {RP+} P=1
We,V03. B: Hubiera caminado en tres minutos tres cuadras. {RP+} P=1
We,V04. A: Hubiera caminado cuatro cuadras en dos minutos. {RP+} P=1
We,V05. =: Caminaron una cuadra por minuto. {RP=} P=1
We,V06. B: A ésta A le falta una cuadra para que sea lo mismo que ésta B. {CA+*CC=} P=1
We,V08. =: Caminan dos cuadras por minuto, ésta B ya caminó, sí, dos cuadras por dos minutos, entonces ya son dos minutos por cuatro cuadras. {RP=} P=1
We,V09. A: Ha caminado dos cuadras en cinco minutos, este …, cada cuadra en dos y medio minutos y la B, este …, por cuadra se lleva tres minutos. {RP+} P=1
We,V10. =: Cada una camina media cuadra por dos minutos. {RP=} P=1
We,V11. A: La A camina, este, dos cuadras y media por cada minuto, y la B camina (hace marcas en B a mitad de la tercera cuadra y al final de la quinta) eh… si, voy a usar la calculadora. Voy a dividir el número de cuadras entre los minutos, entonces serían siete cuadras entre tres minutos (calculadora), dos cuadras punto tres. Pues camina un poquito más la B porque camina … No, camina más la A un poquito, dos décimas de cuadra por minuto. {RP+} P=1
We,V12. =: Cada una camina dos cuadras por tres minutos. {RP=} P=1
We,V13. B: Camina mmh .. mmh … cinco, este, voy a usar la calculadora, voy a dividir el número de cuadras que son cinco entre el tiempo que se está llevando (calculadora) uno punto seis. Camina una décima más la B que camina uno punto seis de cuadra, mientras ésta A camina uno punto cinco. {RP+} P=1
We,V14. B: Porque la de arriba A se hubiera llevado seis minutos por cada cuadra. {RP+} P=1

Ch,B01. =: Es lo mismo, porque hay tres, tres amarillas aquí B y tres amarillas aquí (A) y dos azules y dos azules. {CA=&CC=} P=1
Ch,B02. B: Hay más azules que amarillas. {RO+} P=1
Ch,B03. B: Hay las mismas canicas azules que amarillas. {RO+} P=1
Ch,B04. A: Hay menos amarillas. Aunque son menos canicas, pero hay una sola amarilla. {CC-¬CT+} P=0
Ch,B05. =: Son la misma cantidad del mismo color. {RP=} P=1
Ch,B06. B; Hay menos amarillas: hay dos amarillas y tres azules. {RO+} P=1
Ch,B07. B: No hay amarillas. {CC-} P=1
Ch,B08. A: Nada más hay una sola amarilla. {CC-¬CA+} P=0
Ch,B09. B: Hay menos, hay una sola azul pero la probabilidad sería prácticamente igual. {CC-*RO=} P=0
Ch,B10. B: Hay menos amarillas. Aunque nada más hay una, una sola azul. {CC-*CA+} P=0
Ch,C01. =: S/J.0.5
Ch,C02. B: Son más cantidades de libros por menos cantidad de monedas. {CA+&CC-} P=1
Ch,C03. B: Costaría a diez pesos y éste A costaría quince. {RP+} P=1

Ch,C04. A: Cada libro cuesta cinco pesos. {RP+} P=1
Ch,C05. =: Lo mismo, A hay tres monedas de diez por cada libro y aquí B cuesta diez pesos un libro. {RP=} P=1
Ch,C06. B: Serían veinte pesos entre tres, si, serían a seis sesenta y seis cada libro. Aquí A me estarían costando a diez pesos. {RP+} P=1
Ch,C07. B: Son regaladas. {CC-} P=1
Ch,C08. =: Lo mismo, veinte pesos por cuatro, salió a cinco pesos cada libro y aquí A cuestan cinco pesos cada libro. {RP=} P=1
Ch,C09. A: Cuesta veinticinco pesos cada libro, {RP+} P=1
Ch,C10. =: Aquí A cuesta veinte pesos cada libro, y aquí B en ésta pues un libro cuesta veinte pesos. {RP=} P=1
Ch,C11. A: Treinta entre siete [calculadora] nos da un total de cuatro veintiocho. Y aquí A nos sale a cuatro. {RP+} P=1
Ch,C12. =: Son sesenta entre cuatro, son a quince pesos por cada uno y aquí B son treinta entre dos, pues es a quince pesos. {RP=} P=1
Ch,C13. B: Aquí B estamos hablando de treinta pesos entre los cinco libros [calculadora] y cuestan seis pesos cada uno y aquí A estamos hablando de veinte entre tres [calculadora] estamos hablando a seis sesenta y seis. {RP+} P=1
Ch,C14. B: Serían 50/3 [calculadora] nos da a dieciséis punto seis y aquí B serían 40/2 [calculadora] a veinte, es más barato en la B. {RP+} P=1
Ch,D01. =: Son la misma cantidad de niños por la misma cantidad de recuadros que tienen para jugar. {CA=&CC=} P=1
Ch,D02. B: Nada más hay dos recuadros y son tres niños, y aquí A nada más es uno por cuatro recuadros que tiene. {CA+&CC-} P=1
Ch,D03. B: Son la misma cantidad de niños, y aquí B nada más hay dos recuadros y aquí A tres, {CC-*CA=} P=1
Ch,D04. A: En el B hay un poquito más de espacio para los tres niños. {RP+} P=1
Ch,D05. =: Un niño para un recuadro. {RP=} P=1
Ch,D06. B: Aquí A nada más tenemos dos niños y tienen dos recuadros para dos nada más, y acá B tenemos dos recuadros para tres. {CA+*CC=} P=1
Ch,D08. =: Hay dos niños para cada uno de los espacios. {RP=} P=1
Ch,D09. A: Aquí A si tuviéramos otro recuadro para estos dos niños, sería igual, porque serían tres recuadros para cada niño, y como no lo tenemos nos hace falta aquí A, tenemos aquí más espacio para este B solo niño y menos espacio para éstos A dos niños. {RP+} P=1
Ch,D10. =: Aquí ahora si ya tenemos tres, tres, dos espacios para los tres niños, y dos espacios para el niño solo, tanto del A como del B. {RP=} P=1
Ch,D11. A: Aquí B nos cabe niño y medio, dos niños y medio …. Y en éste (cuadro sobrante del lado B) nos caben dos niños nos queda medio vacío, o sea aquí B tiene más espacio que aquí A. {RP+} P=1
Ch,D12. =: Aquí A son cuatro niños, aquí B dos, aquí A son seis espacios, aquí B tres. {RP=} P=1
Ch,D13. B: Nos sobran dos niños deatiro, entonces niño y medio y niño y medio son tres (dos primeros cuadros de B) así, y aquí (tercer cuadro de B) nos cabrían dos niños. {RP+} P=1
Ch,E01. =: Correctas en este A examen tuvo dos y en esta B tuvo dos, aquí A incorrectas tuvo tres, y en esta B tuvo tres. {(CA=&CC=)&RP=} P=1
Ch,E02. B: Estamos hablando de tres, y son cinco igual estamos hablando calificación de diez, de cinco preguntas que valen dos puntos para sacar diez, pues aquí A nomás sacó dos, aquí B sacó seis siquiera. {RP+} P=1
Ch,E03. B: Aquí B pues sacó ¡cinco! Porque la mitad tuvo mal y la mitad tuvo bien. {RO+} P=1
Ch,E04. A: Aquí B le pondría, si son cinco valen dos puntos cada una, le podría seis (escribe). Y aquí A si son tres preguntas serían tres, seis, nueve, no alcanzaría para el diez, para calificar de diez, no alcanzaría porque serían dos, tres, si valieran tres puntos cada

pregunta, sacar, saldría nada más nueve, entonces tendría que dividir, por ejemplo entre diez, serían 10/3 (calculadora), y cada pregunta valdría tres punto treinta y tres. Entonces tres punto tres por dos (calculadora), le tocaría a seis punto seis, (escribe) ¡entonces le fue mejor en éste A. {RP+} P=1

Ch,E05. =: Aquí B cada pregunta valía cinco puntos, entonces tuvo una Buena y una mala, pues sacó cinco y aquí A cada pregunta valía .. A ver son seis, a ver serían diez entre seis (calculadora) a uno punto seis cada pregunta, entonces ese por tres (calculadora), le toca a cinco. {RP=} P=1

Ch,E06. B: Aquí B de cinco, aquí vale dos puntos cada pregunta, y aquí A serían diez entre cuatro (calculadora), tocaría a dos punto cinco cada pregunta, por dos (calculadora, aquí A le toca a cinco, su calificación es de cinco (escribe, y aquí B es de a siete. {RP+} P=1

Ch,E07. B: Tenemos todas buenas sacó diez. {RP+} P=1

Ch,F02. B: El de arriba es más grande. {CA+} P=0.5

Ch,F03. B: Esta dividido en menos cantidad …. Menos espacios …. 2/4 es mayor que 2/5. {CT-} P=0.5

Ch,F04. A: Los espacios son más grandes. {CT-} P=0

Ch,F08. =: Dos cabe dos veces en el cuatro, y el tres cabe dos veces en el seis. {RP=} P=1

Ch,F10. A: Estamos hablando aquí A de tres , tres pasteles (dibuja tres círculos), de nueve, tres pasteles de nueve espacios por así decirlo (dibuja particiones en el primer círculo). Y aquí de un pastel a tres espacios (repite el dibujo que hizo sobre B, ahora de menor tamaño), quiero creer que así es, bueno yo me entiendo, yo ya me entendí. {Mec. Error en fracción} P=0

Ch,J01. =: Tenemos uno, dos tres vasos de agua B por tres vasos de agua A y uno, dos de jamaica B por de jamaica A. {CA=&CC=} P=1

Ch,J02. B: Sólo tenemos dos vasos de agua. {CC-} P=0.5

Ch,J03. B: Aquí B tenemos menos agua natural que aquí A. {CC-} P=0.5

Ch,J04. =: Aquí B tenemos un vaso más de agua que aquí A pero tenemos uno más de jamaica. {RS=} P=0

Ch,J05. =: S/J. P=0

Ch,J06. B: Tenemos un vaso de más de jamaica. {CA+} P=0.5

Ch,J07. B: Pura jamaica. {CC-} P=1

Ch,J08-1. B: Tiene dos vasos más de jamaica. {CA+} P=0

Ch,J08-2. =: Nada más aumenta el líquido aquí B y aquí a es menos cantidad pero es la misma. {RP=} P=1

Ch,J09. A: Tendría que haber otro vaso de agua aquí A para que fuera exactamente igual de concentrado, pero como no tenemos otro vaso de agua pero tenemos otro vaso de jamaica, está más concentrado de este lado A que este B. {RP+} P=1

Ch,J10. =: Aquí B son tres son dos vasos de agua natural por un vaso de agua de jamaica y aquí tenemos dos vasos por cada agua de jamaica, entonces está igual de cargada. {RP=} P=1

Ch,J11. =: Nos sobra uno de jamaica de cada lado. {RP'} P=0

Ch,J12. B: Me sobra un vaso de agua y aquí A me sobran dos de agua. {RS+} P=0

Ch,L01. =: Tenemos B tres tazas de agua azucarada por dos limones y aquí A tenemos tres tazas por dos limones. { CA=&CC=} P=1

Ch,L02. B: Son más limones que tazas de agua. {RO+} P=1

Ch,L03. B: Por una taza más de agua está menos cargada ésta A que ésta B. {CC-*CA=} P=1

Ch,L04. A: Aquí B nos faltaría un limón para que estuviera nivelado, entonces queda más cargado en éste A, en menos cantidad pero más cargado. {RP+} P=1

Ch,L05. =: B es un limón por cada taza azucarada y aquí A tenemos tres limones por tres tazas de agua. {RP=} P=1

Ch,L06. B:	En la B estaría más cargada porque le está sobrando un limón … sí tiene más limón, tiene un limón más por el agua que tiene la otra jarra. {CA+*CC=} P=1
Ch,L07. B:	Están los puros limones. {CC-} P=1
Ch,L08. =:	Aquí en B tenemos una taza por cada dos limones, y aquí A tenemos dos limones por una taza de agua. {RP=} P=1
Ch,L09. A:	Aquí A nos faltaría una taza para que estuviera igual de cargada el agua. {RP+} P=1
Ch,L10. =:	Tenemos B dos tazas por un limón y aquí A tenemos dos tazas por cada limón. {RP=} P=1
Ch,L11. B:	Sería más limón que la A. {RS+} P=0
Ch,L12. =:	Aquí B tenemos dos limones por tres tazas de agua, y aquí A tenemos, es lo mismo, dos limones por seis tazas de agua. {RP=} P=1
Ch,L13. B:	correspondería a limón y medio a cada taza y aquí B tenemos dos limones para una sola taza, entonces quedaría más cargado la B porque son dos limones y una sola taza de agua. {RP+} P=1
Ch,L14. B:	Les toca de a medio limón por taza y aquí B tenemos un limón completo para una taza de agua. {RP+} P=1
Ch,L15. =:	Aquí A tenemos ocho limones y cuatro tazas, quiere decir que le vamos a poner una taza por cada dos limones … y aquí B son dos tazas por los dos limones. {RP=} P=1
Ch,P01. =:	Aquí B son seis y se comieron estos A tres de aquí A pero éste B se comió un pedazo de acá, un pedazo de acá y un pedazo de acá, pero la misma cantidad. {CA=&CT=} P=1
Ch,P02. B:	Aqu´B solamente quedaron de pizza dos pedazos y aquí A quedaron cuadro …. Son las mimas, son, están divididos en quintos y aquí B se comieron 3/5 y aquí A solamente uno. {CA+*CT=} P=1
Ch,P03. B:	Es menos cantidad de pizza. {RO+} P=1
Ch,P04. B:	Aquí B se comieron 2/5 … porque está dividido en más … más cantidad de pizza. {RP'} P=0
Ch,P09. A:	Porque son más espacios. {CT+} P=0
Ch,P10. B:	Aquí A los pedazos eran más pequeñas …… y solamente comieron tres de los nueve. Y aquí B los pedazos son más grandes, aunque nada más comió uno. {CT-} P=0
Ch,R01-1. A:	Aquí B están divididos uno en medio del otro, están separados los tonos y aquí A están juntos. {Mec. Tamaño} P=0
Ch, R01-2. =:	S.J. P=0
Ch,R02. B:	Aquí B tres azules y aquí A nada más hay uno. {CA+} P=0.5
Ch,R03. B:	Serían más probabilidades de tomar un azul en el B porque hay igual de color Amarillo y azul, y aquí A predomina el amarillo que el azul. {RO+} P=1
Ch,R04. =:	Aquí tenemos 3/5 de azul y solamente dos de Amarillo, y aquí A tenemos igual 3/5 de azul y dos de amarillo y al girar no podríamos, tendríamos las mismas posibilidades de tomar un amarillo que un azul. {RP'} P=0
Ch,R05. =:	Aquí A 3/6 están en azul y 3/6 están en amarillo …. Aquí B el sexto se convierte en un entero, por ejemplo, y aquí la mitad está de azul y la mitad está de amarillo. Nada más como si los juntáramos. {RP=} P=1
Ch,R06. B:	En la B de los cinco hay tres de azul ... aquí A la probabilidad sería igual, porque la misma cantidad son dos cuartos están pintados de amarillo y dos cuartos de azul y aquí B tenemos 3/5 de azul y 2/5 de amarillo. {RO+} P=1
Ch,R07. B:	Es un puro tono azul. {CC-} P=1
Ch,R08. =:	Aquí B tenemos uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, y aquí A tenemos uno, dos tres, a la mitad éste A así y éste es así (divide en dos los sectores azules de A). y entonces es uno, dos tres, cuatro cinco, seis, y B uno, dos tres, cuatro, cinco, seis, nada más que están en distintas, si éste (amarillo de A) lo pasamos para acá (en medio de los azules son las mismas. {RP=} P=1

Ch,R09. B: Aquí B saldrían más espacios que aquí A, aquí A tan sólo son siete y aquí B saldrían ocho, si los dividiéramos a la mitad, por ejemplo saldrían ocho entonces los espacios son más grandes y la probabilidad sería mayor de tomar una azul. {RP'} P=0

Ch,R10. A: Son mayores los espacios de azul, aquí B hay más amarillo …. Aquí A hay un amarillo entre los azules, entonces habría más probabilidad de tomar un azul, que en éste B, porque si éste se pasa, pues ya se me va a esperar hasta que de la otra vuelta. {Mec. distrib} P=0

Ch,V01. =: Llegaron al mismo tiempo. Las mismas cantidades de cuadras las caminaron en el mismo tiempo. {CA=&CC=} P=1

Ch,V02. B: Menos de un minuto entre cada cuadra y ella A hizo cuatro minutos en una sola cuadra. {RP+} P=1

Ch,V03. B: A hizo un minuto más que ella B en caminar las mismas cuadras juntas. { CC-*CA=} P=1

Ch,V04. A: A avanzó, en un poquito más de la mitad de tiempo que lo que hizo ella B. {RP+} P=1

Ch,V05. =: Recorrieron en el mismo tiempo las cuadras. {RP=} P=1

Ch,V06. B: Hicieron el mismo tiempo pero ella, la B recorrió tres cuadras y la a solamente dos. {CA+*CC=} P=1

Ch,V08. =: Esta B caminó el doble de tiempo pero el doble de cuadras que ésta A. {RP=} P=1

Ch,V09. A: Ella A ocupó cinco entre dos, caminó a dos y medio …. Y Ella B caminó en tres minutos, entonces ella A en dos y medio recorrió dos cuadras. {RP+} P=1

Ch,V10. =: Hicieron el mismo tiempo la A que la B en recorrer cada cuadra. {RP=} P=1

Ch,V11. B: Ella B caminó en dos punto tres minutos cada cuadra, y ella A lo caminó en dos punto cinco. {RP'} P=0

Fl,B01. =: En B son tres amarillas y en A son tres amarillas, y en B son dos azules y en A son dos azules. {CA= & CC=} P=1

Fl,B02. B: Tiene más azules - (¿que qué?) - Más azules que amarillas. {RO+} P=1

Fl,B03. B: Hay menos amarillas. {CC-} P=0.5

Fl,B04. A: En A habría un error de que me saliera la amarilla y en B habría dos. {CC-} P=0

Fl,B05. =: S.J. 0

Fl,B06. B: Hay más azules - (¿que qué?) - que amarillas. {RO+} P=1

Fl,B07. B: Tiene dos azules y tengo que ganar a fuerzas. {CC-} P=1

Fl,B08-1. A: En A hay nada más una opción de que me salga una amarilla, y en B serían dos. {CC-} P=0

Fl,B08-2. =: En B son dos azules una amarilla, dos azules una amarilla. {RP=} P=1

Fl,B08-3. A: En B son dos azules una amarilla, dos azules una amarilla, pero yo digo que la A [porque nada más tiene una opción de que salga una amarilla]. {CC- * RP=} P=0

Fl,B09. B: En A me saldrían más amarillas. En B son tres amarillas por una azul, en A son tres amarillas por una azul y dos amarillas por una azul, pero me arriesgo más por la B. {CC- ¬ RP+} P=0

Fl,B10-1. =: En sí, son lo mismo: en B tengo dos amarillas con una azul, en A dos amarillas con una azul, dos amarillas con una azul. {RP=} P=

Fl,B10-2. A: En sí, son lo mismo: en B tengo dos amarillas con una azul, en A dos amarillas con una azul, dos amarillas con una azul. Pero igual y me arriesgo, y como hay tres azules también, igual y me puede caer más fácil una azul. {CA+ * RP=} P=0

Fl,C01. =: S.J. P=0

Fl,C02. B: En B son dos monedas y me están dando tres libros o tres cuadernos, y en A son cuatro monedas por un cuaderno. Descr. P=0

Fl,C03. B: Me está saliendo a una moneda cada cuaderno. Descr. P=0

Fl,C04. A: En A son dos libros por una moneda, en B me deberían de dar cuatro por dos monedas, y no me los dan. {RP+} P=1

Fl,C05. =: Están al mismo precio. {RP=} P=1

Fl,C06. B: Me sale a menos de una moneda, y en A me sale en una moneda cada libro. {RO+} P=1

Fl,C07. B: ¿Y aquí no me sale a nada, me los regalan? {CC-} P=1

Fl,C08. =: En B son dos por una moneda, dos por una moneda, y en A dos por una moneda. {RP=} P=1

Fl,C09. A: En B tres monedas por un libro, en A me cobran un libro tres monedas y el otro me lo dejan con dos monedas. {RP+} P=1

Fl,C10. =: En B son dos monedas por un libro, y en A dos monedas por un libro, dos monedas por un libro y dos monedas por un libro. {RP=} P=1

Fl,C11. A: En A me están dando cinco libros por dos monedas, y en B los cinco libros que me están dando en A por dos pesos, por dos cuadernos nada más me están dando una moneda más. {RP+} P=1

Fl,C12. =: En B tenemos dos libros y cuestan tres monedas, en A tenemos dos libros que me cuestan tres monedas y otros dos libros que me cuestan otras tres monedas. {RP=} P=1

Fl,C13. B: En A tres libros me dan con dos monedas, haz de cuenta que en B estoy comprando las tres que están en A por dos, y por una moneda me están dando dos. {RP+} P=1

Fl,C14. B: Si dividimos el dinero entre el número de libros me va a salir más barato B que A. {RP+} P=1

Fl,C15. =: S.J. P=0

Fl,D01. =: S.J. P=0

Fl,D02. B: Son más niños y es más poquito el espacio. {CA+ & CC-} P=1

Fl,D03. B: Sólo tienen dos cuadros. {CC-} P=0.5

Fl,D04. A: Quedarían igual de apretados si en B fueran cuatro niños. {RP+} P=1

Fl,D05. =: Va a haber un cuadro casi casi para cada niño. {RP=} P=1

Fl,D06. B: En B son tres por dos cuadritos. {CA+ * CC=} P=1

Fl,D08. =: En B hay cuatro niños y hay dos cuadros, en A hay dos niños y un cuadro. Descr. P=0

Fl,D09. A: El de B tiene tres cuadros para jugar. En A si repartimos el espacio le tocaría dos cuadros a uno, y al otro le tocarían tres. {RP+} P=1

Fl,D10. =: El de B tiene dos recuadros para jugar él solo. En A, si le reparto a cada quien un espacio, vendría a ser lo mismo que le tocaría al niño de B. {RP=} P=1

Fl,D11. =: En B, si repartimos dos niños por cada espacio, uno se queda por así decirlo en el aire. Y en A si repartimos así en el mismo espacio en la misma manera que en B, también uno se queda en el aire. {RP'} P=0

Fl,D12. =: En B para dos niños hay tres recuadros. En A es igual: tres recuadros para dos niños y tres recuadros para otros dos niños. {RP=} P=1

Fl,E01. =: S.J. P=0

Fl,E02. B: De cinco tuvo tres buenas. {CA+ * CT=} P=1

Fl,E03. B: En B son cuatro preguntas, y de cuatro tuvo dos buenas, y en el otro fueron cinco y nada más tuvo dos buenas. {CT- * CA=} P=1

Fl,E04-1. =: Así nada más de ver, yo digo que le fue bien en B porque tiene tres y son más buenas, por así decirlo, pero también fueron más preguntas. {CA+ ⊥ CT-} P=0

Fl,E04-2. A: En B no las tuvo todas, son [calculadora] treinta entre cinco, tiene una calificación de seis. Y en A son veinte porque nada más tuvo dos, [calculadora] veinte entre tres y me da seis punto seis. {RP+} P=1

Fl,E05. =: En B, tenemos [calculadora] veinte entre dos, diez; [10/2=] tuvo cinco. En A [60/6=] me da que tuvo [30/6=] igual: cinco. {RP=} P=1

Fl,E06. B: En B voy a dividir el número de respuestas, que fueron tres, entre el número de preguntas que eran cinco [calculadora: 30/5=], me da seis. Y en el otro son veinte entre cuatro [calculadora], me da cinco. {RP+} P=1
Fl,E07. B: En ésta así nada más a simple vista B, porque tuvo todas buenas. {CC-} P=1
Fl,F02. B: Si tenemos un entero tiene cinco quintos, y me va siendo que A nada más tiene un quinto y B tiene tres. {CA+ * CT=} P=1
Fl,F03. B: Nada más hice esto: dos por cuatro son ocho, cinco por dos son diez. {RP+} P=1
Fl,F04. A: Dos por cinco son diez, tres por tres son nueve. {RP+} P=1
Fl,J01. =: S.J. P=0
Fl,J02. B: Es más concentrado que agua. {RO+} P=1
Fl,J03. B: En A hay más agua y menos concentrado. {RO+} P=1
Fl,J04. =: En B, éste se nivela con éste, éste se nivela con éste, y me sobra uno de concentrado. En A éste se nivela con éste, y éste me sobra. {RS=} P=0
Fl,J05. =: En B, aun cuando nada más es un vaso, es un vaso de concentrado y uno de agua. En A también es un vaso de concentrado, uno de agua; un vaso de concentrado y uno de agua; igual en el otro. {RP= ¬ CT+} P=1
Fl,J06. B: En B es la misma mezcla que en A pero tiene otro vaso de concentrado. {RO+} P=1
Fl,J07. B: Es puro concentrado. {CC-} P=1
Fl,J08. =: En A tenemos dos de concentrado y uno de agua. En B dos de concentrado, uno de agua, dos de concentrado, uno de agua. {RP=} P=1
Fl,J09. A: B tiene tres vasos de agua con uno de concentrado. En A por cada tres tiene un vaso de concentrado y por cada dos tiene un vaso de concentrado. {RP+} P=1
Fl,J10. =: La mezcla está a la par, en B es dos de agua y uno de concentrado. Igual en A: dos de agua, uno de concentrado, igual en éste, igual en éste. {RP=} P=1
Fl,J11. B: En A tiene cinco de concentrado con dos de agua, en B sería los cinco de concentrado con dos de agua, pero tenemos además dos de concentrado con uno solo de agua. {RS+} P=0
Fl,L01. =: S.J. P=0
Fl,L02. B: Tiene más limones y menos agua. {CA+ & CC-} P=1
Fl,L03. B: Son dos tazas de agua azucarada y dos limones, y la A tiene otra taza de agua. {RO+} P=1
Fl,L04. A: En A son dos limones por una taza, y en B son dos limones por una taza y un limón por una taza. {RP+} P=1
Fl,L05. =: Cada taza tiene un limón. {RP=} P=1
Fl,L06. B: Es la misma cantidad de agua, pero son más limones. {CA+ * CC=} P=1
Fl,L07. B: Tiene puro limón. {CC-} P=1
Fl,L08. =: Cada taza tiene dos limones. {RP=} P=1
Fl,L09-1. B: B tiene tres tazas y un limón, y A tiene tres tazas y un limón, y además tiene un solo limón por dos tazas. {RS+} P=0
Fl,L09-2. A: Tiene dos tazas más, y en lugar de que le pusieran a la mejor menos de un limón, le pusieron un limón. {RP+} P=0
Fl,L10. =: Hay dos tazas de agua azucarada por cada limón. {RP=} P=1
Fl,L11. A: En A cada taza de concentrado [sic] tiene dos limones y medio, dos limones y una rebanadita. En B tienes cinco, dos tazas están bien, cada taza por dos limones y medio, y te sobran dos. Para que estuviera más concentrado B tendría que tener un limón más. {RP+} P=1
Fl,L12. =: Dos limones por cada tres tazas. {RP=} P=1

Fl,L13. B: En A tienes tres limones por dos tazas, y en B serían otros tres limones por dos tazas y en lugar de darme uno y medio, me están dando dos por una taza. {RP+} P=1

Fl,L14. B: En A tienes cuatro tazas con dos limones. En B igual tienes cuatro tazas con dos limones, y por una taza me están dando un limón. {RP+} P=1

Fl,L15. =: Son cuatro limones por cada dos tazas. {RP=} P=1

Fl,P01. =: S.J. P=0

Fl,P02. B: Se comió tres pedazos. {CA+} P=0.5

Fl,P03. B: En B son cuartos, los cuartos son más grandes. En A son quintos, A comió dos quintos, en un poquito menos que dos cuartos. {CT- * CA=} P=1

Fl,P04. A: En A son tres tercios, y en A son cinco quintos. {CT-} P=0

Fl,P05. =: En B son dos medios, en A son seis sextos, pero si seis sextos lo divido a la mitad, serían tres sextos, que es lo mismo que en B. {RP=} P=1

Fl,P06. B: En A son cuartos, dos cuartos equivalen a un medio, y en B son más de un medio. {RO+} P=1

Fl,P07. B: Todo se lo comió. {CC-} P=1

Fl,P08. =: En A son tres tercios, nada más me dejó un tercio de pizza, pero en B son seis sextos, pero también me dejó nada más una tercera parte. {RP=} P=1

Fl,P09-1. =: En A son siete, de esos siete séptimos me quedarían dos, que equivaldrían casi casi igual a lo mismo que tengo en B de un cuarto. MEC: aproximación. P=0

Fl,P09-2. A: (¿Dos séptimos es lo mismo que un cuarto?) - Estoy haciendo una división, a ver si me resulta. A equivale a dos séptimos, [calculadora] dos entre siete me dio punto veintiocho. B equivale a un cuarto, [calculadora] uno entre cuatro me dio punto veinticinco. {RP+} P=0

Fl,P10. =: Los tres novenos de A equivalen a un tercio de B. Tres noveno, si le saco tercera me da a uno, y a un noveno le saco tercera me da tres, me da un tercio. {RP=} P=1

Fl,P11. A: Voy a hacer una división. En A tengo cinco séptimos, entonces [calculadora] sinco entre siete me da punto setenta y uno. Y en B siete décimos, [calculadora] siete entre diez, punto siete. {RP+} P=1

Fl,R01. A: Están las mismas áreas sombreadas, pero A porque nunca lo ponen. MEC: tamaño * CA=. P=0

Fl,R02. B: Tiene más área azul. {CA+} P=0.5

Fl,R03. B: Tiene menos amarillo. {CC-} P=0.5

Fl,R04. =: El amarillo de A es la misma área que en B ésta de amarillo. MEC: aproximación. P=0

Fl,R05. B: Son lo mismo, pero escogería la B porque está el color de un solo lado, entonces sería más fácil agarrarle que los otros pedacitos. {MEC.TAM*RP=} P=0

Fl,R06. B: Hay un área más de azul y sería más fácil agarrarla. {CA+} P=0.5

Fl,R07. B: S.J. P=0.5

Fl,R08. A: Es la misma área pero en A está toda junta y en los juegos de azar nunca te las ponen así. {MEC.TAM. * RP=} P=0

Fl,R09. B: El área es más grande, bueno, está más junta. No es más grande, es el mismo tamaño, pero en lugar de estar dispersa está toda junta. MEC: tamaño. P=0

Fl,R10. B: La B, porque A está repartido. MEC: tamaño. P=0

Fl,V01. =: S.J. P=0.5

Fl,V02. B:	A caminó una cuadra en cuatro horas, B en dos horas, en la mitad que hizo A, caminó tres. {CA+ & CC-} P=1
Fl,V03. B:	Se tardó menos tiempo y es el mismo número de cuadras. {CC- * CA=} P=1
Fl,V04. A:	A caminó dos cuadras en una hora, y B debió haber caminado cuatro cuadras en dos horas. {RP+} P=1
Fl,V05. =:	S.J. Descr. P=0
Fl,V06. B:	Caminó tres cuadras en dos horas, y A nada más dos [cuadras] en el mismo tiempo. {CA+ * CC=} P=1
Fl,V08. =:	En A fueron a una hora dos cuadras, y en B igual, hizo el mismo, nada más que B caminó cuatro en dos horas. Descr. P=0
Fl,V09. A:	Precisamente porque recorrió más. {CA+} P=0
Fl,V10. =:	B se tardó dos horas en una cuadra. A se tardó lo mismo, dos horas también en una cuadra, nada más que ahí ella caminó tres cuadras, pero hizo lo mismo. {RP=} P=1
Fl,V11-1. B:	Voy a dividir las cinco cuadras entre el tiempo, [calculadora] me da dos punto cinco. Y B, siete entre tres [calculadora], dos punto tres. {RP'} P=0
Fl,V11-2. A:	Para saber los minutos voy a dividir las horas. Dos horas, ciento veinte minutos entre las cinco cuadras [calculadora], se tardó veinticuatro minutos en cada cuadra. Y B son ciento ochenta entre los siete [calculadora], se tardó veinticinco minutos. {RP+} P=1
Fl,V12. =:	En este tiempo B caminó dos cuadras, y si dividimos el seis de A entre dos, nos da tres horas para [las primeras dos cuadras de A] y tres horas para [las últimas dos cuadras de A]. {RP=} P=1
Od,B01. =:	En las dos botellas tenemos tres amarillas y dos azules. {CA= & CC=} P=1
Od,B02. B:	Hay tres azules, y en la A nada más hay una, entonces hay menos posibilidades. {CA+} P=0.5
Od,B03. B:	Nada más hay dos amarillas. {CC-} P=0.5
Od,B04-1. B:	Hay tres, aunque en el, en el A también hada más hay dos y una. {CA+} P=0
Od,B04-2. A:	Nada más sería una amarilla, ya nada más sería batallar con una. {CC-} P=0
Od,B05-1. B:	Nada más es una. {CC-} P=0
Od,B05-2. =:	Es la misma cantidad, tanto de azules como amarillas. {RP=} P=1
Od,B06. B:	Son tres, y hay más posibilidades de que salga la azul que la amarilla. {RO+} P=1
Od,B07. B:	No tengo amarillo. {CC-} P=1
Od,B08. B:	Hay más cantidad, son cuatro. Ahí son más azules, más posibilidades. {CA+} P=0
Od,B09. A:	Hay menos posibilidad de que salga una azul, al menos son dos y podría salir una azul. {CA+ * RO=} P=0
Od,B10. A:	Hay más cantidad. Más o menos serían dos amarillas por una azul, pero en la B también. Aunque me den menos cantidad pero es lo mismo. La A, porque tiene más azules. {CA+ * RP=} P=0
Od,B11. B:	Tiene más azules. {CA+} P=0
Od,C01. =:	Cuestan lo mismo, son tres monedas. {CC=} P=0.5
Od,C02. B:	Es más cantidad lo que me dan, y menos, y son dos monedas. {CA+ & CC-} P=1
Od,C03. B:	Es igual, son dos cuadernos y dos monedas, y en el otro es una moneda más. {RO+} P=1
Od,C04. A:	Si estas dos monedas de B las gasto en A, me dan cuatro en lugar de tres. {RP+} P=1
Od,C05. =:	Sale una moneda por un cuaderno. {RP=} P=1
Od,C06. A:	Serían tres cuadernos por dos monedas - (¿Y en la tienda A?) En la tienda A es lo mismo, o sea un cuaderno por una moneda. {RO+} P=
Od,C07. B:	Me las regalan. {CC-} P=1
Od,C08. =:	Es una moneda por dos cuadernos y en la B es lo mismo, son dos monedas por cuatro. {RP=} P=1

Od,C09. A: Son cinco monedas por dos cuadernos, y ahí en la B, nada más es un cuaderno por tres monedas. Descr. P=0.5
Od,C10. =: Un cuaderno sería por dos monedas. {RP=} P=1
Od,C11. =: Casi van saliendo dos libretas por una moneda, pero va saliendo uno gratis. En A sería una moneda para dos, otra para dos, quedaría ésta libre. Igual en B, una, dos, tres, quedaría una. Sería lo mismo. {RP'} P=0
Od,C12. =: Más o menos saldrían los cuadernos como de moneda y media. {RP=} P=1
Od,C13. B: Si pago una moneda por cada cuaderno, en B dos saldrían gratis, y en A si pago un cuaderno por cada moneda pago dos, pero nada más me dan uno. {RS+} P=1
Od,C14. B: En B cada cuaderno me costaría dos pesos y el otro saldría a la mitad, y en A no, ahí cuestan dos pesos. {RP+} P=1
Od,C15. =: Cada cuaderno me saldría la mitad de una moneda. {RP=} P=1
Od,D01. =: Tanto en la A como en la B me están dando dos plantas por la misma cantidad de terreno. {CA= & CC=} P=1
Od,D02. B: Nada más son dos cuadritos de terreno y tres plantas. {CC-} P=0.5
Od,D03. B: Son dos plantas por dos cuadritos de terreno. Descr. P=0.5
Od,D04-1. =: Tengo que a fuerzas amontonarlas en las dos. {RO=} P=0
Od,D04-2. A: En la B podría ser una aquí en medio, y en los extremos las otras. {CC-} P=0
Od,D05. =: Cada florecita sería en un cuadrito. {RP=} P=1
Od,D06. B: Son tres plantas por dos cuadritos. Descr. P=0.5
Od,D08. =: Dos plantas por un cuadrito. {RP=} P=1
Od,D09. A: Son cinco cuadros por dos plantas y en B nada más es una planta por tres cuadros. {CA+} P=0
Od,D10. =: Es una planta por dos cuadritos. {RP=} P=1
Od,D11. =: En la A podríamos poner dos y dos, pero una quedaría en medio. Y en la B igual podríamos poner de a dos, pero siempre quedaría una. {RP'} P=0
Od,D12. =: En la A ocuparía por planta como cuadro y medio. Y en la B igual, se podría ocupar dos cuadros y más o menos como la mitad del otro. Entonces da igual. {RP=} P=1
Od,D13. B: En A serían una flor por cada una y ya ésta entraría en la mitad de una y en la mitad de la otra. Y en B son tres y tres cuadros, quedarían estas dos. {RS+} P=0
Od,D14. B: En la A al menos cada flor le toca de dos cuadros, y en B no, ahí le tocarían menos. {RP+} P=1
Od,E01. =: {RP=} P=1
Od,E02. B: Tuvo tres correctas y dos incorrectas. {RP+} P=1
Od,E03. B: Tuvo dos buenas y dos malas, entonces su calificación sería un cinco. Y en el primer examen sería un cuatro, porque igual tuvo dos, pero tuvo tres malas. {RO+ * CA=} P=0
Od,E04. A: En el segundo examen tuvo tres buenas y dos malas, ahí su calificación es seis. Pero en A no puedo, nada más son tres preguntas y en B son cinco y cada calificación son dos puntos, aquí sí sale bien. No puedo. Descr. P=0.5
Od,E05. =: Tanto tiene correctas, las tres, incorrectas, igual tres. En el segundo examen tiene correcta uno, y uno {RP=} P=1
Od,E06. B: Tiene tres correctas y dos incorrectas, sería un seis. Y en A pues es menos la cantidad pero nada más son dos, o sea cada, o sea aquí equivale cinco puntos, igual cinco puntos. Entonces sería un cinco. {RO+} P=1
Od,E07. B: De las dos preguntas que tuvo, pues las tuvo buenas. {CC-} P=1
Od,E08. =: En el primer examen fueron tres preguntas, de las tres tuvo dos buenas y una mala. En el segundo examen fueron seis preguntas, y tuvo cuatro buenas. Descr. P=0.5

Od,E09. =: En A fueron siete preguntas, de las siete nada más tuvo dos buenas, más o menos, aquí su calificación sería como un tres, y en el B, ¡ay! (no sabe). Descr. P=0

Od,E10. =: En A sacaría como un tres punto tres, porque son nueve preguntas, pero de esas nueve se dividiría entre diez. Descr. P=0.5

Od,F01. =: S.J. P=0.5

Od,F02. B: Es ¿quintoavos? En B puedo tener tres círculos de cinco, o sea con cinco partes, y en A nada más sería uno. {CA+} P=0.5

Od,F03. A: Pueden ser dos círculos divididos en cinco partes. No sé. MEC: error frac. P=0

Od,J01. =: En las dos jarras se le está echando dos vasos de sabor, e igual de cantidad de agua. {CA= & CC=} P=1

Od,J02. B: Son tres vasos de sabor, y en el A nada más es uno, y es más cantidad de agua. {CA+ & CC-} P=1

Od,J03. B: En las dos jarras se está poniendo el mismo concentrado, pero en A se le está poniendo más agua y en B menos. {RO+} P=1

Od,J04. =: Tenemos tres pero dos de agua, y en A tenemos dos nada más, pero tenemos uno. Descr. P=0

Od,J05. =: En A son tres, pero también son tres de agua, entonces sería más cantidad pero igual su sabor. Y en B es uno y uno, pues igual sería su sabor. {RP=} P=1

Od,J06. B: Tiene tres vasos de sabor y dos de agua, y en la A es lo mismo. {RO+} P=1

Od,J07. B: Nada más se le está poniendo el sabor, y en la otra se está rebajando. {CC-} P=1

Od,J08. =: Se le está poniendo dos vasos de sabor por una de agua. Nada más que en A sería más cantidad y en B menos, o sea líquido, pero es lo mismo. {RP=} P=1

Od,J09. A: En A podríamos contarle un vaso de sabor por dos y media de agua. Y en B es un vaso de sabor por tres de agua. {RP+} P=1

Od,J10. =: Se le está poniendo un vaso de sabor por dos de agua. {RP=} P=1

Od,J11. A: En A cada vaso de agua serían dos y media de sabor, y en B no, ahí serían dos vasos en... como menos, un vaso se tendría que dividir entre tres. {RP+} P=1

Od,J12. =: En A por cada vaso de sabor le tocaría vaso y medio. Igual en la B, en menos cantidad pero me está dando lo mismo. {RP=} P=1

Od,L01. =: Por limón sería taza y media de azúcar. {RP=} P=1

Od,L02. B: Hay más limones. {CA+} P=0.5

Od,L03. B: Es la misma cantidad de limones que de azúcar. {RO+} P=1

Od,L04. A: Son dos limones por una de azúcar, y en la B son tres limones por dos de azúcar. Descr. P=0.5

Od,L05. =: Es uno por limón y uno por azúcar. {RP=} P=1

Od,L06. B: Son tres limones por dos de azúcar. Descr. P=0.5

Od,L07. B: Tiene limón nada más. {CC-} P=1

Od,L08. =: Son dos limones por una de azúcar. {RP=} P=1

Od,L09. A: En B es un limón por tres de azúcar. Y en A, si lo hacemos igual, a un limón le tocarían tres y a uno le tocaría dos, entonces como que quedaría más sabor a limón. {RP+} P=1

Od,L10. =: Un limón por dos de azúcar. {RP=} P=1

Od,L11. A: En A sería dos limones y medio por una de azúcar. En B también, una de azúcar por dos limones, pero quedaría uno, entonces esto sería menos. O sea el último que queda es un limón por las tres, y en A sería un limón por las dos. {RP+} P=1

Od,L12. =: En dos limones serían tres tazas de azúcar. {RP=} P=1

Od,L13. B: En A sería un limón y medio por cada taza. En B son cinco, son tres limones por las tres tazas, y estas dos [primeras dos tazas de B] sería una [cuarto limón] y en ésta [tercera taza de B] quedaría un limón solo.. {RP+} P=1

Od,L14. B: En la A sería un limón por dos tazas. Y en la B éste sería uno [dos tazas de B], éste sería otro [dos tazas de B] y un limón quedaría en una taza. {RP+} P=1
Od,L15. =: Serían dos limones por cada taza. {RP=} P=1
Od,P01. =: En A les quedaron tres rebanadas, y en B igual tres rebanadas.. {CC=} P=0.5
Od,P02. B: Comió más. {CA+} P=0.5
Od,P03. B: Sería la mitad que se quedó, si juntamos estos dos de B queda la mitad. Y en A si juntamos, nada más es como tres cuartas partes comieron. {RO+} P=1
Od,P04. =: Si los juntamos, más o menos quedarían estos dos cuadros y es lo mismo que el café en A. MEC: aproximación. P=0
Od,P05. =: En A si juntamos, igual, estos tres, queda la mitad. {RP=} P=1
Od,P06. B: En A los juntamos, queda la mitad, y en B es un poquito más de la mitad. {RO+} P=1
Od,P07. B: Ya no hay nada. {CC-} P=1
Od,P08. =: Si en B los juntamos, comieron un poquito más de la mitad, igual que en A. {RO=} P=0
Od,P09. =: Se comieron tres cuartas partes. {RO=} P=0
Od,P10. =: Juntamos estos tres de A, es la misma cantidad que esto en B. MEC: aproximación. P=0
Od,P11. =: Si juntamos estos tres pedacitos de B, serían lo que dejaron, igual los de A, serían estos dos. Nada más que éstas están más grandes las rebanadas y éstas están más chiquitas. Pero sería lo mismo. MEC: aproximación. P=0
Od,R01. =: Es la misma proporción, tanto de azules como amarillas. {CA= & CC=} P=1
Od,R02. B: Hay más azules, es más azul que la A. {CA+} P=1
Od,R03. B: Es la misma proporción tanto de azules como amarillas, y en la A hay más amarillas. {RO+} P=1
Od,R04. =: La misma proporción que de dan aquí de amarillo como acá. Mec.aprox. P=0
Od,R05. =: Es la misma proporción tanto de amarillo como azul. {RP=} P=1
Od,R06. B: Hay más azul, y en la A es lo mismo, es la misma cantidad de azul como amarillo. {RO+} P=1
Od,R07. B: Toda está azul. {CC-} P=1
Od,R08. =: Si acomodamos la B como la A, pues es lo mismo. Mec. aprox. P=0
Od,R09. =: Es la misma cantidad de azul tanto la A como la B. Mec. aprox. P=0
Od,R10. =: Es la misma cantidad de azul. Mec. aprox. P=0
Od,V01. =: Las dos caminaron dos cuadras y el mismo tiempo. {CA= & CC=} P=1
Od,V02. B: Son tres cuadras en dos tiempos, y en A es una cuadra en cuatro. Descr. P=0
Od,V03. B: Son dos cuadras en dos tiempos, y en A es dos en tres. Descr. P=0.5
Od,V04. B: Mas o menos por tiempo va haciendo cuadra y media. Y en la A fue en un tiempo dos cuadras. {RP'} P=0
Od,V05. =: En A son tres cuadras en tres tiempos y en B es una cuadra en un tiempo. Descr. P=0.5
Od,V06. B: Fueron tres cuadras dos tiempos, y en A hizo el mismo tiempo, pero nada más en dos. {CA+ * CC=} P=1
Od,V08. =: A caminó dos cuadras en un tiempo, y B caminó lo doble pero en dos tiempos. {RP=} P=1
Od,V09. A: Son dos cuadras en cinco tiempos. Y B, si camina las dos cuadras, serían seis. {RP+} P=0
Od,V10. =: Están caminando una cuadra por dos tiempos. {RP=} P=1
Od,V11. B: A por minuto caminaría como dos cuadras y media, y B sería una, dos, tres y quedaría ésta. Caminaría por minuto una cuadra y la tercera parte de la otra en un minuto. Sería más rápido. {RP'} P=0
Od,V12. =: Los dos están caminando en minuto y medio una cuadra. {RP=} P=1

Od,V13. B: Caminó como tres cuartas partes de cuadra por minuto, no, menos que eso. Pero tampoco la mitad. {RP+} P=1
Qu,B01. =: Tienen las mismas cantidades. {CA=&CC=} P=1
Qu,B02. B: Hay más canicas, por decir, azules … que amarillas. {RO+} P=1
Qu,B03. B: Es la misma cantidad de azules y amarillas, y aquí A es menos probabilidad a la mejor, porque hay más amarillas. {RO+} P=1
Qu,B04. A: Nada más tenemos una amarilla. {CC-} P=0
Qu,B05. B: No hay muchas canicas ni de azules ni de amarillas. {CT-} P=0
Qu,B06. B: Hay más canicas azules … que amarillas. {RO+} P=1
Qu,B07. B: Hay puras azules. {CC-} P=1
Qu,B08. =: En las dos hay mayor cantidad de azules que amarillas. {RO=} P=1
Qu,B09. B: Hay menos amarillas que en la A. {CC-} P=0
Qu,B10. B: Hay menos amarillas. {CC-} P=0

Qu,C01. =: Sería la misma cantidad porque tengo las mismas monedas. {CC=} P=1
Qu,C02. B: Hay menos monedas, son veinte, y compres tres, y aquí A dí cuarenta monedas bueno, cuarenta pesos, por uno nada más. {CA+&CC-} P=1
Qu,C03. B: Porque nada más estoy pagando dos monedas por dos libros, o sea sería a lo mejor cada uno me está costando diez pesos. Y aquí A son treinta pesos, estoy pagando quince por cada uno. {RP+} P=1
Qu,C04. A: Voy a pagar diez pesos por dos, aquí B veinte, me saldría, a ver déjame, primero déjame checar (calculadora), serían veinte entre tres, me saldrían a seis punto y cachito, me va a salir más caro. Y aquí A me saldría, a cinco pesos cada libro. {RP+} P=1
Qu,C05. =: Voy a pagar diez pesos en la B por uno, y aquí A son treinta pesos por tres, que sería la misma cantidad. {RP=} P=1
Qu,C06. B: Pagaría nada más veinte pesos por tres que sería veinte entre tres (calculadora), sería a seis punto y cacho. {RP+} P=1
Qu,C07. B: Porque no voy a pagar nada. {CC-} P=1
Qu,C08. =: En la A cada libro me sale a cinco pesos … y en la B son veinte pesos por cuatro.(calculdadora) me estoy dando cuenta que me sale lo mismo. {RP=} P= 1
Qu,C09. A: Cada libro me saldría en veinticinco pesos, y aquí en la B me va a salir un libro en treinta pesos. {RP+} P=1
Qu,C10. =: La misma cantidad que me va a costar cada libro: veinte pesos. {RP=} P=1
Qu,C11. A: Voy a hacer una división, que son treinta entre siete, que me tocaría a cuatro punto dos. Y en la A tengo cinco por veinte pesos (calculadora: 20/5). Agarraría la A porque me sale, cada libro me sale a cuatro pesos, y en la B me sale a cuatro punto dos. {RP+} P=1
Qu,C12. =: En la A son sesenta pesos por cuatro libros, y cada uno me sale en quince pesos. Y en la B tengo treinta pesos por, entre dos, bueno, entre dos libros, cuánto sería (calculadora), de a quince. Es la misma cantidad. {RP=} P=1
Qu,C13. B: En la A sería veinte pesos entre tres (calculadora), que me sale a seis punto y cacho: cada llibro me sale a seis punto seis. Y en la B son treinta pesos entre cinco (calculadora), a seis. {RP+} P=1
Qu,D01. =: Son la misma cantidad de niños y la misma cantidad de espacio o de patio que van a tener para jugar. {CA=&CC=} P=1
Qu,D02. B Porque es más chico el patio y son más niños. {CA+&CC-} P=1
Qu,D03. B: Porque son dos cuadritos, bueno dos patios y son dos niños. En donde tienen más espacio es en la A, porque son nada más dos niños y tres cuadritos de espacio. {RO+} P=1
Qu,D04. A: Está más chico el patio. {CC-} P=0

Qu,D05. =: Tres espacios para tres niños … cada quien va a tener su espaci, y en la B nada más tengo un pedazo de patio para un niño. {RP=} P=1
Qu,D06. B: Porque es, este, más es el mismo, este, espacio pero lo que tengo son más niños. {CA+*CC=} P=1
Qu,D08. =: Estaría la misma cantidad de patio: en cada patio dos niños. {RP=} P=1
Qu,D09. B: Tengo nada más tres pedazos de patio para un niño. Y en la A tengo cinco pedazos de patio para dos niños. Entonces, estaría más chico, más apretado. {CC-} P=0
Qu,D10. =: En la A tengo seis pedazos de patio y tres niños, le tocaría de a dos pedazos, y en la B tengo dos pedazos para un solo niño. {RP=} P=1
Qu,D11. A: Como son dos … pedazos de patio entre cinco niños (calculadora), aquí A me sale a cero punto cuatro. Y en la B serían tres entre, entre siete (calculadora) me toca a cero punto cuarenta y dos … en la A porque me sale menos cantidad. {RP+} P=1
Qu,D12. =: Voy a hacer una división … tengo que les toca a uno punto cinco en A. Y en la B tengo tres pedazos de patio para dos niños (calculadora). Este, sale igual, es la misma cantidad que va a tener de espacio cada niño. {RP=} P=1
Qu,E01. =: Es la misma cantidad de incorrectas … tiene más malas que buenas. {CC=&RO=} P=1
Qu,E02. B: Porque tuvo mayor número de correctas. {CA+} P=0.5
Qu,E03. =: Porque las correctas tque tuvo, tanto en el inciso A fueron dos y en el inciso B fueron dos, entonces es igual los números de aciertos que tuvo. {CA=} P=0.5
Qu,E04-1. B: Tuvo mejor, este bueno de correctas. {CA+} P=0
Qu,E04-2=: En esta B … son más preguntas que en la A … aquí B este cinco preguntas y aquí A nada más tres … y aquí B de cinco tuvo tres buenas … y de tres nada más una le faltó. {RO=} P=0
Qu,E05. =: Porque tengo … tanto inciso A, inciso B es la misma cantidad de correctas. En el inciso A son tres correctas, inciso B es una; y de incorrectas es la misma cantidad, en la A son tres, y inciso B es una. {RP=} P=1
Qu,E06. B: Tengo mejor, bueno, más buenas. {CA+} P=0.5
Qu,E07. B: No tuvo ninguna incorrecta. {CC-} P=1
Qu,E08. B: Tuvo mejor, bueno, más cantidades o más palomitas correctas. {CA+} P=0
Qu,F02. B: Es mayor el tres, y estamos en el ¿denominador?. {CA+*CT=} P=1
Qu,F03. A: (toma la calculadora) estoy dividiendo cinco entre dos y cuatro entre dos. Entonces la que es mayor es inciso A, me sale dos punto cinco y me sale nada más dos inciso B. {RP'} P=0
Qu,F04. B: Voy hacer igual una división, tres entre dos (calculadora), me sale a uno punto cinco en inciso A, y en inciso B voy a hacer cinco entre tres (calculadora), … uno punto cinco y en la B cinco entre tres (calculadora). Es mayor inciso B: me está saliendo uno punto seis, por decir, y en la A uno punto cinco. {RP'} P=0
Qu,J01. =: En la A son como dos vasitos de jamaica y en la B igual, dos vasitos de jamaica. {CA=} P=0.5
Qu,J02. B: Hay más, este, tacitas que le echaría de jamaica a la B. son tres las que le echaría a la B, y en la A tengo más azúcar que jamaica … en la B tengo más jamaica. {RO+} P=1
Qu,J03. B: Es la misma cantidad de agua y de jamaica. {RO+} P=1
Qu,J04. =: En las dos de arriba, bueno en las dos tengo más jamaica que agua. {RO=} P=0
Qu,J05. =: Tengo la misma cantidad de agua y la misma cantidad de jamaica. {RP=} P=1
Qu,J06. B: Tengo más, este, concentrado … tengo más cantidad de jamaica. Y en la A es igual, tengo dos de agua y dos de jamaica. {RO+} P=1

Qu,J07. B: No tengo nada de agua. {CC-} P=1
Qu,J08. =: Porque tengo una tacita de agua y dos de jamaica. {RP=} P=1
Qu,J09. B: Porque tengo menos agua que en la A. {CC-} P=0
Qu,J10. =: Por dos tacitas de agua voy a tener una de jamaica. {RP=} P=1
Qu,J11. B: Porque tengo más jamaica, son más cantidad. {CA+} P=0
Qu,J12. B: Porque es menos cantidad de agua … tengo menos agua. {CC-} P=0
Qu,L01. =: Tenemos la misma cantidad de azúcar en cada una: son tres de azúcar, y dos de limón en cada una, entonces sería igual. {CA=&CC=} P=0
Qu,L02. B: Tengo más limones que en la A: En la A nada más tengo un limón y cuatro de azúcar. Entonces tengo más, este, limones en la B. {CA+} P=0.5
Qu,L03. B: Porque tengo dos limones y dos de azúcar … y en la A me va a saber más, este, más dulce porque tengo más azúcar que limones. {RO+} P=1
Qu,L04. A: Porque tengo menos azúcar. {CC-} P=0
Qu,L05. =: Porque por cada tacita de azucar tengo por decir un limón. {RP=} P=1
Qu,L06. B: Tengo más limones que azúcar. Y en la A tengo nada más, la misma cantidad es de limones y de azúcar … y aquí en B tengo más limones. {RO+} P=1
Qu,L07. B: No tengo nada de azúcar. {CC-} P=1
Qu,L08. =: En la B y en la A, tengo la misma cantidad, bueno no es la misma cantidad de limones, pero, este, si sería dos limones por cada tacita. {RP=} P=1
Qu,L09. A: Serían tres entre un limón (calculadora) … me va a dar a tres … pero aquí en el inciso A tengo cinco tacitas de azúcar entre dos (calculadora) entonces, este, en el inciso les toca de a dos punto cinco, que sería menos de limón, y en el inciso B le tocaría de a tres. {RP'} P=0
Qu,L10. =: Porque tengo seis tacitas de azucar y tres de limón, sería como a cada tacita les tocara, este, dos tacitas le tocaría un limón, en el inciso A, por decir. Y en el inciso B tengo dos tacitas de azúcar y una de limón. {RP=} P=1
Qu,L11. B: Inciso A tengo dos tacitas de azúcar y cuatro limones y me tocaría de cero punto cuatro. Y en la B tengo tres tacitas y siete limones (calculadora). Tengo, este, más limones en el inciso B, porque me sale a cero punto cuatro o cuarenta y dos. Entonces escogería la B porque tengo más limones. {RP'} P=
Qu,P01. =: Es la misma cantidad que han comido … porque son los mismos, la misma cantidad de anaranjado en B y en la A. {CC=} P=0.5
Qu,P02. B: Me quedan dos nada más. Y en el inciso A de cinco pedazos nada más se han comido un pedazo, entonces tengo todavía más, me queda casi toda la pizza completa. {CA+} P=0.5
Qu,P03. =: Porque tengo este, la misma cantidad que tengo en inciso A y B de lo que han comido pizza, son dos pedazos y dos pedazos en B . {CA=} P=0
Qu,P04. =: Si juntamos … las dos anaranjadas que … (marca una frontera en B que abarca un sector gris y uno anaranjado), sería la misma cantidad que tenemos. {RP'} P=0
Qu,P05. =: Vamos a unir todo lo que se han comido (marca una frontera en A que abarca tres sectores), entonces nos daría la mitad y aquí tenemos que también ya se comieron la mitad. {RP=} P=1
Qu,P06. B: Porque aquí tengo tres, que ya se comieron tres pedazos, y en la A nada más hay dos pedazos que se comieron. {CA+} P=0.5
Qu,P07. B: Porque ya no dejaron nada de pizza. {CC-} P=1

Qu,P08. =: Porque si unimos este en la B los dos pedazos de pizza (marca una frontera en B que abarca un sector gris y uno anaranjado) así sería, nos da la misma cantidad que está en inciso A, la misma cantidad que sobra de pizza, y la misma cantidad que se comieron. {RP=} P=1

Qu,P09. =: Si unimos en el inciso A lo que se comieron de pizza (marca una frontera en A que abarca un sector gris y uno anaranjado), si lo unimos es la misma cantidad que tenemos en el inciso B. {RP'} P=0

Qu,P10. =: Vamos a unir igual, la misma cantidad de lo que se comieron de pizza (marca una frontera en A que abarca un sector gris, uno anaranjado y uno gris), y me da la misma cantidad. Es la misma cantidad que se comieron inciso A y en inciso B. {RP=} P=1

Qu,R01. =: En el inciso A tengo tres partes de azul … y en el inciso B tengo, este, tres partes de la ruleta coloreado de azul. {CA=} P=0.5

Qu,R02. B: Tengo tres partes de azul y en la A nada más tengo una parte de la ruleta pintada de azul. {CA+} P=0.5

Qu,R03. =: Es la misma cantidad … de azul . {CA=} P=0

Qu,R04. =: Es la misma cantidad, este, de azul … es la misma cantidad de amarillo que tengo en la B que en la A. {RP'} P=0

Qu,R05. =: En la A … está dividido en seis … pero tengo tres partes de azul, que casi viene siendo la mitad, y, bueno, más bien dicho es la mitad. Y en la B tengo nada más … está partida a la mitad, una es azul y una amarilla. {RP=} P=1

Qu,R06. B: Tengo más … más partes color azul que en la A. {CA+} P=0.5

Qu,R07. B: Porque todo está completamente de color azul. {CC-} P=1

Qu,R08. =: Aquí A tengo … una parte de amarillo, pero aquí B juntando por decir ésta parte (marca una frontera en B que abarca un sector azul y uno amarillo) tal vez sería también de amarillo, si los juntara, si pasara esto aquí B, este, tendría la misma cantidad que tengo en la B y en la A, sería la misma cantidad que tengo de amarillo, y la misma cantidad de azul. {RP=} P=1

Qu,R09. =: Si yo … juntara los dos azules tendría esta parte (marc auna frontera en A que abarca un sector azul y uno amarillo, que viene siendo la misma que tengo en el inciso B (marca en B la frontera del sector azul. {RP'} P=0

Qu,R10. =: Si yo este, voy a juntar los colores .. es la misma cantidad. {RP=} P=1

Qu,R11. =: Ya juntándolos se ve que, este, nos da la misma cantidad de azules que de amarillos. {RP'} P=0

Qu,V01. =: Porque están caminando las mismas cuadras, y es en la misma, este, tiempo o distancia. {CA=&CC=} P=1

Qu,V02. B: Porque en dos minutos caminó ya tres cuadras, y la del inciso A nada más ha caminado una cuadra en cuatro minutos, entonces se ha hecho mucho tiempo para una cuadra. {CA+&CC-} P=1

Qu,V03. B: Porque nada más se hace dos minutos en dos cuadras, y la del inciso A se hace tres minutos en dos cuadras … hace menos tiempo … camina más rápido. {CC-} P=0.5

Qu,V04. A: Tal vez ella B está recorriendo, este, más cuadras, pero sí está tardando más que la del inciso A. {CC-¬CA+} P=0

Qu,V05. =: Aquí A se está tardando igual un minuto por cada cuadra, y aquí B caminó una cuadra por un minuto. Entonces es la misma cantidad. {RP=} P=1

Qu,V06. B: Es el mismo tiempo, pero la que hizo más cuadras recorrió más cuadras es la del inciso B. {CA+*CC=} P=0

Qu,V08. =: Aquí A este, tenemos que son dos cuadras por un minuto, y aquí B igual, si dividimos dos igual le tocaría un minuto por dos cuadras. {RP=} P=1

Qu,V09. A: Está recorriendo por cuadra dos punto, por decir si dividimos a la mitad dos punto cinco cada cuadra. Y aquí B una cuadra la del inciso B está recorriendo una cuadra por tres minutos. {RP+} P=1

Qu,V10. =: Si dividimos ésta A entre tres le toca a dos, o sea sería cada cuadra dos minutos, que nos darían dos, cuatro, seis, nos daría seis minutos. Y aquí B vemos que una cuadra está haciendo dos minutos. {RP=} P=1

Qu,V11. A: En dos minutos recorrió, este cinco cuadras (calculadora), que me toca a cero punto cuatro. Y estamos en inciso B, en tres minutos recorrió, son siete (calculadora), le toca a cuatro punto dos, entonces en donde está recorriendo más rápido es en inciso A porque se hizo menos tiempo. {RP+} P=1

Qu,V12. =: En el inciso A son seis minutos y a la mitad, por decir de dos serían tres minutos y de otras dos cuadras serían otros tres minutos. En total nos darían, este, seis minutos y en inciso B por dos cuadras nos está dando tres minutos. {RP=} P=1

Qu,V13. B: A, En dos minutos está recorriendo tres cuadras (calculadora: 2/3=), que nos da a cero punto sesenta y seis, y en tres minutos está recorriendo cinco (calculadora: 3/5=), está recorriendo más rápido, más cuadras en la B y nos sale a seis. {RP+} P=1

Yl,B01. =: Tiene la misma cantidad. {CT=} P=0.5

Yl,B02. B: Tiene más azules que amarillas. {RO+} P=1

Yl,B03. B: Tiene igual cantidad, igual color: dos amarillas y dos azules. {RO+} P=1

Yl,B04. A: Tiene dos azules y nada más una amarilla. Y en B me podría salir dos veces la amarilla. {CC-} P=0

Yl,B05. A: Me arriesgaría más porque hay igual cantidad de azules y amarillas, pero en B si no me sale la azul pues me va a salir la amarilla y en A si no me sale una me podría salir cualquiera de la otra. {(CA+ ¬ CC–) * RO=} P=0

Yl,B06. B: Tiene más azules... que amarillas. {RO+} P=1

Yl,B07. B: S.J. P=0.5

Yl,B08. B: Tiene más cantidad de azules... que amarillas. B también, pero me podrían salir seguido más azules. En A me podría salir cualquiera de los dos colores, entonces ésta [primera azul de A] vendría quedando al último, no se tomaría mucho en cuenta, y en B sí. {CA+ * RO=} P=0

Yl,B09. A: En B me saldrían amarillas, muy poco se podría decir que la azul. {CA+} . P=0

Yl,B10-. A: Hay más azules que en la B. {CA+} P=0

Yl,C01. =: Están al mismo precio. {RP=} P=1

Yl,C02. B: Son más cuadernos por menos dinero. {CA+ & CC-} P=1

Yl,C03. B: También son dos cuadernos pero en A es una moneda más. {CC- * CA=} P=1

Yl,C04. A: En A si compro otros dos serían dos monedas, y en B si compro otros tres serían seis, serían cuatro monedas. {RP'} P=0

Yl,C05. =: En A es una moneda por cada libro y en B es igual. {RP=} P=1

Yl,C06. B: Tres libros por dos monedas, y en A dos libros por (las mismas monedas). {CA+ * CC=} P=1

Yl,C07. B: ¿Esto qué quiere decir?-(Que ahí son gratis). {CC-} P=1

Yl,C08. =: En A son dos libros por una moneda y en B son cuatro por dos. Descr. P=0.5

Yl,C09. A: Si en B me estarían dando otro libro, entonces pagaría seis monedas. {RP+} P=1

Yl,C10. =: En B estoy comprando un libro y esto es lo que pago, y en A si comprara también un libro pagaría lo mismo. {RP=} P=1

Yl,C11. B: Si en A compro otros cinco serían diez, serían cuatro monedas, en B si compro otros siete, serían catorce, serían seis monedas. {RP'} P=0

Yl,C12. =: En B es la mitad: tres monedas por dos. Entonces es lo mismo. {RP=} P=1

Yl,C13-1. B: Veo más libros. {CA+} P=0

Yl,C13-2. =: En A si le agrego otros tres libros serían cuatro monedas, en B son cinco, son tres monedas. {RP'} P=0

Yl,C13-3. B: S.J. P=0.5

Yl,D01. =: S.J. – P=0.5

Yl,D02. B: Son más plantas y en menos espacio. {CA+ & CC-} P=1

Yl,D03. B: Tendrían más espacio en A. {S/J} P=0.5

Yl,D04. A: El espacio de A está más pequeño para las dos plantas. Quitándole esta línea en B, yo podría poner una en medio, y en A las dos más juntas en el espacio. {CC-} P=0

Yl,D05. =: Es el mismo espacio para cada planta. {RP=} P=1

Yl,D06. B: Son dos cuadros para tres plantas, y en A es uno para cada planta. {RO+} P=1

Yl,D08-. =: Si yo pongo las plantas en un lugar, en este espacio, las tengo que poner en el mismo lugar que colocamos de este lado las plantas. {RP=} P=1

Yl,D09. A: En B tengo menos, de cualquiera de estos dos tengo menos espacio aquí, pero nada más va a ser para una planta; en A tengo más espacio, pero van a ser dos plantas. Como son dos plantas, no sé si queden apretadas o no, pero están compartiendo el terreno. {CA+ ¬ CC-} P=0

Yl,D10. =: Tomamos un espacio para cada planta, o sea dos, dos cuadritos como en B: en B le corresponden dos, y en A van a tomar dos para cada planta. {RP=} P=1

Yl,E02. B: Donde le fue mejor fue donde tuvo las tres buenas y dos malas. Descr. P=0.5

Yl,E03. B: En B tuvo igual de buenas y malas, en A tuvo más incorrectas. {RO+} P=1

Yl,E04-1. =: En A aunque tuvo una incorrecta, pero son menos preguntas. En B tuvo tres buenas y dos incorrectas pero son más preguntas. {CC- ⊥ CT+} P=0

Yl,E04-2. A: Aquí en A ya cuenta que nada más tuvo una, en B tuvo dos, es que no sé, porque aquí también en B tiene tres buenas y en A dos. {CC- ¬ CA+} P=0

Yl,E05. =: Son tres y tres, y en B es una y una. {RP=} P=1

Yl,E06. B: Son tres correctas, en A son las mismas incorrectas, dos y dos. {CA+ * CC=} P=1

Yl,E07. B: Todas fueron correctas. {CC-} P=1

Yl,E08. =: Pues si tiene la mitad. {RP=} P=1

Yl,F02. B: S.J. P=0.5

Yl,F03. B: S.J. P=0.5

Yl,F04-1. =: De tes partes que tengo voy a tomar dos, y en B de cinco voy a tomar tres. Descr. P=0

Yl,F04-2. A: En B quedarían dos y en A me quedaría una. {CC-} P=0

Yl,F04-3. B: Son tres partes de cinco, y aquí nada más son dos de tres. {CA+} P=0

Yl,F05. =: Son tres de seis partes y en B es una de dos, es igual. Descr. P=0.5

Yl,F06-1. B: Se parte en cinco partes, de esas cinco voy a agarrar tres. Y en A de cuatro voy a agarrar nada más dos. {CA+} P=0.5

Yl,F06-2. A: En A estoy tomando la mitad. {ROe} P=0

Yl,F06-3. B: En B estoy tomando más de la mitad. {RO+} P=1

Yl,F07. B: En B estoy tomando todo. {CC-} P=1

Yl,F08-1. A: Estoy tomando dos partes de tres y en B estoy tomando cuatro de seis. S/J P=0

Yl,F08-2. B: En A nada más dejó una parte. {CC+} P=0

Yl,F08-3. A: En B estoy dejando dos partes, entonces donde estoy tomando más es en A. {CC-} P=0

Yl,F09-1. A: Estoy tomando más en A y quedarían cinco partes y en B quedarían tres. Estoy tomando más en A-(¿Porque deja menos?)-No, porque estoy tomando más. Pero también es menos, en A son más, son siete partes, y en B son cuatro. {CA+ ¬ CT-} P=0

Yl,F09-2. B: Punto veinticinco, porque A es punto doscientos ochenta y cinco. {RP'} P=0

Yl,J01. =: S.J. P=0.5

Yl,J02. B: Tiene más concentrado - (¿Que qué?) - Que agua. {RO+} P=1

Yl,J03. B: Tiene igual cantidad de agua y de concentrado, y A tiene menos concentrado. {RO+} P=1

Yl,J04-1. B: Tiene más, mayor concentrado. {CA+} P=0

Yl,J04-2. A: Nada más tiene una medida de agua y B tiene dos. {CC-} P=0

Yl,J05. =: B tiene misma cantidad y A tiene misma cantidad, es lo mismo. {RP=} P=1

Yl,J06. B: Tiene menos agua y más concentrado. {RO+} P=1

Yl,J07. B: S.J. P=0.5

Yl,J08-1. =: En A le estoy poniendo dos de concentrado y una de agua, y en B le estoy poniendo cuatro y dos de agua. Descr. P=0.5

Yl,J08-2. B: Tiene más concentrado que agua - (Pero el A también) - El A también, pero a la mejor como son cuatro en B pues sabe más a jamaica. {CA+ * RO=} P=0

Yl,J09. A: En B si yo le pusiera otro de jamaica como en A, en B serían seis vasos, y en A son cinco. {RP+} P=1

Yl,J10. =: En A a cada medida le corresponden dos de agua, y dos, y en B también. {RP=} P=1

Yl,J11. =: En B a cada dos medidas de concentrado le corresponde una de agua, y éste, no tiene agua esta medida. Y en A es igual, a cada dos se le agrega una de agua, y éste. Viene siendo igual. {RP'} P=0

Yl,J12. B: En B a cada medida le estoy agregando uno, que también es uno de concentrado, entonces nada más le agregaría una más de agua, y en A le estoy agregando dos. {RS+} P=0

Yl,J13-. B: Tiene más, tiene cinco por tres de agua, y A tiene tres por dos. {CA+} P=0

Yl,J14. B: Si tuviera tres en A me pondrían otros dos [de agua] en A, y éste [primero de agua en B] nada más tiene uno. {RP+} P=1

Yl,J15. =: En A por cada dos de concentrado le agregan una de agua, y en B es lo mismo. {RP=} P=1

Yl,L01. =: S.J. P=0.5

Yl,L02. B: Tiene tres limones y nada más dos jarritas. {CA+ & CC-} P=1

Yl,L03. B: Es un limón para cada taza, y en A son dos limones para tres. {RO+} P=1

Yl,L04. A: Si en B fuera una taza le tocaría limón y medio. {RP+} P=1

Yl,L11. A: Le corresponden dos limones, más la mitad. En B a esta taza le corresponden dos limones, a ésta estos dos y a ésta estos dos y este limón se distribuiría entre las tres. Y sería menos, porque en A sería la mitad para cada una, y en B se partiría en tres. {RP+} P=1

Yl,L12. =: En A a cada tres tazas le corresponden dos limones, y en B también. {RP=} P=1

Yl,L13. B: En A le corresponde un limón y medio a cada taza, en B le corresponde un limón a cada taza, más sobran dos limones. {RP+} P=1

Yl,L14. A: En A le corresponde uno a cada dos tazas, en B le corresponde uno, uno y uno para esta taza. {RP'} P=0

Yl,L15. =: Son dos limones para cada taza. {RP=} P=1

Yl,P01. =: S.J. P=0

Yl,P02. B: Nada más le sobraron dos cachos y aquí sobraron cuatro. {CC-} P=0.5

Yl,P03. B: En A son tres cachos, y en B son dos. {CC-} P=0.5

Yl,P04. =: ¿Se puede medir? Es la misma cantidad. Aunque los cachos quedaron separados, éste quedó junto pero tiene la misma medida. Mec. Aprox. P=0

Yl,P05. =: S.J. P=0.5

Yl,P06. B: Son los mismos. Están separados los cachos de pizza, pero los de A están más grandes. {CT+ * CC=} P=1

Yl,P07. B: S.J. P=0.5

Yl,P08. =: En A están todo el cacho corrido y en B están separados, pero es lo mismo. Mec. Aprox.P=0

Yl,P09. =: En A los cachos están separados, creo que sí es la misma cantidad. Mec. Aprox. P=0

Yl,P10. =: Tiene la misma cantidad. Mec. Aprox. P=0

Yl,R01. A: Está más amplio el espacio entre un color y otro. Mec: tamaño.

Yl,R02. B: Tengo más amarillo y nada más tengo un cachito de azul. {CA+ & CC-} P=1

Yl,R03. B: Tengo igual de azul e igual de amarillo, y aquí tengo más amarillo. {RO+} P=1

Yl,R04-1. A: Hay más espacio de color azul, aunque en B es lo mismo, pero en A está en un solo lado. Mec. Tamaño * RO=.0

Yl,R04-2. B: Tengo menos espacio aquí [dos sectores azules en B] que está junto; en A está todo corrido, pero si me llego a pasar de este espacio [ídem] tengo otra posibilidad de que vuelva a caer en el azul, porque aquí está otro espacio. MEC: dispersión. P=0

Yl,R05. B: En A está distribuido: tantito me paso de azul y caería en el amarillo. En B si estoy en el azul, pues hay más espacio todavía. Mec. tamaño. P=0

Yl,R06. B: Es igual que R04B, aquí tengo otra probabilidad. S/J. P=0.5

Yl,R07. B: S.J. P=0.5

Yl,R08-1. B: Tengo menos espacio entre los azules. Mec.Tam. P=0

Yl,R08-2. A: Como es más ancho el espacio éste de azul, es más probable que pueda caer en el azul, ya sea de este o este lado. Mec.Aprox. P=0

,R09. A: Nada más tengo en B un espacio muy pequeño de azul. En A es más pequeño pero tengo dos espacios de azul, pero uno lo tengo acá y otro acá. {CA+} P=0

Yl,R10. B: Es el mismo espacio amarillo en B y en A, nada más que no está junto en A y en B sí. Es la misma cantidad de azul A y B, nada más que en B está junta y en A está distribuida. MEC: tamaño * aproximación. P=0

Yl,V01. =: S.J. P=0.5

Yl,V02. B: Camina más espacio en menos tiempo. {CA+ & CC-} P=1

Yl,V03. B: Es el mismo espacio, pero en menos tiempo. {CC- * CA=} P=1

Yl,V04. A: Si le pusiera el mismo tiempo, que son dos, entonces en A caminaría el doble - (Cuatro cuadras) - Y en B está caminando nada más tres. {RP+} P=1

Yl,V05. =: El mismo espacio, el tiempo para este espacio en B, y en A son tres tiempos para tres espacios. {RP=} P=1

Yl,V11. A: Dos cuadras y media para un minuto en A, en B esta cuadra se dividiría en tres, porque quedarían dos cuadras para un minuto, como en A: dos para uno. Pero en B esta cuadra se está dividiendo en tres, y en A en dos. Entonces está más larga la cuadra en A. {RP+} P=1

Yl,V12. =: En B son dos para tres y en A son cuatro para seis. {RP=} P=1

Yl,V13-1. A: Es una cuadra y media para cada minuto, en B sería cuadra y menos de la mitad. {RP’¬RP+} P=0

Yl,V13-2. =: A caminó menos espacio en menos tiempo, y B más en más tiempo. {CA+ ⊥ CC-} P=0

Yl,V13-3. B: En A a cada minuto le corresponde una cuadra y media, y en B le corresponderían una cuadra y no sé cuánto más espacio pero más de media cuadra. {RP+} P=1