



**Universidad Pedagógica Nacional**

---

---

**Maestría en Desarrollo Educativo**

**Desarrollo de habilidades espaciales  
a través del uso de materiales concretos  
en niños de sexto grado de educación primaria.**

**T E S I S**

**Que para obtener el grado de:  
MAESTRO EN DESARROLLO EDUCATIVO  
LÍNEA: EDUCACIÓN MATEMÁTICA**

**P r e s e n t a :  
Luis Francisco García Pérez**

**Directora de Tesis:  
Dra. Mariana L. Sáiz Roldán**

*México, D. F. 2007*

# ÍNDICE

	Pág.
<b>INTRODUCCIÓN</b> .....	<b>I</b>
<b>CAPÍTULO UNO</b> .....	<b>1</b>
Planteamiento del problema	
1.1. Justificación .....	1
1.2. Problema de investigación .....	3
1.3. Preguntas de investigación .....	3
1.4. Objetivos .....	4
1.5. Instrumentos y materiales .....	4
<b>CAPÍTULO DOS</b> .....	<b>6</b>
Marco teorico	
2.1. Historia de la perspectiva .....	7
2.1.1. Las habilidades espaciales en las artes gráficas: el dibujo	
2.1.2. Uso de las matemáticas en la composición pictórica del renacimiento	
2.1.3. Métodos para la composición en perspectiva	

2.2. El desarrollo de habilidades espaciales .....	18
2.2.1. La interpretación y producción de información figurativa	
2.3. Los componentes de las habilidades espaciales .....	22
2.3.1. Visualización espacial	
2.3.2. Manipulación espacial	
2.3.3. Representación espacial	
2.4. Las habilidades espaciales y el <i>curriculum</i> .....	36
2.4.1. La representación tridimensional en el <i>curriculum</i> mexicano actual	
2.4.2. La geometría en el <i>curriculum</i> de Estados Unidos	
2.5. Consideraciones finales .....	44
 <b>CAPÍTULO TRES</b> .....	 <b>46</b>
 Método	
3.1. Descripción de la intervención pedagógica .....	46
3.1.1. Sujetos	
3.2. Validación de resultados .....	47
3.3. Descripción de los instrumentos de intervención .....	49
3.3.1. Entrevista inicial	
3.3.2. Entrevista final	
3.3.3. Sesiones de instrucción	
3.3.3.1. Visualización	

3.3.3.2. Manipulación	
3.3.3.3. Representación	
3.4. Descripción de los materiales .....	53
3.4.1. Cubos de madera	
3.4.2. Cubo de soma	
3.4.3. Papel isométrico	
3.4.4. Vistas ortogonales	
<b>CAPÍTULO CUATRO .....</b>	<b>58</b>
Presentación y análisis de datos de la intervención pedagógica	
4.1. Descripción de categorías de análisis .....	58
4.2. Presentación de resultados de la entrevista inicial .....	64
4.3. Análisis de la entrevista inicial .....	67
4.3.1. Visualización espacial	
4.3.2. Manipulación espacial	
4.3.3. Representación	
4.4. Presentación de resultados de la entrevista final .....	79
4.5. Análisis de la entrevista final .....	81
4.5.1. Visualización espacial	
4.5.2. Manipulación espacial	
4.5.3. Representación	
4.6. Comparación de resultados .....	91

4.6.1. Visualización espacial

4.6.2. Manipulación espacial

4.6.3. Representación

**CONCLUSIONES** ..... **103**

**BIBLIOGRAFÍA** ..... **108**

**ANEXOS**

## INTRODUCCIÓN

En las matemáticas se estudian las formas en el espacio, como conjunto de puntos, superficies y sólidos. Se estudian las propiedades de las diferentes formas, las relaciones entre ellas y su medición, a esto se le denomina geometría. La geometría plana trata de los puntos, líneas y figuras que están en un solo plano, constituidas por dos dimensiones, largo y ancho. Al estudio del mundo tridimensional se le denomina geometría del espacio.

La geometría requiere inicialmente dominar relaciones espaciales, así como el ejercicio de varias facultades (lo cual lo ubica en el terreno del aprendizaje) como son vista, tacto y movimiento que permiten al niño, tempranamente, distinguir figuras cerradas y abiertas, diferenciar el espacio exterior del interior, las nociones de frontera, las diferentes posiciones del mismo individuo en su entorno, etc.

En la escuela primaria la geometría está inmersa en los programas de estudio para lograr en el alumno el conocimiento del mundo, la interpretación de las formas y el espacio, mismas que le ayuden a resolver y transformar las situaciones problemáticas que se le presentan.

Sin embargo, en general se encuentra que los maestros dan poca importancia al estudio de la geometría y particularmente cuando se trata de la interpretación y representación espacial. Por

ello en el presente documento se expone la necesidad de trabajar actividades que promuevan el desarrollo de habilidades espaciales como la visualización y la interpretación de información espacial y con ello el aprendizaje de la geometría. Así, esta tesis reporta los resultados de una intervención didáctica para favorecer algunas de las habilidades relacionadas con la visualización espacial.

En el capítulo uno, se expone el problema de investigación que se tomó en cuenta para desarrollar el trabajo, los objetivos que guían esta investigación; así como, los instrumentos y materiales utilizados.

En el segundo capítulo, se hace mención de las bases teóricas que sustentan la investigación. El marco teórico está separado en varios aspectos. En un primer momento se habla de los procedimientos que se han utilizado a lo largo de la historia para realizar representaciones gráficas. En un segundo momento, también se mencionan las investigaciones previas relacionadas con el desarrollo de las habilidades espaciales, de ahí se retoman los conceptos básicos de visualización, manipulación y representación espacial. Por último, se identifican los propósitos que tienen los planes de estudio de México y Estados Unidos de Norteamérica para el desarrollo de las habilidades espaciales.

En el tercer capítulo, se rescatan los aspectos metodológicos que guiaron el trabajo. Se describen los materiales utilizados en las entrevistas y las sesiones de trabajo. También se presentan los materiales diseñados y adaptados, los cuales fueron inspirados en investigaciones previas.

En el cuarto capítulo, se describen las categorías utilizadas para el análisis de los instrumentos. Se presentan tablas que permiten identificar los resultados obtenidos durante las entrevistas inicial y final, se hace un análisis de estos resultados basándose en las habilidades de visualización, manipulación y representación espacial. Posteriormente se comparan los datos obtenidos en dichas entrevistas.

Por último, se dan las conclusiones de esta investigación y se muestran ejemplos de las hojas de trabajo utilizadas durante las entrevistas y las sesiones de intervención.

## CAPÍTULO I

### PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En este capítulo se hace mención de los procedimientos generales que guían este trabajo. Se identifican las causas por la que surge la necesidad de trabajar con las habilidades espaciales. Se plantea como problema de investigación la forma cómo el uso de materiales concretos puede facilitar el desarrollo de las habilidades espaciales en niños de primaria. Se comentan los objetivos, los instrumentos y los materiales utilizados.

#### 1.1. Justificación

La enseñanza de la geometría, en la escuela primaria, se ha realizado en varias ocasiones con ayuda de material impreso, donde se manejan algunos convencionalismos que no han sido bien enseñados. Tal es el caso de representar con un dibujo un cuerpo geométrico, trazándole líneas punteadas que indican la existencia de aristas en las caras anteriores. “Este lenguaje gráfico y representación son aspectos que deben construirse” (Gardner, 1994, p. 223).

Anteriormente, la Educación Básica, se limitó a la enseñanza de la medición y a la descripción de figuras y objetos simples (triángulo, rectángulo, cuadrado, cubo, etc.). De igual forma, el estudio de las figuras geométricas se enfocaba a las características observables, pero sin

deducir relaciones entre ellas. La enseñanza se realizaba a través de descripciones y un vocabulario convencional.

La enseñanza de la Geometría se transformó después de los años 70' ya que se empezó a dar importancia a la manipulación de los objetos por parte de los alumnos. Entonces aparecen en los programas a nivel mundial, actividades sobre cuadrículas: puntos en el plano, trayectorias y transformaciones geométricas: como traslaciones, agrandamientos y simetría. (APMEP).

La enseñanza de la geometría presentó entonces dos aspectos esenciales que interactúan constantemente el uno sobre el otro:

- Uno consiste en actuar sobre los objetos reales y obtener información.
- El otro consiste en organizar esas informaciones a fin de prever la posibilidad o imposibilidad de realizaciones materiales (construcciones, dibujos, etc.)

En México, en el Plan y Programas de Estudio de Educación Primaria (SEP, 1993) entre los propósitos generales de Matemáticas, se propone el Desarrollo de la Imaginación Espacial, a través de los contenidos de Geometría. Según Alsina, Burgués y Fortuny (1991), las habilidades geométricas vienen condicionadas por las habilidades espaciales, entendiéndose éstas como las habilidades de generar, retener y manipular imágenes espaciales abstractas. Estas imágenes mentales están determinadas por tres tipos de representaciones espaciales interrelacionadas. Los productos espaciales, el pensamiento espacial y la memoria espacial. Los productos espaciales son los productos externos, por ejemplo una maqueta. El pensamiento espacial se refiere a la habilidad de manipular mentalmente información espacial, como predecir los cambios de

posición que un cuerpo tendrá después de ciertos movimientos. La memoria espacial es evocar mentalmente una imagen percibida con anterioridad.

## **1.2. Problema de investigación**

La inquietud que generó este trabajo se describe de la siguiente forma:

*“¿En qué medida el uso de materiales concretos facilita la construcción de las habilidades espaciales en niños de educación primaria?”.*

*Para eso se plantea el uso de materiales:*

- 1) Construcciones cúbicas.*
- 2) Policubos: cubo de Soma.*
- 3) Papel Isométrico*

## **1.3. Preguntas de investigación**

- ¿De qué manera los niños utilizan diferentes habilidades espaciales, tales como: visualización e interpretación espacial?
- ¿Cuáles son las dificultades que encuentran los alumnos al poner en práctica estas habilidades espaciales?
- ¿De qué manera el uso de materiales concretos favorece el desarrollo de estas habilidades?

#### **1.4. Objetivos**

- Identificar las habilidades espaciales: visualización e interpretación espacial que dominan niños de 6º grado de primaria.
- Detectar las dificultades que encuentran los alumnos al poner en práctica sus habilidades espaciales.
- Fortalecer las habilidades espaciales a través de algunas actividades con el uso de materiales concretos.
- Identificar progresos de las habilidades espaciales en los niños, posteriores a las actividades.

#### **1.5. Instrumentos y materiales**

La entrevista inicial sirve para identificar las habilidades espaciales de visualización, manipulación y representación espacial que dominan niños de sexto grado de educación primaria. Las tareas que se manejan radican en conteo de cubos, rotación de objetos, representación gráfica, identificación de cubos, identificar diferentes puntos de vista. La entrevista se realizó en forma individual y con la ayuda de hojas de trabajo.

La entrevista final sirvió para identificar los progresos de las habilidades espaciales en los niños de sexto grado de primaria, posterior a las actividades. Las actividades diseñadas en la entrevista final son muy similares a las presentadas en la entrevista inicial.

Para las sesiones de instrucción se diseñaron actividades que permitían desarrollar las habilidades espaciales de los niños, las cuales estaban divididas en tres aspectos: visualización, manipulación y representación espacial. Estas actividades se les presentaron a los alumnos de forma gradual, es decir, de las más sencillas a las más complejas.

Los materiales empleados consistieron en cubos de madera, piezas del cubo de Soma, papel isométrico y hojas de trabajo. Los cubos de madera son de una pulgada y sirven para realizar variadas construcciones. El cubo de Soma es un rompecabezas tridimensional para formar un cubo de  $3 \times 3 \times 3$ . El papel isométrico es una hoja impresa con puntos que forman una retícula regular donde se pueden formar triángulos equiláteros.

En las sesiones de instrucción se utilizaron hojas de trabajo las cuales tuvieron actividades gráficas de conteo; manipulación de información espacial al realizar rotaciones y traslaciones; así como representaciones en papel isométrico.

## **CAPÍTULO II**

### **MARCO TEÓRICO**

En este capítulo se presentan los antecedentes tomados en cuenta para el desarrollo de la investigación reportada en esta tesis. Se inicia con un panorama general del desarrollo de la perspectiva en la historia del arte ya que en este estudio se utiliza la representación en perspectiva como una actividad para desarrollar las habilidades espaciales de visualización, manipulación y representación espacial.

En la segunda parte de este capítulo se presentan resultados relacionados con el tema de investigación de esta tesis. Con base en ello, en el tercer apartado, se presenta y analiza el currículo mexicano para la educación primaria en relación con los contenidos del eje de geometría relacionados con el desarrollo de habilidades espaciales y se hace un contraste con los estándares curriculares para la enseñanza de las matemáticas que orientan la educación en los Estados Unidos de Norteamérica.

## **2.1. Historia de la perspectiva.**

En este estudio se utiliza la representación en perspectiva como una actividad para desarrollar las habilidades espaciales de visualización, manipulación y representación espacial. Por lo cual se considera necesario revisar los métodos utilizados por artistas para lograr la representación del espacio.

Desde que nacemos estamos acostumbrados a interpretar representaciones planas de nuestro mundo tridimensional. La fotografía y, por tanto, el cine, nos han acostumbrado a interpretar estas imágenes. Sin embargo, antes de que se inventara la fotografía, eran los pintores los encargados de representar la realidad en lienzos (planos) y la historia del arte nos muestra que al principio estas representaciones no eran realistas, en el sentido de que las relaciones entre las figuras dibujadas no eran acordes con la realidad.

Muchos artistas se dedicaron a estudiar esta situación. Para ello, la geometría fue una herramienta de indudable valor. A su vez, el desarrollo de técnicas que permitieran dar el efecto de profundidad y relatividad de tamaño de los objetos representados contribuyó al desarrollo de la geometría.

La historia del arte nos muestra así que la habilidad de representar el mundo en un plano no es algo innato sino que se trata de técnicas que deben ser aprendidas. Dado que el foco de estudio de esta tesis es el dibujo geométrico mediante el uso de papel isométrico se considera

importante mostrar cómo se resolvió históricamente el problema de representar la realidad tridimensional en un plano.

En este apartado se mencionan diferentes formas como el hombre ha representado gráficamente objetos tridimensionales. Éstas han surgido por la necesidad de los hombres de hacer dibujos cada vez más realistas y sustentados en conocimientos científicos y matemáticos. Entre éstos se encuentran el descubrimiento de la perspectiva durante el Renacimiento con el uso de un solo punto de vista de Filippo Brunelleschi y la conservación de proporciones de Alberto Durero. Posteriormente se menciona la utilidad de la perspectiva oblicua como medio para lograr nuevas representaciones.

### **2.1.1. Las habilidades espaciales en las artes gráficas: el dibujo.**

La búsqueda de una correcta representación de los objetos reales ha estado siempre subordinada a cada época artística de las que han nacido grandes composiciones de la historia del arte. En este documento se hará una diferencia entre el uso de técnicas intuitivas para la realización de obras gráficas y el uso de métodos matemáticos.

La composición esencialmente plana del arte antiguo contiene múltiples elementos que anuncian la perspectiva geométrica. No se trata tanto de intentos fallidos sino de auténticas soluciones que evocan la tercera dimensión sin imitarla, utilizándola mediante ingeniosos procedimientos intuitivos de gran fuerza visual y calidad estética (Parramón, 1998).

Durante la prehistoria, los artistas que realizaron obras pintaban a lo largo y ancho de los muros de las cavernas y no tenían normas fijas de ordenación, pero sí poseían sensibilidad suficiente para lograr efectos dramáticos. Después, los artistas egipcios idearon un sistema de medidas específico para la realización de sus figuras, ahora se sabe que se valían de varias cuadrículas que cubrían las pinturas murales de una tumba. Era evidente que estas líneas servían como sistema fijo de proporciones tendientes a facilitar la composición pictórica mural. La medida básica a partir de la cual construían los egipcios sus figuras era el puño (distancia entre los nudillos y la muñeca).

Posteriormente los artistas griegos solucionaron el problema de la tercera dimensión, encontraron la sensación de profundidad y espacio: superponían figuras y las escorzaban. Cuando el escultor Policleto creó el primer canon (regla, norma) de proporciones humanas estableció la medida de siete cabezas y media para la figura masculina. Durante el periodo romano las perspectivas romanas siguieron un patrón arbitrario y no se ajustaron a un único punto de vista.

Como es visto, el uso de la matemática para la obtención de una representación real fue sólo de forma intuitiva, lo que ocasionó la búsqueda de nuevos procedimientos para este fin. No es sino hasta el Renacimiento cuando se adoptan métodos científicos para la elaboración de diseños y pinturas.

### **2.1.2. Uso de las matemáticas en la composición pictórica del Renacimiento.**

A fines del siglo XII se les daba importancia a las matemáticas dentro de la enseñanza de ciertos oficios. Se mostró entonces la utilidad de las matemáticas para los artesanos. Aunado a ello se vio el nacimiento de la banca y con ella los banqueros. Por lo tanto, actividades como el comercio y la banca estimularon la educación matemática elemental. Se crean entonces, las *escuelas ábaco* donde se enseñó la “aritmética comercial”. Esta consistía en resolver problemas aritméticos y algebraicos relacionados con la venta y compra de productos, la enseñanza de la escritura numérica arábiga y algunos problemas geométricos.

La composición artística tiene su momento culminante en el Renacimiento italiano. Con ello el uso de métodos matemáticos que proporcionarían un realismo racional a sus producciones. La invención de la perspectiva abre nuevas posibilidades. Los grandes frescos, el retrato, las escenas mitológicas, etc., exigen nuevas formas y, para obtenerlas, los artistas desarrollan una actividad creativa para la historia del arte. Es el gran momento de la perspectiva y la composición pictórica (Parramón, 1998).

A partir de que surgen los famosos artistas en el siglo XV, es cuando ellos llegan a ser más respetados debido a su educación, aunque ahora se sabe que ellos llegaron a ser educados con el oficio de artesanos (Field, 1999). Es el caso del escultor Miguel Ángel Bounarrotti (1475-1564), quien buscó cambiar el nombre de artesano por el de artista, ya que era visto como un trabajo inferior, a diferencia de las ocupaciones profesionales de la época.

Otros artistas, como Filippo Brunelleschii (1377-1446) y Lorenzo Ghiberti (1377-1455) también fueron entrenados como orfebres. Brunelleschii dio el toque final al domo de la Catedral de Florencia. Su trabajo incluyó pintura, escultura, diseño y construcción en bronce. Ghiberti se encargó de las llamadas “Puertas del Paraíso” en el Baptisterio de Florencia. Este trabajo, realizado sobre bronce en relieve, muestra claramente las habilidades matemáticas, ya que las escenas se encuentran en perspectiva. Aún así, se pueden observar algunos errores que denotan la falta de una técnica matemática para la obtención de un efecto óptico total, es decir, aún se utilizaban métodos más naturalistas que sistemáticos. Esto muestra la transición que tuvo la perspectiva durante el siglo XV.

En el siglo XV, un hecho con influencia en el desarrollo de la geometría fue la conjunción entre ciencia, arte y técnica (Rey Pastor y Babini, 2000). Con esto y con la herencia de obras griegas y árabes sobre la óptica geométrica, aparece la perspectiva como rama de la geometría. Anteriormente, los escritos sobre perspectiva, en el siglo XIII, se referían a aspectos ópticos, donde se consideran los rayos visuales los que parten de los objetos y no del ojo, como lo llegó a hacer el geómetra griego.

### **2.1.3. Métodos para la composición en perspectiva.**

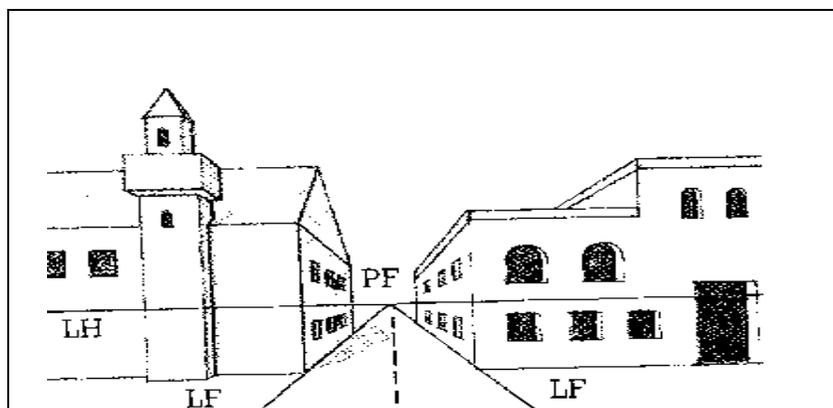
A continuación se mostrarán tres métodos que se han utilizado para la representación en perspectiva. Con ellos se logran trabajar tres aspectos importantes: el uso de un solo punto de vista, la conservación de proporciones y la perspectiva oblicua.

- Brunelleschii y el uso de un solo punto de vista

La teoría y la práctica de la perspectiva fueron el resultado de un proceso lento de aproximaciones sucesivas, impulsado por una multitud de artistas de genio. Brunelleschii fue el primero en formular en la práctica sus principios esenciales. El Renacimiento tiene un antes y un después de Brunelleschii. A partir de él, la pintura toma el camino de la realidad y del naturalismo.

El arquitecto florentino Filippo Brunelleschii (1377-1446) fue un genial creador y el primer artista que demostró los principios de la perspectiva racional. Estos principios son muy sencillos; consisten en dibujar partiendo de un punto de vista único, haciendo que las paralelas de la escena converjan hacia un mismo punto de fuga. Este punto de fuga se encuentra sobre la línea de horizonte y coincide con el punto de vista, es decir, se sitúa a la misma altura y justo enfrente del punto de vista desde el que está tomado el panorama.

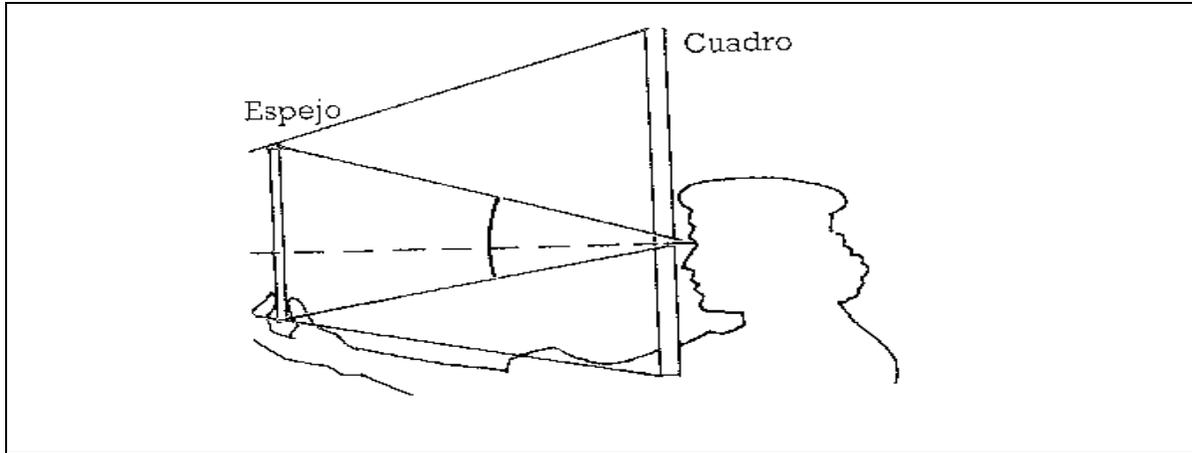
En esta explicación aparecen ya casi todos los conceptos básicos de toda representación en perspectiva: el punto de vista, línea de fuga, línea de horizonte y punto de fuga. (Ver figura 2.1.)



*Fig. 2.1. En este dibujo se puede apreciar el punto de vista central o punto de fuga (PF) y sobre el cual esta ubicada la línea de horizonte (LH) y las líneas que convergen hasta el punto de fuga (LF). De (Parramón, 1998).*

En 1420, Brunelleschii demostró su teoría sobre la perspectiva racional. Para ello pintó una representación meticulosa de la Plaza de la Signora, de Florencia, vista desde la entrada de la catedral. Terminado el cuadro, el arquitecto hizo un agujero en la parte central del cuadro, justo al nivel de la línea de horizonte, en el lugar correspondiente al punto de vista de la escena. Mirando por el agujero por la parte posterior del cuadro, mientras se sostenía un espejo frente a él, el observador podía ver una representación perfectamente fidedigna de la plaza, como si realmente estuviera mirándola desde la entrada de la catedral. (Ver figura 2.2.)

Aunque Brunelleschii no explica cuáles eran los principios de esta perspectiva racional, está claro que estaba familiarizado con sus conceptos básicos. Desde el día de su ingeniosa demostración, fue aclamado como el inventor de la perspectiva geométrica. El naturalismo visual que se deriva del método de Brunelleschii influyó de manera radical en la composición artística del Renacimiento. A partir de aquel momento, los artistas fueron dejando de lado los métodos medievales basados en la intuición y en unas perspectivas más o menos aproximadas (con puntos de fuga a distintos niveles, sin un punto de vista único) para adoptar el rigor racional introducido por el gran arquitecto.



*Figura 2.2. En esta demostración Brunelleschii debió mantener su vista fija y un ojo cerrado. El demostró así, que sólo de esta forma es posible obtener una representación en perspectiva racional. De (Parramón, 1998).*

- El artificio de Durero y la conservación de proporciones.

El gran artista Alberto Durero (1471-1528) inventó un artificio para dibujar proporcionadamente y en perspectiva. En un famoso grabado, el pintor representó a un artista dibujando una modelo a través de un gran marco con subdivisiones. El pintor aparece representado como si fuera un delineante, con la cabeza inmóvil, con un monolito vertical que le indicaba a qué altura debía situar su punto de vista; mirando a través de una rejilla de alambre colocada en posición vertical, por la que ve a la modelo en escorzo. Esta perspectiva hace que las zonas más distantes de la figura se vean más pequeñas de lo que son en realidad, y que las más cercanas se vean más grandes.

Sobre la mesa de dibujo hay un papel del mismo tamaño que la rejilla, y cuadriculado como ésta, en el que el artista va dibujando lo que percibe a través de ella: ángulos, curvas y longitudes de línea exactamente a los que ve a través de las líneas verticales y horizontales de la

rejilla. Lo se que está viendo y dibujando es exactamente el cuerpo de la modelo en escorzo (Ver figura 2.3.).

Lo que consiguió la perspectiva del Renacimiento, fue codificar y sistematizar un método para eludir el conocimiento que tenía el artista de la formas, y proporcionar un sistema mediante el cual se pudieron dibujar los objetos tal y como se mostraban ante los ojos del espectador. El sistema funcionó de maravilla y solucionó el problema de cómo crear la ilusión de profundidad sobre el plano, es decir, de cómo recrear el mundo visible.



*Figura 2.3. Esta es una obra de Alberto Durero: Delineante dibujando a una mujer en perspectiva, donde explica claramente su método. De (Edwards, 2000)*

El aparato de Durero se transformó en un sistema matemático que permitió a los pintores, a partir del Renacimiento, superar su resistencia a las distorsiones ópticas de las formas verdaderas de las cosas y poder dibujarlas con realismo. Como Durero, los artistas modernos saben que la rejilla permite una gran exactitud.

- La perspectiva paralela

Se llama perspectiva paralela a la que se proyecta hacia un único punto de fuga. Se da cuando los objetos del tema tienen su cara anterior paralela al plano del cuadro y el resto de caras perpendiculares a ese mismo plano. El punto de fuga corresponde exactamente a la posición del punto de vista, es decir, colocado en el centro visual del tema y a la altura del horizonte. Los conceptos fundamentales se explican a continuación.

Toda representación en perspectiva parte de un punto de vista que coincide en elevación con el punto de fuga. El punto de fuga se sitúa siempre sobre la línea del horizonte y en él convergen las líneas de fuga del tema. La superficie sobre la que se representa la perspectiva se conoce como plano del cuadro, que vendría a ser, situándolo en un mundo tridimensional, un plano imaginario perpendicular al plano del suelo sobre el que se halla la línea de tierra. Siguiendo en el mundo tridimensional, la línea del horizonte será la intersección del plano de cuadro con el plano del nivel visual del observador; la distancia entre la línea de tierra y la línea de horizonte será igual a la distancia entre el suelo y los ojos del observador.

El clásico tema en perspectiva son las vías del tren que se alejan hasta cortarse en algún punto del horizonte. Una persona situada en el andén podrá observar cómo las vías y todos los edificios paralelos a ellas tienden sus líneas de fuga hacia un mismo punto en el horizonte. (Ver figura 2.4.)

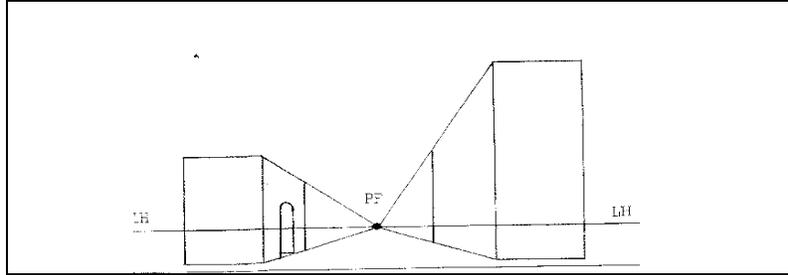


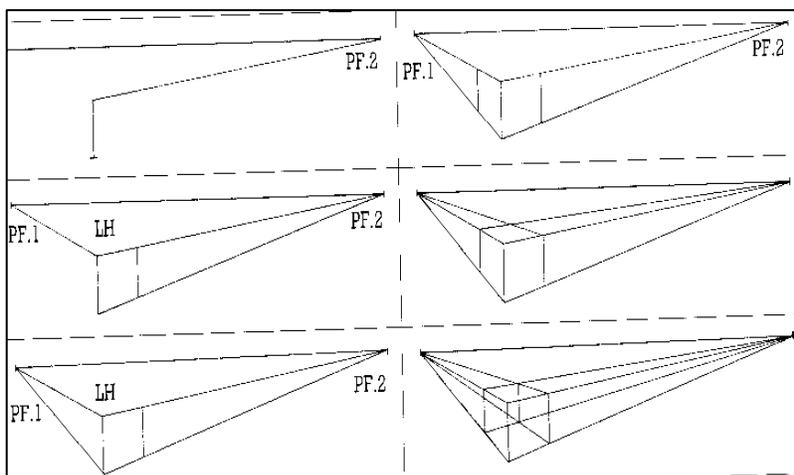
Figura 2.4. En la perspectiva paralela existe sólo un punto de fuga. De (Parramón, 1998).

- La perspectiva oblicua

La perspectiva oblicua recibe este nombre por representar los objetos no de frente sino de lado, oblicuamente. Por ejemplo, en el caso del dibujo de una casa, la perspectiva paralela supone un punto de vista en un plano paralelo a su fachada; la perspectiva oblicua implica un punto de vista situado frente a una de sus cuatro esquinas. Si en la perspectiva paralela, las fachadas laterales tendían hacia un mismo punto de fuga, en la perspectiva oblicua las fachadas situadas a ambos lados de la esquina tienden a un punto de vista diferente. Los dos puntos de fuga permanecen en la línea del horizonte, pero ya no coinciden con el punto de vista único.

Para dibujar un cubo en perspectiva oblicua se parte de una de sus aristas. Sobre ella se sitúa la línea del horizonte y en esta línea, a ambos lados de la arista, dos puntos de fuga. Desde los dos extremos de la arista se trazan un total de cuatro líneas de fuga (dos hacia el primer punto de fuga y dos hacia el segundo). Sobre las líneas del punto de fuga de la derecha se traza una paralela a la arista y se consigue definir una cara lateral del cubo, la otra cara se obtiene por el mismo procedimiento a partir de las líneas de fuga de la izquierda. Después, desde las esquinas superiores de cada una de las caras se trazan líneas de fuga (hacia el punto de fuga de la derecha

en el caso de la esquina izquierda y hacia el punto de fuga de la izquierda en el caso de la esquina derecha). Con esto queda definida la cara superior del cubo (Ver figura 2.5.).



*Fig. 2. 5. En la perspectiva oblicua los objetos representados tienen dos puntos de fuga.  
De (Parramón, 1998).*

A través de la perspectiva oblicua es posible representar los objetos con un número mayor de caras visibles y con una cara de frente. En este trabajo se utiliza el papel punto o isométrico como un auxiliar para acercarse a este tipo de representaciones oblicuas. Como se verá posteriormente el papel isométrico (Malara, 1999) permite, por la posición de sus puntos, un trazo sencillo y proporcional de los objetos cúbicos que se presentan a los niños. Antes de centrarnos en el objeto de estudio de esta tesis, revisaremos resultados de investigación relacionados con las habilidades espaciales.

## **2.2. El desarrollo de habilidades espaciales.**

Existen diversos estudios relacionados con la identificación de las habilidades espaciales, su clasificación, desarrollo y enseñanza. Cabe mencionar la variedad de conceptos y definiciones que maneja cada una, así como algunas diferencias para su enseñanza. En este apartado se

menciona el trabajo de Bishop (1979, 1983), Mitchelmore (1980), Ben-Haim, Lappan & Houang (1985), Battista & Clements (1996), Gardner (1994, 1996), Malara (1999), Gorgorio, (1998), Hershkowitz, (1990), Gutiérrez, (1991, 1996), Owens & Outhered, (2006), Gaulin, (1985).

### **2.2.1. La interpretación y producción de información figurativa.**

En todo momento, el individuo se encuentra ante información de tipo gráfica a través de mapas, gráficas, dibujos, maquetas, números y letras. Respecto a ello, Bishop hace una clasificación donde divide la habilidad para codificar esta información y para producirla.

El pensamiento espacial se divide en dos habilidades, Bishop (1983) menciona la habilidad para descifrar información figural (IFI) y la habilidad para el procesamiento visual (VP). La IFI, misma que involucra la comprensión de la representación visual y el vocabulario espacial. Estas representaciones son usadas en el trabajo geométrico de gráficas, tablas y diagramas de diversos tipos. En la matemática abunda este tipo de información, la IFI se encarga de interpretar.

La VP, en ésta se involucra la visualización y la traslación de relaciones abstractas e información no figural, es decir, que no esté presente. También incluye la manipulación de representaciones visuales e imagería visual.

Entonces, la habilidad espacial se utiliza en dos actividades: al descifrar información ya elaborada (IFI) y al manipular información visualizada (VP). Por ejemplo, al mirar un mapa

sobre la ubicación de un lugar, es necesario traducir los signos empleados en él, como las calles pequeñas, las avenidas y algunos lugares como escuelas, iglesias, museos; aquí se estaría utilizando la IFI. La VP se utilizaría en una situación inversa; es decir, cuando una persona se da a la tarea de elaborar un croquis de su localidad, ya que al hacer este dibujo tiene que evocar la forma de las calles, su ubicación y disposición. Aquí está manipulando información que ya visualizó con anterioridad. En ambas categorías, la IFI y la VP, se está en contacto con una simbología compuesta por letras, palabras, números, líneas, formas geométricas y otros dibujos.

Por su parte, Gardner (1994,1996) divide el intelecto humano en siete habilidades: la inteligencia lingüística, la musical, la lógico matemática, la corporal kinestésica, la intrapersonal, la interpersonal y la espacial.

Aunque menciona que estas habilidades son autónomas, es posible que se puedan combinar. Es importante la relación que hay entre lo que él llama inteligencia y habilidad, ya que define inteligencia como "la habilidad para resolver un problema" (Gardner, 1996).

"La capacidad para percibir con exactitud el mundo visual, realizar transformaciones y modificaciones a las percepciones iniciales propias, y el recrear aspectos de la experiencia visual propia, e incluso en ausencia de estímulos físicos son centrales para la inteligencia espacial. El producir formas es diferente a manipularlas, ya que se puede ser bueno en la percepción visual mas no en el dibujo, imaginación o transformación de un mundo ausente." (Gardner, 1994, p. 240)

Respecto a este fragmento, Gardner diferencia dentro de la inteligencia espacial dos habilidades: el visualizar información que posteriormente se manipulará y el producirla. Como ya hemos visto, Bishop (1983) hace una diferenciación similar.

Hasta ahora se ha mencionado el hecho de poder utilizar información de tipo espacial, pero ¿a qué nos referimos con ello? Cuando se abre un libro con numerosas ilustraciones, la persona que las observa tiene a su cargo interpretarlas. Cuando se observa la representación gráfica de una casa o un árbol, se sabe y se está seguro que es una casa o un árbol por las características que constituyen el dibujo de la casa o el árbol. Las formas, las líneas, los colores, los tamaños sobre la hoja de papel y la manera como logran organizarse, dan como resultado la identificación con los objetos reales tridimensionales.

Esta información, la producción y su desciframiento es algo que se ha aprendido a hacer, con sus grandes errores y aciertos. Una frase de Gardner (1994) describe muy bien este proceso: "el dominar actividades donde se usen los sistemas de representación espacial requieren aprender el lenguaje del espacio y pensar en el medio espacial. El pensar en forma tridimensional es como aprender un idioma extranjero" (p. 248).

Gorgorio (1998), menciona que no es posible concebir el conocimiento espacial como sinónimo de conocimiento geométrico. Dice que hay evidencia de que las habilidades espaciales pueden ser desarrolladas por diferentes métodos, por ello es importante estudiar el tipo de estrategias usadas y las dificultades que los estudiantes muestran en tareas geométricas.

Existen estudios (Alsina, Burgés y Fortuny, 1991, Gorgorio, 1998, Gutiérrez, 1991, Battista y Clements, 1996) donde se muestran las dificultades de los alumnos en el trabajo con la visualización y el pobre desarrollo de las habilidades espaciales. Esto incluye habilidades para visualizar, anticipar el efecto y representar el efecto de las transformaciones geométricas como traslaciones, reflexiones, rotaciones, dilataciones y expansiones.

### **2.3. Los componentes de las habilidades espaciales.**

Aunque existe una diversidad de categorías para clasificar los componentes de las habilidades espaciales, en este apartado se retomarán principalmente los trabajos de Bishop (1983) y Gutiérrez (1991, 1996) sobre el pensamiento espacial.

#### **2.3.1. Visualización Espacial.**

Una imagen mental es una representación mental de un concepto matemático o propiedad que contiene información basada en los elementos pictóricos, gráficos o diagramáticos. La "visualización", o el pensamiento visual, es el tipo de razonar basado en el uso de imágenes mentales. (Gutiérrez, 1996).

Muchas imágenes mentales usadas en la matemática no tienen una base pictórica, sino que están basadas en los diagramas, otras maneras visuales de representación de conceptos, o incluso la información textual o simbólica.

Según Gutiérrez, (1991) la percepción visual es un elemento importante en infinidad de actividades de la vida, no sólo en las relacionadas con el aprendizaje escolar o con la geometría. La percepción visual recibe diversos nombres “percepción espacial”, “imaginación espacial” “visión espacial” o “visualización” y específicamente en geometría 3D se le denomina “visualización espacial”.

El elemento central en la percepción visual son las imágenes mentales, es decir las representaciones mentales que las personas hacemos de objetos físicos, relaciones, conceptos, etc.

Gutiérrez hace referencia a diversos tipos de imágenes mentales y dice que una determinada imagen puede ser de varios tipos diferentes, a saber:

1. **Imágenes concretas pictóricas.** Imágenes figurativas de objetos físicos.
2. **Imágenes de fórmulas.** Consiste en la visualización mental de fórmulas o relaciones esquemáticas de la misma manera como se les vería. (Libro de texto)
3. **Imágenes de patrones.** Son imágenes de esquemas visuales correspondientes a relaciones abstractas.
4. **Imágenes cinéticas.** Se trata de imágenes en parte físicas y en parte mentales ya que en ellas tiene un papel importante el movimiento de manos, cabeza, etc.
5. **Imágenes dinámicas.** Son imágenes mentales en las que los objetos o algunos de sus elementos se desplazan.

Gutiérrez (1991) realizó una investigación que consistió en diseñar y experimentar varias series de actividades para el desarrollo de algunas de las habilidades de visualización espacial. La experimentación se llevó a cabo con tres niños del sexto curso de primaria durante 20 sesiones de una hora aproximadamente. Las actividades integraron cuerpos físicos, representaciones planas estáticas en papel y representaciones dinámicas en la computadora.

Los principales tipos de actividades fueron:

- **Identificar representaciones planas de sólidos.** Dado un sólido y varias representaciones planas de este sólido y de otros parecidos, los estudiantes tenían que determinar qué representaciones correspondían a dicho sólido y cuáles no.
- **Mover sólidos.** Los estudiantes tenían que mover un sólido desde su posición actual a una posición dada por una copia (real o en papel) de ese sólido.
- **Dibujar representaciones planas de sólidos.** Debían dibujar sobre papel representaciones de sólidos dados (Las representaciones isométricas se dibujaban sobre papel punteado, con el fin de hacer el trabajo de dibujar más fácil a los niños)
- **Construir sólidos.** Aquí, los alumnos debían construir, con cubos encajables, diversos módulos a partir de alguna de las diferentes representaciones planas.

Gutiérrez (1991) observó que los ejercicios de movimiento de cuerpos reales fueron más fáciles para los estudiantes que los de la computadora, pero, de menos beneficio formativo porque no permitían la reflexión. Los modelos de varillas (cubos construidos con palillos en sus aristas) fomentaron un análisis más complejo de los sólidos, sus componentes y sus propiedades. Los modelos que tenían diferentes dibujos en sus caras ayudaron notablemente a los estudiantes para realizar los movimientos ya que en ellos tenían que analizar con mayor detalle. La facilidad

de manejo de los sólidos está en relación inversa a la calidad de la habilidad de visualización espacial requerida para resolver correctamente los problemas.

De acuerdo con Gorgorio (1998), una habilidad para el procesamiento espacial es la habilidad necesaria para realizar operaciones mentales combinadas requeridas para resolver ejercicios espaciales. Esto incluye no sólo la habilidad para imaginar objetos espaciales, sus relaciones y transformaciones y decodificarlos visualmente; sino también la habilidad para hacerlo en forma verbal o combinada. Además, no sólo la habilidad para manipular imágenes visuales de hechos espaciales, sino también la habilidad para utilizar procesos no visuales.

La habilidad para el procesamiento espacial incluye:

- La capacidad para prever el efecto de realizar diferentes transformaciones espaciales: rotación, cortes transversales, desdoblamientos.
- La habilidad para interpretar información espacial, la cual es necesaria para comprender no sólo descripciones gráficas y modelado de relaciones y hechos espaciales, sino también verbales y mezclados, así como el vocabulario específico usado en el trabajo geométrico.
- La habilidad para comunicar información espacial, la cual es necesaria para producir descripciones de objetos espaciales, relaciones y transformaciones de manera figural, verbal o combinada.

Varios estudios que analizan los procesos cognitivos en relación con la visualización estudian los procesos de solución de problemas matemáticos en general. Durante mucho tiempo

la investigación se enfocó en la aportación de las habilidades visuales en los procesos de aprendizaje, una situación que ha contribuido al descuido, no sólo del análisis de las estrategias no visuales, sino también de estrategias no vinculadas con procesos individuales. Sin embargo, si la investigación es sobre geometría y no sólo sobre visualización hay que recordar que la actividad geométrica involucra habilidades visuales y no visuales.

En su estudio acerca de cómo perciben los niños su entorno y el tipo de código usado para procesar la información visual Hershkowitz, *et al.* (1990) mencionan que la visualización generalmente se refiere a la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar la información visual. *“Fischbein trató la visualización y expuso que constantemente el conocimiento intuitivo es identificado como una representación visual. Esta es una afirmación trivial, ya que uno tiende naturalmente a pensar en términos de imágenes visuales. Para Fischbein las representaciones visuales contribuyen a la organización de información en representaciones sinópticas, y por lo tanto, a constituir un factor importante de globalización. Una imagen visual no sólo organiza los datos en estructuras significativas, sino también es un factor importante que guía el desarrollo analítico de una solución.”* (p. 75)

Existe un acuerdo general acerca de la importancia de la visualización no sólo por sí misma, sino como tipo de proceso mental que involucra a otras áreas matemáticas. Se dice que los elementos visuales forman parte de una serie de bloques en una construcción. Por ejemplo, Bishop, como ya se ha mencionado, hace distinción entre la (VP) habilidad para el procesamiento visual y la (IFI) habilidad para interpretar información figural. Describe la VP

como aquella que involucra la “visualización y traslación de relaciones abstractas e información no figural dentro de los términos visuales” (p. 182).

En ocasiones, durante las clases de primaria y secundaria los objetos geométricos se introducen a los estudiantes mediante dibujos y modelos, éstos aparecen también en tareas geométricas, de manera que es necesario que los alumnos usen e interpreten dibujos y modelos. En cursos de primaria y secundaria, se tiene que trabajar con una representación del espacio que concierne tanto forma como contenido, mismas que provocan diferentes tipos de obstáculos. Los objetos estudiados son siempre asociados con objetos con entidad física o visual. El hecho de que los objetos geométricos sean asociados con objetos físicos o dibujos hace la relación entre geometría y visualización más complicada de lo que aparenta.

También se ha prestado atención a la relación entre la visualización y el aprendizaje de la geometría. Hay artículos donde se investiga cómo es percibido e interpretado el espacio por las personas. Para ello se han utilizado tareas en las que se relacionan objetos 3D y sus representaciones 2D. Esta transformación, de 3D a 2D es una habilidad necesaria en el aprendizaje de la geometría. (Hershkowitz, 1990)

En la realización de dibujos de objetos 3D, se han encontrado dificultades como la de comunicar información visual. Micheltmore (1983) percibió que los niños tienen problemas con la representación de líneas paralelas y perpendiculares.

Las transformaciones 3D-2D producen aspectos positivos en torno a la visualización. Esta discusión se sitúa en torno a los convencionalismos culturales. El valor del uso de los convencionalismos como elementos del lenguaje en la comunicación de la información espacial tiene dos caminos. Por una parte, nosotros necesitamos estos elementos lingüísticos para comunicarnos y para desarrollar el pensamiento visual. Sin embargo, existen siempre nuevos esfuerzos para crear elementos lingüísticos que representen al mundo físico y procesen información visual, un lenguaje visual

### **2.3.2. Manipulación Espacial.**

Respecto a la manipulación espacial Gutiérrez, (1996) explica que el proceso de rotación de una imagen mental, que es una parte del proceso de IFI (Bishop, 1983), consiste en convertir la imagen inicial en otra, presentando el mismo objeto visto mientras una rotación tiene lugar o después de que ha sido terminada. La manera como tal rotación mental se ha realizado, es decir la habilidad a ser usada, depende de la dimensión de la rotación (en el plano o espacio), la posición del eje de rotación a la figura (interior o exterior), la posición del eje de rotación al sujeto (vertical, horizontal u ortogonal al plano de visión), y las habilidades adquiridas por el sujeto.

Gutiérrez menciona a McGee (1979), quien describe diez habilidades diferentes, distribuyéndolos en dos clases:

*Las habilidades de visualización espacial:* 1) de imaginar la rotación de un objeto pintado, (des) plegando de un sólido, y los cambios relativos de posición de objetos en el espacio. 2) de visualizar una configuración en la que hay movimiento entre sus partes. 3) de comprender los movimientos imaginarios en tres dimensiones, y para manipular los objetos en la imaginación. 4) de manipular o transformar la imagen de un modelo espacial en otro arreglo.

*Las habilidades de orientación espacial:* 1) de determinar las relaciones entre los objetos espaciales diferentes. 2) de reconocer la identidad de un objeto cuando se ve de ángulos diferentes, o cuando el objeto se mueve. 3) de considerar relaciones espaciales dónde la orientación del cuerpo del observador es esencial. 4) de percibir los modelos espaciales y compararlos entre sí. 5) de evitar la confusión por las orientaciones variantes en que un objeto espacial puede presentarse. 6) percibir los modelos espaciales o para mantener la orientación con respecto a los objetos en el espacio.

Owens y Outhered, (2006) también influyen en que se tomara en cuenta cómo construyen conceptos geométricos los estudiantes y el papel de la imagen visual; esto resultó en el desarrollo de teorías de visualización, desarrollo de conceptos y resolución de problemas en la geometría.

Los componentes espaciales se analizaron en términos de factores de prueba; estos factores incluían orientación, reconocimiento de formas bidimensionales y tridimensionales en diferentes orientaciones; así como relaciones espaciales: reconocimiento de una pieza en un diseño tridimensional.

Los estudios que relacionan las habilidades espaciales con conocimientos matemáticos indican diferencias individuales en la forma en que los alumnos resuelven problemas en tareas espaciales.

La relación entre habilidades espaciales y el aprendizaje de conceptos geométricos fue fortalecida por las aproximaciones visuales del aprendizaje geométrico introducido por el programa LOGO, este ambiente computarizado provee una alternativa para acercarse a los conceptos geométricos. (Owens y Outherred, 2006)

Gutiérrez (1996) notó que el proceso visual incluye una cierta interpretación: a) representaciones externas a imágenes mentales, b) la imagen mental para generar información.

Ambas interpretaciones auxilian a las habilidades espaciales tales como la percepción de figuras (armar y desarmar), rotación mental, percepción de posiciones espaciales, percepción de relaciones espaciales y la habilidad para enfocarse en otras características de la imagen (color, orientación, tamaño). Estos procesos visuales (interpretación y habilidades de visualización) forman el razonamiento visual.

### **2.3.3. Representación espacial.**

Acerca de cómo los niños crean la documentación de su entorno y cómo la interpretan, Hershkowitz, (1990) retoma a Piaget, quien describió el desarrollo del espacio representacional del niño, mismo que es definido como la imagen mental del espacio real en donde el niño actúa,

donde la representación mental no es sólo una remembranza de un banco de recuerdos. Esto es una reconstrucción activa de un objeto en un nivel simbólico. Este proceso no es sólo perceptual, ya que la percepción consiste en el conocimiento de los objetos como resultado del contacto directo con ellos. La representación involucra la evocación de los objetos en su ausencia o presencia. Esto completa el conocimiento perceptual por referencia a los objetos realmente percibidos.

Piaget se interesó en las transformaciones mentales del espacio real al espacio representacional del niño, en las características de los objetos reales que son constantes bajo ciertas transformaciones, y cómo cambia esto con la edad. Según su teoría, las transformaciones tempranas de los niños conservan los atributos topológicos de los objetos. Es después cuando el niño es capaz de transferir su espacio representacional hacia los atributos euclidianos de los objetos. El resultado de esas transformaciones euclidianas es la conservación de conceptos como la longitud, el área, el volumen y así sucesivamente.

Los factores que influyen en la descripción e interpretación de dibujos con formas tridimensionales son la cultura, la experiencia y la familiaridad con conversiones y transformaciones de formas 3D a 2D y viceversa, ya que también tienen efectos considerables con el dibujo y la interpretación de formas 3D. Estos tres factores están conectados. Los convencionalismos pueden ser considerados como los elementos del lenguaje formulado por una cultura para expresar y representar el espacio. Ganar experiencia es ganar mayores efectos culturales.

Como ya se explicaba, el uso de las representaciones espaciales, tanto descifrarlas como producirlas nos remite a las dificultades para su correcta realización. Respecto a estas dificultades se retoma el trabajo de Ben-Haim, Lappan & Houang (1985), Battista & Clements (1996) y Mitchelmore (1980).

La representación del mundo tridimensional en materiales visuales bidimensionales como los libros de texto y la dificultad que tienen los alumnos al interpretarla son objeto de estudio para Ben-Haim *et al.* (1985). Ellos encontraron que los niños en edad escolar son obligados a trabajar con imágenes de objetos tridimensionales para el trabajo con áreas y volúmenes. Se observó que en la mayoría de los libros de texto se utilizan colecciones de cubos 3D representados en forma isométrica. Los alumnos presentaron dificultades para relacionar la imagen de los objetos sólidos y su interpretación. Ya Bishop (1979), mencionaba que la enseñanza de convencionalismos que permiten visualizar información tridimensional en gráficas bidimensionales son aspectos que no se enseñan directamente.

Para Ben-Haim *et al.*, la habilidad espacial involucra manipular mentalmente, rodar, torcer o invertir un objeto del estímulo pictóricamente presentado; además capacidad para leer representaciones bidimensionales de sólidos. Uno de los errores principales que muestran los alumnos es pensar que se está trabajando con dos dimensiones y no con tres. Los autores coinciden en que la instrucción en este tema puede ser complementada con experiencias concretas.

Otra explicación acerca de por qué los alumnos muestran dificultades para relacionar la información gráfica de sólidos con los objetos que los representan, la dan Battista & Clements (1996). Ellos mencionan la necesidad de manejar ciertas operaciones cognitivas que les permitan a los estudiantes coordinar las vistas separadas de una colección de cubos e integrarlas para construir un modelo mental coherente. Para ello, se requiere coordinar, integrar y estructurar la información espacial percibida. Enfatiza la necesidad de percibir coherentemente los distintos puntos de vista de una representación de sólidos. Coinciden en la necesidad de trabajar directamente actividades que desarrollen la capacidad de visualización de los alumnos, así como su implementación en el *curriculum* escolar.

Gaulin, (1985) consideró que se debe poner mayor atención a las diferentes representaciones gráficas bidimensionales de las formas y las relaciones tridimensionales, con respecto a la educación matemática. Este autor expone el uso de éstas *gráficas* o representaciones como un objetivo educativo básico.

Las representaciones gráficas comunican información espacial que no puede ser expresada adecuadamente por elementos o signos verbales o numéricos. Aunada a esta definición se expone una más general: la *graphicacy* concierne incluir comunicación no figural por medio de diagramas, esquemas, gráficas con un alto grado de iconotividad (relación signo-objeto representado), es decir, el uso de representaciones abstractas y su relación para la formación de conceptos, resolución de problemas y el pensamiento organizado.

Retomar las representaciones gráficas como un objetivo educativo básico concibe una iniciativa multidisciplinaria, donde la educación matemática toma un papel importante junto a la geografía, el arte, el lenguaje, etc. Esto da la oportunidad a los estudiantes de explorar una variedad de representaciones gráficas con información espacial y geométrica (tan importante como la numérica, la lógica y la estadística).

Las representaciones gráficas de varios tipos son comúnmente usadas en un gran número de disciplinas y situaciones prácticas para comunicar información espacial como:

Mapas, planos de todo tipo para encontrar direcciones, trenes, autobuses, metros, aerolíneas, etc.

Diagramas de instrucciones para ensamblar, operar una máquina, etc.

Dibujos descriptivos científicos y técnicos en anatomía, botánica, mecánica, ingeniería, modelos químicos.

Si se toma en cuenta los actuales aparatos gráficos computarizados en nuestra sociedad, la habilidad para comunicarse e interpretar tales representaciones gráficas hacen más probable la necesidad de ser hábil para usar representaciones gráficas codificadas.

Hershkowitz, (1990) y Gaulín (1985) retoman el punto de vista de Josiane Caron-Pargue sobre el dibujo en perspectiva, como una entre varias formas de representación gráfica, cada una con sus características y méritos. Otras formas son el desarrollo de habilidades correspondientes a diferentes modos de representación gráfica: el dibujo isométrico o en perspectiva, con vista ortogonal (como en cartografía y dibujo técnico), representaciones en capas, hileras o secciones.

La hipótesis del autor consiste en la importancia de explorar actividades en las que se descifre información espacial por medio de varios tipos de representaciones.

Sobre la inclusión del entrenamiento de habilidades de 3D-2D en el currículum Hershkowitz, (1990), hace alusión a Holanda, donde ha sido desarrollada una nueva unidad visual en los programas de estudio, donde hay situaciones de enseñanza por parte del maestro y el libro de texto basadas en transformaciones 3D-2D, mismas que se busca sean diferentes a los procedimientos estereotipados. Incluyen una comprensión crítica de los procedimientos e interpretaciones de los dibujos. Este *curriculum* utiliza diferentes tipos de técnicas, cómo la comparación entre la distancia, larga o corta, con los tamaños de los objetos en un cuadro o en un dibujo, puntos de fuga y el horizonte, objetos cubiertos; líneas ocultas, líneas que desaparecen o retroceden, sombreado, cambios de puntos de vista: frontal, de lado, superior y así sucesivamente.

Cabe mencionar que las dificultades ante estas actividades no son sólo en el campo estudiantil, por ejemplo Malara (1999) hace mención de las dificultades que presentan profesores de secundaria para visualizar y representar objetos tridimensionales. Las dificultades se encontraron cuando ella buscó implementar estrategias diferentes a la enseñanza tradicional de la geometría, limitada al cálculo de áreas y volúmenes. Entre sus actividades está el trabajo con papel punto o isométrico, donde se hacen representaciones diferentes a las iniciales, como reconstrucciones en diferentes perspectivas. Aquí expone la dificultad que tienen los profesores

para integrar en un todo las vistas parciales de un objeto, tomando en cuenta que deben respetarse las partes visibles sobre las ocultas para dicha representación.

Como se puede observar, el tema de las habilidades espaciales no es exclusivo de los alumnos, sino intervienen también los profesores y otros profesionistas. Así también ha sido motivo de análisis comparativo, tanto con niños y niñas, como entre culturas. Respecto a este último Mitchelmore (1980) hace una comparación entre estudiantes de Jamaica e Inglaterra en un mismo nivel educativo. El autor encontró considerables diferencias de habilidades espaciales, los estudiantes de Jamaica tuvieron habilidades espaciales más bajas. El autor lo atribuye a la falta de entrenamiento activo en esta área, ya que el sólo observar pasivamente cierta información no favorece su desarrollo. Además, enfatiza la necesidad de analizar el plan de estudios, ya que considera que éste refleja la actitud general de un país hacia el uso de modelos espaciales. En Inglaterra se utilizan mucho los materiales de manipulación, mientras que en Jamaica, no existen materiales y el trabajo de la aritmética se privilegia sobre la geometría.

#### **2.4. Las habilidades espaciales y el *curriculum*.**

En este apartado se mencionan los propósitos encaminados a la comprensión del espacio que mantienen dos programas de estudio: el mexicano y el estadounidense.

El Plan y Programas de Educación Primaria (SEP, 1993) aborda el estudio del espacio a través de actividades de manipulación, observación, dibujo y análisis de formas diversas.

Los Estándares Curriculares para la Educación Matemática proponen el uso de materiales concretos y programas de geometría dinámica desde edades tempranas para la comprensión del espacio.

#### 2.4.1. La representación tridimensional en el *curriculum* mexicano actual.

En la asignatura de Matemáticas se manejan seis ejes temáticos: Los números, sus relaciones y sus operaciones, Medición; Geometría; Tratamiento de la información; Procesos de cambio; Predicción y el azar. En este trabajo se retomará solamente el eje temático de Geometría con los contenidos relacionados al desarrollo de la imaginación espacial, particularmente, el tema de *Cuerpos Geométricos*.

En la Tabla 2.1. se muestran los contenidos de Geometría de tres temas principales: 1) Ubicación espacial, 2) Cuerpos Geométricos y 3) Figuras Geométricas de primero a sexto grado de primaria. En la columna que corresponde a cada grado se ha puesto un asterisco si el tema es tratado en ese grado.

CONTENIDOS DE GEOMETRÍA	PRIMARIA					
	1°	2°	3°	4°	5°	6°
<b>1) UBICACIÓN ESPACIAL</b>						
Ubicación del alumno en relación con su entorno	*	*				
Ubicación del alumno en relación con otros seres u objetos	*	*				
Ubicación de objetos o seres entre sí	*	*				
Uso de las expresiones: “arriba”, “abajo”, “adelante”, “atrás”, “derecha”, “izquierda”	*					
Los puntos cardinales		*				
Introducción a la representación de desplazamientos sobre el plano	*					

	1°	2°	3°	4°	5°	6°
Representación de desplazamientos sobre el plano: trayectos, caminos y laberintos		*				
Recorridos tomando puntos de referencia		*	*			
Representación en el plano de la ubicación de seres y objetos del entorno inmediato			*			
Diseño, lectura e interpretación de croquis			*			
Observación y representación de objetos desde diversas perspectivas			*			
Representación de puntos y desplazamientos en el plano				*		
Diseño, lectura e interpretación de croquis y planos				*		
Lectura e interpretación de mapas				*		*
Introducción de los ejes de coordenadas cartesianas para ubicar seres u objetos en mapas o croquis					*	
Las coordenadas de un punto					*	
Construcción a escala de croquis del entorno						*
Uso de los ejes de coordenadas cartesianas						*
<b>2) CUERPOS GEOMÉTRICOS</b>						
Representación de objetos del entorno mediante diversos procedimientos	*	*				
Clasificación de objetos o cuerpos bajo distintos criterios (los que ruedan y los que no, caras planas y redondas)	*	*				
Construcción de algunos cuerpos mediante diversos procedimientos	*	*				
Características de los cuerpos: número y forma de las caras			*			
Introducción a las construcciones de cubos utilizando diversos procedimientos			*			
Representación gráfica de cuerpos y objetos			*			
Clasificación de cuerpos geométricos bajo los criterios: forma y número de caras, números de vértices y aristas				*		
Actividades para introducir la construcción de cuerpos geométricos (forros)				*		
Construcción y armado de patrones de cubos y prismas					*	
Construcción y armado de patrones de prismas, cilindros y pirámides						*
<b>3) FIGURAS GEOMÉTRICAS</b>						
Reproducción pictórica de formas diversas	*					
Reconocimiento de círculos, cuadrados, rectángulos y triángulos en diversos objetos	*					
Identificación de líneas rectas y curvas en objetos del entorno	*					
Trazo de figuras diversas utilizando la regla	*	*	*			
Elaboración de grecas	*					
Construcción y transformación de figuras a partir de otras figuras básicas		*	*			
Clasificación de diversas figuras bajo distintos criterios (número de lados: rectos y curvos)		*				
Dibujo y construcción de motivos con figuras geométricas		*				

	1°	2°	3°	4°	5°	6°
Clasificación de cuadriláteros y triángulos (lados, paralelismo, perpendicularidad, simetría)			*			
Ejes de simetría de una figura (identificación y trazo)			*			
Construcción y reproducción de figuras mediante diversos procedimientos			*			
Comparación de ángulos, en forma directa e intermediario				*		
Uso del transportador en la medición de ángulos				*		
Clasificación de figuras geométricas a partir del número de lados, lados iguales, ángulos iguales y ejes de simetría				*		
Reconocimiento de diferentes triángulos respecto a sus lados y ángulos				*		
Trazo de las alturas de los triángulos (sencillos)				*		
Composición y descomposición de figuras geométricas				*		
Trazo de líneas paralelas utilizando diversos procedimientos				*		
Trazo del círculo utilizando una cuerda				*		
Trazo de figuras utilizando la regla y la escuadra					*	
Uso de la regla, escuadra y compás para trazar figuras a partir de ejes de simetría, líneas paralelas y perpendiculares					*	*
Uso del compás para trazar círculos					*	
Clasificación de figuras utilizando diversos criterios: igualdad de ángulos, de lados, paralelismo y simetría					*	
Construcción de figuras a escala (sencillos)					*	*
Reconocimiento de las semejanzas y diferencias entre dos figuras a escala						*
Construcción de figuras a partir de sus diagonales, con dos o más ejes de simetría						*
Clasificación de figuras utilizando diversos criterios: tamaño y número de lados, medida de sus ángulos, número de vértices, pares de lados paralelos, diagonales iguales, diferentes y puntos de intersección, ejes de simetría						*

*Tabla 2.1. Contenidos propuestos en el Plan y Programas 1993 con respecto al eje temático de Geometría de 1° a 6° grado. Cada \* señala el grado en el que se imparte cada contenido.*

Como se ha mencionado, este trabajo sólo se enfocará a los contenidos de *Cuerpos Geométricos*, y particularmente a contenidos relacionados con la visualización, manipulación y representación espacial. En la tabla 1 se puede apreciar la continuidad que existe desde 1° a 6° grado. En el 1° 2° y 3° grado se busca trabajar con objetos del entorno, con actividades que favorezcan su clasificación así como su representación, a partir de características muy sencillas de los objetos. A partir de 4° grado se busca que estas características sean más específicas como forma de las caras, aristas, vértices; así mismo su representación es por medio de dibujos y

desarrollos planos sencillos (forros). Es hasta 5° y 6° cuando se busca un trazado más formal de los patrones de prismas, cubos y cilindros.

Como se aprecia, los contenidos más sencillos se trabajan en los primeros años, posteriormente éstos sirven como base de los años posteriores y para lograr conocimientos más complejos y formales.

Uno de los propósitos generales de la asignatura de Matemáticas que maneja el Libro del Maestro de sexto año es “Desarrollar actividades para clasificar, comparar y relacionar figuras geométricas, de acuerdo con la simetría, el paralelismo, la perpendicularidad y los ángulos, así como destrezas para la construcción de algunos cuerpos geométricos, utilizando instrumentos como la escuadra, la regla, el transportador y el compás” (SEP, 2000, p, 13). A continuación en la Tabla 2.2. se presenta el desglose de los contenidos de Geometría de 6° año en el tema de Cuerpos Geométricos.

<b>Cuerpos geométricos</b>
<b>Construcción y armado de patrones de prismas, cilindros y pirámides</b>
Identificación de cuerpos geométricos y de puntos, líneas y figuras en ellos
Identificación de cuerpos geométricos
Identificación de cuerpos básicos: esfera, cubo, cilindro, cono
Identificación de prismas y pirámides
Identificación de puntos, líneas o figuras en los cuerpos geométricos
Identificación de vértices en un cuerpo geométrico
Identificación de aristas en un cuerpo geométrico
Identificación de caras o bases en un cuerpo geométrico
Identificación de la altura de un cuerpo geométrico
Identificación del radio y el diámetro en una esfera

Resolución de problemas de identificación de cuerpos geométricos
Clasificación de cuerpos geométricos
Clasificación de cuerpos geométricos según forma y número de las caras
Clasificación de cuerpos geométricos según número de vértices y de aristas
Resolución de problemas de clasificación de cuerpos geométricos
Construcción de cuerpos geométricos
Patrones y armado de cuerpos geométricos
Construcción de patrones y armado de prismas
Construcción de patrones y armado de cilindros o de pirámides
Resolución de problemas de construcción de cuerpos geométricos

*Tabla 2.2. Desglose de los contenidos de Geometría de 6° año del tema de Cuerpos Geométricos.*

Como se observa en la Tabla 2.2., la secuencia o progresión está presente en el Programa de Matemáticas de sexto grado en el bloque de geometría en los contenidos de Cuerpos Geométricos, ya que primero se identifican las características geométricas de los cuerpos como son los vértices, las aristas, las caras, la altura, el radio y el diámetro. Posteriormente se clasifican los cuerpos de acuerdo a sus características geométricas. Finalmente se llega a la construcción de cuerpos geométricos y a la elaboración de patrones.

Entonces, un alumno en sexto grado debe adquirir las siguientes habilidades espaciales:

- Identificar desarrollos planos que correspondan a prismas rectos.
- Identificar resultados de transformaciones sencillas mediante rotaciones, traslaciones, doblado y recorte.
- Identificar la ubicación espacial de varios objetos desde diferentes ángulos.
- Reproducir o identificar los trazos que corresponden a instrucciones dadas” (SEP, 2000).

Sin embargo, puede apreciarse en esta lista de contenidos, que los temas mencionados se relacionan principalmente con actividades de visualización de los cuerpos geométricos; sin embargo, no aparecen temas relacionados con la manipulación espacial y hay muy poco sobre representación espacial, de hecho, no se incluyen contenidos relacionados con la representación de cuerpos geométricos en dos dimensiones. Aunque los desarrollos planos, como su nombre indica, se dibujan en un plano, su finalidad última es representar los cuerpos en tres dimensiones, no representadas en dos dimensiones.

A continuación se menciona el *currículum* estadounidense, que se interesa en desarrollar el pensamiento geométrico de los estudiantes a través de actividades de visualización, manipulación y representación espacial.

#### **2.4.2. La Geometría en el *curriculum* de Estados Unidos**

A diferencia de México en Estados Unidos no existe un *curriculum* único ni obligatorio; sin embargo, existen los llamados “Estándares Curriculares para la Educación Matemática”, los cuales orientan la enseñanza de esta materia en ese país. (The National Council of Teachers of Mathematics, 2000).

Sobre la geometría se establece que los alumnos deben aprender sobre las formas y estructuras geométricas y cómo analizar sus características y relaciones. Respecto a la visualización espacial, esto es, construir y manipular mentalmente representaciones de objetos de dos y tres dimensiones y percibir un objeto desde perspectivas diferentes, se menciona que es un

aspecto importante del pensamiento geométrico y se considera la construcción de modelos geométricos y el razonamiento espacial como vías para interpretar y describir entornos físicos y poder construir herramientas importantes en la resolución de problemas.

Sobre el razonamiento espacial se reconoce su utilidad en el empleo de mapas, la planificación de rutas, el diseño de planos y la creación artística, y se menciona que los modelos concretos, dibujos y programas informáticos de geometría dinámica pueden implicarse activamente con las ideas geométricas.

Se recomienda que en los primeros años de escolarización, los niños desarrollen destrezas de visualización a través de experiencias manipulativas con distintos objetos geométricos que les permitan girar, reducir y deformar figuras de dos y tres dimensiones para que, posteriormente, lleguen a sentirse cómodos analizando y dibujando vistas en perspectiva, enumerando sus componentes y describiendo atributos que no pueden verse pero sí inferirse.

Los Estándares Curriculares para la Educación Matemática de Estados Unidos están clasificados en grados o etapas como la 3-5, 6-8 y 9-11. Para los alumnos de la etapa 3-5, las metas son que ellos examinen las propiedades de figuras de dos y tres dimensiones y las relaciones entre ellas y se menciona que gran parte de este trabajo requiere de la visualización. Mientras que para representar figuras tridimensionales en dos dimensiones, y para construir figuras de tres dimensiones a partir de representaciones bidimensionales se necesitan conocer las características de las figuras.

En la etapa 6-8, subrayan que las destrezas de los alumnos en la visualización y en el razonamiento sobre relaciones espaciales son fundamentales en geometría. Mencionan por ejemplo que algunos niños pueden tener dificultades para hallar el área de figuras de tres dimensiones mediante su representación bidimensional, porque no pueden visualizar las caras ocultas. Para desarrollar la visualización recomiendan experimentar con modelos de figuras tridimensionales y sus desarrollos en dos dimensiones e interpretar o dibujar diferentes vistas de edificios, tales como el plano de la primera planta y las vistas de frente y de atrás, usando papel con tramas de puntos. También recomiendan construir objetos tridimensionales a partir de representaciones bidimensionales; dibujar objetos a partir de una descripción geométrica y, dado un objeto, describirlo y enumerar sus propiedades.

De acuerdo con lo visto en la segunda parte de este capítulo, los estándares curriculares de los Estados Unidos hacen más énfasis que el currículum mexicano en el desarrollo de la visualización, representación y manipulación espaciales.

## **2.5. Consideraciones finales.**

A pesar de que Gorgorio (1998) señala la importancia de las habilidades espaciales en el desarrollo del conocimiento geométrico, éste es un tema que no ha recibido mayor atención de parte de los investigadores en educación matemática así como de los diseñadores del *curriculum*.

Esta falta de atención en el desarrollo de las habilidades espaciales tiene consecuencias importantes en otras áreas de las matemáticas escolares, por ejemplo, en el caso del volumen

cuando los alumnos no calculan correctamente el volumen de un prisma que se les muestra dibujado en el papel, porque no cuentan los cubos que no se ven o porque confunden cubos con caras (Figueras y Waldegg, 1986; Hart et al., 1983).

El largo trayecto que llevó al hombre a inventar la perspectiva, y algunas otras técnicas para lograr representaciones más apegadas a la realidad, muestra que esta habilidad requiere ser desarrollada en la escuela.

Este tipo de consideraciones motivó la elección del tema motivo de esta tesis. La experiencia propia como maestro de primaria es otro estímulo que lleva a intentar aportar algo de luz sobre la problemática de las habilidades espaciales.

El uso del papel isométrico ha sido usado con éxito por varios investigadores, y se usa en algunos otros países para desarrollar habilidades espaciales. En la investigación aquí reseñada se eligió este tipo de papel como una herramienta que permitía desarrollar la visualización, la manipulación y la representación espaciales. De cómo se usó este material y los resultados alcanzados con su uso se comenta en los siguientes capítulos de esta tesis.

## **CAPÍTULO III**

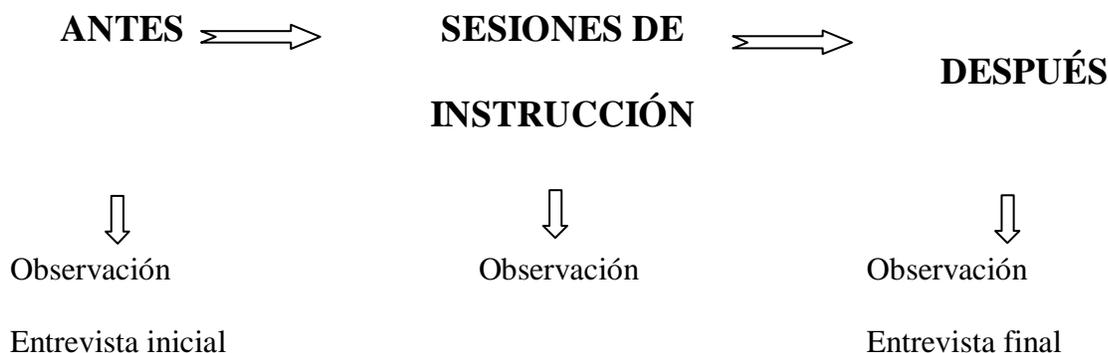
### **MÉTODO**

En este capítulo se describe la intervención pedagógica, los instrumentos utilizados y los materiales empleados; así como los sujetos participantes y la forma en que se le da validación a los resultados. El propósito de este trabajo es identificar las habilidades espaciales que presentan niños de sexto grado de primaria después de unas sesiones de trabajo donde se abordan actividades de visualización espacial, manipulación espacial y representación.

#### **3.1. Descripción de la intervención pedagógica**

Esta investigación es de corte cualitativo (Taylor y Bogdan, 1990), para esto se propusieron la observación y la entrevista como instrumentos. En el siguiente diagrama se especifica el procedimiento antes y después de las sesiones de trabajo sobre habilidades espaciales:

### 3.1.1. Instrumentos



### 3.1.2. Sujetos

El estudio se realizó con un sólo grupo de seis alumnos de sexto grado, en una escuela primaria oficial del turno matutino. Los alumnos que conformaron el grupo eran de ambos sexos, con edades entre once y doce años. Cabe mencionar que la selección de los sujetos corrió a cargo de la profesora titular del grupo, misma que los escogió por ser alumnos responsables y participativos. La aplicación de cuestionarios, observaciones, entrevistas e intervenciones se realizaron en el plantel escolar, mismas que fueron videograbadas.

### 3.2. Validación de resultados

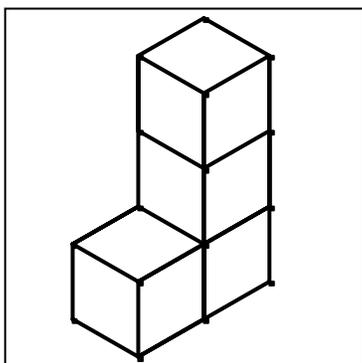
Para validar los resultados se hizo una comparación entre los datos arrojados por la entrevista inicial con la entrevista final. Así mismo, se realizó el piloteo de entrevistas y las sesiones de trabajo. La intención de este último consistió en comprobar redacción, tiempos de trabajo, procedimiento y grado de dificultad pertinentes.

Durante la realización del piloteo se observó que algunas actividades no presentaban gran dificultad para los niños por lo que se aumentó su grado de complejidad. Un ejemplo de lo anterior lo tenemos en el siguiente ejercicio donde los niños tenían que colocar las líneas faltantes (figura 3.1.).

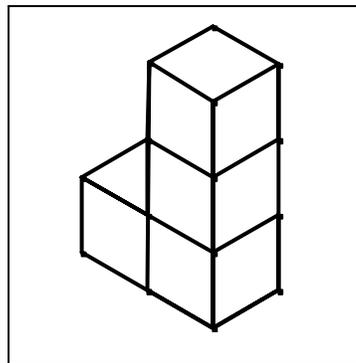


*Fig. 3.1. Del lado izquierdo un ejercicio diseñado para el piloteo, y del lado derecho el mismo ejercicio modificado a partir del piloteo*

Otras modificaciones que se realizaron a partir del piloteo son en cuanto al procedimiento de la actividad misma, ejemplo:



*Fig. 3.2. Ejercicio diseñado para el piloteo*



*Fig. 3.3. Ejercicio modificado a partir del piloteo*

En el ejercicio diseñado para el piloteo (figura 3.2.), por la forma en que está acomodado el policubo, tiene mayor estabilidad y es poco probable que se mueva en la forma pensada por lo que se tuvo que rotar 90° (figura 3.3.) para que fuera más evidente la transformación planeada.

Estas son algunas modificaciones que se hicieron para mejorar los instrumentos y permitieron aplicarlos con mayor eficacia durante las entrevistas y las sesiones de trabajo.

### **3.3. Descripción de los instrumentos de intervención**

Las actividades de las entrevistas y las sesiones de instrucción están inspiradas en los trabajos de: Bishop (1983), Alsina, Burgués y Fortuny (1991), Battista & Clements (1998), Malara (1999), Battista (1999); sin embargo, éstas fueron modificadas para los propósitos de la investigación.

#### **3.3.1. Entrevista inicial**

El objetivo de la entrevista inicial consistió en identificar las habilidades espaciales de visualización, manipulación y representación espacial que dominaban los niños de sexto grado de educación primaria. Las tareas que se manejaron involucran el conteo de cubos, rotación de objetos, representación gráfica, identificación de cubos, identificar diferentes puntos de vista. La entrevista se realizó en forma individual y con la ayuda de hojas de trabajo (Ver anexo 1).

### **3.3.2. Entrevista final**

El objetivo de la entrevista final consistió en identificar los progresos de las habilidades espaciales en los niños de sexto grado de primaria, posteriores a la intervención. Las actividades diseñadas en la entrevista final fueron muy similares a las presentadas en la entrevista inicial. (Ver anexo 2)

### **3.3.3. Sesiones de instrucción**

Las sesiones de instrucción estuvieron divididas en seis sesiones de aproximadamente una hora cada una dos veces por semana, (ver anexo 3). Participaron seis alumnos: dos niños y cuatro niñas, de los cuales solamente dos de ellos mencionaron que les agradaba la clase de matemáticas. Durante las sesiones de instrucción se trabajó de diferentes formas: individual, grupal y por parejas, en donde cada niño podía expresar sus dudas así como explicar sus procedimientos realizados. Cabe mencionar que a la mayoría de los niños les costaba trabajo expresar sus ideas.

Las sesiones de trabajo se realizaron en un aula de usos múltiples que nos fue asignada por el director de la escuela, en la cual el espacio era adecuado para realizar las actividades planeadas. A lo largo de las seis sesiones los niños pudieron trabajar con material concreto el cual estaba constituido por cubos y policubos de madera.

Para las sesiones de intervención se diseñaron actividades que permitían desarrollar las habilidades espaciales de los niños, las cuales estaban divididas en tres aspectos: visualización, manipulación y representación espacial. Estas actividades se les presentaron a los alumnos de forma gradual, es decir, de las más sencillas a las más complejas.

### **3.3.3.1. Visualización**

A lo largo de estas actividades se pretendía fortalecer las habilidades visuales de los niños a través de actividades como:

- El conteo de cubos de representaciones tridimensionales, con colecciones sencillas y complejas, donde el número de cubos así como el arreglo de los mismos determinan el grado de dificultad de las colecciones.
- Determinar en una colección de cubos aquellos que están ocultos así como el número de caras visibles.
- Identificación y trazado del espacio que ocupa la base de una colección de cubos.
- Calcular el número de cubos que caben en un envase a partir del conteo de una de sus caras.

### **3.3.3.2. Manipulación**

Estas actividades se diseñaron para fortalecer en los alumnos las habilidades de manipulación espacial:

- Relacionar la imagen gráfica con el objeto concreto.

- Representación gráfica de una colección de cubos concretos.
- Identificación y representación de las caras que forman una vista ortogonal de una colección de cubos.
- Representación concreta y gráfica de una colección de cubos a partir de sus vistas ortogonales.
- Representación de colecciones a partir de diferentes puntos de vista.

### **3.3.3.3. Representación**

Con estas actividades se pretendía que los alumnos mejoraran sus habilidades de representación espacial.

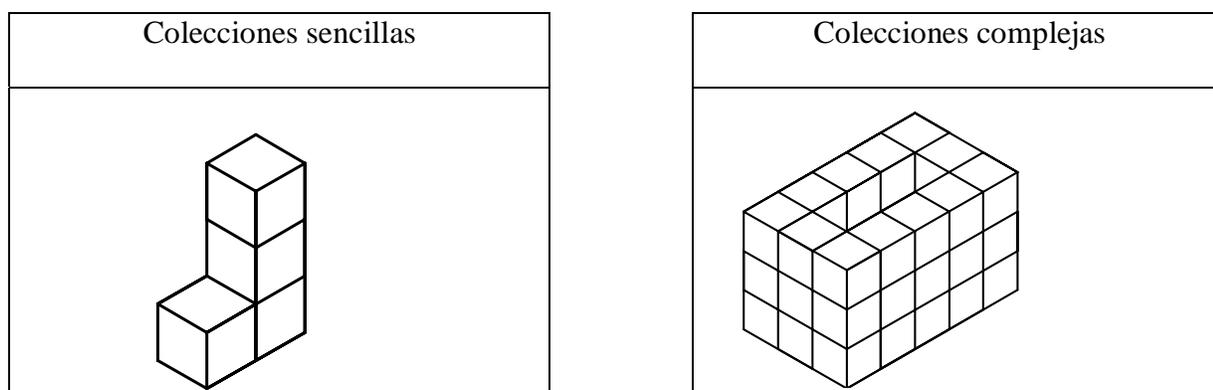
- Trazado de cubos en papel isométrico, desde una unidad cúbica hasta una colección de cubos.
- Reproducción de colecciones de cubos en papel isométrico.
- Representación de colecciones de cubos en papel isométrico a partir de diferentes puntos de vista.
- A partir de una representación incompleta de una colección determinar la representación adecuada y completarla.

### 3.4. Descripción de los materiales

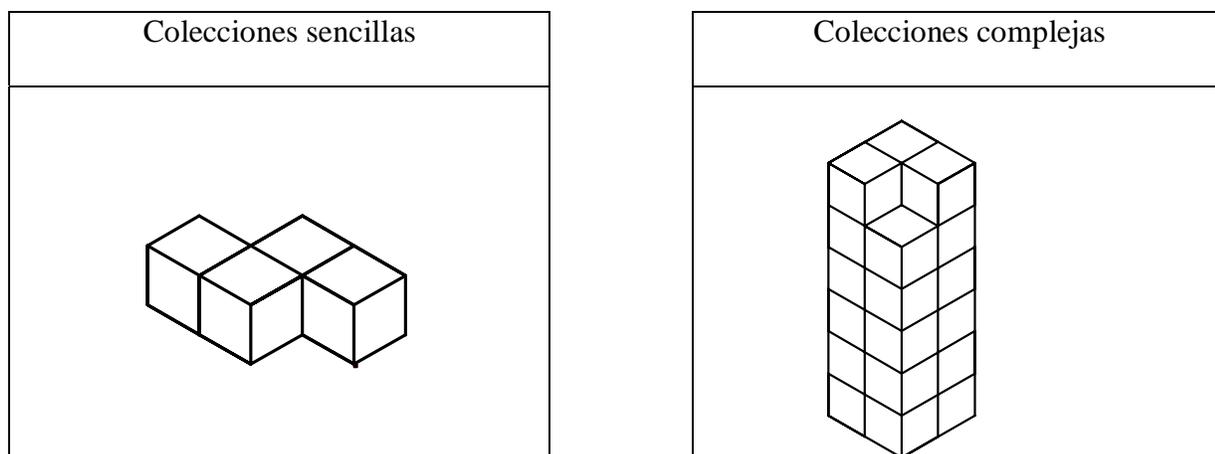
Como se mencionó anteriormente, los materiales utilizados durante las entrevistas y sesiones de instrucción fueron: cubos de madera, cubo de soma, papel isométrico, vistas ortogonales, de los cuales se hace una descripción a continuación:

#### 3.4.1. Cubos de madera

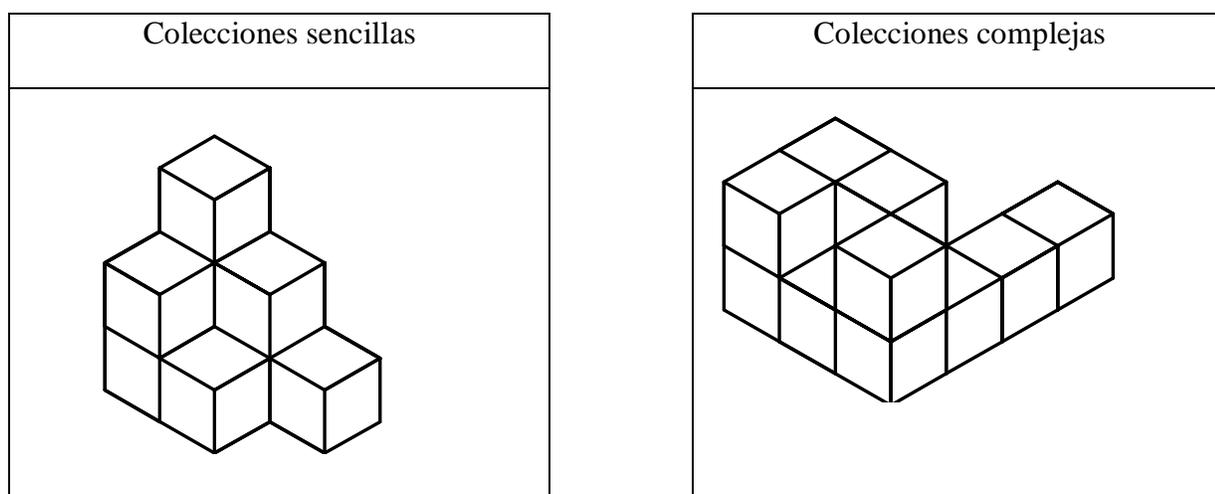
Los cubos eran de una pulgada de arista, los cuales se pueden apilar para formar diversas colecciones de cubos que van desde sencillas hasta complejas, esto depende del número de cubos (ver figura 3.4.), de los niveles de la colección (ver figura 3.5.), de la ubicación de los mismos cubos (ver figura 3.6.).



*Figura 3.4. Dificultad de colecciones de cubos de acuerdo al número de cubos*



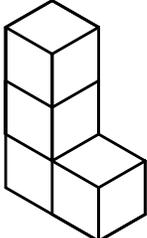
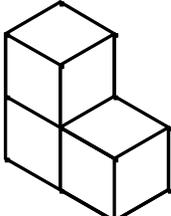
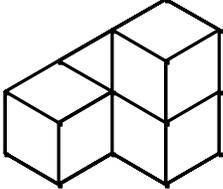
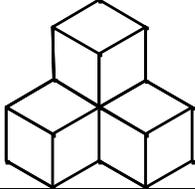
*Figura 3.5. Dificultad de colecciones de cubos de acuerdo a los niveles*

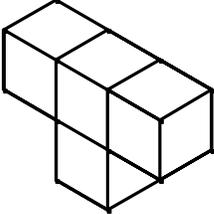
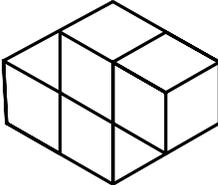
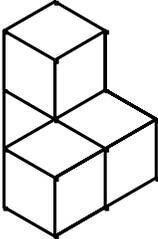


*Figura 3.6. Dificultad de colecciones de cubos de acuerdo a la ubicación de los cubos*

### 3.4.2. Cubo de Soma

El cubo de Soma es un rompecabezas tridimensional, diseñado en 1936 por el poeta, matemático y escritor danés Piet Hein. Está constituido por siete piezas (seis de ellas formadas por cuatro pequeños cubos y una sola por tres). El objetivo es formar con las siete piezas un cubo más grande de  $3 \times 3 \times 3$ . Las siete piezas de Soma se pueden identificar de la siguiente manera:

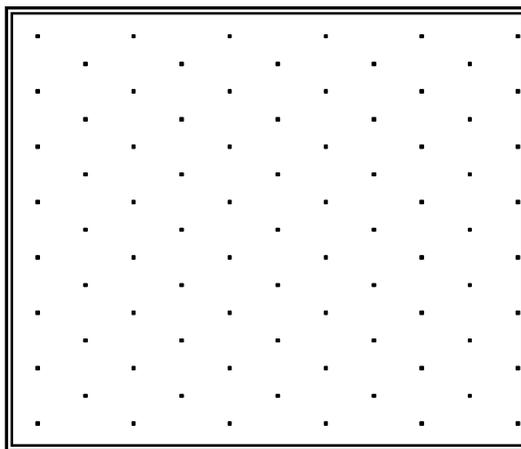
Pieza	Nombre
	L
	Bota
	Pie derecho
	Cabeza de robot

Pieza	Nombre
	T
	S
	Pie izquierdo

Sin embargo, por el grado de complejidad que tiene el trabajar con las siete piezas juntas y dados los objetivos de la investigación, en las actividades diseñadas sólo se utilizaron dos o tres piezas de Soma con las cuales se formaban otros policubos.

### 3.4.3. Papel isométrico

Este tipo de papel se retomó de Malara (1999) que lo utilizó en una investigación para identificar las dificultades que presentaban profesores de secundaria con actividades de geometría tridimensional, las cuales requerían visualizar los efectos de ciertos giros de objetos sólidos y su representación en papel isométrico (ver figura 3.7.). Este tipo de representación se basa en el uso de una retícula regular, generalmente de triángulos equiláteros. Cuando se utiliza para representar módulos policubos, que es lo más frecuente en geometría, cada cubo se observa desde uno de sus ejes que pasan por dos vértices opuestos y se representa mediante un hexágono de dicha retícula.

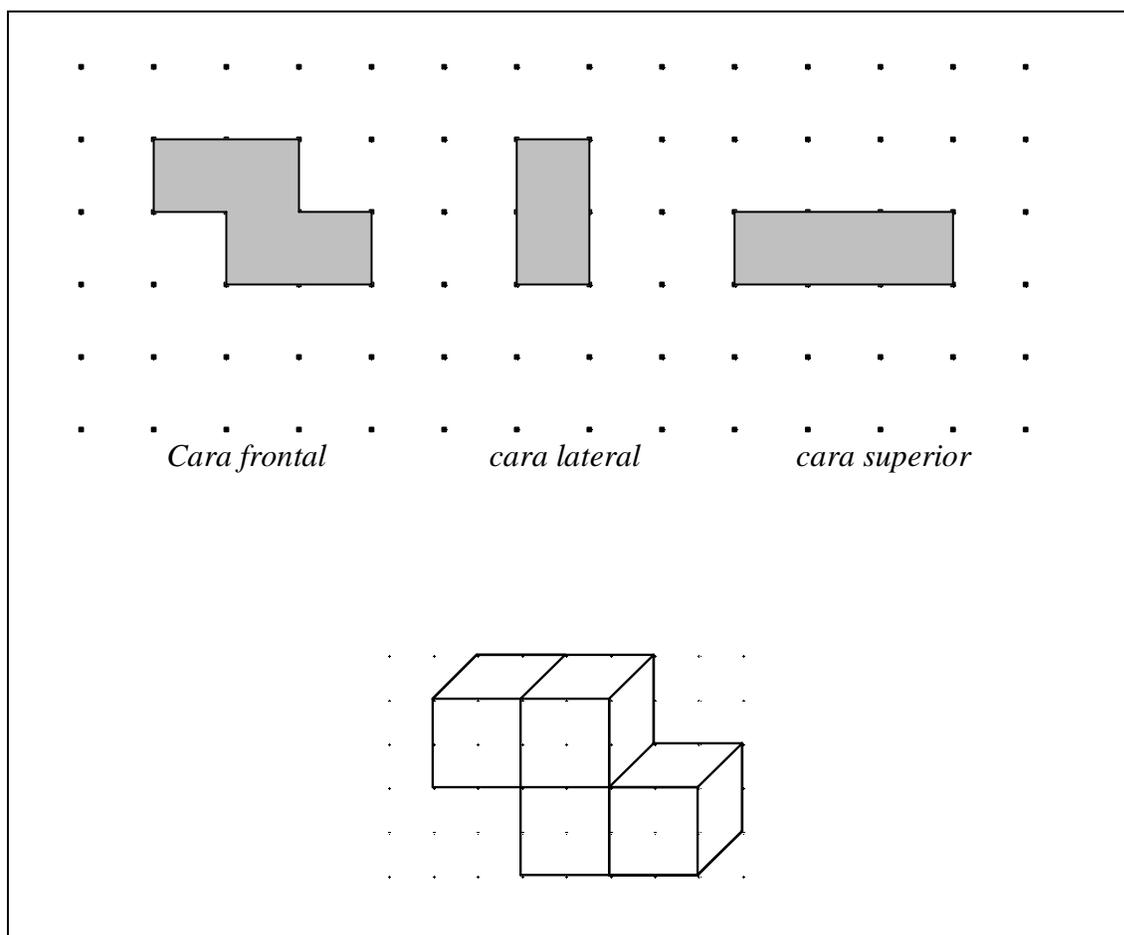


*Figura 3.7. Papel isométrico*

### 3.4.4. Vistas ortogonales

Las vistas ortogonales se basan en el dibujo de varias vistas laterales del sólido, cuyo número depende de la regularidad del cuerpo presentado, frontal, lateral y superior (ver figura

3.8.). Esta forma de representación es importante porque se trata de una de las formas de representación estándar en áreas como la ingeniería industrial.



*Figura 3.8. Representación en vista ortogonal*

En este capítulo se explicaron los procedimientos, materiales empleados y se mencionaron los sujetos participantes en el trabajo de investigación. Los objetivos expuestos forman parte importante en el diseño de las actividades utilizadas durante las entrevistas y la intervención pedagógica. En el siguiente capítulo se describen los resultados obtenidos durante las entrevistas, así como los cambios efectuados.

## **CAPÍTULO IV**

### **PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS**

En este capítulo se describen las categorías de análisis retomadas de investigaciones previas encausadas a la exploración de las habilidades espaciales. Posteriormente se muestran en tablas los resultados obtenidos durante las entrevistas inicial y final; se hace un análisis de estos resultados retomando las habilidades de visualización, manipulación y representación espacial. Por último se hace una comparación entre los procedimientos empleados por los niños en la entrevista inicial y en la entrevista final.

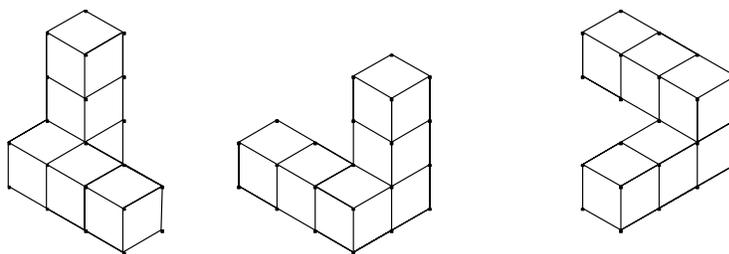
#### **4.1. Descripción de categorías de análisis**

A continuación se muestran las categorías de análisis que fueron utilizadas para la presentación y análisis de resultados. Algunas de estas categorías fueron retomadas de las investigaciones expuestas en el marco teórico, mismas que se utilizan para el análisis de visualización, manipulación y representación espacial.

*Presenta discriminación visual.*

Para Gutiérrez (1991) la discriminación visual es la habilidad que permite comparar varios objetos identificando sus semejanzas y diferencias visuales. Un ejemplo es el clásico juego, que aparece en los periódicos, de las 7 diferencias. Otro ejemplo es el siguiente:

¿Cuántos módulos iguales hay en la figura 4.1.?



*Figura 4.1*

*Tiene elementos coordinados*

Battista & Clements (1996) mencionan que el coordinar vistas de un arreglo tridimensional requiere que la representación de las caras de los cubos se encuentre reorganizados como tales. También requiere que dos o más vistas sean consideradas juntas, de tal forma que se puedan interrelacionar.

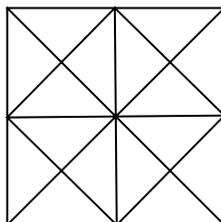
*Sólo dibuja una cara*

Esto se da cuando los estudiantes todavía no pueden coordinar las vistas de un arreglo de cubos, por lo que los dibujos no presentan un realismo y sólo dibujan la cara superior o alguna de las laterales.

*Identificación visual.*

Es la habilidad para reconocer una figura aislándola de su contexto. (Gutiérrez, 1991). Se utiliza por ejemplo, cuando la figura está formada por varias partes, como en los mosaicos, o cuando hay varias figuras superpuestas. Por ejemplo:

¿Cuántos cuadrados hay en la figura 4.2.?



*Figura. 4.2.*

Battista, (1996) menciona que para contar los cubos de un arreglo, los estudiantes deben tener un modelo mental del arreglo. Un modelo mental es una versión mental análoga de un objeto, cuya estructura es idéntica a la estructura de lo percibido o concebido del objeto que representa y es usado para simular las interacciones con el objeto.

*Cuenta más de una vez uno o más cubos*

Durante los intentos para contar los cubos de una construcción, varios estudiantes se enfocan a las colecciones bidimensionales de cuadrados. Para contar los cubos y no las caras de los cubos o su forma, los estudiantes deben considerar esos arreglos rectangulares bidimensionales como representaciones de unidades compuestas de cubos (Battista, 1996).



*Conteo en pisos o capas*

Los estudiantes conceptualizan la serie de cubos como una forma rectangular organizada en pisos o capas. Aquí pueden contar en forma individual, de dos en dos, sumando o multiplicando (Battista, 1996).

*Usa fórmulas*

Uso de la formula  $l \times l \times l$ . Puede ser que el niño la comprenda o simplemente la use como repetición sin entenderla.

*Omite el conteo de cubos ocultos*

El niño cuenta de uno en uno los cubos o en pisos, pero no contempla uno o varios cubos ocultos, ya sea porque no considera que existan esos cubos o por desorganización al contar. Esta es una de las características de los dibujos de los niños pequeños (Battista, 1996).

*Cuenta cubos inexistentes*

Durante los intentos para contar los cubos de una construcción, varios estudiantes no se percatan que el arreglo de cubos presenta algunos faltantes en su interior. Esto puede ser debido a que no tienen bien desarrollada su conservación de la percepción, les falta discriminación visual o por simple descuido.

### *Traza varias caras en forma desorganizada*

Esta es una característica que presentan los dibujos de los niños pequeños (Battista, 1996). Consiste en que los estudiantes dibujan más de una cara de un arreglo, pero esa representación no tiene un sólo punto de vista lo que hace imposible su coordinación.

### *Conservación de la percepción*

Gutiérrez (1991) la describe como la habilidad para reconocer que un objeto mantiene su forma aunque deje de verse total o parcialmente, por ejemplo porque haya girado o se haya ocultado.

### *Mantiene la proporción*

Es importante que las representaciones de arreglos cúbicos conserven tanto el tamaño como las distancias, ya que estos aspectos contribuyen a realizar dibujos realistas y coherentes.

### *Conserva el paralelismo*

El uso de líneas paralelas en representaciones cúbicas permite realizar dibujos coherentes de acuerdo a la perspectiva realizada. Por lo general los niños usan las líneas paralelas de forma adecuada cuando se tratan de trazos horizontales o verticales, sin embargo, presentan mayor dificultad cuando se trata de líneas oblicuas.

### *Traza cubo por cubo*

Los estudiantes, al hacer sus representaciones de algún arreglo, dibujan de forma individual, es decir, cubo por cubo y generalmente incluyen el trazo de aristas ocultas.

### *Trazo continuo*

Los estudiantes, al hacer sus representaciones de algún arreglo, dibujan de forma continua, es decir, el trazo abarca dos o más cubos y en ocasiones trazan el contorno de la representación y posteriormente las aristas internas.

### *Presenta memoria visual*

Es la habilidad para recordar las características visuales y de posición que tiene en un momento dado un conjunto de objetos que estaban a la vista pero que ya no se ven o que han sido cambiadas de posición (Gutiérrez, 1991).

## **4.2. Presentación de resultados de la entrevista inicial**

En la tabla 4.1 se presentan los resultados de las siete actividades que conforman la Entrevista Inicial. Estas actividades fueron analizadas de diferente forma de acuerdo al contenido y forma de resolver de cada una. También se menciona a los niños participantes mediante una letra (C, I, R, M, L, A) clasificando sus respuestas de acuerdo a una categoría, finalmente hay una columna de observaciones, donde se mencionan algunas características de los resultados. A continuación se hace una descripción de cada actividad de la Entrevista Inicial.

En la actividad 1 “son iguales”, se pidió a los niños la realización de un dibujo en papel isométrico de una construcción cúbica, la cual se le presentó en forma concreta e isométrica. Se consideraron tres aspectos para su análisis: Presenta discriminación visual, tiene elementos coordinados y sólo dibuja una cara. Se clasificó en la primera, si la representación del niño fue

igual a la que se pidió; la segunda, si pudo dibujar las tres caras adecuadamente y, la última, si dibujó la cara superior o alguna de las laterales.

La actividad 2 “¿Cuántas caras?”, se buscó la capacidad de los niños para leer representaciones bidimensionales de sólidos. En esta actividad se identificaron los cubos que conformaban cada construcción, así como el número de caras de cada uno. El grado de dificultad varía según la cantidad y forma de cada construcción. Las respuestas se clasificaron en dos aspectos: identificación visual y cuenta más de una vez uno o más cubos. En la primera se contempló si logró identificar todos los cubos de forma correcta y en la segunda si tuvo algún error o contó de más.

En la actividad 3 “el cubo incompleto”, se tuvo que identificar y completar tres construcciones cúbicas al utilizar las líneas que representan las aristas faltantes con las que está conformada una construcción. Las categorías contempladas fueron: tiene elementos coordinados, si logró representar las tres caras del objeto y reconocimiento de relaciones espaciales, si identificó y representó correctamente las características de los objetos.

La actividad 4 “¿Cuántos son?”, consistió en contar los cubos de tres representaciones bidimensionales las cuales tenían diferente grado de dificultad. Las categorías contempladas fueron: cuenta en forma individual sin organización, cuando no tuvo un orden al contar; cuenta en forma individual con organización, cuando tuvo una estrategia para hacer el conteo; conteo en pisos o capas, cuando su organización fue más allá del conteo uno a uno; usa fórmulas, si pudo calcular el número de cubos por medio de una fórmula; cuenta cubos inexistentes, si contaron

cubos en una parte de la figura donde no había; omitió el conteo de cubos ocultos, ya sea que no los contempló porque considera que no hay cubos ahí o porque tuvo un error al contar y cuenta más de una vez uno o varios cubos. Cabe mencionar que el último ejercicio, que es el que presenta mayor grado de dificultad, ningún niño lo resolvió correctamente.

En la actividad 5 “dibújalo”, los niños tuvieron que imaginar y dibujar una construcción cúbica teniendo como única información la vista de una parte de la construcción a la que sólo se le ve una cara. Se consideraron seis aspectos para analizar: sólo dibuja una cara, si dibujó la cara superior o alguna de las laterales; traza varias caras en forma desorganizada, dibujó más de una cara de un arreglo sin coordinación; tiene elementos coordinados, si pudo dibujar las tres caras adecuadamente; conserva la percepción, cuando el dibujo realizado por los niños mantiene la forma que se les pidió; mantiene la proporción, si mantienen el mismo tamaño los cubos y; conserva el paralelismo, si las distancias son iguales entre sí.

La actividad 6 “Sombras” consistía en reconstruir la representación de un objeto a partir de la sombra de su base, se consideraron cuatro aspectos para su análisis: tiene elementos coordinados, si pudo dibujar las tres caras adecuadamente; sólo dibuja una cara, si dibujó la cara superior o alguna de las laterales; trazó cubo por cubo, si sus líneas solo abarcaban la arista de un cubo e hizo trazos continuos, cuando al dibujar trazó una línea que representó la arista de dos o más cubos.

En la actividad 7 “¡se cayó!”, tuvieron que identificar las transformaciones que presenta un cuerpo al dibujarlo desde otro punto de vista. Para el análisis se tomaron en cuenta tres

aspectos en la forma de dibujarlo: tiene elementos coordinados, si pudo dibujar tres caras del arreglo; presenta memoria visual, si la vista que dibujó es la que se le pedía y, sólo dibuja una cara, si dibujó la cara superior o alguna de las laterales.

### **4.3. Análisis de la entrevista inicial**

En la entrevista inicial se diseñaron actividades de Visualización Espacial, Manipulación Espacial y Representación, con ello se buscó identificar las habilidades espaciales que los niños de sexto grado dominan. A continuación se analizan los resultados de la entrevista inicial conforme a estas tres habilidades espaciales:

Actividad	Forma de resolverlo		Niños					
			C	I	R	M	L	A
1 Son iguales	Presenta discriminación visual		*	*	*	*		
	Tiene elementos coordinados		*	*	*	*		
	Sólo dibuja una cara						*	*
2 ¿Cuántas caras?	Ejercicio 1	Identificación visual	*	*	*	*	*	*
		Cuenta más de una vez uno o más cubos						
	Ejercicio 2	Identificación visual	*	*	*	*	*	*
		Cuenta más de una vez uno o más cubos						
	Ejercicio 3	Identificación visual	*	*	*	*	*	
		Cuenta más de una vez uno o más cubos						*
3 El cubo incompleto	Ejercicio 1	Tiene elementos coordinados	*			*	*	*
		Reconocimiento de relaciones espaciales	*			*	*	*
	Ejercicio 2	Tiene elementos coordinados	*		*	*	*	*
		Reconocimiento de relaciones espaciales	*		*	*	*	*
	Ejercicio 3	Tiene elementos coordinados				*		*
		Reconocimiento de relaciones espaciales				*		*
4 ¿Cuántos son?	Ejercicio 1	Cuenta en forma individual sin organización						
		Cuenta en forma individual con organización	*	*	*	*	*	*
		Usa fórmulas						
		Omite el conteo de cubos ocultos	*				*	*
		Cuenta más de una vez uno o varios cubos						
	Ejercicio 2	Cuenta en forma individual sin organización						*
		Cuenta en forma individual con organización				*	*	
		Conteo en pisos o capas	*	*	*		*	
		Usa fórmulas			*	*		
		Omite el conteo de cubos ocultos						
	Ejercicio 3	Cuenta más de una vez uno o varios cubos						*
		Cuenta en forma individual sin organización		*				*
		Cuenta en forma individual con organización	*		*	*		
		Conteo en pisos o capas					*	
		Usa fórmulas						
		Cuentan cubos inexistentes	*	*	*			
		Omite el conteo de cubos ocultos					*	
		Cuenta más de una vez uno o varios cubos		*				*
5 ¡Dibújalo!	Sólo dibuja una cara			*				
	Traza varias caras en forma desorganizada						*	*
	Tiene elementos coordinados		*		*	*		*
	Conservación de la percepción							*
	Mantiene la proporción		*					
	Conserva el paralelismo					*		
6 Sombras	Tiene elementos coordinados		*		*	*	*	*
	Sólo dibuja una cara			*				
	Trazo cubo por cubo		*	*	*	*	*	*
	Trazos continuos							
7 ¡Se cayó!	Tiene elementos coordinados		*		*	*		
	Presenta memoria visual		*		*	*	*	
	Sólo dibuja una cara			*				

Tabla 4.1. Presentación de resultados de la Entrevista Inicial

### 4.3.1. Visualización espacial

En las actividades de visualización espacial se contempló el conteo de cubos y caras de un cubo en una construcción. El conteo se realizó en dos momentos, el primero fue en forma visual, es decir, se le mostró a los niños una representación bidimensional de una construcción cúbica y con solo verla se hizo su conteo; en el segundo momento se les pidió volver a contar, pero, ahora señalando con su dedo o lápiz la forma en que hicieron el conteo; de esta forma se pudieron rescatar las estrategias utilizadas por los niños al hacer el conteo. (Ver anexo 1)

#### *El conteo organizado y desorganizado*

En el conteo de cubos hubo dos formas de contar lo que se les pidió: organizada y desorganizadamente (Battista y Clements, 1996). El conteo organizado consistió en el conteo cubo por cubo, mediante capas o pisos, usando fórmulas  $b \times h \times l$ . En cuanto al conteo cubo por cubo el niño M contó uno por uno los cubos del frente de la representación, posteriormente contó de igual forma uno por uno los cubos que estaban en las columnas de atrás y así sucesivamente.

*E. ... ¿Cuántos cubos necesitarías?*

*M. (Los cuenta uno por uno señalándolos con el lápiz). 16*

*E. ¿Cómo le hiciste para contarlos?*

*M. Los conté 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16. (Primero contó uno por uno los cuatro que se encuentran al frente y luego fue contando por filas).*

Otros niños contaron mediante pisos o capas, lo cual consiste en contar en forma individual, de dos en dos, sumando o multiplicando (Battista, 1996). Para poder aplicar estas estrategias el alumno debe tener clara la forma del objeto y así poderla dividir en partes, por ejemplo el niño C:

*E. ... ¿Cuántos cubos necesitarías?*

*C. (los cuenta señalándolos con el lápiz) 16*

*E. ¿Cómo le hiciste para contarlos?*

*C. Vi que aquí había cuatro (Señala los cuatro cubos del frente), y atrás de cada uno hay cuatro y así.*

El conteo con uso de fórmulas es cuando el niño multiplica la base por la altura por la profundidad ( $bxhxl$ ). El niño R usó fórmulas para hacer el conteo.

*E. ... ¿Cuántos cubos hay?*

*R. (Observa detenidamente el dibujo y cuenta mentalmente) 16.*

*E. ¿16? ¿Cómo le hiciste para saberlo?*

*R. Sumé cuatro más cuatro, ocho y ocho, dieciséis*

*E. ¿Habrá otra forma de contarlos?*

*R. Multiplicando, cuatro por cuatro, dieciséis (seña lo largo del objeto)*

En cuanto a los que contaron en forma desorganizada se encuentra el caso del niño A, al no tener clara una estrategia de conteo se le olvidó qué cubo había contado y en ocasiones los llegó a contar dos o más veces (ver figura 4.4)

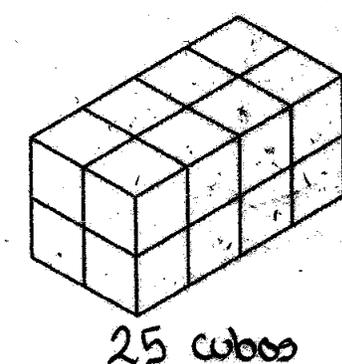


Figura 4.4. *Conteo desorganizado del niño A*

#### *Situaciones observadas*

El conteo de cubos o caras de un cubo depende de la posición en que estén acomodados los cubos en el arreglo y de la cantidad de cubos del arreglo. En cuanto al acomodo de los cubos se pudo observar que, en las representaciones en donde hay cubos ocultos, se les complica a los niños el conteo, ya que en ocasiones no los contemplan; este es el caso del niño C. Esto coincide con lo encontrado por Battista (1996).

*E. ... Si tuvieras que armar la figura con los cubos ¿Cuántos cubos necesitarías?*

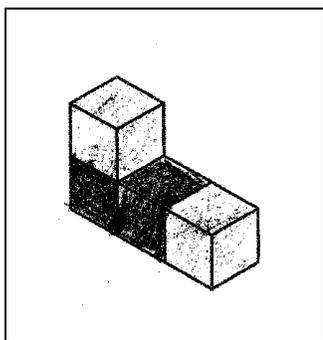
*C. 3*

*E. ¿Tres? ¿Dónde estarían los tres?*

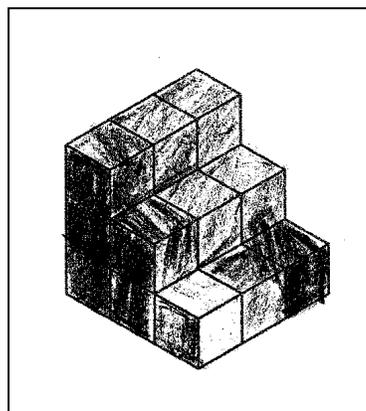
*C. Este, este y este (señala los tres cubos visibles y no contempla el cubo oculto)*

Si el acomodo de los cubos forma una construcción regular, es decir un prisma rectangular o un cubo, facilitan el conteo, ya que los niños pueden contar en niveles. Por el contrario, si el acomodo forma una construcción irregular, aquella que tiene sus caras diferentes, esto ocasiona que los niños tengan mayor probabilidad de equivocarse.

Por otro lado, las construcciones que contenían pocos cubos (ver figura 4.5) fueron más fáciles de contar para los niños a diferencia de las construcciones que estaban formadas por muchos cubos (ver figura 4.6).



*Figura 4.5. Construcción con pocos cubos*



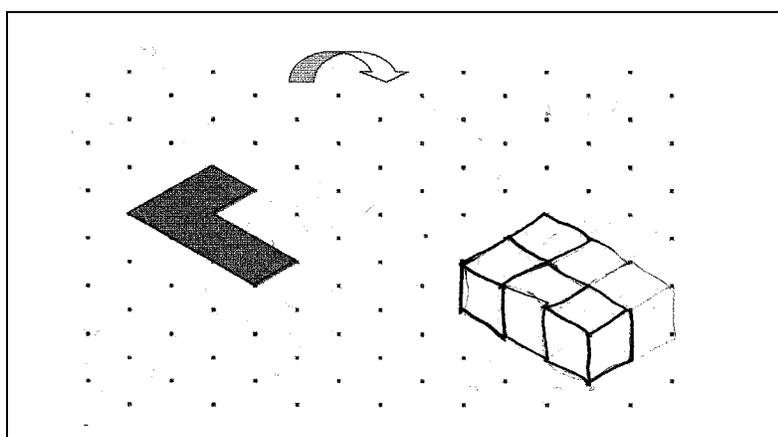
*Figura 4.6. Construcción con muchos cubos*

### **4.3.2. Manipulación Espacial**

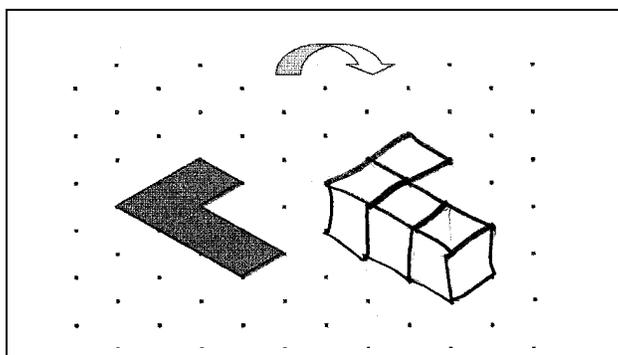
En las actividades diseñadas de manipulación espacial se incluyeron dos ejercicios de transformaciones o rotaciones de objetos, así como un ejercicio de conteo de cubos que estaban parcialmente visibles (ver anexo 1). Estas actividades estaban destinadas a identificar la habilidad de manejar información visual.

*Transformaciones*

En las actividades donde se pidió que hicieran alguna rotación, los niños L y A realizaron una representación incompleta ya que les faltó representar una arista de una cara de un cubo (ver figura 4.7. y 4.8.). No obstante, la perspectiva que utilizaron es adecuada de acuerdo a lo que se les pidió.



*Figura 4.7. Representación incompleta del niño L*



*Figura 4.8. Representación incompleta del niño A*

Por otro lado el niño I, en la actividad 6 “sombras”, dibujó la perspectiva adecuada pero no pudo coordinar las tres caras de la representación y sólo trazó la cara superior del arreglo (ver figura 4.9.).

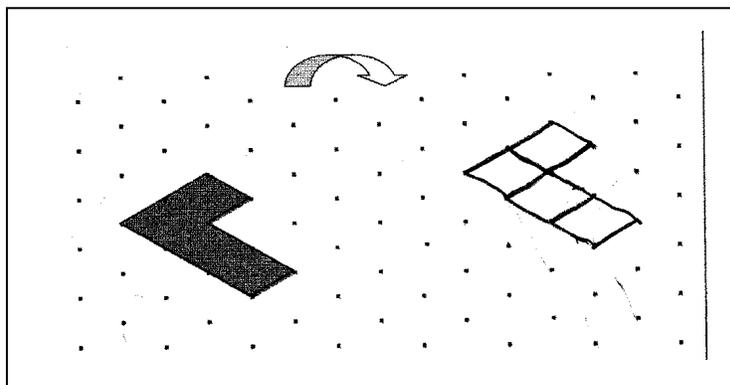


Figura 4.9. Representación del niño I, donde sólo dibuja una cara

Hubo algunas actividades donde los niños hicieron representaciones que son incongruentes con lo que se les pidió, esto, debido a que no pudieron coordinar la representación de las tres caras del objeto a dibujar y en ocasiones ni siquiera una cara corresponde a lo pedido, tal es el caso del niño I en la actividad 7 “¡Se cayó!” (Ver figura 4.10.).

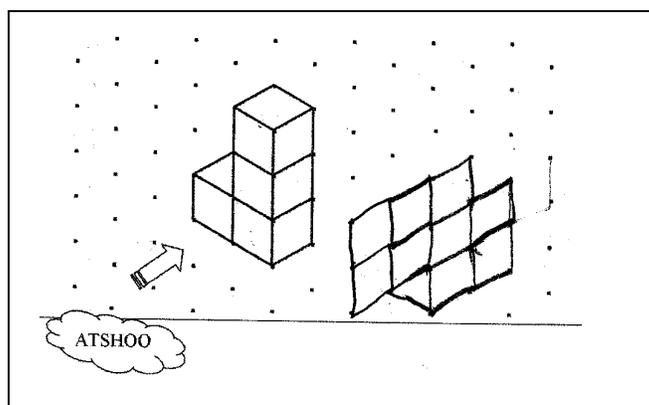


Figura 4.10. Representación incongruente del niño I.

También se pudo observar que los niños C, R y M (ver figuras 4.11, 4.12 y 4.13) tuvieron que recurrir al trazo de aristas ocultas, es decir, las aristas que se encuentran en la parte posterior,

para poder hacer sus representaciones; esto debido a que primero trazaron un cubo completo, con todas sus aristas, luego, trazaron un cubo contiguo por lo que algunas aristas quedaron ocultas y no las borraron. El niño C al darse cuenta que esas aristas eran ocultas las borró.

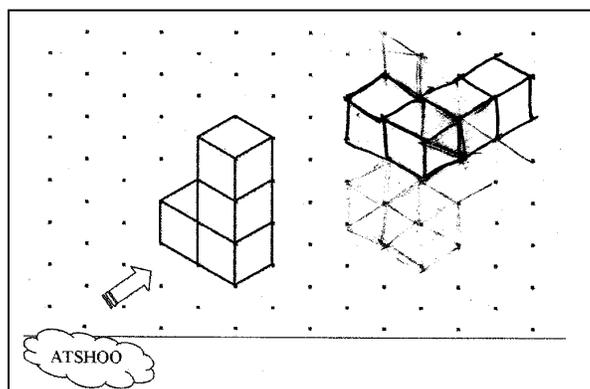


Figura 4.11. Representación con aristas ocultas del niño C.

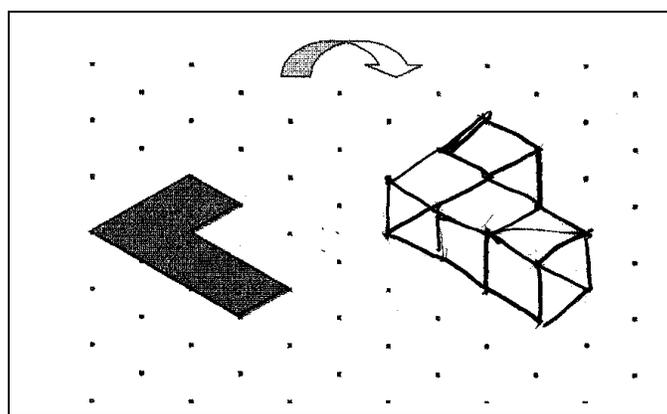


Figura 4.12. Representación con aristas ocultas del niño R.

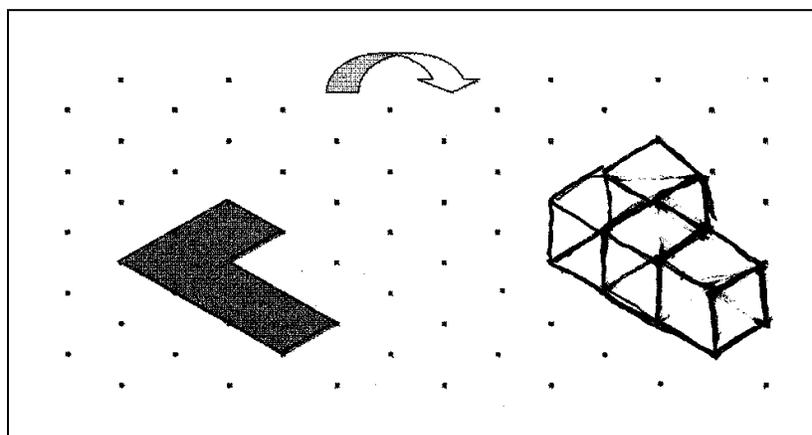


Figura 4.13. Representación con aristas ocultas del niño M.

### Conteo

En cuanto al conteo de cubos, con la actividad 5 “¡Dibújalo!, en la cual como ya se mencionó antes, se les mostró una caja cúbica sin tapa llena de cubos del mismo tamaño a la que sólo se le podían ver los cubos de la parte superior, los niños tenían que imaginarse todos los cubos y contar cuánto había dentro de la caja, posteriormente tenían que dibujar los cubos acomodados de la misma forma pero sin la caja.

Se observó que cuatro niños hicieron una representación que deja ver que su conteo fue conveniente ya que se observan tres caras del cubo: base altura y profundidad, de  $3 \times 3 \times 3$  con un total de 27 cubos. (ver figura 4.14.) Sin embargo, no es del todo adecuada, ya que tienen pequeñas fallas en cuanto al paralelismo y la proporción.

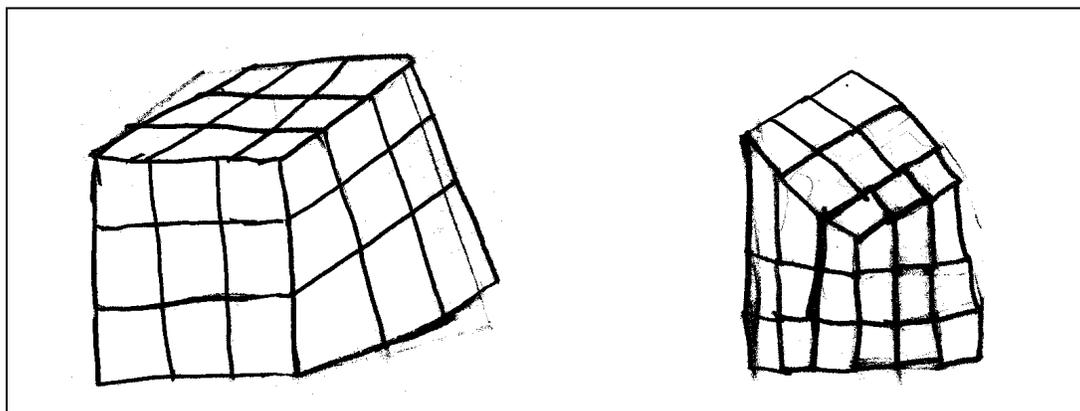


Figura 4.14. Del lado izquierdo, representación del niño C. Del lado derecho representación del niño A

Por otro lado los niños I y L hicieron una representación en la que no se puede apreciar cuántos cubos se necesitan para hacer ese arreglo, por ejemplo, I (ver figura 4.15.) solamente dibuja una cara del objeto y no le da profundidad. En el caso de L (ver figura 4.16.), traza varias

caras del objeto pero en una forma desorganizada ya que combinó varios puntos de vista al hacer el dibujo.

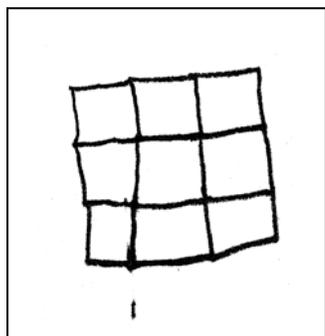


Figura 4.15. Representación del niño I

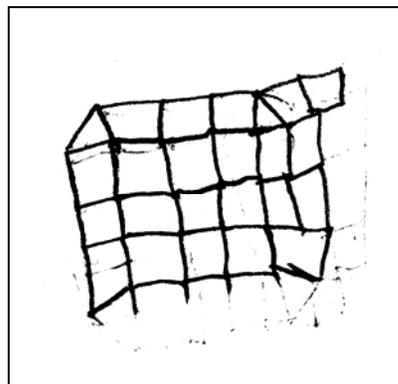


Figura 4.16. Representación del niño L

### 4.3.3. Representación

Hubo dos actividades que se contemplaron para identificar la forma cómo realizan sus representaciones los niños. Estas actividades fueron la 1 “Son iguales” y la 3 “El cubo incompleto”, la primera consistió en realizar un dibujo en papel isométrico a partir de una imagen gráfica y a partir de un modelo concreto. En la segunda tenían que completar las aristas internas de varias construcciones.

A pesar de que en la actividad 1 se les presentó a los niños el modelo concreto, cinco niños prefirieron tomar como modelo la representación gráfica, ya que ésta les permitía ver exactamente cómo debía quedar la representación.

El niño A al hacer su representación sólo trazó una cara lateral del objeto, la cara que trazó corresponde a una de las caras del modelo (ver figura 4.17.), sin embargo, no trazó la cara superior y la otra lateral por lo que su discriminación visual es deficiente (Gutiérrez, 1991).

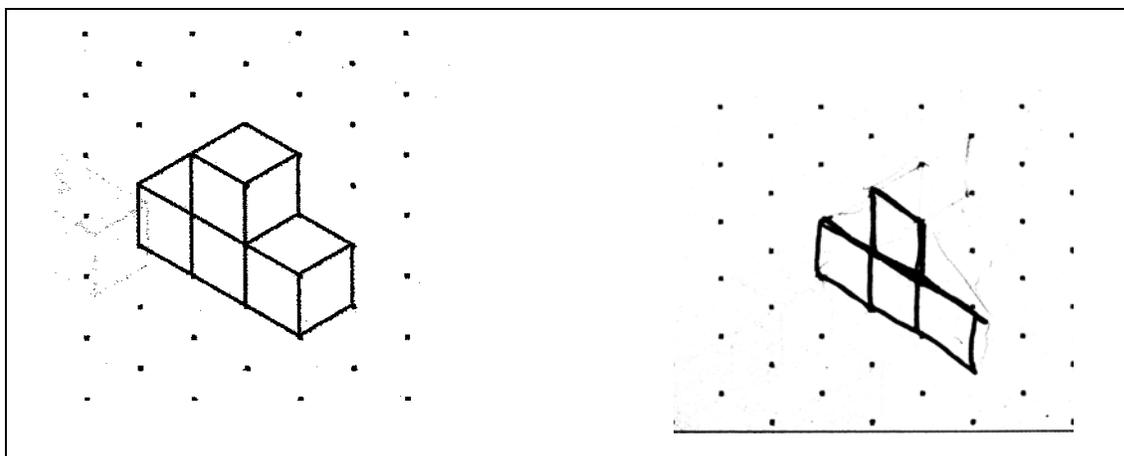


Figura 4.17. Del lado izquierdo el modelo a dibujar. Del lado derecho la representación del niño A

Hay algunas representaciones en las que los trazos que hicieron los niños formaban unas figuras imposibles e incongruentes, ya que no se parecían al modelo pedido. Por ejemplo, en la actividad 3, los niños C e I (ver figura 4.18.) ponen unas aristas que hacen parecer que un cubo se encuentra sumido o que ese mismo cubo está salido.

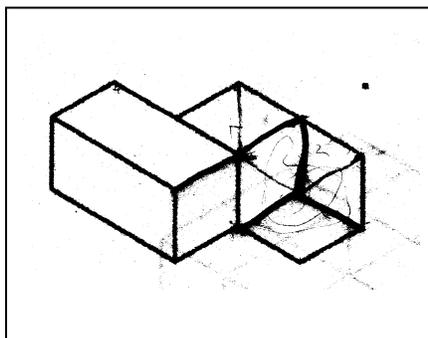
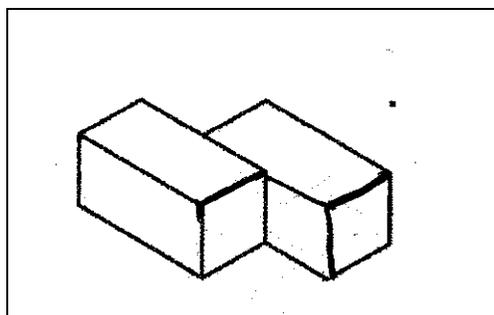


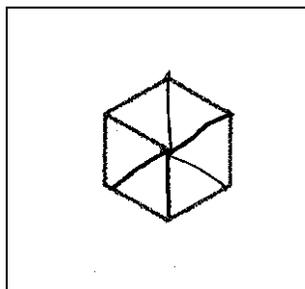
Figura 4.18. Representación imposible

En el mismo ejercicio el niño A hace su representación inconclusa, debido a que le faltó trazar algunas aristas internas (ver figura 4.19.), parecería que su construcción estuviera hecha por barras en lugar de cubos.



*Figura 4.19. Representación carente de aristas interiores*

El niño R, en la misma actividad al hacer la representación de un cubo, lo trazó como si el cubo fuera transparente, ya que marcó las tres aristas ocultas o posteriores del cubo. (ver figura 4.20.)



*Figura 4.20. Representación de un cubo transparente*

#### **4.4. Presentación de resultados de la entrevista final**

En la tabla 4. 2. se presentan los resultados de las siete actividades que conforman la Entrevista Final. Estas actividades son similares a las actividades que se presentaron en la Entrevista Inicial ya que comparten los mismos objetivos, sin embargo, tienen un cambio, en cuanto a la forma de las contrucciones utilizadas en las tareas, así como en el número de cubos que conforman cada arreglo, por lo cual su dificultad es mayor.

Actividad	Forma de resolverlo		Niños						
			C	I	R	M	L	A	
1 Son iguales	Presenta discriminación visual		*	*	*	*	*		
	Tiene elementos coordinados		*	*	*	*	*	*	
	Sólo dibuja una cara								
2 ¿Cuántas caras?	Ejercicio 1	Identificación visual	*		*	*	*		
		Cuenta más de una vez uno o más cubos		*				*	
	Ejercicio 2	Identificación visual	*		*	*	*	*	
		Cuenta más de una vez uno o más cubos		*					
	Ejercicio 3	Identificación visual	*		*	*	*		
		Cuenta más de una vez uno o más cubos		*	*				
3 El cubo incompleto	Ejercicio 1	Tiene elementos coordinados	*	*	*	*	*	*	
		Reconocimiento de relaciones espaciales	*	*	*	*	*	*	
	Ejercicio 2	Tiene elementos coordinados	*	*	*	*	*		
		Reconocimiento de relaciones espaciales	*	*	*	*	*		
	Ejercicio 3	Tiene elementos coordinados	*			*			
		Reconocimiento de relaciones espaciales	*			*			
4 ¿Cuántos son?	Ejercicio 1	Cuenta en forma individual sin organización						*	
		Cuenta en forma individual con organización	*	*	*	*	*		
		Usa fórmulas							
		Omite el conteo de cubos ocultos							
		Cuenta más de una vez uno o varios cubos						*	
	Ejercicio 2	Cuenta en forma individual sin organización							
		Cuenta en forma individual con organización	*	*	*	*	*	*	
		Conteo en pisos o capas							
		Usa fórmulas							
		Omite el conteo de cubos ocultos				*			
	Ejercicio 3	Cuenta más de una vez uno o varios cubos							
		Cuenta en forma individual sin organización				*		*	
		Cuenta en forma individual con organización	*		*	*			
		Conteo en pisos o capas					*		
		Usa fórmulas							
		Cuentan cubos inexistentes							
	5 ¡Dibújalo!	Sólo dibuja una cara							
		Traza varias caras en forma desorganizada							*
Tiene elementos coordinados		*	*	*	*	*			
Conservación de la percepción		*		*	*				
Mantiene la proporción		*		*	*				
Conserva el paralelismo				*	*				
6 Sombras	Tiene elementos coordinados		*			*	*		
	Sólo dibuja una cara								
	Trazo cubo por cubo			*	*		*	*	
	Trazos continuos		*			*			
7 ¡Se cayó!	Tiene elementos coordinados		*	*	*	*	*		
	Presenta memoria visual				*	*	*		
	Representa en dos dimensiones								

Tabla 4.2. Presentación de resultados de la Entrevista Final

## **4.5. Análisis de la Entrevista Final**

En la Entrevista Final se diseñaron actividades de Visualización Espacial, Manipulación Espacial y de Representación, con ello se buscó identificar los progresos de las habilidades espaciales en los niños de sexto grado (ver anexo 3). A continuación se analizarán los resultados de la Entrevista Final conforme a estas tres habilidades espaciales.

### **4.5.1. Visualización Espacial.**

En cuanto a Visualización Espacial se contempló el conteo de cubos y de caras de los cubos en una construcción. El conteo de caras se realizó en dos momentos, el primero fue mediante el conteo puramente visual y el segundo momento se realizó con el señalamiento de cada cubo e iluminarlo; de esta forma el niño pudo comparar sus resultados.

*El conteo organizado y desorganizado.*

En la actividad 2 “¿Cuántas caras?” se observó que en un principio el niño I realizó su conteo visual de forma incorrecta, debido a que identifica cuatro cubos con dos caras visibles mientras sólo eran tres cubos. Sin embargo, al confirmarlo con el conteo señalado se dio cuenta de su error, no obstante, comete otro error por lo que sus dos conteos fueron incorrectos ya que en el segundo conteo consideró sólo a dos cubos que se les veían tres caras y en realidad eran tres. En la figura 4.21. Se puede observar cómo el niño I identificó erróneamente varios cubos, en la tabla de la misma figura cada columna está dividida en dos, del lado izquierdo son las

anotaciones del conteo del niño y del lado derecho de la columna colocó el número de su conteo si éste era diferente al primer conteo.

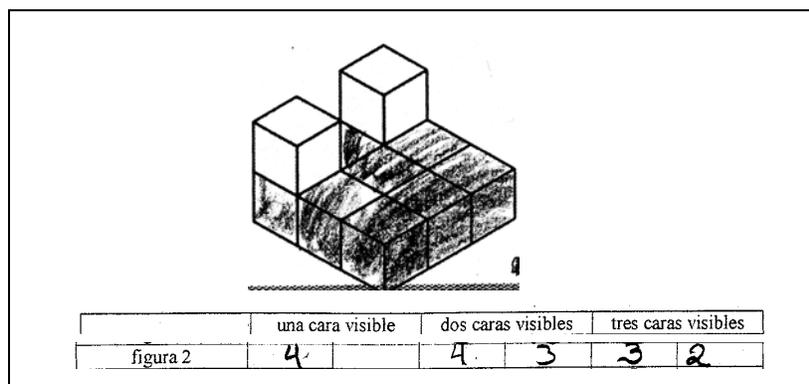


Figura 4.21. El niño I realiza dos conteos incorrectos.

Otro caso similar se pudo observar en el niño R que de igual forma comete errores en sus dos conteos ya que en el primer conteo contempla que no hay cubos a los que se le ven dos caras y nueve a los que se les ven tres caras; durante el segundo conteo se da cuenta de que son seis los cubos a los que se les ven dos caras, pero no se da cuenta de su otro error, no obstante los ilumina de forma correcta (Ver figura 4.22.).

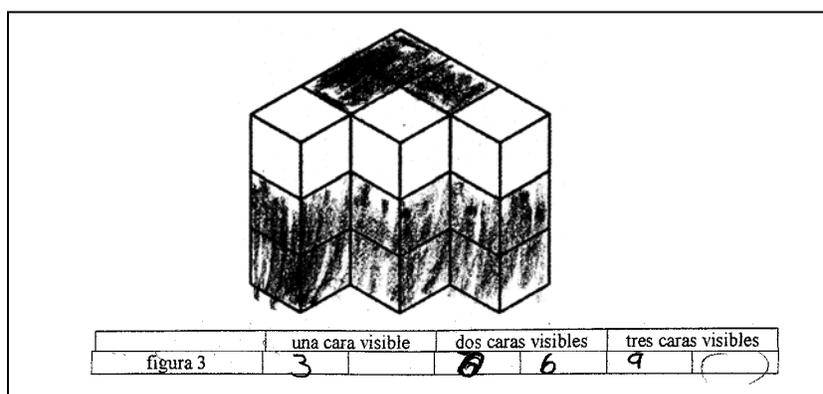


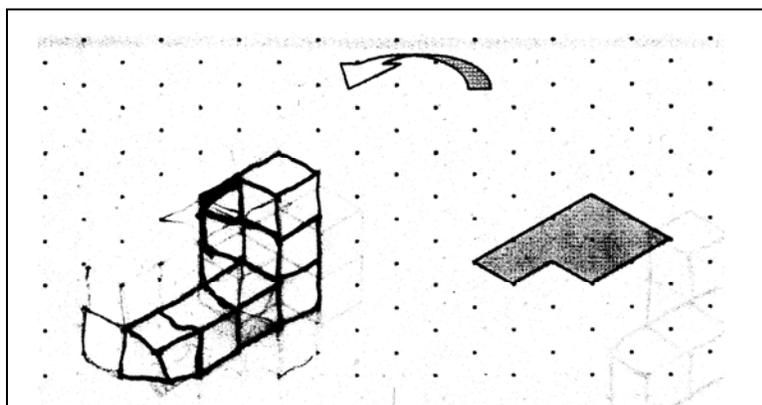
Figura 4.22. El niño R realiza dos conteos incorrectos

Un caso en el que el segundo conteo le sirve para identificar sus errores y corregirlos lo encontramos en el niño A, debido a que al hacer el primer conteo identifica tres cubos a los que



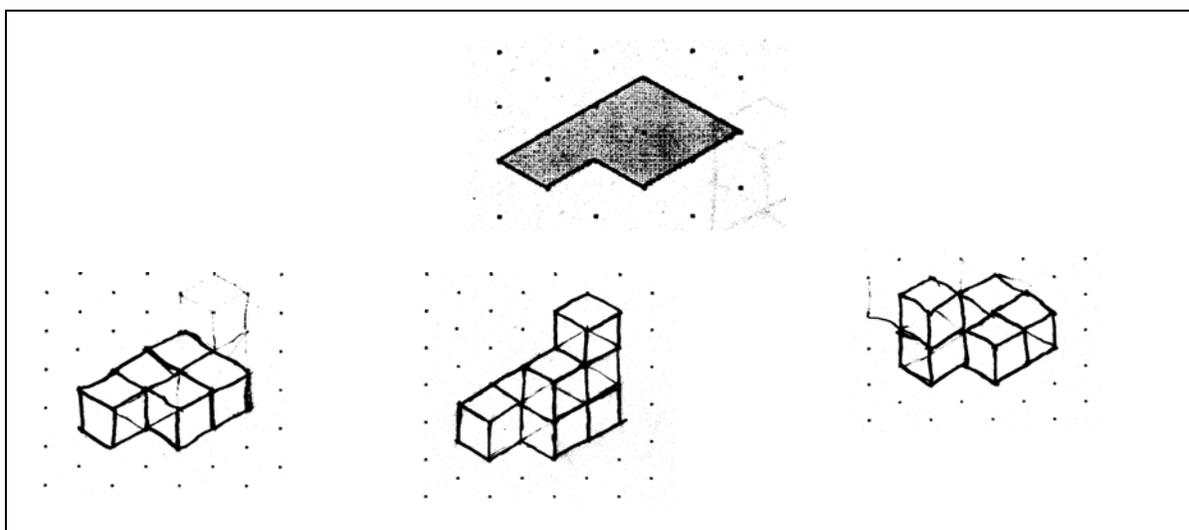
*Transformaciones.*

En la actividad 6, “Sombras” hubo tres niños (I, R y A) quienes hicieron una representación de una construcción que no es correcta ya que las formas de las bases son distintas al modelo presentado. (Ver figura 4. 24.)



*Figura 4.24. Representación incorrecta del niño I.*

Por el contrario, los otros tres niños (C, M y L) hicieron su representación correcta; aunque cabe mencionar que los tres arreglos fueron diferentes entre sí pero sus bases iguales (ver figura 4.25.).



*Figura 4.25. Representaciones correctas de los niños C, M y L respectivamente*

En la siguiente actividad de transformación “se cayó”, de igual forma tres niños (C, I y A) lo resolvieron de forma incorrecta ya que sus representaciones no corresponden a lo que se les pidió, es decir la figura del lado izquierdo (ver figura 4.26.) si se empuja o se tira en la dirección que marca la flecha no quedaría como la representación que hicieron los niños.

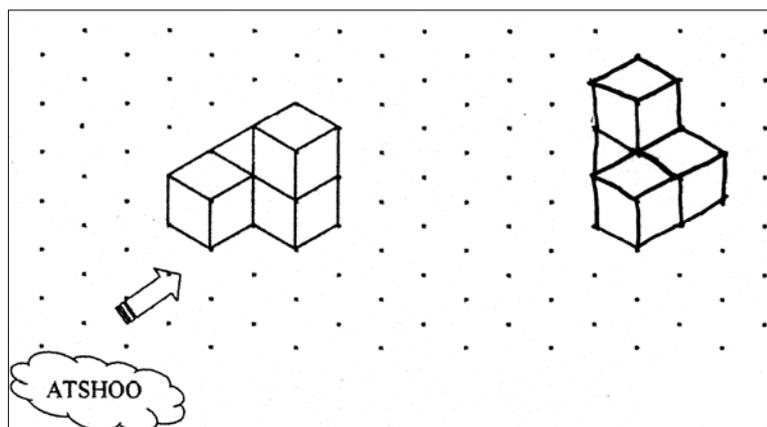


Figura 4.26. Representaciones incorrectas del niño C.

Un aspecto que llama la atención es que en esta misma actividad 7 “se cayó” dos niños (R y L) quienes hicieron su representación en forma adecuada (ver figura 4.27.) tuvieron que hacer varios intentos para conseguirla ya que borraron en varias ocasiones. Por el contrario, el niño M hizo su representación en un intento sin necesidad de borrar (ver figura 4.28.)

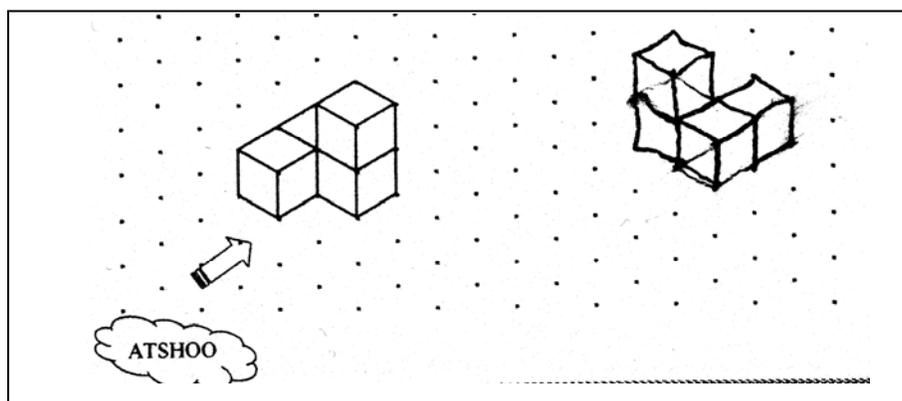


Figura 4.27. L concibió varios intentos para hacer su representación.

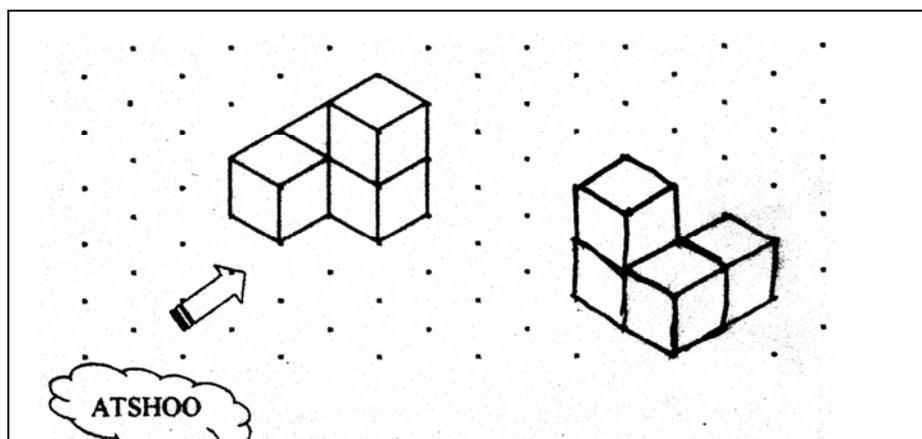


Figura 4.28. M realizó su representación sin borrar

### Conteo

En la actividad 5 “Dibújalo” se les mostró una caja cúbica sin tapa, llena de cubos del mismo tamaño, a la que sólo se podían ver los cubos de la parte superior. Los niños tenían que imaginarse todos los cubos, contarlos y finalmente dibujarlos acomodados de la misma forma pero sin caja.

Se observó que cuatro niños (C, R, L y A) hicieron bien su conteo sin embargo, el niño A hizo una representación en dos dimensiones en la cual se ven cuatro caras del objeto en forma desorganizada, por lo que no se aprecia de cuántos cubos está hecha esta representación (ver figura 4.29.).

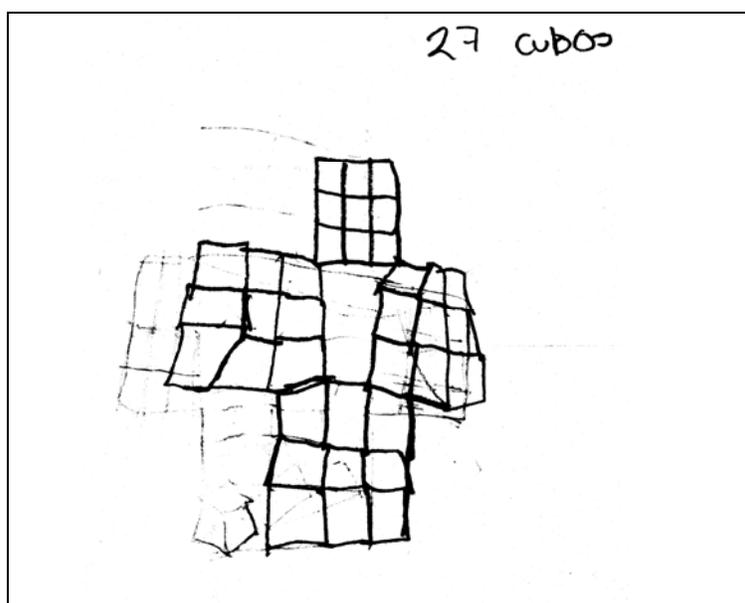


Figura 4.29. Representación del niño A en dos dimensiones sin coordinación de caras

Cinco niños (C, I, R, M y L) hacen una representación que no es del todo correcta debido a que varias líneas no conservan el paralelismo y la proporcionalidad, sin embargo, la representación permite identificar cuántos cubos se necesitan para formar la figura; no obstante los niños I y M hacen un conteo incorrecto, pues contemplan que se necesitan 24 cubos en lugar de 27 (ver figura 4.30.).

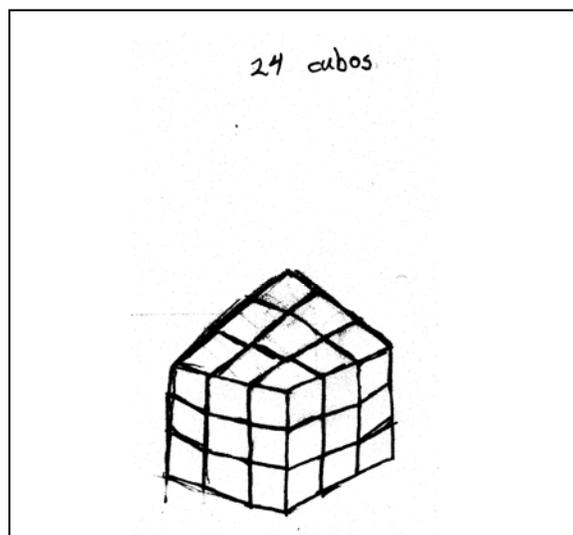
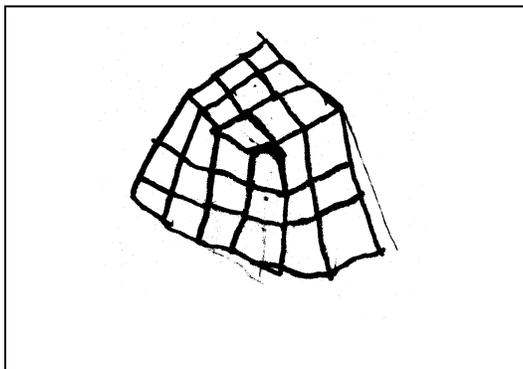


Figura 4.30. El niño M hacen un conteo inadecuado pero una representación correcta

Como se pudo observar en la actividad 5 “¡Dibújalo!”, las representaciones de los niños (C, I y L) presentan pequeños problemas de paralelismo y de proporcionalidad en sus dibujos, sin embargo, esto no impide que el dibujo comunique lo que quisieron representar, (ver figura 4.31)

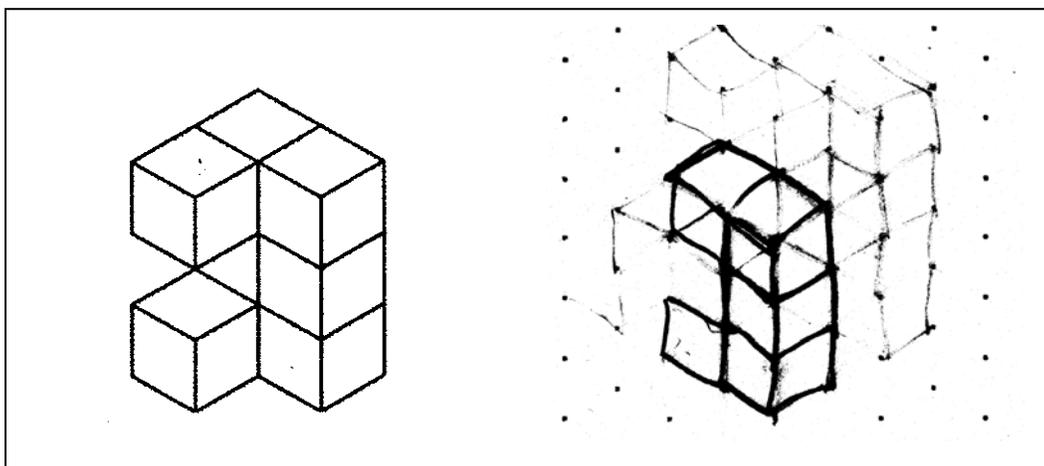


*Figura 4.31. La representación de L no conserva el paralelismo y la proporcionalidad.*

### **4.5.3. Representación.**

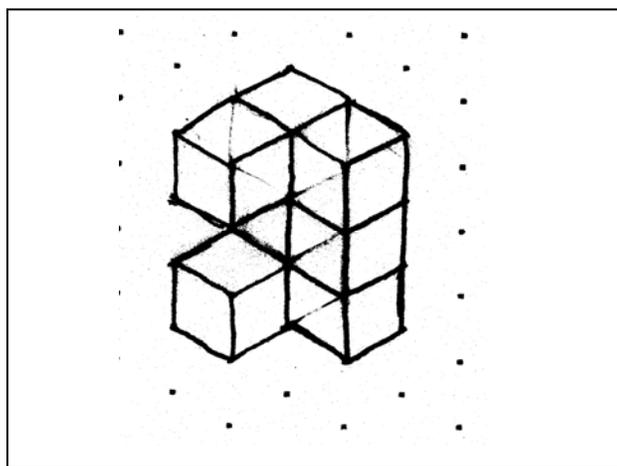
En la entrevista final se realizaron dos actividades de representación con el objetivo de identificar la forma como realizan los niños sus dibujos. La actividad 1 “Son iguales” consistió en realizar un dibujo en papel isométrico a partir de una imagen gráfica y a partir de un modelo gráfico y la actividad 3 “el cubo incompleto”, radicó en completar las aristas internas faltantes de varias construcciones.

El niño A al hacer su representación en la actividad 1 le dio profundidad ya que coordinó tres caras, sin embargo, su dibujo no tenía ninguna cara igual al modelo (ver figura 4.32.).



*Figura 4.32. Del lado izquierdo se observa el modelo que el niño A representó del lado derecho de forma incorrecta.*

Los niños C, I, R, M y L realizaron una representación correcta en la actividad 1, pero se puede observar que M y L trazaron algunas aristas ocultas y al final de su dibujo las borraron (ver figura 4.33.). Por el contrario los niños C y R no trazaron líneas ocultas y algunos de sus trazos fueron continuos (ver figura 4.34).



*Figura 4.33. Representaciones con trazos de aristas ocultas de los niños M y L*

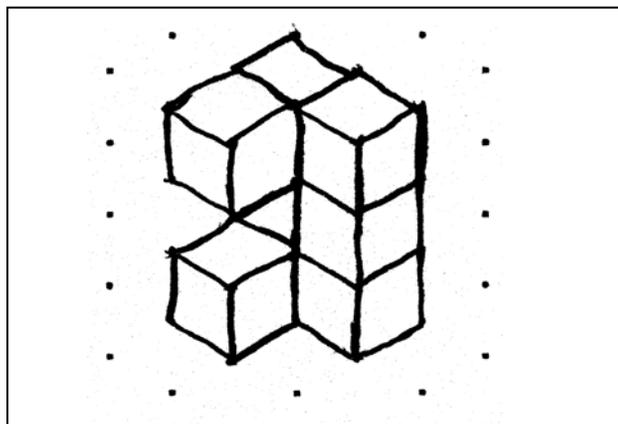


Figura 4.34. Representaciones sin trazos de aristas ocultas de los niños C y R

Hubo algunas representaciones que hicieron los niños I y A que formaban figuras imposibles, ya que si se quisieran construir esa figura con cubos no se podría (ver figura 4.35.).

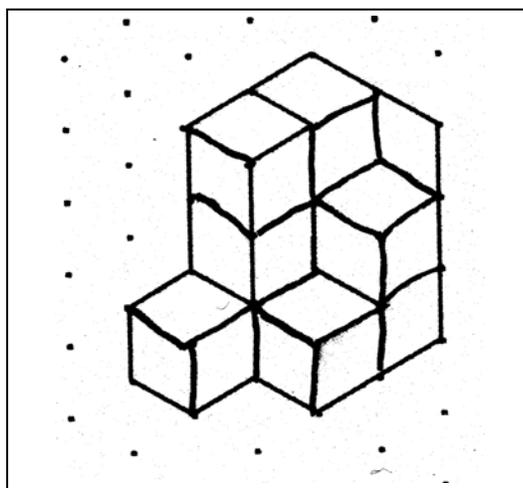
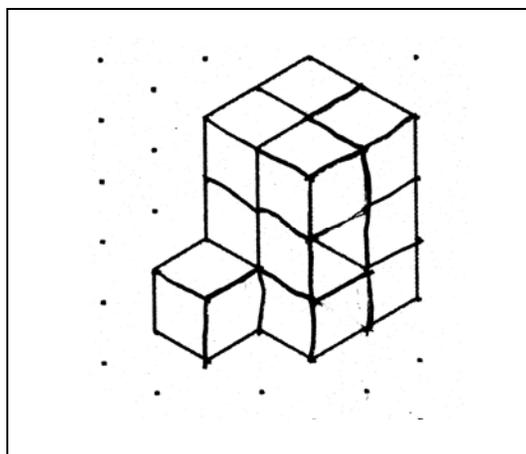
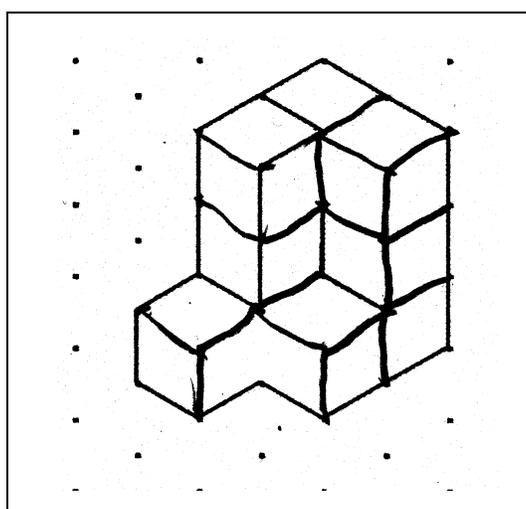


Figura 4.35. Representacione imposible del niño L.

Un caso especial es el de los niños I y R debido a que el niño I realizó una representación a la cual le sobra una arista (ver figura 4.36.). Por el contrario R realizó un dibujo al cual le faltó una arista para que su representación fuera del todo adecuada (ver figura 4.37).



*Figura 4.36. Representación con una arista sobrante*



*Figura 4.37. Representación con una arista faltante*

#### **4.6. Comparación de Resultados**

En este apartado se hace una comparación entre los resultados de la entrevista inicial con los de la entrevista final. En ellos se pueden apreciar los avances y las diferencias que hay entre las producciones realizadas por los niños participantes. La comparación se hace tomando en

cuenta las tres habilidades espaciales trabajadas: visualización espacial, manipulación espacial y representación.

#### 4.6.1. Visualización Espacial

En la actividad 4 “¿Cuántos son?”, donde se les pidió a los niños realizaran el conteo total de cubos que conforman una colección plasmada en un dibujo, se pudieron observar los procedimientos del niño A y el niño L. El niño A en la entrevista inicial (ver figura 4.38.a) realizó un conteo correcto y organizado de cubos (Battista, 1996) cuando el arreglo presentó poca cantidad de cubos; por el contrario cuando se le presentó un arreglo con muchos cubos y algunos faltantes (figura 4.38.b) realizó un conteo desorganizado, contó más de una vez varios cubos y contempló algunos cubos inexistentes. No obstante, en la entrevista final el niño A tuvo algunos avances ya que pudo contar adecuadamente y de forma organizada arreglos con muchos cubos (figura 4.39.a). Sin embargo, cuando se le presentó un arreglo donde algunos cubos sólo mostraban la mitad de una cara el niño A presentó problemas de conteo y organización ya que contó algunos cubos de más (figura 4.39.b).

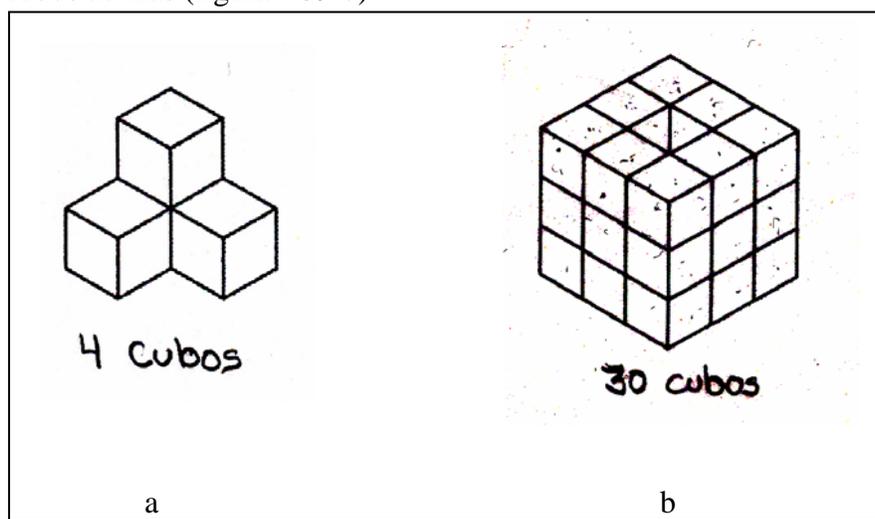


Figura 4.38.a y b. Arreglo con pocos cubos y arreglo con muchos cubos respectivamente.

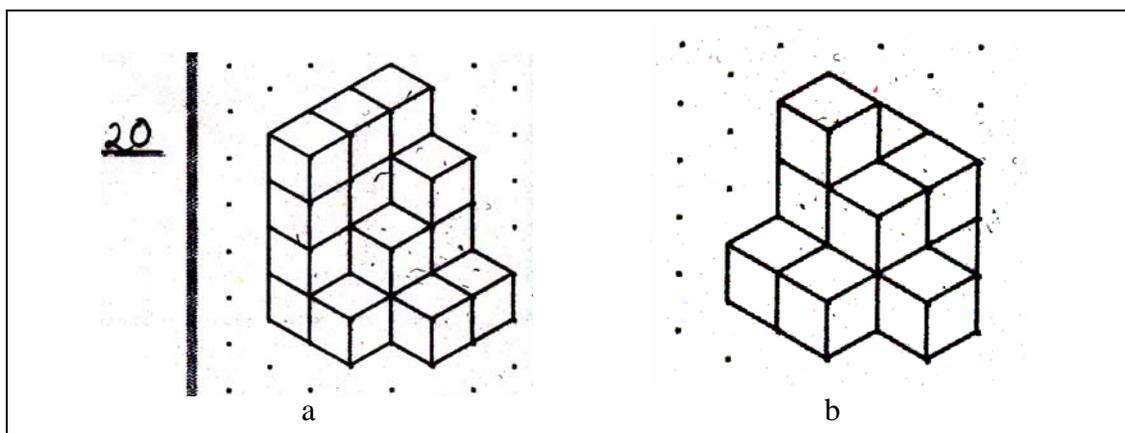


Figura 4.39.a y b. Arreglo con muchos cubos y arreglo con cubos a los que se les ve media cara

En la misma actividad, durante la entrevista inicial el niño L omitió el conteo de cubos ocultos y algunos visibles, ya que sólo contó los cubos de dos caras del arreglo. Durante la entrevista final el mismo niño L realizó un conteo organizado y hasta por capas (figura 4.40.) debido a que contó los cubos que había en cada nivel y los fue sumando, no obstante, aunque la representación tenía muchos cubos acomodados de una forma complicada.

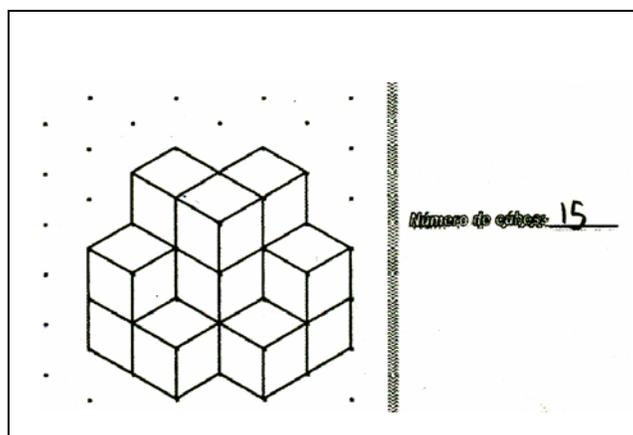


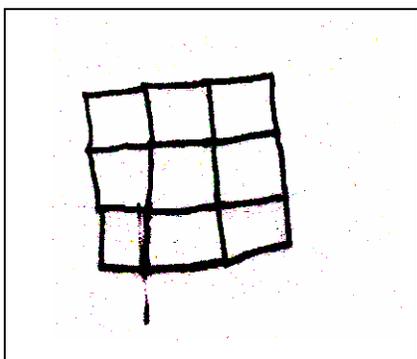
Figura 4.40. El niño L realizó un conteo por capas en esta representación.

## 4.6.2. Manipulación Espacial

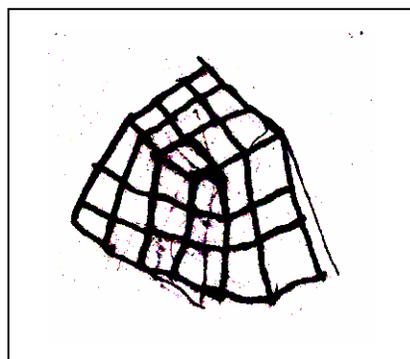
### *Observación, cálculo, rotación y dibujo de construcciones*

En la actividad 5 “Dibújalo”, donde se les pidió observar, calcular y dibujar la forma total de una construcción que se encuentra en una caja, a la cual sólo se le ve la cara superior, se observaron las diferencias de producciones entre los niños I y R. El niño I durante la entrevista inicial hizo una representación donde se puede apreciar que le falta desarrollar su conservación de la percepción (Gutiérrez, 1991) debido a que sólo dibujó una cara del objeto (ver figura 4.41.). Al modelo que debía representar sólo se le apreciaba la cara superior y el dibujo de I aparenta ser una cara lateral, por lo que no pudo coordinar y representar las tres caras visibles del modelo.

En la entrevista final el mismo niño I ya pudo coordinar las tres caras visibles, aunque con pequeños errores en cuanto al paralelismo y la proporción (figura 4.42.). También se puede apreciar que su conservación de la percepción va mejorando ya que su dibujo permite observar de cuántos cubos está conformado el arreglo.



*Figura 4.41. I sólo dibuja una cara en la entrevista inicial*



*Figura 4.42. I hace una representación con profundidad en la entrevista final*

A diferencia de I, en la entrevista inicial, R hace una representación donde se aprecian elementos coordinados (Battista, 1996), ya que pudo dibujar las tres caras (figura 4.43.), sin embargo, su conservación de la percepción no es del todo adecuada porque en algunas partes representa a un arreglo de  $4 \times 4 \times 4$  y en otras  $3 \times 4 \times 4$  y en realidad era un arreglo de  $3 \times 3 \times 3$ . La representación que hace R la realiza como si estuviera viendo el cubo con una cara de frente, una lateral y otra superior, mientras que el modelo se le presentó con una arista de frente, dos caras laterales y una superior, por lo que se deduce que el niño dibujó un convencionalismo, es decir, no dibujó lo que realmente estaba viendo sino que, una forma convencional del trazo de un cubo.

Por otro lado, durante la entrevista final R realiza una representación semejante al objeto mostrado, ya que lo dibuja con una arista de frente, sus dos caras laterales y la superior (figura 4.44.). Sin embargo, tiene pequeños problemas de paralelismo pues las aristas laterales inferiores no conservan la misma distancia con las aristas laterales superiores. Lo mismo pasa con la proporción, es decir, algunos cubos son ligeramente más grandes que otros. Sin embargo, el niño pudo hacer una buena representación de lo que vio e imaginó.

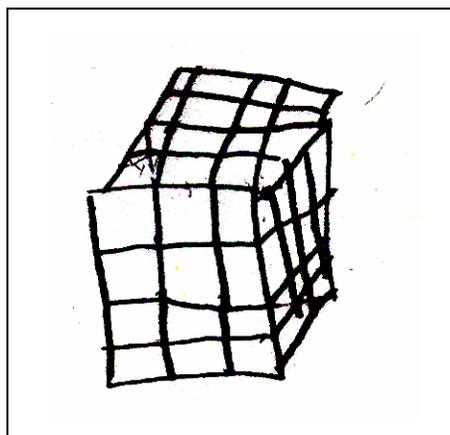


Figura 4.43. Representación de R en la entrevista inicial

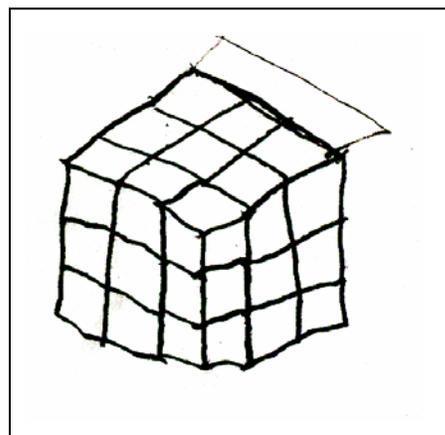


Figura 4.44. Representación de R en la entrevista final

Otra actividad de manipulación espacial en donde se pueden observar algunos cambios en las representaciones de los niños es la actividad 7 “¡Se cayó!”, donde tenían que predecir una rotación de un poliedro y hacer su representación. Durante la entrevista inicial el niño M hace una representación con elementos coordinados pues dibuja las tres caras adecuadamente; el niño presentó una buena memoria visual, ya que pudo predecir el movimiento que tendría un poliedro. No obstante que la representación es correcta, se puede observar que los trazos son inseguros, hechos cubo por cubo; en niño trazó algunas aristas ocultas que al final borró y consiguió su dibujo después de varios intentos (figura 4.45.). Al resolver la misma actividad de la entrevista final el niño M sigue presentando una buena memoria visual y su representación tiene elementos coordinados (figura 4.46.). Algo que hay que resaltar es que dicha representación la hizo en el primer intento, es decir no borró, no marcó aristas ocultas y algunos trazos fueron continuos.

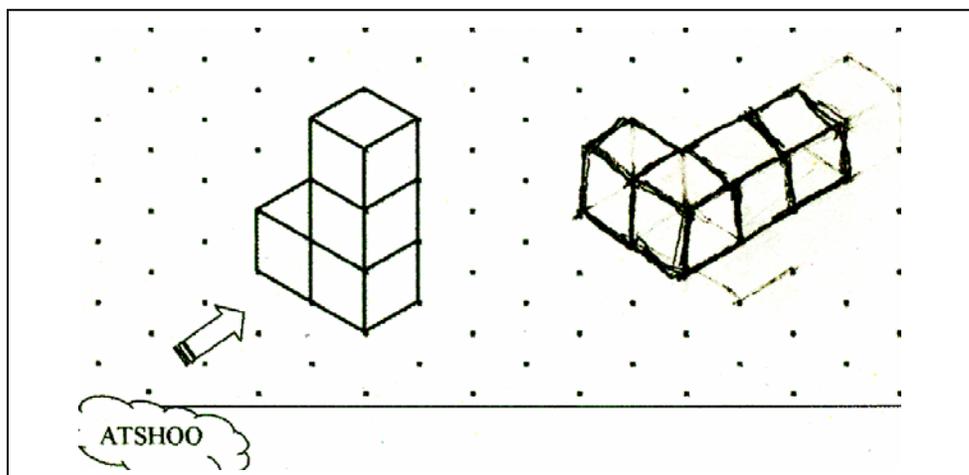


Figura 4.45. Representación del niño M de una rotación en la entrevista inicial

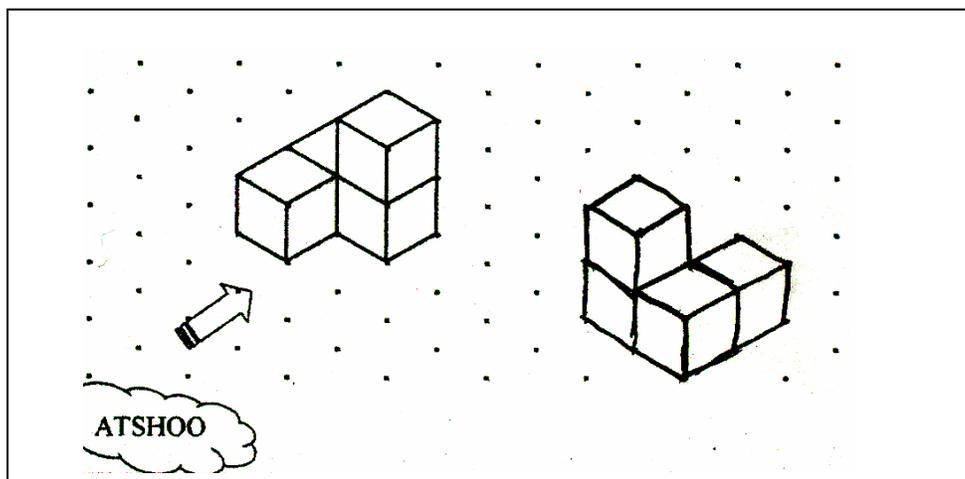


Figura 4.46. Representación del niño M de una rotación en la entrevista final

En esta misma actividad 7, tenemos el caso del niño C que en las dos entrevistas hizo representaciones con elementos coordinados, sin embargo, durante la entrevista inicial presenta una buena memoria visual ya que anticipa perfectamente la rotación del objeto, (figura 4.47.) mientras que en la entrevista final su memoria visual es errónea (figura 4.48.). No obstante estos aspectos, en el primer caso realizó varios intentos antes de conseguir el correcto y se tuvo que apoyar en el trazo de aristas ocultas. Por el contrario en el segundo caso sólo hizo un intento y no trazó aristas ocultas, pero su representación no es adecuada.

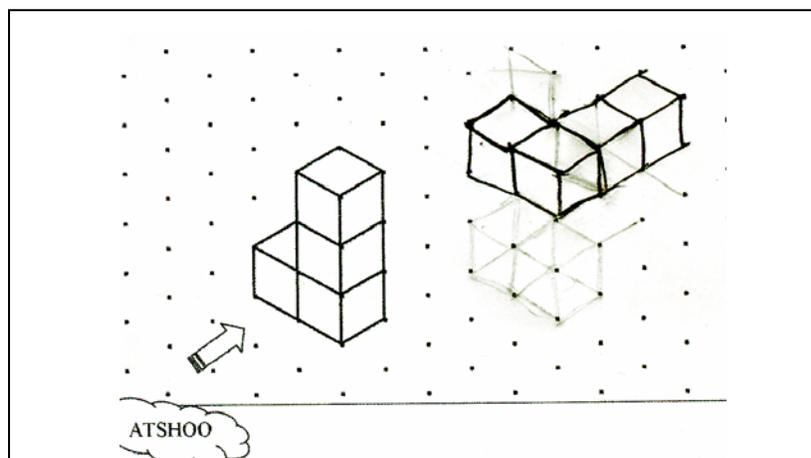


Figura 4.47. En la entrevista inicial C representa una rotación

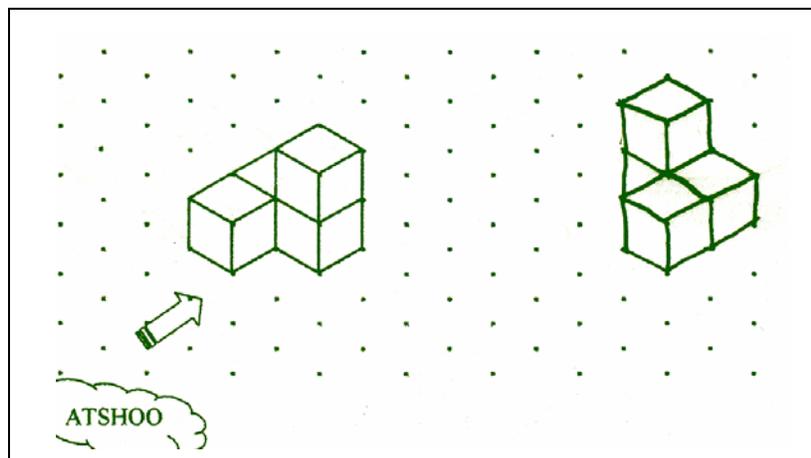
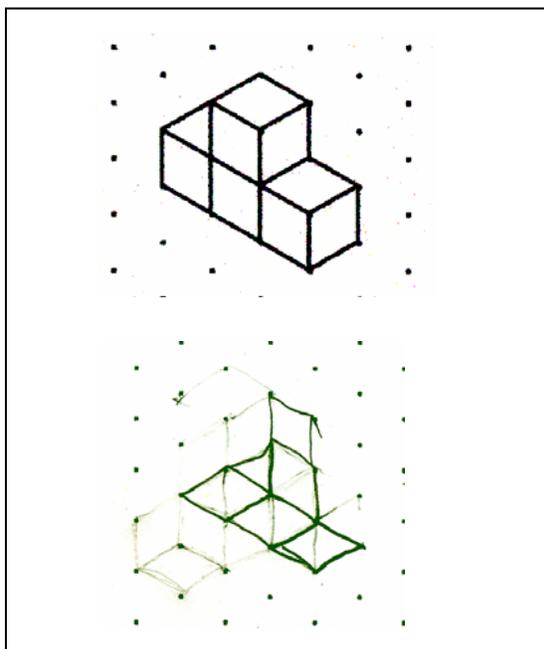


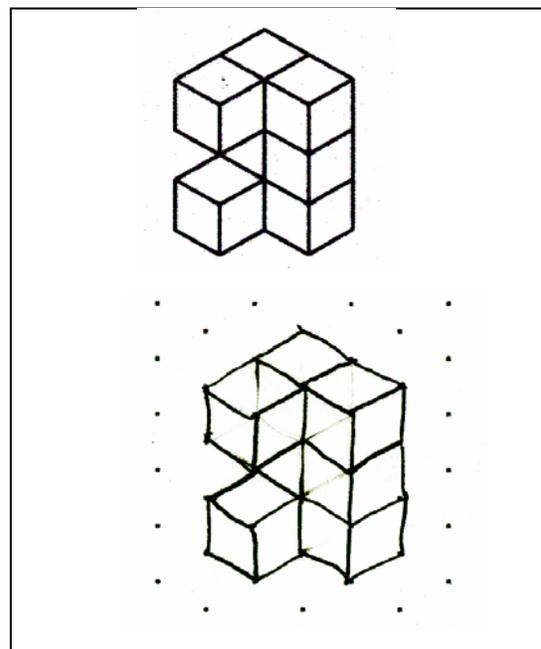
Figura 4.48. En la entrevista final C representa una rotación errónea

### 4.6.3. Representación

En cuanto a las actividades de representación se encuentra la 1 “Son iguales”, donde tenían que hacer una representación en papel isométrico a partir de una imagen bidimensional y de un objeto concreto. Durante la entrevista inicial el niño L no pudo coordinar las tres caras visibles del objeto, pues no se ve claramente ninguna cara; la discriminación visual del niño no es adecuada pues su representación no es semejante al modelo presentado (ver figura 4.49.). Hay un cambio notable entre la representación de la entrevista inicial y la final ya que en esta última ya coordina las caras del arreglo de cubos y tiene una buena discriminación visual pues su dibujo es semejante al modelo presentado (figura 4.50.).



*Figura 4.49. La figura de arriba es el modelo y el de abajo la representación de L en la entrevista inicial*



*Figura 4.50. La figura de arriba es el modelo y la de abajo la representación de L en la entrevista final*

Otro ejemplo importante es el caso del niño A que durante la entrevista inicial, después de hacer varios intentos sólo representa una cara del objeto pedido (figura 4.51.) por lo que no presenta buena discriminación visual y no hay coordinación, ya que no representó mas que una cara. Para la entrevista final, el niño A sigue teniendo problemas de discriminación visual pues su representación no es semejante al modelo mostrado (ver figura 4.52.), sin embargo, el dibujo ya tiene algunos aspectos de coordinación pues relaciona tres caras, dando la sensación de profundidad, aunque la representación no es la que se les pidió. En las dos representaciones se puede apreciar que el niño tuvo que hacer varios intentos para hacer su dibujo.

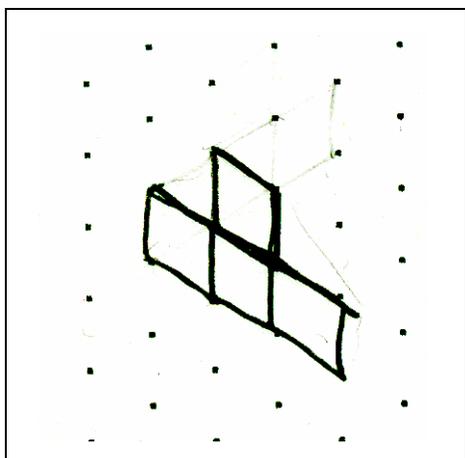


Figura 4.51. Representación en dos dimensiones de A en la entrevista inicial

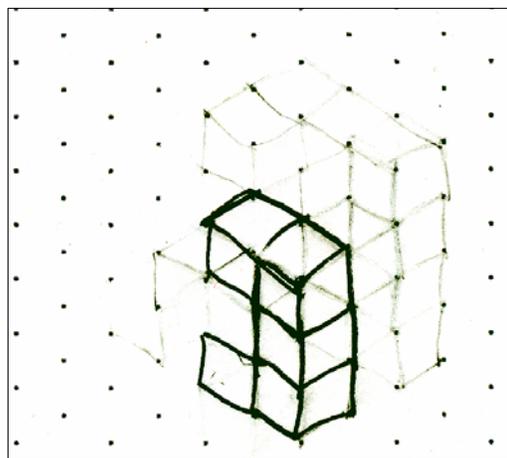


Figura 4.52. Representación en tres dimensiones de A durante la entrevista final

En la actividad 3 “El cubo incompleto”, donde se les presentó la representación de un arreglo de cubos con algunas aristas internas faltantes y que los niños tenían que completar. Durante la entrevista inicial el niño C hizo una representación imposible (ver figura 4.53.), ya que si se quisiera hacer una representación con cubos no se podría debido al trazo que tienen algunas aristas interiores. No obstante, parte del dibujo tiene elementos coordinados pues relacionó las tres caras del objeto. Por otro lado, en la entrevista final con un arreglo de muchos cubos que de la misma manera le faltaban algunas aristas, (figura 4.54.) logró hacer su representación adecuada ya que todas las aristas corresponden al objeto. Es importante mencionar que en esta última representación al niño C le costó mucho trabajo realizarla ya que hizo varios intentos antes de conseguir la adecuada.

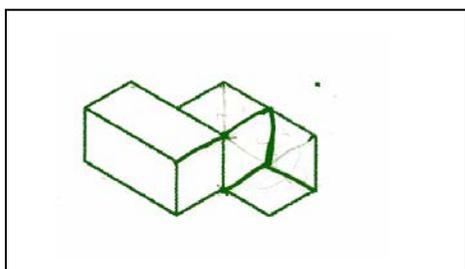


Figura 4.53. Representación imposible de C

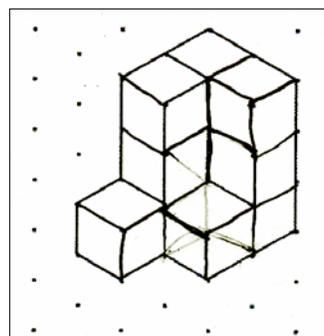


Figura 4.54. C completa bien las aristas faltantes

En este capítulo se mencionaron las categorías de análisis utilizadas para revisar los resultados; se hace la presentación y análisis a los resultados de la entrevista inicial y final, finalmente se compararon las dos entrevistas para conocer las diferencias entre ambos procedimientos.

Las categorías de análisis utilizadas para el estudio de las actividades de manipulación, visualización y representación espacial son retomadas de las investigaciones hechas por Bishop, Gardner, Battista, Alsina y Gutiérrez. En estas categorías se describen los procedimientos utilizados por los niños durante las entrevistas iniciales y finales como lo es el conteo de cubos de una representación gráfica, el dibujo de un modelo y el cambio de perspectiva.

Entre los resultados obtenidos inicialmente se apreció poca dificultad en el conteo de cubos con pocos elementos en su construcción; en tareas de rotaciones y predicciones mantuvieron cierta dificultad para imaginar los cambios de posición de una construcción; en las representaciones gráficas se apreciaron problemas para manejar las tres dimensiones.

No obstante, en la entrevista final se observaron ciertos cambios en los procedimientos empleados. En el conteo de cubos los estudiantes fueron capaces de realizar conteos correctos con construcciones de mayor cantidad de unidades y con cubos ocultos. En la rotación las dificultades fueron menos frecuentes, algunos tuvieron la certeza de los cambios que sufría un cuerpo al cambiar su posición original teniendo menos equivocaciones. En cuanto a la representación las producciones realizadas mantienen tridimensionalidad, coordinación de caras,

partes no visibles ocultas y perspectiva isométrica, aunque aún con ciertos problemas de paralelismo y proporcionalidad.

Los cambios en los procedimientos de cada niño fueron muy particulares debido a que cada uno tuvo diferentes habilidades desarrolladas. Niños quienes mostraron poca dificultad en la realización de las tareas afinaron sus procedimientos, mientras que aquellos quienes tuvieron varios problemas lograron superar algunos de ellos.

## CONCLUSIONES

De acuerdo con la revisión hecha por Hershkowitz (1990) sobre el estado del arte en cuanto a la investigación en matemática educativa en relación con los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría, hasta el momento de la publicación; las investigaciones revisadas daban lugar a algunas preguntas importantes. Sobre la visualización espacial dos de esas preguntas eran:

- ¿Pueden las habilidades de visualización ser adquiridas o mejoradas por un entrenamiento explícito?
- Si sí, ¿qué debe ser incluido en el *curriculum* y cómo debe ser enseñado?

Después de 1990 hubo muy pocas aportaciones para responder estas preguntas y de ello se ha comentado en capítulos anteriores.

En este trabajo se revisaron los cambios entre los procedimientos iniciales y finales utilizados por los niños de sexto grado en tareas de visualización, manipulación y representación espacial después de trabajar con materiales concretos y se considera que se han encontrado algunos elementos que aportan luz a las preguntas anteriormente planteadas y que se encuentran en las siguientes conclusiones:

- El uso de papel isométrico facilitó a los niños de este estudio la representación de construcciones cúbicas.

La posición que siguen los puntos del papel isométrico permite a la persona quien lo usa evitar preocuparse por la proporcionalidad y paralelismo de las representaciones. En cinco sesiones con los niños se utilizó el papel isométrico como otro recurso para representar y realizar dibujos en perspectiva oblicua, y de esta manera enriquecer sus recursos gráficos.

Se observó en la entrevista final un mayor uso de las representaciones isométricas por parte de los niños, a diferencia de los dibujos de la entrevista inicial donde llegaron a utilizar sólo representaciones paralelas. Niños como M y R en la entrevista inicial realizaron representaciones paralelas, ya que hicieron un dibujo donde se percibió un cubo visto de frente, es decir, la cara anterior paralela al plano del cuadro. En cambio, en la entrevista final estos mismos niños, M y R, fueron capaces de realizar representaciones isométricas, debido a que dibujaron cubos vistos de lado, es decir, con una arista de frente y dos caras laterales. Ambas representaciones son fuertes recursos cuando se busca representar y entender los dibujos que vienen en libros y otros textos.

- Las habilidades espaciales utilizadas por los niños en actividades de visualización, manipulación y representación espacial mejoraron a diferentes ritmos.

En los resultados arrojados por las entrevistas posteriores a las sesiones de trabajo se apreciaron cambios en los procedimientos empleados por los niños. En la visualización se notó

que los niños tuvieron menor dificultad al realizar el conteo de cubos, esto a pesar de haber aumentado su cantidad y su posición dentro de la construcción cúbica. Algunas dificultades como el conteo desorganizado aminoraron después de las sesiones de trabajo.

En la manipulación, con tareas de transformaciones o rotaciones de construcciones, se observaron mejoras en la representación de cambios de posición, sin embargo, hubo todavía problemas con las construcciones que mostraban partes ocultas. Esto puede explicarse como la necesidad que tienen algunos niños de mantener aún un referente gráfico.

En la representación espacial, se vio que todos los dibujos realizados tenían una apariencia tridimensional, donde ya existe coordinación de caras, aunque todavía con errores de proporción y paralelismo.

- El uso de materiales concretos durante las sesiones de trabajo favoreció el desarrollo de habilidades de visualización, manipulación y representación espacial.

El tener a la mano materiales concretos y experimentar las transformaciones y sus representaciones forman parte de la práctica requerida para favorecer el conocimiento del espacio en los niños.

En este estudio se utilizaron cubos de madera, piezas del cubo de Soma y papel isométrico. La utilidad de estos materiales fue mejorar la comprensión de las representaciones bidimensionales, así como la relación que hay de éstas con los objetos tridimensionales.

En actividades de manipulación espacial, donde era necesario anticipar los cambios de posición de un arreglo de cubos, el uso de cubos de madera permitió confirmar las predicciones de los niños.

El usar cubos de madera y piezas del cubo de Soma ayudó a identificar las partes no visibles de un arreglo tridimensional.

- Los niños mejoraron sus representaciones con características tridimensionales.

En la entrevista inicial se observaron dificultades para realizar representaciones de las construcciones mostradas. Hubo casos donde se dibujaron formas bidimensionales en vez de tridimensionales, así como una falta de coordinación entre las tres caras observadas en la construcción cúbica. Posterior a las sesiones de trabajo, se advirtieron los cambios en la realización de dibujos. Estos dibujos presentaron tridimensionalidad y coordinación entre las caras observadas. Sin embargo, los dibujos realizados en papel isométrico presentan mayor eficacia que los representados en papel blanco.

- La manipulación y representación espacial es más fácil si los arreglos están compuestos por pocos cubos.

Las construcciones que tienen pocos cubos presentan poca dificultad, debido a que existen menos partes no visibles de algunos cubos, por lo que se requiere para su correcto conteo

y representación una mejor manipulación espacial. A diferencia de esto, cuando se presentan construcciones con varios cubos y con un acomodo irregular, tienen mayor dificultad sobre todo para dibujarlos después de una transformación.

El estudio expuesto en este documento no pretende agotar el tema de la imaginación espacial, pretende ser un primer acercamiento a lo que puede ocurrir si se dedica parte del tiempo escolar a desarrollar habilidades relacionadas con la imaginación espacial. Se considera que los avances mostrados por los alumnos son importantes dado el poco tiempo de trabajo que se tuvo. Aún así es preciso realizar más investigaciones en este sentido.

## BIBLIOGRAFÍA

**Alsina, Burgués y Fortuny** (1991). *Materiales para construir la Geometría*. Síntesis. España.

**APMEP.** (s/f). *Aides pédagogiques pour le cours elementary*. No. 29 COPIRELEM; IREM de Paris-Sur. Francia. Trad. Alicia Ávila. La geometría en la enseñanza elemental.

**Battista, M. y Clements D.** (1996). *Students' Understanding of Tree Dimensional Rectangular Arrays of Cubes*. Journal for Research Mathematics Education. Vol. 27. No. 3 (pp. 258-292).

**Ben-Haim, D., Lappan, G. and Houang, T.** (1985). *Visualizing Rectangular Solids Made of Small Cubes: Analyzing and Effecting Students Performance*. Educational Studies in Mathematics. 4. (pp. 389-408).

**Bishop, A. J.** (1979). *Visualising and Mathematics in a pre-technological culture*. Educational Studies in Mathematics. Vol. 10.

**Bishop, A. J.** (1983). Space and geometry. In R. Lesh & M. Landau (Eds.) *Acquisition of mathematics concepts and processes*. New York: Academic Press. (pp. 175-203).

**Edwards, B.** (2000). *Nuevo aprender a dibujar con el lado derecho del cerebro*. Ediciones URANO. Barcelona.

**Field, J.V.** (1999). *The invention of infinity. Mathematics in the Renaissance*. Oxford University Press.

**Gaulín, C.** (1985). The Need for Emphasizing Various Graphical Representations of Three Dimensional Shapes and Relations. (53-71)

**Gardner, H.** (1994). *Estructuras de la mente. La teoría de las inteligencias múltiples*. Fondo de Cultura Económica. (pp. 213-251).

**Gardner, H. y Kornhaber, M.** (1996). *Intelligence Multiple Perspectives*. Harcourt Brace. Collage Publishers. (Pp.204-210).

**Gómez, M.** (1995). *El niño y sus primeros años en la escuela*. Secretaría de Educación Pública, México. (pp. 26-63, 122-134).

**Gorgorio, N.** (1998). Exploring the Funcionality of Visual and No-visual Strategies in Solving Rotations Problems. *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 35 No. 3, pp. 207-231.

**Gutiérrez, A.** (1991). *Procesos y habilidades en visualización espacial*. Memorias del 3er Congreso Internacional sobre Investigación en Educación Matemática. Valencia.

**Gutiérrez, A.** (1996). Visualization in 3-Dimensional Geometry: In Search of a Framework

**Hershkowitz, R. et al.** (1990). Psychological aspects of learning geometry in Math and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Cambridge University Press. Great Britain.

**Mitchelmore, M.** (1980). *Three Dimensional Geometrical Drawing in Three Cultures*. *Educational Studies in Mathematics*. 11. (pp. 205-216).

**Malara, N.** (1999). *Acerca de las dificultades que tienen los profesores de secundaria para visualizar y representar objetos tridimensionales*. *Educación Matemática*. Volumen 11. No. 3. (pp. 56-68).

**Owens, K. & Outhered, L.** (2006). The complexity of learning geometry and measurement. In

**Gutiérrez, A. y Boero, P.** (Eds). *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education Past, Present and Future*. Sense Publishers.

**Parramón, M.** (1998). *Perspectiva y composición*. Barcelona. Parramón Ediciones.

**Rey Pastor, J. y Babini, J.** (2000). *Historia de la matemática*. Volumen 1. Gedisa Editorial. Barcelona.

**SEP.** (1995). *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Taller para maestros*. (pp. 125-145).

**SEP.** (2000). *Libro para el Maestro de Matemáticas, sexto año*. México.

**SEP.** (1993). *Plan y Programas de Estudio. Educación Primaria*. México.

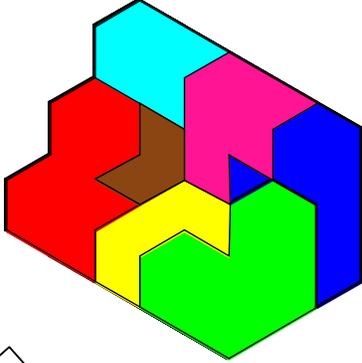
**Serrano, J. e Ysunza M.** (1990). *Análisis curricular de los planes y programas de estudio de la educación básica*. Documento de trabajo.

**Taylor, S. y Bogdan, R.** (1990). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación*. Madrid. Paidós. (pp. 19-23).

**The National Council of Teachers of Mathematics** (2000). "*Principles and Standard for School Mathematics*". Estados Unidos de América. Trad. Manuel Fernández. Principios y Estándares para la Educación Matemática.

**Tyler, R.** (1982). *Principios básicos del curriculum*. Troquel, Buenos Aires.

ENTREVISTA  
INICIAL



NOMBRE: \_\_\_\_\_

EDAD: \_\_\_\_\_

FECHA: \_\_\_\_\_

## ENTREVISTA INICIAL

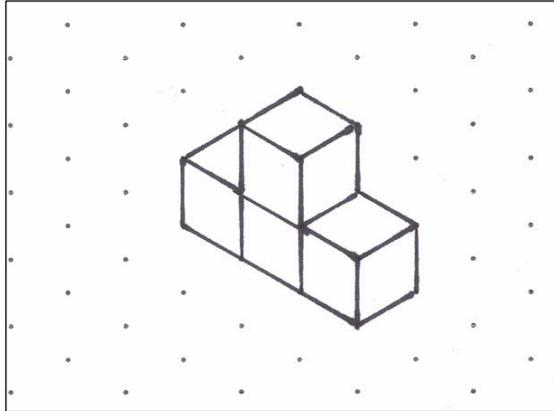
### OBJETIVOS:

- Identificar las habilidades espaciales: visualización e interpretación espacial que dominan niños de sexto grado de primaria.
- Identificar los procedimientos empleados en los ejercicios utilizando representaciones gráficas en visión isométrica.

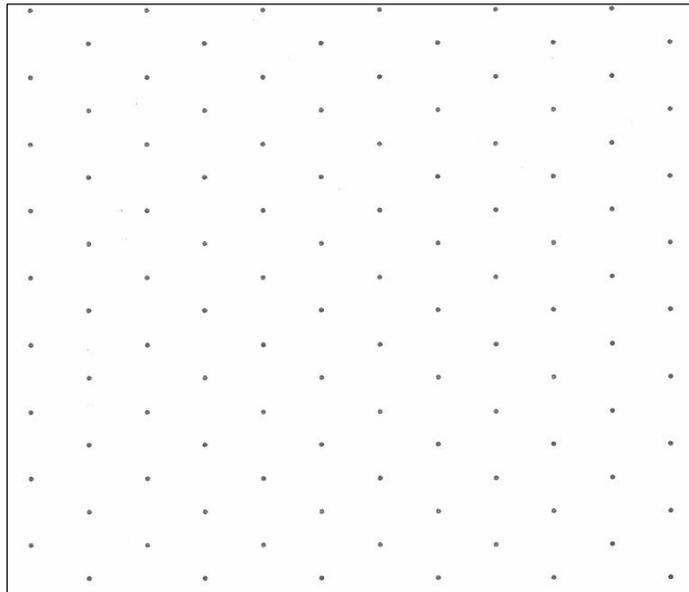
### ACTIVIDADES

#### 1. Introducción.

- a) El objeto que te voy a mostrar a continuación (se muestra en forma física el objeto) se puede dibujar de la siguiente forma:

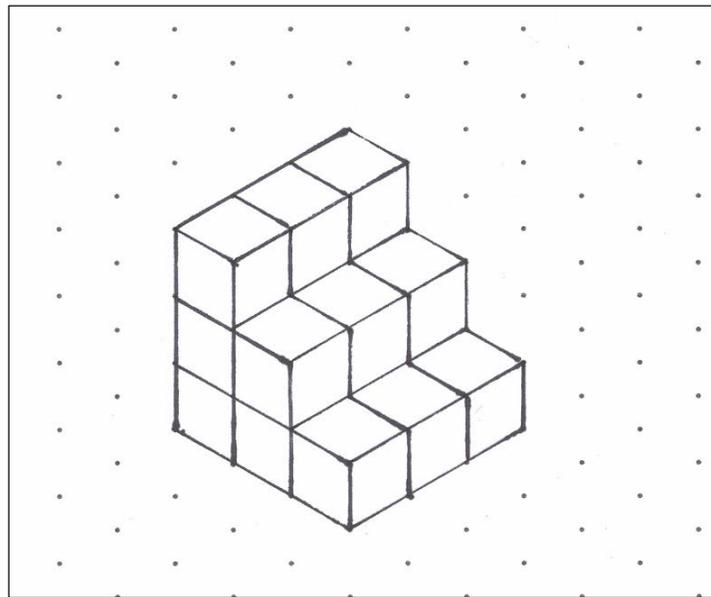
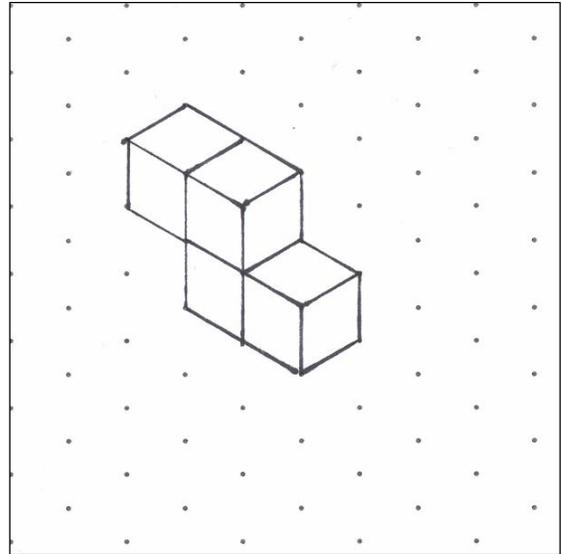
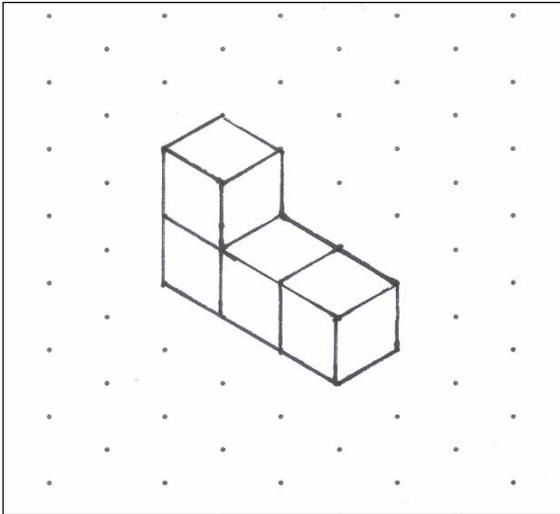


- b) ¿Lo puedes dibujar en la parte de abajo?



2. Identificar la capacidad para leer representaciones bidimensionales de sólidos.

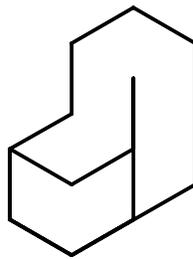
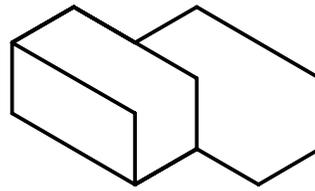
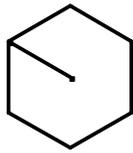
- a) De las siguientes figuras colorea de azul los cubos a los que sólo se les ve una cara; de rojo a los que se les ve dos caras y de amarillo a los que se les ve tres caras.



- b) ¿Por qué crees que algunos cubos sólo se les ve una cara y a otros dos o tres?

3. Identificar las líneas faltantes y completar representaciones bidimensionales de sólidos: cubo, tricubos y tetracubos.

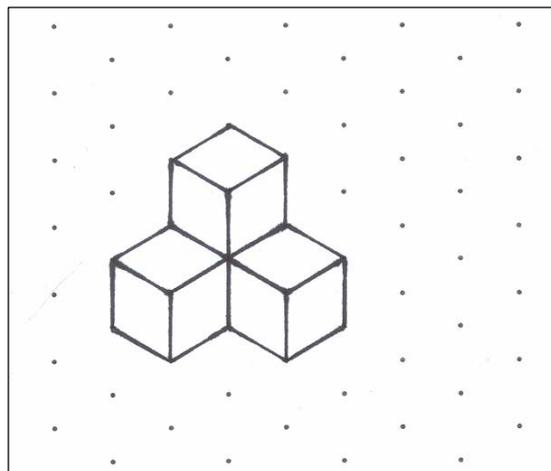
- a) Traza la línea que hace falta en cada dibujo

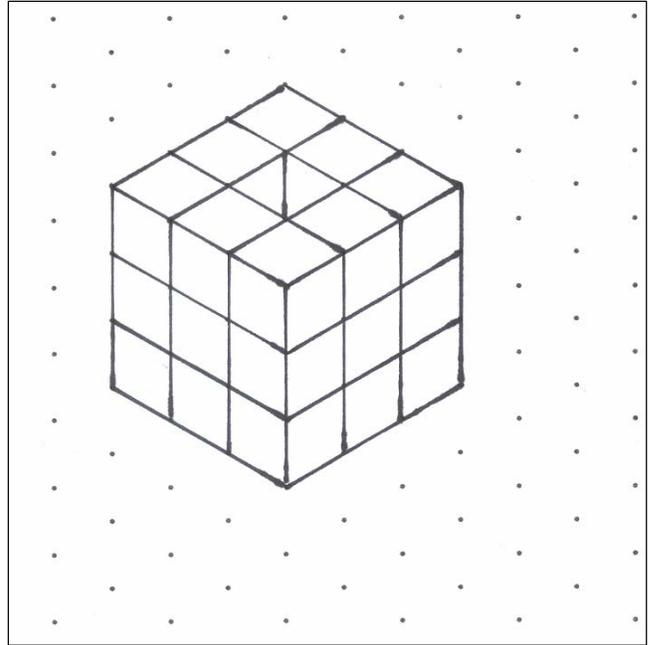
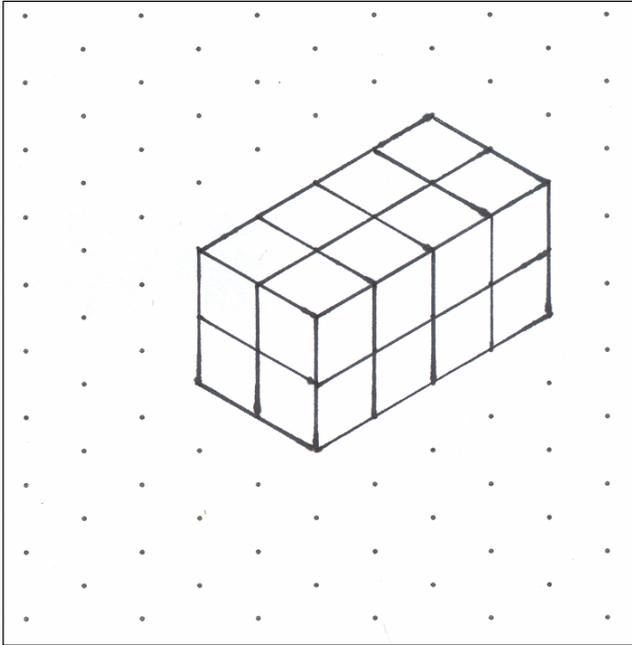


b) ¿Se podrían trazar las líneas en otro lugar?

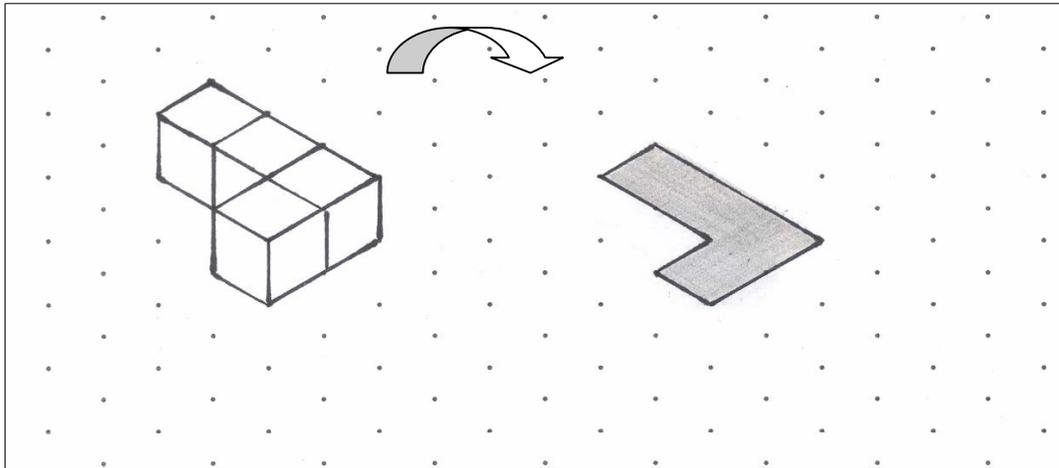
4. Identificar los procesos que utilizan para el conteo de cubos a partir de representaciones bidimensionales de sólidos: prisma rectangular, tetracubo irregular y cubo con cubos faltantes en su interior.

a) ¿De cuántos cubos está hecho el dibujo?

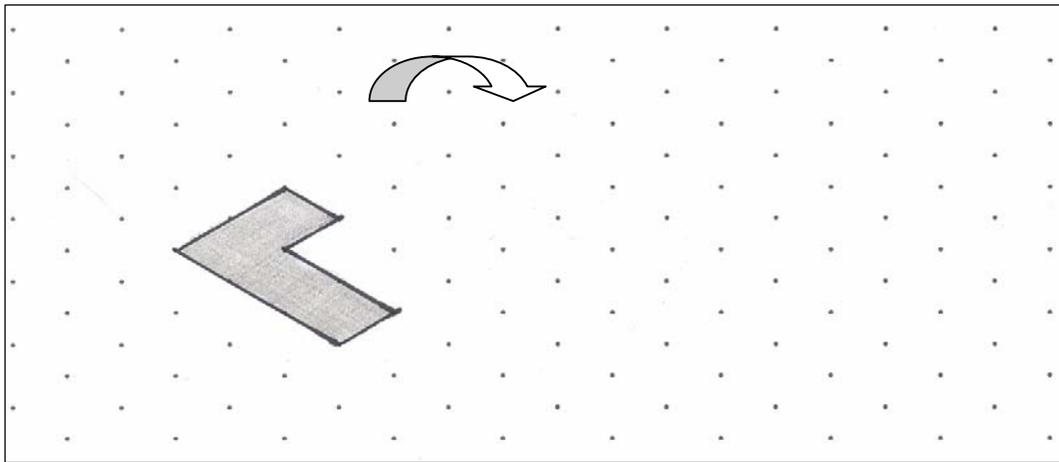




- (a) ¿Hay algún cubo que no se ve?
  - (b) ¿Cómo le hiciste para contarlos?
  - (c) ¿Habrá otra forma de contarlos?
  - (d) En el tercer dibujo un niño dijo que hay tres posibles respuestas ¿Qué piensas de eso?
5. Identificar los procesos de conteo utilizados al visualizar una caja sin tapa llena de cubos del mismo tamaño.
    - a) La siguiente caja (se le muestra la caja) está llena de cubos del mismo tamaño ¿Puedes decirme de cuántos cubos está formada?
    - b) ¿Cómo lo sabes?
  6. Reconstruir la representación de un objeto a partir de la representación de su sombra en un plano.
    - a) La sombra de la base de esta figura es la siguiente:



b) ¿Cómo será el dibujo de la siguiente sombra?

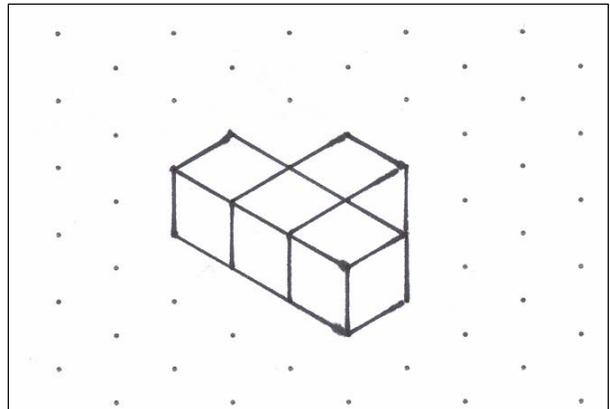
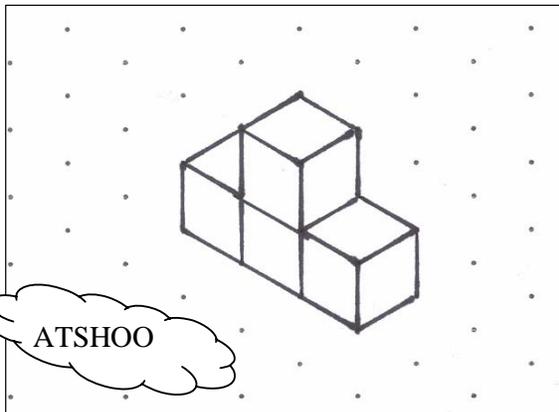


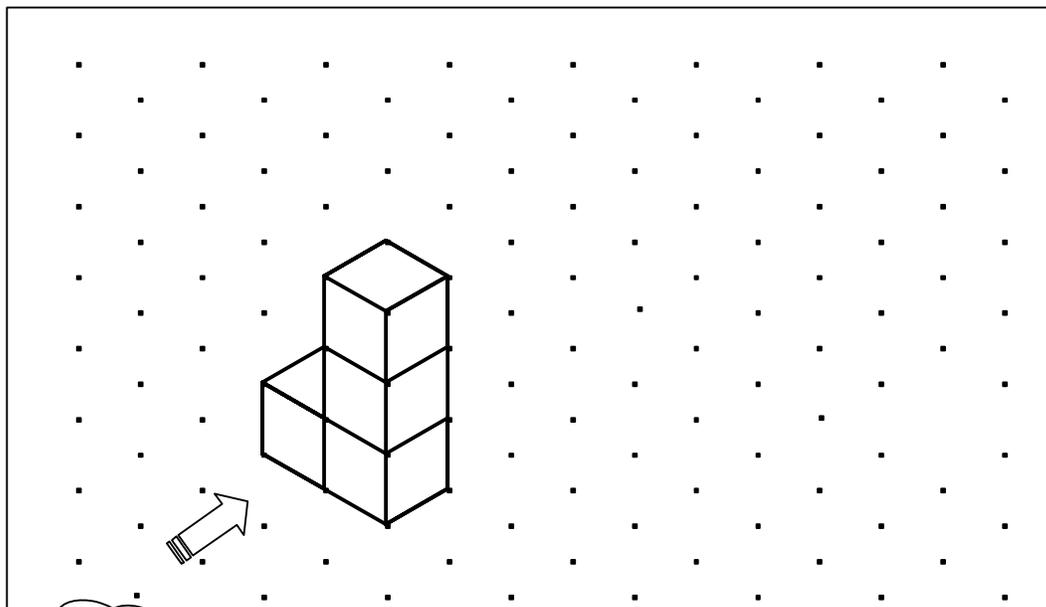
c) ¿Habrá otro dibujo que tenga la misma sombra? Dibújala

7. Dibujar las transformaciones que sufre un cuerpo al cambiar el punto de vista.

a) Dibuja la imagen de un cuerpo que sufre un cambio al momento que se le sopla y se cae.

Ejemplo:

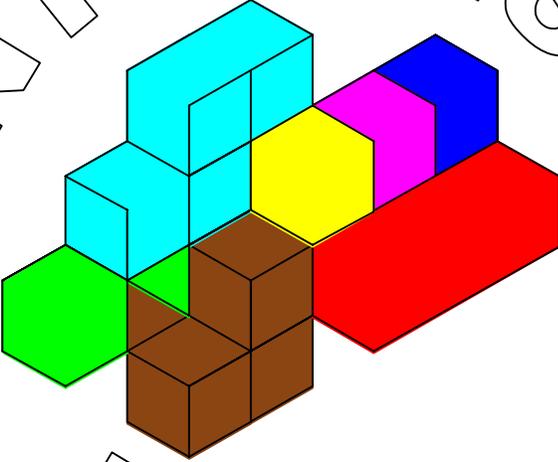




ATSHOO

b) Un niño dice que hay otra forma de dibujarla ¿qué opinas?

ENTREVISTA  
FINAL

A 3D isometric structure composed of colored blocks. The structure consists of several blocks arranged in a complex, interconnected shape. The colors include cyan, yellow, magenta, blue, red, green, and brown. The blocks are arranged in a way that they appear to be stacked and connected, forming a central core with various protrusions and recessions.

NOMBRE: \_\_\_\_\_

EDAD: \_\_\_\_\_

FECHA: \_\_\_\_\_

## ENTREVISTA FINAL

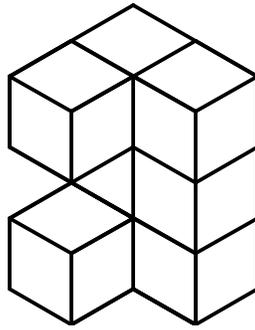
### OBJETIVOS:

- Identificar las habilidades espaciales: visualización e interpretación espacial que dominan niños de sexto grado de primaria después de las sesiones de trabajo.
- Identificar los procedimientos empleados en los ejercicios utilizando representaciones gráficas en visión isométrica.

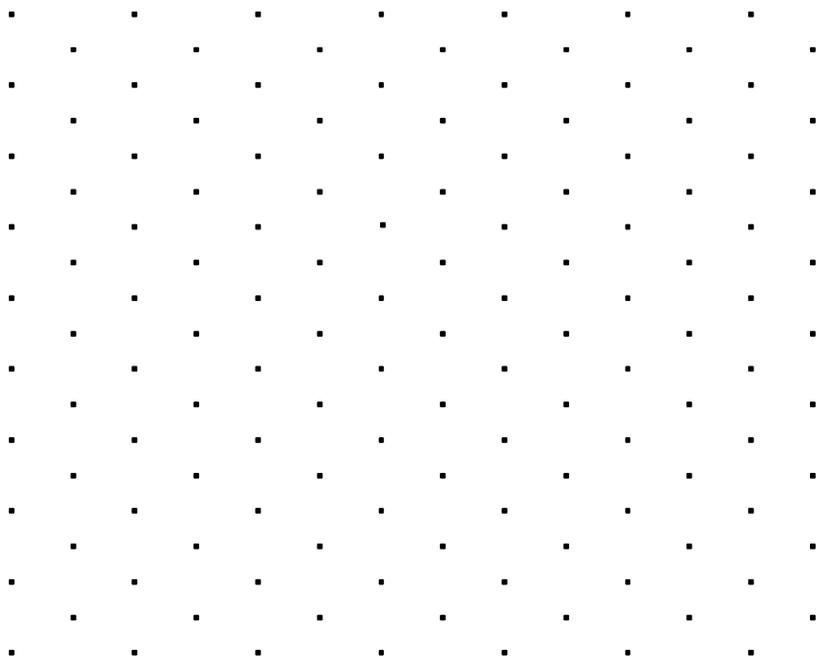
### ACTIVIDADES

#### 1. Introducción.

- a) El objeto que te voy a mostrar a continuación (se muestra en forma física el objeto) se puede dibujar de la siguiente forma:

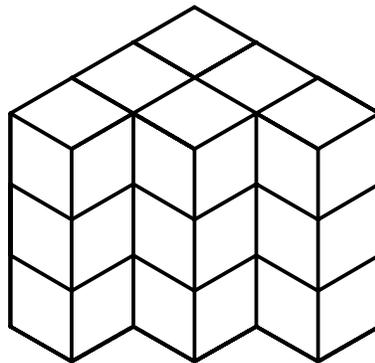
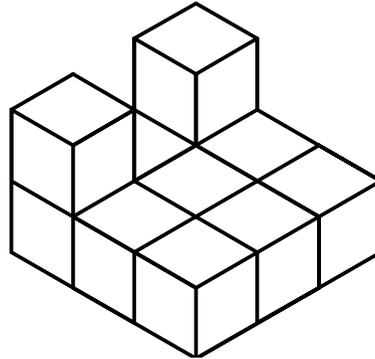
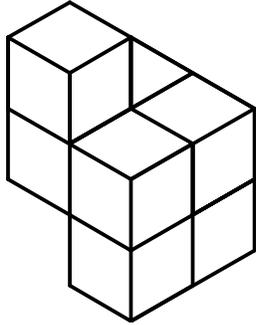


- b) ¿Lo puedes dibujar en la parte de abajo?



2. Identificar la capacidad para leer representaciones bidimensionales de sólidos.

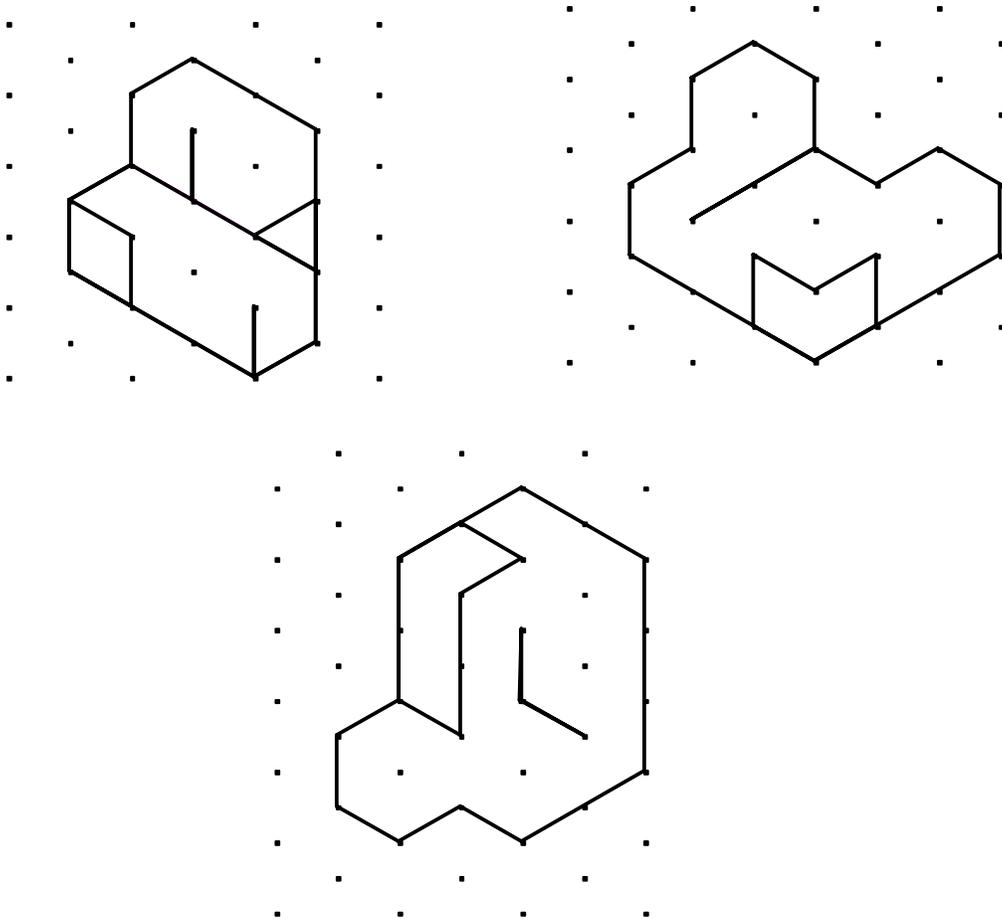
- a) De las siguientes figuras colorea de azul los cubos a los que sólo se les ve una cara; de rojo a los que se les ve dos caras y de amarillo a los que se les ve tres caras.



- b) ¿Por qué crees que algunos cubos sólo se les ve una cara y a otros dos o tres?

3. Identificar las líneas faltantes y completar representaciones bidimensionales de sólidos: cubo, tricubos y tetracubos.

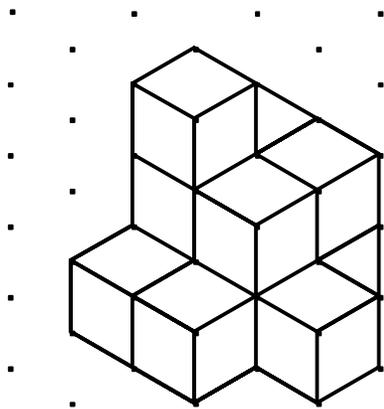
- a) Traza la línea que hace falta en cada dibujo

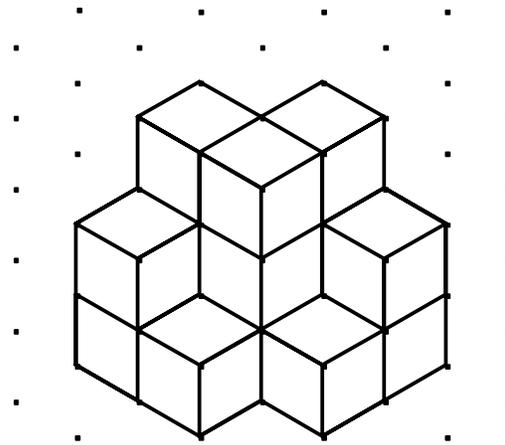
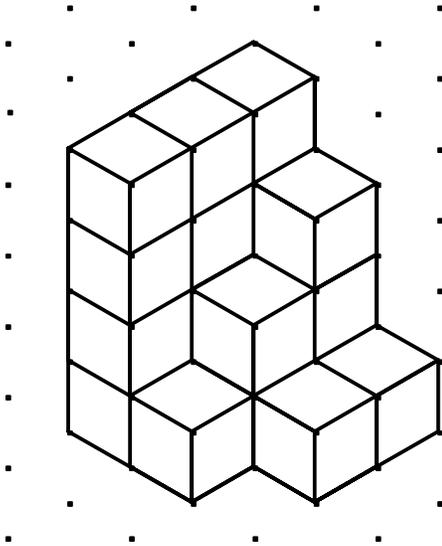


b) ¿Se podrían trazar las líneas en otro lugar?

4. Identificar los procesos que utilizan para el conteo de cubos a partir de representaciones bidimensionales de sólidos: prisma rectangular, tetracubo irregular y cubo con cubos faltantes en su interior.

a) ¿De cuántos cubos está hecho el dibujo?





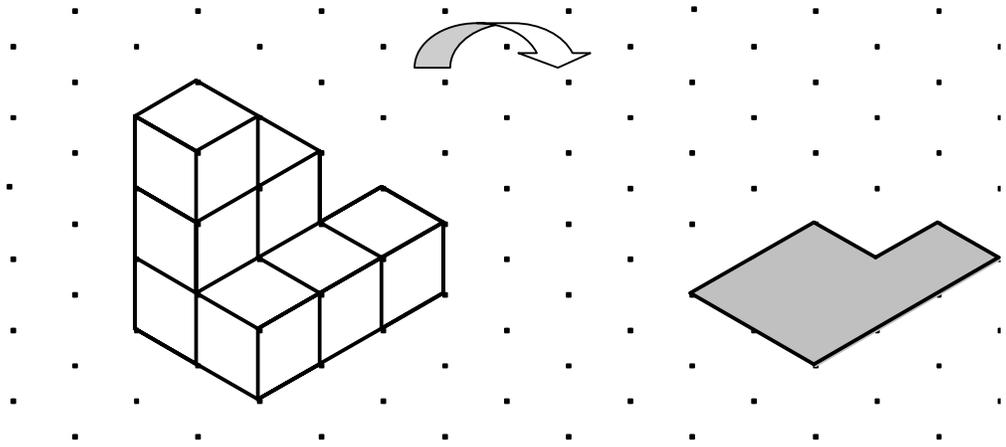
- (a) ¿Hay algún cubo que no se ve?
- (b) ¿Cómo le hiciste para contarlos?
- (c) En el tercer dibujo un niño dijo que hay tres posibles respuestas ¿Qué piensas de eso?

5. Identificar los procesos de conteo utilizados al visualizar una caja sin tapa llena de cubos del mismo tamaño.

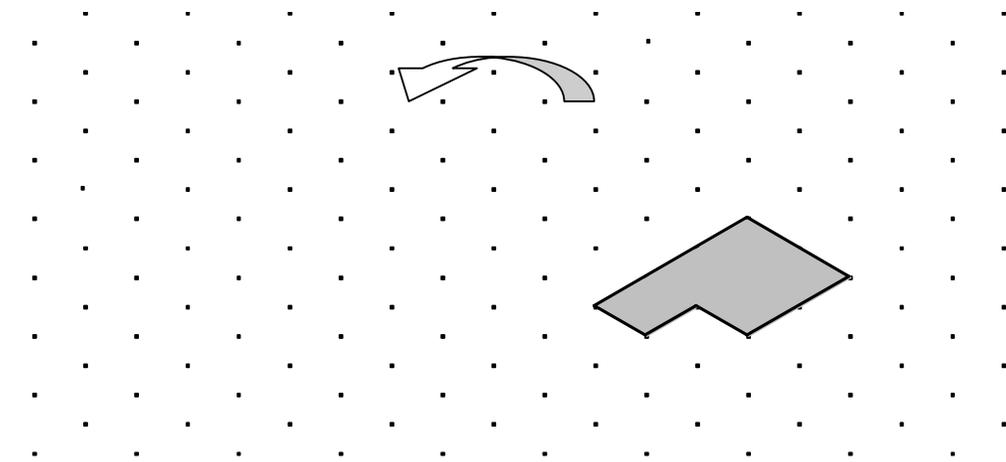
- a) La siguiente caja (se le muestra la caja) está llena de cubos del mismo tamaño ¿Puedes decirme de cuántos cubos está formada?
- b) ¿Cómo lo sabes?

6. Reconstruir la representación de un objeto a partir de la representación de su sombra en un plano.

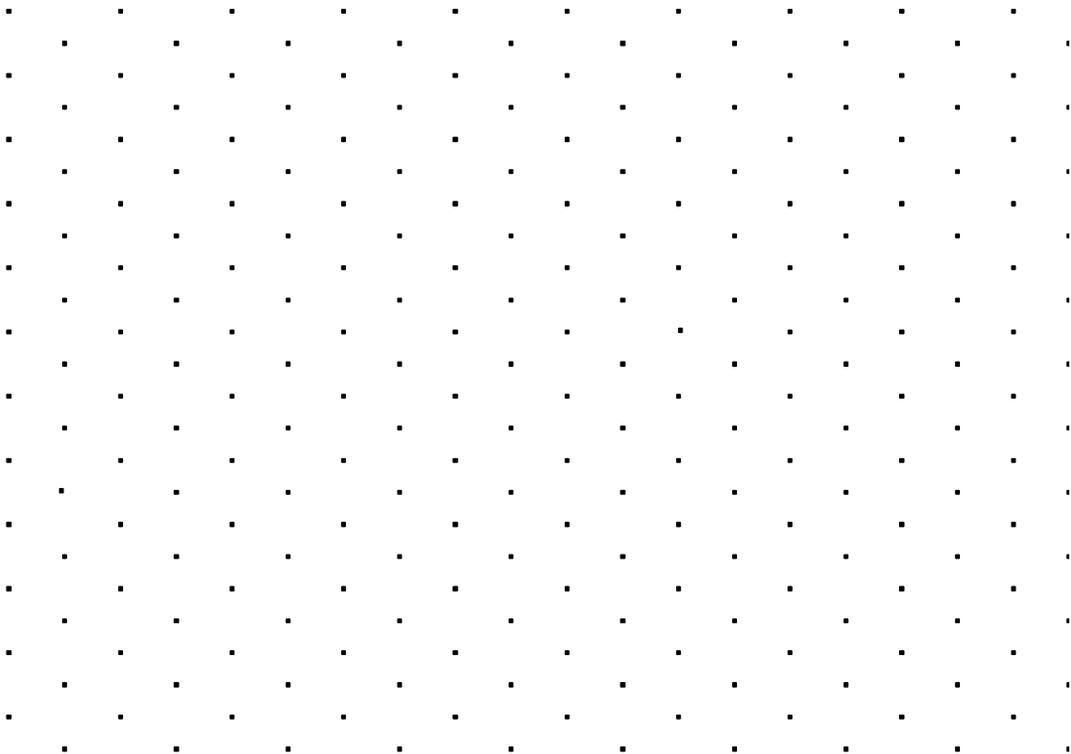
- a) La sombra de la base de esta figura es la siguiente:



b) ¿Cómo será el dibujo de la siguiente sombra?



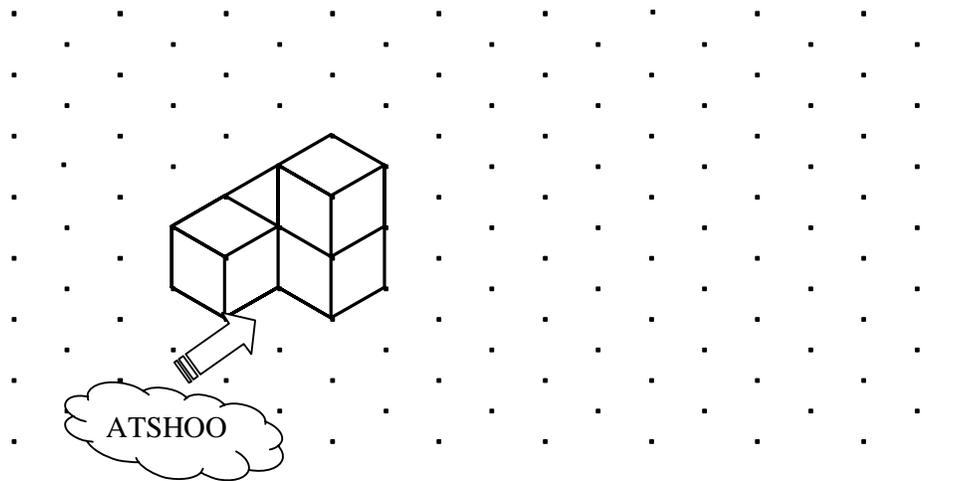
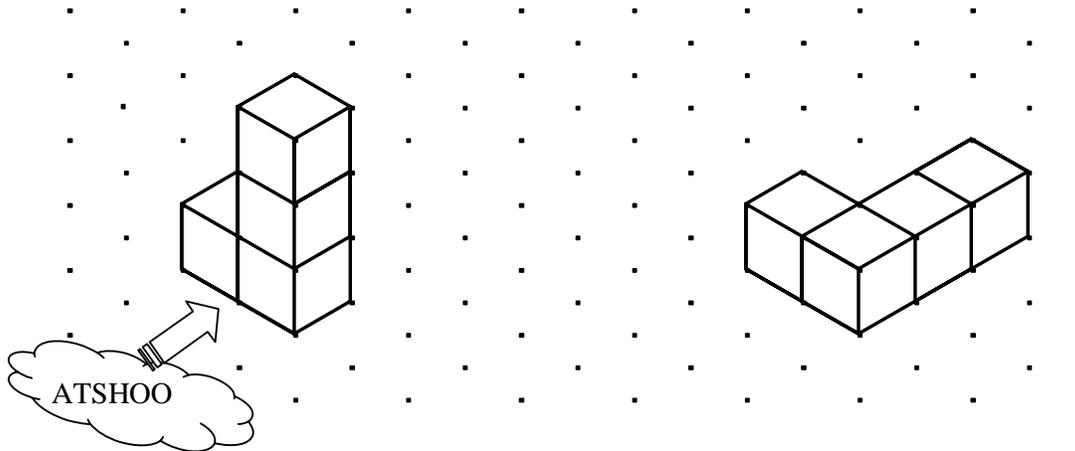
c) ¿Habrá otro dibujo que tenga la misma sombra? Dibújala



7. Dibujar las transformaciones que sufre un cuerpo al cambiar el punto de vista.

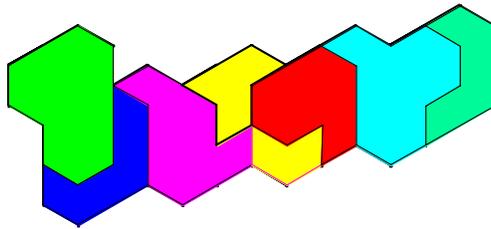
- a) Dibuja la imagen de un cuerpo que sufre un cambio al momento que se le sopla y se cae.

Ejemplo:



- b) Un niño dice que hay otra forma de dibujarla ¿qué opinas?

VISUALIZACIÓN



ACTIVIDADES

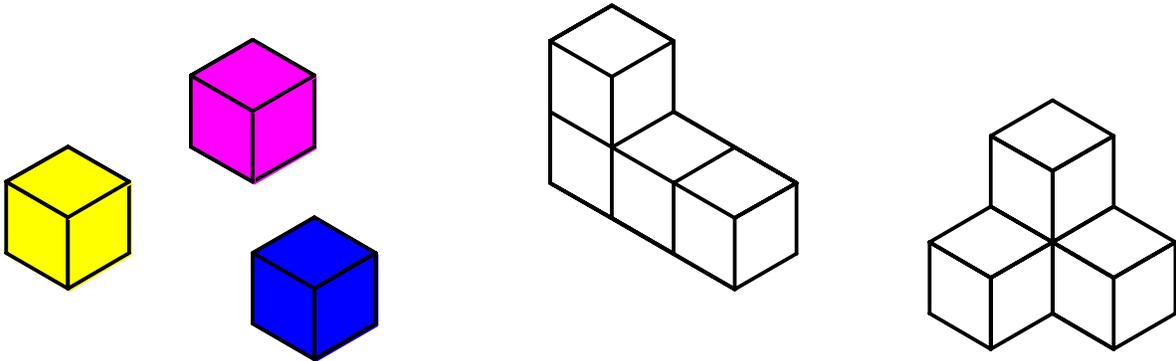
# SESIÓN 1

Nombre: \_\_\_\_\_

Edad: \_\_\_\_\_

fecha: \_\_\_\_\_

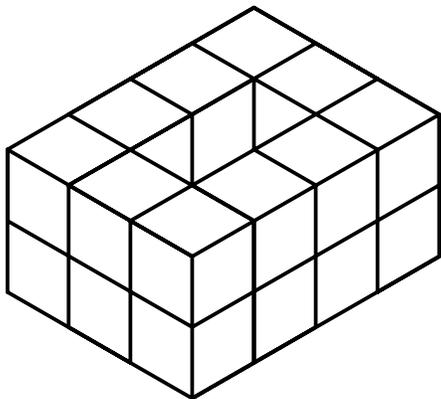
En una fábrica de juguetes se elaboran cubos de madera de diferentes colores y algunas piezas formadas por tres o cuatro cubos (policubos).



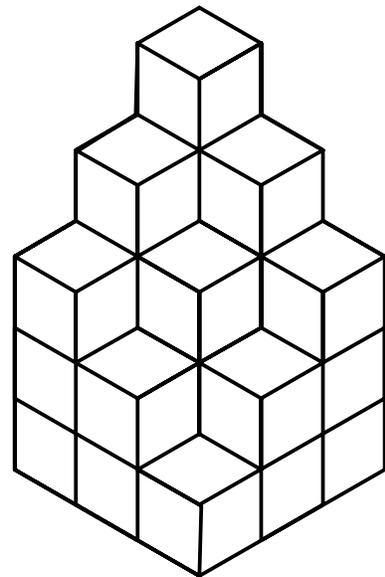
*Cubos*

*Policubos*

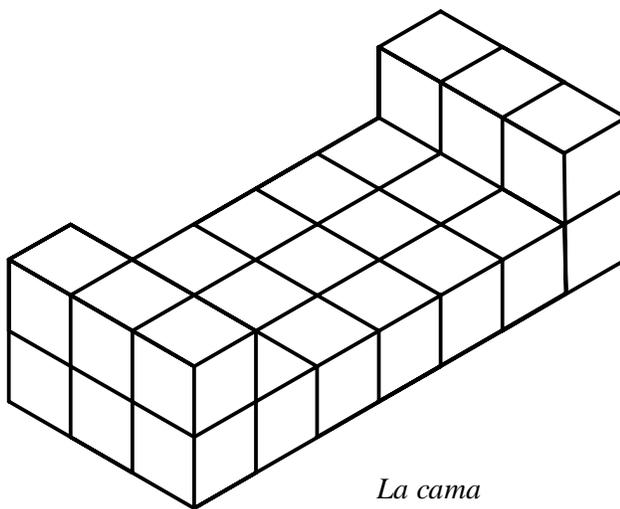
Los policubos son siete piezas de un rompecabezas, las cuales sirven para armar varias figuras como las siguientes:



*La tina de baño*



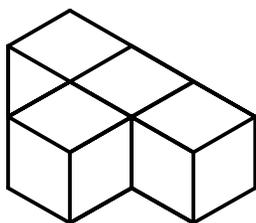
*El cristal*



*La cama*

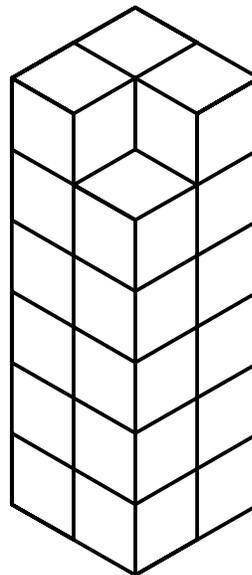
# SESIÓN 1

1. Identifica de cuántos cubos está hecha cada figura:



*Figura 1*

Número de cubos \_\_\_\_\_



*Figura 2*

Número de cubos \_\_\_\_\_

¿Cómo le hiciste para saber cuántos cubos hay en cada figura? \_\_\_\_\_

---

---

---

De las dos figuras anteriores ilumina de verde los cubos a los que sólo se les puede ver una cara, de rosa a los que sólo se les ven dos caras y de azul a los que se les ven tres caras.

En la figura 2, ¿habrá algún cubo que no se vea, que esté oculto? \_\_\_\_\_

¿Por qué crees que no se ve? \_\_\_\_\_

---

---

---

Contesta la tabla siguiente:

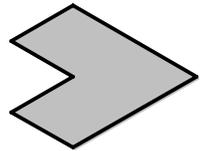
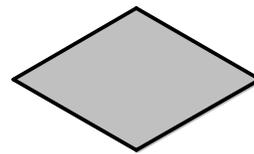
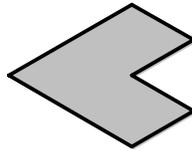
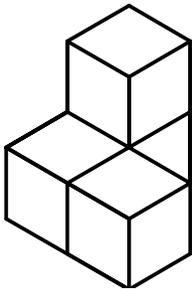
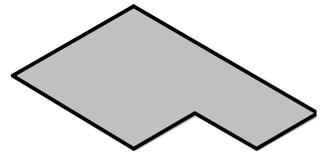
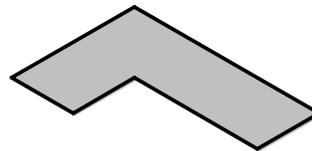
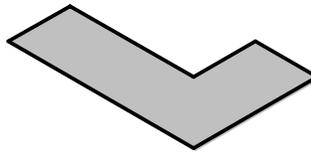
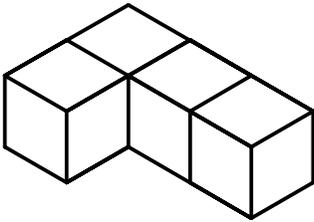
	<b>cubos visibles</b>	<b>cubos ocultos</b>	<b>total de cubos</b>
<b>figura 1</b>			
<b>figura 2</b>			

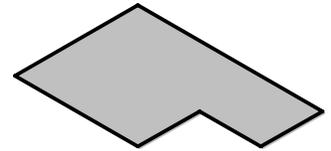
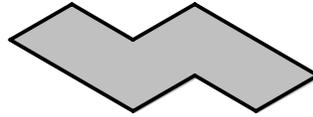
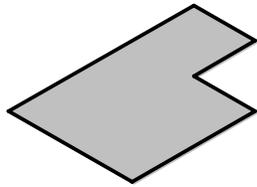
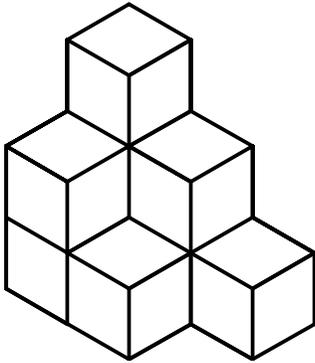
¿Qué dificultad tuviste para identificar los cubos ocultos? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Comenta con tus compañeros las dificultades que tuvieron para identificar los cubos ocultos y los visibles.

2. Observa los siguientes dibujos y encierra de rojo la sombra que dejaría el dibujo de la izquierda.





¿Qué dificultad tuviste para encontrar la sombra correcta? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

¿Habrá otra sombra en la que se podrían colocar las figuras? \_\_\_\_\_

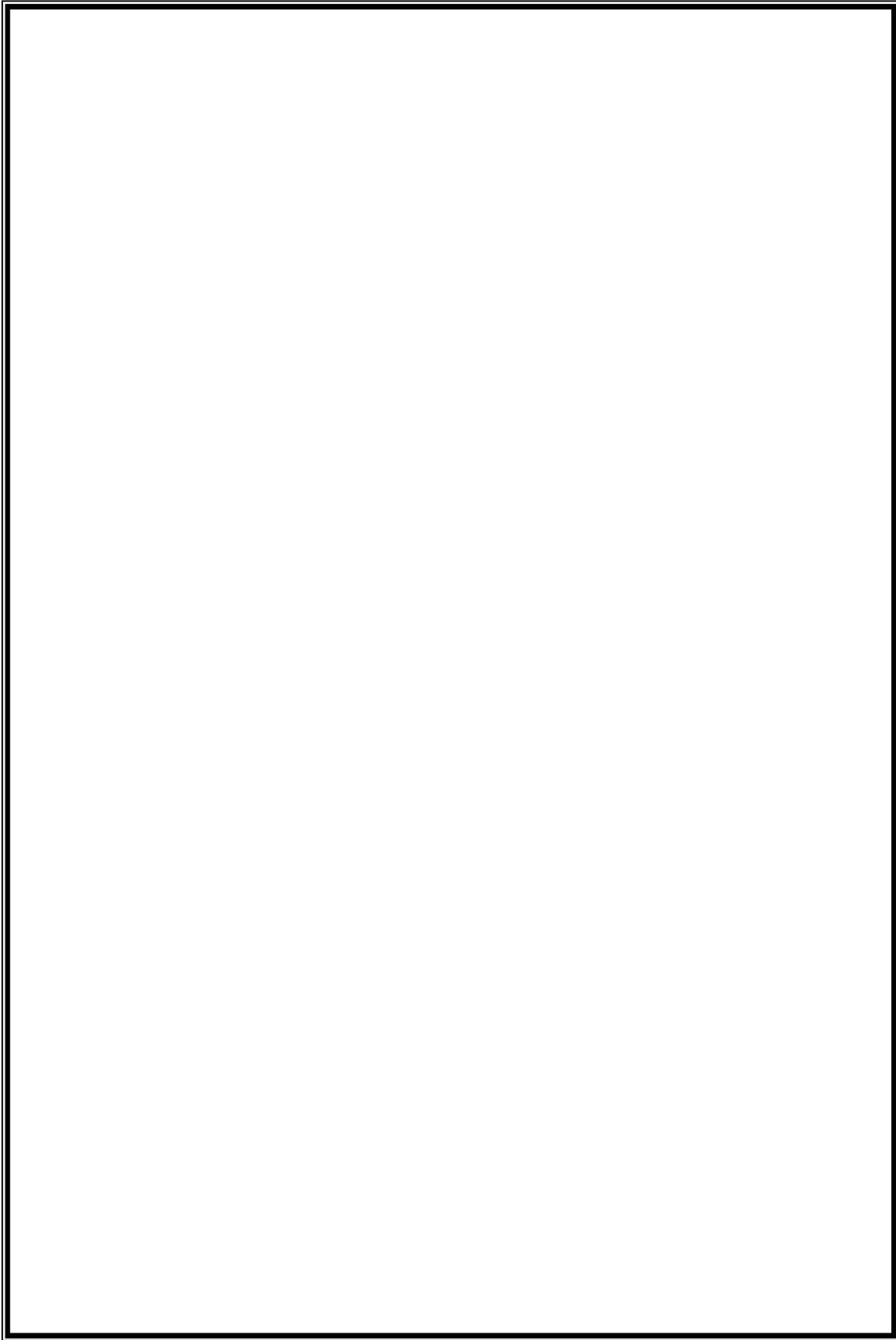
¿Qué diferencia hay entre las dos sombras? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

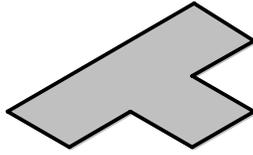
Compruébalo con el material concreto. Arma los objetos anteriores con los cubos y traza su sombra en la siguiente hoja, observa qué sucede y escríbelo: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_





3. Construye con seis cubos todos los policubos posibles que tengan la siguiente sombra:



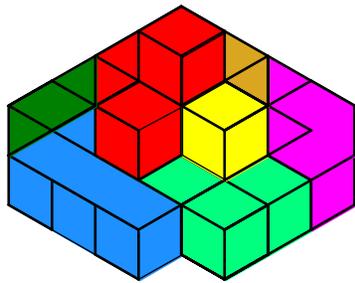
¿Cuántos policubos pudiste construir? \_\_\_\_\_

El dueño de la fábrica dice que se pueden construir 11 policubos diferentes ¿Crees que sea posible esto? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_

Dibuja dos de los policubos que construiste

--	--

MANIPULACIÓN



ACTIVIDADES

## SESIÓN 2

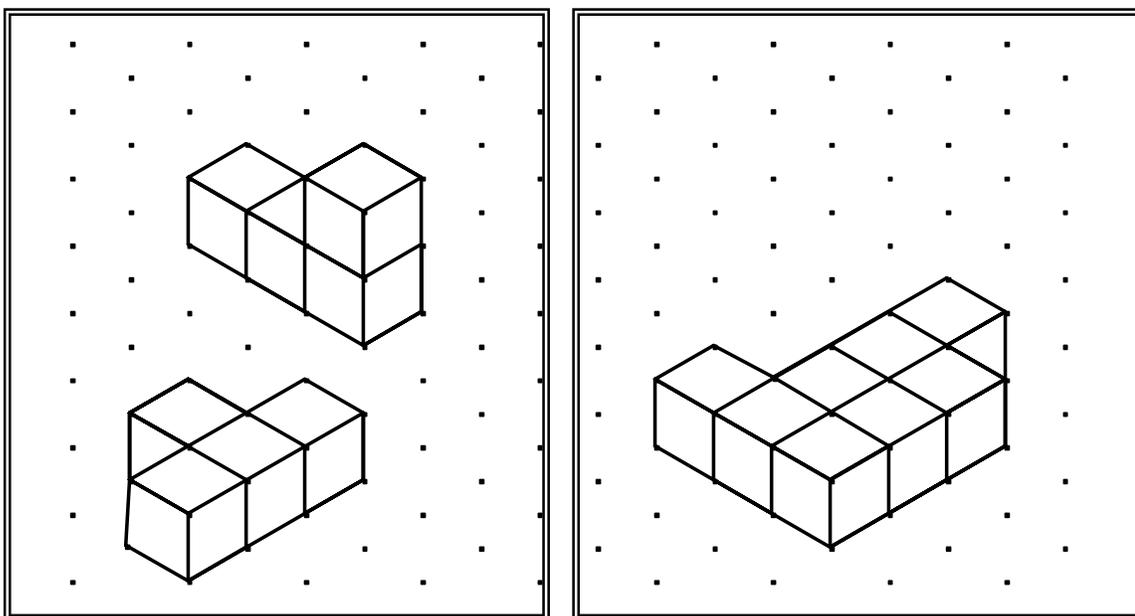
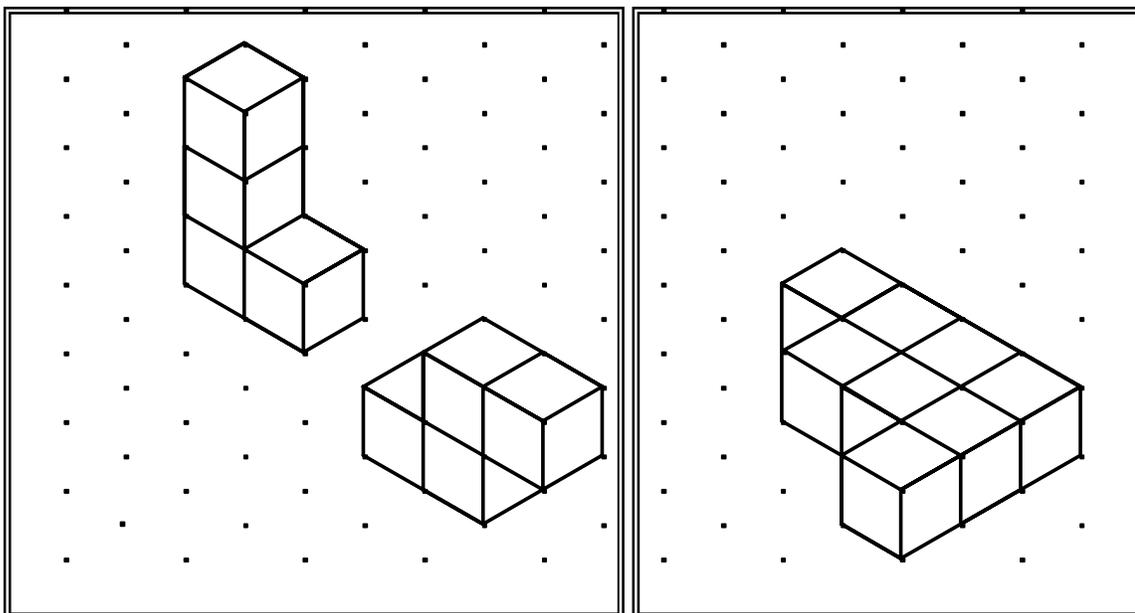
Nombre: \_\_\_\_\_

Edad: \_\_\_\_\_

fecha: \_\_\_\_\_

## SESIÓN 2

1. En la juguetería fabrican algunas piezas para otros rompecabezas las cuales están formadas por dos policubos. Con los policubos de la izquierda arma la pieza de la derecha, ilumínalos con colores diferentes y compruébalo con el material concreto:

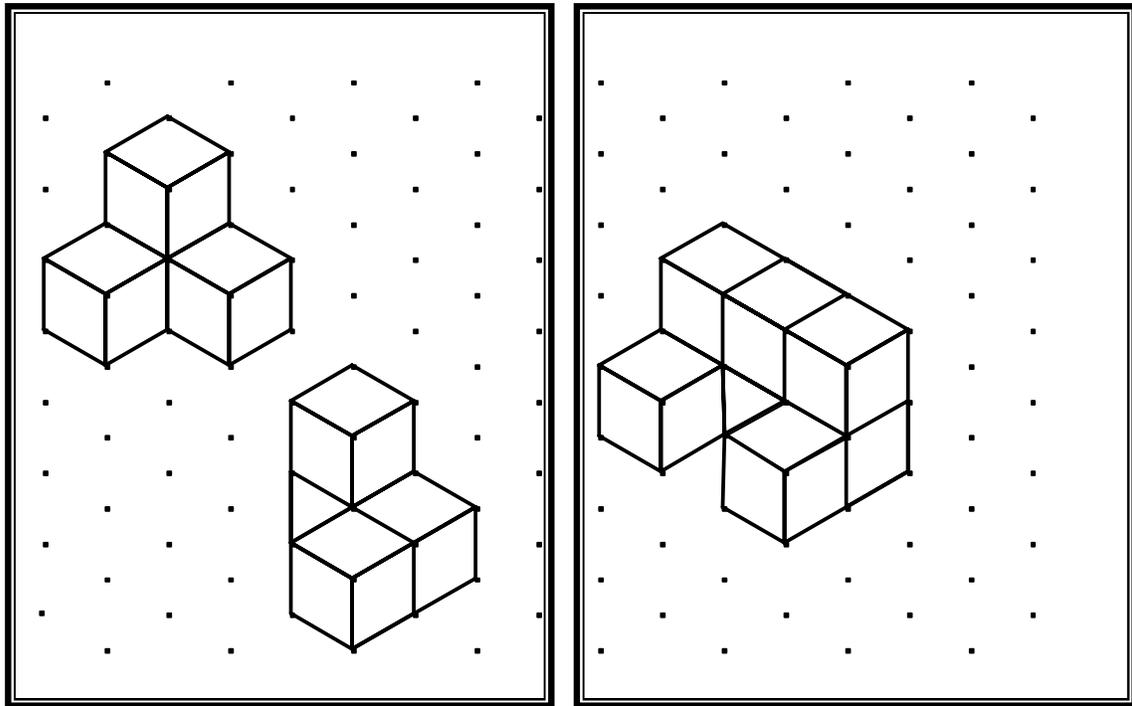


Si tú fueras a comprar la segunda piezas y las tuvieras que pedir por teléfono a la fábrica ¿Cómo le explicarías a la persona que te tome el pedido qué policubos se utilizan para armar la pieza? \_\_\_\_\_

¿Cómo le explicarías de qué forma están acomodados los policubos? \_\_\_\_\_

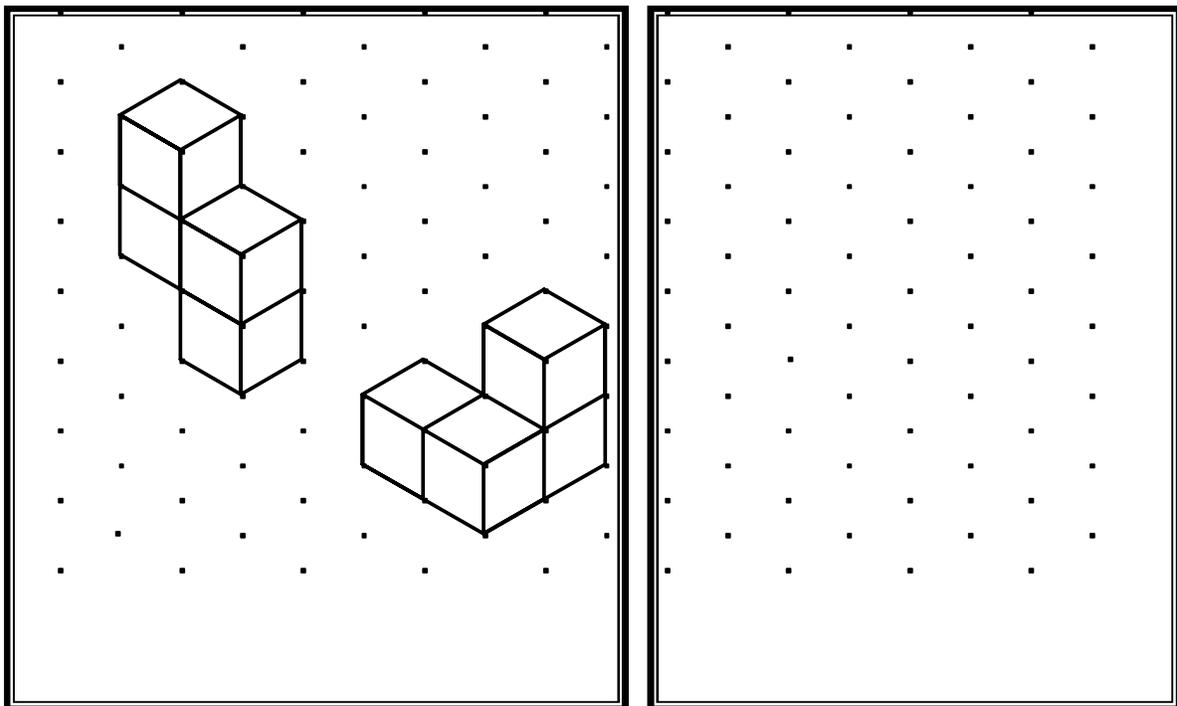
---

---



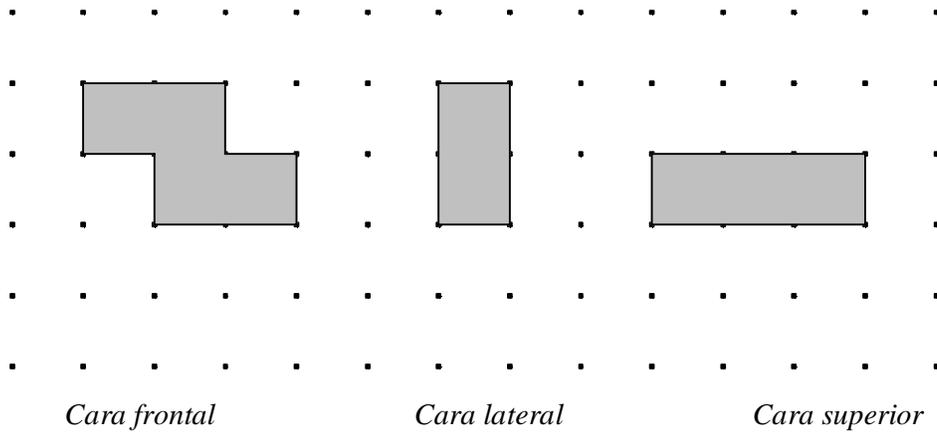
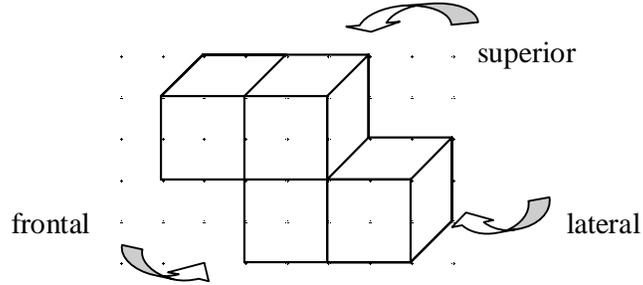
¿Cuántos cubos se necesitaron para formar la pieza de la derecha? \_\_\_\_\_

Con los policubos siguientes forma una pieza que quieras y dibújala del lado derecho

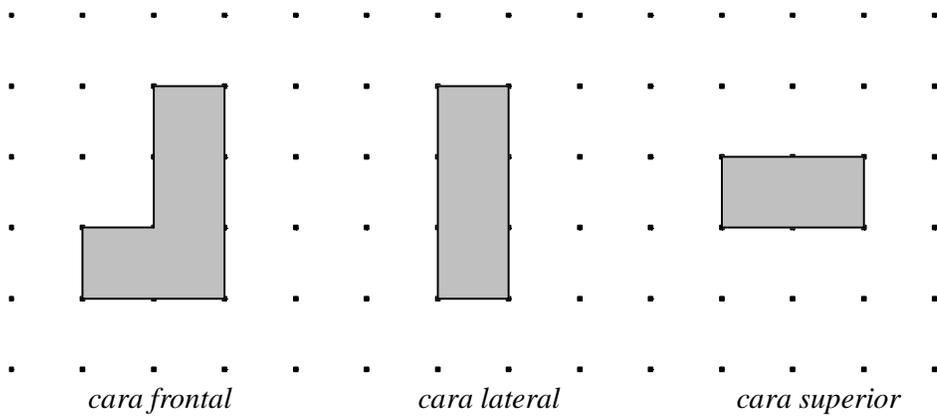


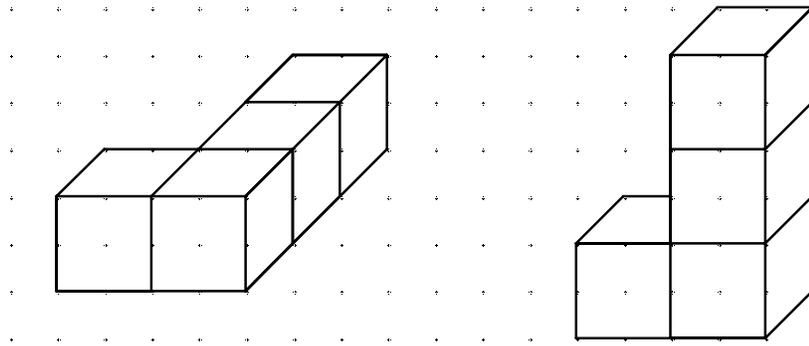
2. Para poder mandar el diseño de las piezas al área de producción se deben hacer los dibujos de las piezas vistas desde tres caras: frontal, lateral y superior (vista ortogonal). Observa el ejemplo.

Ejemplo:



Ilumina el policubo adecuado que se forma con las vistas ortogonales. Apóyate en el material.





¿Cómo deberían ser las vistas ortogonales del policubo que no iluminaste?

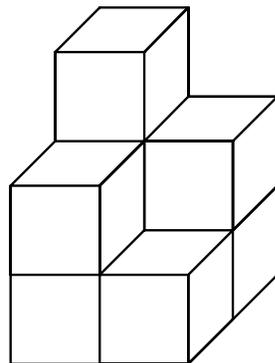


*cara frontal*

*cara lateral*

*cara superior*

Traza las vistas ortogonales para la siguiente pieza:



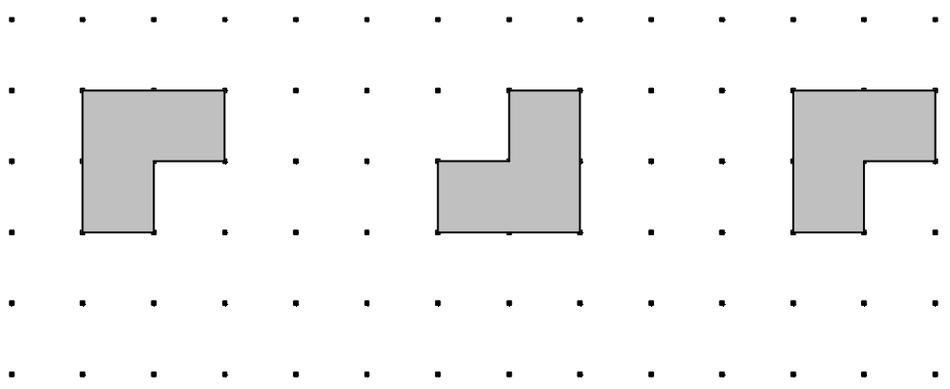


*cara frontal*

*cara lateral*

*cara superior*

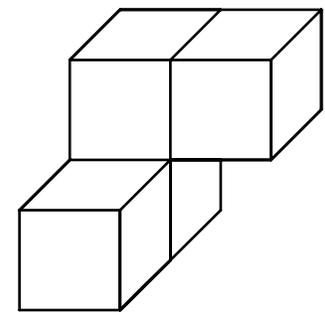
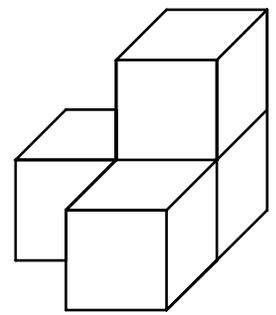
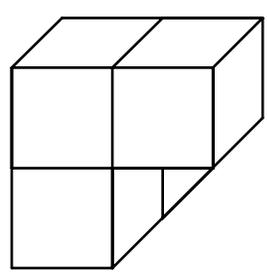
Encierra el policubo que representan las siguientes vistas ortogonales:



*cara frontal*

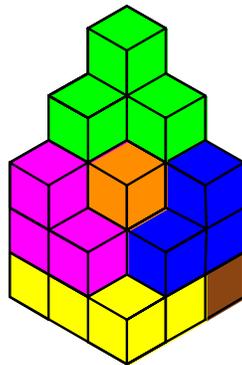
*cara lateral*

*cara superior*



¿Cómo puedes comprobar que el policubo que elegiste es el correcto? \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

REPRESENTACIÓN



ACTIVIDADES

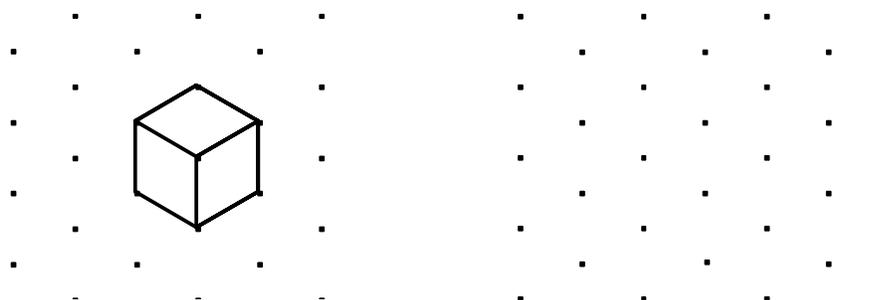
## SESIÓN 3

Nombre: \_\_\_\_\_

Edad: \_\_\_\_\_

fecha: \_\_\_\_\_

1. Cuando en la fábrica de juguetes se contratan nuevos dibujantes se les hacen algunas pruebas. Los dibujos se realizan en papel punteado (isométrico), una característica del papel isométrico es que se tiene de frente una arista del cuerpo a dibujar. Un cubo se dibuja así:



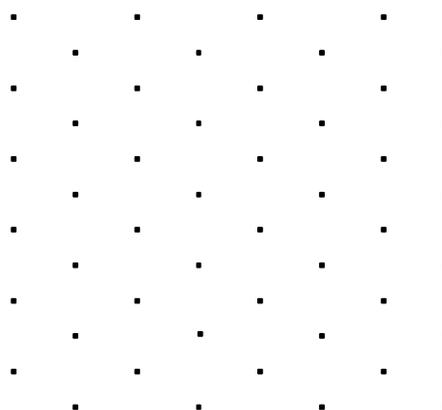
Dibuja un cubo en el papel punteado de la derecha.

Ahora dibuja dos cubos: uno encima del otro



¿Qué pasa con la cara superior de cubo que esta abajo? \_\_\_\_\_

Dibuja tres cubos apilados

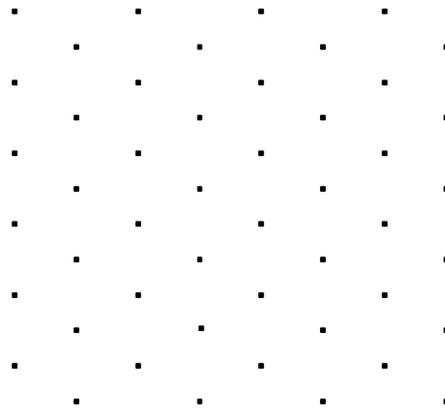


¿Por qué a los dos cubos de abajo sólo se les ven dos caras? \_\_\_\_\_

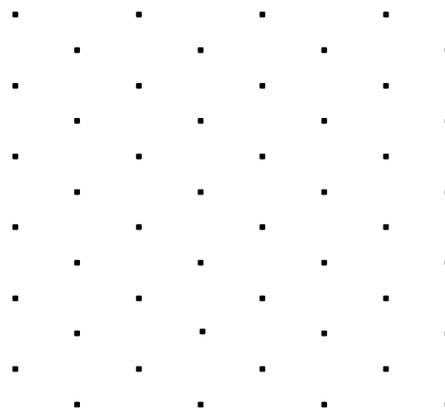
---

---

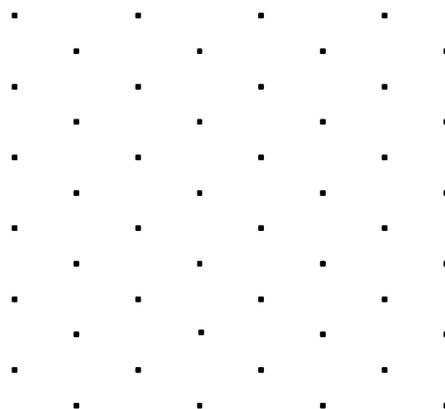
Ahora dibuja esos tres cubos en forma horizontal.



A los tres cubos anteriores, colócale uno más sobre el último de la fila.



A los tres cubos anteriores, colócale uno más sobre el primero de la fila.



Escribe el procedimiento que seguiste para hacer el último dibujo que se te pidió \_\_\_\_\_

---

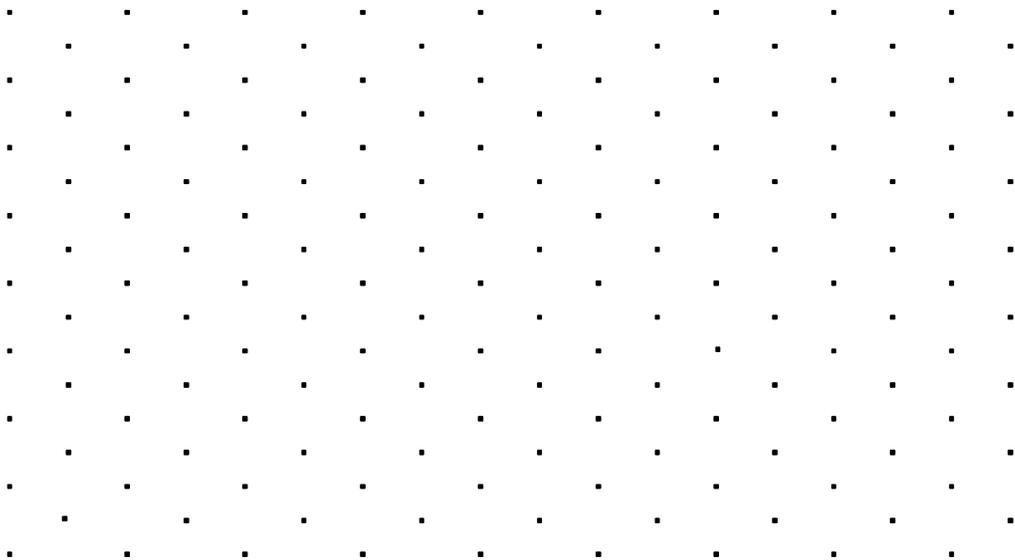
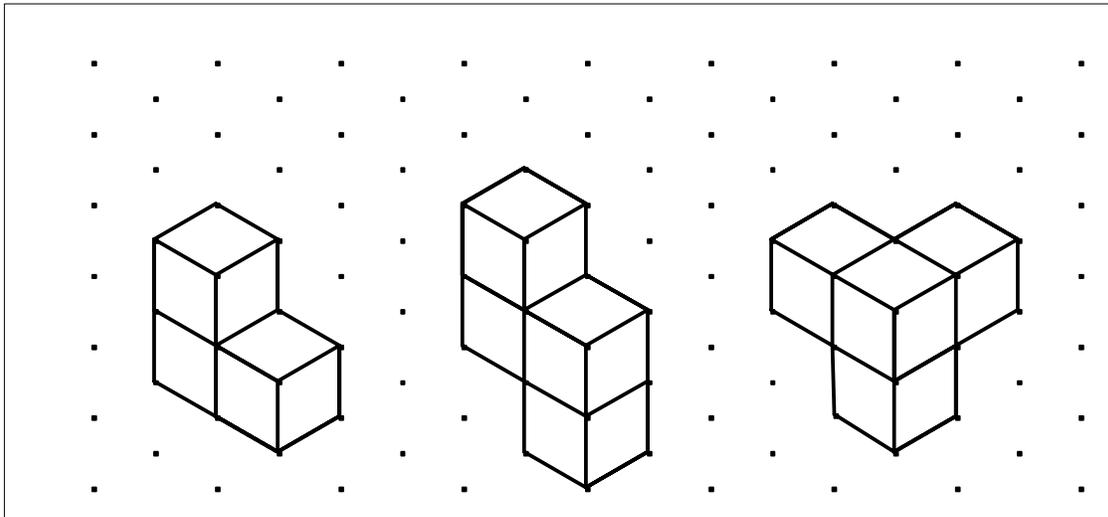
---

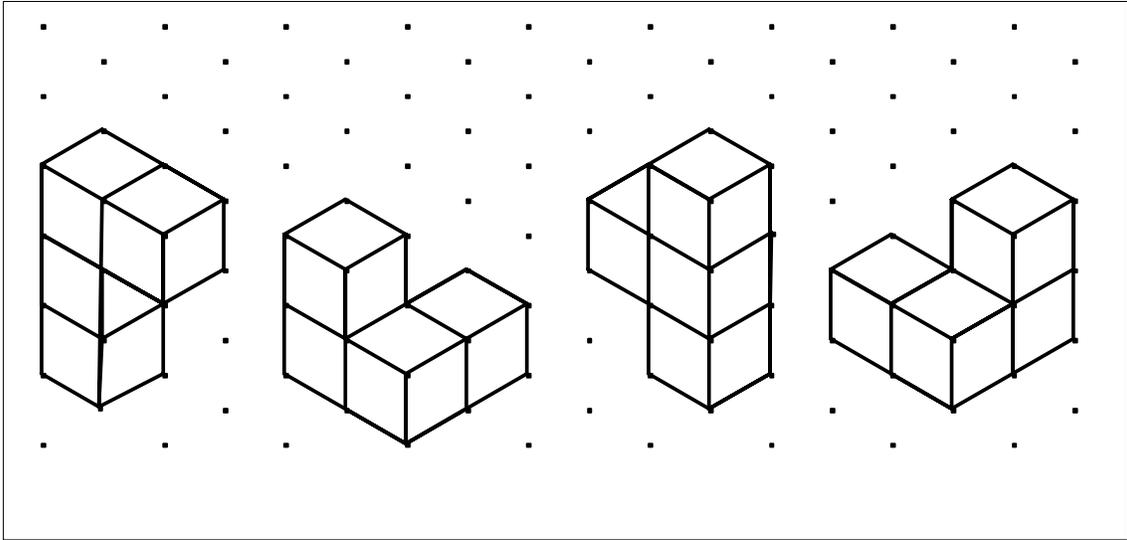
---

---

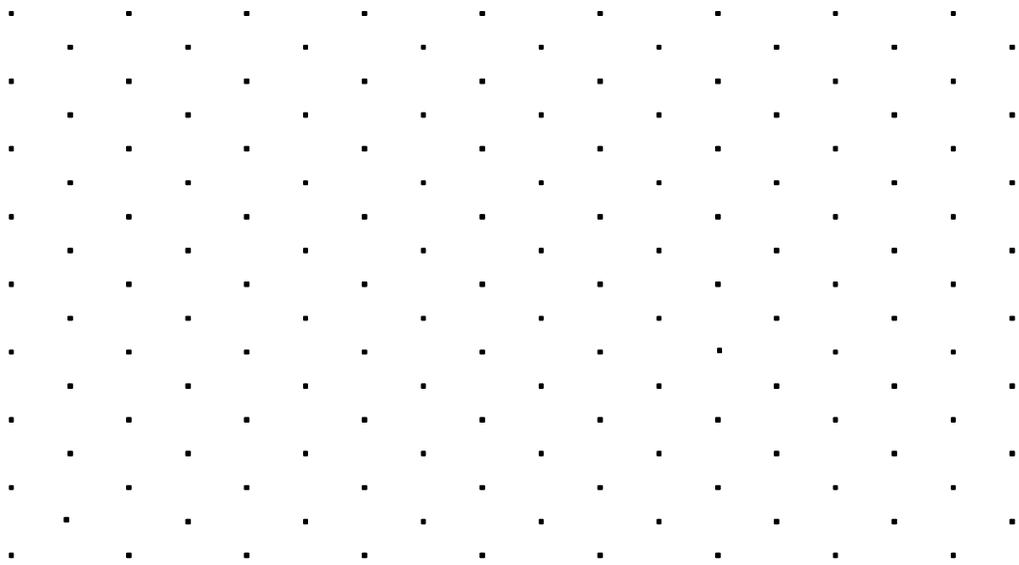
2. En la fábrica se tienen que realizar los dibujos de los policubos y las piezas. Estos dibujos sirven para hacer folletos que se mandan a diversos compradores.

Copia los policubos en la parte de abajo

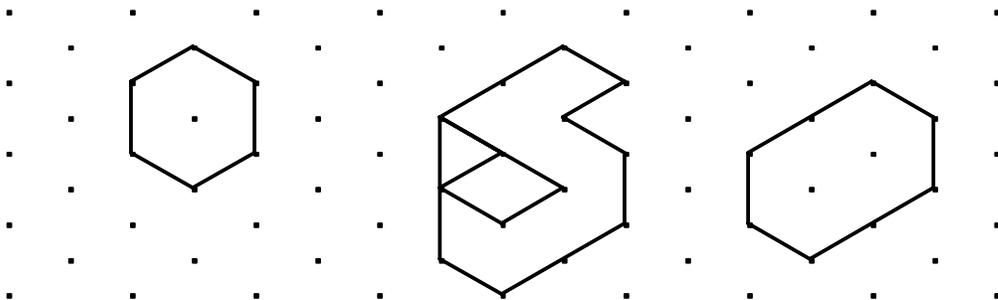


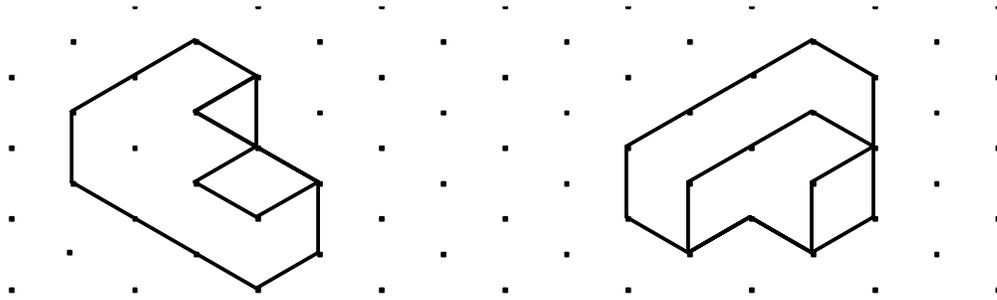


Copia los policubos en el papel punteado de abajo



En algunos dibujos se presentaron errores de impresión, encuéntralos.





Compara tus resultados con tus compañeros. ¿Hay algún dibujo que sea diferente entre los tuyos y los de tus compañeros? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_

---



---

3. Con tres cubos forma un policubo, dibújalo en la parte de abajo, después en la hoja anexa dibújalo faltándole algunas líneas, por último, dale el ejercicio a un compañero para que lo complete.



¿Qué dificultades encontraste para dibujar el policubo incompleto? \_\_\_\_\_

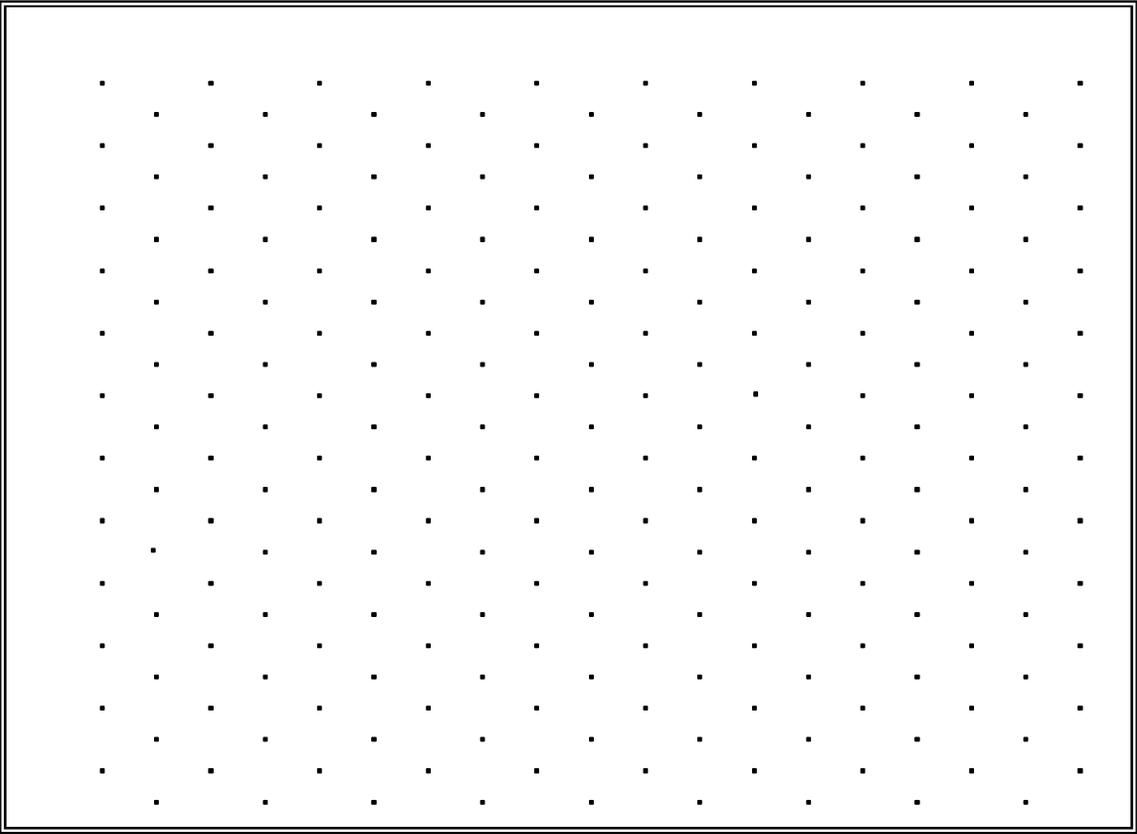
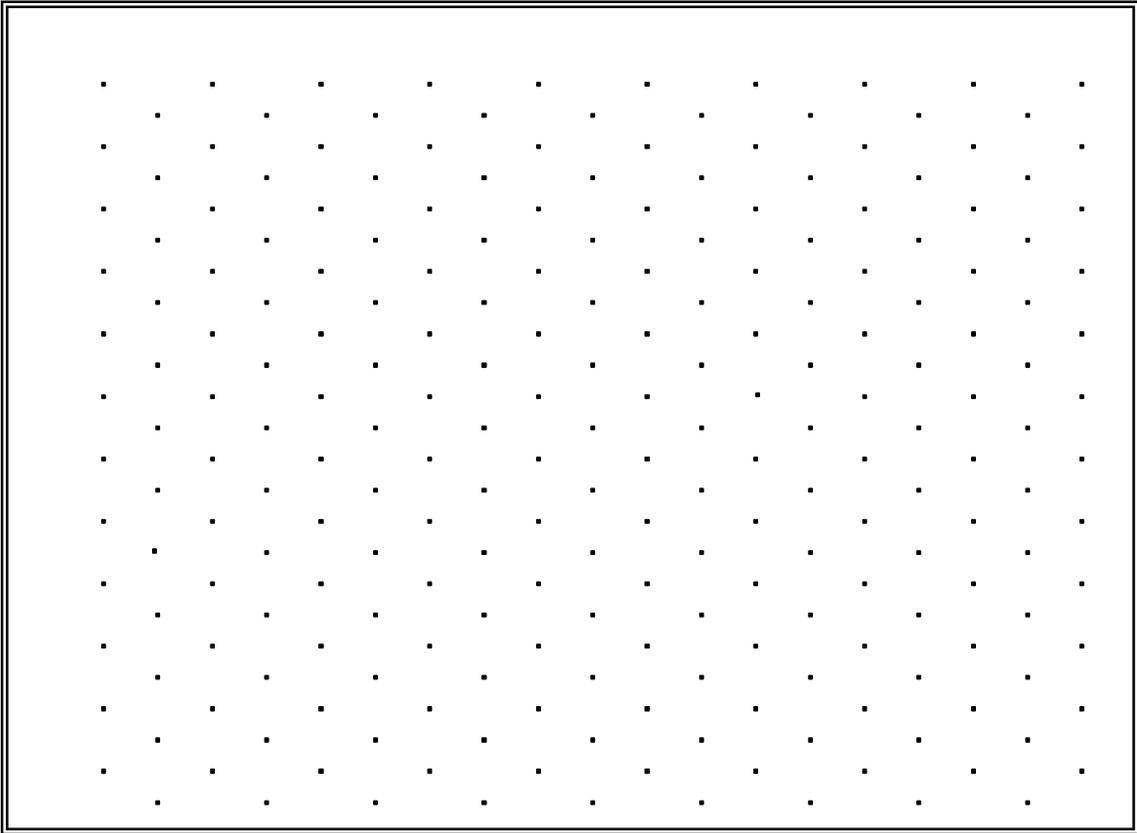
---



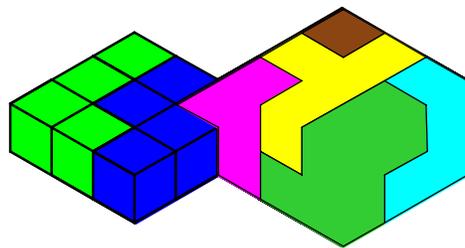
---

Repite el ejercicio pero con cinco cubos





VISUALIZACIÓN



ACTIVIDADES

## SESIÓN 4

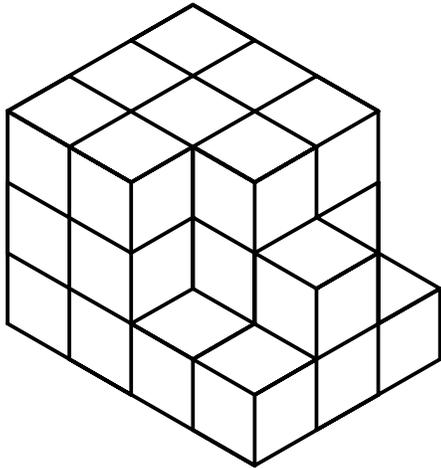
Nombre: \_\_\_\_\_

Fecha: \_\_\_\_\_

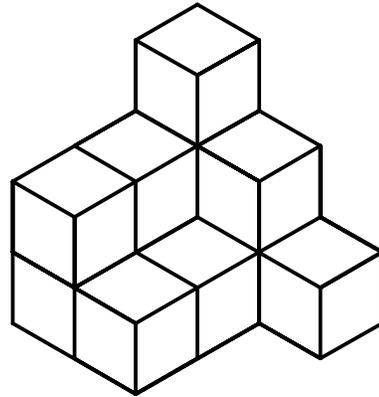
## SESIÓN 4

1. Las figuras elaboradas en la juguetería tienen varios precios, de acuerdo al número de cubos que la conforman, por lo tanto, se deben contar los cubos de cada pieza para determinar su costo.

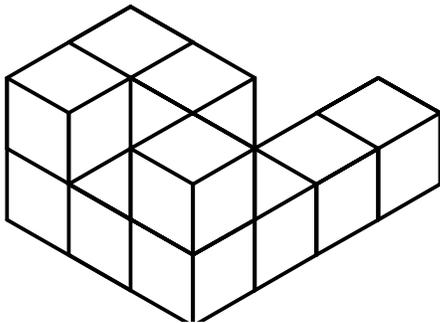
Cuenta los cubos de cada pieza y contesta la tabla. (Si es necesario arma las piezas con el material)



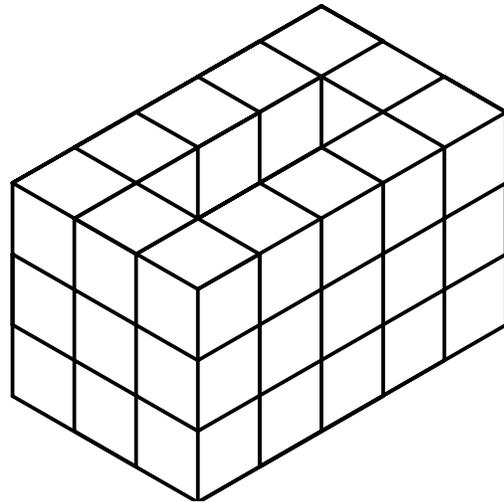
*Figura 1*



*figura 2*



*Figura 3*



*figura 4*

	Cubos visibles	Cubos ocultos	Total de cubos
figura 1			
figura 2			
figura 3			
figura 4			

¿Por qué si la figura 2 y la figura 3 tienen el mismo número de cubos, cambia el número de cubos visibles y ocultos? \_\_\_\_\_

---

---

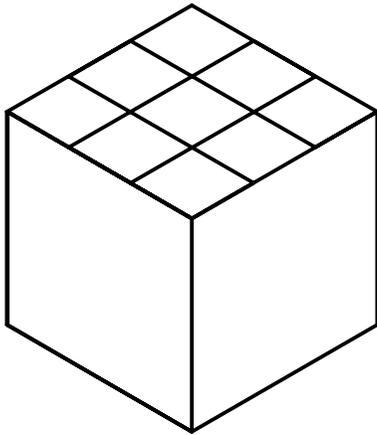
En la figura 4 el empleado que contó los cubos a partir del dibujo dijo que podía tener varios resultados. ¿Por qué crees que hizo este comentario? Coméntalo con tus compañeros y escriban sus conclusiones \_\_\_\_\_

---

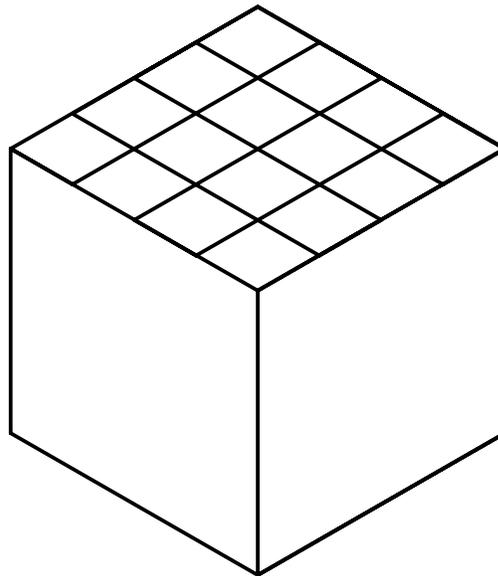
---

2. Los cubos para su venta se empaican en cajas cúbicas, luego se les anota el número de cubos empleados.

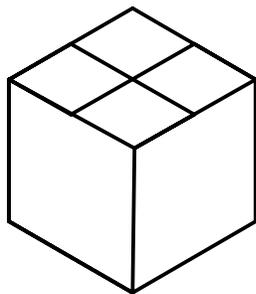
A los empleados que empaican se les olvidó poner el número de cubos en las cajas, ¡ayúdales!



No. De cubos \_\_\_\_\_



No. De cubos \_\_\_\_\_



No. De cubos \_\_\_\_\_

Escribe el procedimiento que utilizaste para saber el número de cubos \_\_\_\_\_

---

---

---

---

---

Comenta con tus compañeros tu procedimiento y determinen cuál es el más sencillo.

Escríbelo \_\_\_\_\_

---

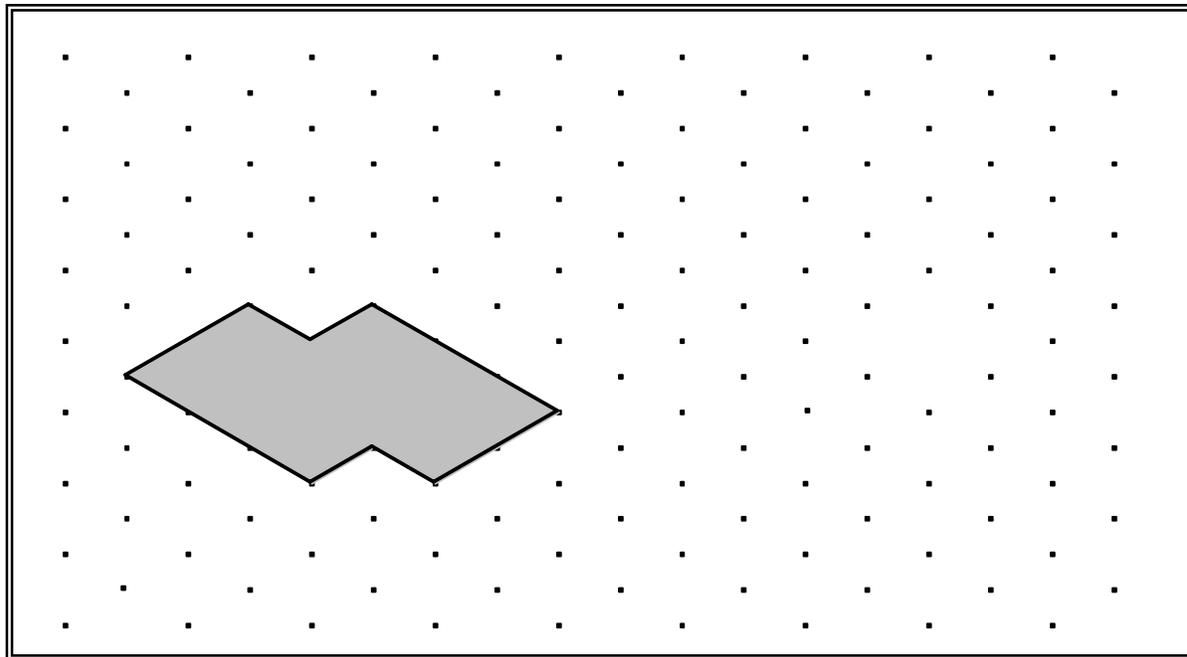
---

---

---

---

3. Construye las piezas adecuadas para las siguientes sombras, después dibújalas en la parte derecha del recuadro.



Describe el procedimiento que utilizaste para dibujar la figura \_\_\_\_\_

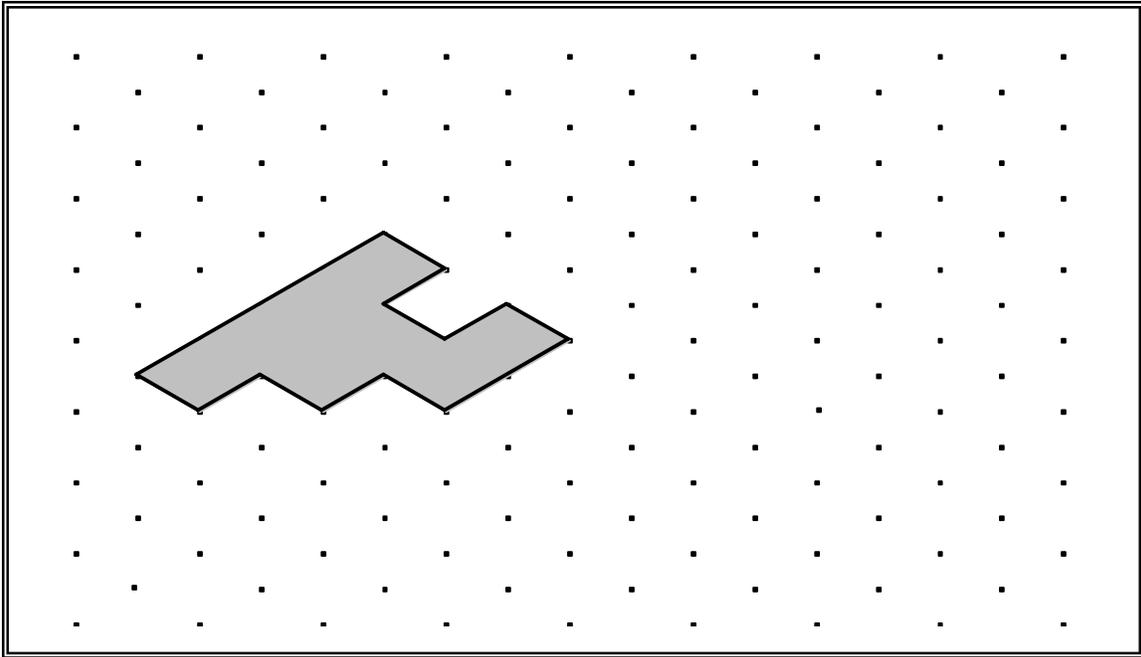
---

---

---

---

---

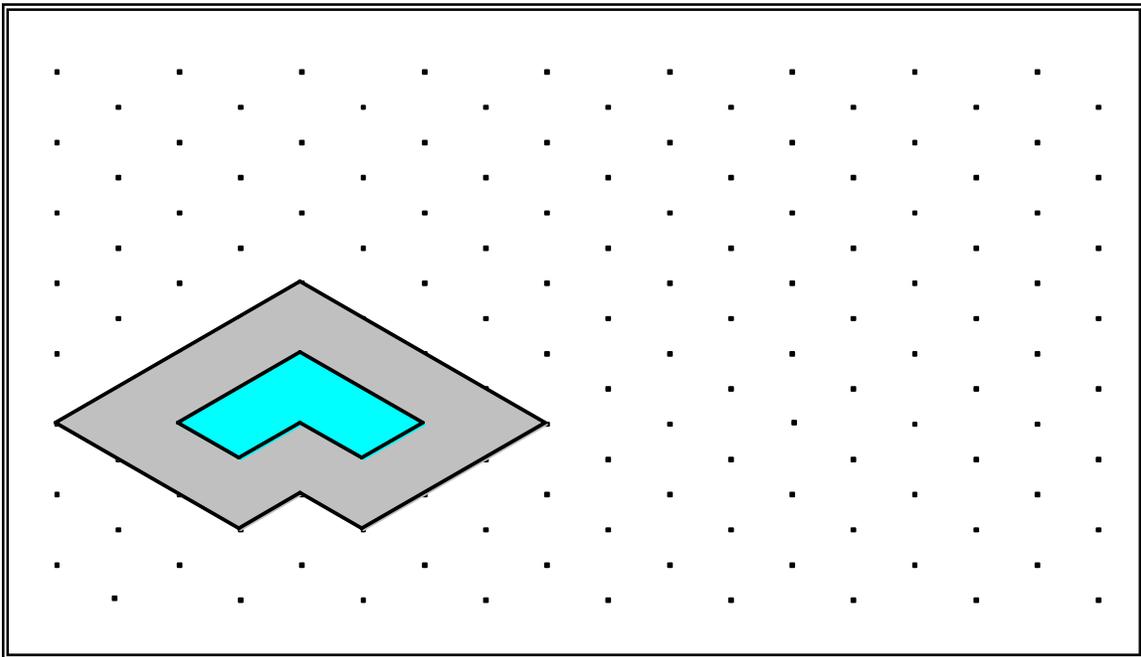


¿Cómo le hiciste para dibujarla? \_\_\_\_\_

---

---

---



Compara los resultados con los de tus compañeros, ¿Qué diferencias encontraron? \_\_\_\_\_

---

---

---

Comenta con tus compañeros los procedimientos empleados en el último ejercicio y escribe el que consideres más sencillo \_\_\_\_\_

---

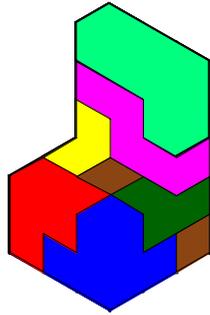
---

---

---

---

MANIPULACIÓN  
ACTIVIDADES



# SESIÓN 5

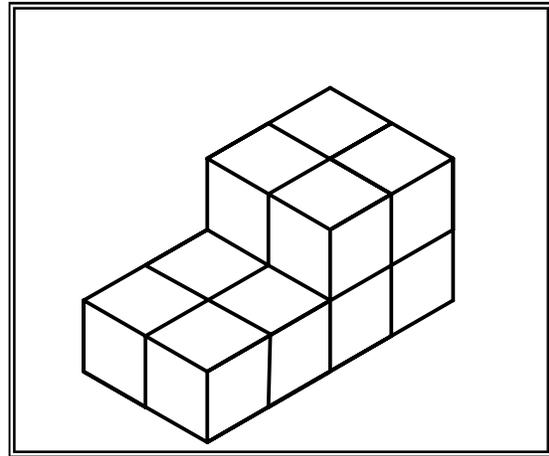
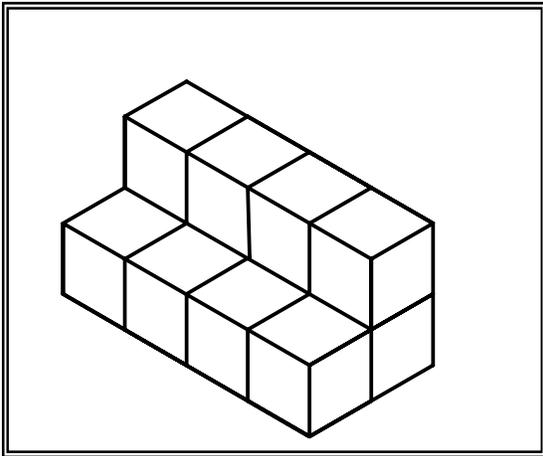
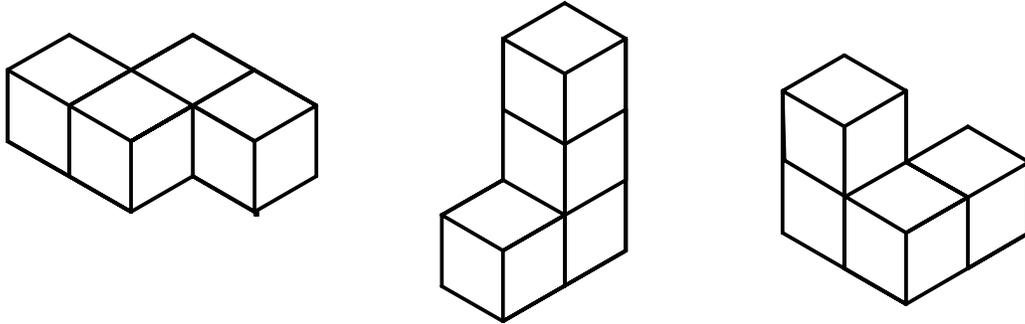
Nombre: \_\_\_\_\_

Fecha: \_\_\_\_\_

## SESIÓN 5

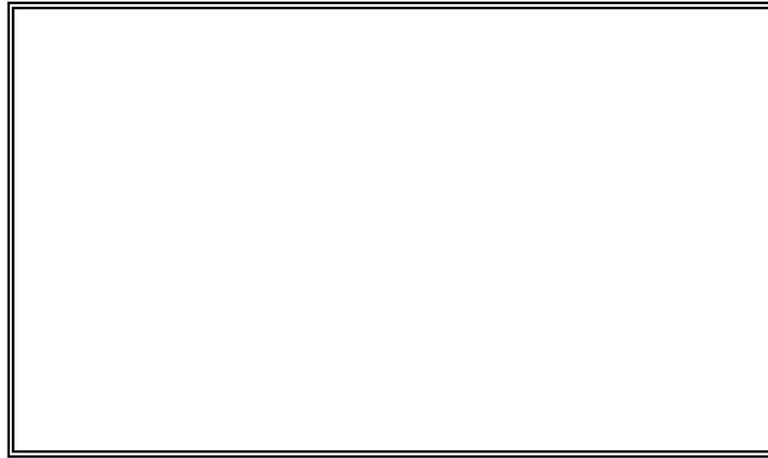
1. En la juguetería fabrican algunas piezas para otros rompecabezas las cuales están formadas por varios policubos.

Con los policubos siguientes construye las piezas del recuadro e identifica en cada pieza los policubos e ilumínalos de diferente color. Si es necesario utiliza el material

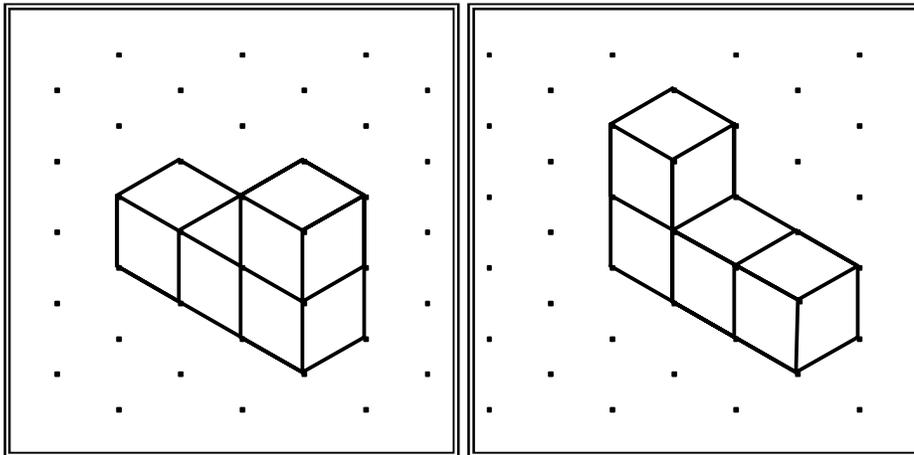


¿Qué problema tuviste para identificar cada policubo en el dibujo? \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Arma otra pieza que se forme con los mismos policubos y dibújala a continuación:

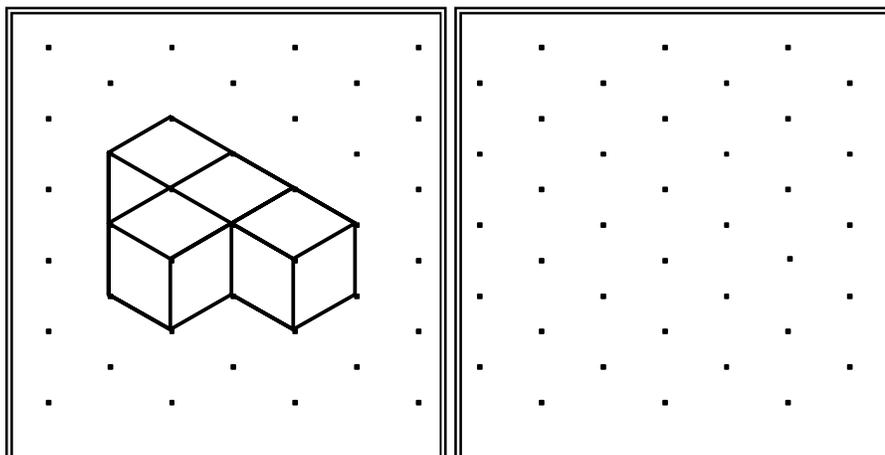


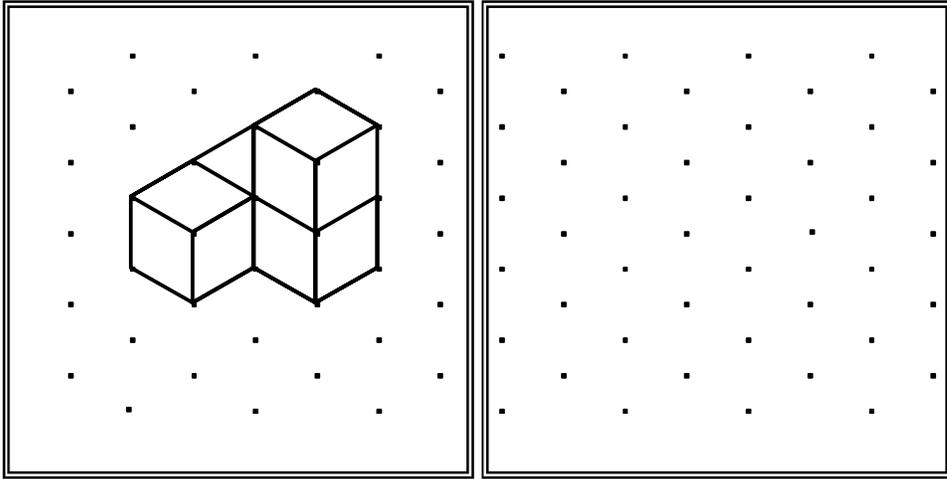
2. Dos dibujantes le presentaron a su jefe el siguiente dibujo de un policubo.



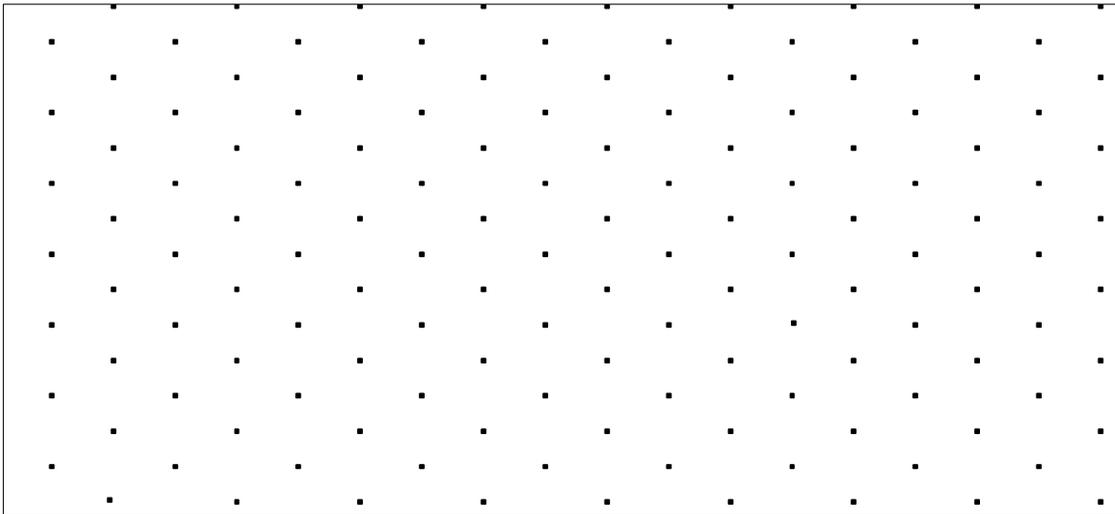
¿Los dos dibujos representan al mismo policubo? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Dibuja los siguientes policubos como si los estuvieras viendo desde la parte de atrás.

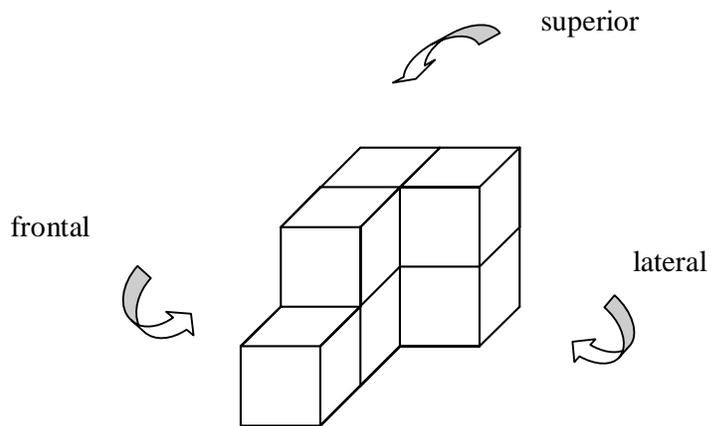




Compara tus resultados con los de tus compañeros. Comprueben sus resultados con el material y dibuja la vista correcta a continuación:



3. Traza las vista ortogonal de las siguientes piezas. Si lo necesitas apóyate en el material.



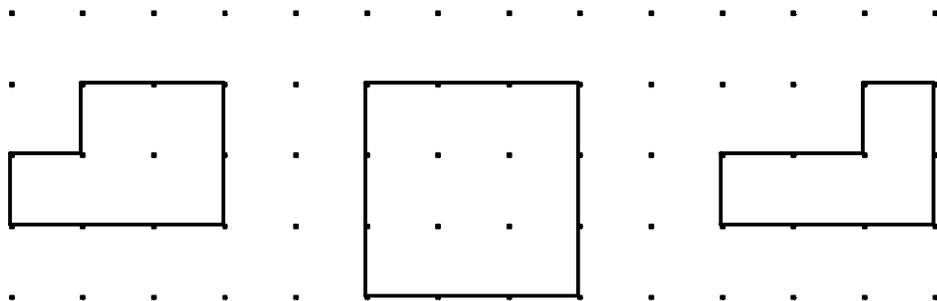


*Cara frontal*

*Cara superior*

*Cara lateral*

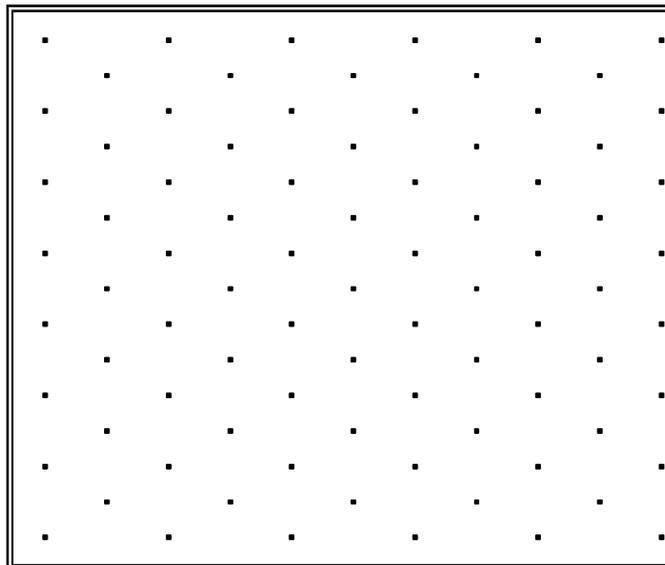
Arma con el material la pieza que se forma con las siguientes vistas ortogonales, después dibújalas en el papel punteado.

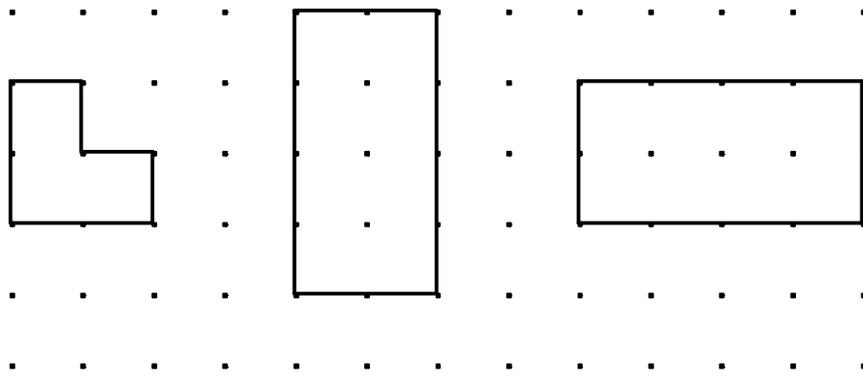


*Cara frontal*

*Cara superior*

*Cara lateral*

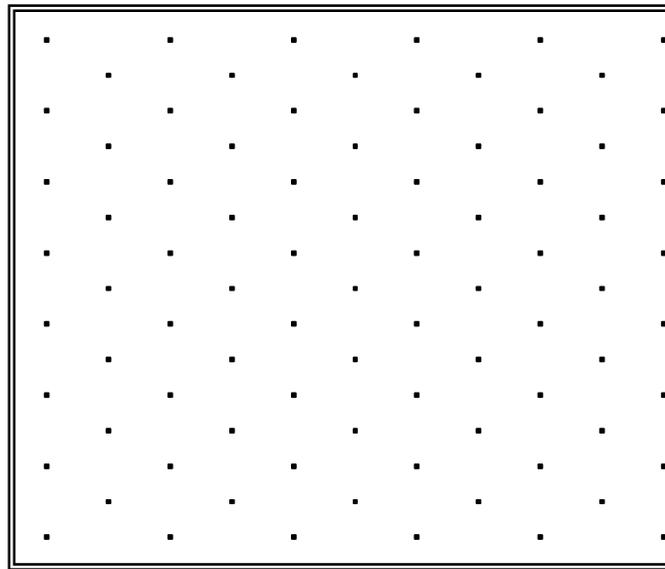




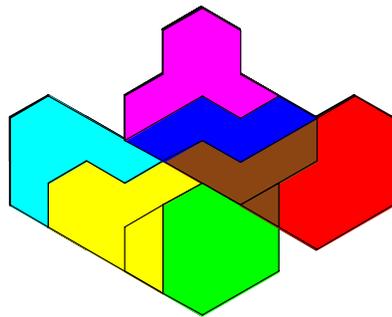
*Cara frontal*

*Cara superior*

*Cara lateral*



REPRESENTACIÓN



ACTIVIDADES

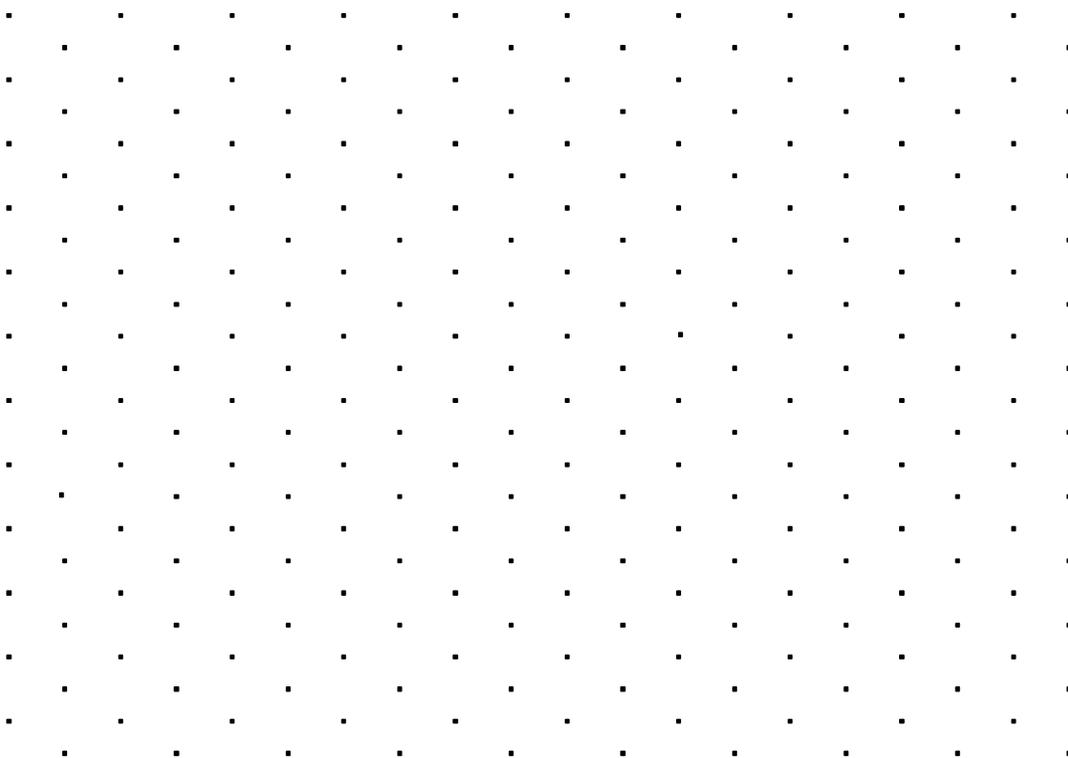
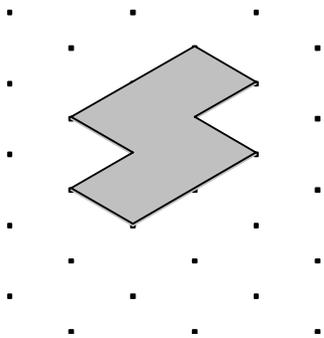
## SESIÓN 6

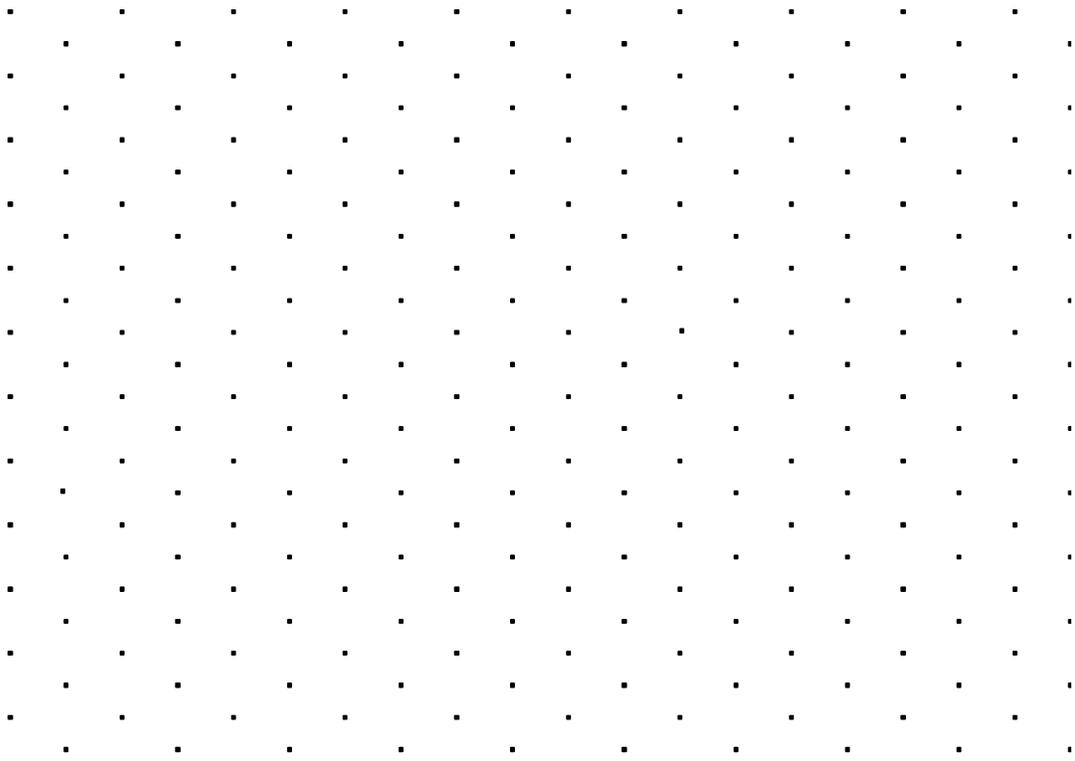
Nombre: \_\_\_\_\_

Fecha: \_\_\_\_\_

## SESION 6

1. Dibuja 4 policubos diferentes que estén formados por siete cubos y que tengan la siguiente forma:





¿Cuántas piezas diferentes piensas que se pueden formar? \_\_\_\_\_ Compruébalo con el material

¿Cuántas piezas se pueden formar? \_\_\_\_\_ Compara tu resultado con tus compañeros.

Explica qué procedimiento utilizaste para comprobar tu resultado \_\_\_\_\_

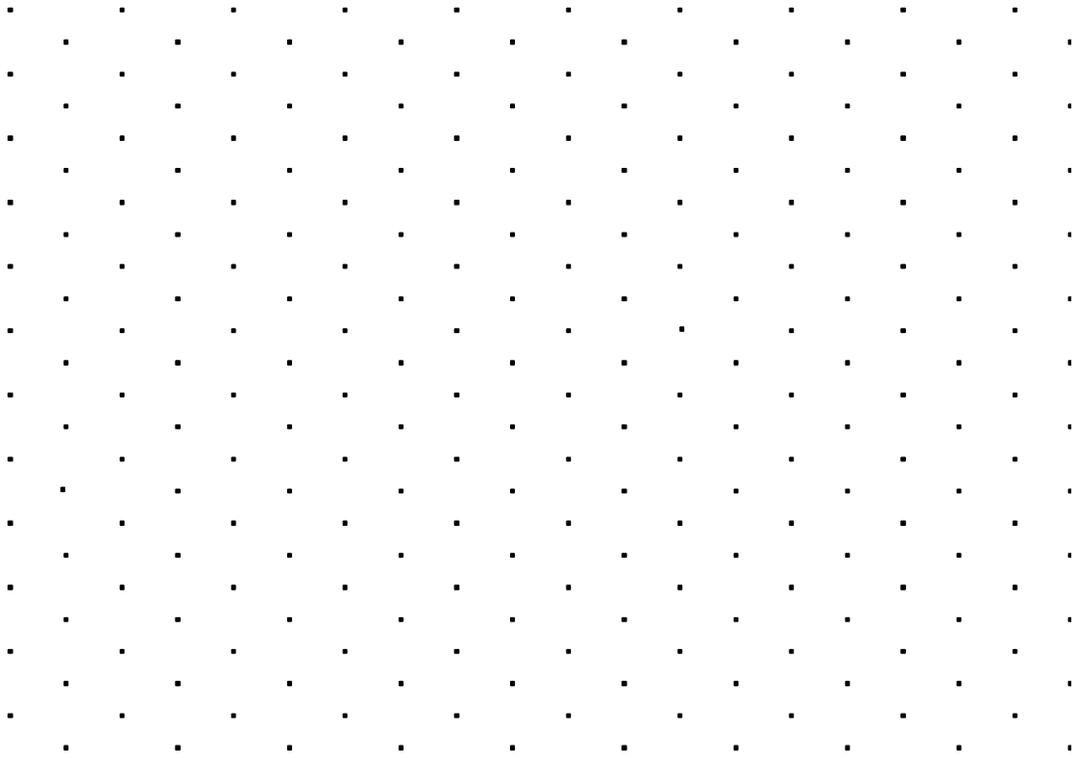
---

---

---

---

2. Observa los policubos que se encuentran en la mesa, dibújalos y coloréalos de diferente color.



¿Cuál poliedro se te hizo más difícil de dibujar? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_

---

---

---

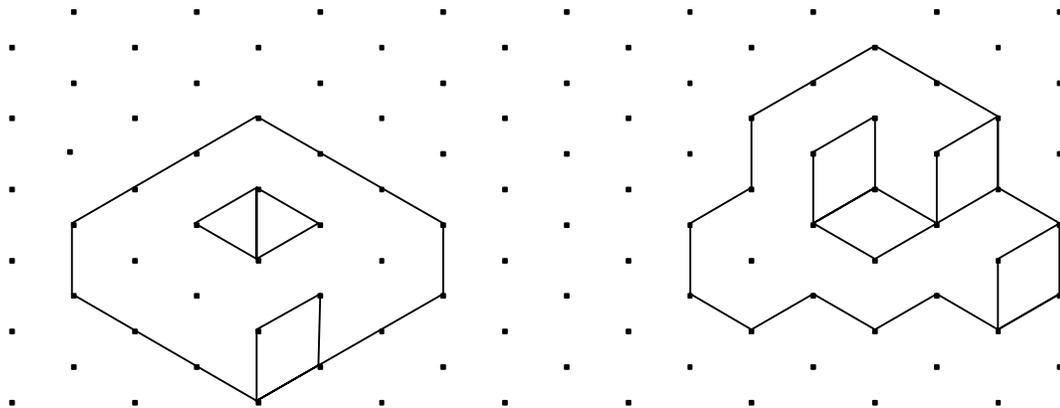
¿Cuál se te hizo más fácil de dibujar? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_

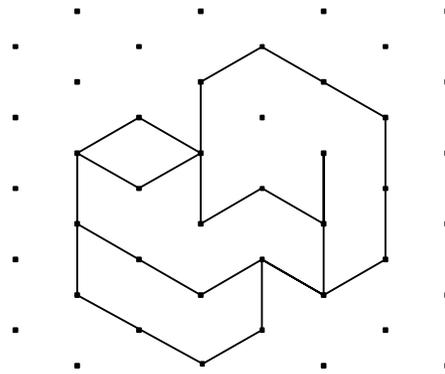
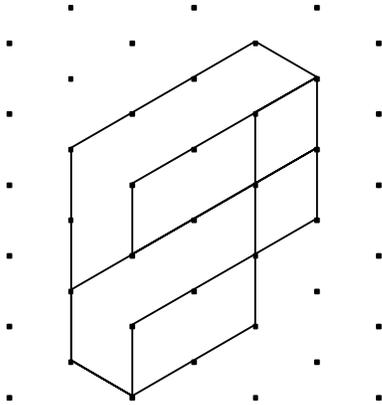
---

---

---

### 3. Encuentra los errores de impresión en los dibujos y corrígelos

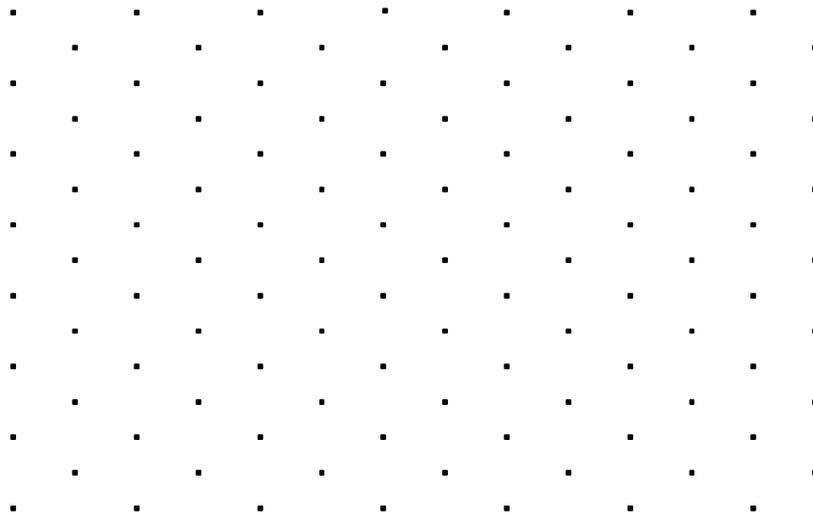




Arma con el material los policubos formados en el ejercicio anterior y compáralos con tus compañeros. ¿Qué diferencias encontraste? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

4. Siéntate enfrente de un compañero, pongan un policubo en el centro de la mesa. Cada uno dibuje el policubo.



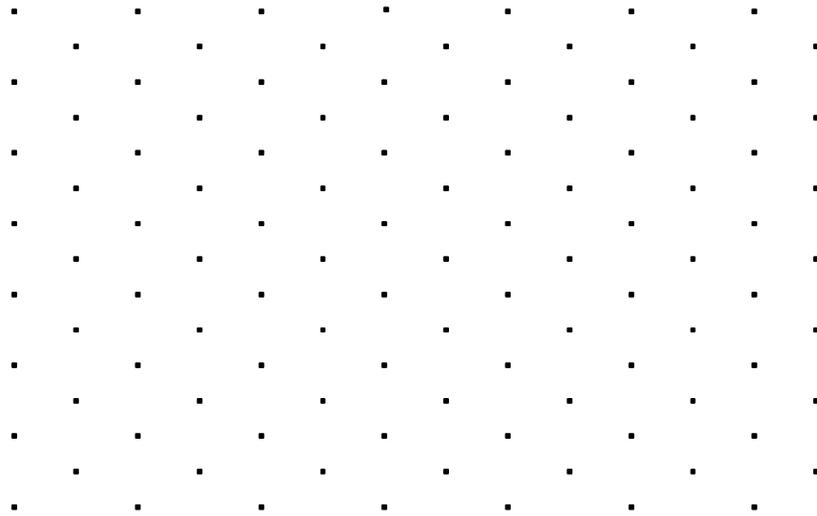
¿Los dibujos que hicieron son iguales? \_\_\_\_\_ ¿por qué? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

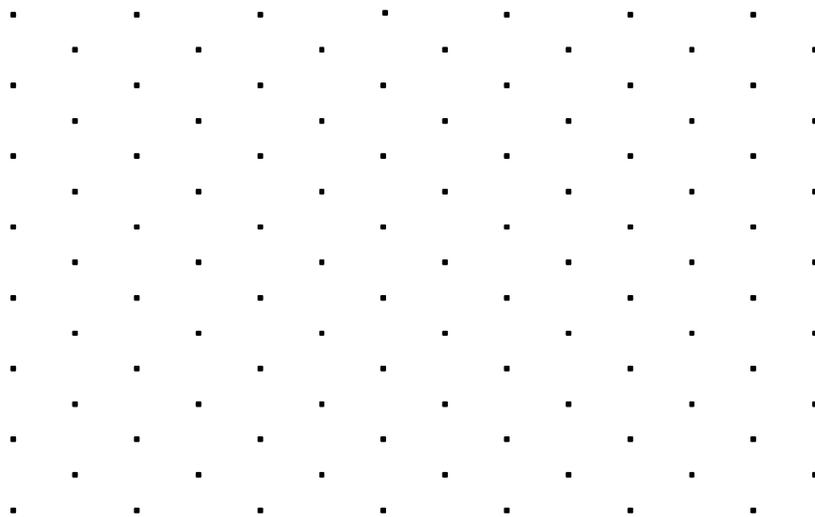
\_\_\_\_\_

Sin moverte de tu lugar, dibuja el mismo policubo como si lo estuvieras viendo desde el lugar de tu compañero



Repitan el ejercicio con otro policubo

Vista desde tu lugar



Vista desde el lugar de tu compañero



¿Qué estrategia usaste para hacer el dibujo con la vista desde el lugar de tu compañero?

---

---

---

---

---