UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

UNIDAD

S E A D

321

SECRETARIA DE EDUCACION PUBLICA

LA FUNCION DE LOS MODELOS OBJETIVOS EN LA COMPRENSION Y EL CONOCIMIENTO DE LOS NUMEROS RACIONALES EN QUINTO GRADO DE EDUCACION PRIMARIA

Elías Saucedo Palafox

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
BIBLIOTECA
S E P

ZACATECAS, ZAC., 1987.

C.A.V. 8/IX/944

UNIDAD

S E A D

321

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

SECRETARIA DE EDUCACION PUBLICA

La función de los modelos objetivos en la comprensión y el conocimiento de los números racionales en quinto grado de educación primaria.

ELIAS SAUCEDO PALAFOX

Investigación Documental presentada para obtener el título de

LICENCIADO EN EDUCACION PRIMARIA

ZACATECAS, ZAC. 1987.

INDICE

CAPITULO IV

LA PRACTICA DE LOS CONCEPTOS DE LOS NUMEROS RACIONALES

CAPITULO V

LAS OPERACIONES FUNDAMENTALES CON FRACCIONES, SUMA, RESTA, MULTIPLICACION Y DIVISION

INTRODUCCION

El tema en cuestión trata de profundizar en el conocimiento y manejo del sistema de los números racionales en la escuela-primaria y principalmente en aquellos alumnos que cursan el quinto grado.

Es natural que en el hecho educativo intervienen como factores indispensables: el maestro, el alumno, el tema y el material de apoyo para su desarrollo y comprensión.

En este trabajo se persigue el fin de mejorar técnicamente la actividad desplegada por quienes participan en el desarrollo-de los objetivos que se llevan a tal efecto, mismo que tiene lugar principalmente dentro de las aulas y desde los primeros años escolares hasta la educación superior. Entonces se desprende -- que esta investigación tiene un enfoque netamente de instrucción, ejercitación y práctica, al tratar que el alumno adquiera la destreza y el dominio en el conocimiento de las operaciones fundamentales (adición, sustracción, multiplicación y división), en donde intervengan los números racionales.

El interés que se tiene por este tema, es al observar que-al terminar los escolares su instrucción primaria, varios de -- ellos ingresan a otras escuelas con fuertes deficiencias de conocimiento en forma razonada y práctica de los números en cuestión así como en los más diversos razonamientos lógicos que se llevan a efecto dentro de este sistema de numeración.

Es importante atacar el problema desde los primeros años, pero principalmente en el tercer ciclo que es cuando los alumnos por su edad y su grado de estudio son más concientes de sus actos.

Si el escolar sigue por el camino de la superación cultural y hace estudios posteriores a la primaria, se va a enfrentar con una serie de problemas en los cuales tiene que hacer uso de este tipo de instrucción que encierra el campo de los números racionales, positivamente tiene grandes satisfacciones que lo lleven por el camino del éxito, con el conocimiento en forma objetiva y razonada sobre modelos se hace conciente, no pierde el interés y con gusto elabora su propio conocimiento, de lo contrario, sufrirá desepciones profundas en este aspecto, y en lo sucesivo sentirá apatía por esta parte de las matemáticas.

CAPITULO I

EL ORIGEN DE LOS NUMEROS

A.- Antecedentes

Este trabajo se inicia con una breve reseña histórica de los símbolos numerales, ya que son los instrumentos o herramientas con que se trabaja y el tener conocimiento de su origen, ayuda a tener bases más sólidas para su uso, por lo que es necesario conocer la estructura del sistema que los forma.

El tratado de esta obra es la búsqueda de un mejor aprovechamiento del tiempo en el aula, el ahorro de esfuerzo por parte del alumno y el maestro, para la mejor comprensión de los números racionales y las operaciones que con ellos se hacen, en cuanto a lo programado para quinto grado de la escuela primaria.

Los números racionales son de la forma $\frac{\square}{\square}$, $\square . \square$ y se representan por símbolos tomados del conjunto de los enteros, y el conjunto de los enteros usa los símbolos del conjunto de los números naturales y el conjunto de los números naturales los toma del sistema decimal que usamos normalmente. Estos sistemas usan los símbolos hindo-arábigos, y de aquí se desprende la necesidad de un pequeño estudio, para llegar al fin que se persigue.

Existen suposiciones o conjeturas acerca del invento de los números que usamos, se cree que el hombre tuvo la necesidad de usarlos y los inventó por pura intuición al hacer comparaciones con todos los objetos de la naturaleza que lo rodeaba y por la necesidad de ponerse en contacto con su medio ambiente, crean do así los conceptos "mayor que" "menor que" "igual a". Esto -- hubo de suceder a través de un largo devenir histórico de la humanidad.

Las necesidades creadas hasta entonces, sólo lo obligó a - dar respuesta sin representación de símbolos numéricos, simple - mente con hacer tarjas en los árboles, marcas en la arena o cualquier otro material, con tal de tener colecciones o conjuntos de referencia para cubrir sus necesidades.

Con este principio de comparación de marcas y otras cosas- de la naturaleza, el hombre primitivo se dió cuenta de éste "apareamiento" entre los objetos de referencia que pueden ser contados.

El conjunto formado por los dedos de la mano le fue de -- gran utilidad al usarlos con una correspondencia uno a uno con - relación a los objetos o cosas que lo rodeaban.

Con estos elementos el hombre primitivo, ya pudo desarro - llar palabras, para ser usadas como indicadoras y desempeñar el- papel de un registro, conjuntamente inventó los símbolos escri - tos para cada cantidad de miembros de un conjunto dado y así llegar a la formación de sistemas de numeración.(1)

B.- Los símbolos hindo-arábigos

Estos símbolos numéricos que usamos, llevan este nombre -- porque se cree que fueron los hindúes quienes los inventaron y - arábigos porque fueron los árabes quienes los difundieron por -- Europa occidental. En la India se han encontrado algunos rasgos

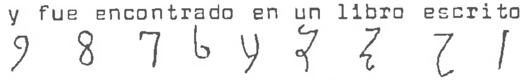
---

(1) John A. Peterson y Joseph Hashisaki. Teoría de la aritmética. México, Ed. Limusa. 1975 p. 15 y 16

escritos en columnas de piedra con una antigüedad de 250 años a. de C., se han encontrado otras inscripciones cerca de Peona, India, con antigüedad de 100 años a. de C., en las paredes de una cueva. Otros ejemplos antiguos se han encontrado esculpidos también en las cuevas de Nazik, India, datan de 200 años d. de C., y se dice que estos ejemplares no contenían al cero.

El cero y el valor relativo fueron empleados antes del año 800 d. de C. Históricamente la forma como estos números fueron transmitidos a Europa, no es clara, probablemente los árabes los introdujeron a la península Ibérica por el año 711 d. de C., enseñando los nuevos símbolos a los españoles.

El siguiente conjunto de símbolos data del año 976 de nuestra era y fue encontrado en un libro escrito en España.



Otra versión sobre los números hindo-arábigos según Margaret F. Willerding (2), en cuanto a su origen, fueron grabados en las paredes de una cueva situada dentro de una colina llamada Nana Gaht.

uno dos cuatro siete nueve

Así, también las encontradas en un pueblo de la India llamado Nazik y son los que se presentan a continuación:

uno dos tres cuatro cinco seis siete nueve

Como podemos apreciar, los símbolos de este sistema han su

---

(2) Secretaría de Educación Pública. Matemáticas I. México, Ed. Mexicana, 1975 p. 81-83

frido cambios, posiblemente su transformación se deba a la trans cripción de los escribas, dejan de tener cambios fuertes cuando aparece la imprenta; ya después sufren cambios ligeros sólo de forma. (3)

C.- Objetivos

1.- Con este trabajo se persigue el fin de hacer más accesible al alumno y al maestro el conocimiento y aprendizaje de las operaciones que se efectúan con los números racionales como una superación cultural.

2.- Crear en el alumno disponibilidad, para el desarrollo intelectual que la matemática encierra.

3.- Despertar en los alumnos un interés espontáneo para la aceptación de la ciencia matemática.

4.- Demostrar que con modelos objetivos en la práctica antes de lo gráfico y lo numérico ha de razonar el alumno economizando esfuerzo.

5.- Hacer notar que las soluciones matemáticas son de orden lógico universal.

6.- A plicar el razonamiento lógico que nos lleve a verdades universales.

7.- Reconocer que las proposiciones lógicas matemáticas ayudan a resolver incluso problemas de otras ramas del saber ya que, ordenan el razonamiento.

8.- Desarrollar satisfactoriamente los temas correspondien

---

(3) John A. Peterson. op. cit. p. 24

tes al grado, en lo que se refiere al empleo de los números ra - cionales.

9.- Asimilar los métodos con los cuales se procede usual - mente.

10.- Hacer sentir en el alumno una paz espiritual por el hecho de ser capaz de poder resolver sus propios problemas y en este sentido ser útil a los demás de acuerdo con el grado que cursa. (4)

---

(4) Enrique García González. Tecnología Educativa I. México, Ed. El Ateneo, 1974 (c 1975) p. 89-97

CAPITULO II

SISTEMA DE NUMERACION

A.- El sistema decimal

Los números, cifras o guarismos usados en nuestro sistema decimal son: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, como ya se dijo son de origen hindú. Tiene diez símbolos, con su valor relativo, todo número está formado por una secesión de cifras, su valor es la suma de términos multiplicados por el valor de cada uno de los símbolos por su potencia correspondiente de diez; que es la base, tomando en cuenta el valor que ocupa dicho símbolo con relación al punto decimal.

El punto decimal no se acostumbra anotarlo en los números enteros, se entiende que el punto se encuentra a la derecha inmediatamente después de la cifra última de la derecha. Así el número 354 y 354, comprende el mismo número.

De acuerdo con su valor relativo del número 875, se entiende que el 5 ocupa el lugar de las unidades, su valor es $5 X 10^0 = 5X1=5$ (cinco unidades); seguimos analizando el número 875. el "7" tiene un valor relativo de $7X10^1 = 7 X 10 = 70$ (siete decenas). El "8" su valor relativo está dado por el lugar que ocupa que es de $8 X 10^2 = 8 X (10 X 10) = 8 X 100 = 800$ (ocho centenas). Es decir que el valor relativo está dado por el lugar que ocupa el símbolo con referencia al punto decimal, multiplicado según el orden, por la potencia de diez, es decir unidades por 10^0. Símbolo de las decenas por 10^1; símbolo que se en--

cuentra en lugar de las centenas por 10^2.... y así sucesivamente.

Tabla de valores relativos para números en el sistema decimal según John A. Peterson y Joseph Hashisaki.(1)

10^3	1000	millar
10^2	100	centena
10^1	10	decena
10^0	1	unidad
10^{-1}	.1	décimo
10^{-2}	.01	centésimos
10^{-3}	.001	milésimos

El símbolo 382.45, tiene su interpretación en :

$$382.45 = 3 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 2 \times 10^0 + 4 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2} =$$

$$= 300 + 80 + 2 + .4 + .05$$

La suma de los símbolos multiplicado por la potencia de la base se llama notación desarrollada.

La ventaja principal del sistema de numeración decimal es su economía de símbolos y su adaptación al cálculo.

B.- El sistema de los números naturales

Enseñar a un niño a contar es crear convenientemente el "cuantos" y su asociación con el símbolo numeral correspondiente. Es el apareamiento que se da entre el símbolo y el objeto. Los símbolos y los nombres de esta abstracción son los numerales. El símbolo "1" es la propiedad comúm de todos los conjuntos formados por un elemento. "2" es la propiedad común de todos los --

(1) Teoría de la aritmética. p 27, 91-93

conjuntos que tengan dos elementos. Al formar este apareamiento con uno, dos, tres, cuatro.... elementos se forma el conjunto - de los números naturales, y que usan para su designación la letra N y sus símbolos son: 1, 2, 3, 4, 5, 6...., entonces el conjunto de los números naturales es N= {1, 2, 3, 4, ...

C.- Los números enteros no negativos

El número cero representa la ausencia de elementos en un- conjunto, el conjunto que no tiene elementos es el conjunto vacío $\emptyset$. Cuando un conjunto contiene como elemento al cero entonces sucede que:

1= { 0} de donde se aprecia que 1 es el sucesor de 0

2= {0, 1} el sucesor del 1 es 2

3= {0, 1, 2} el sucesor de 2 es 3

y el k + 1 es el sucesor de k, en esta forma al continuar indefinidamente, se forma el conjunto W, que es el conjunto de- los números enteros no negativos. (2)

---

(2) John A. Peterson, op. cit. p 93

CAPITULO III

EL SISTEMA DE LOS NUMEROS RACIONALES

A.- Definición

"Un número racional es una clase de pares ordenados de enteros. Los pares ordenados se describen con la forma m/n con la restricción de que n nunca sea cero.
El hecho de que los números racionales se definan como clases se aclarará en lo que sigue. Inicialmente los trataremos como pares ordenados de enteros, y el lector debe estar prevenido de que al hacerlo así estamos suponiendo la identificación de un par ordenado particular como una clase.......'(1)

Se condiciona a que n no sea cero, ya que si n es cero --- sucede que n/m no está definido, ya que ningún número multiplicado por 0, produce un número diferente de 0.

En la fracción m/n, a m se le llama numerador y a n denominador. Esta terminología corresponde a la definición de fracción.

Los símbolos a los cuales llamamos numerales, se consideran como elementos de los conjuntos tratados (de los naturales, de los enteros y de los racionales), al interpretar la forma: m/n, p:q aquí m, n, p y q, son números enteros.

B.- Interpretación de pares de números

Los números a los cuales comunmente se les llama fracciones como: 3/4, 2/5, 3/8, 2/9 etc., se les puede dar cuatro inter

---

(1) John A. Peterson. op. cit. p 200

pretaciones:

1.- Como elementos de un sistema

2.- Es una división

3.- La interpretación de "fracción"

4.- Se interpreta como razón.

"Cada interpretación está asociada con una situación en la que hay un problema razonablemente bien definido"(2)

El siguiente diagrama esquemático según A. Peterson, presenta algunas de las ideas asociadas con las siguientes interpretaciones.

" m/n, (n ≠ 0)

Sistema numérico	división	fracciones	comparación de canti-
$nx = m$	$m/n = k$	medición	dades omogéneas (ra -
$x = m/n$	$k = m:n$	magnitud	zón)
		m de n	comparaciones relati-
		partes	vas de partes iguales
		iguales	" m a n "
			porcentajes"(3)

C.- El conjunto de los números racionales

Para contestar la pregunta n 7 = m ( ) símbolo de multiplicación, se observa que si n es cero también m es cero porque 0 b = 0, para todo "b", por eso n, no debe ser cero.

Aquí lo que interesa es encontrar la solución no sólo a -

---

(2) John A. Peterson, op. cit. p198

(3) Ibid. p 199

$n \cdot ? = m$ sino también $a \cdot ? = b$; para cualquier a y b, con $a \neq 0$ -

Estas expresiones tienen soluciones para algunas parejas - en los enteros ejemplo:

$3 \cdot ? = 18$, que tiene solución en (3 divide a 18), pero para otros pares no hay solución entera, por ejemplo: $3 \cdot ? = 2$, es decir, ¿Por cuánto se debe multiplicar 3, para que su producto - sea 2?, el producto de este par está íntimamente relacionado con él mismo.

En algunos casos se tiene solución entera como las siguintes:

$4 \cdot ? = 8$	$3 \cdot ? = 15$	$6 \cdot ? = 30$	$3 \cdot ? = 2$
$? = 8/4$	$? = 15/3$	$? = 30/6$	$? = 2/3$
$5 \cdot ? = 4$	$6 \cdot ? = 11$	$7 \cdot ? = 13$	
$? = 4/5$	$? = 11/6$	$? = 13/7$	etc.

D.- Fracciones comunes

La fracción es una división indicada, en general a/b, sabiendo que a y b son números enteros, indica una o más de las -- partes en que se ha dividido la unidad.

1.- Elementos de una fracción

a).- Numerador.- Es el dividendo, número que se indica sobre la raya del quebrado, se le llama numerador de la fracción, - indica el número de partes que se toman de la unidad dividida en partes iguales.

b).- Divisor.- Número que se halla bajo la raya del quebrado, recibe el nombre de denominador de la fracción, indica en -- cuantas partes iguales se ha dividido la unidad como un todo.

La fracción 3/4 se lee "tres cuartos", el denominador indi ca que la unidad está dividida en cuatro partes (siempre la unidad debe tomarse como "un todo"), y el numerador indica que de esas cuatro partes se toman tres, en las siguientes figuras cada unidad está dividida en cuatro partes iguales, tres cuartos de una unidad (3/4) serán tres de esas cuatro partes, la longitud que está representada por la fracción 3/4

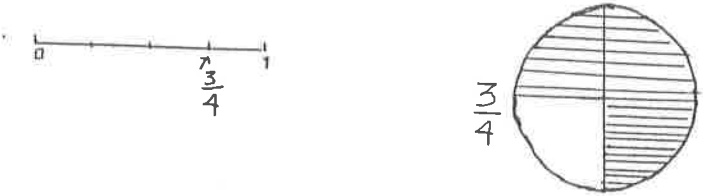
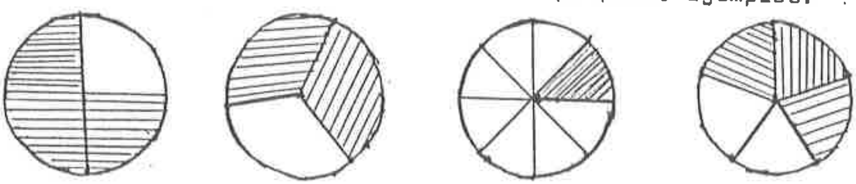


Fig. 1 Representación gráfica de 3/4

2.- Clases de fracciones

a).- Fracciones propias.- Cuando el numerador de una fracción es menor que el denominador, la fracción es menor a un entero, esta clase de fracciones se llaman propias. Ejemplos:



3/4 2/3 1/8 3/5

Fig. 2 Representación de fracciones propias

b).- Fracciones impropias.- Cuando el denominador de una fracción es igual o menor que el numerador, las fracciones son iguales o mayores que la unidad, a estas fracciones se les llama impropias. Ejemplos:

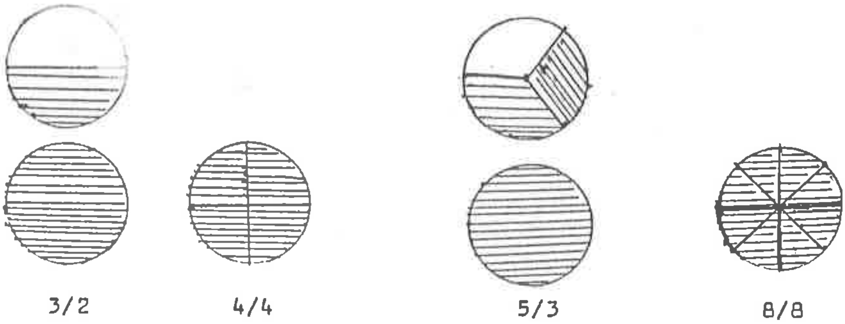


Fig. 3 Representación de fracciones impropias

c).- Números mixtos.- Son aquellos formados por una parte entera y otra fraccionaria, $3\frac{1}{4}$ que se lee tres enteros y un cuarto, igual a 3 + 1/4, ejemplos:

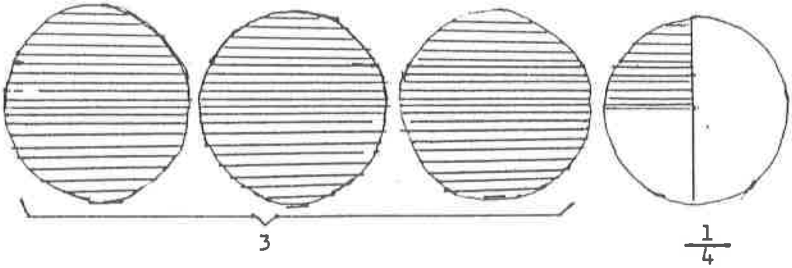
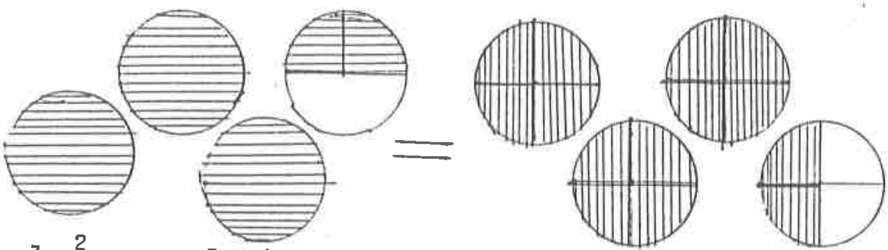


Fig. 4 Representación de un número mixto

3.- Conersión de los números racionales

Es necesario algunas veces realizar conversiones entre los -- racionales, para realizar algunas operaciones.

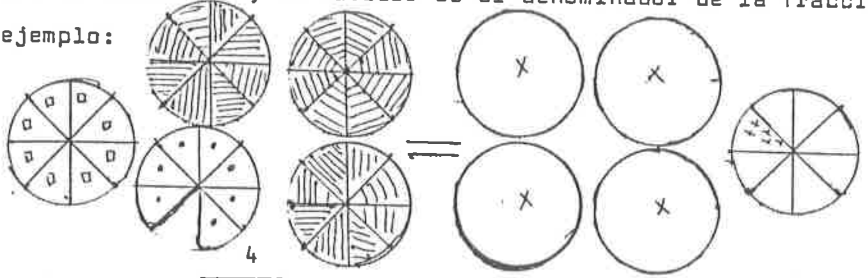
a).- Conversión de números mixtos a fracciones impropias. - La parte entera se racionaliza, anotando como denominador la unidad. La parte entera racionalizada se multiplica por el denominador de la fracción y se le suma la parte fraccionaria:



$$3\frac{2}{4} = \frac{3 \times 4}{1 \times 4} + \frac{2}{4} = \frac{12}{4} + \frac{2}{4} = \frac{14}{4}$$

Fig. 5 Representación de conversiones

b).- Conversión de una fracción impropia a un número entero o mixto. Se divide el numerador entre el denominador hasta enteros, resultando en el cociente la parte entera, en el residuo el numerador y el divisor es el denominador de la fracción, ejemplo:



$33/8 = \begin{array}{r} 4 \\ 8\overline{)33} \\ 1 \end{array}$ igual a $4/1$ enteros y $1/8 = 4\frac{1}{8}$

Fig. 6 Conversión de fracción impropia a mixto

E.- Fracciones equivalentes

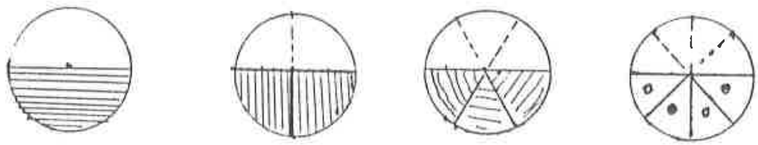
1.- Relación de equivalencias para pares ordenados de enteros.

"Decimos que dos pares ordenados de enteros m/n y p/q son equivalentes y escribimos m/n = p/q si.... y solamente si mq = np. Usamos el símbolo ≐ en lugar de =, para acentuar que esta es una nueva relación "igualdad" en el conjunto de los números enteros. Esta relación a la larga, se escribirá como "=" con el significado de "nombres para un mismo número" exceptuando el caso en que los pares ordenados sean interpretados como razones o comparaciones. La relación de los símbolos ≐ y =, se aclara que estamos usando la interpretación "nombres para un mismo número de =, pues to que la relación $\doteq$ definida para los pares ordenados tiene las mismas propiedades que =, cuando necesitamos para usar la interpretación "nombres para el mismo número" olvidamos el nuevo símbolo y volveremos a usar el símbolo =" (4)

2.- Clase de equivalencias de pares ordenados

Aquí, la relación $\doteq$ tiene las propiedades (simétrica, reflexiva y transitiva) es una relación de equivalencia, se presentan unas clases tabuladas. Se indican con (?), cualquiera de sus equivalencias puede usarse como tal. El paréntesis rectangular indica la clase a la que pertenece esa fracción.

La clase (1/2) pertenece a:

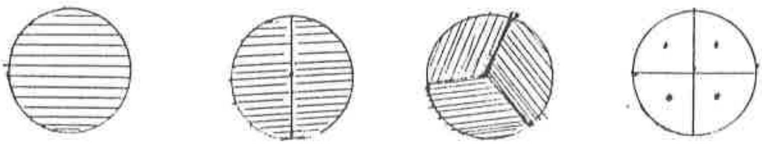


1/2 2/4 3/6 4/8 ....

Fig. 7 Representación de clase de equivalencia

En el paréntesis rectangular puede aparecer cualquiera de sus equibalencias.

La clase a la que pertenece 1/1 es:



1/1 2/2 3/3 4/4

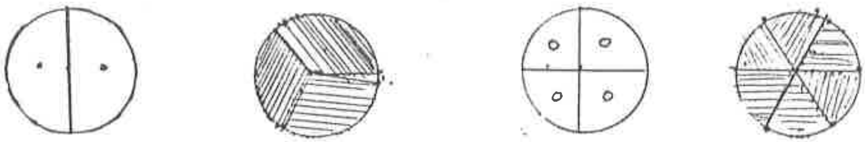
Fig 8 Clase de equivalencia

Esta clase es muy importante en operaciones con racionales, también juega un papel muy importante la siguiente clase (0/1), algunos de sus representantes son: 0/1, 0/2, 0/3, 0/4, etc.

3.- Números racionales como clases de equivalencia

Por lo visto en la sección anterior, nos damos cuenta que cualquier número de una clase puede actuar como representante de la misma. Por esta razón identificamos ciertos pares ordenados con una clase, esto da la capacidad de pensar y comprender a las fracciones en Aritmética. Esta idea es antigua y ya familiar.

Hay infinidad de fracciones que representan la misma clase por ejemplo para 1/1 se tiene:



2/2 3/3 4/4 6/6 ...

Fig. 9 Formas de representar un entero

Inmediatamente se piensa en dos enteros al ver la siguiente clase:

4/2 8/4 ...

Fig. 10 Representqción de dos enteros

Para sumar 2/3 y 5/6 se acostumbra sumar 4/6 y 5/6; ya que 2/3 es lo mismo que 4/6

Fig. 11 2/3 y 4/6 representan la misma clase

Los objetos del sistema de los números racionales será esta clase de equivalencias. Las operaciones estarán definidas atendiendo a los representantes de estas clases, principalmente en lo que compete a suma y resta.

4.- Fracciones decimales

a).- Una fracción decimal tiene como denominador 10, 100, 1000, etc., cualquier múltiplo de 10, así: 5/10, 32/100, 7/1000 son fracciones decimales.

b).- Conversión de fracción común a fracción decimal.- Para convertir una fracción común a una fracción decimal, se divide el numerador entre el denominador, el numerador es el dividendo y el denominador es el divisor. Se coloca el punto decimal inmediatamente después de la última cifra del dividendo, se coloca el punto decimal en el cociente cuando la división se corre la primera cifra decimal del dividendo, se efectúa la división hasta que el residuo sea nulo o se cumplan las condiciones impuestas.

5.- Simplificación de fracciones

Una fracción está reducida a su mínima expresión cuando el numerador y el denominador sean primos entre sí, o sea que no tengan divisores en común. Para simplificar una fracción se divide tanto el numerador como el denominador entre un mismo número, esto es útil cuando se trata de efectuar sumas o restas de fracciones, ejemplo: 4/8 se divide numerador y denominador entre dos por ser 2 divisor común de 4 y 8, $\frac{4}{8} = \frac{4:2}{8:2} = \frac{2}{4}$

6.- Reducción de dos o más fracciones a un común denominador

Cuando se van a sumar o restar dos o más fracciones, sus de nominadores deben modificarse hasta ser comunes para ésto, puede multiplicarse los denominadores de las fracciones y cada fracción original pasa con su equivalencia (representante) a ese común - denominador, ejemplo: 3/4, 1/3 , se tiene que 4 X 3 = 12 entonces:

$$\frac{3 \times ?}{4 \times ?} = \frac{\quad}{12}, \quad \frac{1 \times ?}{3 \times ?} = \frac{\quad}{12}, \quad \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12} \quad \frac{1 \times 4}{3 \times 4} = \frac{4}{12}$$

En estas condiciones ya podemos efectuar sumas o restas.(5)

---

(4) John A. Peterson, op. cit. p 198-205.

(5) Palmer , et al: Matemáticas prácticas. 2 ed., Tr. Pilar - Pereda Vimvesa. España Ed., Reberté, p 11-13 y 27-28.

CAPITULO IV

LA PRACTICA DE LOS CONCEPTOS DE LOS NUMEROS RACIONALES

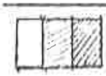
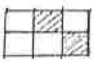
A.- Práctica y conocimiento de las fracciones

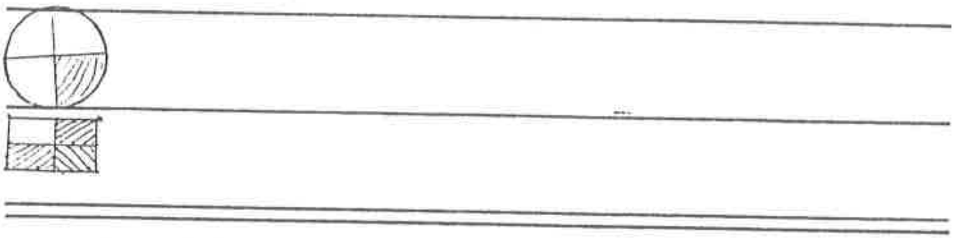
1.- El numerador, el denominador y la recta numérica

Ya dentro del temario que presenta el libro de texto para quinto grado de la escuela primaria actual en lo que se refiere a las operaciones y al conocimiento de los números racionales, está bastante gráfico e interesante, para conducir el aprendizaje del alumno, sólo que aquí es donde se hace necesario el uso de material didáctico objetivo que el maestro debe emplear para facilitar la captación del conocimiento, utilizando objetos que la naturaleza le brinda y crear bloques lógicos de razonamiento.

En la página 31 del libro de texto, se presenta un cuadro con figuras divididas por partes iguales, en cada figura hay algunas partes sombreadas que deben completarse guiándose por el ejemplo.

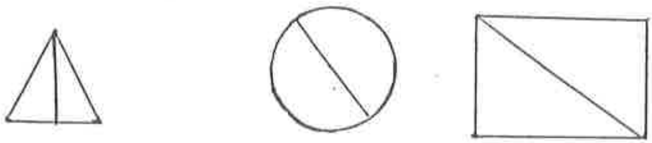
Cuadro 1

Gráficas	Partes sombreads	total de partes	Fracción	Numerador	Denominador
	2	3	$\frac{2}{3}$	2	3
					
					

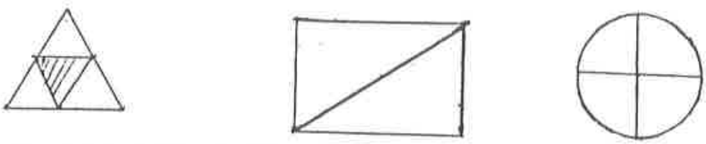


Para el llenado del cuadro anterior, es necesario que el -- alumno maneje previamente objetos materiales, que los palpe, que- los pruebe, que los huela si es posible; para que el aprendizaje- se le facilite. Que maneje materiales que él pueda partir en 2,- 3, 4, 5, 6, 7.... etc., partes iguales. Así estará más dispuesto- para el conocimiento y podrá realizar más fácilmente los ejerci-- cios que se presenten. Ejemplo:

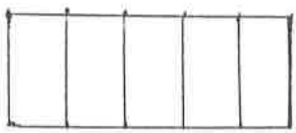
Sombrea 1/2 de las siguientes figuras.



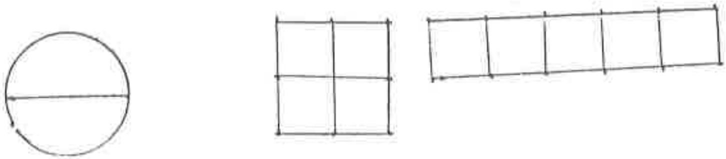
Sombrea 1/4 de las siguientes figuras.



Sombrea 1/5 del área de cada una de las figuras.



Colorea la fracción que se indica



1/2 1/4 1/5

También es importante representar fracciones en la recta - numérica, para un mejor razonamiento lógico, como el siguiente - ejercicio:

En la recta numérica representa las siguientes fracciones:

1/2 1/4 1/6

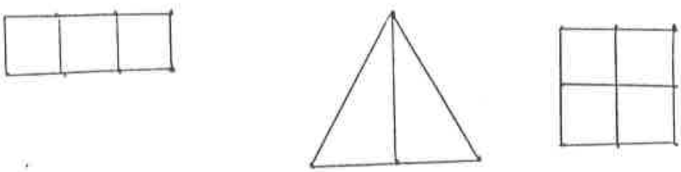
En la siguiente recta numérica representa:

1/2 2/3 1/6

Así con variados ejercicios hasta llegar a su dominio de - este conocimiento.

Se ejercitan las representaciones de algunas fracciones para que el alumno adquiera más firmeza en su razonamiento.

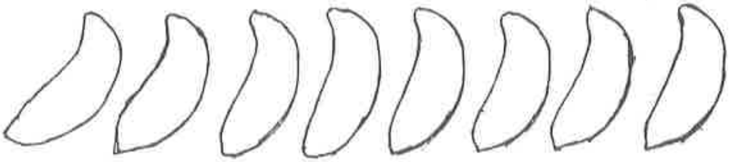
Sombrea de cada dibujo la parte que se te indica.



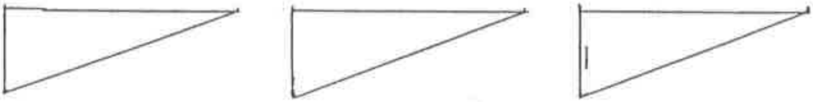
1/3 1/2 1/4

113612

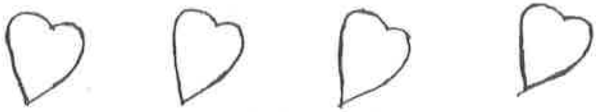
Colorea de rojo 1/2 del total de las figuras.



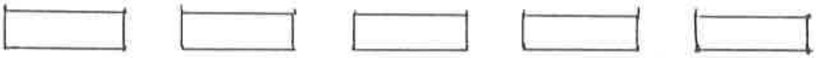
Colorea de azul 1/3 del total de las figuras.



Colorea de verde 1/4 del total de estas figuras.

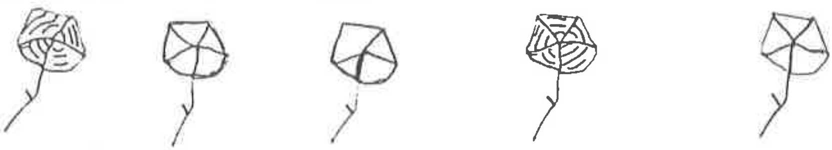


La quinta parte del total de las figuras coloréalas de amarillo.



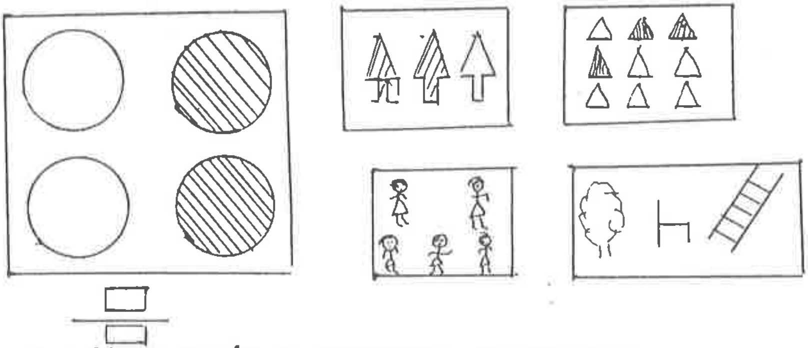
El alumno debe ejercitar en forma constante hasta que adquiera el conocimiento como:

Indica la porción sombreada en cada una de las siguientes figuras, guíate por el ejemplo:



2/5 de este conjunto.

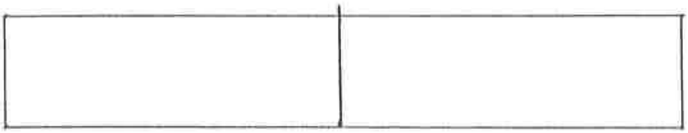
En cada uno de los siguientes conjuntos indica la porción sombreada.



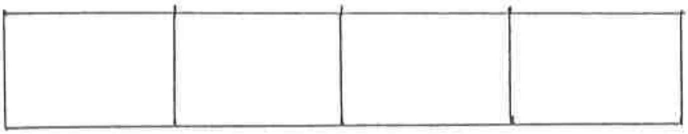
8.- Ejercitación de fracciones equivalentes

En ejercicios de equivalencias, lo mismo se insiste en modelos objetivos que van a servir para analizar y comprender este tema, una vez ya manejadp con modelos objetivos se pasa a la parte gráfica con ejemplos como el que sige:

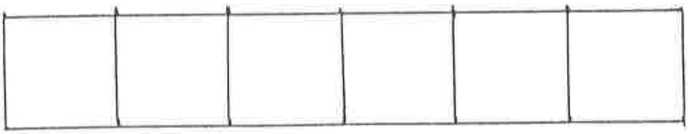
Colorea de izquierda a derecha la porción en la figura indicada.



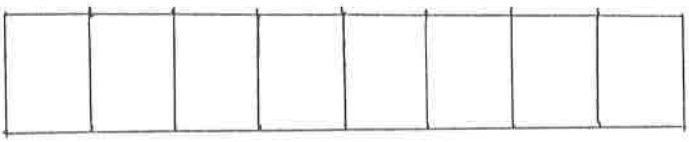
$\frac{1}{2}$



$\frac{2}{4}$



$\frac{3}{6}$



$\frac{4}{8}$

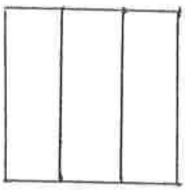
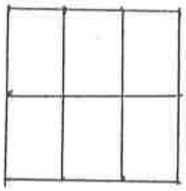
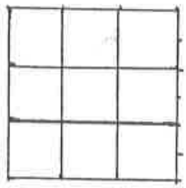
Observa la figura anterior y escribe el signo que le corresponde a cada una de estas fracciones al ser comparadas.

1/2   2/4   3/6   4/8

Escribe la relación que hay entre estas fracciones :

$\frac{1}{2}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{4}{8}$

Escribe la relación que existe entre estas fracciones y colorea su representación. 1/3   2/6   3/9

Se observa en estos ejercicios de equivalencia que:

1/2, 2/4, 3/6 y 4/8 están representando la misma porción de cada figura, son diferentes formas para escribir la misma fracción por lo que estas fracciones se dice que son equivalentes, entonces se escribe: 1/2 = 2/4 = 3/6 = 4/8.

1.- Equivalencias

Al observar lo anterior resulta que, si cada fracción tanto el numerador como el denominador se multiplican por un mismo número entero diferente de 0, resulta una nueva forma de representar a la fracción, en su equivalente. En general alb = $\frac{an}{an}$, entonces ya se puede representar cada clase, en infinito número de formas.

Así se tiene por ejemplo:

1/2 = 2/4 = 3/6 = 4/8 = ...

1/3 = 2/6 = 3/9 = ...

1/4 = 2/8 = 3/12 ....

Así como estos ejercicios se encuentran otros en el libro de texto.

Si se lee cada línea de derecha a izquierda se tiene que:

$\frac{a}{b} = \frac{a : n}{b : n}$ donde se nota que si una fracción se divide cada uno de sus elementos entre un mismo número, resulta una equivalencia simplificada.

2.- Productos cruzados

Al considerar la siguiente fracción equivalente a otra

$$\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$$

se observa que 3 X 12 = 4 X 9, ésta es otra forma de comprobar que dos fracciones son equivalentes usando los productos cruzados, ejemplos:

$\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$ 2 X 15 = 30
5 X 6 = 30

2 X 15 = 5 X 6

$\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$

$\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$

Se ejercita esta forma hasta que el alumno logre comprender la equivalencia.

Ya se puede resolver situaciones como las siguientes usando productos cruzados. Ejemplo:

Completa los valores que faltan usando los productos cruzados.

$\frac{3}{5} = \frac{\_\_}{10}$ $\frac{3}{8} = \frac{12}{\_\_}$ $\frac{1}{3} = \frac{4}{\_\_}$ $\frac{\_\_}{5} = \frac{6}{10}$

Aquí se pide que se encuentren fracciones equivalentes --- que tengan cierto denominador como se aprecia en los siguientes- ejemplos:

Encontrar fracciones equivalentes a los siguientes con denominador 8, usando los productos cruzados.

$\frac{3}{2} = \frac{\_\_}{8}$ $\frac{2}{1} = \frac{\_\_}{8}$ $\frac{3}{4} = \frac{\_\_}{8}$

Escribe fracciones equivalentes que tengan denominador 24.

$\frac{72}{48} = \frac{\_\_}{24}$ $\frac{5}{8} = \frac{\_\_}{24}$ $\frac{7}{6} = \frac{\_\_}{24}$

Escribe lo que creas pertinente en los cuadritos vacíos, guíate por el ejemplo.

$\frac{3}{2} = \frac{6}{4} = \frac{12}{8}$

$\frac{2}{2} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} \ldots$

$\frac{2}{4} = \_\_ = \_\_ = \_\_$

$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{8}{\_\_} = \_\_$

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \_\_\_\_ = \_\_\_\_ = \_\_\_\_$$

En los cuadritos escribe 3/4 o 4/3 según creas conveniente.

$\frac{18}{24} = \frac{\square}{\square}$ $\qquad$ $\frac{9}{12} = \_\_\_\_$ $\qquad$ $\frac{15}{20} = \_\_\_\_$

$\frac{6}{8} = \_\_\_\_$ $\qquad$ $\frac{12}{9} = \_\_\_\_$ $\qquad$ $\frac{24}{8} = \_\_\_\_$

$\frac{8}{6} = \_\_\_\_$ $\qquad$ $\frac{20}{15} = \frac{\square}{\square}$ $\qquad$ $\frac{21}{21} = \_\_\_\_$

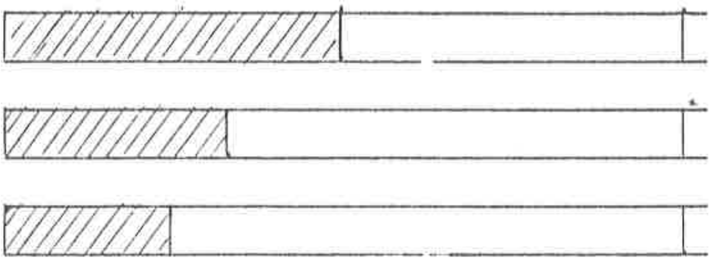
C.- Comparación de fracciones

Para este caso es bueno trabajar sobre modelos objetivos y que las unidades de material sean del mismo tamaño, para que al-comparar unidades de fracciones con numerador 1 se note fácilmente qué fracción es mayor o menor que otra dada. Luego se efectúan los ejercicios gráficos como el siguiente:

$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{3}$

$\frac{1}{4}$



Al iluminar la porción indicada se comparan esas áreas y - se observa fácilmente que:

$$1/2 > 1/3 > 1/4$$

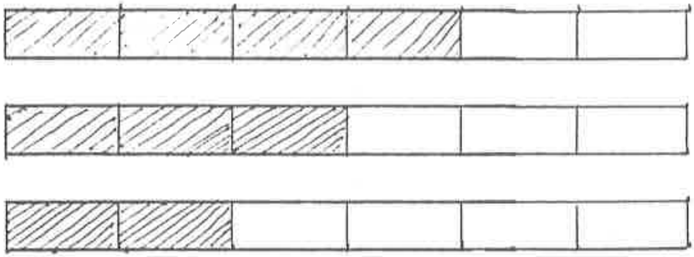
Cuando las fracciones tienen el mismo numerador, es mayor- el que tiene el menor denominador.

Dadas dos o más fracciones que tengan el mismo denominador es mayor aquella que tiene mayor numerador, obsérvese el siguiente ejemplo:

$\frac{4}{6}$

$\frac{3}{6}$

$\frac{2}{6}$



Por lo que: $4/6 > 3/6 > 2/6$ ..

Se ejercita la representación de fracciones en la recta numérica como:

$$\frac{1}{12} < \frac{1}{6} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{1}{6} < \frac{3}{4} < \frac{5}{6} < \frac{11}{12} < 1$$

Dadas dos fracciones sobre una recta numérica si ocupan el mismo punto son iguales, si están en distinto punto es mayor el- que se encuentra a la derecha.

Para saber cuál de dos fracciones con distinto numerador - es mayor o menor, se multiplican los denominadores entre sí para obtener un común denominador y se buscan sus equivalencias, ejemplo:

$$\frac{3}{4} \text{ y } \frac{4}{5} \qquad \frac{4 \times 5}{20} \qquad \frac{3}{4} = \frac{15}{20} \qquad \frac{4}{5} = \frac{16}{20}$$

Entonces podemos reemplazar estas fracciones por otras equivalentes, o sea otra representante de la misma clase.

Sabemos que: $\frac{15}{20} < \frac{16}{20}$ luego $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$

Se dan ejercicios, para practicar este tema hasta que el -- alumno haga suyo el conocimiento.

Dadas un par de fracciones indicar cuál es la mayor.

$\frac{3}{4}$ y $\frac{7}{8}$	$\frac{3}{2}$ y $\frac{4}{3}$	$\frac{3}{5}$ y $\frac{6}{9}$
$\frac{3 \times 8}{4 \times 8} = \frac{24}{32}$	$\frac{3 \times 3}{2 \times 3} = \frac{9}{6}$	$\frac{3 \times 9}{5 \times 9} = \frac{27}{45}$
$\frac{7 \times 4}{8 \times 4} = \frac{28}{32}$	$\frac{4 \times 2}{3 \times 2} = \frac{8}{6}$	$\frac{6 \times 5}{9 \times 5} = \frac{30}{45}$
$\frac{24}{32} < \frac{28}{32}$	$\frac{9}{6} \quad \frac{8}{6}$	$\frac{27}{45} \quad \frac{30}{45}$

Ordenar de menor a mayor las siguientes fracciones:(6)

3/4, 3/6, 3/8, 3/5 3/4. 6/4, 2/4, 7/4

---

(6) Secretaría de Educación Pública. Matemáticas, Quinto-grado. México, 1972. p 31-35.

CAPITULO V

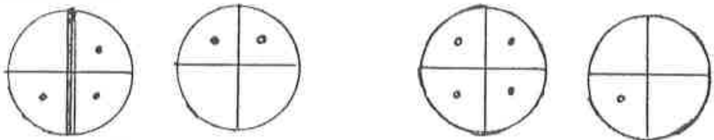
LAS OPERACIONES FUNDAMENTALES CON FRACCIONES, SUMA RESTA, MULTIPLICACION Y DIVISION

A.- Suma de fracciones

1.- Cuando se suman fracciones con el mismo denominador, se suman los denominadores y se anota como denominador el mismo.

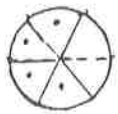
$\frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{5}{4}$ $\qquad$ $\frac{2}{9} + \frac{5}{9} =$ ____ $\qquad$ $\frac{3}{8} + \frac{5}{8} =$ ____

Aquí se debe insistir en el material objetivo y gráfico, - hasta que el conocimiento sea del dominio del alumno una vez ya- razonado.



$$\frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{5}{4}$$

2.- Cuando se suman fracciones con distinto denominador, es necesario valerse de los "representantes de una clase" en cada fracción para encontrar el denominador común y pasar a la forma anterior.

$\frac{2}{3} + \frac{1}{6}$ $\qquad$ pensar en $\frac{2}{3}$ $\qquad$ hacerlo sextos  $= \frac{4}{6}$

se efectúan ejercicios como:

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{12} = \frac{\square}{\square} + \frac{3}{12} = \frac{\square}{\square} \qquad \frac{2}{4} + \frac{3}{16} = \frac{\square}{\square} + \frac{3}{16} = \frac{\square}{\square}$$

$\frac{2}{9} + \frac{5}{27} = \frac{\square}{\square} + \frac{5}{27} = \frac{\square}{\square}$ $\frac{3}{18} + \frac{2}{6} = \frac{3}{18} + \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

3.- Algunas veces un entero y una fracción se anotan como si fuera un solo número por ejemplo: $3 + \frac{1}{4}$ se escribe $3\frac{1}{4}$, $5 + \frac{11}{17}$ se escribe $5\frac{11}{17}$, $3\frac{2}{5}$ se escribe $3\frac{2}{5}$.

Hay que recordar que cualquier entero se puede representar como una fracción ejemplo:

$1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{5}{5}$ .....

Se resuelven variados ejercicios hasta dominar el conocimiento.

$\frac{3}{6} + 1 = \frac{3}{6} + \frac{6}{6} = \frac{9}{6}$

$\frac{4}{7} + 2 =$ $\frac{2}{5} + 3 =$

$\frac{3}{8} + 4 =$ $\frac{3}{8} + 6 =$

8.- Sustracción de fracciones

Se resuelven de la misma forma que la suma sólo que en lugar de sumar se resta, es decir se respeta el signo.

1.- Cuando tienen ya común el denominador, se resuelven ejercicios como el siguiente:

$\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4}$ $\frac{3}{4} - \frac{2}{4} =$ ______

$\frac{3}{5} - \frac{2}{5} =$ ______ $\frac{6}{9} - \frac{1}{9} =$ ______ $\frac{2}{8} - \frac{1}{8} =$ ______

2.- Cuando las fracciones que se van a restar tienen distinto el denominador, hay que buscar un representante de su clase para -- que resulten de común denominador o sea equivalentes, como ejemplo el siguiente ejercicio:

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{16} = \frac{\_\_\_\_}{16} - \frac{2}{16} = \frac{10}{16}$$

$$\frac{3}{5} - \frac{1}{10} = \_\_\_\_ - \frac{1}{10} = \_\_\_\_ \qquad \frac{2}{24} - \frac{3}{8} = \frac{2}{24} - \_\_\_\_ = \_\_\_$$

Un ejercicio distinto al anterior es el que se presenta a- continuación:

$$\frac{3}{5} - \frac{2}{7}$$

$$\frac{3 \times 7}{5 \times 7} = \frac{21}{35}$$

$$\frac{2 \times 5}{7 \times 5} = \frac{10}{35}$$

$$\frac{21}{35} - \frac{10}{35} = \frac{11}{35}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \_\_\_\_ - \_\_\_\_ = \_\_\_\_$$

$$\frac{3}{7} - \frac{1}{3} = \_\_\_\_ - \_\_\_\_ = \_\_\_\_$$

$$\frac{7}{18} - \frac{1}{5} = \_\_\_\_ - \_\_\_\_ = \_\_\_\_$$

$$\frac{4}{5} - \frac{6}{3} = \_\_\_\_ - \_\_\_\_ = \_\_\_\_$$

$$\frac{3}{8} - \frac{2}{4} = \_\_\_\_ - \_\_\_\_ = \_\_\_\_$$

$$\frac{3}{9} - \frac{9}{7} = \_\_\_\_ - \_\_\_\_ = \_\_\_\_$$

3.- Sumas y restas de fracciones

Para sumar y restar fracciones se debe recordar que las - fracciones se transforman con su equivalente a un común denominador, se efectúa la operación respetando el signo, así:

$$\frac{3}{5} - \frac{2}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3 \times 12}{5 \times 12} - \frac{2 \times 15}{4 \times 15} + \frac{1 \times 20}{3 \times 20} = \frac{36}{60} - \frac{30}{60} + \frac{20}{60} = \frac{26}{60}$$

$$\frac{5}{1} - \frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{20 \times 5}{20 \times 1} - \frac{5 \times 3}{5 \times 4} - \frac{4 \times 2}{4 \times 5} = \frac{100}{20} - \frac{15}{20} - \frac{8}{20} = \frac{77}{20}$$

Estas operaciones pueden ayudar a resolver problemas como el siguiente:

En una caja hay: aguacates, mangos y limones, 1/4 del total son limones, 2/5 son mangos ¿Qué parte del total ocupan los aguacates en la caja? Entre limones y mangos son $1/4 + 2/5 = \frac{1 \times 5}{4 \times 5} + \frac{2 \times 4}{5 \times 4} = \frac{5}{20} + \frac{8}{20} = \frac{13}{20}$, si el total es 20/20 entonces $20/20 - \frac{13}{20} = 7/20$; luego la parte ocupada por los aguacates es 7/20.(1)

En estas condiciones ejercitan los alumnos el razonamiento y resuelven los problemas que se les presenten.

C.- Algunas fracciones decimales importantes

Hay algunas fracciones que tienen equivalencias muy útiles en su representación decimal como se representa en el siguiente cuadro:

Cuadro 2

Fracciones	Fracción decimal equivalente	Se lee
$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{10}$	cinco décimos
$\frac{3}{4}$	$\frac{75}{100}$	setenta y cinco centésimos
$\frac{5}{4}$	$\frac{125}{100}$	ciento veinticinco centésimos

(1) Carlos Rodríguez. Matemáticas 1. México, Ed. Mexicana, S.A de C. V., 1975 (c 1975) p. 134-143

$\frac{1}{8}$	$\frac{125}{1000}$	ciento veinticinco milésimos
$\frac{1}{3}$	$\frac{33}{100}$	treinta y tres - centésimos
$\frac{1}{5}$	$\frac{20}{100}$	veinte centésimos

Es importante que estas fracciones sean del dominio del -- alumno.

1.- Se observa que algunas fracciones de la forma a/b tienen fracciones decimales equibalentes con denominador 10 ó múltiplo de 10.

Si se tiene una expresión como la siguiente:

$$3 + \frac{4}{10} + \frac{5}{1000} + \frac{6}{100} + \frac{7}{10} = 3 + \frac{4}{10} + \frac{7}{10} + \frac{6}{100} + \frac{5}{1000} = 3 + \frac{11}{10} +$$

$$+ \frac{6}{100} + \frac{5}{1000} = 3 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{6}{100} + \frac{5}{1000} = 4 + \frac{1}{10} + \frac{6}{100} + \frac{5}{1000}$$

2.- Se puede escribir así: 4.165, de donde se tiene que:

cte. decenas unidades décimos centésimos milésimos

4 . 1 6 5

En el libro de texto se presentan ejercicios semejantes.(2)

---

(2) Secretaría de Educación Pública. <u>op. cit</u>. p. 60-67

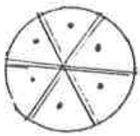
D.- Ejercicios de multiplicación

1.- Producto de un entero por una fracción

Un producto se marca con el signo "X". Pero es muy conveniente manejarlo como "de" o "veces", observando las gráficas tenemos

veces

$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} = 2 \times \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$, pero entes se debe para hallar este resultado manejarlo con objetos.



veces

$6 \times \frac{1}{6} = \frac{6}{6}$ $\qquad$ $60 \times \frac{1}{15} = \frac{60}{15} = 4$

$8 \times \frac{1}{4} = \frac{8}{4}$ $\qquad$ $\frac{1}{12} \times 48 = \frac{48}{12} = 4$

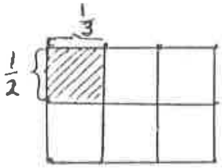
$n \times \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$ $\qquad$ $n \times \frac{1}{m} = \frac{n}{m}$

2.- La multiplicación de fracciones

Una mitad igual a un medio (1/2), si se toma la mitad de un medio, y si se manejan objetos naturales se entiende mejor que: tomar la mitad de un medio, o un medio de la mitad, como se quiera de una figura, primero (con objetos) y después gráficamente, se tiene: ejemplo:

Sombrea 1/2 de la mitad de cada figura.

En cada dibujo colores 1/3 de 1/2.

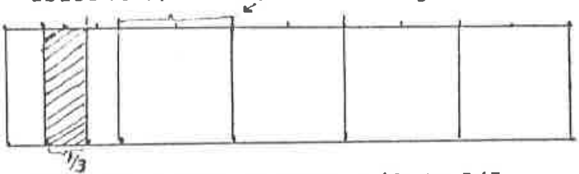


$$\overset{de}{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{\ }$$

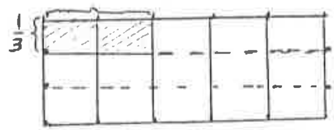
Un objeto regular hacerlo medios y tomar la tercera parte de un medio, después, después en forma gráfica y por último lo numérico.

Colorea 1/3 de 1/5 en el siguiente dibujo.



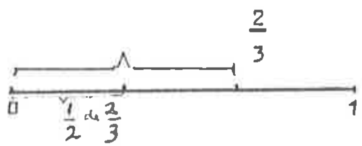
$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \text{—}$$

En este dibujo colorea 1/3 de 2/5.



$$\frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \text{—}$$

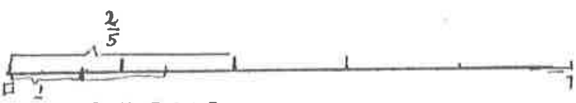
Ejercitando sobre la recta numérica $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$ (un medio de dos tercios)



$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

La mitad de 2/3 es igual a 1/3.

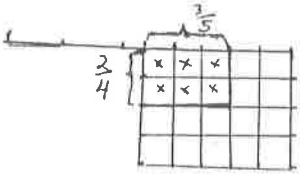
Un tercio de dos quintos.



$$\frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$$

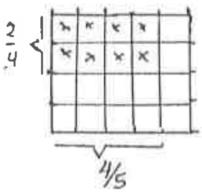
3.- Producto de fracciones con representación gráfica

Se representan $\frac{2}{4} \times \frac{3}{5}$ o sea dos cuartos de tres quintos, -- con una figura dividida en quintos, se toman tres y de ellos sus dos cuartos.



$\frac{2}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{20}$ es decir $2 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{5}$

Otro ejemplo: indicar 2/4 X 4/5



$\frac{8}{20}$, $\frac{2}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{20}$

Lo que se trata de deducir es que para encontrar un producto se opera multiplicando numerador por numerador para obtener -- nuevo numerador y denominador por denominador, para obtener nuevo denominador de tal forma que:

$\frac{3}{4} \times \frac{2}{7} = \frac{6}{28}$ $\qquad$ $\frac{10}{7} \times \frac{3}{11} = \frac{30}{77}$ $\qquad$ $\frac{4}{3} \times \frac{8}{3} = \frac{32}{9}$

$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a\ c}{b\ d}$

Se insiste en que se hagan ejercicios variados de este tipo, igualmente para todos los temas de los números racionales. Sólo- que para el mejor aprovechamiento del alumno se juzga necesario - el uso de material objetivo.

Se aplican algunas propiedades para que el alumno las observe.

$\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2 \times 1}{3 \times 4} = \frac{2}{12}$

$\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1 \times 2}{4 \times 3} = \frac{2}{12}$

Para que el alumno observe que los factores se pueden cambiar y el producto no se altera. Propiedad conmutativa.

$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{1}{2} \times \frac{8}{5} = \frac{8}{30}$

$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{36}$

Este tipo de ejercicio lleva al alumno a la comprensión de la propiedad asociativa, donde se observa que se pueden asociar dos o más factores y el producto no se altera.

4.- Inverso multiplicatico

Se trata deencontrar un número desconocido que multiplicado por un número dado se obtenga como producto la unidad. Ejemplo:

$\frac{4}{2} \times \frac{2}{4} = \frac{8}{8} = \frac{1}{1} = 1$

$\_\_\_\_ \times \frac{4}{1} = \frac{4}{4} = 1$

$\frac{3}{5} \times \_\_\_\_ = \frac{15}{15} = \frac{1}{1}$

En general a/b es el inverso de b/a a esta conclusión se llega después de variados ejercicios como el que se presenta a continuación:

Fracción	Inverso multiplicativo	Operación
3/4	4/3	3/4 X 4/3 = 1

E.- División de fracciones

1.- El cociente de fracciones. Consideremos el siguiente problema: ¿Qué número multiplicado por 3/5 da como resultado 2/3?

Planteamos así: $\_\_\_\_ \times \frac{3}{5} = \frac{2}{3}$

El número perdido es el cociente de las fracciones y escribimos: $\_\_\_\_ = \frac{2}{3} : \frac{3}{5}$

Para hallar este número utilizamos el siguiente conocimiento: $\frac{5}{3} \times \frac{3}{5} = 1$

Luego $\left(\frac{2}{3} \times \frac{5}{3}\right) \times \frac{3}{5} = \frac{2}{3} \times \left(\frac{5}{3} \times \frac{3}{5}\right) = \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3}$

Y $\_\_\_\_ \times \frac{3}{5} = \left(\frac{2}{3} \times \frac{5}{3}\right) \times \frac{3}{5} = \frac{2}{3}$

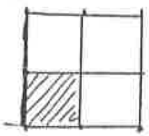
Se observa que el número bescado es: $\frac{2}{3} \times \frac{5}{3} = \frac{10}{9}$

Escribimos $\frac{2}{3} : \frac{3}{5} = \frac{10}{9}$

Esto es que para dividir fracciones se multiplica el divisor por el dividendo invertido. Se ejercita este tipo de operaciones

$\frac{6}{5} : \frac{3}{8} = \frac{6}{5} \times \frac{8}{3} = \frac{48}{15}$ $\qquad \frac{5}{11} : \frac{4}{3} = \frac{5}{11} \times \frac{3}{4} = \frac{15}{44}$

¿Qué parte es un cuarto de un medio?



$\frac{1}{4} : \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \times \frac{2}{1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

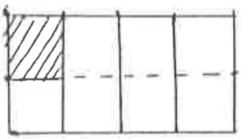
Se practica esta clase de ejercicios objetiva, gráfica y numéricamente.

F.- La multiplicación y la división de fracciones en la resolución- de problemas

1.- Resolución de problemas con intervención de fracciones

Con el conocimiento que se tiene de las fracciones se pue-- den resolver algunos problemas como el siguiente:

Esto es la mitad de un cuarto, si se puede, debe hacerse objetivamente, después por medio de gráficas y por último con números.



$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

Considérese el siguiente problema:

2/5 partes de alumnos de una secundaria están en primer -- año, 4/7 partes en segundo año ¿ Cuántos son los alumnos que están en tercer grado, si en total la escuela cuenta con 840 alumnos7

$$\frac{2}{5} \times \frac{840}{1} = \frac{1680}{5} = 336 \qquad \frac{4}{7} \times \frac{840}{1} = \frac{3360}{7} = 480$$

$$840 - (336 + 480) = 840 - 816 = 24$$

Los problemas del libro de texto están muy bien para que - el alumno ejercite su imaginación y obtenga el conocimiento. Si el alumno practica este tipo de problemas obtiene los conocimientos y confianza en sí mismo.

2.- Problemas de división con fracciones

Al tener conocimiento del método para dividif fracciones,- éstas deben ejercitarse para precisar el conocimiento y pueda --

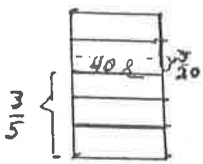
ser aplicado a la resolución de problemas que se presenten.

Hay que recordar que cuando se dividen dos fracciones como 3/4 : 2/5, el resultado es la fracción que se obtiene de multi - plicar el divisor por el inverso del dividendo, ejemplo:

$$\frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{8}$$

Esto ayuda a resolver problemas como el siguiente:

Un tinaco se encuentra a 3/5 de su capacidad, si se le -- agregan 40 litros contiene 3/4 de su capacidad total.¿Cuántos li tros le caben al tinaco?



$$\frac{3}{4} - \frac{3}{5} = \frac{3X5}{4X5} - \frac{3X4}{5X4} = \frac{15}{20} - \frac{12}{20} = \frac{3}{20}$$

$$40 : \frac{3}{20} = \frac{40}{1} \times \frac{20}{3} = \frac{800}{3} = 266.66 \text{ l.}$$

Conviene hacer variados ejercicios hasta que el conocimien to sea del dominio del alumno. Los problemas del libro de texto- son muy razonables para este fin. (3)

---

(3) Secretaría de Educación Pública. <u>op. cit</u> p. 285-270, - 213-214

CAPITULO VI

LA DIDACTICA DE LAS MATEMATICAS

A.- En las etapas de la vida desde la infancia, adolescencia, juventud, se enseña y se aprende lo mismo, sólo que cada vez más amplio y de manera distinta según el grado de preparación.

En la Didáctica Magna, Comenio (1) expresaba que se expusiera el texto para todos a la vez, distinguía estratos de acuerdo con la edad y cada estrato tenía su programa de instrucción - se trataban los mismos temas; pero de diversas formas a la medida de la comprensión de los alumnos.

La cultura se forma, según Comenio de modo tal, que lo que se aprende hoy tenga base en lo que se aprendió antes y el conocimiento actoal abra la senda para nueva cultura en el futuro.

Actualmente la instrucción se lleva por ciclos (método cíclico) con un sistema hipotético-deductivo.

Los alumnos deben interacbionar, para que por dibersas formas descubran y elaboren su conocimiento y obtengan una instrucción verdadera y educativa a través de la ejercitación, que intuya, que genere energía activa, para que llegue a un conocimiento claro de todo aquello que entra en el círculo de sus experiencias.

Enrique Pestalozzi (2) en su obra"Cómo Gertrudis instruye-

---

(1) Emma Castelnuovo. Didáctica de la Matemática Moderna. - México, Ed. Trillas, p. 15 y 16

a sus hijos", habla de actividad, energía activa y de instrucción.

Pestalozzi la intención nace del trabajo en el sentido de - una operación. La intuición es una construcción, el conocimiento- llega a través de los sentidos.

Para ser objeto de comprensión, primero debe ser objeto de- sensación, mediante la experiencia directa y la actividad, luego- concebir a través de los sentidos para que nazca el concepto cla- ro y universal.

B.- Los principios de la metodología científica con Decroly y Monte-- ssori (3)

A principios de nuestro siglo, estos autores señalaron una- línea de acción para la enseñanza de las materias científicas.

Como ejemplo de la aplicación de esta metodología se da el- caso de "la adquisición del concepto de número natural". Se tie- ne como antecedente que el niño de ahora en muchos aspectos, es - un hombre pequeño habituado a los inventos modernos y los conside ra como patrimonio natural, pero respecto al número, la relación- de apareamiento de los objetos o cosas con los símbolos numéricos que los representa se encuentra igual que los niños de los pue- - blos primitivos.

En las metodologías antiguas para la enseñanza de los núme- ros naturales, se mostraba su esquema de cada uno, no había pros- perado la idea del continuo en cuanto a que cada número natural -

---

(2) Emma Castelnuevo. op. cit. p.16.

(3) Ibid. p. 17

tiene su sucesor, era una Didáctica basada en la percepción de las transformaciones y operaciones, el concepto de intuición se da como contemplación, no como construcción activa.

El mérito Montessori y Decroly es el haberse inspirado en la concepción Pestalozziana de la intuición y haberla desarrollado por la Didáctica de cada disciplina y en particular de las matemáticas.

En el proceso mental con que el método Montessori hace trabajar al niño con materiales (reglillas de distintos colores y tamaños) para la enseñanza de los primeros dígitos, números naturales, comparando colores y tamaños hace superposiciones y sumas pequeñas.

Con este procedimiento hay: percepción de imágenes, construcción y se opera, es un método activo-sintético.

El método Decroly es operativo, difiere del Montessori por la idea de los medios de operación. La mente del niño no es ~~ata~~ atraída por el detalle del elemento, pero sí da una vista al conjunto. Decroly no pone en la mano del niño material para construir, sugiere los fenómenos naturales adecuados que conduzcan a la observación analítica, de la observación global conduce a la descomposición de los fenómenos y al análisis, es el método activo-analítico.

Con Pestalozzi el niño no es libre, pero es guiado si no por el material, por el maestro.

C.- Jean Piaget y su Didáctica Psicológica (4)

---

(4) Emma Castelnuovo. *op. cit.* p. 18-24 y 28

Justamente la libertad de la construcción matemática que - quiere alcanzar la metodología, está basada en la experiencia - psicológica del suizo Piaget, para él el material no debe servir de tema, para hacer sentir la necesidad de número, el material - debe servir en el desarrollo de ciertas leyes que después será - necesaria en la adquisición de un conepto matemático.

Esta teoría la experimentó con millares de niños.

Una conclusión de Piaget es que el niño hace relación con- lo real según su experiencia; el adolescente hace referencia a - lo que ha visto realizado en la experiencia y por eso se mueve - en u sistema hipotético-deductivo.

Como se nota entran en juego varios métodos en la generalidad del conocimiento y para el estudio de las matemáticas, éstas formas de enseñanza son procedimientos que están dentro de lo - normal para ser usados por el maestro y así encausar mejor el conocimiento hacia sus alumnos quienes lo practican en forma directa.

D.- Cuáles matemáticas debemos enseñar

1.- El concepto de fracción

Se reflexiona en cómo sería abstracto el concepto de fracción, para la mayoría de las poblaciones primitivas, la necesidad de introducir este símbolo a/b que ya se sentía hacia el año 1600 a. de C. El Papyrus Rhin da testimonio de una crisis que -- despertó la inteligencia de los egipcios, son problemas que revelan interrogantes de divisiones con partes iguales, ejemplo: como repartir dos panes entre cinco personas.

La humanidad no podía seguir utilizando sólollos números -

naturales; pero se había evitado siempre el símbolo de fracción-sustituyéndolo con una suma de unidades fraccionarias, los milenios que han transcurrido han convertido a este símbolo operatorio en patrimonio de una buena parte de la sociedad.

Ahora se despierta el interés por llevar al alumno a la --comprensión de los problemas de la vida diaria, se aparta de los números naturales al hacer posible la operación de división y para lograrlo se usó el símbolo ($a:b$, $\frac{a}{b}$, $b\overline{)a}$).

2.- Paso de lo concreto a lo abstracto

La edad juega un papel muy importante en las estructuras -mentales del niño, así como la influencia que recibe del medio -ambiente en el que se desarrolla.

La fuerza ambiental se ejerce; el niño en la ciudad se habitúa más fácilmente a la vida moderna, por eso está más desarrollado y preparado para los conceptos abstractos. Si los niños -de pueblos atrasados son educados e instruidos, adquieren las -mismas facultades que el citadino intelectualmente hablando.

Las clases sociales sí tienen un desarrollo más lento por-lo que se refiere a las menos cultas, en las facultades de abs--tracción.

3.- Fracciones

Uno de los conceptos más difíciles para el alumno es el de fracción. Las causas y las razones de los fracasos didácticos,-obedecen a una enseñana que no sigue una metodològía adecuada a la edad del niño.

Los fracasos son sobre el plano concreto y el concepto de fracción usada en la práctica. El alumno requiere de infinito - número de ejercicios sobre números fraccionarios, sin la práctica el educando no acierta en un momento dado a decir el valor de una diferencia de fracciones.

Pensar que un tercio más dos sextos es igual a dos tercios e incluso que 2/4 + 2/4 = 1; pero si se le llama la atención sobre un problema concreto; si se le dice 1/2 + 1/4 es la cantidad de carne que quiero comprar, fácilmente dará los resultados, desapareciendo la dificultad del cálculo, como si fuera a sumar objetos conocidos. Esto sucede con frecuencia y se concluye que la enseñanza de las fracciones va de lo conreto a lo abstracto hasta que el alumno se familiarice.

El niño se aferra al mecanismo, no tiene en cuenta el valor de cada símbolo, ni el por qué de las operaciones.

Se propone estudiar cómo las relaciones de fracción y de - número se introducen sucesivamente en forma espontánea y que el- alumno comprenda el campo de los números naturales y que tenga - una clara visión del conjunto de los racionales. Con los números fraccionarios se hace posible la división; pero desde un punto de vista didáctico se principia con las fracciones como "operadores" sobre magnitudes, dando con ello lugar a las operaciones fundamentales y al operar en la recta numérica se reflejan - algunas leyes de la suma y la multiplicación, como se observa -- más adelante.

a).- La fracción como operador sobre magnitudes

Las dificultades que se encuentran en el concepto de fracción como "operador" sobre una magnitud, se debe al hecho que la

Fracción m/n lleva a fijar la atención a tres actos operativos: dividir en partes iguales el entero, tomar m de estas partes y- considerarlas respecto al entero. Con el fin de facilitar la -- comprensión del símbolo m/n es quizá como podemos eliminar del- pensamiento una de las tres operaciones, se insiste en el significado de m/n, n como suma de partes iguales de la unidad, ejemplo:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} \qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

aquí n = 2

(dos partes iguales)

$$\frac{2}{n} - \frac{1}{n} = \frac{2 - 1}{n} = \frac{1}{n}$$

Se tienen las fracciones 1/n + 1/n ..... pensamos que tales unidades sean ya dadas, así se evita la atención en la primera operación, se divide el entero en partes iguales.

Otro ejemplo frente a la fracción de 3/4 (Fig. 1 a), el - alumno considera los cuartos como si fueran objetos y de éstos- toma tres como tomar tres plumas o tres monedas; así, efectúa - la operación de suma de partes iguales, no ve ni siquiera el entero, su atención está fijada en el número de partes.

La proposición "sobre" es dada al significado original de m/n (cualquier fracción) ejemplo: "2 sobre 13+; 2/13, los egipcios en el papiro Rhin expresan 2/13, éso es ver cuántas veces- está 2 respecto a 13. Se trata de una cuestión de simple len-- guaje, pero muy a menudo es el lenguaje el que dirige el pensamiento.

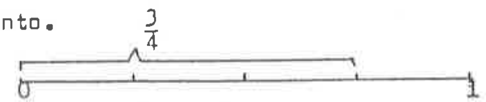


Fig 1 a

Se comienza por ejercitar a los alumnos con experiencias -concretas, con material, con dibujos, con construcción de magnitudes iguales a 1/n, medios, tercios, cuartos, etc., siendo n --cualquier número.

No serán jamás demasiado numerosos los ejercicios que se -lleven a la acción manual de dividir un entero en un número de n partes iguales, para tomar m de esas partes.

Por acción manual se entiende operar sobre el material o -figuras geométricas dibujadas, como un segmento, así la fracción 3/4 indica que debe dividir el entero en cuatro partes iguales y tomar tres, siendo el entero un segmento, también se puede lle - gar a un mismo resultado con "acciones manuales diversas", dividiendo por ejemplo en ocho partes iguales la unidad y tomar seis o bien en doce partes iguales y tomar nueve observando que representan la misma porción de una recta numérica.

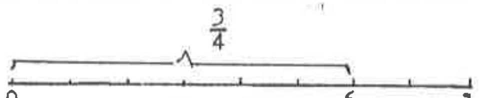


Fig. 1 b

El alumno podrá imaginar cada parte dividida a la mitad y-decir que si el entero fuese de veinticuatro partes, se dará --cuenta que el "operador" 3/4 se expresa también con 18/24.

Fig. 2 a

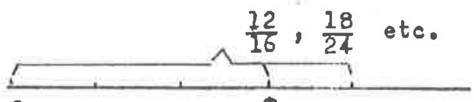


Fig. 2 b

Pero la parte podría también subdividirse y por un proceso de abstracción, el alumno entenderá que todas las fracciones como 3/4, 6/8..... 36/48, etc., producen igual efecto que 3/4 y se conduce a escribir la igualdad: 3/4 = 6/8 = 9/12,... etc. Son escrituras distintas que representan el mismo "operador". El educando debe descubrir las leyes de composición (adición y multiplicación) de estos "operadores". La adición 1/2 + 1/4, se dice que es el resultado obtenido al aplicar una magnitud a otra, ejemplo. Al segmento $\overline{AB}$ el "operador" 1/2 ó 1/4 (Fig. 3)

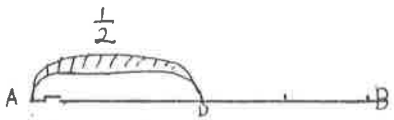


Fig. 3 a

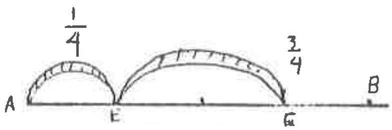


Fig. 3 b

El esquema gráfico de la figura 4 representa el segmento $\overline{AC}$, como suma de $\overline{AD}$ y $\overline{AE}$ se obtiene directamente con el operador 3/4 que la suma de los operadores 1/2 y 1/4; ya se puede escribir: 1/2 + 1/4 = 3/4

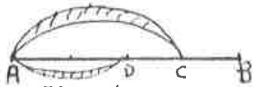


Fig. 4 a

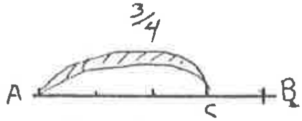


Fig. 4 b

Se dice a los alumnos que operen con dos fracciones sobre una misma magnitud de modo que la segunda actúe sobre el resultado de la aplicación de la primera, ejemplo: aplicando la fracción 3/4 sobre $\overline{AB}$ se obtendrá $\overline{AC}$ y al aplicar la fracción 2/3 sobre $\overline{AC}$ se obtiene el $\overline{AD}$.

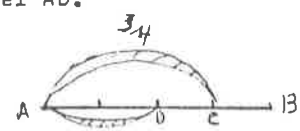


Fig. 5

El alumno descubrirá que como si hubiese operado sobre $\overline{AB}$-

con la fracción 1/2, así se define otra operación que es la multiplicación, que se escribe:

$2/3 \cdot 3/4 = 1/2$

1/2 es el producto "operador" de los "operadores" 2/3 y -- 3/4, estos operadores gozan de las propiedades conmutativa y asociativa. Es fácil para los alumnos comprender el "operador" in-- verso y ver que el producto de dos operadores inversos el uno -- del otro es igual a uno, ésto da como resultado la magnitud misma de donde se parte.

Es un problema de carácter práctico el que obligó a la humanidad a extender el campo de los números. El niño comprende la dificultad que es el problema mencionado de dividir tres panes - entre cuatro personas, ésto no se resuelve dentro del campo de - los números naturales, pero se puede seguir un "apoyo visual" para las operaciones que debe efectuar. Dibujar tres panes con -- tres segmentos iguales uno en seguida del otro como se indica en la recta numérica siguiente:

El alumno observa que dividiendo el segmento largo el -- cual representa la suma de los tres panes divididos entre cuatro obtendrá los 3/4 de algún pan.

Otro ejemplo: 7 naranjas entre 11 personas obtendrá como - resultado la división 7 : 11, es decir el cociente de 7/11. Estos resultados dejarán impresionado al niño ya que al resolver - un problema particular, ha descubierto una regla general m:n=m/n entonces se considera que la fracción es el cociente de una división. Las fracciones 3/4 y 7/11 obtenidas como resultado en las divisiones anteriores 3:4 y 7:11 pueden considerarss como números; ya que con estos símbolos se pueden efectuar operaciones. - Pensar en la adición y reflexionar, se puede sumar por ejemplo - 3/4 y 2/5, se piensa en 3/4 como la forma 15/20 y 2/5 como 8/20, se pasan las dos fracciones a un común denominador, se comprende entonces que 3/4 no es un número, pero está representado por infinitas designaciones, infinitas formas equivalentes bajo las -- cuales pueden representarse "3/4" como son 6/8, 9/12 .... etc. Será ahora la representación 9/12 ó 12/16 ...., lo que se debe - escoger para efectuar una adición. No es 3/4 el número, el número es "la clase de equivalencia 3/4". El número fraccionario es- una clase de equivalencia. Se trata en efecto de tomar la igualdad, la invariante en símbolos aparentemente distintos.

4.- El conjunto de los números racionales

Las representaciones infinitas de los números equivalentes son una clase de equivalencia, entonces los números fraccionarios también los son.

A veces el cociente de una división es un número entero, - ésto es cuando el dividendo es múltiplo del divisor, su clase está formada por fracciones equivalentes a un entero, de donde se aprecia que también los números enteros tienen infinitas representaciones, por ejemplo:

3 = 15 15 = 18/6 = ...

Los números fraccionarios y los números enteros forman el conjunto de los números racionales.

113612

El niño debe trabajar con fracciones de términos pequeños y de ser posible representar cada fracción con modelos objetivos como en la recta numérica para tener un apoyo visual.

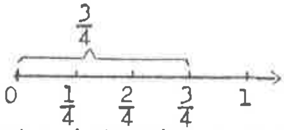
CAPITULO VII

Resultados

Es importante conocer el origen de los símbolos numéricos y su estructura ya que son las herramientas del tema en cuestión en esta Investigación se encuentra disponibilidad, ahorro de esfuerzo y tiempo para la comprensión, manejo y operación en los números racionales por parte del maestro y el alumno, lleva el fin de mejorar el desarrollo intelectual principalmente para él el hacer uso de modelos objetivos, gráficas y en forma numérica, se cumplen propósitos universales y lógicos por medio de la matemática conlleva la preparación del alumno en otras ramas del saber a la altura de su grado escolar que cursa, utiliza métodos adecuados y le ayuda a resolver problemas que la vida le presenta.

Los números racionales son de la forma $\frac{\square}{\square}$, $\square.\square$ usa símbolos del sistema de los enteros y del sistema de los naturales, tiene la única condición que siendo de la forma m/n, $n \neq 0$.

Los números racionales son pares de enteros que se representan en distintas formas como: m/n, n/m, $m:n$. En estas fracciones se distinguen sus elementos, m/n; m/n se llama numerador e indica las partes que se toman; n se llama denominador e indica las partes en que se divide la unidad como un todo. Toda fracción común es una división indicada. Así la fracción $3/4$ se lee tres cuartos, el denominador indica, ya sobre una recta numérica que la unidad se divide exactamente en cuatro segmentos iguales y el numerador indica que se toman tres segmentos de los ya dados como en seguida se ilustra:



En estos conceptos intervienen modelos objetivos que son indispensables porque dan ideas básicas para el desarrollo del aprendizaje, se acompaña de una ejercitación continua y suficiente para que se llegue al dominio.

El alumno conoce las conversiones de las diferentes representaciones de un número racional como quebrados, mixtos, impropios, decimales así como sus equivalencias, con el desarrollo de estos temas.

Todas las equivalencias de una fracción son "nombres para un mismo número" y cada una es representante de su clase.

Con los representantes de esa clase ya se pueden efectuar sumas y restas al pasar a un común denominador.

Una fracción decimal tiene como denominador diez o sus múltiplos como: 3/10, 4/100, 8/1000, etc., y el alumno las conoce.

Antes de que el alumno efectúe operaciones con fracciones, él tiene muy bien fundamentados los conceptos preliminares, y tiene precisos los bloques lógicos del razonamiento, ya que ha utilizado todos los medios intuitivos posibles. Conoce el principio de tricotomía al efectuar los productos cruzados en cada par de fracciones, o son iguales o cuál par es mayor o menor y sabe usar los símbolos respectivos.

$\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{5}$ productos cruzados $\overset{15}{\frac{3}{4}}$ y $\overset{8}{\frac{2}{5}}$ $\begin{matrix} 3 \times 5 = 15 \\ 4 \times 2 = 8 \end{matrix}$ $3 \times 5 > 4 \times 2$

Aquí el alumno obserava que el número entero 15 es mayor - que el entero 8 de donde obtiene: $\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4} > \frac{2}{5}$.

Sabe que dados dos puntos (a y b) en una recta numérica - siempre es mayor el que se encuentre más a la derecha como el - ejemplo siguiente

b > a

Dadas dos fracciones 3/5, 2/4 en este caso las dos tienen- representación en veinteavos entonces $\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$ y $\frac{2}{4} = \frac{10}{20}$ de donde- se obtiene $\frac{3}{5} + \frac{2}{4} = \frac{12}{20} + \frac{10}{20} = \frac{22}{20}$ $\frac{3}{5} - \frac{2}{4} = \frac{12}{20} - \frac{10}{20} = \frac{2}{20}$

Ya se resuelven operaciones al tener este conocimiento de - fracciones con suma y resta.

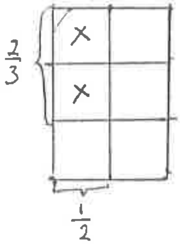
Para la multiplicación de fracciones el signo puede ser X o (.) o también las palabras "por"o "de", como en:

$$\frac{1}{2} \overset{\substack{\text{de} \\ \text{por}}}{\times} \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

donde antes de lo gráfico es un modelo objetivo concreto. El --- alumno hace ejercicios y concluye que, para multiplicar dos fracciones se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador y se encuentra la nueva fracción solución como:

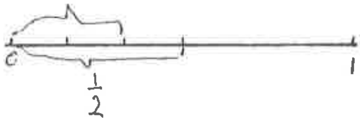
$$\frac{3}{7} \times \frac{2}{12} = \frac{6}{84} = \frac{3}{42} = \frac{1}{14}$$

es razonable, el alumno practica la multiplicación de fracciones en la recta numérica y en gráfica rectangular como las siguientes:

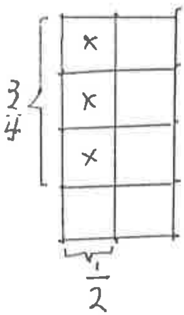


$\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$ de $\times$ $\frac{2}{3}$ = $\frac{2}{6}$ = $\frac{1}{3}$

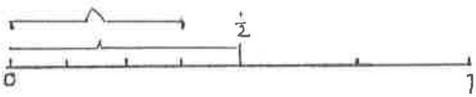
$\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$



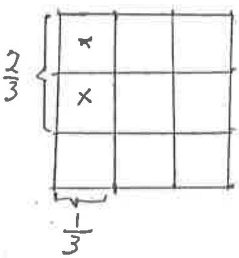
$\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{2}$ = $\frac{2}{6}$ = $\frac{1}{3}$



$\frac{3}{4}$ de $\frac{1}{2}$ = $\frac{3}{4}$ de $\times$ $\frac{1}{2}$ = $\frac{3}{8}$



$\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4}$ = $\frac{3}{8}$



$\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{3}$ = $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}$ = $\frac{2}{9}$

$\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{3}$ = $\frac{2}{9}$

El alumno practica el inverso multiplicativo de una frac -- ción ya que es de mucha importancia en base para razonar sobre el proceso de la división. Sabe que es una fracción multiplicada -- por su inverso, que tiene como resultado o producto la unidad, -- ejemplo: $\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{12}{12} = 1$

Al final él ya comprende y practica, sabe que para dividir- dos fracciones se multiplica el divisor (primera fracción) por el dividendo (segunda fracción), ésta última invertida ejemplo:

$\frac{3}{4} : \frac{2}{8} = \frac{3}{4} \times \frac{8}{2} = \frac{24}{8}$ $\qquad$ $\frac{3}{5} : \frac{2}{1} = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$

Al adquirir estos conocimientos el alumno ya sabe resolver- operaciones de dividir, multiplicar, restar y sumar números racio nales y con ellos resolver los problemas que se le presenten en - relación a este sistema de numeración.

En matemáticas se utilizan métodos como: el reflexivo, -- pues cada paso dado debe ser bien reflexionado; el cíclico, ya -- que cada conocimiento se va ampliando de acuerdo con el grado que- se cursa; el deductivo porque al resolver casos particulares se - deduce una generalización; es el método intuitivo porque el alum- no se hace del conocimiento a través de todos los sentidos posi-- bles; usa método activo al hacerse del conocimiento mediante las- actividades que el alumno despliega; participa también el método- experimental ya que en el proceso del conocimiento se experimenta con varios objetos y de diferentes formas; utiliza el método cons tructivo porque con materiales diversos y diferentes gráficas -- construye y elabora el conocimiento; usa el método sintético porque algunas veces parte de unidades para dividirlas en partes -- iguales y así va del todo a las partes, también se utiliza el método de la observación analítica.

La mente del niño se desarrolla al observar un conjunto de cosas como un todo.

Se da la libertad de la construcción matemática con la teoría psicoanalítica.

El niño se relaciona con lo real según sus experiencias.

El adolescente se refiere a lo realizado en su experiencia por eso se mueve en un sitema hipotético-deductivo.

La importancia de la matemática reside en que el conoci -- miento pasa de lo concreto a lo abstracto.

La edad juega un papel muy importante en las estructuras - mentales del niño y está influído por el medio ambiente. Si los niños de pueblos atrasados son educados e instruidos, adquieren- las mismas facultades que el citadino.

Hay un desarrollo más lento en la clase social menos culta en lo que se refiere a las facultades de abstracción.

Las causas y la razón de los fracasos didácticos son sobre el plano concreto.

El alumno requiere de infinitos ejercicios sobre las expresiones de números fraccionarios.

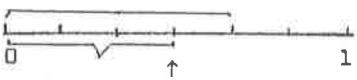
Al alumno le desaparece la dificultad del cálculo cuando - se le habla de cantidades concretas como éstas: Trae un medio kilo de azúcar para tu tía y un cuarto para mí, se da cuenta fácilmente que la suma total son tres cuartos; pero se aferra al mecanismo, no tiene en cuenta el porqué de los símbolos ni de las -

operaciones. Para entender los números racionales el alumno entiende primero el campo de los naturales, así para dividir una fracción primero debe entenderlo como partes enteras iguales ejemplo: en 3/4 considera los cuartos como si fueran objetos y toma tres, porque su atención se fija en el número de partes. Otro ejemplo es dividir 2/13 que implica ver cuántas partes compone 2 respecto a 13, esto se facilita dibujando una recta numérica así:

El alumno ejercita con experiencias concretas y nunca son demasiados los ejercicios que se llevan a la acción manual de dividir enteros en partes iguales para obtener una de estas partes se entiende que la acción manual es operar sobre material o figuras geométricas dibujadas tales como un segmento.

En operaciones como éstas se tiene (volviendo a la multiplicación y tomando los términos como operadores), ejemplo:

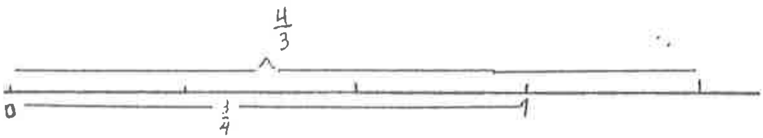
1/2 es el producto operador, de los operadores 2/3 y 3/4, el alumno resuelve con recta numérica así:



$\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{3} = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{12} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

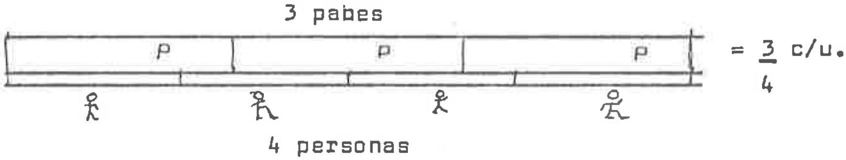
Con este tipo de ejercicios deduce la multiplicación.

Después de variados ejercicios el propio alumno comprende el operador inverso cuyo producto es la unidad como en el siguiente caso:



$$\frac{3}{4} \text{ de } \frac{4}{3} = \frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{12}{12} = 1$$

El escolar resuelve problemas como éste: si se reparten -- tres panes entre cuatro personas, se sigue un apoyo visual para- efectuar las operaciones como se expresa:



De donde se obtiene que a cada persona le corresponde 3/4.

Al resolver un problema particular ha descubierto una re-- gla general y se familiariza al considerar que toda fracción es- el cociente de una división. El alumno trabaja con fracciones - de términos pequeños y en lo posible representa cada fracción en recta numérica y/o gráfica para tener un apoyo visual.

Conclusiones

El estudio de las matemáticas es indispensable en la actualidad.

Es necesario encontrar el camino más corto y ahorro de esfuerzo para comprender, manejar y operar con los números del conjunto de los racionales.

Entrar en el conocimiento de las operaciones con números - racionales enseña a coordinar el razonamiento en forma lógica.

Utilizando métodos adecuados, el alumno avanza a paso más- firme en el dominio de este conocimiento matemático.

Los números racionales tienen varias representaciones, un par ordenado de enteros con representación racional puede ser: - $\frac{a}{b}$, a:b, b/$\overline{a}$ y el alumno debe conocerlos.

Es importante que conozca los elementos que integran una - fracción y el significado de los mismos en a/b, a numerador y b denominador.

El alumno debe estar familiarizado con las diferentes formas de representación de números racionales y saber manejarlos - en las diversas operaciones, saber representarlos gráficamente - en forma rectangular, triangular, circular y en la recta numérica; además manejar muy especialmente las equivalencias y la idea bien fija del inverso multiplicativo.

El alumno así mismo debe realizar ejercicios sencillos y - maniobrar objetos para dividirlos en partes iguales, asícomo -- formas gráficas, segmentos de recta para llegar a lo numérico.

El alumno aprende a realizar operaciones y con ello resuelve los problemas referentes al campo de los racionales.

Alternativas de solución

En función a mi asunto los alumnos no aprenden porque:

1.- Hace falta que el maestro ejercite más al alumno en el tiempo necesario sobre modelos manuales objetivos (material que- brinda la naturaleza, objetos de uso en el hogar, papelería, etc)

2.- El maestro se desespera al ver lo heterogéneo del grupo que atiende referente al avance del conocimiento, el docente-debe ser paciente en este aspecto.

3.- Para que haya un avance efectivo en estos temas es necesario tener salud, asistencia al curso, deseos de enseñanza-aprendizaje, comprensión y estar alejado de los problemas familiares, sociales, políticos, económicos, etc., tanto el maestro como sus alumnos.

4.- Es necesario que el maestro se actualice y que vaya a la par con los descubrimientos de la ciencia, por lo menos en su campo de acción.

CAPITULO VIII

EL PROCESO DEL DESARROLLO DE ESTE TRABAJO

El problema de estudio es "la función de los modelos objetivos en la comprensión y el conocimiento de los números racionales en quinto grado de Educación primaria".

El problema nace en el medio rural, al observar que un gran porcentaje de alumnos del tercer ciclo presentan altas deficiencias en el manejo de los números racionales y sus operaciones diversas.

El problema se dirige a quinto año pensando en que aún le faltan dos años para terminar su educación primaria y además en esa edad los alumnos tienen facultades de razonar, pensando ya en su formación personal viendo hacia el futuro.

Para definir el tema concebí su significado al plantear el problema motivo de estudio, en atención a que los modelos objetivos se relacionen con objetos naturales, para que el alumno los maneje en forma concreta esperando con ésto que desarrolle mejor sus bloques lógicos de comprendión y de razonamiento.

Con ese nombre para el problema de estudio, quedan clarificados sus fines y para el desarrollo del trabajo hubo necesidad de formular un diseño donde se manejan los antecedentes del problema planteado.

La definición de los términos, la justificación del tema con su delimitación, los objetivos que se persiguen y las limitaciones que tiene el presente trabajo, son partes del diseño que sirvió de guía para hacer las consultas de varias obras.

Va en el desarrollo del trabajo en sí, lo primero fue conseguir varias fuentes de consulta en cuyo contenido se encuentran aspectos del tema elegido, así como algunas didácticas de la especialidad y lecturas sobre Tecnología educativa, así se procedió a localizar dentro de las obras este tema y todo lo concerniente a él.

Tomé notas después de revisar los contenidos respectivos con el fin de hacer una selección y formar los capítulos, anotando el contenido teórico-conceptual que me sirvió para fundamentar el trabajo y ordenar de acuerdo al esquema elaborado.

Costó este trabajo varias noches de desvelo y muchas dificultades para su redacción, así como un desembolso económico considerable y sacrifico de mis vacaciones.

Conté con la comprensión de mi familia que sacrificó todo, apoyándome para salir adelante.

APENDICE

GLOSARIO

Abstracción:
Enajenarse de los objetos sencibles para darse únicamente a la consideración intelectual.

Adolescencia:
Edad que sucede a la niñez.

Análisis:
Separación de las partes de un todo, hasta llegar a conocer -- sus principios o elementos.

Analítico:
Perteneciente al análisis.

Cíclico:
Relativo al ciclo.

Ciencia:
Conocimiento cierto de las cosas por sus principios y causas.

Compete:
Que incumbe alguna cosa.

Concebir:
Formar en la mente idea o conepto de unacosa; comprenderla.

Concepto:
Pensamiento expresado en palabras.

Deductivo:
Sacar consecuencia de un principio, proposición o supuesto.

Delimitación:
Fijar los límites de una cosa, depurar o aclarar.

Didáctica:
Es el arte de enseñar.

Docente:
Relativo a la enseñanza.

Dominio:
Poder usar y disponer de lo suyo libremente.

Experiencia:
Se adquiere con el uso de la práctica.

Experimental:
Se funda en los experimentos.

Fenómeno:
Toda apariencia o manifestación de orden material.

Función:
Dependencia que cumplen las condiciones del análisis.

Gráfica:
Es la descripción de operaciones y demostraciones representadas por medio de figuras, signos o dibujos.

Hipotético:
Se refiere a una hipótesis planteada.

Imágenes:
Figura, representación o apariencia de una cosa limitada por el dibujo.

Instrucción:
Caudal de conocimientos adquiridos.

Intuición:
Conocimiento claro por medio de los sentidos.

Inverso:
Que está invertido.

Investigación:
Se refiere a la acción de investigar.

Lógico:
Que se produce de acuerdo a las leyes del pensamiento.

Método:
Modo de hacer con orden una cosa para llegar a un resultado o un fin determinado.

Metodología:
Es la ciencia que estudia los métodos.

Modelos:
Ejemplar que se propone y sigue como objeto de imitación.

Numerales:
Se refiere al número.

Objetivos:
Todo lo que puede ser materia de conocimiento.

Bercepción:
Efecto de sensación interior que resulta de una impresión material hecha a nuestros sentidos.

Porción:
Cantidad segregada de otra mayor.

Primos:
Son los números que sólo pueden ser divididos entre ellos mismos y la unidad.

Racionales:
Expresión algebraica que no contiene cantidad irracional.

Razonamiento:
Serie de conceptos encaminados a demostrar una cosa.

Reflexivo:
Que se acostumbra a meditar para hablar con reflexión.

Senda:
Camino estrecho como vía del saber.

Sensación:
Impresión que las cosas producen a nuestros sentidos.

Símbolos:
Figuras con que se representan algunos conceptos.

Sintético:
Relativo a la síntesis, que pasa de las partes al todo.

Tarja:
Palo partido longitudinalmente.

Tema:
Asunto que versa un escrito.

BIBLIOGRAFIA

CASTELNUOVO, Emma. Didáctica de la Matemático Moderna. Tr. Felipe Robledo Vázquez. México, Ed. Trillas, 1984 (c 1970) -- 210 p.

DICCIONARIO General de la Lengua Española Tomo I. Adapt. por - José Antonio López Martínez. Madrid. España, Ed. del Valle- de México, S. A., 1976 836 p.

DICCIONARIO Pequeño Larousse. 3 ed., México., Ed. Larousse, - 1963 1660 p.

GARZA MERCADO, Ario. Manual de Técnicas de Investigación. 2 ed. México, Ed. El Colegio de México, 1978 (c 1972) 187 p.

MUNGUIA ZATAIN, Irma y José Manuel Salcedo Alquino. Redacción e Investigación Documental I. 2 ed., México, Ed. SEP., 1985 - 233 p.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHER OF MATHEMATICS. Los números Racionales. V 6, México, Ed. Trillas, 1973 (c 1968) 88 p.

PALMER et.al. Matemáticas Prácticas. Tr. de Pilar Pereda Vinvesa 2 ed., España, Ed. Reverté, 1975 548 p.

PETERSON, John A.y Josep Hashisaki. Teoría de la Aritmética. - México, Ed. Limusa, 1975 (c 1969) 384 p.

SECRETARIA DE EDUCACION PUBLICA. Matemáticas I. Licenciatura en Educación primaria. México, Ed. Mexican S. A. de C. V. 1975 (c 1975) 360 p.

______. Matemáticas quinto grado. México, Ed. SEP. 1972 (c 1972) 274 p.

SERRALDE MARQUEZ, Eulalio. et. al. Matemáticas 1. Educación Media. 2 ed. México, Editora de Periódicos Libros y Revistas, S. A. 1971 248 p.

ZUBIETA RUSSI, Francisco. La moderna Enseñanza Dinámica de las Matemáticas. México, 1972 (c 1972) 152 p.