

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

**CONCEPTUALIZACIÓN DE LOS NIÑOS SOBRE EL VALOR POSICIONAL DEL
CERO EN LA RESTA**

TESIS

que para obtener el título de

Licenciadas en Psicología Educativa presentan:

MARÍA DE LOURDES MENDOZA SÁNCHEZ

JAQUELINE SANTANA SANDOVAL

Asesor: Mtro. Cuauhtémoc Gerardo Pérez López

MÉXICO, D. F.

JULIO DEL 2001

ÍNDICE	PÁGINA
RESUMEN -----	4
-	
INTRODUCCIÓN -----	5
-	
MARCO TEÓRICO	
OPERACIONES BÁSICAS ARITMÉTICAS	
Naturaleza conceptual y procedimental del algoritmo -----	6
Habilidades aritméticas y etapas en el aprendizaje de operaciones básicas -----	7
-	
Etapas en el aprendizaje de las operaciones-----	8
-	
Dificultades en operaciones aritméticas -----	11
-	
Estructura aditiva -----	12
-	
APRENDIZAJE DE LA RESTA	
Aprendizaje de la resta -----	12
-	
Resta con varios dígitos -----	14
-	
Estrategias para la resta -----	16
-	
VALOR POSICIONAL	
Numeración de valor posicional y las matemáticas -----	17

El valor de la posición ----- 18

-

El concepto del valor posicional en las niñas y niños ----- 18

-

El valor posicional: algunos problemas causados por la enseñanza
tradicional ----- 21

-

EL NÚMERO CERO

Consideraciones sobre el cero ----- 22

-

Dificultades con el número cero ----- 23

ÍNDICE PÁGINA

Valor posicional del cero ----- 25

-

TEORÍA GENERATIVA DE ERRORES (Bugs) ----- 27

**Ejemplos de procedimientos convencionales e informales que
utilizan los niños para resolver el algoritmo de la resta ----- 34**

OBJETIVO ----- 37

-

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA ----- 37

-

DELIMITACIÓN ----- 38

-

HIPÓTESIS ----- 38

-

METODOLOGÍA

Sujetos -----	38
-	
Diseño -----	39
-	
Instrumentos -----	39
-	
Materiales -----	42
--	
Piloteo -----	43
-	
Procedimiento -----	43
-	
RESULTADOS	45
Análisis Cuantitativo -----	46
-	
Análisis Cualitativo -----	52
-	
DISCUSIÓN DE RESULTADOS -----	67
-	
CONCLUSIONES -----	74
-	
REFERENCIAS -----	79
-	
ANEXOS -----	82
-	

RESUMEN

La presente investigación tuvo como objetivo diseñar y desarrollar un programa de intervención dirigido a apoyar el aprendizaje a niños de tercer grado de una escuela pública en la resolución de la resta cuando aparece el cero en el minuendo y el sustraendo como valor posicional.

La investigación se realizó con 34 niños en edades comprendidas de 7-9 años. A partir de la aplicación del pretest se formaron el grupo experimental y el grupo control de la siguiente manera: los niños que obtuvieron calificación menor que cinco formaron el grupo experimental (20 niños) y los niños que obtuvieron calificación mayor que seis formaron el grupo control (14 niños), con el grupo control se trabajó el programa de intervención del plano cartesiano y con el grupo experimental el programa para apoyar el aprendizaje en la resolución de la resta cuando el cero aparece con un valor posicional.

Los resultados arrojados muestran que al término del programa los niños del grupo experimental lograron tener un avance significativo en cuanto a la resolución de la resta cuando el cero se presenta con un valor posicional, logrando un nivel de aprendizaje similar al del grupo control.

Por lo que se concluye que el cero según su posición es un contenido base para aprendizajes posteriores y convencionales, como es la resolución de la resta cuando el cero se presenta con un valor posicional en dicha operación.

INTRODUCCIÓN

En nuestra cultura un elemento básico de las matemáticas son las operaciones básicas de resta y suma, pues constituyen un sistema de signos y reglas convencionales, enseñados particularmente por la escuela.

Reconocer que el niño al resolver la operación matemática de la resta tiene que realizar la actividad de contar, saber que el resultado de contar representa objetos contados y conocer las propiedades de combinar igualar y comparar, así como utilizar y manejar el valor posicional, los conjuntos y agrupaciones (unidades, decenas, centenas) causa dificultad en el sujeto para poder resolver la resta, más dificultad tendrá cuando el cero se presenta con un valor posicional en dicha operación, pues su representación es la de un conjunto vacío al que no se le puede quitar ni añadir nada. Todo ello trae como consecuencia que para los sujetos el cero puede aparecer y desaparecer mágicamente pues el cero no vale. Esto trae consecuencias negativas pues al momento de que al sujeto se le enfrente con la operación de la resta y más aún cuando el cero tiene un valor posicional en dicha operación, los sujetos tendrán procedimientos erróneos y como consecuencia un resultado incorrecto.

A partir de la información anterior es claro que existe una dificultad, por eso es importante trabajar más ese contenido, ya que pocas investigaciones trabajan en esta problemática por lo que se considera que la investigación realizada es de suma importancia pues en ella se muestra un tratamiento psicopedagógico que ayudará al sujeto de tercer año de primaria a resolver las restas cuando se presenta el cero con un valor posicional.

El primer apartado presentará el marco de referencia en la que se inscribe el presente trabajo, el segundo apartado presentará las consideraciones metodológicas, el tercer apartado presentará el análisis de resultados cuantitativos y cualitativos, el cuarto apartado presentará la discusión, conclusiones, referencias y anexos.

CONCEPTUALIZACIÓN DE LOS NIÑOS SOBRE EL VALOR POSICIONAL DEL CERO EN LA RESTA

Dentro del aprendizaje de las matemáticas existe una gran variedad de contenidos de aprendizajes entre ellas las operaciones básicas suma, resta, división y multiplicación. Debido a la tarea a la que se enfrentan algunos niños al resolver cualquier algoritmo, es necesario hablar del concepto y procedimiento del algoritmo, así como de las habilidades aritméticas básicas y las etapas que se requieren para el aprendizaje de cualquier operación básica. Dichos aspectos serán abordados a continuación.

NATURALEZA CONCEPTUAL Y PROCEDIMENTAL DEL ALGORITMO

Según Maza (1989) el algoritmo presenta una doble naturaleza; la primera procedimiento y, la segunda como concepto ligada a un desarrollo previo del esquema parte/todo y de la utilización de la base de numeración decimal.

Este conocimiento conceptual se diferencia del procedimental, pues el procedimental se caracteriza por una ampliación del número de etapas secuencializadas, el conocimiento conceptual se caracteriza por una ampliación y profundización de las relaciones en juego entre los conceptos subyacentes al algoritmo.

Carpenter, (1986) formuló tres modelos diferentes sobre la relación entre ambos conocimientos:

El primero. Menciona que el conocimiento procedimental se deriva del desarrollo conceptual, lo cual para este modelo la solución para un problema algorítmico se da a través de la representación de las acciones implícitas en el problema y posteriormente, diseña el esquema de las acciones a efectuar, esto con el fin de llegar a la solución del algoritmo.

Por lo cual la resolución correcta del algoritmo escrito no indica un desarrollo conceptual previo. Pues el niño puede ser capaz de resolver un problema algorítmico no teniendo aún un dominio del esquema parte/todo lo cual descarta que el conocimiento conceptual sea condición suficiente que pueda impulsar tal construcción.

El segundo. En este modelo se descarta al conocimiento conceptual como condición necesaria para el aprendizaje procedimental pues las construcciones algorítmicas más avanzadas no se basan solamente en el desarrollo conceptual, sino exige una demanda cognitiva que pueda impulsar tal construcción.

El tercero. Este modelo menciona que el aprendizaje del algoritmo depende del desarrollo de las relaciones entre los aspectos conceptual y procedimental, dicha relación es de interdependencia, esto es entender al algoritmo a través de un solo aspecto del mismo.

HABILIDADES ARITMÉTICAS Y ETAPAS EN EL APRENDIZAJE DE OPERACIONES BÁSICAS

Habilidades aritméticas

Contar es una habilidad básica que conlleva una serie de habilidades, según Dockrell y McShane (1992), para ejecutar correctamente la habilidad de contar el niño requiere aspectos como es el conocer la secuencia numérica, relacionar uno a uno los nombres de los números y los objetos a contar y, por último el niño debe saber que el resultado de contar representa el número de objetos contados.

Algunas investigaciones de los autores antes mencionados ponen de manifiesto que el niño inicialmente tiene dificultades en los dos últimos aspectos como es el apareamiento uno a uno y el diferenciar los objetos que ya han sido contados de aquellos que todavía serán contados.

Como se mencionó anteriormente, contar es la habilidad básica en la adquisición inicial de la aritmética, en consecuencia una habilidad pobre para contar está detrás de una serie de dificultades infantiles con el concepto de número.

ETAPAS EN EL APRENDIZAJE DE LAS OPERACIONES.

En el proceso de aprendizaje de las operaciones, Castro, Rico y Castro, (1995), distinguen varias etapas por las cuales tiene que pasar el niño para resolver la operación, éstas son:

Las acciones. Son aquellas que se realizan en los distintos contextos numéricos, incluso aquellos que presentan rasgos comunes y que darán lugar a un concepto operatorio.

Uso de modelos. Es abstraer las diferentes acciones y transformaciones que ocurren en los contextos numéricos y aparecen en los diferentes esquemas, así cada operación tiene su propio modelo que pone de manifiesto los contextos generales del número y la peculiaridad de cada operación.

Simbolización. La utilización de los modelos da paso a un nivel más alto de abstracción en el nivel operatorio y es la expresión simbólica de la operación.

Hechos numéricos. El hecho numérico es conocer dos números y la relación entre ellos y es necesario hallar un tercero realizando la operación. Ejemplo: 3 más 2, el hecho numérico es conocer el resultado el cual será 5.

Algoritmos. Es aquella en que el conocimiento de los hechos numéricos, unas pocas destrezas y reglas básicas permiten calcular el resultado de la operación con dos números cualesquiera, pero la operación es compleja debido a la magnitud de los números, esto es debido a las propiedades que caracterizan a los algoritmos las cuales son: **nitidez**, esta propiedad es la realización del algoritmo para que se transforme en un proceso mecánico; **eficacia**, es el camino para llegar a los resultados esperados mediante pasos suficientemente simples; **universalidad**, es cuando el mismo algoritmo se aplica a todas las situaciones de una misma clase.

Hablar de las etapas en el aprendizaje de las operaciones es mencionar también aquellas que ayudan a la enseñanza de las operaciones. Al respecto Maza (1989) menciona las siguientes etapas:

Acciones. La acción internalizada es una operación básica, por la cual es necesario que ante una sencilla situación problemática que surge en el aula, se

debe dar libertad a los niños para que resuelvan la operación a partir de sus propias estrategias.

Acciones y Lenguaje. En las operaciones existe una relación entre las acciones efectuadas y el lenguaje que las describe. Algunas de esas acciones pueden nombrarse de formas distintas quitar, retirar, restar y separar. Por ello la relación acción – lenguaje no debe aparecer de forma desconectada, sino que reúnan en la misma expresión la conexión con la acción correspondiente y no alcancen un valor propio, ajeno al de esta acción

Conducta del Relato. Al tener los lazos de dependencia lenguaje-acción, el niño debe ser interrogado sobre las acciones realizadas, y con ello las acciones efectuadas se trasladan de lo externo a lo interno.

Expresión Gráfica. Las acciones de material no figurativo son representadas gráficamente, a partir de los distintos modelos gráficos para la operación.

Expresión Simbólica. En esta fase la secuencia de los dos primeros números representada gráficamente en la base anterior viene a traducirse por el signo + o por -. De igual forma la relación establecida entre los dos primeros y el resultado final se representa por el signo =.

En este punto se pretende que el niño descubra una estructura común a todas las situaciones presentadas, la formalice y, luego, la aplique a la realidad.

Desarrollo de Estrategias. En este proceso el niño llega a enmarcar los llamados hechos numéricos, es decir la relación existente entre pares de números, dos de los cuales se suman o restan y estos no sobrepasan el nueve. Tanto los hechos numéricos, como el algoritmo, han sido el objetivo primordial del aprendizaje de la aritmética.

Aplicación Algorítmica. Es una técnica adecuada que presupone alguna destreza más, además de las ya comentadas, como es el caso del dominio de los sistemas de numeración. Los errores que surgen en la aplicación algorítmica serán manifestaciones tanto de insuficiencia en estas destrezas previas como la relación establecida por ellas.

Por lo cual el desarrollo conceptual como el procedimental se consideran necesarios para el aprendizaje del algoritmo. Dichos desarrollos deben ser interdependientes de manera que si el conceptual ayuda en una fase determinada al procedimiento, éste a su vez promueve nuevos desarrollos conceptuales; en este sentido Maza, (1989) menciona algunas etapas que conforman una metodología de enseñanza-aprendizaje de la resta.

ETAPA 1. Consiste en resolver las restas que no necesariamente pidan prestado. Ejemplo: la resta $36-23$. En este sentido el niño debe comprender que a las seis unidades y a las tres decenas a esta cantidad hay que quitarle 23, es decir, tres unidades y dos decenas.

ETAPA 2. Es crucial para ambas operaciones suma y resta, porque en ellas se plantea el principal problema del algoritmo: el del reagrupamiento para la suma o el de tomar prestado para la resta. Ésta es la primera decisión que ha de tomarse en los procedimientos característicos de estos algoritmos y la que está en la base de la mayoría de los errores existentes. Un ejemplo de esta etapa puede ser $32-17$. Aquí 3 decenas y 2 unidades se le puede quitar una decena pero ¿cómo quitar 7 unidades?. Esto se soluciona a través de descomponer una decena en 10 unidades. Con mayor rigor, observar la equivalencia entre dos expresiones del número 32; como $30 + 2$ y como $20 + 12$.

ETAPA 3. Se caracteriza por el tratamiento procedimental del algoritmo escrito de manera que los cambios que permitiesen el reagrupamiento y el tomar prestado se realizasen sistemáticamente. En ellas podría ya tratarse otra de las principales causas de error en la ejecución del algoritmo: las restas que presentan un cero en las decenas del minuendo, es adquirir la capacidad de tomar prestado de la unidad y la destreza de tomar prestado de las centenas del minuendo.

Desde el punto de vista conceptual es clave que el niño haya adquirido a través de su acción sobre la base diez la exacta relación entre unidades, decenas y centenas. De esta manera se dará cuenta de que una centena es equivalente a 10 decenas y no a 10 unidades.

ETAPA 4. Esta etapa se basa en dos propiedades la primera es una propiedad referente a la operación de resta que afirma que el resultado de esta operación no varía al sumarle la misma cantidad al minuendo y al sustraendo. La segunda es una propiedad básica referente al sistema de numeración decimal que defiende la equivalencia entre 10 unidades al minuendo y una decena al sustraendo.

Este procedimiento es limitado en los casos en que las cifras del minuendo no superen, durante su transcurso, la decena.

DIFICULTADES EN OPERACIONES ARITMÉTICAS.

Las dificultades que se encuentran en las operaciones básicas de contar, sumar y restar los niños se encuentran con dificultades tanto cognitivas como motivacionales en el dominio de las habilidades básicas, estas dificultades se presentan debido a la aversión que tienen los niños al trabajar con los números a causa de su fracaso con los mismos.

Esto se ha demostrado en muchas investigaciones y ha dado como resultado un mal dominio en el procedimiento para realizar una operación aritmética. Al respecto Dockrell y McShane, (1992) mencionan que el mal dominio en el procedimiento tiene que ver con la manipulación de los símbolos numéricos y con dificultades para relacionar los procedimientos aritméticos con los problemas de la vida real y viceversa, así el niño puede razonar acerca de cantidades de la vida real pero incapaz de hacer el mismo cálculo en una versión formal del problema. Estas dificultades se hacen evidentes en el aula cuando el niño da respuestas incorrectas a los problemas aritméticos.

ESTRUCTURA ADITIVA.

Dentro de la estructura aditiva, las representaciones más sencillas son la suma y la resta, su concepto y desarrollo de esta estructura aditiva ocupa un extenso período, ya que ha de cubrir la transición desde los recuentos informales y las estrategias propias que los niños manejan en su instrucción, hasta el uso de datos numéricos memorizados y los algoritmos formales de adición y sustracción.

Según Castro, Rico y Castro, (1995) algunas de las dificultades posteriores en matemáticas tienen su origen en la deficiente instrucción inicial de la suma y la resta. Los conceptos de suma y resta suponen conocimientos numéricos básicos que empiezan a la edad de 6 años. Muy pronto, los niños entienden que la secuencia numérica es útil para realizar operaciones aritméticas desde la más sencilla hasta la más compleja.

APRENDIZAJE DE LA RESTA

Dentro de las operaciones básicas existe la operación de resta, debido a la tarea a la que se enfrentan algunos niños para llegar a resolver dicha operación es necesario hablar del aprendizaje de la resta, así como cuando la resta presenta varios dígitos y finalmente las estrategias para dicha operación.

Aprender a restar es integrar dentro de una misma estructura conceptual acciones de la vida cotidiana como es el de quitar, retirar, desagregar, eliminar, otros y así llegar a aplicar las propiedades características de estas estructuras conceptuales a situaciones problemáticas en la resta.

A través de estas características diferentes pero complementarias, las operaciones pueden ser entendidas como objetos de conocimiento y por otro lado son consideradas como instrumentos de transformación de la realidad a través de la resolución de situaciones problemáticas.

Al respecto Bollás, (1997) menciona que las operaciones de resta y suma abarcan un sistema de signos y reglas convencionales que son transmitidos antes de que el niño entre a la escuela. Estas operaciones son enseñadas por la escuela, por lo que el

niño no inventa estos conocimientos por sí solo de manera espontánea. Lo que sucede es que el niño asimila los procedimientos convencionales a su propia lógica de pensamiento.

Por lo cual el objetivo de la resta debe consistir en incitar al niño a pensar y a recordar los resultados de su propio pensamiento y no en enseñar a los niños técnicas específicas para la producción de respuestas escritas.

Al respecto, Maza (1989) menciona que existen recursos diferentes para poder realizar la resta cuando la cifra del minuendo sea menor que la del sustraendo.

El primer recurso es **tomar prestado** el cual consiste en transformar una unidad del orden inmediatamente superior en 10 unidades del orden en el que hay que realizar la resta dentro del minuendo.

Ejemplo:

$$\begin{array}{r} 32 \\ -18 \\ \hline 14 \end{array}$$

El segundo recurso es el **de llevar** no cambia de lugar lo que ya hay en el minuendo, sino que añade una cantidad equivalente en el minuendo (10 unidades de un orden determinado) y en el sustraendo (1 unidad del orden inmediatamente superior). Así la resta antes mencionada se realizaría de la siguiente manera: en las unidades de 8 a 12 van 4, me llevo 1 que se añade a las decenas del sustraendo. En las decenas de 2 a 3 va 1.

Resta con varios dígitos.

La base sobre la que se apoya la resta de varios dígitos es la habilidad para recuperar los datos numéricos básicos. La habilidad más común es que la unidad se pueda mover de una columna a otra tanto en la resta como en la suma.

Los procedimientos para la resta que presenta varios dígitos son más complicados que los procedimientos para la suma, debido a que introducen la noción de “tomar” y especialmente cuando lo hacen al cero.

Los niños a menudo experimentan dificultades en la solución de problemas en la operación básica de resta. Al respecto, Hughes (1987) menciona que los tipos de dificultades que surgen en la resta pueden resolverse apelando a distintos métodos.

El primero es llamado “**suma igual**”; el problema se soluciona sumando diez a ambos números. El 10, añadido al número que aparece en el minuendo se coloca en forma de pequeño “**uno**” a la izquierda del 3. Esto convierte a dicho número en “noventa-trece” y ahora sí puede restarse 7 de 13.

Para que los niños utilicen este método se les enseña que se le ha pedido prestado 10 y que después hay que devolverlo. Se hace colocando otro pequeño 1 al lado del 4 que aparece en el sustraendo, para mostrar que ahora éste debe leerse como si fuese 57. La operación se concluye restando 5 de 9.

$$\begin{array}{r} 1 \\ 93 \\ 1 \\ - 47 \\ \hline 46 \end{array}$$

El segundo método es el de “**descomposición**”. El minuendo 93, se descompone en 80 y 13. Como antes, se coloca un pequeño uno al lado del 3, pero en este caso se compensa dicho proceso convirtiendo el 9 en 8. Ahora la operación se soluciona restando 7 de 13 y restando 4 de 8 (Hughes, 1987).

$$\begin{array}{r} 1 \\ 93 \\ - 47 \\ \hline \end{array}$$

Aunque ambos métodos poseen ventajas e inconvenientes para que el niño llegue a resolver correctamente la resta.

En la práctica los niños no consideran especialmente fácil ninguno de los métodos. Debido a que ambos métodos requieren una comprensión adecuada a la difícil noción de valor posicional (Hughes, 1987).

Sin embargo, la mayoría de los profesores consideran que los errores cometidos por el niño en la resta son fortuitos; debido a la falta de atención o la falta del dominio del proceso de resta, sin embargo, estos errores no pueden ser fortuitos, sino sistemáticos. Al respecto Brown, Burton y VanLehn (citados por Bruer, 1993) teorizaron sobre cómo los niños generan procedimientos con fallos.

Estos son:

Fallo (1) Más-pequeño-de-más-grande. En este fallo el niño observa que el primer número de una columna es más pequeño que el segundo número, pero no comprende cómo llevarse una cantidad; por lo cual el niño utiliza la regla de **cambiar números**, ésta permite al niño restar el número pequeño del más grande. El resultado parece correcto, pero genera respuestas erróneas, ya que el niño considera a cada columna como una resta aislada de un dígito.

Fallo (2) Llevarse de cero. En este fallo el niño comprende que cuando se lleva una cantidad de 0, el 0 se convierte en 9, pero no entiende de dónde sale ese 9.

Fallo (3) Llevarse a través de cero. En este caso el niño no se preocupa de cambiar el cero por nueve cuando se lleva una cantidad, pero hace todo el resto. Su reparación poco tiene que ver con lo que significan los números y los símbolos aritméticos. Por tal motivo para que el niño tenga una comprensión de la matemática debe dejar de memorizar cifras o usar procedimientos algorítmicos para obtener respuestas correctas. Ya que es más que la adquisición de habilidades aplicadas con corrección.

Estos errores no llegan de la nada sino que con frecuencia son aplicaciones incorrectas de procedimientos que el niño ya conoce. Un aspecto complementario es que esos errores muestran que los niños tratan esos procedimientos como operaciones mecánicas con símbolos, sin poner atención a las cantidades que esos símbolos representan.

Estrategias para la resta.

Castro, Rico y Castro (1995) mencionan algunas estrategias para resolver las restas, las cuales son:

Modelos directos. Con objetos se construye una colección de objetos que represente al minuendo y de ésta se van quitando objetos. Esto se puede realizar de varias formas: a) **quitando hasta**, es cuando al minuendo se le van quitando elementos, hasta que el sustraendo quede, el recuento de lo que se ha quitado dará el resto; b) **emparejamiento**, los conjuntos formados se tratan de emparejar.

Recuento. Sin utilizar objetos físicos, se pueden considerar varias: a) **contar hacia atrás desde** el minuendo tantas veces como indica el sustraendo, el número anterior al último contando es la diferencia; b) **contar hacia atrás hasta**, contar hacia atrás desde el minuendo hasta alcanzar el sustraendo, el número de pasos dados es el resto; c) **contar hacia delante desde**, se cuenta desde el sustraendo hasta el minuendo, el número de pasos dados es la diferencia.

Datos numéricos recordados. Utilización de algún hecho numérico que conozcan.

Estas estrategias se enseñan y se aprenden en la escuela, pero por lo general es una mecanización, ya que es la práctica del algoritmo escrito. El niño las elabora para resolver los problemas que encuentra en su medio y a veces las mantiene por encima de su aprendizaje escolar.

El hecho numérico es una estrategia para la operación de resta sin embargo, no se analizará profundamente pues la línea de investigación va más orientada al algoritmo escrito de la resta.

NUMERACIÓN DE VALOR POSICIONAL Y LAS MATEMÁTICAS

En la cultura de nuestros días se ha podido construir un sistema matemático que ayuda a los sujetos a relacionarse con el mundo en el que pueda intervenir, organizar e interpretar. Por otro lado, un elemento importante de las matemáticas en nuestra cultura es el sistema de numeración decimal en donde, al guiarse por algunas reglas aparentemente sencillas, éstas permiten la representación de cualquier cantidad y diversidad de cálculos. Sin embargo esta sencillez no es única, se forma sobre elementos matemáticos difíciles que, por la costumbre de trabajar con ellos, no siempre se aprecian. Al respecto Ross (citado por Cortina, 1997) menciona cuatro propiedades:

- 1) **Propiedad posicional**, la cantidad representada por un número particularmente, está determinada por su figura y la posición de la cifra.
- 2) **Propiedad de base diez**, los valores de la posición se aumentan de derecha a izquierda en potencias de diez.
- 3) **Propiedad multiplicativa**, un número se multiplica por el valor que se le asigna de acuerdo a su posición.
- 4) **Propiedad aditiva**, la cantidad presentada por toda la cifra es la suma de sus valores representados en cada uno de los números.

Así, el autor reconoce que para saber la importancia del número debe saberse que el valor de cada grafía estará compuesto no sólo por su valor absoluto, sino por el lugar que ocupa.

El valor posicional

Al hablar del sistema de numeración decimal, necesariamente el concepto del valor posicional es un contenido primordial para que el niño no tenga dificultad cuando se le presente una operación aritmética como es la resta o cualquier operación básica.

Por valor de la posición se entiende que en el número 333, por ejemplo, el tres de la izquierda quiere decir trescientos (o tres centenas), en el segundo tres de medio significa treinta (o tres decenas) y el tercer tres quiere decir tres (o tres unidades). La utilización del valor posicional es importante, porque los niños que no lo entiendan se verán seriamente incapacitados para restar, sumar, multiplicar y dividir cantidades (Kamii, 1993).

Esta autora menciona que el valor de la posición hay que enseñarse a partir del tercer año, ya que los niños deben de haber construido con solidez las series de números y que puedan dividir totalidades de muy diversas maneras (relaciones parte-todo).

El concepto del valor posicional en las niñas y niños

El concepto de valor posicional ha sido un tema de gran relevancia, por lo que se ha considerado un asunto primordial en el desarrollo del conocimiento aritmético de niñas y niños.

Es importante entender el concepto de valor posicional como algo que la niña y el niño construye a través de su actividad intelectual. Para que las niñas y niños entiendan la numeración posicional, requieren coordinar conocimiento de la numeración con concepto de número, ya que se considera que el conocimiento del sistema numérico es "información cultural" que se le debe transmitir a la niña y niño para que sea aceptada por el grupo social, por lo cual la autora considera que para comprender la numeración posicional, es necesario ajustar las estructuras conceptuales que cada sujeto construye (creadas sólo por él), los usos y conjuntos numéricos que funcionan en su grupo social (proporcionados por otros).

En esta habilidad para la mayor parte de los niños el número es tomado como una línea de dígitos. Palabras como centenas, decenas y unidades no se toman por completo son asociadas con una fragmentación, un orden escrito, por lo que se concluye que pocos niños dan una interpretación real a la posición de los dígitos en términos de conjunto.

En este aspecto Lerner y Sadovsky (citados por Cortina, 1997) descubrieron que las niñas y niños operan con distintos criterios que iban evolucionando a lo largo del desarrollo, **1)** juzgan a las cifras por el valor absoluto que representaban los números que los formaban; **2)** juzgan a los números por la cantidad de dígitos que eran (estos dos puntos pueden trabajar uno u otro, según el número de los que se trate, sí la diferencia entre dos valores absolutos era poca y el número les era familiar podían utilizar el otro criterio); **3)** juzgar las cifras con una misma cantidad de números (al parecer las niñas y niños podían cambiar de criterio o no utilizar alguno cuando se les incrementaba el número de dígitos de las cifras).

Según Cortina, (1997) menciona que hay niveles para el desarrollo del concepto del valor posicional los cuales son:

- 1) **Numeral completo**, es cuando el niño ve a los números en grupo representando una cantidad, pero no le da significado a los números cuando se encuentran por separado.
- 2) **Propiedad posicional**, es cuando el número de la derecha esta en el lugar de las unidades y el de la izquierda en las decenas, pero esto solamente se limita al nombre y no se enlaza con la cantidad.
- 3) **Valor aparente**, es cuando se les da a los números el valor que representa sin ver la posición en que se encuentren, considerando a un número como elemento diferente.
- 4) **Zona de construcción**, es cuando saben que el número que está a la izquierda representa un conjunto de diez objetos y el de la derecha los sobrantes.

Las niñas y niños que se encuentran en este nivel están ubicados entre el valor aparente y la comprensión, pues la comprensión es cuando dan un valor a los números de manera firme y confiable.

Asimismo, el concepto de valor posicional se desarrolla durante un período de varios años y que por lo general, no se adquiere, sino hasta los ocho o diez años de edad.

Por eso es importante señalar que dentro de este concepto de valor posicional hay habilidades, las cuales son partir, contar, agrupar y relacionar; estas habilidades evolucionan paralelamente en la comprensión del sistema, sin embargo, guardan su estado en los siguientes niveles de desarrollo:

1) **Previo al valor posicional**, las niñas y niños primero deben ser hábiles para trabajar las unidades simples.

2) **Inicio del valor posicional**, la niña y el niño utilizan el diez ya como unidad compuesta en vez de usar unidades simples.

3) **Desarrollando el valor posicional**, el niño y la niña utilizan números de dos dígitos y conceptualiza a la decena como unidades compuestas que se pueden descomponer en unidades sencillas.

4) **Valor posicional esencial**, el niño y la niña ya deben dominar las cifras de tres dígitos, ya que a la vez deben ser capaces de trabajar con cifras de cuatro números o más.

Todos los niveles anteriores trabajan con unidades simples (conteo, agrupamiento, participación, relación de números).

Finalmente, el valor posicional es un concepto importante en el desarrollo del pensamiento matemático, su comprensión y manejo requiere un difícil proceso, que implica una diversidad de habilidades las cuales contienen reglas para el sistema de numeración escrita.

El valor posicional: algunos problemas causados por la enseñanza tradicional

Esta secuencia es enseñar los números del uno al nueve, presentarlos como las grafías que corresponden al número de conjuntos o colecciones; después se muestra al diez en la misma forma para mostrarlo como una decena, como un conjunto de diez elementos. Se siguen explicando los números de dos cifras como compuestos de **decenas** y **unidades**, ya sea mostrando todas las decenas hasta cien y

posteriormente las combinaciones con unidades (Ej. 10, 20, 30 y luego 21, 24, 27) o "la decena" y su combinación con unidades, de una en una (Ej. 20, 21, 22, 23... 30).

Kamii, (1993) señala que esta forma de construir el valor posicional se basa en la idea de que una **decena** es un **hecho numérico** de un grupo de diez cantidades; algo que **existe** en el grupo y que puede ser aprendido a través de realizar abstracciones de lo observado.

En este sentido, la enseñanza tradicional concibe erróneamente el concepto de valor posicional al pensar que su adquisición consiste en la posibilidad de presentar cantidades agrupadas en colecciones uniformes y elementos sueltos (centenas, decenas y unidades) y así, pasar por alto el largo proceso en el que la niña o niño debe construir *estructuras conceptuales multiunitarias*.

Estas estructuras son necesarias para comprender el valor posicional, haberlas adquirido ayuda a ser capaz de conceptualizar y operar al mismo tiempo con diversos tipos de unidades (conceptualizar el número 300 como tres unidades que agrupan centenas, treinta unidades que agrupan decenas y trescientas unidades sueltas)

Al parecer, este nivel de conceptualización numérica requiere un difícil proceso de construcción. Desafortunadamente este proceso no es tomado en cuenta en la educación tradicional. En vez de eso, parece ser que en su prisa porque los alumnos operen con los sistemas tradicionales de cálculo, en la educación se asume precipitadamente la adquisición del concepto y manda a los alumnos a trabajar con reglas de algoritmos mucho antes de que sean comprendidos. Esto tiende a desarrollar conocimientos errados sin favorecer el proceso de construcción de estructuras conceptuales más elaboradas y significativas.

CONSIDERACIONES SOBRE EL CERO

Las dificultades que tienen los niños para resolver las restas se debe, básicamente a que no tienen el concepto del valor posicional de los números bien manejados y el problema se agudiza cuando este se presenta en la resta y más profundo se

hace cuando esta dentro de esta operación el número cero, ya que adquiere diversos valores de acuerdo al lugar que ocupe dentro de la resta, por eso es importante mencionar en este apartado el papel del número cero en la resta.

El cero fue la última cifra que se incorporó al sistema de numeración decimal. Durante mucho tiempo se pensó que los números expresaban la esencia de lo existente, por ello lo que no es no puede ser expresado. Por ello el cero no tenía ninguna razón que impulsara su aparición. Esto da idea de la dificultad, de tipo lógico que su aprendizaje representa para el niño. Otro motivo que representa dicha dificultad es que no tiene significado en la mayoría de los contextos numéricos como es en la secuencia numérica, pues no suele comenzar por el cero; en el recuento, lo usual es empezar a contar desde uno; otro es el contexto cardinal, pues es el único que lo contempla como cardinal del conjunto vacío; finalmente, en el contexto de medida es donde no se tiene sentido hablar de una medida cero.

Sin embargo, hay un contexto en donde el cero sí tiene significancia, la calificación cero donde indica su falta de valor.

Estas consideraciones deben tenerse en consideración para la enseñanza del cero para que el contexto cardinal y la ausencia de objetos pueda facilitar su introducción e incorporación al resto de los números (Castro, Rico y Castro, 1995).

Dificultades con el número cero.

Aranda, Miranda, Soto, Soto y Zamilpa (1998) mencionan que la adquisición de los conceptos matemáticos por parte del hombre constituye un proceso que da inicio desde muy temprana edad y avanza progresivamente.

La escuela suele plantear la necesidad de la enseñanza de las matemáticas como un medio para que el niño ejercite el razonamiento, proporcionándole a la vez instrumentos que le permitan resolver ciertos problemas como es el manejo del cero cuando se presenta en la resta.

Por lo tanto, los autores antes mencionados proponen que desde el primer año se aborde la función del cero según su posición, para que cuando el alumno llegue a grados superiores, haya conceptualizado correctamente y logre la convencionalidad en la escritura y lectura de cantidades, ya que habitualmente no se tiene suficiente conciencia de que la conceptualización del cero representa una seria dificultad para los niños, sobre todo cuando éstos se han venido creando con ideas contradictorias acerca de él, sin relacionarlo con el valor posicional y el agrupamiento.

Todo ello trae como consecuencia que para los niños el cero puede **aparecer** y **desaparecer** mágicamente, se le puede convertir en diez o simplemente, cuando les causa algún conflicto, lo eliminan porque **el cero no vale**.

La dificultad que representa para los niños el uso del cero se ve con mayor claridad cuando aparece en una operación. Por ejemplo, en una suma del tipo $502+130$ simplemente **se bajan** los números diferentes de cero donde éste aparece.

En una resta de **pedir prestado** se le convierte en diez, agregándole un **UNO** que no sabe de donde viene o al igual que en la suma, se baja el número diferente a cero, sin quedar muy claro si esto es cuando dicho número está en el minuendo o en el sustraendo.

No es fácil para los niños llegar a entender por qué multiplicar un número por cero da cero y tanto hacen esto como poner, como resultado el número por el cual se multiplicó el cero; es decir, para los niños, muchas veces las dificultades que tienen con el cero se origina en la contradicción que, desde el punto de vista de la lógica infantil, implica en tener que poner **algo** un signo para indicar que no hay nada: **si no hay nada, ¿para qué lo pongo?** Así el paralelismo existente entre las representaciones infantiles y las culturas de la antigüedad en donde parece no aplicarse al cero. El símbolo cero apareció relativamente tarde en la evolución de los sistemas numéricos, y aún dentro de la cultura occidental este concepto tiene fama de ser difícil de captar.

El uso del cero dentro de un sistema que adopte valores posicionales es mucho más espinoso. En los sistemas de este tipo la cantidad representada por un símbolo en particular depende de la posición que ocupe el símbolo dentro de una serie.

Así, el símbolo 9 equivale a nueve en el número 59, pero equivale a noventa en el número 95. Esta noción de valor posicional de enorme utilidad, significa que cualquier número por grande que sea puede ser representado por una cantidad relativamente pequeña de cifras. Sin embargo, todo sistema basado en el valor posicional se enfrenta con un problema: cómo manejar un número como trescientos cuatro cuando la columna de las decenas esta vacía (Hughes, 1987).

Una de las razones de la tardía aparición del cero fue que sólo dentro de un sistema con valor posicional podía surgir una clara necesidad al respecto. Sin embargo, la utilización del cero en un sistema de este tipo provoca ciertas dificultades, pues el sistema indio–arábigo fue un proceso lento porque el cero planteaba problemas de comprensión, ya que a las personas les costaba entender cómo un símbolo que no representaba nada, colocado al lado de una cifra multiplicaba repentinamente por 10 el valor de dicha cifra. Es probable que las dificultades hayan sido causadas por una errónea interpretación del valor del cero dentro de un sistema de valor posicional, y no porque el cero sea un símbolo que no representa nada.

VALOR POSICIONAL DEL CERO

Hughes (1987), señala que la ausencia de cantidad o **cero** constituye un problema de representación en los niños. Esto se corroboró en su investigación sobre cómo representan los niños las cantidades. Él realizó un estudio con 25 niños a los que les presentó latas con algunos cubos en su interior pidiéndoles en una hoja de papel lo que veían dentro de cada una de ellas. De acuerdo con las respuestas que dieron los niños sobre la representación de las diversas cantidades, hizo una clasificación de cuatro tipos de producción gráfica.

Idiosincráticas. En la representación que hacen los niños, no hay relación cualitativa ni cuantitativa sobre el modelo que se presentó.

Pictográfica. El niño hace una relación cualitativa, toma la forma, color o posición de los modelos.

Icónicas. Se da una relación cuantitativa, expresa la cantidad utilizando símbolos.

Simbólica. Utilizaron signos convencionales.

En esta investigación los niños utilizaron respuestas simbólicas, escribieron en el papel el signo llamado cero para representar la ausencia de cantidad, otro punto importante en esta investigación es el valor posicional de los numerales, resaltando al cero porque en un sistema posicional adquiere diversos valores que para el niño son difíciles de comprender.

Nemirovsky y Carbajal (1988) recopilan varias investigaciones con respecto al cero destacando algunos planteamientos:

- ◆ La concepción que los niños tienen del cero como grafía aislada, se encontró que hay la misma dificultad para representar el cero y cualquier otro número.
- ◆ Expresan el cero utilizando numeral o símbolos, para transmitir la ausencia de cantidad.
- ◆ Hay dificultad cuando el cero está dentro de un sistema jugando un valor posicional, ya que tiene la función de modificar el valor de los demás números que lo acompañan.

Los casos en los que el cero modifica el valor a varios numerales son:

- ◆ Cuando el cero está en el último lugar de una cifra (370) cambia el valor de las cifras que anteceden.
- ◆ Si el cero se encuentra en el medio de una cifra (803) modifica el valor del número que se encuentra a la izquierda pero no el de la derecha.
- ◆ El cero cuando se encuentra al principio de una cifra no realiza ninguna función por lo que se anula.

Kamii (1992) trata de encontrar si los niños identifican el valor posicional de cada una de las cifras. Ejemplo: en un conjunto de trece canicas en dónde se encuentra el número tres y en dónde el uno. De esta investigación el autor plantea cinco niveles por los que el niño pasa para asimilar el valor posicional, estos son:

I. En este nivel los niños no entienden las separaciones de los objetos con las grafías que utilizan para representar el numeral.

II. En este nivel el niño trata de relacionar la cantidad con el símbolo gráfico que utiliza.

III. En este nivel el niño representa la cantidad de objetos pero solo cuando no rebase lo de una cifra, pues con cantidades de dos cifras al niño le causa confusión porque no comprende que al separar los números cada uno conserva su valor posicional.

IV. En este nivel el niño no encuentra la relación que hay entre el número y las partes en que se pueda deshacer.

V. En este nivel el niño conceptualiza el valor posicional de una cantidad que contiene dos cifras, a través de tres pasos.

a) **Ubicación posicional.** El cero representa dos valores el absoluto y el relativo, donde el primero representa la ausencia de cantidad y el segundo relaciona las unidades, decenas y centenas.

b) **Notación desarrollada.** Es la desintegración de una cantidad en forma de adición, se da el valor de acuerdo a la posición de los números que forman la cifra.

c) **Multipliación.** Es el nivel más alto porque a través de esta operación explica el valor posicional del número dentro de una cifra.

TEORÍA GENERATIVA DE ERRORES (Bugs)

Aunque en la mayoría de las ocasiones el análisis de errores se simplifica a la revisión que aparecen en los algoritmos escritos. Una descripción de los distintos algoritmos escritos permitirá analizar los errores que se estudien como modificaciones de una o más etapas en estos procedimientos.

Estos errores pueden ser abordados de manera recíproca, es decir deben reconocer las causas de los errores algorítmicos y reconocer qué tipo de deficiencias tiene la representación del procedimiento y qué clase de acciones se

han manejado sobre tal representación por parte del niño.

Ante esto, Resnick (citado por Langford, 1989) señala que los errores no están motivados por el olvido o borrado de algunas etapas del procedimiento, sino se debe por el desconocimiento de la relación semántica es decir que el algoritmo de la resta que se efectúa ésta entre dos columnas separadas, pero se resta como un todo.

Según Maza (1989) la teoría generativa de errores es el intento más prometedor para dar explicación a este tipo de errores bajo lo comentado anteriormente.

Esta teoría intenta explicar por qué se encuentran los errores y cómo son causados. Además quiere predecir los errores que se encuentran partiendo de algunas deficiencias en el procedimiento algorítmico.

Dentro de la propia teoría generativa existe una serie de limitaciones como es el de restar de cero y no cambiar una columna que ya tiene respuesta esto conlleva al niño a un estado de espera si es eliminado alguno de los pasos. Este modelo plantea que estas limitaciones tienen un origen conceptual, lo que no sólo respeta la teoría generativa sino que establece lazos que unen el desarrollo conceptual y el de procedimiento para el aprendizaje algorítmico y así conduce a postular una forma de aprendizaje que vea un aspecto como en el otro y, más concretamente, que tenga por objetivo el aprendizaje de la relación entre ambos aspectos, uniendo el desarrollo conceptual con el de procedimiento.

Maza (1989) considera que para que un error sea causado el niño debe tener una representación equivocada del procedimiento, ya sea por olvido o por falta de aprendizaje, no utilizar los procedimientos conducirá a una contradicción porque hay acciones imposibles de realizar. Por ejemplo, en la resta:

304

-186

el niño no puede realizar $4 - 6$ ya que debe tomar prestado del orden siguiente. Pero

las decenas del minuendo son cero. Si olvida o no ha aprendido los dos pasos necesarios del procedimiento el de sustituir s' por $s'-1$, dado que no seguiría el principio de que entre números naturales no se puede restar del cero.

Maza (1989) dice que cuando el niño se encuentra en un estado de espera busca el modo de reparar este olvido buscando otra forma de resolverlo como es a través de dar un brinco.

Por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 21 \\ \cancel{3}04 \\ -186 \\ \hline \end{array}$$

De esta manera realiza lo que conoce como tomar prestado. Así la centena es diez unidades lo que consigue resolver el problema de restar las unidades, pero por un camino erróneo.

Este principio origina que esta teoría se llame también **de reparación**, pues permite explicar los errores como enlaces derivadas de la reparación que sufre un procedimiento cuando el niño llega un estado de espera.

Se puede decir que el error anterior, llamado **tomar prestado a través de cero**, se presenta combinado con otro el que permite al niño colocar en las decenas resultantes el 8. Esta combinación de errores complica el diagnóstico por un lado, pero por otro lado ayuda a valorar la capacidad de separar ambos errores.

Formas de reparación

Para hablar de los mecanismos de reparación se debe considerar el olvido de distintas partes del procedimiento algorítmico de la resta “tomando prestado” con el fin de observar los errores ocasionados por cada forma de reparación.

Caso 1 olvido del paso 5. El paso 5 del algoritmo es el que permite tomar prestado. Cuando el niño llega a este paso se plantea el hecho de que una cifra del minuendo es menor que su correspondiente del sustraendo pero, al no acordarse del paso 5,

llega a un estado de espera.

Pues no se puede restar de un número otro mayor. Por ejemplo es el caso de la resta:

$$\begin{array}{r} 317 \\ -145 \\ \hline ?2 \end{array}$$

Este procedimiento debe ser reparado de la siguiente manera, pues el niño puede utilizar cuatro formas diferentes:

Salto. Deja a un lado el problema saltando por encima de él y resolviendo el resto del problema con el llamado en blanco en vez de usar el de tomar prestado.

$$\begin{array}{r} 317 \\ -145 \\ \hline 22 \end{array}$$

Abandono. Es una de las formas más básicas de reparación. Consiste en dejar el problema completamente en cuanto se plantea el estado de espera esto origina, para el caso planteado, el error llamado tomar prestado sin hacer.

$$\begin{array}{r} 317 \\ -145 \\ \hline 2 \end{array}$$

Estas formas de reparación pertenecen, por su semejanza a una misma categoría caracterizada por manejar formas de escape y huída del problema planteado.

Cambio de Argumento. Se puede cambiar la operación a realizar manejando los mismos números de manera que se no se necesite el de tomar prestado. Como es el caso del conocido Menor del Mayor.

$$\begin{array}{r} 317 \\ -145 \\ \hline 232 \end{array}$$

Este error y ante la imposibilidad de realizar 1-4 se realiza la operación 4-1.

Utilización del cero. Esta forma de reparación se da a través de olvidar los hechos numéricos para colocar en el resultado un cero en la columna problemática. Este se entiende bajo la regla de que si a un número se le resta otro mayor no queda nada del primer número, es decir, queda cero.

$$\begin{array}{r} 317 \\ -145 \\ \hline 202 \end{array}$$

Caso 2 olvido del paso 7. Cuando este tipo de olvido se presenta, el niño llega a una situación como la planteada en la columna de las decenas de la resta.

$$\begin{array}{r} 405 \\ -238 \\ \hline \end{array}$$

En esta resta es necesario tomar prestado del cero y como no se puede tiene que recurrirse al paso 7 a tomar prestado de las centenas. Esto es el olvido y el niño se enfrenta a un estado de espera motivado por la resta 5-8 sin que pueda hacer otra cosa que reparar el olvido. En este caso las alternativas son las siguientes.

Salto. En este caso es obvio que no se puede tomar prestado del cero y se continúa el procedimiento como si con ello se hubiera podido hacer. Esto trae como consecuencia dos errores.

Parada del tomar prestado del cero.

$$\begin{array}{r} 3 \ 1 \\ 405 \\ \underline{-238} \\ 137 \end{array}$$

tomar prestado del cero.

$$\begin{array}{r} 9 \ 1 \\ 405 \\ \underline{-238} \\ 267 \end{array}$$

Búsqueda hacia la izquierda. En esta reparación hace una búsqueda horizontal hacia la izquierda para que al tomar prestado sea una operación posible pero se genera un error, tomar prestado a través de cero.

$$\begin{array}{r} 3 \ 1 \\ 405 \\ \underline{-238} \\ 137 \end{array}$$

Búsqueda hacia abajo. En este caso pide prestado al sustraendo en vez de pedir al minuendo en donde se localiza el cero.

$$\begin{array}{r} 1 \\ 405 \\ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \underline{-238} \\ 227 \end{array}$$

Cambio de argumentos. Se genera el menor del mayor en vez de tomar prestado del cero.

$$\begin{array}{r} 31 \\ \cancel{405} \\ \underline{-238} \\ 173 \end{array}$$

Utilización del cero. Pone el cero en vez de tomar prestado del cero.

$$\begin{array}{r} 31 \\ \cancel{405} \\ \underline{-238} \\ 170 \end{array}$$

La incapacidad actual de esta teoría para dar razón de la totalidad de los errores puede deberse, en caso de que el axioma de reparación sea cierto a dos razones.

- 1) Estas formas de reparación deben ser ampliadas a un número mayor. Los mecanismos cognitivos no se han estudiado con la profundidad que deben ser.
- 2) Esta teoría generativa parte en el sentido de que sirve como borrador de pasos como forma de modificación del procedimiento. Esto obliga a preguntar ¿los errores sólo son motivados cuando se ha olvidado o no aprendido algún paso del procedimiento?(Maza, 1989).

ALGUNOS EJEMPLOS DE PROCEDIMIENTOS CONVENCIONALES E INFORMALES QUE UTILIZAN LOS NIÑOS PARA RESOLVER EL ALGORITMO DE LA RESTA

Procedimiento convencional. Son procedimientos adquiridos en la escuela; dos de los procedimientos convencionales más utilizados por los maestros para la enseñanza de la resta con transformación, son:

De acuerdo con Hughes (1987), el primer procedimiento es el de **descomposición**:

$$\begin{array}{r} 54 \\ -37 \\ \hline 17 \end{array}$$

Como a cuatro no se le puede quitar siete, se le pide prestado al cinco y se convierte en catorce, mientras que las cinco decenas se transforman en cuatro.

El segundo procedimiento consiste en **pedir prestado**, y en lugar de transformar las decenas se le paga a las decenas del sustraendo:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 54 \\ -37 \\ \hline 17 \end{array}$$

Este procedimiento puede presentar problemas para algunos niños cuando resuelven operaciones del tipo 34-7, ya que las solucionan de la siguiente manera:

34

-7

37

La solución se explica porque el niño, al no tener a quien pagar, anula el número **prestado**; luego, el tres (de las decenas) se baja.

Procedimientos informales. Son procedimientos utilizados por el niño que le ayudan a resolver la operación matemática teniendo, generalmente, un resultado incorrecto. Al utilizar estos procedimientos, el niño utiliza reglas convencionales pero las asimila a su lógica de pensamiento, o utiliza procedimientos sin recurrir, a estas reglas (Bollás, 1997).

Conceptualización del cero como número independiente.

En la resta, el niño no da valor al cero en el minuendo (lo ubica como número independiente) y acomoda la unidad del sustraendo en el resultado; después, realiza la resta con las decenas.

Ejemplo:

80 “Dos para cero, dos y tres para ocho, cinco”

-32

52

50 “Seis para cero, seis... el cinco como no tiene nada se baja”

-6

56

El cero restado se “come” a la cantidad.

En la solución de esta resta, el niño señala que el cero no vale nada, por lo que le da cero.

Ejemplo:

$$\begin{array}{r} 8 \text{ "Cero para ocho, cero"} \\ -0 \\ \hline 0 \end{array}$$

Desvaloración del sustraendo cuando el minuendo es cero.

El niño no le da valor al sustraendo cuando las unidades y/o decenas que están en el minuendo son cero; como resultado dará cero.

Ejemplo:

$$\begin{array}{r} 50 \text{ "Si es cero el de arriba, no se le quita nada porque es cero menos} \\ -19 \text{ nueve y el cero no vale"} \\ \hline 40 \end{array}$$

Omisión del número prestado.

En la solución de esta resta, la unidad del sustraendo es mayor a la del minuendo, el niño pide prestado a las decenas del minuendo, pero al momento de pagar, trata de hacerlo a las decenas del sustraendo, pero al no tener a quien pagarle, el niño baja la decena del minuendo aunque hace notar que no es un olvido (Bollás, 1997).

Ejemplo:

$$\begin{array}{r} 95 \text{ "Nueve para quince, seis y bajo el nueve"} \\ -9 \\ \hline 96 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 50 \text{ "Seis para diez, cuatro y bajo el cinco"} \\ -6 \\ \hline 54 \end{array}$$

Es por ello que parece de interés indagar en esta forma de aprendizaje del algoritmo escrito. No sólo porque pueda dar luz sobre otras posibles perturbaciones en la comprensión del procedimiento, sino porque puede empezar a precisar las posibles aportaciones del conocimiento conceptual y del conocimiento procedimental en el aprendizaje del algoritmo.

En este sentido el presente trabajo tuvo como objetivo:

Diseñar y desarrollar un programa de intervención dirigido a apoyar el aprendizaje a niños de tercer grado de una escuela pública en la resolución de la resta cuando aparece el cero en el minuendo y el sustraendo como valor posicional.

Planteamiento del problema

¿El programa de intervención favoreció a los niños en el aprendizaje de la resolución de la resta cuándo se presenta el cero ocupando un valor posicional?

Aprendizaje: Es una modificación favorable, debida a la experiencia previa que ayuda a la construcción o reconstrucción de un conocimiento (Varren, 1991).

Conceptualización: Es descubrir los conceptos apropiados que pondrán un grupo de hechos dentro de un orden racional o útil (English, H. B. y English, A. CH, 1977).

Resta: operación mediante la cual se calcula la diferencia entre dos cantidades (Maldonado, G. C., 1990).

Cero: Es un número que de acuerdo al lugar que ocupa dentro de una cifra se le da un valor.

Valor posicional: Es el valor que se le da a un número de acuerdo al lugar que ocupa dentro de una cifra.

Delimitación

Esta investigación se realizó exclusivamente con un grupo de tercer año de primaria de una escuela pública.

HIPÓTESIS

- ◆ Al término de la aplicación del programa de intervención para resolver la resta cuando el cero siempre tiene valor posicional se espera que los sujetos que han trabajado con dicho programa logren tener un avance en la evaluación para solucionar el algoritmo de la resta.
- ◆ Los sujetos del grupo experimental al recibir el programa de intervención alcanzarán un nivel de evaluación similar para solucionar el algoritmo de la resta a los sujetos del grupo control.

El programa de intervención para apoyar a los niños en la resolución de la resta fue realizado por Aranda, Miranda, Soto, Soto y Miranda (1998); este programa al momento de su aplicación los autores no lo habían llevado a la práctica, por lo cual no existían resultados.

METODOLOGÍA

Sujetos

El estudio se realizó con un grupo de tercer año de primaria conformado por treinta y cuatro niños, cuyas edades comprendieron los 7-9 años. Se eligió una escuela

pública ubicada en el norte de la Ciudad de México en una zona socioeconómica media-baja.

A partir de la aplicación del pretest se formó el grupo experimental y el grupo control. La asignación a cada uno de los grupos fue de la siguiente manera: los alumnos que lograron tener seis respuestas correctas de las diez que se resolvieron, formaron el grupo control y, los alumnos que obtuvieron cinco o menos respuestas correctas formaron el grupo experimental, quedando de la siguiente manera: catorce niños en el grupo control y veinte en el grupo experimental. De no haberse presentado estas condiciones, se hubiera utilizado como criterio la media de calificaciones para la asignación de los sujetos a dichos grupos.

Diseño

El diseño es a través de un grupo experimental y un grupo control con evaluación diagnóstica y final (pre y postest).

	PRETEST	PROGRAMA DE INTERVENCIÓN	POSTEST
GRUPO CONTROL	X	Encontrar un par de números en un cruce de rectas (Plano Cartesiano)	X
GRUPO EXPERIMENTAL	X	Resolución de restas cuando aparece el cero con un valor posicional	X

Instrumentos

Para la evaluación: se diseñaron dos instrumentos, uno para la evaluación inicial (pretest) y un segundo para la evaluación final (postest) (**ver anexos 2 y 3**). Estos

consistieron en diez operaciones de resta cada uno, en las cuales el cero tuvo un valor posicional. Las operaciones fueron diseñadas de manera que permitieron conocer **a)** si el sujeto manejó el cero cuando se presentó en el minuendo en el lugar de las unidades, esta característica se presentó en las operaciones uno, cuatro, siete y ocho; **b)** el cero se presentó en el minuendo en el lugar de las decenas en las operaciones dos, tres y nueve; **c)** mientras que en las operaciones cinco y seis el cero se presentó en el sustraendo en el lugar de las decenas y unidades; **d)** la operación diez contenía el cero en el minuendo en el lugar de las decenas y unidades.

Por esto el nivel de dificultad para resolver las restas fue de lo más sencillo a lo más complejo, esto se pudo apreciar pues el cero tuvo en las primeras nueve operaciones solamente una transformación y, en la última resta el cero tuvo dos transformaciones, lo que indicó mayor nivel de complejidad.

Otra característica de las operaciones, es que en todas el cero tuvo un valor posicional y existió equivalencia en las operaciones de ambos instrumentos.

Para la validación del pretest y postest, los instrumentos fueron presentados a 15 profesores de Educación Básica y a 10 profesores de nivel superior expertos en matemáticas, con el objeto de validar la pertinencia y calificar si eran equivalentes las operaciones de resta que se aplicaron en el pretest y postest, asimismo si el nivel de dificultad fue adecuado para niños de tercer grado (**ver anexo 1**).

Los profesores hicieron correcciones y comentarios a las operaciones propuestas. Estos se presentan a continuación.

- ◆ En las operaciones marcadas con la letra I, un profesor sugirió que la operación I la utilizáramos como postest y, la operación I” la utilizáramos como pretest.
- ◆ En el caso de la operación C, señalaron que era igual a la operación A, por lo que estaba calificando lo mismo, sugirieron sustituirla.

- ◆ En la operación E' sugirieron que el sustraendo 165 se cambiara por 365 para que fuese similar a la operación presentada con la letra E y pudiera ser utilizada como postest.
- ◆ Como en la operación anterior en la marcada con la letra I', propusieron que el sustraendo 458 se cambiara por 468 para que fuese similar a la operación marcada con I.
- ◆ En la operación marcada con J sugirieron que se cambiará el sustraendo 163 por 193 y, en la operación J', que el sustraendo 513 se cambiará a 493.
- ◆ En la operación B' el sustraendo 95 sugirieron se cambiará por 96 para que fuese similar a la operación B.
- ◆ En las operaciones que están marcadas con la letra I sugirieron que fueran modificadas por operaciones donde el cero apareciera tanto en el minuendo como en el sustraendo, con el objeto de observar la reacción los niños ante este tipo de operaciones.

Ejemplo:

410

-103

- ◆ Para el caso de la operación marcada con la letra C" sugirieron que fuera modificada como a continuación se presenta, de modo que fuera similar a la marcada con la letra C y pudiera utilizarse en el postest.

240

- 45

- ♦ vAl igual que en el caso anterior la operación marcada con la letra l” sugirieron que se cambiara de la siguiente manera para utilizarse como pretest.

450

-146

El criterio para seleccionar las restas que conformaron el postest fue a partir de tomar el 70% de acuerdos entre los profesores; se tomaron también en cuenta las sugerencias ya citadas de los profesores para el diseño final del instrumento del pretest y del postest.

Finalmente los instrumentos, de acuerdo con las correcciones antes mencionadas, quedaron conformados como se muestra en los anexos **2** y **3**.

Para la propuesta: se diseñaron también dos programas de intervención uno para enseñar la resolución de la resta cuando se presenta el cero y siempre tiene un valor posicional y el otro para enseñar a localizar un par de números dentro de un cruce de rectas (Plano Cartesiano). Cada uno de estos programas presentó contenidos con características importantes para que el niño manejará con mayor eficacia el contenido al que se pretendió que llegará al término de cada intervención, por lo cual cada una de las actividades de los programas presentó un objetivo, la actividad a realizarse y los materiales que se utilizaron en cada actividad. Cada una de las actividades se desarrolló en tres sesiones con duración de una hora cada sesión, por lo que fueron en total veintiún sesiones.

Materiales

Los materiales que se utilizaron en el grupo experimental fueron cartas de póker, tarjetas con números del 0 al 9 y el signo menos (-), boletos de Lotería Nacional que tuvieron impresas cantidades de tres cifras y una estampa éstas presentaron tarjetas con la misma cantidad que el boleto de Lotería, una caja de cartón, bolitas de papel,

papel bond, lotería de números.

Los materiales para el grupo control fueron: cuadro de unicel, alfileres, hilos rectas de papel pegadas en hojas bond, muñequitos y animalitos de cartón, hojas cuadriculadas tamaño carta con un cruce de rectas dibujadas.

A ambos grupos se les proporcionó un cuadernillo para la realización de las actividades, se utilizaron también gises, plumones, pizarrón, borrador, sacapuntas, gomas, colores.

Piloteo

Con el objetivo de detectar los problemas de carácter instruccional que pudieran tener los programas de intervención se realizó un piloteo con alumnos de tercer año de primaria del año lectivo 1999-2000. Esto sirvió para ajustar las actividades y tiempos destinados a cada sesión del programa y mejorar la propuesta de intervención.

Los ajustes fueron los siguientes:

En el piloteo, se programó cada actividad en una sesión con duración de 45 minutos. Esta fue modificada a tres sesiones para cada actividad, con duración de una hora. Con sólo 45 minutos los niños no lograron profundizar el contenido que se trabajaba.

Otra modificación fue que en lugar de utilizar hojas sueltas para realizar los ejercicios, se les proporcionó un cuadernillo a cada niño para tener un control más profundo sobre los avances de cada niño durante los programas de intervención.

Procedimiento

El desarrollo del estudio constó de 3 fases:

Primera fase

La aplicación del pretest se realizó de manera colectiva, se llevó a cabo en una sesión de una hora. Las siguientes dos sesiones se utilizaron para preguntar, de manera individual los procedimientos que el niño utilizó para resolver las restas.

Las operaciones sobre las que se preguntaron a los sujetos de ambos grupos en el pretest como en el postest. fueron las mismas para ver si el niño cambió su procedimiento incorrecto a un procedimiento correcto al momento de resolver las restas cuando el cero ocupa un valor posicional.

Las operaciones elegidas fueron la de mayor índice de errores en ambos grupos.

Segunda fase

Propuesta didáctica

Con el grupo experimental se trabajó el Programa de Intervención dirigido a apoyar al niño a resolver la resta cuando aparece el cero con un valor posicional; el propósito de las actividades propuestas en esta didáctica es que el niño maneje conocimientos previos para que reconstruya el conocimiento para resolver las restas cuando aparece el cero ocupando un valor posicional (**ver anexo 4**); con el grupo control se trabajó el programa de intervención para entrenar al niño a localizar un par de números en un cruce de rectas (Plano Cartesiano), el propósito de las actividades del grupo control fue dar un conocimiento diferente al algoritmo de la resta y a la vez reforzar un conocimiento que se trabaja en tercer año de primaria (**ver anexo 5**).

Cada una de las actividades del programa de intervención del grupo control y experimental presentó un objetivo, actividades que se realizaron y los materiales que se utilizaron en dichas actividades. Se trabajaron siete actividades, cada actividad tuvo una duración de tres sesiones de una hora cada sesión, por lo que en total fueron veintiún sesiones incluyendo el pretest y postest que se aplicó antes y después del programa de intervención.

Cabe destacar que los alumnos desarrollaron en un cuaderno que fue proporcionado a cada uno de ellos los ejercicios de las actividades, así, la evaluación fue constante y permitió observar el avance de los niños.

El programa de intervención para el grupo experimental se llevó a cabo en el salón de clases y el grupo control en un aula magna. Cada investigadora trabajó con un grupo simultáneamente.

Tercera fase

La aplicación del postest se realizó de manera colectiva en una sesión de una hora y las otras dos sesiones fueron utilizadas para preguntar el procedimiento que utilizó el niño para resolver las operaciones de manera similar a lo que se hizo en el pretest.

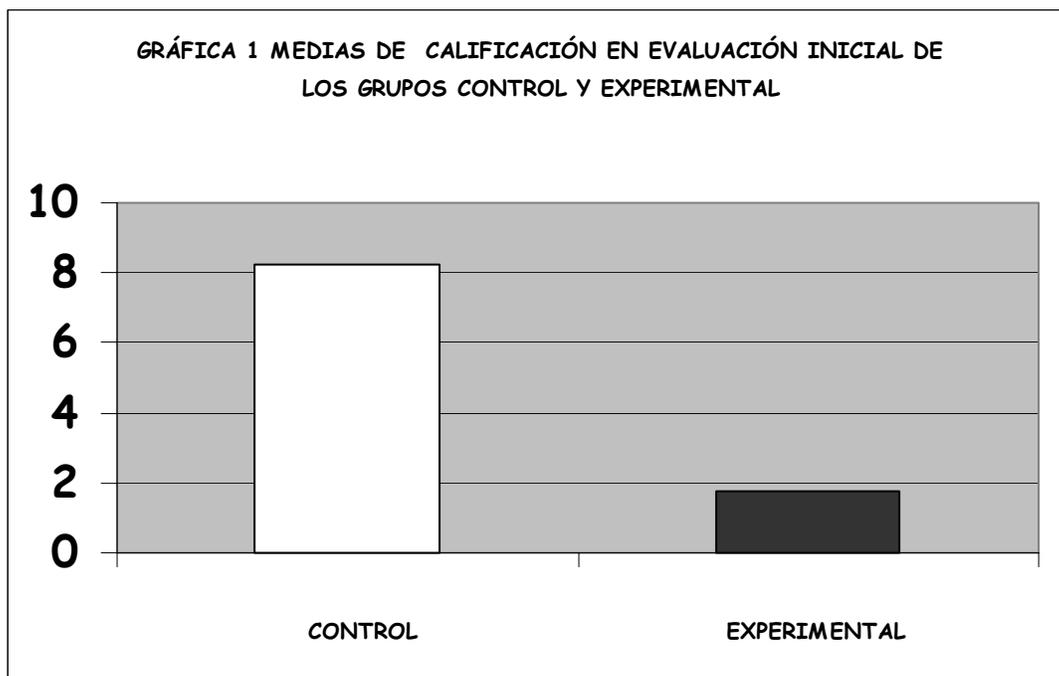
RESULTADOS.

Calificación

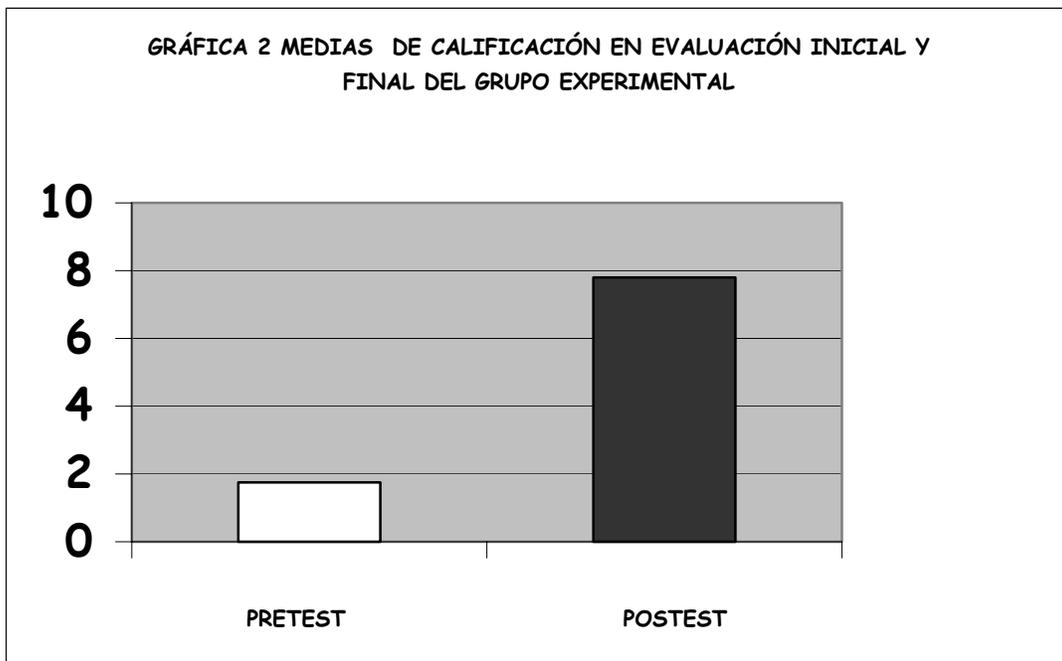
Las respuestas de los alumnos en las restas se calificaron de la siguiente manera: si la respuesta fue correcta se calificó con “1” (uno), si la respuesta fue incorrecta o no contestada se calificó con “0” (cero). En consecuencia, si todas las respuestas fueron correctas obtuvieron un total de diez puntos.

ANÁLISIS CUANTITATIVO

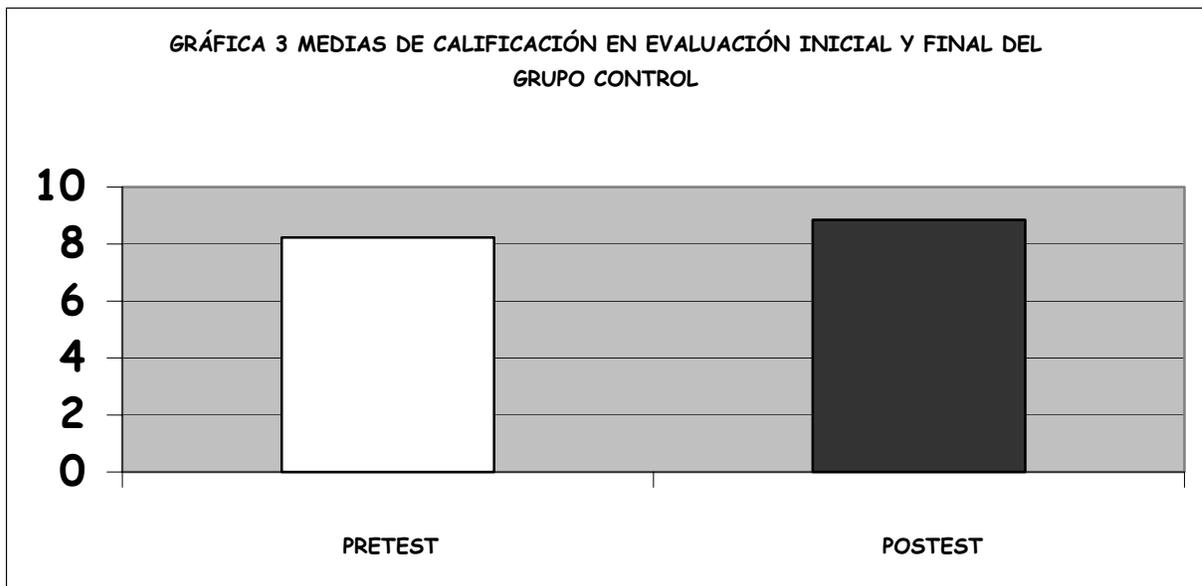
Con el propósito de analizar el nivel de ejecución cuando se presenta el cero con un valor posicional en la resta y hacer la designación del grupo experimental y del grupo control, se realizó un análisis comparativo para verificar si las diferencias en el grupo control y el grupo experimental en la evaluación inicial eran significativas. Se utilizó la prueba *t* de muestras independientes. El análisis arrojó una $t= 16.003$, $p=.001$, lo que muestra que al inicio de la intervención sí existieron diferencias significativas en los puntajes de los dos grupos, obteniendo puntajes más altos los sujetos del grupo control que los sujetos del grupo experimental (**ver gráfica 1**).



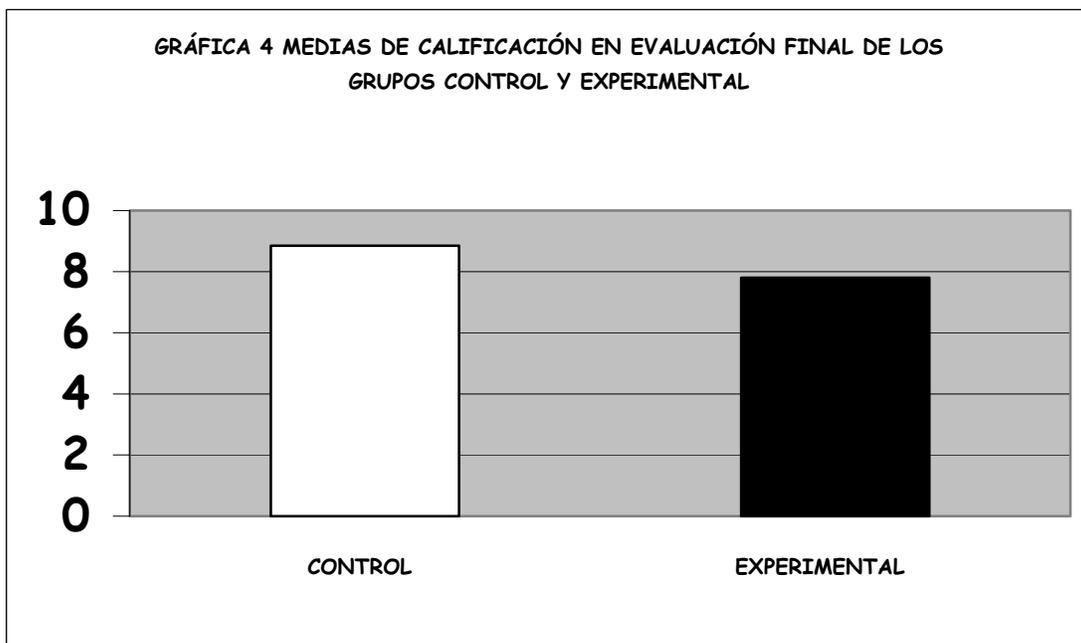
Con el propósito de analizar los progresos del grupo experimental, se realizó un análisis comparativo para verificar si las diferencias de las medias en la evaluación inicial y la evaluación final en el grupo experimental fueron significativas. Se utilizó la prueba **t** de muestras relacionadas. El análisis arrojó una **t= 11.2**, **p=.001**, lo cual indica que la intervención produjo una mejora significativa en los sujetos del grupo experimental para resolver la resta cuando se presenta el cero con un valor posicional, lo que generó mejores puntajes después de haber recibido el tratamiento experimental (**ver gráfica 2**).



Con el objetivo de verificar si las diferencias de las medias en la evaluación inicial y la evaluación final en el grupo control son significativas. Se utilizó la prueba **t** de muestras relacionadas el cual arrojó una **t= 1.075**, **p=.303**, lo cual muestra que los puntajes obtenidos por los sujetos del grupo control al término de la intervención fueron similares a los puntajes que obtuvieron al inicio, lo que indica que los sujetos que no recibieron el tratamiento experimental, si bien se observa un incremento en las medias (**ver gráfica 3**), esta diferencia no es significativa.



Con el objetivo de verificar si las medias de los puntajes obtenidos por los sujetos del grupo control y del grupo experimental en la evaluación final son iguales, se utilizó la prueba **t** de muestras independientes. El análisis arrojó una **t= 1.297**, **p=.204**, lo que indica que, al término de la intervención, los sujetos del grupo experimental lograron puntajes similares a los sujetos del grupo control, lo que muestra que el tratamiento experimental resultó eficiente para que los sujetos del grupo experimental obtuvieran puntajes similares a los sujetos del grupo control, si bien la media del grupo experimental es inferior a la media del grupo control, esta diferencia no es significativa estadísticamente. Por lo que se puede concluir que los dos grupos son iguales en su capacidad para solucionar el algoritmo de la resta (**ver gráfica 4**).



En la tabla 1 se observan los porcentajes de respuestas acertadas en cada una de las operaciones tanto en el pretest, como en el postest, por el grupo experimental y el grupo control. Se puede observar que en el postest del grupo experimental hay un avance significativo en comparación al porcentaje de sujetos que contestaron correctamente al principio en el pretest, pues en todas las operaciones sus porcentajes incrementaron. Sin embargo, en las operaciones 1, 4 y 9 los porcentajes son menores en comparación con las otras operaciones del postest, esto se debió posiblemente a que los sujetos aunque tenían ya conceptualizado el cero y pedían prestado cuando se requería, al momento de pagar en las decenas del sustraendo y el número era mayor que cero, se les olvidaba pagar. Debido a que el programa de intervención iba concretamente dirigido a enseñar a resolver las restas cuando se presenta el cero con un valor posicional, esto ocasionó que se dejara de lado los diferentes problemas que presenta la resta no sólo con el cero sino con los demás números.

Por otro lado el grupo control obtuvo resultados relativamente iguales tanto en el pretest como en el postest ya que no hubo diferencias significativas que pudieran decir que el grupo control salió más alto en el pretest o postest.

Algo importante de señalar es que el grupo experimental en la operación diez que tiene un nivel de dificultad mayor porque el cero aparece tanto en las decenas y unidades del minuendo, en el pretest obtuvo un porcentaje muy bajo en comparación al obtenido en el postest, pues su porcentaje subió significativamente en el postest, igualando así al grupo control en esa operación, pues el porcentaje de respuestas acertadas fue similar.

Tabla 1. Porcentajes de respuestas correctas por operación, grupo y momento de evaluación.

Operación	Pretest		Postest	
	Grupo experimental	Grupo control	Grupo experimental	Grupo control
1	5%	85.1%	65%	85.7%
2	25%	57.1%	80%	78.5%
3	15%	100%	85%	92.8%
4	5%	92.8%	60%	85.7%
5	55%	85.7%	80%	78.5%
6	50%	78.5%	85%	92.8%
7	10%	92.8%	85%	92.8%
8	10%	92.8%	80%	85.7%
9	5%	85.7%	65%	85.7%
10	5%	64.2%	85%	85.7%

ANÁLISIS CUALITATIVO

A partir de la aplicación del pretest, que consistió en la resolución de diez operaciones en donde apareciera el cero en el minuendo o sustraendo ocupando un valor posicional se preguntó a cada niño acerca de cómo resolvió las operaciones, solicitándole explicar cómo le hizo para llegar al resultado.

Las restas que se presentan a continuación fueron las que obtuvieron mayor índice de error en cuanto a su resolución, esto permitió analizar la lógica que el niño utilizó para llegar al resultado. Esto muestra que el niño no le daba valor al cero ya que solamente bajaba la cifra sin poner mayor atención a las cifras del minuendo o sustraendo según el caso.

102	130	400
<u>- 51</u>	<u>- 23</u>	<u>-163</u>

Los niños que formaron el grupo experimental, esto es aquéllos que obtuvieran en la evaluación inicial las puntuaciones más bajas, utilizaron procedimientos informales al momento de resolver las restas. Los procedimientos informales son aquellos donde el niño utiliza mal las reglas convencionales porque las asimila en el marco de su propia lógica de pensamiento. Dichos procedimientos son utilizados por el niño para ejecutar la operación matemática, obteniendo por lo general un resultado incorrecto.

Se presenta a continuación el análisis de las respuestas de los sujetos. Dicho análisis se elabora a partir de los procedimientos informales propuestos por Bollás (1997). Así, se describen aquéllos de mayor frecuencia en el pretest, en ellos se incluyen los olvidos, las omisiones, la colocación inadecuada de las cantidades, entre otros.

Conceptualización del cero como número independiente.

En la resta, el niño no da valor al cero en el minuendo (lo ubica como número independiente) y acomoda la decena o unidad del sustraendo según el caso en el resultado; después, realiza la resta con las decenas o baja el número de la centena al ver vacío el lugar de las centenas en el sustraendo.

Ejemplo:

$$\begin{array}{r} 102 \\ -51 \\ \hline 151 \end{array}$$

“A dos le quito uno me sobra uno, cero menos cinco me da cinco, a uno le quito cero me queda uno”

$$\begin{array}{r} 130 \\ -23 \\ \hline 113 \end{array}$$

“A cero no le puedo quitar tres me quedan tres, a tres le quito dos me queda uno, como no hay nada bajo el uno” =

Desvalorización del sustraendo cuando el minuendo es cero.

El niño no le da valor al sustraendo cuando las unidades y/o decenas que está en el minuendo son cero, y como resultado dará cero.

Ejemplo:

$$\begin{array}{r} 400 \\ -163 \\ \hline 300 \end{array}$$

“A cero le quito tres, me queda cero, a cero le quito seis, me queda cero, a cuatro le quito uno, me queda tres”

Es importante señalar que doce de los veinte niños del grupo experimental utilizaron el primer procedimiento y dos niños utilizaron el segundo al momento de resolver y explicar la resta. Los restantes utilizaron errores diferentes pero sin mayor incidencia en el resultado.

En cambio los niños que formaron el grupo control su error más común fue *Olvido del número “prestado”*. En la resolución de la resta, el niño inicia restando, estableciendo cuando se requiere “pedir prestado”, pero al pasar a las decenas o centenas se “olvida” que tiene que “pagar”. Ejemplo:

102	“A dos le quito uno me queda uno pido un uno y
<u>- 51</u>	el cero se convierte en diez y a diez le quito
151	cinco me da cinco y entonces el uno lo vuelvo a
	pagar y me da uno.”

Es importante señalar que los sujetos del grupo control no tienen problemas con el cero, pues al explicar el procedimiento para llegar al resultado lo hacen de manera correcta, ya que al cero le dan valor como se muestra en el ejemplo anterior, sin embargo su resultado es incorrecto, debido a que se les “olvida” el número “prestado”.

En la **segunda actividad** se trabajó con los conceptos de las unidades, decenas y centenas; los niños trabajaron muy bien este tema ya que tenían conocimiento de lo que valía la unidad, decena y centena, se les explicó, a partir del valor posicional, cuál número era la unidad, cuál la decena y cuál la centena y se les presentó un ejercicio anotado en el pizarrón para que los niños pudieran identificar cuánto valía cada una de éstas.

Ejemplo:

CDU	
800	8 centenas, 0 decenas y 0 unidades.

Se les preguntó cuánto valía una centena, una decena y una unidad y los niños contestaron lo siguiente:

“Una centena vale cien, una decena vale diez y una unidad vale uno”

En la segunda sesión se les explicó las equivalencias. La tarea consistió en calcular el número de decenas contenidas en las centenas y las decenas y unidades.

Ejemplo:

Investigadora

Si una centena vale cien, ¿cuántas decenas valdría esa centena, si cada decena vale diez?
Ahora, si esa centena la convertimos a unidades, sabiendo que cada unidad vale uno ¿cuántas unidades valdría una centena?

Niños

M. A. empieza a contar con los dedos: diez, veinte, treinta,... cien. Serían diez decenas.

J. R. una centena vale cien y una unidad vale uno, entonces serían cien unidades.

Posteriormente el niño realizó la siguiente equivalencia.

“8 centenas = 80 decenas = 800 unidades”

Por último en esta actividad tenían que realizar la notación desarrollada, es decir, determinar cual es el valor real de los números que forman una cifra.

Investigadora

Lo que vamos a hacer es anotar el valor real de cada uno de los números que forman la cifra.

Niños

I. ¿Cómo le vamos a hacer?

Investigadora

Por ejemplo en el número 367 ¿cuántas centenas hay? Acordándonos que primero a la izquierda están las centenas, decenas y unidades.

Si las convertimos a unidades ¿cuántas unidades hay?

Ahora ¿cuántas decenas hay?

Y si las seis decenas las convertimos a unidades ¿cuántas habrá?

Y ¿cuántas unidades hay?

Entonces lo que vamos a hacer es sumar estas cantidades para que dé el 367

Niños

P. G. Tres.

P. G. Trescientas

T. J. Seis.

T. J. Sesenta

C. A. Siete.

C. A. Ya entendí lo que debemos hacer.

C. A. $367 = 300 + 60 + 7$

Finalmente, los niños comprendieron que el tres no solo vale tres ni el seis vale sólo seis.

Ejemplo:

$$679 = 600 + 70 + 9$$

$$261 = 200 + 60 + 1$$

$$112 = 100 + 10 + 2$$

En la tercera sesión ya no hubo necesidad de explicarles qué debían hacer ya que

sólo realizaron los ejercicios en el pizarrón y se les dio instrucciones acerca de qué tenían que hacer para que lo hicieran por sí solos.

En la **tercera actividad** los niños tenían que hacer la notación desarrollada en un Juego de la Lotería Nacional, el niño que tuviera el boleto ganador pasaba al pizarrón a realizar la notación desarrollada.

Ejemplo:

BOLETO

583

$$583 = 500+80+3$$

En la primera sesión los niños no entendieron muy bien qué hacer, porque al sacar el boleto y mencionar el número todos querían pasar a realizar la notación desarrollada del número mencionado, cuando tenía que pasar al pizarrón el niño que tenía el boleto ganador, sus compañeros debían de revisar si el niño había hecho la notación desarrollada correctamente y viceversa, si el niño se equivocaba algún compañero debía pasar a corregirlo.

Investigadora

Niños

I. Yo paso a hacer la notación desarrollada

No, tiene que pasar el niño que tenga el boleto que se mencionó.

Ejemplo:

$$J. 679 = 600+7+9"$$

Investigadora

Niños

Su compañero realizó bien la notación desarrollada de la cifra?

M. A. No, esta mal

¿Por qué?

M. A. Porque es setenta y no siete como él puso.

Entonces ¿cómo quedaría?

M. A. quedaría así: $679=600+70+9$

“El seis vale seiscientos, el siete setenta y el nueve pues nueve.”

En la segunda sesión los niños ya entendían más lo que se debía hacer, no cualquier niño podía pasar al pizarrón y para la tercera sesión ya estaban los niños ordenados y no había necesidad de decir lo que se debía hacer.

Ejemplo:

$$“303 = 300+00+3”$$

En la **cuarta actividad** los niños tenían que ver cual cantidad era mayor o menor al formar cifras con tarjetas de números.

Ejemplo:

0	0	9	= 009
9	0	0	= 900

Investigadora

Niños

S. S. El 009 es mayor que el 900 porque los dos ceros que están junto al nueve no valen.

Aquí (señala el 900) el 9 también esta junto a dos ceros.

I. Sí, pero yo hablaba de los ceros que están a la izquierda del 9, esos son los que no valen, cuando están a la derecha sí valen.

Es mayor 900.

$$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 9 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} = 190$$

$$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 9 \\ \hline \end{array} = 109$$

“Es mayor 109, hay no me equivoque es el 190”

En un principio en la primera sesión los niños estaban muy distraídos y se equivocaban constantemente.

Ejemplo:

$$\begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 7 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array} = 375$$

$$\begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 8 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 6 \\ \hline \end{array} = 486$$

Ejemplo:

G. “Es mayor 375”

T. J. “Fíjate bien es mayor 486”

Para la segunda sesión los niños estaban ya tranquilos y al momento de formar la cantidad, pensaban más, antes de dar la respuesta correcta, finalmente en la tercera sesión no había necesidad ya de decir que es lo que tenían que hacer.

En la **quinta actividad** jugaron a la Lotería, tenían que encontrar cifras en un tablero.

Ejemplo:

150

150	325	00
7	100	205
136	407	3

En las tres sesiones de esta quinta actividad los niños trabajaron ágilmente la actividad ya que los niños querían ganar el juego. En algún momento de las tres sesiones los niños se llegaban a equivocar pero corregían y no pasaba a mayores el error.

En la **sexta actividad** los niños formaron operaciones de resta con las tarjetas que se les proporcionaron, dos tarjetas del número 0, una del 1 al 9 y el signo menos (-).

Los niños formaron operaciones de la siguiente manera:

Ejemplo:

	5	0	8		508
-	1	4	7		<u>-147</u>

Los niños tenían que resolver la operación en su cuaderno, pasar a resolverla en el pizarrón y explicar cómo le hicieron para llegar al resultado.

En la primera sesión se les explicó que si la unidad o la decena del minuendo era mayor que la unidad o decena del sustraendo lo que tenían que hacer era pedir prestado al número que tenían al lado, ya fuera la decena o la centena.

Ejemplo:

860 “A cero le quito tres no se puede le pido prestado al seis una
-543 decena y se convierte en diez, a diez le quito tres son siete, a seis
317 le quito cuatro, hay no, la decena que pedí se lo pago al cuatro y se
convierte en cinco, a seis le quito cinco es uno y a ocho le quito cinco
son tres.”

En la segunda sesión los niños estuvieron formando restas con las tarjetas que se les repartieron, en ocasiones se les olvidaba pedir prestado o pagar, pero al momento de pedirles que pasaran a resolverla al pizarrón se acordaban que debían pedir prestado o pagar y corregían.

586 “A seis le quito siete no se puede, le pido una decena prestada al
-037 ocho y se convierte el seis en dieciséis, a dieciséis le quito siete,
549 son 8, 9, 10...9; el número que le pedí prestado se lo pago al tres y
se vuelve cuatro, a ocho le quito cuatro son cuatro y a cinco le quito
cero, como no hay que quitarle nada bajo el cinco.”

En la **tercera sesión** se notó la mejoría en los niños cuando resolvieron las restas, pues no necesitaron ayuda de la investigadora para formar las restas y más aún en su resolución.

780 “A cero le quito nueve no se puede le pido una decena prestada al
-139 ocho, el cero se convierte en diez y a diez le quito nueve me queda
641 uno, la decena que pedí prestada se lo pago al tres y se convierte en
cuatro, a ocho le quito cuatro son cuatro y a siete le quito uno me dan
seis.”

En el total de las restas que resolvieron los sujetos el cero se manejó tanto en el minuendo como en el sustraendo.

Ejemplo:

670 “A cero le quito siete no se puede le pido prestado una decena al
-407 siete y se convierte en diez, a diez le quito siete son tres, le pago
263 la decena que pedí prestada al cero y se convierte en uno, a siete le
quito uno son seis y a seis le quito cuatro me quedan dos.”

En la **séptima actividad** los niños realizaron el postest que consistió en resolver diez operaciones de resta donde apareció el cero ocupando un valor posicional (**ver anexo 3**).

En esta ocasión los resultados fueron satisfactorios, en ellos se ve como al resolver el niño la resta sigue el procedimiento convencional, utilizándolo esta vez de forma adecuada para llegar a un resultado correcto.

Los niños resolvieron de manera adecuada las restas del postest que fueron similares en cuanto a nivel de dificultad a las tres restas que tuvieron mayor índice de error en el pretest, esto se realizó con el fin de comparar la lógica que utilizó el niño en las operaciones en un inicio mencionadas y las presentadas a continuación, pues tienen un nivel de dificultad similar. Esto permitió observar que el procedimiento utilizado ya en el postest muestra una lógica más estructurada que le permite llegar a un resultado correcto. Es interesante señalar que estas operaciones no fueron las que presentaron mayor índice de error en el postest, pero para fines metodológicos se preguntaron las operaciones similares preguntadas en el pretest, esto ayudó a dar una visión más amplia de cómo el niño de manera más estructurada explicó su procedimiento para llegar al resultado de la operación.

Estas operaciones fueron:

109	140	600
<u>-75</u>	<u>-37</u>	<u>-257</u>

Ejemplo:

- 109 “A nueve le quito cinco me quedan cuatro, a cero le quito siete
-75 no se puede entonces le pido prestado una decena al uno y se
34 convierte en diez, a diez le quito siete son tres, la decena que pedí la
pago abajo del uno y a uno le quito uno son cero.”
- 140 “A cero no le puedo quitar siete le pido una decena prestada al
-37 cuatro y el cero se convierte en diez, a diez le quito siete me
103 quedan tres, la decena que pedí se la pago al tres y se convierte
en cuatro, a cuatro le quito cuatro son cero y bajo el uno porque no
tiene ningún número abajo”
- 600 “A cero le quito siete no se puede y le pido prestado una decena
-257 al cero esta decena se la presto el seis al cero para que se
343 la preste al otro cero y se convierta en diez, a diez le quito siete son
tres, la decena que pedí prestado se lo pago al cinco y se convierte
en seis, a cero le quito seis no se puede le pido un una decena
prestada al seis y se convierte en diez, a diez le quito seis son cuatro
y la decena que pedí se la pago al dos y se convierte en tres, a seis
le quito tres son tres:”

Es importante destacar que los niños de los grupos experimental y control utilizaron de manera adecuada el procedimiento de pedir prestado.

Otra observación importante es que diecisiete de los veinte niños del grupo experimental tuvieron correcta la última operación presentada en el postest, ya en el pretest sólo un niño tuvo correcta la operación equivalente.

Por otro lado los sujetos del grupo control mantuvieron el mismo procedimiento informal que tenían al principio (pretest). El cual fue: “olvido” del número “prestado”. En la resolución de la resta el niño inicia restando, estableciendo cuando se requiere “pedir prestado”, pero al pasar a las decenas o centenas se “olvida” que tiene que “pagar”.

Ejemplo:

109 “A nueve le quito cinco me quedan cuatro luego a diez le
-75 quito siete me quedan tres y a uno le quito cero me queda uno”.

134

Esto permite decir que el programa de intervención (plano cartesiano), no influyó favorablemente ni en sentido inverso en la ejecución de la resta, en los sujetos que lo recibieran para ejecutar correctamente las restas, pues sus calificaciones y procedimientos fueron similares tanto en el pretest como en el postest.

El programa de intervención favoreció a los niños para que pudieran resolver la resta cuando se presenta el cero con un valor posicional, pero también desatendió algunos puntos, ya que se presentó el caso de dos niños que no sabían como se resolvía la resta, la resolvían pero no sabían lo que estaban haciendo, pues ponían un resultado equivocado, ya que no sabían si era suma o resta o qué procedimiento habían hecho. Se les preguntó a los sujetos que explicarían como habían resuelto la resta y no supieron decir qué habían hecho en la operación. Durante la intervención del programa, les explicamos como se resolvía la resta, pero no se obtuvieron buenos resultados, ya que cuando resolvieron el postest, los sujetos antes mencionados hicieron lo mismo que en el pretest, resolver la resta sin saber lo que hacían.

Ejemplo:

SUJETO 1

Antes	Después
102	109
<u>-51</u>	<u>-75</u>
181	144

SUJETO 2

Antes	Después
102	109
<u>- 51</u>	<u>-75</u>
1151	1139

En estos dos casos cuando se les preguntó que fue lo que habían hecho tanto en el pretest como en el posttest, ellos se quedaron callados, no supieron explicar lo que habían realizado.

Desafortunadamente para ellos el programa de intervención no fue el adecuado para que resolvieran correctamente las restas, debido a que requerían una atención más específica de acuerdo a la dificultad que presentaron.

Por eso la importancia de seguir investigando sobre este tema para poder ayudar a estos sujetos con nuevas propuestas y estrategias que les ayuden a resolver sus dificultades en matemáticas y específicamente en la resta.

En contraparte el grupo control siguió con el mismo procedimiento informal llamado “olvido” del número “prestado”, esto indica que el programa de intervención (plano cartesiano), no influyó en los sujetos para que resolvieran correctamente las restas.

Ejemplo:

Antes de la intervención.

102 “A dos le quito uno me queda uno pido un uno y el cero se convierte
-51 en diez y a diez le quito cinco me da cinco y entonces el uno lo
151 vuelvo a pagar me da uno”.

Después de la intervención.

109 “De que a nueve le quito cinco me quedan cuatro luego a diez le
-75 quito siete me quedan tres y a uno le quito cero me queda uno”
134

Estos resultados cualitativos demuestran que las actividades del programa de intervención para ayudar a los niños a resolver la resta cuando se presenta el cero con un valor posicional, son adecuadas para una conceptualización del valor posicional del cero llegando así a tener un procedimiento más estructurado sobre cómo llegar al resultado correcto de la operación (resta).

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Los resultados del presente trabajo, permiten confirmar la primera hipótesis que se propuso en el mismo, esto es la pertinencia en el programa de intervención para resolver la resta cuando se presenta el cero con un valor posicional, el programa produjo mejoras significativas en las ejecuciones de los alumnos: identificación del valor posicional de las cifras de un número, relacionar la nomenclatura de los números con la lectura de los mismos, analizar el valor posicional de los números, leer y comparar cantidades, identificar el valor posicional de las cifras de un número dentro del algoritmo de la resta, así como su resolución.

Lo anterior se deduce porque al grupo que se apoyó para que resolviera correctamente las restas cuando se presenta el cero con un valor posicional a través del programa experimental obtuvo resultados que muestran una mejora

significativa tanto en el procedimiento como en la resolución de dicha operación, obteniendo así puntajes más altos al término de la intervención, sin embargo el grupo al que se entrenó con el programa del plano cartesiano, sus puntajes fueron similares tanto al inicio como al término de la intervención, si bien mejoraron la diferencia no es significativa.

Por lo tanto los hallazgos del grupo entrenado confirman la propuesta didáctica de Aranda, Miranda, Soto, Soto y Zamilpa (1998). Ellos proponen en este programa actividades lúdicas para que el niño desarrolle su conocimiento en cuanto a la lectura y escritura de cantidades en función del cero de acuerdo con su posición, ya que con frecuencia en grados superiores existen muchos problemas en su aplicación como lo es en el algoritmo de la resta. Las actividades propuestas por estos autores pueden ser modificadas según el nivel escolar de los sujetos a los que se piensa entrenar. Esto es de gran importancia ya que la didáctica puede aplicarse a sujetos que cursen el primer grado, el segundo grado y el tercer grado como lo mencionan los autores de la propuesta.

Este programa, tal como se muestra en este trabajo y en el de los autores de la propuesta tienen el propósito de responder a la necesidad que tienen los maestros de abordar alternativamente los contenidos del sistema de numeración decimal y específicamente el manejo del cero cuando se presenta en el algoritmo de la resta. Así mismo, los resultados del presente trabajo muestran que trabajar la función del cero según su posición, reduce en el sujeto la dificultad al resolver las restas cuando el cero aparece en la operación (resta).

Este tipo de enseñanza permitió a los sujetos participantes en este programa de entrenamiento desarrollar su conocimiento en cuanto a la lectura y escritura de cantidades en función del cero de acuerdo a su posición, así también a utilizar adecuadamente su procedimiento para llegar a un resultado correcto en el algoritmo de resta.

Estos resultados confirman que la propuesta didáctica de los autores ya mencionados es buena para que sea aplicada a nivel básico en los tres primeros

años, si bien sería necesario que se llevara a la práctica no sólo con un grupo sino a varios grupos que permitan constatar los datos aquí presentados.

A partir de las mejoras significativas que los sujetos obtuvieron en la tarea de resolver adecuadamente las restas cuando el cero tiene un valor posicional puede concluirse que los alumnos lograron dicha meta a través de conocimientos previos. Por lo cual las actividades son un medio para que entiendan y conceptualicen correctamente el cero de acuerdo a su posición y así se les facilite resolver adecuadamente las restas cuando el cero aparece con un valor posicional, tal como mencionan los autores de la propuesta.

La segunda hipótesis de este trabajo afirmaba que el grupo que recibiría el programa de intervención referente a la resta alcanzaría un nivel de evaluación similar para solucionar el algoritmo de la resta a los sujetos del grupo control que recibió otro programa diferente a encontrar un par de números en un cruce de rectas (Plano Cartesiano).

De acuerdo con los resultados arrojados en la evaluación final realizada a los dos grupos, la propuesta didáctica para la resolución de la resta si resultó eficiente para el grupo que se apoyo con ésta propuesta, ya que al final obtuvieron un nivel de evaluación similar a la hora de resolver la resta cuando se presenta el cero ocupando un valor posicional. Si bien el grupo experimental no alcanzó ni superó al grupo control, la diferencia entre ellos después de la intervención no es significativa.

Por otro lado, si comparamos la evaluación inicial (pretest) y la evaluación final (postest) del grupo experimental, se puede afirmar que los resultados que obtuvieron fueron significativos en comparación a los resultados que se obtuvieron antes de recibir el programa de intervención, pues al comienzo de la propuesta didáctica los niños como mencionan los autores anteriores, veían al cero como algo que aparece y desaparece mágicamente, lo convierten en diez o simplemente cuando les causa algún conflicto, lo eliminan porque el cero no vale.

A medida que los niños del grupo experimental fueron trabajando las actividades del programa de intervención, se iban notando los progresos en relación a darle un valor al cero cuando se presenta en una cifra y más específicamente en la resta;

por lo cual es muy importante lo que mencionan los autores de la propuesta acerca de la función del cero, de acuerdo a su posición, pues mencionan que dicho contenido debe trabajarse desde el primero de primaria para que el niño adquiera más favorablemente este aprendizaje de manera más significativa y así lo asimile y relacione con otros contenidos como es el algoritmo de la resta.

Este programa de intervención no benefició de la misma manera a todos los niños, ya que si bien sí les ayudó a tener un mejor concepto y manejo del cero en la resolución de la resta, a algunos niños no les benefició del todo, pues no lograron mejorar su concepto acerca del cero y por consiguiente el resultado de la resta era incorrecto, quizá debido a que tenían una dificultad más profunda que va más allá del valor posicional del cero. Consideramos que el trabajo que se debe realizar con estos sujetos debe ser de una manera más individual como lo realizan los autores Kamii (1993), Hughes (1987) entre otros en sus investigaciones, y no de manera colectiva, además de que ellos trabajan con todos los números y no sólo con el cero como se desarrolló este programa de intervención.

Otro factor importante es que este programa de intervención diseñado por Aranda, Miranda, Soto, Soto y Zamilpa (1998), no se había llevado a la práctica y era difícil saber si podía funcionar o no, ya que los autores proponen que estas actividades se incorporen a los Planes y Programas de Estudio para trabajarse desde el primer año de primaria, por lo que consideramos que las actividades propuestas en esta intervención son acordes al enfoque que se está trabajando en los Planes y Programas vigentes, el enfoque constructivista. Al diseñar estas actividades los autores lo hicieron con el propósito de que a través del juego el sujeto desarrolle su conocimiento en cuanto a la lectura y escritura de cantidades en función del cero de acuerdo con su posición. La elaboración de las actividades tiene como objetivo propiciar la confrontación de ideas entre los sujetos y el profesor. El trabajar estas actividades ayuda como mencionan los autores de la propuesta, a que el sujeto tenga un aprendizaje significativo pues la información puede ser útil para aprender algo, pero el aprendizaje no se realiza, sino cuando el propio sujeto

lo hace suyo, reconstruye o reinventa determinado objeto de conocimiento o el procedimiento por el que se llega a un cierto resultado, tal es el caso de la resolución de la resta poniendo especial atención a la función del cero en base a su posición.

El programa de intervención dio resultados favorables, aunque pensamos que es conveniente que se siga llevando a cabo en otras instituciones, otros contextos para confirmar su funcionalidad, ya que con los sujetos que trabajamos dio resultados satisfactorios pero, no por ello podemos predecir su funcionalidad en otros contextos.

El programa de intervención resultó efectivo para que los alumnos modificaran su procedimiento erróneo de resolver la resta cuando se presenta el cero ocupando un valor posicional a un procedimiento correcto. Esto confirma lo que Bollás (1997) menciona, los contenidos son transmitidos por la escuela, el niño no los inventa por sí sólo, lo que sucede es que los procedimientos convencionales son asimilados por el niño a su propia lógica de pensamiento. Esto puede ser posiblemente por la carga de trabajo del profesor, porque tiene que impartir otras materias, trabajar fuera de clase, el contenido que está enseñando lo desarrolle demasiado de prisa sin detenerse a verificar si los niños lo aprenden, comprenden y asimilan de manera correcta o incorrecta.

Otra causa por la que los niños tienen problemas para resolver problemas aritméticos y que mencionan Dockrell y MacShane (1992) es que en las primeras etapas que se trabajan las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) el niño se encuentra con dificultades cognitivas y motivacionales en el sentido de aversión a trabajar con éstas por su fracaso con los números, por eso mismo, esa puede ser otra causa por lo que los sujetos tienen problemas con las operaciones aritméticas.

Los resultados que se describen anteriormente en la discusión no se dieron de forma espontánea, todo esto llevó un proceso que se fue desarrollando a lo largo de las actividades del programa de intervención lo que ayudó a que los sujetos obtuvieran buenos resultados.

Al comienzo del programa de intervención los sujetos que fueron apoyados con el programa para resolver las restas cuando el cero ocupa un valor posicional veían al cero como algo que no existía, el cero para ellos no valía y como no valía no lo tomaban en cuenta. Por ejemplo en la tercera actividad cuando realizaron la notación desarrollada ellos dijeron que el cero no valía cuando aparecía junto a una cifra. Se les explicó que el cero no vale cuando aparece a la izquierda de una cifra pero cuando aparece en medio de dos cifras o a la derecha de un número, el cero sí vale y que cuando el cero aparece en una cifra hace que el número que tiene a los lados adquiera un nuevo valor.

Esto lo reforzaron en la cuarta actividad cuando los niños tuvieron que ver cuál cantidad era mayor o menor al formar cantidades con tarjetas que tenían números del cero al nueve. En esta actividad los sujetos formaron cifras con las tarjetas, vieron que cifra era mayor o menor. Por ejemplo formaron la cifra de 405 y 138, los sujetos dijeron que el 405 era mayor que el 138, se les dijo que el 405 era mayor que el 138 porque el cero le da un nuevo valor a este número, ya que si el cero hubiera aparecido a la izquierda se habría formado el 045 lo que hubiera hecho que el 138 fuera mayor y si el cero estuviera a la derecha habría sido 450 lo que hace que sea mucho mayor que el 405.

En la sexta actividad los sujetos formaron restas con tarjetas y las tenían que resolver. Cuando formaron la resta y que apareció un cero ocupando un valor posicional en el minuendo ya fuera en las unidades o decenas y que el sustraendo fuera algún número mayor que el cero, se les explicó que no tenían que bajar el número mayor, sino lo que tenían que hacer es que el cero tiene que pedir una decena prestada al número que tiene a su izquierda para que el cero se convierta en diez y pueda restar la cantidad que aparece en el sustraendo y sacar el resultado; posteriormente la decena que pidió prestada la tiene que pagar o sumar al sustraendo que esta en las decenas o centenas según es el caso.

Según Maza (1989), Hughes (1987), Cortina (1997), Kammí (1993) y los autores de la propuesta, confirman que el sistema de numeración, el valor posicional, el manejo de unidades, decenas, centenas así como la notación desarrollada son

conocimientos previos que el niño debe tener claros para que haya un buen manejo en la ejecución del algoritmo de la resta cuando el cero se presenta con un valor posicional en dicha operación.

La didáctica presentada en este trabajo y la propuesta presentada por los autores antes mencionados, maneja conocimientos previos importantes que el niño a partir de ellos, construyó un conocimiento más profundo sobre la resolución del algoritmo de la resta cuando el cero se presenta con un valor posicional.

Según Aranda, Miranda, Soto, Soto y Zamilpa (1998), Huges (1987) y Castro, Rico y Castro (1995), mencionan que el número (0) representa dificultad en los niños, debido a que la secuencia numérica no suele comenzar por el cero, también porque le han venido creando ideas contradictorias sobre dicho número ya que el cero puede aparecer y desaparecer o simplemente lo elimina porque el cero no vale o simplemente es un problema de representación para ellos.

Por lo cual la línea de este trabajo va dirigida a ayudar al niño a que conceptualice y maneje el cero cuando este se presenta en el algoritmo de la resta, quitándole esas ideas contradictorias que tienen sobre el número cero.

CONCLUSIONES

Las conclusiones que aquí presentamos se circunscriben exclusivamente a los treinta y cuatro sujetos estudiados, por lo que no es recomendable generalizarlos a otros sujetos a menos que se realicen investigaciones con poblaciones más amplias que permitan constatar o refutar los datos aquí presentados.

A lo largo de esta investigación hemos presentado los procedimientos informales que utilizan los sujetos cuando ejecutan las operaciones matemáticas de sustracción cuando el cero presenta siempre un valor posicional. El análisis de dichos procedimientos da evidencia de concepciones en donde se entrecruza el conocimiento matemático que ofrece la escuela y los conocimientos previos con los que cuenta el sujeto. En este sentido, no se trata de procedimientos propiamente formales pero que, sin embargo, adquiere algunas características de éste.

De acuerdo con los datos encontrados en el análisis cualitativo, se puede observar que los procedimientos informales por lo general llevan a un resultado incorrecto. Por lo que conviene, para fines didácticos, centrarse, más que en el resultado, en el proceso o procedimiento que le permiten al niño llegar a él. En este sentido hemos conceptualizado los procedimientos informales a partir de la secuencia de las acciones que el sujeto realiza para resolver la tarea planteada (resta).

El análisis de dicha secuencia da indicio del marco de referencia que el sujeto hace al resolver las restas y sobre los errores que comete en dicha operación. Para constatar dicha ejecución al principio de la didáctica se aplicó un examen diagnóstico (pretest) para verificar que errores eran los más comunes, posteriormente se desarrolló el programa de intervención y al término de éste se aplicó el postest. Esto permite ver que el sujeto logró tener una ejecución más eficiente tanto en el procedimiento como en la resolución de las restas presentadas.

De este modo, los procedimientos informales son indicio de las concepciones del sujeto y son un punto de apoyo importante para elucidar la forma a través de la cual los sujetos, contribuyen el conocimiento matemático.

En el pretest, se observan, por una parte, procedimientos cercanos al convencional que son realizados por la mayoría de los niños y por la otra, procedimientos que son poco frecuentes.

Dentro del procedimiento más común podemos mencionar la conceptualización del cero como número independiente: Ejecutan la resta a partir de que el niño no le da valor al cero en el minuendo (al ubicarlo como número independiente) y coloca la decena del sustraendo en el resultado.

Ejemplo:

102	"A dos le quito uno me sobra uno, cero menos cinco me da cinco , a
<u>-51</u>	uno le quito cero me queda uno"
151	

Ubicado en estos procedimientos más comunes pero con una frecuencia menor, encontramos el procedimiento de desvalorización del sustraendo cuando el minuendo es cero, aquí el sujeto no le da valor al sustraendo cuando las unidades y/o decenas del minuendo son cero, en consecuencia el resultado es cero.

Ejemplo:

400 “A cero le quito tres, me queda cero, a cero le quito seis, me
-163 queda cero a cuatro le quito uno, me quedan tres”
300

Los resultados arrojados en el postest dan indicios importantes para afirmar que la intervención para ayudar a los niños a resolver adecuadamente las restas cuando se presenta el cero con un valor posicional, ayudó a que los sujetos estructuraran de una manera mas adecuada el procedimiento y en consecuencia, obtuvieran el resultado correcto.

Ejemplo:

109 “A nueve le quito cinco me quedan cuatro, a cero le quito siete no
-75 se puede entonces pido prestado una decena al uno y se convierte
034 en diez, a diez le quito siete son tres, la decena que pedí la pago
 abajo del uno y a uno le quito uno son cero”.

600 “A cero le quito siete no se puede y le pido prestado una decena
-257 cero esta decena se la presto el seis al cero para que se la preste
343 al otro cero y convierta en diez, a diez le quito siete son tres, la
 decena que pedí prestado se lo pago al cinco y se convierte en
 seis, a cero le quito seis no se puede le pido una decena prestada al
 seis y se convierte en diez, a diez le quito seis son cuatro y la
 decena que pedí se la pago al dos y se convierte en tres, a seis le
 quito tres son tres”.

Los errores mencionados anteriormente en el pretest permiten mostrar que el niño tiene conocimientos previos de cómo resolver la resta pero algunos de éstos son erróneos y como consecuencia su resultado es incorrecto. Un aspecto adicional es que esos errores revelan como los sujetos al resolver las restas las ven como

operaciones mecánicas con símbolos, sin comprender el valor que tiene cada número dentro de una cifra.

En conclusión el programa de intervención produjo mejoras significativas en el procedimiento y ejecución de las restas. Sin embargo creemos oportuno mencionar que no todos los alumnos lograron alcanzar un nivel óptimo en la ejecución de las restas.

Suponemos que los alumnos no lograron comprender cómo resolver las restas adecuadamente porque: a) no se les ha enseñado a utilizar el procedimiento adecuadamente para resolver las restas, y b) no tienen un buen manejo del valor posicional del cero.

De esta manera, después de aplicar la intervención, el instructor podría identificar a los sujetos que tienen problemas más complejos de los que sólo carecen del uso y práctica de estrategias para resolver las restas correctamente.

Por lo tanto el resolver las restas requiere estrategias que deben estar basadas en el contenido del valor posicional, para que los sujetos no solo den el resultado de la operación, sino que su procedimiento sea la herramienta fundamental para que el sujeto tenga una mejor comprensión del resultado al que llegó en la operación.

Por otro lado, la diferencia que caracteriza este estudio con los demás como Kamii, (1993) y Hughes, (1987) es que en este programa de intervención se manejó de manera colectiva, es decir las actividades se desarrollaron a través de equipos para tener un mejor manejo de los contenidos, y con el objeto de que las sesiones no resultaran monótonas.

En definitiva los resultados de la intervención permiten plantear las siguientes conclusiones.

1. En general los sujetos a los que se apoyaron con la intervención para ayudar a resolver las restas cuando se presenta el cero con un valor posicional obtuvieron mejoras significativas en la ejecución de las restas.

2. Las actividades estuvieron centradas en el cero según su posición para un adecuado manejo en la resolución de las restas.

3. El cero según su posición es un contenido base para aprendizajes posteriores y convencionales, como es la resolución del algoritmo de la resta.

Este modelo de intervención, conlleva sin embargo, algunas limitaciones. Aunque mejoran significativamente en la ejecución de las restas los alumnos y, no mejora de manera significativa en todos los casos. Por lo que tres aspectos pudieron haber influido en la eficacia del programa.

El primero hace mención al número de sesiones para cada actividad. Tal vez, las actividades fueron muchas y más aun cuando cada actividad tenía una duración de tres sesiones.

El segundo factor se refiere al número de sujetos que participaron en la intervención. El número de alumnos fue excesivo como para asegurar que la aplicación del programa fuera llevado adecuadamente y al igual en todos los sujetos.

El tercero, hace mención al tiempo destinado para cada sesión, algunos alumnos necesitaban más tiempo para realizar la tarea.

Estos problemas quedan abiertos a investigaciones futuras que permitan esclarecer de manera más precisa la causa de estas limitaciones.

Ante la problemática, consideramos pertinente que el contenido del cero según su posición en la resta se trabaje en los Libros de Texto desde segundo año en adelante, pues existen actividades que manejan el valor posicional de las cifras, pero no hay un bloque específico sobre el valor posicional del cero, por lo que sería recomendable que en los Planes y Programas de la SEP, se incluyera un bloque en donde se trabajará el cero según su posición y más cuando este se presenta en la resta.

Otra recomendación es que el docente reciba el apoyo de los padres, pues es necesario que el contenido que se enseña en el aula sea practicado en la casa para una mayor comprensión.

REFERENCIAS

ARANDA, R. R. G.; Miranda, F.; Soto, B. E.; Soto, M. D. y Zamilpa, A. O. (1998) La función del cero en base a su posición. **Revista Mexicana de Pedagogía** 39, 1-8.

BOLLÁS, G. P. (1997) **Dinámica tutorial y aprendizaje de las operaciones matemáticas de adición y sustracción en una escuela primaria**. Tesis de Maestría, Universidad La Salle, México.

BRUER, J. T. (1993) **Escuelas para pensar**. Barcelona: Paidós.

CARPENTER, T. P. (1986) **Conceptual knowledge as a foundation for procedural knowledge**. En Hierbert, J.: Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

CASTRO, E.; Rico, L. y Castro, E. (1995) **Estructuras aritméticas elementales y su modelización**. Bogota: Iberoamérica.

CORTINA, M. J. L., (1997) **Conceptualización y operación del valor posicional en diferentes situaciones. Un estudio con niñas y niños mexicanos de segundo, tercer y cuarto grados**. Tesis de Maestría. Universidad de las Américas A. C., México.

DOCKRELL, J. y McShane, J. (1992) **Dificultades del aprendizaje en la infancia. Un enfoque cognitivo**. Barcelona: Paidós.

ENGLISH, H. B. Y ENGLISH, A. CH. (1977) **Diccionario de Psicología y Psicoanálisis**. Buenos Aires: Paidós, pp. 158.

HUGHES, M. (1987) **Los niños y los números. Las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.** Barcelona: Planeta.

KAMII, C. K. (1992) **Reinventando la aritmética II.** Madrid: Aprendizaje Visor.

KAMII, C. K. (1993) **El niño reinventa la aritmética. Implicaciones de la teoría de Piaget.** Madrid: Aprendizaje Visor.

LANGFORD, P. (1989) **El desarrollo del pensamiento conceptual en la escuela primaria.** Madrid: Paidós.

MALDONADO, G. C. (1990) **Clave Diccionario de uso del español actual.** Madrid: SM, pp. 1594.

MAZA, G. C. (1989) **Sumar y restar. El proceso de enseñanza-aprendizaje de la suma y de la resta.** Madrid: Aprendizaje Visor.

NEMIROVSKY, M. y Carbajal, A. (1988) **La representación gráfica, en la matemática en la escuela I.** México: UPN-SEAN.

VARREN, H. C. (1991) **Diccionario de Psicología.** México: Fondo de Cultura Económica, pp.19.

ANEXOS

ANEXO 1

Solicitamos su participación como juez para que dictamine si las siguientes restas son equivalentes y poder aplicarlas como pretest y postest a niños de tercer año de Primaria. El propósito de estas operaciones es que el número cero aparezca con un valor posicional.

Dicha aplicación nos servirá para comprobar si el niño utiliza el cero en la operación y si le da un valor según la posición cuando se requiere.

Las operaciones señaladas sin comilla son para aplicarlas en el pretest y las señaladas con comillas son para aplicarlas en el postest.

Le solicitamos que marque una X una de las operaciones que presenta la comilla o doble comilla, la que usted considere que sea equivalente en dificultad a la operación que se utilizará como pretest.

Agradecemos su participación.

Ejemplo:

A	A'	A''
180	380	720
<u>-55</u>	<u>-68</u>	<u>-85</u>
A	A'	A''
190	780	190
<u>-75</u>	<u>-57</u>	<u>-87</u>
B	B'	B''
102	807	109
<u>-51</u>	<u>-95</u>	<u>-75</u>
C	C'	C''
220	680	250
<u>-15</u>	<u>-28</u>	<u>-35</u>
D	D'	D''
325	934	345
<u>-10</u>	<u>-20</u>	<u>-10</u>
E	E'	E''
305	407	401
<u>-283</u>	<u>-165</u>	<u>-231</u>
F	F'	F''

130	470	140
<u>- 23</u>	<u>- 44</u>	<u>- 37</u>
G	G'	G''
576	986	448
<u>-390</u>	<u>-760</u>	<u>-270</u>
H	H'	H''
227	557	386
<u>-109</u>	<u>-305</u>	<u>-209</u>
I	I'	I''
350	970	450
<u>-149</u>	<u>-458</u>	<u>-136</u>
J	J'	J''
400	600	600
<u>-163</u>	<u>-513</u>	<u>-257</u>

ANEXO 2

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

NOMBRE: _____
EDAD: _____

GRUPO: _____

INSTRUCCIONES: Realiza las operaciones que se te presentan a continuación.

190
- 75

102
-51

305
- 283

130
-23

576
-390

227
-109

350
-149

410
-103

307
-210

400
-163

ANEXO 3

EVALUACIÓN FINAL

NOMBRE: _____ GRUPO _____

EDAD: _____

INSTRUCCIONES: Realiza las operaciones que se te presentan a continuación.

780
- 57

109
-75

401
-231

140
-37

448
-270

386
-209

450
-146

510
-308

409
-320

600
-257

ANEXO 4

PROGRAMA DE INTERVENCIÓN PARA EL GRUPO EXPERIMENTAL

El programa que se presenta a continuación fue propuesto por Aranda, Miranda, Soto, Soto y Zamilpa (1998).

PRIMERA ACTIVIDAD

El pretest consistirá en presentarle al niño diez operaciones de resta para resolver, en dichas operaciones aparecerá número cero con un valor posicional. Después de que resuelvan las restas a cada niño se le pedirá que explique cómo fue que resolvió la resta, cómo le hizo para llegar al resultado que obtuvo.

SEGUNDA ACTIVIDAD

“Destapa cartas y descubre números”

Objetivo: El niño identificará el valor posicional de las cifras de un número.

Actividades: Las investigadoras integraran a los alumnos en equipos, a cada niño se le darán tres cartas al azar, cada carta contendrá un número y un dibujo, las investigadoras darán la instrucción de que las cartas tienen que estar con el número boca abajo y en línea horizontal; después se les dirá que volteen simultáneamente la primera carta de derecha a izquierda, posteriormente el niño dará lectura al número que se formó con la primer carta, las investigadoras darán énfasis que la primer carta de la derecha corresponde a las unidades; posteriormente se procederá a que el niño voltee la segunda carta del medio y dará lectura al número que se formó con las dos cartas volteadas, como en el caso anterior las investigadoras harán énfasis que la carta que voltearon corresponde a las decenas, las investigadoras pedirán a los alumnos que hagan la equivalencia de las decenas que les salió en la carta en unidades, así sucesivamente se trabajará con las centenas, después de haber volteado las tres cartas las investigadoras pedirán a los alumnos que escriban en su cuaderno el número formado por las tres cartas. Por último se le pedirá al niño que escriba en su cuaderno como se lee el número y que realice la notación desarrollada del mismo.

MATERIALES

Los materiales que se utilizaran en esta actividad serán cartas de póker que tendrán un valor, el cual será de:

A=1, J=0, Q=0, K=0

Las demás cartas tendrán el valor del número que contiene la carta del póker (2,3,4,5,6,7,8,9, no se utiliza el número 10).

TERCERA ACTIVIDAD

“El gordo de la lotería”

Objetivo: El niño relacionará la nomenclatura de los números con la lectura de los mismos.

Actividades: Las investigadoras les preguntarán a los niños que si han escuchado acerca de los sorteos de la lotería nacional, si conocen a los gritones que son los niños que sacan un número al azar y gritan el número premiado. Se escogerán a niños para que actúen como gritón, otro como anotador y otro como interventor.

Previamente las investigadoras tendrán que haber repartido a cada niño una tarjeta con un número de tres cifras, el niño verá que número tiene lo anotará en su cuaderno para que no se le olvide y después regresará la tarjeta para colocarlas en una caja.

El gritón sacará el billete al azar y lo gritará, el anotador escribirá la cantidad en el pizarrón para confrontarla con el grupo, el interventor confirmará si el número gritado es el correcto.

El niño que tenga el billete ganador pasará a realizarlo en notación desarrollada al pizarrón y los demás compañeros lo harán en su cuaderno; posteriormente se verificará si el niño ganador realizó correctamente la notación desarrollada en el pizarrón y los niños en su cuaderno, si no es así, entonces pasará otro compañero a realizarla.

Las investigadoras irán rotando al gritón, anotador e interventor conforme se vayan sacando los billetes.

MATERIALES

Billetes con números de tres cifras para el sorteo, premios (dulces) y una caja para los billetes.

Ejemplo:

Gritón saca: 1001 grita: 1001

Anotador escribe: 1001

Interventor confirma si es correcto o incorrecto.

CUARTA ACTIVIDAD

“Número mayor y número menor”

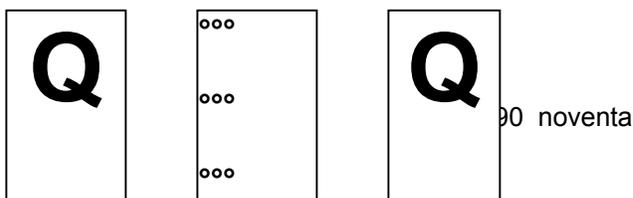
Objetivo: Analizar el valor posicional de los números.

Actividades: Las investigadoras integrarán al grupo en equipos, explicarán que las cartas J, Q, K valen cero, las A valen uno y las restantes valen según el número impreso. Como en actividades anteriores no se utilizarán cartas con el número diez. Se repartirán a cada niño las cartas al azar.

Se informará a los niños que la primera carta representa a las unidades, la segunda a las decenas y así sucesivamente. Las investigadoras indicarán a los niños que las cartas deberán estar boca abajo y no se destaparán hasta que se pongan de acuerdo en si gana el número mayor o menor, el niño leerá y escribirá la cantidad que formó.

MATERIAL: Barajas de poker.

Ejemplo: Deberá destapar las cartas de derecha a izquierda.



QUINTA ACTIVIDAD

“La lotería de números”

Objetivo: Leer y comparar cantidades.

Actividades: Las investigadoras explicarán a los niños que el juego es similar a la lotería tradicional. Se repartirá cada niño un cartón tamaño carta dividido en nueve partes iguales con números acorde al rango que estén manejando. Un niño barajará las tarjetas y gritará la cantidad de la tarjeta y la depositará sobre la mesa. En caso de que durante el juego, el niño que grita las cantidades cometa errores, se propiciara la confrontación entre los niños. El juego se repetirá varias veces para dar oportunidad a que todos los niños sean gritones y jugadores.

Materiales: Cartón dividido en nueve partes con números (tablero), tarjetas de papel. Y objetos para marcar los números.

500	03	103	200	150
		13	10	0
		500	50	03

SEXTA ACTIVIDAD

“Formar números”

Objetivo: Identificar el valor posicional de las cifras de un número dentro del algoritmo de la resta, así como su resolución.

Actividades: Las investigadoras formarán equipos de tres a cuatro niños donde se les presentarán tarjetas con números del cero al nueve y el signo -. A cada integrante de equipo se le repartirá un paquete de tarjetas. Las instrucciones serán que las investigadoras dirán en voz alta una cantidad, dicha cantidad la formarán los alumnos con las tarjetas que se les proporcionó. Cuando hayan formado el número, las investigadoras dirán que deberán escribirlo en su cuaderno y que a un lado de la cantidad escriban las unidades, decenas y centenas de esta cantidad y después hagan la notación desarrollada de ésta. Después las investigadoras dirán otra cantidad en voz alta y especificarán que deberán ponerla debajo de la primera cantidad que se les dio poniendo la tarjeta del signo - entre las dos cantidades. Con esta cantidad harán lo mismo que se hizo con la primera cantidad. Cuando hayan terminado de hacer lo que se les pidió las investigadoras pedirán a los alumnos que resuelvan la operación que se construirá con las cantidades que se formarán con los números. El juego se reforzará varias veces.

Materiales: Paquetes de números del 0 al 9 y el signo -.

SÉPTIMA ACTIVIDAD

Se le realizará a los niños un posttest que consiste en presentarles diez operaciones de resta para resuelvan, que incluyan el cero como valor posicional y se le preguntara al final cómo fue que llegaron al resultado de la operación, cómo fue que las resolvieron.

ANEXO 5

PROGRAMA DE INTERVENCIÓN PARA EL GRUPO CONTROL

PRIMERA ACTIVIDAD

El pretest consistirá en presentarle al niño diez operaciones de resta para resolver, en dichas operaciones aparecerá número cero con un valor posicional. Después de que resuelvan las restas a cada niño se le pedirá que explique cómo fue que resolvió la resta, cómo le hizo para llegar al resultado que obtuvo.

SEGUNDA ACTIVIDAD

“Rectas”

Objetivo: El alumno reforzará el conocimiento de líneas rectas, verticales y horizontales. También que la unión de rectas forman ángulos rectos.

Actividades: Las investigadoras llevarán un cuadro de unicel que contenga alfileres en forma de cuadros. Las investigadoras pedirán a los niños que dibujen en su cuaderno algo parecido a lo que se presentó con el unicel; las investigadoras pedirán a los niños que formen figuras rectas, verticales y horizontales con lápices de colores, cuando hayan terminado, las investigadoras harán preguntas como: ¿se hicieron rectas? ¿qué tipos de rectas hay?

Las investigadoras pedirán a los niños que las respuestas de las preguntas sean contestadas en su cuaderno.

Materiales: Un cuadro de unicel, alfileres e hilos.

TERCERA ACTIVIDAD

“Recta numérica”

Objetivo: El alumno reforzará la noción de recta, espacio, antecesor y sucesor.

Actividades: Las investigadoras le pedirán a un niño que pase al frente del pizarrón y le darán soldaditos, con ellos le pedirán que forme una hilera y, entre cada soldado, las investigadoras le dirán que debe haber el mismo espacio, ya formada la hilera de las investigadoras presentarán una recta al niño para que se dé cuenta que al formar la fila de soldaditos se forma una línea recta con números sucesivos, asimismo, le harán notar que no se puede saltar de un número a otro, ya que la formación de la recta debe ser con números secuenciados.

Las investigadoras harán preguntas como: ¿antes del cinco qué número está? ¿después del número siete cuál número sigue?

Pasarán varios alumnos a desarrollar esta actividad. Al término, las investigadoras pedirán a los alumnos en su cuaderno, una recta con números con el dibujo que más les guste. Se les pedirá escribir el sucesor y antecesor de algunos números que las investigadoras les darán.

Materiales: Rectas de papel pegadas en hojas bond, soldaditos de cartón, números de papel, cuadernos.

CUARTA ACTIVIDAD

“Cruce de rectas para formar un punto”

Objetivo: El alumno reforzará la noción de cruce de rectas cuyo cruce forma un punto en el espacio.

Actividades: Las investigadoras darán a cada alumno una hoja cuadriculada donde estará dibujado un cruce de rectas y se les darán animales (patos, gatos, pollo). Las investigadoras darán las siguientes instrucciones: si la patita está en el número dos y camina derecho hacia arriba y el patito que se encuentra en la otra recta en el número cinco y camina todo derecho en qué punto del espacio se encontrarán. Así sucesivamente serán las demás instrucciones con todos los animalitos que las investigadoras les dieron a los niños.

Al término de la actividad las investigadoras recogerán las hojas.

Materiales: Hojas cuadriculadas y animales de papel.

QUINTA ACTIVIDAD

“Orden de un par de números”

Objetivo: Que el alumno comprenda cómo va el orden de un par de números.

Actividad: Las investigadoras darán los materiales de la actividad anterior a los niños, después las investigadoras dirán a los niños que el hijo de la patita y el patito quiere llegar al punto donde se encontraron sus papás; por lo cual las investigadoras les darán un ejemplo: si la patita esta en el número tres y el patito en el número cinco el punto en donde se encontrarán es en el (3,5). Las investigadoras explicarán que el orden depende primero en decir el número de las horizontales y después el de las verticales, así sucesivamente se hará con los diferentes animalitos que tendrán los niños.

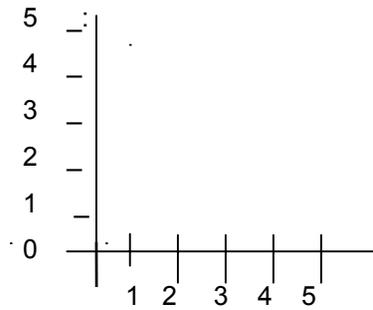
Materiales: Hojas de papel, animalitos de plástico.

SEXTA ACTIVIDAD

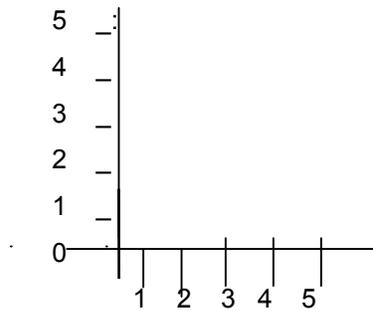
“Prueba Final”

Los niños realizarán las siguientes actividades.

¿En qué punto se van a encontrar la osita y el osito dentro de estas rectas?

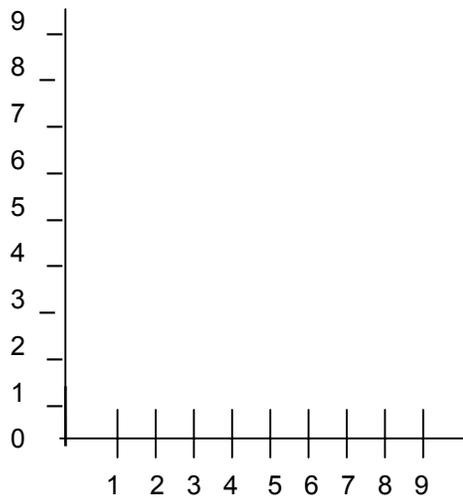


¿Cuál es el punto en donde se encontrarán la ratoncita y el ratón dentro de este cruce de rectas?



En la siguiente recta marca el punto de estos pares de números

- | | | |
|-------|-------|-------|
| (5,3) | (7,5) | (7,2) |
| (9,3) | (8,4) | (4,9) |
| (2,4) | (3,7) | (6,6) |



SÉPTIMA ACTIVIDAD

Se le realizará a los niños un postest que consiste en presentarles diez operaciones de resta para que resuelvan, que incluyan el cero como valor posicional y se les preguntará al final cómo fue que llegaron al resultado de la operación, cómo fue que la resolvieron.

