UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

UNIDAD AJUSCO

TESIS

"Un experimento de enseñanza para la solución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita a través de la visualización de funciones en la PC"

Para obtener el grado de:

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN: CAMPO, EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Presenta:

Raúl Moctezuma Bautista.

Asesor: **Dra. Verónica Hoyos Aguilar**.

Ajusco, 2006.

A mi esposa
Por compartir este esfuerzo, su comprensión y apoyo en todo momento.

A mis hijos,
Miriam y Raúl por permitirme ocupar unos momentos de su tiempo.

A mi mamá
Quien me dio el ser, la motivación de mi formación docente y el impulso a forjarme metas en mi carrera profesional y en mi vida personal.

† ***A mi padre***
Que lo recuerdo con mucho cariño.

A mi familia, gracias por todo.

A la Dra. Verónica,
por su colaboración y apoyo para la realización del presente trabajo.

INDICE

CAPITULO 3.
Diseño de la investigación: Un experimento de enseñanza usando PC.

CAPITULO 4.
Presentación y análisis de datos.

CAPITULO 5.
Discusión de resultados principales y Conclusiones

INTRODUCCIÓN.

Durante el tiempo que se ha trabajado en el CECyT "Lázaro Cárdenas" se observa que el tema final del curso de álgebra, resolución de ecuaciones, muestra dificultades en el aprendizaje de los estudiantes. Esto puede percibirse con los resultados reprobatorios del último de los exámenes departamentales de éste curso.

En vista de esta problemática se llevó acabo un experimento de enseñanza con estudiantes de esta institución. Se realizó una experiencia de enseñanza sobre la resolución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita, donde se utilizaron las llamadas nuevas tecnologías en el sistema educativo, en particular se usó un software educativo de matemáticas, el "EXPERT Software, Algebra CD". Este programa puede graficar una función cuadrática de manera inmediata, ante lo cual es evidente que la tarea de graficación deja de ser tediosa. Por otro lado, es posible preguntarse: ¿la visualización de una función cuadrática, apoya la comprensión de algunos conceptos matemáticos relacionados con la resolución de ecuaciones de segundo grado?, Esta pregunta llevó a desarrollar la investigación del presente trabajo.

El propósito principal de esta investigación fue indagar cómo la visualización de gráficas de funciones cuadráticas ayuda a los estudiantes a comprender mejor las ideas matemáticas subyacentes a este tema algebraico, como son la factorización de un polinomio y la intersección de su gráfica con el eje X, y cómo estas ideas apoyan a la solución de ecuaciones de segundo grado. La factorización y la intersección de gráficas en las abscisas son procesos estrechamente relacionados, pero esta relación no es obvia para los estudiantes.

En general el experimento de enseñanza se organizó en cuatro momentos: en el primero se llevo acabo el análisis de los resultados del tercer examen departamental realizado por los estudiantes de primer semestre, sobre el tema de solución de ecuaciones de segundo grado del curso de Álgebra. Para el segundo momento se diseñó un taller sobre el tratamiento a las ecuaciones y la solución a problemas de ecuaciones de segundo grado a través de las visualizaciones de funciones en la computadora. Posteriormente, en el tercer momento, se llevó acabo el desarrollo de dicho taller previa invitación a los estudiantes participantes. Y finalmente en el cuarto, se analiza la información obtenida para obtener resultados y conclusiones.

El presente trabajo muestra con detalle el desarrollo de la experiencia de enseñanza en 5 capítulos. El primer capítulo hace referencia al planteamiento del problema, el segundo al marco teórico, en el tercero se propone el diseño de la experimentación, el cuarto se refiere al análisis de datos, y por último, los resultados y conclusiones obtenidas, están en el capítulo 5. También se anexan otros documentos como son una lectura acerca del tema de definir la educación matemática, el registro de la investigación; finalmente y el cuadernillo de trabajo que se usó en el curso - taller.

El capítulo 1 plantea la problemática del presente trabajo, en particular que la enseñanza y el aprendizaje del álgebra constituyen uno de problemas pedagógicos, sociales y culturales del CECyT (4). Uno de los temas del curso de Álgebra que tiene más dificultades en su aprendizaje es el de resolución de ecuaciones. Con base en ello, se diseñó un experimento de enseñanza tratando de logar avances significativos en el aprovechamiento de los estudiantes en relación con este tema, especialmente en la solución de ecuaciones de 2º grado con una incógnita a través de la visualización de funciones cuadráticas en la computadora (PC).

Para realizar este experimento se realizaron investigaciones documentales acudiendo al trabajo de algunos autores, mismos que llevaron acabo experimentos y experiencias de aprendizaje semejantes, también en el área de matemáticas y utilizando como apoyo la visualización de imágenes que se relacionan con el tema en cuestión. Todo esto se describe en el capítulo 2.

En el capítulo 3 se describe el diseño de la investigación, el cual aborda desde cómo realizar una investigación, hasta la implementación de estrategias metodológicas para llevar acabo dicho experimento. Cabe destacar que aquí se instrumentó un curso – taller de ecuaciones y funciones con apoyo de un software educativo de Algebra. La descripción de los materiales utilizados en el curso también se realiza en este capítulo.

El capítulo 4 trata de la presentación y análisis de los datos obtenidos en el experimento. En particular se muestran los concentrados del examen de diagnóstico y del final, comparando resultados y señalando los avances del conocimiento de los estudiantes.

El capítulo 5 pone de manifiesto los resultados y las conclusiones del experimento de enseñanza. Se considera que las imágenes toman un papel fundamental en el fortalecimiento de las ideas matemáticas, así como en el lenguaje y el manejo de símbolos escritos. Lo anterior puede apoyar a la formación de conceptos matemáticos y a la formalización requerida en matemáticas.

Se espera que este trabajo pueda ser útil a otros profesores para abordar el tema de la solución de las ecuaciones de segundo grado con una incógnita usando la visualización de funciones cuadráticas en la PC, y se pueda así mejorar el entendimiento de los estudiantes de los conceptos matemáticos.

Pensamos que es necesario seguir trabajando diseños nuevos para la enseñanza de las matemáticas que destaquen el desarrollo de habilidades y de la intuición de los estudiantes, así como hábitos de investigación y experimentación en los profesores, y que al mismo tiempo coloquen a la matemática dentro del ámbito de interés de la población en general. Aquí tratamos de aportar datos que apoyan que el uso de software educativo juega un papel importante en esta dirección.

RAUL MOCTEZUMA BAUTISTA

CAPITULO 1.

Planteamiento del problema

Todos los que hemos dedicado alguna o gran parte de nuestra actividad a la docencia, sabemos que hay problemas muy difíciles en cuanto a encontrar métodos óptimos para el aprendizaje en la enseñanza de las matemáticas. Esto ocurre desde el nivel elemental hasta el posgrado.

De tiempo atrás ha habido profesionales que han dedicado su esfuerzo y capacidad a estudiar esta problemática con la finalidad de plantear alternativas de solución. Es bien sabido (Barrera,1997), que una solución definitiva no la hay y tal vez no la habrá, pues los métodos de enseñanza se tendrán que ir adaptando al desarrollo científico y tecnológico de cada época.
La enseñanza y el aprendizaje de la matemática constituyen problemas pedagógicos y culturales, de comunicación de un saber y de los papeles que juegan estos conocimientos dentro de una sociedad determinada.

La matemática, de acuerdo con Fuenlabrada (1977), es ante todo una apertura, un estado de espíritu de confrontación metódica con una gran variedad de problemas donde se mezclan creaciones, nociones e imágenes construidos previamente a la asimilación de los conceptos más elaborados a los que la matemática ha llegado. Busca que el alumno amplié su conocimiento y el desarrollo de la capacidad de abstracción, mediante el estudio y la práctica de los diferentes niveles de formalización y generalización, apoyándose en modelos, lenguajes y métodos de disciplina. La matemática no sólo es un sistema lógico o una herramienta en el estudio de otros campos del conocimiento sino también es una ciencia con una dinámica propia.

La matemática en el Nivel Medio Superior (NMS) se encuentra distribuida alrededor de cursos de álgebra, geometría y trigonometría, geometría analítica, cálculo diferencial e integral y estadística. Según el Ing. Alfonso Escoraza (1994), “ Las asignaturas relacionadas con la abstracción matemática en este nivel, regularmente son manejadas con base en contenidos extensos y mal planificados, de tal forma que los estudiantes se enfrentan a una serie de conocimientos que no encuentran aplicación en la realidad, más aún, los conceptos y algoritmos que se trasmiten en el salón de clases no se encuentra dentro de los parámetros mínimos de desempeño que el estudiante previo a este nivel debe mostrar”.

En este sentido se debe reconocer que la educación matemática en el bachillerato no propicia la formación del individuo ni la habilidad del razonamiento.

El tiempo destinado en el plan de estudios ha pasado a ser un espacio de capacitación, ya que se concentra en la repetición de mecanismos matemáticos con el objetivo de obtener resultados inútiles en la práctica cotidiana y no comprendidos por la mayoría de los estudiantes, es más, el alumno cree que saber matemáticas es repetir algoritmos.

Los esfuerzos para flexibilizar la enseñanza de las matemáticas en el NMS han sido rebasados por el momento histórico que vivimos. El ambiente actual provoca situaciones que antes eran difíciles de imaginar, así podemos considerar la vertiginosa entrada de la informática, la invasión de señales audiovisuales y la inclusión de modelos extranjeros adaptados a la economía y la educación.

La asignatura de Álgebra ubicada en el primer semestre correspondiente al mapa curricular del Plan de Estudios 2004 de los Centros de Estudios Científicos y Tecnológicos del Instituto Politécnico Nacional, dentro del área de formación matemática está incluida en un grupo de asignaturas de formación general para este nivel educativo.

El Álgebra es considerada como un “lenguaje básico de vital importancia para la representación e interpretación de modelos matemáticos, la generalización de conceptos para llegar a la formalización y para que se puedan manejar conceptos con mayor nivel de complejidad”[∇]

El contenido de este curso sirve a las asignaturas de Computación, Filosofía, Desarrollo de Habilidades del Pensamiento, además de las asignaturas de Ciencias Naturales, Sociales y Tecnológicas. El Álgebra sirve en el sentido de que apoya al desarrollo de procedimientos y habilidades, análisis de observaciones y a los procesos de abstracción.

Aprendiendo álgebra el estudiante podrá construir diferentes elementos metodológicos de interpretación indispensables para el estudio y aplicación de otras materias, donde se requiere del buen dominio del lenguaje simbólico y capacidad de abstracción para el planteamiento y la solución de problemas; como sería el caso de la construcción de un modelo de crecimiento bacterial o el crecimiento anual de población. De la misma manera, el curso de álgebra, recibe apoyo para su aprendizaje de las otras asignaturas.

[∇] Dirección de Educación Media Superior(DEMS), *Programa de Estudios : Algebra*, (Documento, Talleres-IPN, México, 2004) p.5

De acuerdo con el programa actualmente vigente (CECyT, 2004) la panorámica general del curso se obtiene a partir de la consideración de los siguientes contenidos: Aritmética, Sistemas Numéricos, Polinomios, Productos Notables y Factorización, Ecuaciones, y Razones y Proporciones.

Finalmente el curso de álgebra se complementa con Funciones Exponenciales y Logarítmicas, que forman parte de los contenidos del segundo curso de matemáticas (Geometría y Trigonometría).

Para valorar el aprendizaje de estos contenidos se aplican tres exámenes cada dos meses denominados “Departamentales”. El primero evalúa aritmética, sistemas numéricos, razones y proporciones, notación científica y porcentaje; en el segundo introducción al álgebra y polinomios. Por último, el tercero contiene las resoluciones de ecuaciones de primer grado y segundo grado, y problemas de aplicación.

Normalmente los resultados ofrecen un panorama desalentador. En particular, en los resultados sobre el tema de nuestro interés: (la solución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita), se muestra que en los estudiantes existe una falta de comprensión[∇] de las nociones algebraicas involucradas y carencia de algún procedimiento para llegar a dar una respuesta correcta.

Por ejemplo, en un ejercicio del tipo " Las raíces o soluciones de la ecuación $(b+8)\ (b-5) = 0$, son: $b_1=$ ___________ $b_2=$ ______________."

La mayoría de los estudiantes fallan el intento. Algunos (40 % aprox.) dan valores numéricos equivocados; otros (40 % aprox.) no responden; e incluso algunas respuestas (5 % aprox.) son del tipo:

"$b_1= 2b$ " y " $b_2= 3$ "

Sólo unos pocos estudiantes (15 %) se acercan a la respuesta correcta, con errores de números con signo. En este trabajo se considerará algunas posibles causas que provocan estas equivocaciones:

El tratamiento del tema de Ecuaciones es de aproximadamente 25 hrs. Se aborda a través de la revisión de los conceptos de igualdad, incógnitas y variables; representación gráfica, resolución de ecuaciones y problemas de aplicación.

Tanto para ecuaciones de primer grado como para las de segundo, puede pensarse que el tiempo signado es en realidad reducido. Considerando que la

[∇] "La comprensión es una experiencia subjetiva … es explorar la manera en que los estudiantes forman conexiones entre los conceptos matemáticos que estudian y la organización de la enseñanza." Ernesto Sánchez (1995) preparación de los estudiantes antes de ingresar al nivel medio superior es muy deficiente al respecto.

Algunos de los problemas que se han detectado que sufren los estudiantes que cursan esta asignatura son la falta de tiempo para esclarecer dudas en clase y el alumno no tiene tiempo de asistir a Asesorías-[∇]

Aunado a lo anterior se ha detectado su indisposición a su estudio. Los alumnos encuentran pretextos para evadir la materia o para dedicarle el menor tiempo posible.

El uso de las nuevas tecnologías por un lado, ha abierto la posibilidad de potenciar el conocimiento para mejorar la concepción y comprensión matemática, las conexiones entre representaciones algebraicas, numéricas y gráficas; y la lectura e interpretación de información gráfica.

Por otro lado su utilización podría producir un giro importante en las actividades en el aprovechamiento de los estudiantes del curso de Algebra.

Normalmente la concepción de álgebra entre estudiantes, e incluso de algunos profesores, es únicamente un conjunto de procedimientos que tienen que ser memorizados.

∇ Existe un espacio académico de apoyo institucional que se dedica a la regularización de los estudiantes y de diseño personalizado.

Sin embargo, esta concepción del Álgebra falla puesto que no es capaz de adecuar los procedimientos así concebidos a la posibilidad de su utilización para la resolución de problemas.

En el trabajo de investigación que aquí se presenta como tesis, se aborda el aprendizaje del álgebra, especialmente en el tema la resolución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita a través del uso del software “Algebra CD”. Uno de los objetivos del programa de formación de Matemáticas en el CECyT, en lo que se refiere a los primeros cursos, es que el estudio de las funciones y su relaciones y el tratamiento a las ecuaciones en la resolución de problemas. En particular se deben establecer los diferentes procedimientos de solución algebraicos y geométricos de dichas ecuaciones.

En este sentido, en el programa y los textos de referencia se recurre frecuentemente a las gráficas como un importante apoyo para estudiar los distintos tipos de funciones generadas, de modo que se pueda visualizar tanto el modelo algebraico de un cierto problema como su comportamiento gráfico.

En este trabajo se pretende mostrar cómo se facilita la visualización del modelo algebraico de las ecuaciones de segundo grado con una incógnita y el comportamiento grafico de las funciones cuadráticas utilizando la computadora.

Una de nuestras hipótesis de trabajo que se confirma en diversas investigaciones relacionadas con el problema del aprendizaje de las matemáticas, es que la potencia y accesibilidad de las imágenes que se generan por computadora proveen representaciones visuales, los cuales ofrecen una introducción a las abstracciones complejas (Bishop,1992).

OBJETIVO.

El objetivo que se persigue con el presente trabajo es mostrar la manera en que la graficación de las funciones abordada por medio del software educativo Algebra CD[∇] ayudó a los estudiantes a resolver ecuaciones.

En particular restringiremos nuestra atención a las funciones del tipo $y = f(x) = Ax^2 + Bx + C$ y a las ecuaciones que de ahí resultan, como son $Ax^2 + Bx + C = k$, con κ una constante cualquiera.

HIPÓTESIS

Nuestra hipótesis es que la habilidad que genera la práctica de utilización del software para graficar funciones cuadráticas realmente puede ser útil a la solución de las ecuaciones de segundo grado y a la comprensión de los elementos simbólicos de una ecuación, así como a su correspondiente interpretación formal en el plano cartesiano, como por ejemplo, los coeficientes en las ecuaciones y el signo.

[∇] El software Algebra CD es un producto de la compañía Expert Software, producido en Estados Unidos en 1995; utilizado como recurso didáctico para la práctica del álgebra con ilustraciones y animaciones y la graficación de las cónicas en general.

CAPITULO 2.

Marco Teórico: La visualización en apoyo a la resolución de ecuaciones

2.1 En la historia de las matemáticas.

2.1.1 De acuerdo con Kolmogorov (1990), la naturaleza de las matemáticas se identifica por su por su carácter abstracto, su precisión, su rigor lógico, el razonamiento que implica y su amplio campo de aplicación. Es importante la interconexión entre sus ramas, por ejemplo la aritmética y la geometría no sólo sé retroalimentan una a la otra, sino que también son fuente de otros métodos, ideas y teorías generales; son dos raíces sobre las cuales se ha desarrollado la matemática.

Así, para medir un segmento de recta se *aplica* (geometría) una cierta unidad de longitud y se calcula (aritmética, cálculo) cuántas veces es posible repetir esa operación. Los griegos hicieron considerables progresos con esta técnica, como Arquímedes en la obtención de cálculos de las distancias que existían entre los barcos y la costa, o como Tales de Mileto en el cálculo de las alturas de las pirámides de Egipto.

De tal manera que es posible contemplar los fundamentos de la matemática como la unión de conceptos que surgen de la geometría y la aritmética; es decir, de los conceptos generales de continuidad, y de las operaciones algebraicas (como generalizaciones de las operaciones aritméticas); esto es, la unión de varias teorías han desempeñado siempre un gran papel en el desarrollo de las matemáticas.

2.1.2. Descartes (1637), retoma las ideas básicas y teorías de sus antecesores científicos griegos y empieza con la selección de problemas planteados por ellos, por ejemplo la ecuación:

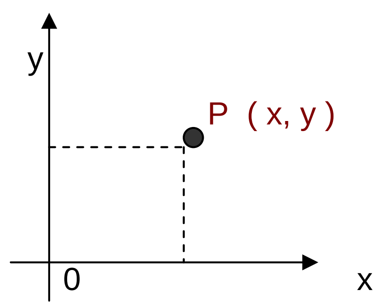
$$x^2 + y^2 = a^2$$

eran consideradas **x**, **y** como incógnitas en álgebra; y puesto que la ecuación no permite determinarlas, ésta no ofrecía ningún interés especial.

Él no las consideró así, sino como variables; de este modo la anterior ecuación expresa la interdependencia de dos variables. Tal ecuación puede escribirse en forma general, pasando todos sus términos al primer miembro:

$$F(x,y)=0.$$

Con lo anterior, introdujo en el plano las coordenadas x, y; que ahora llamamos cartesianas. De este modo, a cada par de valores (x, y) corresponde un punto, y recíprocamente, a cada punto le corresponde un par de coordenadas (x, y).

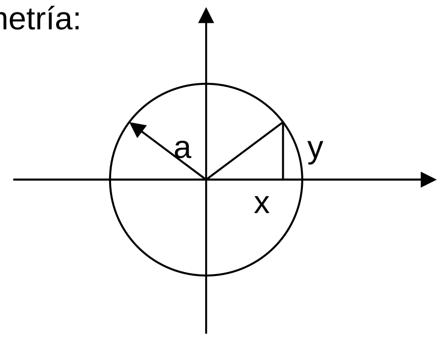


Coordenadas Cartesianas correspondientes a un punto y viceversa

Así la ecuación $F(x,y)=0$, determina el lugar geométrico de los puntos del plano cuyas coordenadas satisfacen una ecuación algebraica, la cual será una curva[∇]

[∇] Apolonio utilizó la geometría analítica en sus investigaciones de secciones cónicas, realmente da las ecuaciones de estas curvas, pero las expresa en lenguaje geométrico.

Por lo tanto, la ecuación $x^2 + y^2 = a^2$ determina la circunferencia de radio **a** y centro en el origen. Con base en esta idea de correspondencia entre distintos registros de representación, Descartes desarrolló la celebre fusión del álgebra y la geometría:



La ecuación $x^2+y^2=a^2$ determina la circunferencia de radio **a** y centro en el origen.

Es decir, la fusión de una ecuación y una curva. Lo que posteriormente se transformó en correspondencia o conexión entre una función[∇] y una ecuación; que fue uno de los elementos más importantes en la aparición del análisis.[∇∇]

[∇] Kolmogorov (1990) " una función es la imagen abstracta de la dependencia de una magnitud respecto a otra. En la matemática, la afirmación de que y es función de x únicamente significa que a cada posible valor de x le corresponde un valor definido de y.

[∇∇] La rama de la matemática dedicada al estudio de funciones se llama análisis o análisis infinitesimal.

2. 2. En los antecedentes didácticos.

2.2.1 Bruner (1966) en su ensayo “Pautas de Desarrollo” da importancia a la instrucción como un elemento principal del desarrollo intelectual, donde dice que:

“La instrucción es un esfuerzo por contribuir o dar forma al desarrollo, y una teoría de la instrucción (no es más que una serie de ejercicios sobre el particular) es el modo en el que el crecimiento y el desarrollo se ve favorecido por diversos medios.”

Bruner dice que al planear la instrucción de los jóvenes haríamos mal en pasar por alto lo que se sabe del desarrollo, sus apremios y oportunidades. Con lo anterior, cree que es apropiado empezar el problema del desarrollo y sus pautas. Con este tema comenzarán nuevas disciplinas o “ciencias del desarrollo” que abarquen todos los campos relacionados con la comprensión y facilitación de los procesos mediante los cuales los seres humanos pasan rápidamente de un estado de extrema indefensión a otro de control del medio ambiente.

Los seres humanos adultos y normales utilizan los menores indicios de presentación de los estímulos y se sirven de ellos como un apoyo para alcanzar sus conclusiones.

Gran parte de su percepción supone ir más allá de la información obtenida al basarse en un modelo del mundo de los acontecimientos que hace posible la interpolación, la deducción y la predicción. La percepción rápida refleja la naturaleza del estímulo y también la probabilidad de que los acontecimientos ocurran en un contexto dado.

En el libro “A Study of Thinking”, Bruner (1956) escribió la indagatoria de los orígenes de la actividad cognoscitiva humana, cuyos resultados fueron varios puntos de partida equivocados, lo cual sirvió para darse cuenta de ciertas convicciones sobre el estudio adecuado del desarrollo intelectual. El trabajo se realizó entre estudios patológicos sobre el funcionamiento cognoscitivo con niños con lesiones cerebrales y el defectuoso desarrollo intelectual, de los cuales pudo aclarar los procesos de desarrollo intelectual al ayudarles a vencer sus impedimentos laborales escolares.

Acerca de estos niños hubiera podido decirse lo mismo que David Page dijo de la enseñanza de las matemáticas: cuando los niños dan respuestas equivocadas no es tan frecuente que estén errados como que contesten a otra pregunta, y la cuestión es averiguar de qué pregunta se trata.

Bruner habla sobre la naturaleza del desarrollo intelectual en seis aspectos diferentes:

1) El desarrollo se caracteriza por la creciente independencia de la reacción respecto a la naturaleza inmediata del estímulo. Mucho de lo que hace el pequeño puede predecirse al conocer los estímulos que inciden sobre él en el momento de su reacción. Logra su libertad del control de los estímulos por procesos intermedios que transforman el estímulo anterior a la reacción.

2) El desarrollo depende de asimilar, o incorporar como propios, los acontecimientos en un sistema de almacenamiento que corresponda al medio. En el niño se hace posible la capacidad para ir más allá de la información, hace predicciones y deducciones de su modelo del mundo.

3) El desarrollo intelectual entraña una capacidad para explicarse y explicar a los demás mediante palabras o símbolos de lo que uno ha hecho o va hacer. Es una autoexplicación o conciencia de sí mismo que permite la transición del comportamiento ordenado al comportamiento lógico.

4) El desarrollo intelectual depende de una interacción sistemática y contingente entre el profesor y el alumno. El niño nace con una cultura, pero es necesario considerar las diversas relaciones semánticas que esta proporciona: la familia, figuras de identificación especial, maestros, etc.

5) La enseñanza se facilita por medio del lenguaje, que es el instrumento que luego puede utilizar el que aprende para poner orden en el medio.

6) El desarrollo intelectual se caracteriza por la creciente capacidad para considerar varias alternativas simultáneamente, en tiempo y atención a múltiples demandas. El niño de corta edad sigue un carril y uno de diez puede seguir varios, es capaz de responder a mundo más complejo.

Bruner se basó en Piaget, no solo en un carácter psicológico, sino epistemológico interesado en la naturaleza del conocimiento del ser. La importancia que le dio es la utilidad y fuerza de su labor descriptiva en cada uno de sus estadios del desarrollo infantil, el equilibrio y desequilibrio del desarrollo.

Con un sencillo experimento con vasos medio llenos o medio vacíos, Bruner (1966) enseña algo más que un criterio: la descripción lógica. La cual es un medio para explicar la naturaleza del desarrollo intelectual. Esto conlleva a los puntos de referencia.

El niño en este experimento se libera de los estímulos actuales y conserva una experiencia pasada como un modelo y las reglas que gobiernan el almacenamiento y la recuperación de informes de este modelo.

Con ello Bruner indica que es probable que los seres humanos lleguen a esto de tres maneras distintas. La primera es mediante la acción. Sabemos muchas cosas de las que no tenemos imágenes ni palabras para explicarlas, como andar en bicicleta o jugar tenis, la falta de vocabulario y la impotencia de cualquier diagrama en el proceso instructivo no es impedimento para llevar acabo la instrucción. Llamamos preceptiva o promulgatoria a la primera forma de representación.

Hay un segundo sistema de representación que depende de la organización visual, o de otros sentidos, y de la utilización de imágenes sintetizadoras, a la cual llamamos icónica.

Esta se rige por los principios de organización perceptiva y por las trasformaciones económicas en la organización perceptiva descritas por Attneave: técnicas de rellenar, completar y deducir. La representación preceptiva se basa al parecer, en el aprendizaje de respuestas y formas de habituación. Las imágenes desarrollan una condición de autonomía, se convierten en grandes resúmenes de acción.

Este sistema se basa en la experiencia y de tal manera que la percepción y la memoria están relacionadas por la regla de la similitud de los fenómenos. Los factores afectivos y emocionales impresionan notablemente la imaginación y la organización perceptiva, particularmente cuando se emplean estímulos pobres y una clasificación lingüística ambigua: lenguaje natural y luego lenguaje artificial de números y lógica.

Por último, hay representación por las palabras o lenguaje. Se distingue en que es de carácter simbólico, con ciertos rasgos o sistemas simbólicos que solamente empezamos a comprender. Los símbolos (palabras) son arbitrarios (como ha dicho Hockett, no existe analogía entre el símbolo y la cosa, de modo que ballena es un animal muy grande y microorganismo es uno muy pequeño), su referencia es muy remota y casi siempre son productivos o generativos en el sentido de que un lenguaje o cualquier sistema de símbolos tiene reglas para la formación y transformación de frases que pueden dar un sentido exacto de la realidad mucho más de lo que sería posible mediante actos o imágenes.

La formación de este sistema se basa en la transferencia de la experiencia al lenguaje. El empleo del lenguaje es como un instrumento del pensar e incorporación mental.

El niño de corta edad utiliza el lenguaje como una ampliación de señalar las cosas. Gradualmente empleará palabras que designan objetos que no están presentes, que sirven como referencia y ayuden a la solución de los problemas mentales.

La gramática también nos permite una forma ordenada de planear preposiciones hipotéticas que pueden no tener nada que ver con la realidad: “el unicornio esta en el jardín”, “en el principio fue el verbo”, etc.

También existen otras propiedades de su sistema simbólico, su reducción y compactibilidad, como por ejemplo: “La fuerza es igual a la masa por la aceleración, F= MA”. “La expresión $x^2+ 2x +1$ para indicar una parábola”, “El verde sustenta el árbol de oro de la vida”, etc. En cada uno de los casos la gramática es bastante ordinaria aunque la comprensión semántica es enorme.

Lo que es permanentemente interesante en la naturaleza del desarrollo intelectual es que parece seguir el curso de estos tres sistemas de representación hasta que el ser humano es capaz de dominarlos.

La forma en que se llevan acabo estas transiciones, donde la representación preceptiva a la icónica y de ambas a la simbólica es debatida y confusa. Pareciera cómo la formación de imágenes o esquemas se presenta automáticamente como acompañante de la estabilización de reacción. Pero no se comprende aún la forma en que el sistema nervioso convierte una secuencia de reacciones en una imagen o esquema.

En cuanto a la incorporación o asimilación del lenguaje como instrumento del pensamiento se puede realizar con el intercambio maestro y discípulo: el niño expresa algo y el maestro amplía o idealiza lo dicho por el pequeño, después el niño equipara su expresión con la del adulto, que tomó como modelo.

El desarrollo mental depende de gran medida del crecimiento de fuera hacia adentro: un dominio de técnicas de una cultura que son trasferidas mediante el diálogo.

2.2.2 Tall en su documento (1994) “A Versatile Theory of Visualization and Symbolization in Mathematics” dice:

> [That] “the roles of visualization and symbolization in the cognitive growth of mathematics. Visualization plays a fundamental role throughout, both in the global overview afforded by visual diagrams and the processing of symbolism through the ability to scan written symbols and shift attention to different aspects at will. “… the subtle role of symbols standing for both process and concept in arithmetic, algebra and calculus. The latter proves to play an interesting role when using the computer to manipulate symbols”

Esto es, los roles de la visualización y la simbolización son importantes para el desarrollo del pensamiento matemático. La visualización juega un papel fundamental en todas partes, en la descripción global producida por los diagramas visuales, en el proceso del simbolismo con la habilidad de explorar los símbolos escritos, y en el cambio de atención a diversos aspectos a voluntad.

El papel sutil de los símbolos que están contenidos en el proceso y el concepto (la teoría de preceptos) en aritmética, álgebra y cálculo, demuestran un rol interesante en el uso de la computadora para manipular símbolos, especialmente en cálculo.

Tall basa su trabajo en la perspectiva de Bruner (1966), también distingue tres diversos modos de representación mental: el sensorial-motor, el icónico y el simbólico.

La primera es mediante la acción. Sabemos muchas cosas de las que no tenemos imágenes ni palabras para explicarlas, lo cual no es impedimento para llevar acabo la instrucción.

Hay un segundo sistema de representación que depende de la organización visual, o de otros sentidos, y de la utilización de imágenes sintetizadoras, a la cual llama icónica.

Por último, hay representación por las palabras o lenguaje. Se distingue en que es de carácter simbólico, con ciertos rasgos o sistemas simbólicos que solamente empezamos a comprender. El empleo del lenguaje es como un instrumento del pensar e incorporación mental.

Tall trata de explicar lo anterior con el siguiente diagrama:

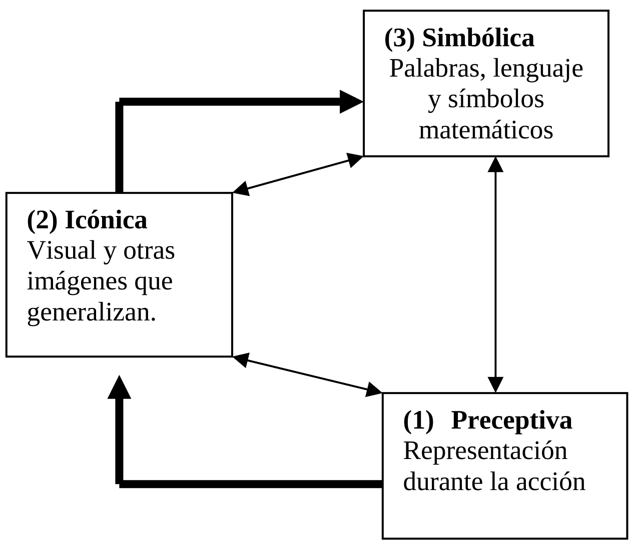


Figura 1: Pautas de desarrollo de Bruner

Bruner considera que estas pautas crecen secuencialmente: primero la preceptiva, luego la icónica y finalmente la simbólica.

El sistema preceptivo se basa en el aprendizaje de respuestas y formas de habituación, el sistema icónico se rige por la organización perceptiva de las imágenes y las transformaciones de la percepción como: rellenar, completar y deducir.

Los sistemas preceptivo e icónico se relacionan constantemente, pareciera que la formación de imágenes o esquemas se presentan automáticamente como acompañante de la estabilización de la reacción. También hace que la secuencia de la acción sea simultánea a una representación inmediata. Lo que no se comprende aún la forma que el sistema nervioso convierte una secuencia de reacciones en una imagen o un esquema.

Bruner considera que el tercer sistema depende menos de los otros dos. La incorporación o asimilación del lenguaje es como instrumento del pensamiento y puede permitir que en un experimento tenga lugar la representación lingüística o simbólica antes que la icónica monopolice la situación.

El sistema de símbolos tiene reglas para la formación y transformación de frases que pueden dar un sentido exacto de la realidad mucho más de lo que sería posible mediante actos o imágenes.

Lo que es permanentemente interesante en la naturaleza del desarrollo intelectual es que parece seguir el curso de estos tres sistemas de representación hasta que el ser humano es capaz de dominarlos.

En los inicios de los 80´s, Tall (1985) comenzó a trabajar la visualización en el aprovechamiento del cálculo usando la computadora en correspondencia con modelo Icónico de la representación de Bruner para dar un soporte a las ideas matemáticas simbólicas.

El sistema simbólico de Bruner, se compara con el modelo visual-simbólico de Tall, donde interaccionan símbolos escritos y sus representaciones gráficas. Con ello, propone la idea del aprendizaje versátil combinado con *visualización global* completando de ideas de la Gestalt[∇], y *la manipulación secuencial de símbolos*. En ese momento comenzaron a saber que el uso de símbolos algebraicos se utiliza de dos maneras muy diferentes:

1) como aritmética generalizada en una expresión tal como 2 + 3*x*,

2) como un proceso de evaluación (cuando x esta dando un valor) y un objeto matemático manipulable.

La primera causa grandes dificultades (algunas veces expresada como “carencia o falta de cierre”) para aquellos estudiantes incapaces de aceptar símbolos, representando procesos que ellos no pueden llevar a cabo si **x** es desconocida.

[∇] ...donde sostienen que los estímulos tienen forma, estructura y significado porque sus elementos llegan al individuo que los percibe en forma organizada, cuyo fundamento de dicha corriente psicológica radica que las percepciones son experiencias totales, que no son la suma total de sus partes, la percepción antecede por regla general al de las partes”- OLGUIN, Vicente. *La dirección del aprendizaje y sus problemas.* ENM .2ª. Edición 1978. Pag.57 y 58.

En un trabajo subsecuente con aritmética, Tall (1991) observó exactamente el mismo fenómeno que se presentó en álgebra. Los estudiantes usan símbolos numéricos ambos como una notación representando un proceso (conteo) y un concepto (número).

En primera instancia una ecuación 3+ 2 = 5 es vista inicialmente por un niño como un proceso interno “tres y dos hacen 5” mejor que el hecho conocido “3 y dos es 5”. Solo más tarde los niños ven que 3 + 2 “es la misma cosa que 5”. Esta encapsulación del proceso en el objeto tiene como un eje al uso de simbolismo para representar ya sea el proceso o el concepto, por eso lo llama precepto.

Tall utiliza el término anterior, para representar un proceso en el que el símbolo es transportado, manejado y utilizado para llegar al resultado y tomarse en cuenta al resultado en sí mismo.

Para poder comunicar y escribir un símbolo, primero tuvo que ser mencionado, escuchado, visto y leído, y la combinación de estas percepciones sensoriales y acciones le han dado una existencia cognitiva como un objeto matemático.

Unos pocos ejemplos de preceptos durante los cursos de aritmética, álgebra, geometría y cálculo, son los siguientes:

$3 + 2$ (proceso de adición, concepto de suma),

$+ 2$ (proceso de agregar dos, concepto de "+2"

$\frac{3}{4}$ (proceso de división, concepto de fracción)

$3+2x$ (procesos de evaluación de expresión, concepto de expresión),

$\operatorname{sen} x = \frac{opuesto}{hipotenusa}$ (proceso de encontrar proporción, concepto de función trigonométrica),

$v = \frac{s}{t}$ (proceso de proporción, concepto de razón),

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ (proceso de tendencia al limite, concepto de límite),

$\frac{dy}{dx}$ (proceso de calcular la relación de incrementos, concepto de derivada),

$\lim_{x \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$ (proceso de n tendencia al infinito, concepto de limite).

La noción de los preceptos, ha permitido enfocar la forma en que algunos estudiantes ven al simbolismo representado principalmente como proceso y otros lo usan flexiblemente como proceso o concepto; habilitando el progreso en su crecimiento matemático.

Tall clasifica tres diferentes tipos de preceptos:

·*Los preceptos operacionales* tal como 3+2, que tienen un proceso de cálculo en construcción para producir el resultado.

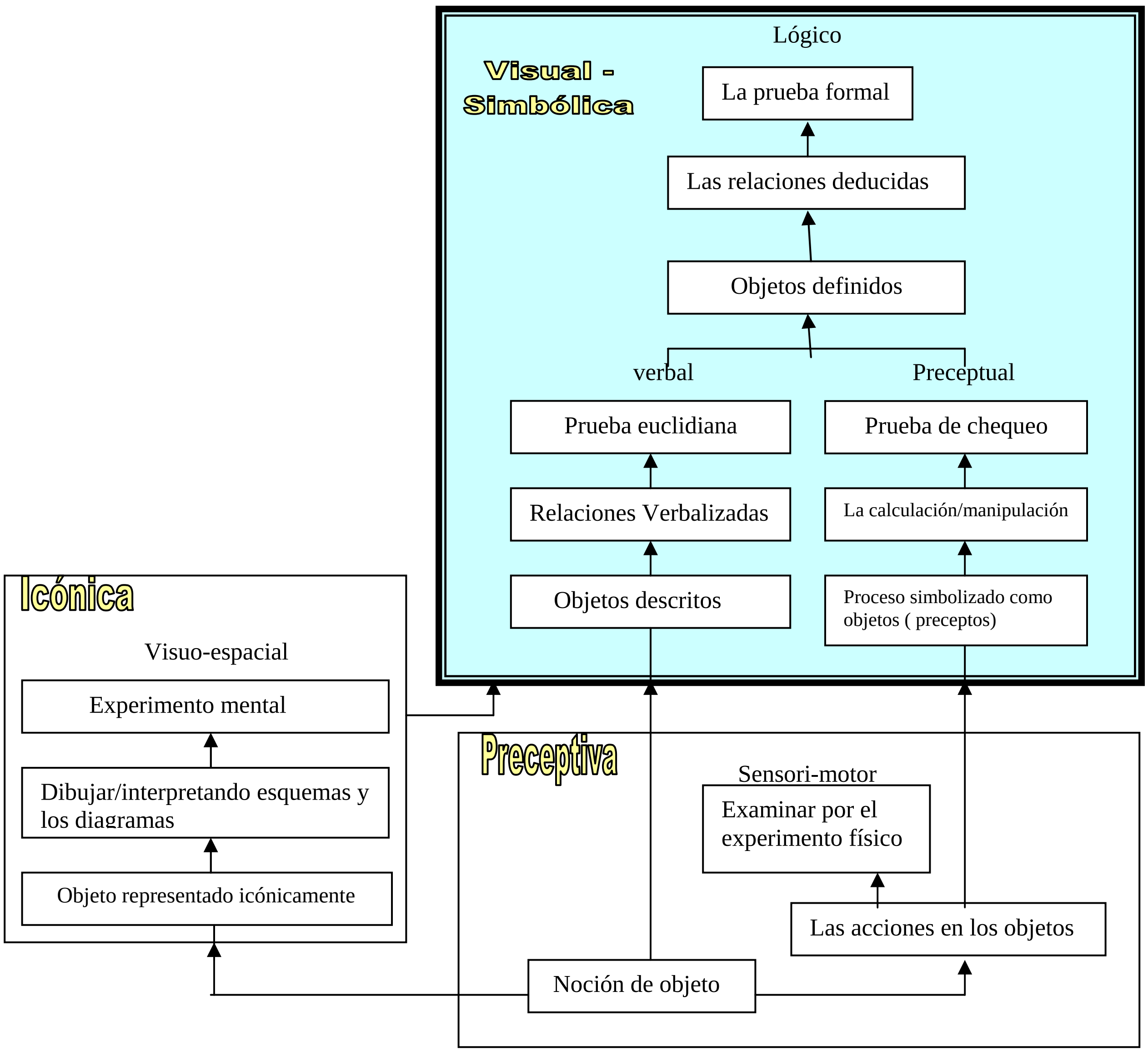
Los preceptos de plantilla tal como 2+3x donde el proceso de construcción puede ser llevado a cabo cuando a la incógnita se le dan valores específicos, sin embargo el símbolo mismo puede ser manipulado, y

Los preceptos estructurales tal como $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^3$ que tiene un proceso asociado (tendiendo a un límite) pero no tienen un método de construcción para calcular el valor del límite en sí mismo.

Tales símbolos son usados flexiblemente para denotar tanto procesos como conceptos, considerando que tienen su estilo propio de crecimiento cognoscitivo. En el pensamiento matemático avanzado, existen aun métodos nuevos de la construcción para conquistar: el sistema lógico para definir los objetos matemáticos y la elaboración de deducciones formales a partir de las definiciones.

Tall sugiere un refinamiento del modo simbólico de Bruner para tomar en cuenta de al menos tres diferentes tipos del sistemas simbólicos a los que Bruner había aludido oblicuamente como " lenguaje en su forma natural " y " los dos lenguajes artificiales de los números y la lógica " Estos subsistemas se llaman: verbal, preceptual, y lógico.

Cada subsistemas tiene vías diferentes de proceder con los objetos matemáticos y cada uno tiene formas propias de prueba, como se observa en el esquema siguiente:



Ubicación de Tall de objetos, acciones y pruebas en los diferentes subsistemas.

En este diagrama vemos que en el sistema preceptivo, existe un subsistema llamado sensorio-motor que está en la raíz de gran parte de nuestra actividad, empezando con la recepción de los objetos en el mundo externo y la manipulación sobre ellos.

La noción de objeto y de acción sobre el objeto proveen dos fuerzas motivadoras en las matemáticas: el énfasis en el primero conduce a la geometría Euclidiana y el segundo a la aritmética y al álgebra. Dentro del sistema preceptivo existe un método simple de prueba: la verificación por experimento físico.

El sistema icónico visuo-espacial usa representaciones icónicas de los objetos como imágenes, esquemas o/y diagramas para significar relaciones espaciales y considera los experimentos mentales, en donde podemos imaginar que ciertas condiciones se cumplen y ver si una conclusión debe seguirse.

En el subsistema verbal se utiliza el lenguaje cotidiano, que se traslada en la geometría Euclidiana para formular experiencias de formas geométricas, lo que el individuo ya ha experimentado en la acción y visualmente; que a partir de la simple manipulación de figuras, hasta las sofisticadas construcciones con regla y compás.

Las descripciones verbales son dadas para definir las versiones idealizadas de los objetos geométricos (por ejemplo, un "punto" tiene posición pero ninguna medida ni tamaño "). Estos objetos idealizados es lo que se nombra como " objetos descritos". A pesar de la existencia de las definiciones en la versión mental de los objetos lo que continúan jugando un papel central.

La prueba Euclidiana es un código convencionalmente acordado para traducir la experiencia de la construcción en una forma verbal más general que se aplica no sólo a la figura específica construida física o mentalmente, si no que a cualquier figura que tenga las propiedades especificadas.

El subsistema preceptual concierne a los símbolos de la aritmética, el álgebra, el cálculo y así sucesivamente, los cuales son usados para el resultado de un cálculo deseado o la manipulación de símbolos, tales como:

$$3+5,\ \ 2(x+3).\ f(x),\ \ g(f(x)),\ \ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1} \frac{1}{k^3}\ ,\ \frac{d}{dx}(senx)\ ,\ \int_1^0 \frac{1}{x}\,dx.$$

Porque la matemática de estos símbolos (con la excepción de ciertos preceptos estructurales fijos) tienen algoritmos subyacentes para llevar a cabo los procesos; es esta el área que es más fácil convertir para operar en la computadora.

El subsistema lógico concierne a la combinación de palabras y símbolos usados para definir conceptos matemáticos formales, y la deducción subsiguiente de sus propiedades e interrelaciones en la prueba formal.

La transición para la prueba formal causa en muchos estudiantes enormes dificultades, una de ellas es el papel de la definición de los objetos matemáticos.

A diferencia de los "objetos descritos" en las matemáticas elementales, en donde el estudiante puede continuar usando cualquier imaginación visual para soportar su pensamiento, es la definición verbal la que juega un papel fundamental. Cualquier objeto que satisface la definición es un ejemplo del concepto.

Los sistemas y subsistemas del desarrollo son necesarios para tomar en cuenta las fortalezas y las debilidades del sistema cognoscitivo humano. Dentro de las fortalezas está que el cerebro tiene una memoria extensa, pero esto también significa que los mecanismos mentales tienen un foco estrecho de la atención. Esto limita al individuo a centrarse en los fundamentos vitales que le ayudan a la supervivencia, pero esto también significa que los mecanismos mentales deben estar disponibles para permitir que la atención se centre y se active rápidamente para relacionar diferentes piezas de la información y para procesarla.

Los variados subsistemas tienen cada uno sus propios mecanismos para centrarse en datos relevantes y cambiar la naturaleza del foco de atención, a menudo ligado con el sistema sensorio-motor para realizar las tareas rutinarias (tales como manipulación de objetos físicos, la escritura, el mecanografiado y el dibujo), liberando a la mente consciente para enfocar un proceso de un nivel más alto.

Al mismo tiempo los datos necesitan ser comprimidos en una forma que se pueda utilizar efectivamente dentro del foco de la atención. Uno de los modos más poderosos de todos los mecanismos de la compresión es la lengua donde una sola palabra puede sustentar una unidad compleja de ideas ligadas.

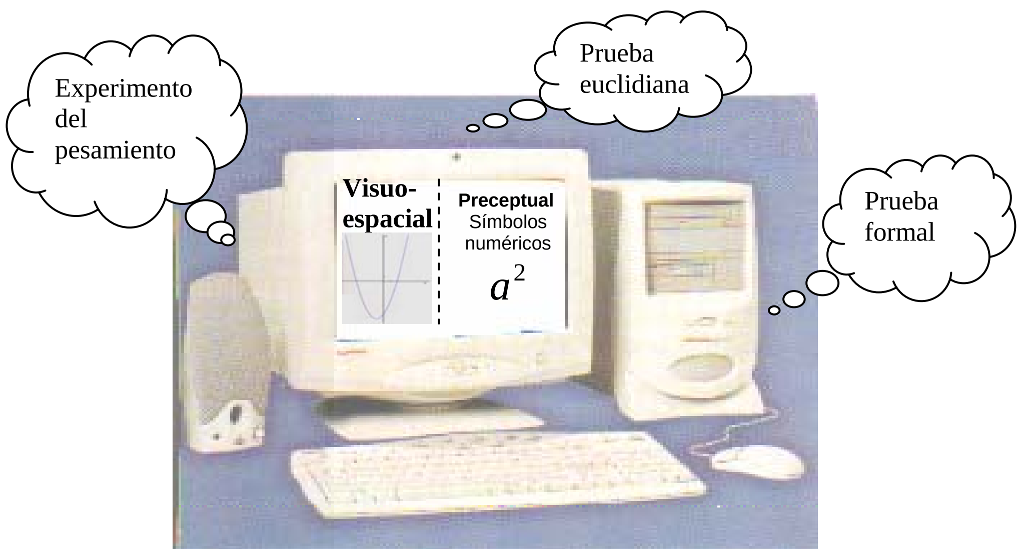
Dado la limitación de la memoria de trabajo a corto plazo, es provechoso juntar varias piezas de información vinculadas entre sí y pensar en ellas como una unidad. El sistema visuo-espacial puede comprender bien información compleja que se presenta en una forma espacial coherente. Por ejemplo, no podemos reconocer de un vistazo que el conjunto de la izquierda tiene veinte objetos, pero es fácil hacerlo en la figura de la derecha donde los objetos están agrupados en cuatro conjuntos de cinco objetos reconocibles.

Agrupar la información espacialmente permite que el número de elementos se observe rápidamente.

Esta forma visuo-espacial de compresión es relativamente primitiva comparada con las formas sofisticadas de compresión del modo preceptual. Los símbolos no solamente se utilizan para representar conceptos compactos, sino que también se utilizan como preceptos para incitar procesos para hacer matemáticas o conceptos para pensar en ellos.

El papel de la computadora

La computadora es particularmente adecuada para llevar a cabo procedimientos rápidamente, y aparentemente lo hace instantáneamente, produciendo salidas visuales en la pantalla. Por lo tanto, es particularmente valiosa para dar soporte visuo-espacial y soporte preceptual, comprende los casos de experimento del pensamiento, la prueba euclidiana (usando figuras geométricas) y la prueba formal (por cálculo simbólico).



La imagen en la computadora nos auxilia en la comprensión de los conceptos y procesos, y da un soporte a las ideas matemáticas en varios niveles del pensamiento matemático.

El anterior diagrama notifica la diferencia entre lo qué se presenta en la pantalla de la computadora y la clase de pensamiento reflexivo requerida por el individuo para producir diversas clases de prueba. La interfaz que permite la actividad con la computadora consiste en el teclado y el ratón, el teclado llevará a cabo que los datos sean mecanografiados en el interior, y el ratón será usado activamente para apoyar la representación visuo-espacial apuntando, seleccionando y moviendo objetos alrededor de la pantalla.

El software tal como Cabri-Géométre permite al usuario interactuar visuo-espacialmente con las figuras geométricas y recíprocamente con las relaciones especificadas.

Asimismo el software que proporciona el cálculo numérico y el cómputo simbólico permite que el usuario solucione una gama enorme de problemas en la aritmética, álgebra, estadística, probabilidad, cálculo y otras, pero se observa que éste implica generalmente el trabajar con símbolos en "forma cerrada", lo que consiste en llevar a cabo las operaciones aritméticas, exponenciación (incluyendo funciones trigonométricas usando números complejos) y sus inversos.

Por esta razón el software que provee cálculo numérico simbólico puede ser magnífico para manejar modelos conceptuales que funcionen, pero son menos buenos en casos de ejemplos de conceptos que fallen. Por ejemplo, este software provee soporte limitado para el rigor del análisis matemático.

En el pasando menciono brevemente que la programación es apropiada en los procedimientos de lenguajes preceptuales en naturaleza. Las versiones primitivas tempranas del BASIC eran esencialmente procesales, donde permitía que el programador especificara los algoritmos requeridos. Idiomas funcionales y orientados a los programas más sofisticados suben el nivel de los procedimientos, por ejemplo: La lengua ISETL es particularmente valiosa la cual refleja la teoría de lengua determinada por funciones de sistemas finitos, - permitiendo que el usuario especifique una amplia variedad de construcciones apropiadas para la lógica, el cálculo, la álgebra lineal y la teoría del grupo. Por la reflexión en tales actividades de la computadora el estudiante puede tener la ayuda cognoscitiva para la prueba formal de un nivel más alto.

Con la reflexión en tales actividades de la computadora el estudiante puede tener la ayuda cognoscitiva para la prueba formal de un nivel más alto.

Usar la computadora en matemáticas permite que nuevas secuencias del plan de estudios sean consideradas, usando diversas clases de representaciones apropiadas para la etapa del desarrollo del estudiante y desarrollando nuevas secuencias de aprendizaje, previamente no disponibles.

Al usar una computadora es posible considerar otras rutas de aprendizaje, por ejemplo, con un software se puede llevar acabo procesos que permitan al alumno mirar a las propiedades del objeto resultante, antes que los mecanismos de los procesos sean entendidos.

La visualización permite que una cantidad grande de datos sea transportada holísticamente al pensamiento lo que permite al estudiante cambiar el foco de atención de una porción del objeto en el cuadro entero a otra de tal manera que se puedan observar sus relaciones.

2.2.3 Sánchez (1995) utilizó un programa graficador como apoyo en la comprensión de conceptos de álgebra. El presente trabajo muestra que la visualización de una gráfica en la calculadora graficadora puede realmente ser útil en la comprensión de conceptos algebraicos.

La comprensión es una experiencia subjetiva, pero con los actuales desarrollos de la psicología se proporciona un modelo útil y sencillo, partiendo de la representación del conocimiento, el cual permite elaborar una idea de comprensión.

El conocimiento está organizado en la mente de una persona mediante representaciones internas estructuradas, las cuales se muestran como redes conceptuales formadas por nódulos, estos registran el papel de hechos, procedimientos y proposiciones.

Entonces la comprensión se considera como la incorporación de un nuevo nódulo a la red de conocimientos del sujeto. Un concepto matemático es comprendido si la representación mental que el sujeto posea se incorpora a una red conceptual presente en sus conocimientos.

Al explorar la manera en que los estudiantes forman conexiones entre los conceptos matemáticos que estudian y la organización de la enseñanza, hablamos de la comprensión matemática en la investigación educativa.

La comprensión del álgebra entre estudiantes y algunos profesores, se concibe como un conjunto de procedimientos que tienen que ser memorizados y además debiera expresarse en la posibilidad de utilizarlas para resolver problemas, de acuerdo con las conexiones elementales de los conceptos algebraicos, que se presentan en tres sistemas diferentes:

1. Sistema simbólico del álgebra,
2. Representaciones geométricas y otros campos de la matemática,
3. Situaciones reales o simuladas en las que intervienen cantidades de diferentes tipos: constantes y variables, conocidas y desconocidas[▽]

El primer curso de álgebra en el bachillerato, parece implicar que el estudiante comprende el concepto de factorización, si conoce la definición y sabe realizar ciertos procedimientos básicos. Los alumnos contienen dos tipos de conexiones: conexiones para una comprensión más profunda del tema y conexiones que representen ideas erróneas.

[▽] **SANCHEZ**, Ernesto. *Graficador como apoyo en la comprensión de conceptos de álgebra*. Documento. Matemática Educativa-CINVESTAV. México 1995.p.6 <ESanchez@mvx1.red.cinvestav.mx>.

Por ejemplo las del primer tipo: la factorización de un polinomio permite obtener raíces, las raíces coinciden con las abscisas de las intersecciones de la gráfica. Y las del segundo tipo: $x + x = x^2$.

Factorizar es un procedimiento análogo a la factorización de enteros. Estas conexiones están difícilmente en los programas de álgebra.

2.2.4. También Duval (1988) realiza un trabajo con gráficas y ecuaciones en donde articula los dos registros[∇∇]. Numerosos estudios han mostrado ya las dificultades de lectura y de interpretación de las gráficas cartesianas: pendiente, dirección, altura, ecuación de la recta, etc.

La razón de estas dificultades no debe buscarse en los conceptos matemáticos ligados a funciones afines, sino al desconocimiento de las reglas de correspondencia semiótica entre el registro de las representaciones gráficas y el de la escritura algebraica.

En la enseñanza y en ciertos estudios didácticos se grafica la ecuación a través de la construcción punto por punto, y se olvida que el paso inverso es lo que crea problemas. Para efectuar este paso inverso la aproximación punto por punto no solamente es inadecuada sino que constituye un obstáculo.

Para mostrar las dificultades entre las representaciones gráficas y el de la escritura algebraica se presentan tres momentos:

- Los tratamientos heterogéneos a los cuales dan lugar las representaciones cartesianas.
- Explicitar las variables visuales pertinentes que corresponden a las características significativas de una escritura algebraica.
- Ilustrar los análisis mediante algunos resultados de una encuesta llevada a cabo para este efecto y también mediante la explicación de errores típicos tomados de otros estudios.

El primer momento relaciona tres vías diferentes de las representaciones gráficas las cuales no toman en cuenta los mismos datos visuales de la gráfica.

a) La vía del punteo. Se definen como las representaciones graficas a partir de parejas ordenadas, es de preferencia cuando se trata de trazar la gráfica correspondiente a una ecuación de primer grado o a la correspondiente de segundo grado.

▽▽ *DUVAL, R. (1988). "Graphiques et equations: I'Articulation de deux registres". Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 1. Versión en español de Blanca M. Parra.*

b) Una vía de extensión del trazo efectuado. Es una actividad puramente mental, no da lugar a trazos complementarios y explicativos como un cambio local de la graduación de los ejes para "agrandar" una parte del trazo.

c) Una vía de interpretación global de las propiedades de las figuras. Se identifican todas las posibles modificaciones pertinentes posibles de la imagen gráfica. Se ven las modificaciones conjuntas de la imagen y de la forma de su escritura algebraica como por ejemplo, a partir de la gráfica encontrar la ecuación correspondiente.

El segundo momento trata de las variables visuales y unidades simbólicas significativas. La discriminación de las unidades significativas propias a una expresión algebraica es relativamente evidente. Hay:

los signos relacionados (<, >, =,...),

los símbolos de operación o de signo(+,-)

los símbolos de variable,

los símbolos de exponente, de coeficiente y de constante.

En una expresión algebraica o símbolo corresponde generalmente a una unidad significativa. Hay, sin embargo, unidades significativas en las que los símbolos se omiten: el coeficiente 1, el carácter "positivo" de los coeficientes mayores que cero. Por ejemplo: no se escribe y = +1x, pero en cambio sí se escribe y = -2x.

Lo anterior da importancia a la correspondencia de las variables visuales de la gráfica y de las unidades significativas de la escritura algebraica. Las variables visuales de la recta son inclinación (creciente y decreciente), ángulo de trazo (simétrica, menor, mayor), posición del trazo (arriba, debajo del origen o en el origen).

En el tercer momento la interpretación de las representaciones gráficas cartesianas depende de una identificación precisa de todos los valores de las variables visuales pertinentes y del reconocimiento cualitativo de las unidades de escritura simbólica que corresponden.

2.2.5 Laborde (1993)[∇], investiga los cambios que se introducen en los procesos de enseñanza y aprendizaje por medio del uso de medios ambientes computacionales. Menciona que las computadoras son visualizadas como

[∇] LABORDE, Colette, (1993) The Computer as Part of the Leaming Environment: The Case of Geometry, in *Learning from Computers: Mathematics Education and Technology,* Christine Keitel & Kenneth Ruthven (eds.). Springer-Verlag: Berlin.

parte del medio ambiente del aprendizaje organizado óptimamente por el profesor para promover el aprendizaje del conocimiento matemático al estudiante.

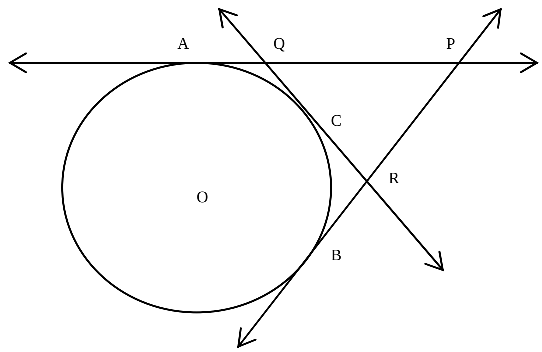
El cambio de herramientas de enseñanza conduce a cambiar la manera en que se ejecutan las tareas y además, las computadoras pueden ofrecer una fuerte interacción entre visualización y conocimiento en geometría euclidiana.

Las figuras pueden ser visualizadas como jugando un rol de la realidad con respecto a una teoría geométrica, así como representaciones materiales por decir: la línea recta, sin anchura, pertenece al mundo de lo ideal.

Laborde da un ejemplo de cómo la interpretación de un dibujo puede depender de las suposiciones hechas sobre las relaciones entre sus elementos...

En la descripción: « Un círculo con centro 0, P es un punto fuera del círculo, A y B son dos puntos comunes a la circunferencia .Se trazan líneas tangentes dibujadas desde P al circunferencia, C es un punto cualquiera de la circunferencia entre A y B, Se traza otra línea tangente por C que intersecte PA en Q y PB en R»

La figura que representa la situación de Colete es la siguiente:



La ambigüedad del dibujo se expresa por la imposibilidad de dar cuenta a través de medios gráficos del hecho de que C es cualquier punto sobre la circunferencia.

Puede haber una distancia entre dibujo y figura por al menos dos razones: únicamente algunos elementos del dibujo son relevantes para el problema al ser interpretado el dibujo depende de las hipótesis hechas en el problema, lo cual solamente puede hacerse explícito por medio del lenguaje; un dibujo en geometría no puede expresar la variabilidad de los elementos de las figuras en tanto que una formulación en lenguaje natural o una expresión simbólica hace posible definir un elemento variable a través de dar el conjunto al que pertenece, como se ha hecho en la descripción.

Varias dificultades de los estudiantes (durante su aprendizaje de la geometría), se originan porque los estudiantes realmente trabajan con dibujos materiales mientras que se espera que trabajen con figuras o con descripciones de figuras. La representación que los estudiantes construyen de los problemas de geometría no es frecuentemente la representación intentada por la enseñanza.

Por ejemplo, los estudiantes no consideran en la una tarea de construcción el uso de propiedades geométricas, por lo que ven a la tarea como el hecho de producir un dibujo material visualmente correcto.

La naturaleza del experimento gráfico sobre la pantalla es enteramente nueva porque involucra movimiento. La novedad aquí es que la variabilidad inherente a una figura está expresada en medios gráficos de representación y no únicamente en lenguaje.

El uso de las computadoras por los estudiantes pueden ser de gran ayuda para concebir objetos teóricos o relaciones a través de una actividad perceptiva.

Las sorprendentes posibilidades visuales proporcionadas por las computadoras podrían conducir a creer que los estudiantes fácilmente pueden entender y conceptualizar objetos complejos.
El medio ambiente de aprendizaje en geometría puede ser organizado de tal manera que:

a) Las herramientas tengan una función importante;
b) La visualización juegue un doble papel.

La visualización es una de las posibles herramientas que pueden ser usadas para resolver problemas geométricos. Pero la potencia del conocimiento geométrico subyace en permitir la solución de problemas que no pueden ser resueltos únicamente por visualización. Esto último puede ser usado para promover el aprendizaje de conocimiento Geométrico.

Sin embargo la visualización puede ser usada para organizar situaciones problemáticas interactivas, gracias a la actividad preceptual, en donde los estudiantes pueden decidir si su solución es correcta o no. El medio ambiente en geometría puede ser organizado de tal manera que la visualización sea un instrumento parcial de solución (mayormente en la exploración del dibujo) y de validación.

Se piensa que un software es visualizado y usado como un campo de experimentación y construcción del aprendizaje por el estudiante. Ambos aspectos se desarrollan a través de un proceso de interacción, en el cual el maestro juega un papel decisivo a través de la elección de las situaciones problema.

2.2.6. Rodríguez (1995) hace referencia en su trabajo de la visualización de la función cuadrática en el segundo semestre del Colegio de Bachilleres, uno de los temas que abarca el programa de estudio es el de Funciones y -su relación con las ecuaciones-, debido a la importancia que representa que el alumno comprenda la noción de función y que recuerden palabras, símbolos, o imágenes que se encuentran vinculados con el concepto, implica la promoción de aprendizaje significativo.

La materia de matemáticas busca ampliar en el estudiante el conocimiento y el desarrollo de la capacidad de abstracción, mediante el estudio y la práctica de los diferentes niveles de formalización y generalización, de modelos, lenguajes y métodos de disciplina, no sólo como un sistema lógico o como una herramienta en el estudio de otros campos del conocimiento sino también como una ciencia con una dinámica propia.

En Matemáticas II, se abordan los temas de las funciones lineales, cuadráticas, polinomiales, exponenciales y logarítmicas, analizando sus propiedades y realizando su representación gráfica, como un apoyo en la formalización del conocimiento matemático e iniciado al estudio de los procesos dinámicos. Aun cuando se han planteado diversas estrategias, por un lado la dificultad de aprendizaje del concepto y, por otro lado, las dificultades derivadas por la manera como se enseña, por ejemplo, el mecanismo para adquirir tales conceptos matemáticos es poco favorable ya que los maestros han realizado en forma general el desarrollo del tema empleando gis y pizarrón por lo cual al realizar la tabulación para la posterior graficación se hace muy tardado y en ocasiones hasta aburrido para el alumno, por lo que una forma en que se puede llevar a cabo de una manera más atractiva, es empleando como una nueva herramienta de graficación, las computadoras.

Uno de los objetivos del programa de Matemáticas II es que en el tema de las funciones polinomiales cuadráticas se estudie la relación entre la ecuación de segundo grado con una incógnita correspondiente y el modelo matemático que conduzcan a este tipo de funciones en la resolución de problemas, estableciendo los diferentes procedimientos de solución algebraicos y geométricos.

En este sentido, se recurre frecuentemente a las gráficas como un importante apoyo para estudiar los distintos tipos de funciones, de modo que se pueda visualizar tanto el modelo algebraico de un cierto problema como su comportamiento gráfico.

En este estudio se pretende mostrar cómo se facilita el aprendizaje utilizando la computadora. En diversas investigaciones relacionadas con el problema del aprendizaje, de las matemáticas se ha observado que las representaciones visuales ofrecen una introducción a las abstracciones complejas, debido a la potencia y la accesibilidad de las imágenes generadas por computadoras que tienen una influencia estimulante en la visualización, la computadora puede convertirse en una herramienta educativa extensiva ya que puede producir una serie de cambios como son:

- Una nueva forma de organizar el pensamiento tanto para el maestro como para el alumno, ya que el primero deberá ver que las prácticas a realizar contengan los elementos integradores del tema y que de esta manera el alumno no se dedique a oprimir únicamente teclas sino que dé una interpretación de sus resultados.

- Desechar los métodos tradicionales, memorísticos, repetitivos que tienden a hacer que el alumno olvide mas rápidamente el conocimiento adquirido, sino que a través de la microcomputadora se enfatice en las características de los parámetros lo que hará mas rápida la identificación teniendo como implicación:

- Un nuevo lenguaje en el que se asocie la palabra (representación algebraica), con la imagen (representación gráfica). En el proceso de aprendizaje (interrelación maestro - alumno), en el cual nos referimos a la manera en que el maestro trata de explicar que en una expresión algebraica cada símbolo corresponde a una unidad significativa y como se llegan a omitir el coeficiente o exponente 1, el carácter positivo por ejemplo en una expresión $f(x) = x$ su coeficiente es + 1 y su exponente también, pero si tenemos: $f(x) = x^2$ su coeficiente es + 1 y su exponente es + 2, se omiten los signos positivos, pero si tenemos $f(x)= -2x^2$, si se escribe el signo negativo en el coeficiente o bien como siempre se da $f(x) = x^2 + 5$, el alumno lo identifica como una expresión cuadrática de la forma $f(x) = Rx^2 + b$ pero si se le denota como $f(x) = 5 + x^2$ empiezan a surgir los conflictos; por lo cual, es importante que se cuide el lenguaje de los parámetros o unidades significativas y con ello se proporcionará un mejor entendimiento en los estudiantes, que sugieren una mejoría en la enseñanza evitando de esta manera la creación de imágenes conceptuales erróneas.

- El procesamiento de la información visual adquirida se incremento con el uso de la computadora, ya que cuando el alumno ha creado una definición conceptual e imagen conceptual que, como hemos señalado, puede ser errónea-, entonces al trabajar con actividades que previamente se han elegido se puede llegar a proveer a los alumnos de ejemplos que formen la imagen conceptual deseada, no solamente al inicio del tema, sino a lo largo de todo el período de enseñanza ya que los elementos de la imagen conceptual que no son reforzados consistentemente son más fácil de ser olvidados, o bien pueden distorsionar la imagen.

- La problemática para pasar de un sistema algebraico a uno gráfico y viceversa; puede deberse a la definición conceptual, operaciones aritméticas fundamentales, leyes de los signos; dificultad para interpretar dominios, entre otros.

- Una Imagen Conceptual, es construida por medio de la experiencia y se modifica en la medida en que el alumno madura sus conceptos, por lo que es una estructura congnitiva que incluye los dibujos metales, las propiedades y los procesos asociados con el concepto.

En algunos casos las definiciones dadas son demasiado complicadas como para que el alumno las entienda y no ayudan a crear imágenes conceptuales en la mente de los estudiantes. De igual forma, existen algunas definiciones que tienen un significado, pero que cuando se muestran algunos ejemplos específicos forman una imagen conceptual errónea; por ejemplo, el decir que f(x) = senx es una función lineal por el simple hecho de tener una variable a la primera potencia. Por lo tanto, para lograr ver la influencia y el apoyo que representa la computadora en el proceso de enseñanza - aprendizaje se pondrá especial atención en:

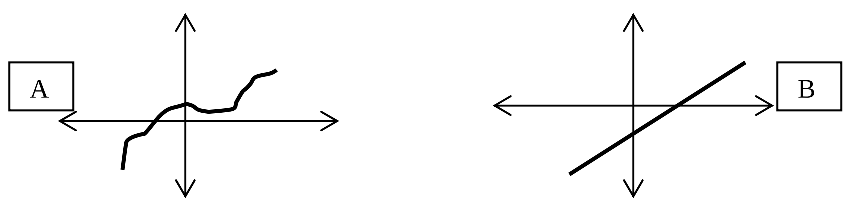
- La creación de la definición conceptual e imagen conceptual del estudiante; cómo adquieren el status de símbolo.
- La influencia del lenguaje en el proceso de aprendizaje; (interrelación maestro - alumno).
- El procesamiento de la información visual adquirida: (cómo se incremento con el uso de la microcomputadora).
- La recuperación de la información de una gráfica: (lectura de gráfica).
- La problemática para pasar de un sistema algebraico a uno gráfico y viceversa.

2.2.7. Hitt (1995) utilizó la expresión Visualización Matemática como preludio a la abstracción de conceptos en el estudio: Dificultades en el Paso de una Representación Gráfica a un Contexto Real y Viceversa:

> "En la visualización matemática, es en la aptitud de los estudiantes para elaborar diagramas apropiados (con lápiz y papel, o en algunos casos con microcomputadora) para representar un concepto matemático o un problema del uso del diagrama para alcanzar la comprensión y como ayuda en la resolución de problemas".

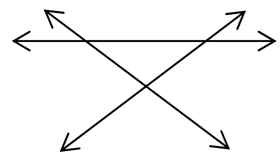
Desde este punto de vista, no sólo se espera que el individuo pueda crear una imagen mental de un concepto si no que además procese interiormente (según transformaciones mentales) los conceptos matemáticos adquiridos, y pueda exteriorizar esa imagen mental del concepto de manera que sea observable, ya sea de manera verbal, sobre papel, pantalla, etc. La articulación de una representación a otra tiene que ver con el proceso de asociar mentalmente -preservando el significado- las diferentes representaciones de un concepto. Se espera que un individuo pueda exteriorizar las diferentes representaciones mentales que tiene de un determinado concepto, a través de diagramas, símbolos, frases, es decir, en representaciones externas relativas al concepto en cuestión.

Diferentes investigaciones se han realizado en relación con algunas representaciones. Por ejemplo, Vinner y Dreyfus (1989) reportan que los alumnos entrevistados en su experimentación, no vinculan la "definición del concepto" (fijación de la noción, que la persona, tiene en la mente) con su "imagen conceptual" (nociones mentales de cualquier estilo que surgen al evocar el concepto). Por ejemplo, señalan que los alumnos no pueden reconocer como representación gráfica de una función lo mostrado en la Figura A y pocas veces la identifican con la figura B:



Estudios acerca de los problemas del paso de una representación a otra de un concepto matemático, ha llevado a la idea de considerar a las representaciones de un mismo tipo, junto con las operaciones que se puedan realizar según reglas preestablecidas, como un sistema (Kaput, 1987).

Por ejemplo, lo mostrado en cuadro siguiente.

Sistema algebraico (Representaciones algebraicas)	Sistema gráfico (Representaciones gráficas)
$f(x) = x + 2$, x e R $g(x) = -x + 3$, x e R $f(x) + g(x) = 5$, x e R	

En su estudio, la afirmación de que es más difícil pasar del sistema gráfico al algebraico que a la inversa. La visualización de conceptos debe trabajarse paralelamente en procesos analíticos, para evitar que se generen respuestas erróneas posiblemente dominadas por el nivel intuitivo primario en el que se encuentran un individuo o persona.

"Usando herramientas tecnológicas para promover:

I. Un acceso democrático a Ideas potentes en Matemáticas.

II. Una preparación para el éxito en una era Tecnológica"

2.2.8. El Dr. Lesh (1995) describe el trabajo que presenta en este seminario:

> La meta de la presentación será mostrar por qué el desarrollo de software deba proceder en paralelo con esfuerzos que busquen el desarrollo de los maestros, así como el desarrollo de materiales no basados en la tecnología tanto para la instrucción como para la evaluación.
>
> La clase de 'aula del futuro' que se concibe no involucra simplemente hileras de computadoras con estudiantes trabajando como individuos en aislamiento, también debe de tener varios niveles y tipos de tecnologías interactuando, las cuales involucrarán un gran número de artificios manuables no costosos (calculadoras-graficadoras) las cuales son capaces de llamar o de guardar información de 'un número pequeño de estaciones de trabajo computarizadas, las cuales están diseñadas para que equipos de estudiantes trabajen cooperativamente. El énfasis se dirige a las maneras de usar herramientas tecnológicas para promover interacciones estudiante-maestro y estudiante-estudiante.
>
> Los proyectos centralizados realizados se enfocan sobre el desarrollo de herramientas para el aprendizaje, basadas en la tecnología, que promuevan:
>
> I. Un acceso democrático a ideas potentes, y
>
> II. La preparación para el éxito en una sociedad basada en la tecnología...

El primero de estos temas enfoca sobre aspectos de equidad, y el segundo enfoca sobre aspectos de los cursos escolares.

MODELOS y MODELAJE es un tema central de los proyectos realizados por Lesh, debido a que enfatiza la elaboración de sentido matemático y científico. Además provee vínculos para llegar a este fin, enfocado sobre los estudiantes, maestros, evaluación e instrucción basada en el aula.

La ideas que nos señalan los autores

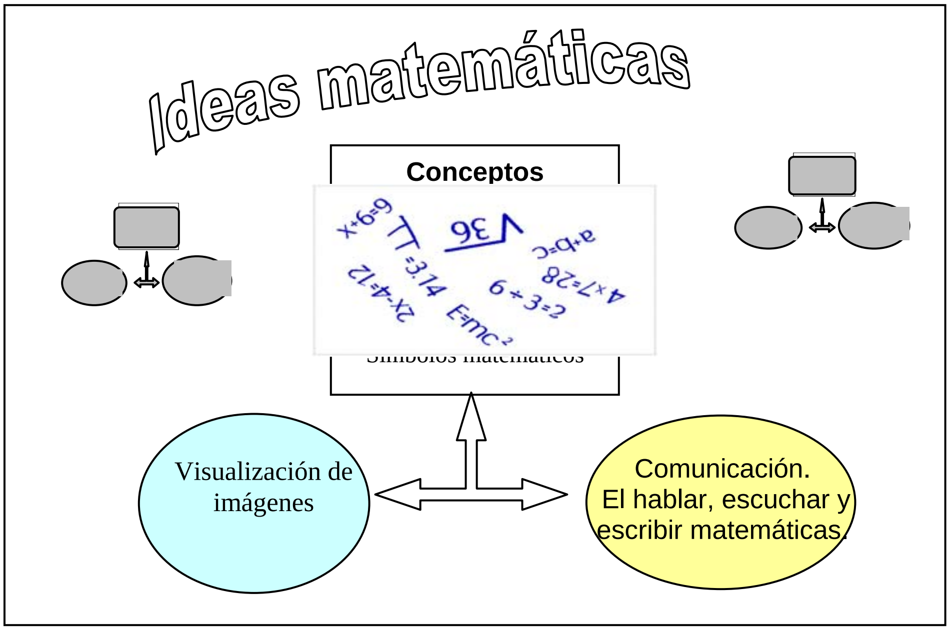
El trabajo de Bruner sobre el desarrollo del pensamiento es base fundamental para las investigaciones realizadas por Tall en la comprensión de las ideas matemáticas.

Bruner reconoce tres momentos en el proceso del desarrollo del pensamiento: el primero es el preceptivo, el segundo el visual y el tercero el simbólico, mismos que utiliza y amplia Tall en sus experimentos de aprendizaje.

Tall inicia con el desarrollo del pensamiento conociendo el entorno, a través de la acción realizada por el estudiante. Él percibe el experimento con los sentidos, después lo refuerza con imágenes representando dicha acción y una vez que establece reciprocidad, da un soporte al lenguaje y a los símbolos matemáticos, reafirmando las ideas matemáticas.

Tall retoma la representación metal de Bruner, realiza una correspondencia del sistema Icónico con la utilización de medios computacionales, haciendo énfasis en la visualización, tanto en una visión global producida por los mismos diagramas visuales como en el proceso de simbolización y capacidad de buscar símbolos escritos, lo que da un soporte a las ideas matemáticas simbólicas.

Se considera que las imágenes toman un papel fundamental en el fortalecimiento de las ideas matemáticas, así como el lenguaje y manejo de símbolos escritos. Lo cual puede apoyar a los conceptos matemáticos y a la formalización requerida en matemáticas.



El diagrama anterior muestra, que tanto la visualización de imágenes como la comunicación entre el profesor y el estudiante ayudan a la comprensión de conceptos e ideas matemáticas.

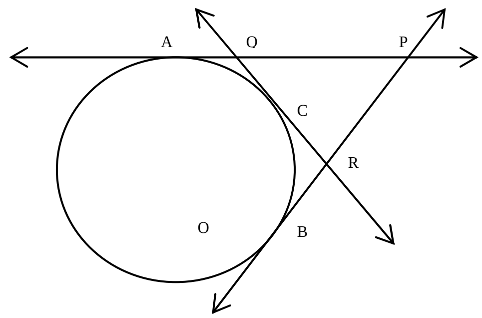
Sánchez (1995), dice que un concepto matemático es comprendido si la representación mental que el sujeto posea se incorpora a una red conceptual presente en sus conocimientos.

La comunicación entre el profesor y el estudiante, apoyado con la visualización de imágenes, pretende ampliar y reforzar la concepción del conocimiento del tema de estudio. No sólo se espera que el individuo pueda crear una imagen mental de un concepto matemático (Hitt, 1995), si no que además lo procese interiormente (según transformaciones mentales), y pueda exteriorizar esa imagen mental del concepto de manera que sea observable, ya sea de manera verbal, sobre papel, en pantalla, etc.

Por ejemplo, Colete menciona lo siguiente: « Un círculo con centro 0, P es un punto fuera del círculo, A y B son dos puntos comunes a la circunferencia. Se trazan líneas tangentes dibujadas desde P al circunferencia, C es un punto cualquiera de la circunferencia entre A y B, Se traza otra línea tangente por C que intersecte PA en Q y PB en R»;

Esta comunicación escrita proporciona elementos de una idea matemática, por lo tanto podemos hacer varios dibujos geométricos usuales en los que no se expresa la variabilidad de los elementos de la figura y menos aún el rango de los valores de los elementos variables.

La asistencia de profesor y la imagen correspondiente afianza la idea original. Esta situación de Colete se representa como:



La imagen clarifica la comunicación y refuerza los conceptos de circunferencia, círculo, tangente, puntos de intersección y de tangencia; lo que reafirma a la idea original del problema.

Hitt (1995), dice que la articulación de una representación a otra tiene que ver con el proceso de asociar mentalmente, preservando el significado, las diferentes representaciones de un concepto. Se espera que el estudiante pueda exteriorizar las representaciones mentales diferentes que tiene de un determinado concepto, a través de diagramas, símbolos o frases, es decir, a través de representaciones externas relativas al concepto en cuestión.

El trabajo realizado con los estudiantes en el C.E.C. y T “Lázaro Cárdenas” tiene una inclinación hacia la visualización, apoyada por imágenes que realiza el software **Algebra CD** en la computadora. Este programa promueve la escritura simbólica y la representación gráfica de las expresiones cuadráticas, las parábolas.

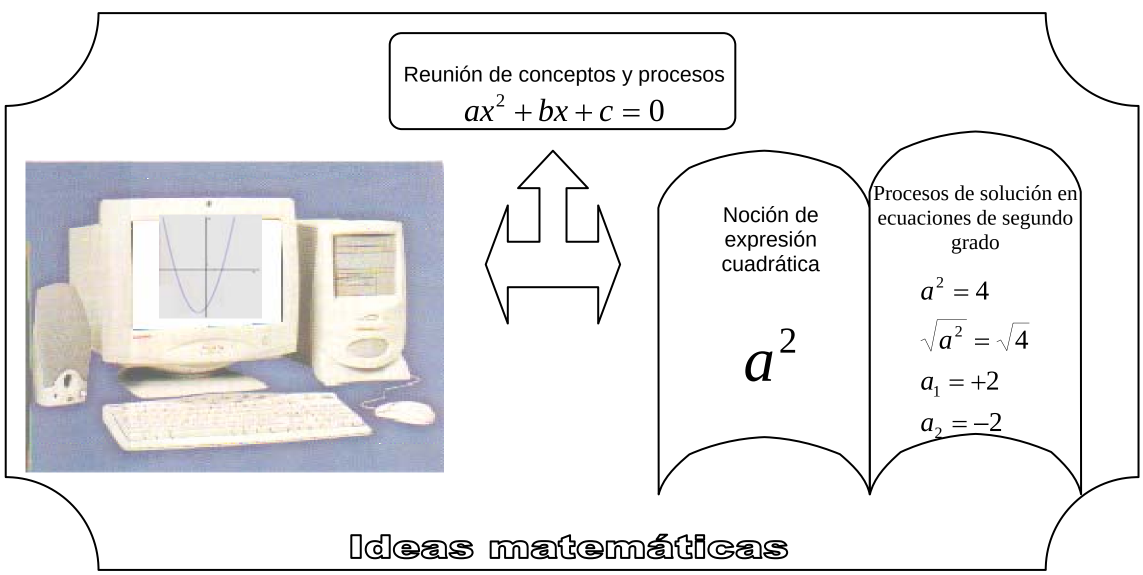
Para llevar acabo este trabajo, se tomaron algunos aspectos de las investigaciones de Tall, Colete y Sánchez, ellos utilizan la visualización de imágenes en la computadora y en la calculadora graficadora respectivamente; para sustentar las ideas matemáticas de sus temas de estudio: límites en cálculo, figuras en geometría y la ecuación de la recta en álgebra.

También, para apoyar la visualización se diseño un curso – taller de álgebra, donde el tema principal es la resolución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita. Este curso se apoya de un cuaderno de trabajo dividido por sesiones, donde en cada una de ellas contempla conocimientos previos al tema principal y actividades prácticas. Este cuaderno de trabajo se encuentra anexos al presente.

En la primera sesión se dio la introducción al manejo del programa *Algebra CD*, mismo que apoyaría la visualización de imágenes, especialmente la parábola, figura resultante al graficar una expresión cuadrática. El programa hace interactuar al alumno donde relaciona la escritura simbólica de dicha expresión con su imagen. La grafica se produce en el mismo momento de concluir la escritura de la expresión algebraica.

En este caso los símbolos, no solamente son usados para representar los conceptos compactamente, si no también son utilizados como procesos. Esta última idea puede apoyar los procesos de solución de la ecuación de segundo grado con una incógnita y la noción de expresión cuadrática. La reunión de conceptos y procesos, además de la imagen del argumento geométrico donde una parábola intersecta al eje de las abscisas, concede un acercamiento a la solución de la ecuación de segundo grado.

La computadora es particularmente práctica en llevar a cabo los procedimientos rápidamente y en forma casi instantánea, presentando el rendimiento visual en la pantalla. Es un instrumento valioso que apoya el conocimiento a través de la visualización, puede fortalecer y clarificar las ideas matemáticas.



La imagen en la computadora nos auxilia en la comprensión de los conceptos y procesos, dando un soporte a las ideas matemáticas en varios niveles del pensamiento matemático.

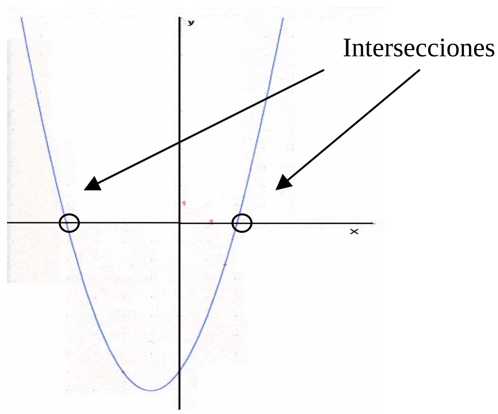
Rodríguez (1995) ha utilizado la computadora para la enseñanza de las matemáticas y resolver algunos problemas de aprendizaje de esta asignatura. En diversas investigaciones relacionadas con dichos problemas se ha observado que las representaciones visuales ofrecen una introducción a las abstracciones complejas, debido a la potencia y la accesibilidad de las imágenes generadas por computadoras que tienen una influencia estimulante en la visualización.

Por ejemplo, la visualización de funciones de las expresiones cuadráticas en el programa Algebra CD hace referencia a algunas abstracciones complejas de conceptos como términos, coeficiente 1, grado absoluto de un polinomio y, con un acercamiento, a los puntos de intersección de la curva. También puede apoyar en los procesos de solución a ecuaciones de 2º grado como la factorización.

Con la visualización de la parábola, el estudiante puede recrear la misma figura como una imagen mental; por lo que al realizar más funciones de este tipo puede aprender a observar las posibles soluciones a las ecuaciones de segundo grado en la gráfica. Si el estudiante ejercita esta imagen mental haciendo cálculos numéricos y trazando la función con lápiz y papel, puede habilitarlo para explorar las propiedades de la función cuadrática de una gráfica dada y formular intuitivamente el significado de raíces o soluciones.

Como por ejemplo, visualizando $f(x) = x^2 + 2x - 8$, los procesos del acercamiento visual y el cálculo numérico de la expresión cuadrática recurre a la gráfica de la parábola y a los puntos de intersección (-4,0) y (2,0), estos se dirigen a una noción intuitiva de solución a la ecuación $x^2 + 2x - 8 = 0$ ya que los puntos de intersección en el eje de las abscisas tienen los valores de:

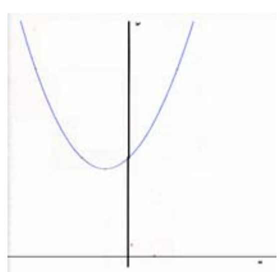
$x_1 = -4$, $x_2 = +2$.



Las intersecciones en x como una noción intuitiva

a la solución de ecuaciones de 2º grado

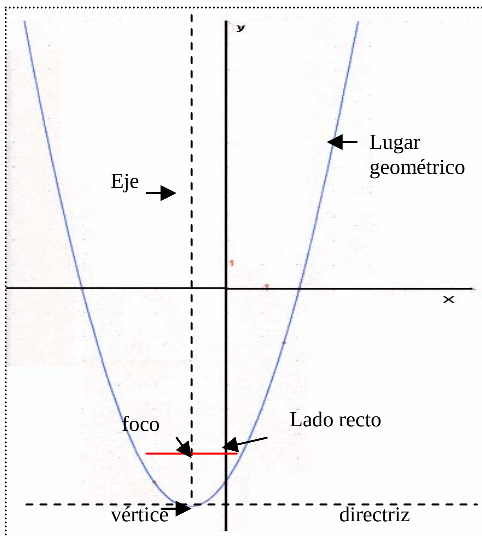
Si una ecuación de segundo grado no tiene solución racional, entonces la gráfica no tiene punto de intersección o puntos de intersección en el eje de las equis, como: $x^2 + 2x + 8 = 0$



La parábola no tiene puntos de intersección en x, por

lo que la ecuación no tiene solución racional.

Realizando varios ejemplos podemos llegar a la idea más general de la parábola, observando algunas de sus propiedades y señalando sus componentes; por ejemplo en la primera gráfica de f(x) = $x^2 + 2x - 8$, se puede observar su directriz, eje de la curva, foco, vértice, lado recto y dentro de sus propiedades: el lado recto equivale a cuatro veces la distancia del foco al vértice, su posición con respecto a su eje o bien, su excentricidad.



De este modo la visualización concede un apoyo en la imagen mental y soporte a los conceptos de la expresión cuadrática y ecuación de segundo grado con una incógnita, puntos de intersección y soluciones, respectivamente; los cuales son reunidos formalmente.

Las imágenes específicas pueden ser vistas como ejemplos genéricos de los conceptos bajo la consideración y por la observación en un rango de los propios ejemplos, el estudiante puede hacerlos suyos alentado el pensamiento en el concepto, mientras el conocimiento más general se apropia en estos ejemplos.

El software habilita al estudiante para explorar los ejemplos y también preferentemente los contra ejemplos de un concepto, en la preparación del pensamiento de un gran concepto que se apropia por estos ejemplos, lo que llama Tall un organizador genérico.

El software no grafica realmente el concepto general, pero si es capaz de trazar, un polinomio típico; es decir, un polinomio cuadrático, pero lo que no se puede trazar es polinomio general, aún cuando puedo simbolizarlo como:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$$

El trabajo con los polinomios cuadráticos puede dar un soporte a la comprensión de esta compleja idea matemática. Esta visualización de la razón sólo es eventualmente inadecuada en matemáticas, ya que es esencialmente conveniente realizar una descripción simbólica o verbal del concepto donde es posible formular el caso general y los medios verbales/simbólicos pueden ser llevados a formular los argumentos generales, es decir, la formalización matemática.

Duval (1988), la razón de estas dificultades no debe buscarse en los conceptos matemáticos ligados a funciones afines, sino al desconocimiento de las reglas de correspondencia semiótica entre el registro de las representaciones gráficas y el de la escritura algebraica.

En un terreno más avanzado, los investigadores matemáticos usan a menudo la imaginación visual para soportar el pensar matemático que presenta eventualmente, pero como afirma Tall (1994) "podemos ser guiados por las imágenes sin ser esclavo por ellas".

La computadora puede convertirse en una herramienta educativa extensiva, ya que se puede desarrollar, según Lesh (1995), en materiales educativos tanto para la instrucción como para la evaluación.

CAPITULO 3.

Diseño de la Investigación

DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

INVESTIGACION ETNOGRAFICA.

En esta sección de la tesis, se presentan algunas de las características generales de las investigaciones etnográficas. Elegimos este enfoque como el adecuado para llevar acabo la investigación que aquí se presenta, por su flexibilidad y efectividad para la obtención y análisis de datos.

La exposición de las características más importantes que satisface una investigación etnográfica esta basada en la presentación que sobre el tema realiza Hernández (1995) “La investigación etnográfica tiene su origen en la antropología y utiliza un enfoque naturista-interpretativo para la recolección y análisis de sus datos.”

Según este autor, las interpretaciones que realizamos tienen su origen en nuestro propio conocimiento cultural y las interrogantes que deseamos dilucidar. La sistematización de nuestras observaciones e interpretaciones nos permiten hacer una reconstrucción sobre los diversos significados y relaciones que son articulados en un fenómeno u objeto cultural.

La investigación etnográfica requiere una documentación amplia y detallada sobre uno o varios aspectos de una cultura y su relación con la cultura general. El instrumento por excelencia para hacerlo es el propio investigador.

La cuestión de qué métodos de recolección de datos utilizar tiene una respuesta obvia: aquéllos que son más fáciles de manejar por un sujeto humano.. Los humanos recolectamos información hablando con la gente, observando sus actividades, examinando el medio físico donde viven, leyendo sus documentos, etc.

La idea de método en etnografía se refiere a un conjunto de técnicas y herramientas para recolectar información.. Las principales técnicas agrupadas aquí son:

- Observación Participante. Es la técnica primaria usada por el investigador para obtener información, consiste en convivir con los sujetos y participar en sus actividades cotidianas. El investigador documenta las actividades del grupo, sus formas de interacción y la manera como hablan acerca de su vida, en notas de campo y registros. Ahí son incluidos comentarios e interpretaciones basadas en las percepciones del investigador acerca de su papel social en la comunidad y cómo reaccionan los sujetos ante él mismo.

-Entrevistas. El investigador puede plantear interrogantes a los sujetos sobre distintos aspectos de su vida. Las entrevistas pueden ser estandarizadas (las mismas preguntas a un grupo amplio de sujetos) y no estandarizadas (tener una guía de preguntas y adaptarla a los puntos y detalles que surjan durante la propia entrevista).

Los métodos no interactivos permiten al investigador obtener información con poca o ninguna interacción con los sujetos. Estos métodos están sujetos a factores fortuitos y el investigador puede. No obtener la información que desea. La técnica referida es:

- Observación no participante. Consiste en observar solamente lo que sucede y registrar los eventos en el escenario.

Las técnicas anteriores han sido desarrolladas para hacer frente a la naturaleza abierta e interactiva de la investigación etnográfica. Todas pueden ser utilizadas en un momento u otro de la investigación, su utilización depende de las interrogantes y la información necesaria para dilucidarlas. El punto central para decidir su utilización depende del enfoque progresivo de las interrogantes y la reflexión del investigador para encontrar y documentar aquello que desea investigar.

Ahora pasaremos, a describir las fases de una investigación etnográfica y algunas indicaciones que pueden ser valiosas en su comprensión.

Proceso de la Investigación etnográfica

En forma general, el desarrollo de una investigación etnográfica cubre tres fases: trabajo de campo, análisis de los datos y redacción del reporte.

No obstante que esta es la secuencia temporal básica, esto no debe conducirnos a pensar que es una secuencia fija que se complete fase con fase.

Existe, frecuentemente, un traslape entre las fases y la posibilidad de regresar a una fase previa y, también, modificar las cuestiones que serán abordadas en una fase posterior. La investigación etnográfica presenta una flexibilidad notable, permitiendo que se completen los datos específicos no contemplados previamente en el trabajo de campo y la reformulación, incluso, de las interrogantes y objetivos de la investigación.

El trabajo de campo. El trabajo de campo comienza con la selección del lugar o grupo que deseamos estudiar. La selección del escenario se hace de acuerdo con los objetivos de la investigación y en forma intencional.

El trabajo de campo es objeto de una planeación donde debe ser considerado: lugar, duración, financiamiento, alojamiento y presentación con unos miembros del grupo.

El trato respetuoso y educado con los miembros de la comunidad reduce la reactividad y suspicacia que acarrea el trabajo de investigación. Asimismo, el investigador debe tratar de ganarse la confianza de los sujetos y garantizar la confidencialidad de lo que se le diga.

Las observaciones sean participantes o no participantes constituyen una sistematización de la forma común en que una persona desarrolla sus interacciones sociales o accede al conocimiento de un nuevo lugar.

La primera actividad que se recomienda utilizando la observación no participante en escenarios cerrados es la descripción física del salón y los sujetos observados, descripción de la actividad principal, acciones realizadas por el maestro, esto incluye lo que hace y lo que dice y la descripción de las interacciones de un grupo de alumnos o entre el alumno y el maestro.

La forma que se tomaron las notas fue durante la observación en un formato para el registro que se presentará más adelante.

Los escenarios que sugieren para esta observación son grupos escolares desde preescolar hasta bachillerato.

En la etnografía educativa, generalmente, se utiliza la observación no participante y las entrevistas no estructuradas para estudios en el aula; particularmente, cuando se esta interesado en observar como se desarrolla la enseñanza de un contenido o materia y las formas de interacción en el aula. Pocas veces, el investigador asume el papel de maestro o alumno y realiza observaciones participantes. Por otro lado, cuando se desea estudiar los puntos de vista de los diferentes grupos, maestros, alumnos, directores y padres de familia) sobre un problema particular conviene utilizar la observación participante.

En cualquier caso es factible adecuar las técnicas de observación al propio curso de la investigación y la delimitación que se haga de las interrogantes a clarificar. Más adelante presentó algunas notas y comentarios de la realización de la investigación.

GUIA PARA LA REALIZACION DE OBSERVACIONESY ENTREVISTAS EN LA INVESTIGACIÓN ETNOGRAFICA SEGÚN HERNANDEZ (1995)

Observaciones

La utilización de observaciones participantes o no participantes requiere del conocimiento y manejo de algunas reglas sencillas. Las reglas que se presentan son generales y tienen como propósito introducir al lector en el saber hacer de la investigación etnográfica.

La primera regla es presentarse ante el grupo que se desea observar y comentar de manera general lo que se pretende estudiar. Obtenido el consentimiento se hacen las observaciones de manera discreta y sin abusar de la paciencia de aquéllos a quienes observa.

Las notas de observación se pueden realizar en hojas o cuadernos fáciles de manipular, se recomienda utilizar hojas de tamaño carta partidas a la mitad o blocas de taquigrafía. Si utiliza mitades de hojas, antes de entrar a observar hay que asegurarse de tener hojas suficientes y de numerarlas. Estas notas están dirigidas a observar las acciones y verbalizaciones de los sujetos, así como los diferentes rasgos de la comunicación no verbal desarrollados durante una interacción.

Para una sencilla y adecuada forma de tomar las notas, sugerimos seguir las siguientes recomendaciones:

- Tratar de utilizar un lenguaje común directo y sencillo, rescatando la mayor cantidad de diálogos y expresiones literales.

- Comienza la observación con una descripción física del escenario y los sujetos interactúantes; apoyándose en un croquis del escenario y distribución de los sujetos. Enseguida hacer una descripción de la actividad principal.

- Tratar de registrar "todo" lo que sucede y después enfocar la observación en diferentes interacciones o eventos, de acuerdo a los interrogantes de interés o de aquello que resulte significativo en ese momento.

Tratar de ver lo familiar y cotidiano como algo extraño, cuestionando continuamente el significado que pueda tener para los sujetos todo aquello que digan o hagan. Si no se conocen los nombres de los sujetos, hay que diseñar claves para identificar a los sujetos. Cuando se conocen los nombres, hay que memorizarías rápidamente y anotarlos en lugar de las claves iniciales.

Anotar el paso del tiempo, cada cinco minutos anotar la hora.

Si se anota un comentario personal o una pregunta, debe hacerse en primera persona. Cada vez que se anote una expresión literal o una serie de diálogos, hay que ponerle comillas.

Estas notas servirán, al transcribirlas y transformarlas en un registro, para realizar una reconstrucción de lo sucedido en un escenario. Las notas deberán ser transcritas y transformadas en un registro etnográfico.

La trascripción de las notas se debe hacer casi inmediatamente, no más de 30 6 40 minutos después de hecha la observación. Mientras más tiempo pasa, se pueden perder un mayor número 'de detalles que tiene presentes el observador y que sirven para contextualizar mejor las notas.

El formato para hacer el registro debe contener las características que se muestran en el cuadro siguiente:

Se deja un margen amplio al lado izquierdo de la hoja. Este margen después será de utilidad para realizar señalamientos, comentarios, preguntas, cuestionamientos, así como seleccionar los eventos relevantes para el análisis de datos

En el ángulo superior derecho se específica.

1. Evento principal observado.
2. Escenario y sujetos observados.
3. Fecha.
4. Hora de inicio y término
5. Nombre del observador.

(DESCRIPCIÓN)

De acuerdo con las características de esta investigación etnográfica, el trabajo de recolección de datos se pudo llevar acabo en diferentes situaciones de la investigación aquí presentada, como:

1. Para iniciar la investigación se estructuró un curso taller del tema de nuestro interés y cuadernillo de trabajo para cada alumno participante, anexo al final de la Tesis, para recolectar información. Se utilizó un ambiente computacional de acuerdo a los requerimientos de la investigación.
2. El desarrollo del curso taller, propicia la interacción con los alumnos y se puede obtener información hablando con ellos, observando sus actividades y calificando sus ejercicios del cuadernillo de trabajo.
3. El cuadernillo de trabajo puede ser un tipo de guía para propiciar la entrevista con los alumnos y motivar la comunicación entre ellos.
4. Otra forma de obtener información, fue sobre la base de la observación en el transcurso del taller de álgebra y para registrar esos eventos se utilizó un formato que más adelante se mostrará. Dichos registros se fueron anotando entre los 5 y 10 minutos y a veces en periodos más largos de acuerdo a la dinámica de este taller, lo que llevó que al final de las sesiones completar los registros con detalles que se tienen presentes y que sirven para contextualizar mejor las notas.

Para nuestra investigación se realiza el registro que recomienda Hernández (1995), cuya estructura es de dos columnas. La columna de la derecha se anota las descripciones de la investigación y en la columna de la izquierda se utiliza para comentarios, preguntas, cuestionamientos o para seleccionar eventos relevantes para el análisis de datos.

En el registro de investigación que se presenta en este Capítulo, se decidió agregar una tercera columna para la comparación de estas dos columnas con el marco teórico del Capitulo 2.

Descripción de la población.

La población será un grupo de observación 20 a 30 alumnos que se formará a través de una invitación a participar y se les pedirá que resuelvan un cuadernillo de trabajo sobre ecuaciones segundo grado visualizando funciones cuadráticas usando el software mencionado.

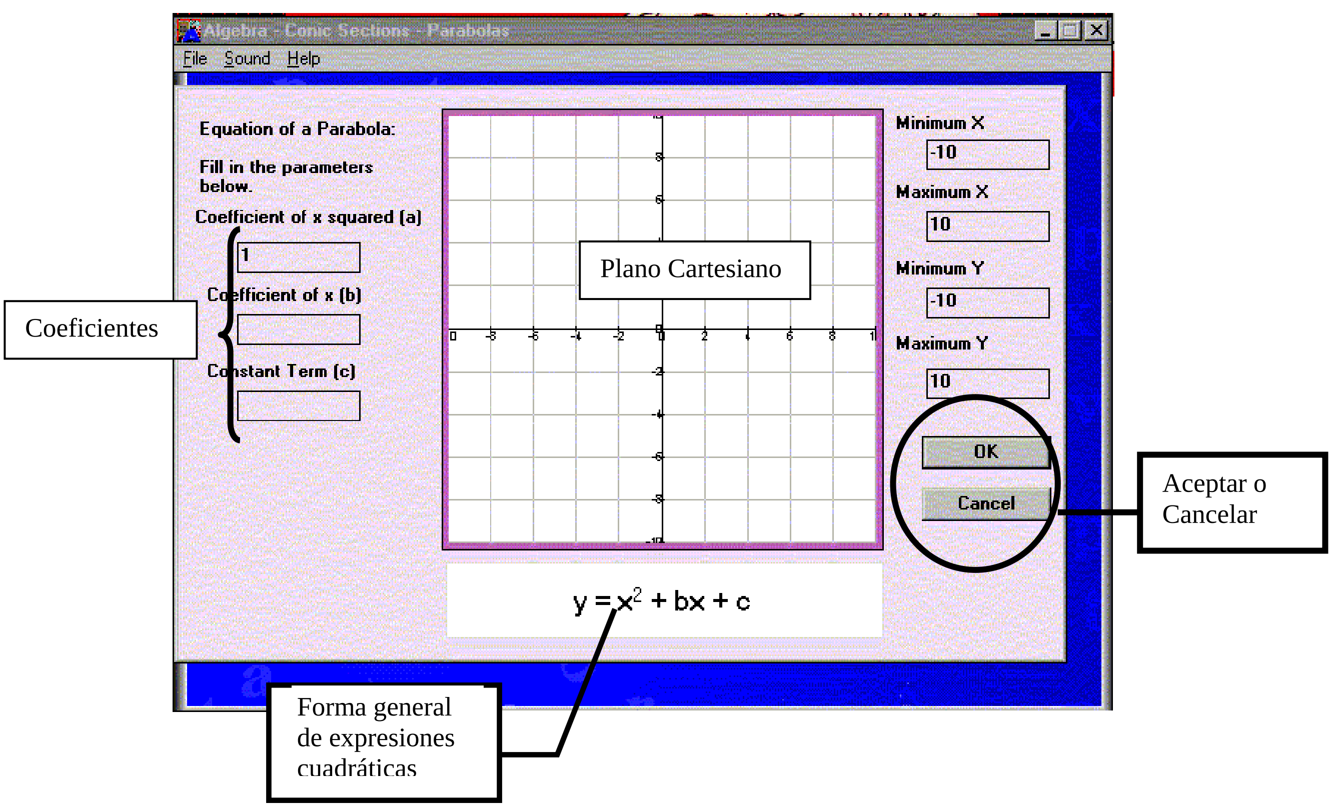
Metodología. (Instrumentación de una propuesta de trabajo didáctico usando un software educativo)

Se implementó un taller de matemáticas de dos semanas en el C.E.C.y T. “Lázaro Cárdenas“ en dos aulas: primeramente en aula audiovisual equipada con una computadora con CD, Data Show y pantalla; posteriormente en un aula de cómputo para continuar la realización de la propuesta.

Con el software EXPERT ALGEBRA CD, producido en los Estados Unidos en 1995 por la Compañía Expert Software; donde practican el álgebra a través de ilustraciones y animaciones y se puede utilizar como complemento en el primer año del bachillerato.

Este programa computacional se subdivide en dos tópicos: primer semestre y segundo semestre. En el primer semestre contiene números reales, variables, exponentes, polinomios, ecuaciones lineales y gráficas. En el segundo semestre contiene factorización, sistemas de ecuaciones, operaciones con fracciones, radicales y exponentes; funciones y relaciones. En este último tema se centrará nuestro trabajo

Enseguida se presenta la pantalla de trabajo:



En la sección de “Coeficientes” tiene 3 casilleros correspondientes a los valores de a, b y c de la forma general de las expresiones cuadráticas. Para escribir estos valores se utiliza el teclado de la computadora.

En el momento que se teclean los coeficientes, el programa los transcribe de manera simultánea en la sección de “Forma General”, lo cual genera una correlación entre los coeficientes y las expresiones cuadráticas en su forma general.

Una vez que se escriba la expresión cuadrática deseada, se lleva el mouse a la sección de “Aceptar o cancelar “, se da un “clik” a “ok” y se dibuja la parábola de la expresión cuadrática señalada.

Examen de exploración.

Inicialmente se recopilaron 28 exámenes departamentales de 35 alumnos del grupo 1210 del tercer periodo cuyo contenido son ecuaciones. Del tipo A 10 cuestionarios y del tipo B 18. Donde se señalaron las preguntas referentes al tema de ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

Del tipo **A** las preguntas son:

I.
1.Las raíces o soluciones de la ecuación (a + 5) (a + 8) = 0 son: a_1 =_____
a_2 =________.

2.El grado de la ecuación y + 1/y = 9 es: _____________.

5.Si las soluciones o raíces de una ecuación son $x_1 = 8$ y $x_2 = -6$, la ecuación de la cual

provienen es:________________

II. PROBLEMA:

1.El perímetro de un rectángulo es de 48 m., y su área es de 140 m. Cuadrados. Encuentra el largo y el ancho.

TABLA DE RESULTADOS DEL EXAMEN TIPO A

PREGUNTA / ALUMNO	I.1	I.2	I.5	II.1
1	X	X	X	X
2	X	X	X	X
3	/	X	X	X
4	X	X	X	X
5		X	x	x
6	X	X	X	X
7	/	X	X	X
8	/	X	X	X
9		x		
10	x	x		

/ acierto
X equivocación

De la primera pregunta diez alumnos sólo tres contestaron correctamente (a=-5 b=-8), uno con signo contrario correctamente (a=+5, b=+8), cuatro otro valor (5a,8b; 2a y 13, etc.) y dos no contestaron. De la segunda, uno respondió correctamente (segundo grado), cinco contestaron de primer grado, dos no contestaron y dos contestaron: uno "y" y el otro "0".

La pregunta número cinco nadie la contestó correctamente, uno escribió la forma general de la ecuación de segundo grado, cinco contestaron 2x+2, x+2, 8 y -6,etc. Uno escribió su respuesta como factores: (8)(6). Otro más escribió "de 2º. Grado" y dos no contestaron.

El problema II.1 nadie lo contestó algebraicamente ni de manera intuitiva.

Del tipo **B**, la preguntas son:

I.
1.El grado de la ecuación $z - 1/z = 4$ es: ___________

3.Si las soluciones o raíces de una ecuación son $x = 3$ y $x = -7$, la ecuación de la cual provienen es: ____________

5.Las raíces o soluciones de la ecuación $(b + 8) (b - 5) = 0$ son: _________

II. PROBLEMA.

2.El perímetro de un rectángulo es de 44 m y su área es de 120 m .
Encuentra el largo y el ancho.

TABLA DE RESULTADOS DEL EXAMEN TIPO B

ALUMNO \ PREGUNTA	I.1	I.3	I.5	II.2
1	/	X	/	/
2	X	/	/	/
3	X	X	X	X
4	X	X	X	X
5	/	X	/	½
6	/	X	/	X
7	X	X	X	X
8	/	X	/	X
9	X	X	X	X
10	X	X	X	X
11	X	X	X	X
12	/	/	/	X
13	X	X	/	X
14	X	X	X	X
15	X	X	/	X
16	/	X	X	X
17	/	X	/	X
18	/	X	X	X

/ acierto
X equivocación

En la primera pregunta de 18 alumnos 8 respondieron correctamente, 6 escribieron que es de primer grado, dos no contestaron, otro anotó -4 y uno más cuadrilátero.

En la pregunta tres 2 respondieron correctamente, 2 escribieron cuadrática, otros 2 lineal o de primer grado, 5 más no contestaron y 7 escribieron diferentes expresiones como:

$ax^2 + bx + c = 0$, $(8x + b)$, $(x + 6)(x - 17)$, $x^2+10 = 0$, etc.

Respondieron correctamente 9 estudiantes la pregunta cinco, 4 no contestaron y los restantes otro valor como: -3 y -3, -13 y 40, etc. El problema II.2 solo dos alumnos lo resolvieron de manera intuitiva, haciendo esquemas y encontrando los valores que daban el resultado correcto.

En el trabajo de exploración el rendimiento de los estudiantes sobre la resolución es muy bajo y muestra que los estudiantes no llegaban a la resolución de ecuaciones que se les planteaban.

Un profesor de matemáticas en Singapur, Berinderjeet (1994) menciona que si al resolver problemas algebraicos se cometen errores los estudiantes sienten cierta frustración por el problema, por la materia y por las matemáticas. Además esta frustración puede se compartida por el profesor. Aunque "muchos errores se deben a la causa de comprender mal los conceptos de matemáticas. Esto es un grave problema de dirección y formación de equivocaciones y falsas generalizaciones, esto último dificulta el aprender matemáticas"[▽].

Nuestra hipótesis de trabajo es que si los estudiantes logran tener como recurso la imagen de una gráfica como apoyo para la resolución de las ecuaciones de segundo grado mejorará su rendimiento escolar con respecto al tema de álgebra, especialmente en ecuaciones de segundo grado.

Continuando con nuestro trabajo se realizó un examen diagnóstico, para conocer su nivel de conocimiento del tema a tratar.

Examen diagnóstico. (Aplicación de examen diagnóstico)

Al grupo de estudiantes se les aplicó un examen diagnóstico semejante al utilizado en la exploración. Esto es para confirmar el nivel de destreza de los estudiantes entorno a la resolución de ecuaciones de nuestro interés. También nos permitirá avanzar en la instrumentación de trabajo en las sesiones del taller.

[▽] Berinderjeet Kaur (1994), *Equivocaciones algebraicas en primer año del Colegio de Estudiantes de Singapur*, (*Algebraic misconceptions of firts year College Student*,. p.43-51

Diseño del taller. (Planeación de las sesiones del taller)

El taller tendrá una duración de dos semanas donde los participantes resolverán un cuadernillo de trabajo, visualizando funciones cuadráticas como apoyo en la solución de ecuaciones de segundo grado con este programa.

En el desarrollo de la primera clase (1 hr.) se aplicará un examen diagnóstico a los estudiantes para conocer el nivel de resolución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita y una previa plática de concientización al trabajo global que se desempeñará.

En las sesiones 2-3 se hará una introducción al concepto de relaciones y funciones y se explorará el software de la propuesta con la visualización de funciones lineales.

En la sesión 5 ejemplificarán los estudiantes funciones lineales por medio de la computadora.

En la sesión 6 se realizará la visualización de las funciones cuadráticas y ejemplificarán dichas funciones en la computadora.

En la sesión 7-8, los estudiantes conocerán la relación existente en las funciones y ecuaciones, especialmente cuadráticas y de segundo grado con una incógnita respectivamente.

En la sesión 9 resolverán problemas del tema de nuestro interés con apoyo de la visualización de funciones.

En la sesión 10 se evaluará nuevamente a los estudiantes con la aplicación del examen final para compara resultados.

El manual y cuadernillo de trabajo.

Al inicio del curso taller se proveerá a los alumnos de un instructivo del manejo del software educativo o manual y el cuadernillo de trabajo para cada una de las sesiones de trabajo para apoyar las secuencias didácticas del curso en donde los alumnos tendrán conceptos y preceptos acerca de la resolución de las ecuaciones de segundo grado con una incógnita. Tales documentos se anexan al final de este trabajo.

Examen final.

El examen final se aplicará a los alumnos participantes en el curso al término de las sesiones, en donde se obtendrá información para el análisis de datos y con ellos poder llegar a conclusiones. Este documento también se anexa.

A continuación se presenta la descripción de la investigación en comparación con las observaciones del investigador y con las observaciones en relación al capitulo 2 del presente trabajo, es decir del marco teórico.

CAPITULO 4.

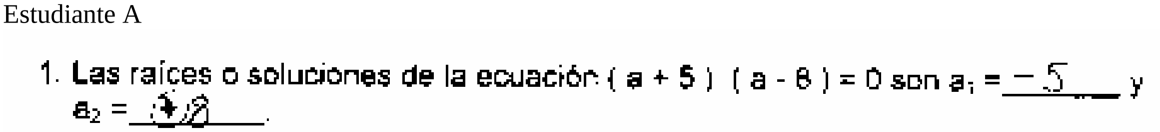
Presentación y análisis de datos

Examen diagnóstico.

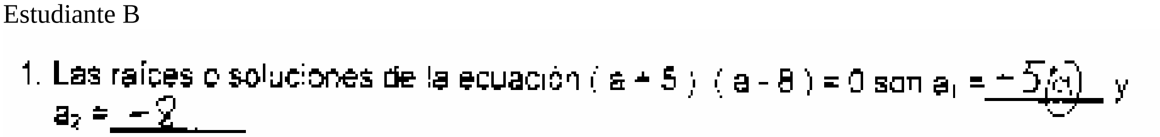
El taller de tratamiento de ecuaciones se inicio con la aplicación del Examen Diagnóstico a 20 estudiantes y se obtuvieron los siguientes resultados.

El primer reactivo no fue de gran dificultad, *"Las raíces o soluciones de la ecuación (a+5) (a-8) = 0, son:"*.15 estudiantes contestaron correctamente a_1= - 5, a_2= +8 (como el estudiante A); los restantes contestaron algo como: "a_1= - 5a y a_2= 8" (Estudiante B) ó "a_1= - 5 y a_2= - 8", este último el error fue por un signo, o bien por signos invertidos como "a_1= +5, a_2= - 8".

Estudiante A


1. Las raíces o soluciones de la ecuación (a + 5) (a - 8) = 0 son a_1 = −5 y a_2 = +8.

Estudiante B


1. Las raíces o soluciones de la ecuación (a + 5) (a - 8) = 0 son a_1 = −5(a) y a_2 = −8.

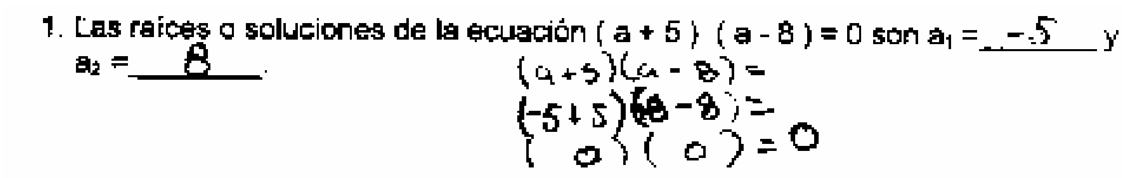
Entre las respuestas correctas hubo un estudiante que realizó la comprobación (Estudiante C):

“(a + 5) (a + 8) = 0

(-5 +5) (+8 –8) = 0

(0) (0) = 0”

Estudiante C

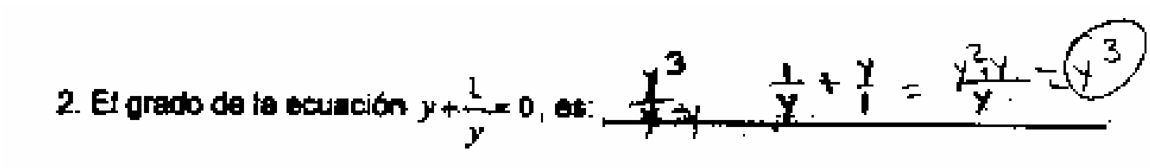


1. Las raíces o soluciones de la ecuación (a + 5) (a - 8) = 0 son a_1 = -5 y a_2 = 8.

$(a+5)(a-8)=$
$(-5+5)(8-8)=$
$(0)(0)=0$

El reactivo dos,*” el grado de la ecuación* $y+\frac{1}{y}=0$*, es: ”* 3 estudiantes contestaron correctamente mientras que los 17 restantes contestaron de “1 grado” (13 casos), un caso con “y^3”(Estudiante D), “$\frac{y^2+y}{y}$”, “y”, etc.

Estudiante D

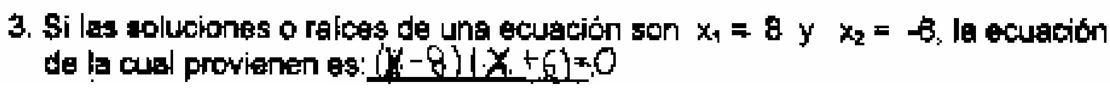


2. El grado de la ecuación $y+\frac{1}{y}=0$, es: y^3 $\frac{1}{y}+\frac{y}{1}=\frac{y^2+y}{y}=y^3$

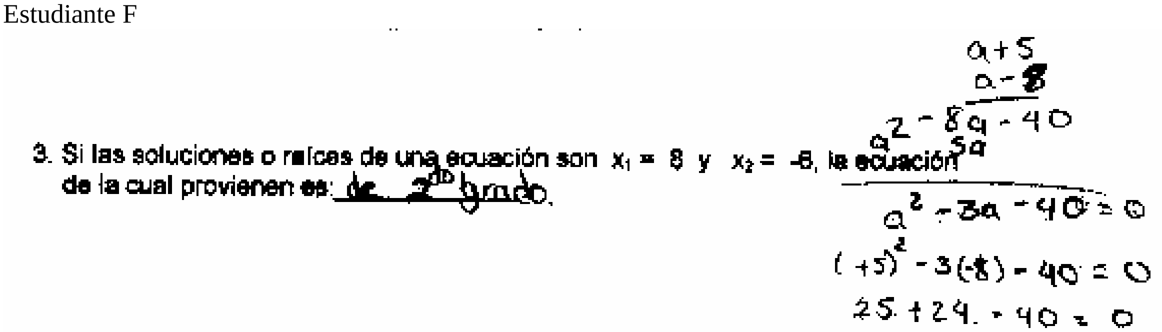
Entre los que no contestaron correctamente pudieran tener conocimiento de realizar la operación para saber el grado de la ecuación o no tenerlo.

Para el reactivo tres, *"Las soluciones o raíces de una ecuación son x_1= 8 y x_2= -6, la ecuación de la cual proviene es:". Un* alumno contestó correctamente, escribió "(a+6) (a-8) = 0" (Estudiante E) y otro "(a+5) (a-8) = a^2 –3a -40" aproximándose a la respuesta correcta (Estudiante F).

Estudiante E

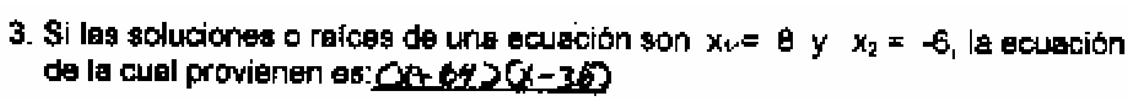

3. Si las soluciones o raíces de una ecuación son x_1 = 8 y x_2 = -6, la ecuación de la cual provienen es: (X-8)(X+6)=0

Estudiante F

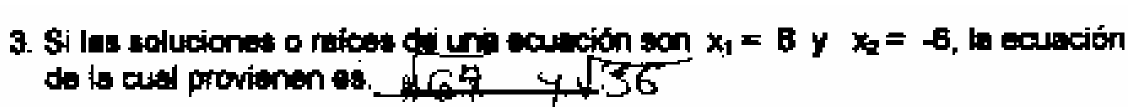

3. Si las soluciones o raíces de una ecuación son x_1 = 8 y x_2 = -6, la ecuación de la cual provienen es: de 2do grado.

Los demás escribieron diferentes respuestas como "(x + 64), (x-36)" (Estudiante G); (x+8) (x-6)"; "$\sqrt{64}, \sqrt{36}$" (Estudiante H); 64y^2 + 36", "segundo grado" etc.

Estudiante G


3. Si las soluciones o raíces de una ecuación son x_1 = 8 y x_2 = -6, la ecuación de la cual provienen es: (x+64)(x-36)

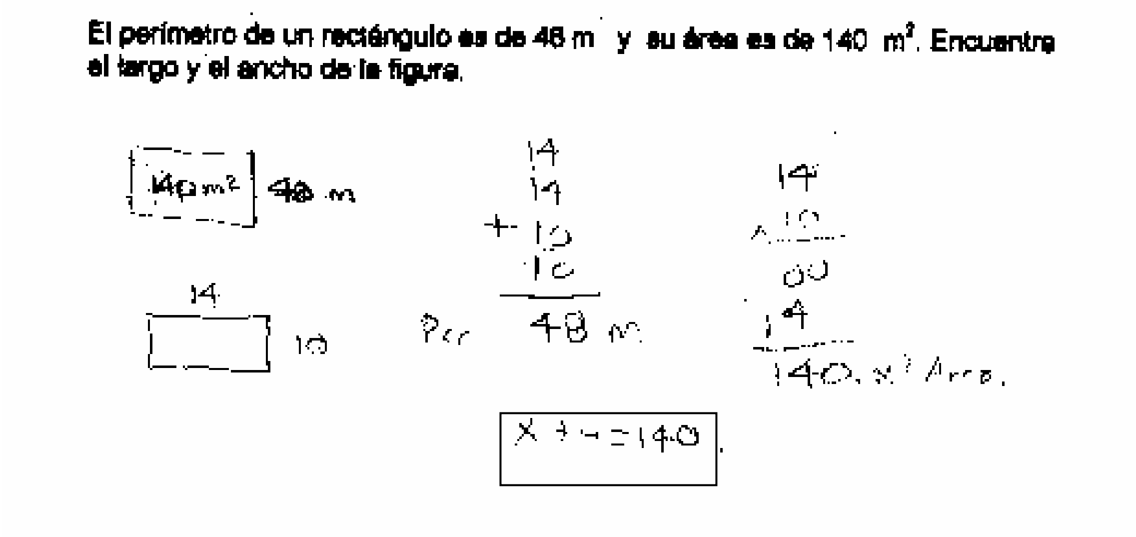
Estudiante H


3. Si las soluciones o raíces de una ecuación son x_1 = 8 y x_2 = -6, la ecuación de la cual provienen es: √64 y √36

El reactivo cuatro se refiere a un problema, *"El perímetro de un rectángulo es de 48 m y su área es de 140m^2. Encuentra el largo y el ancho de la figura"*.

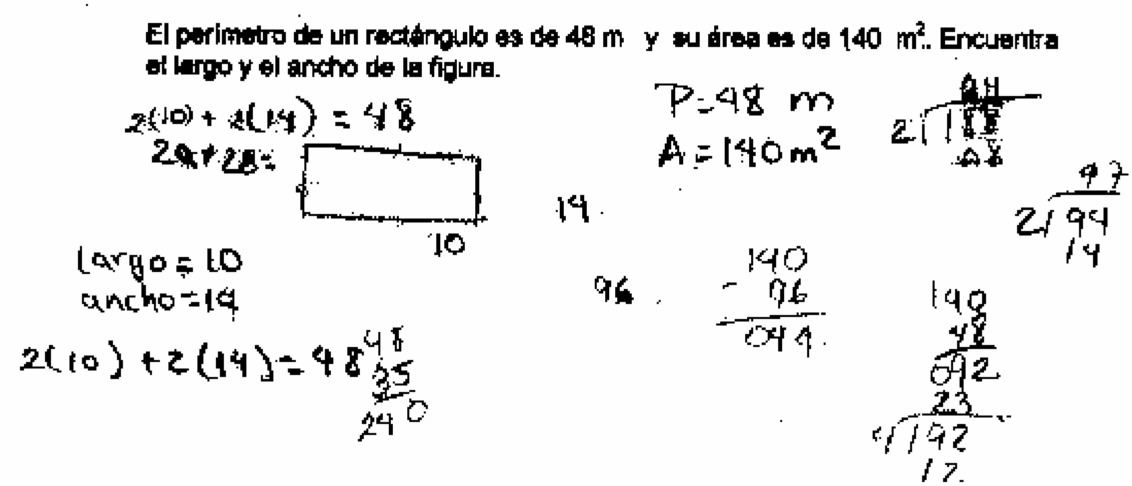
La mayoría obtuvo el resultado de la magnitud de los lados 10 y 14 metros, además trazaron la figura geométrica (rectángulo), se utilizaron "fórmulas empíricas" (como en el recuadro del estudiante I), con las cuales hicieron varias operaciones aritméticas para calcular los números requeridos hasta llegar al resultado.

Estudiante I



Sólo uno de ellos (Estudiante J) utilizó la fórmula para obtener el perímetro y el área de la figura, pero localizando previamente los números que cumplían con dicha solución al problema.

Estudiante J



Ningún estudiante formuló alguna ecuación para poder resolver el problema. El lenguaje algebraico es poco usual en la resolución de problemas, la transformación del lenguaje común al lenguaje algebraico es un procedimiento difícil para los estudiantes, por lo que se opta por concretizar las posibles soluciones realizando operaciones mentales con los números buscados, o también se utiliza el "tanteo", para satisfacer las condiciones del problema.

.

Enseguida se muestra el concentrado de las repuestas al Examen Diagnóstico y del Examen Final. Cabe mencionar que este último examen se llevo acabo después del curso-taller.

EXAMEN DE DIAGNÓSTICO

Concentración de respuestas de los estudiantes en el examen diagnóstico

REACTIVOS	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E 10	E 11	E 12	E 13	E 14	E 15	E 16	E 17	E 18	E 19	E 20
Las raíces o soluciones de la ecuación (a+5) (a-8) = 0	5a -8a	-5 +8	-5a +8	-5 +8	-5 -8	5 -8	-5 8	-5 8	-5 8	-5 8	-5 8	-5 8	-5 8	5a 8a	-5 8 (a+5) (a-8) =0	-5 8	-5 8	-5 8	-5 8	-5 8
El grado de la ecuación $y+\frac{1}{y}=0$, es:	y^3	2º.grado	$\frac{y^2+y}{y}$	Iº grado	Iº grado	Iº grado	2º.	Iº grado	Iº grado	1º.	Iº grado	Iº grado	2º.grado	Iº grado	$\frac{y}{y}=1$	1	$y-\frac{1}{y}$	y	1	1
Las soluciones o raíces de una ecuación son x_1= 8 y x_2=-6, la ecuación de la cual provienen es:	2º.grado	X+6 4, x-36.	a+5, a-8; a^2-3a-40	X+8, x-6	X=8 -6	X+8, x-6	X+6 x-8	X-8 X+6	X-8 X+6 =0	$\sqrt{64}$ $\sqrt{36}$	$\sqrt{64}$ $\sqrt{36}$	64 36	X+6 x-8	-8 6	x-8 x-6	$64y^2$ + 36	--	X-8 X+6	-14	--
El perímetro de un rectángulo es de 48m y su área es de 140 m^2. Encuentra el largo y el ancho de la figura.	Figura Tanteo 10 y 14	Figura Tanteo 10 y 14	Figura Tanteo 10 y 14	Figura Tanteo 10 y 14	Figura Tanteo 10 y 14	Figura Tanteo 10 y 14	Figura Tanteo 10 y 14	Figura Tanteo 10 y 14	Tanteo 10 y 14	Fórmula formal sustitución10 y 14	Figura Tanteo 10 y 14	Figura Tanteo 10 y 14	Figura Tanteo 10 y 14	Figura Tanteo 10 y 14	Figura Tanteo 10 y 14	Figura Tanteo 10 y 14	Figura Tanteo 10 y 14	Tanteo 10 y 14	Figura Tanteo 70 y 2 m^2	---

Las celdas sombreadas son consideradas como respuestas correctas.

EXAMEN FINAL

Concentración de respuestas de los estudiantes en el examen final.

REACTIVOS	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E 10	E 11	E 12	E 13	E 14	E 15	E 16	E 17	E 18	E 19	E 20
Las raíces o soluciones de la ecuación (a+5) (a-8) = 0	+5 +8	-5 +8	-5 +8	-5 +8	-5 +8	-5 +8	-5 +8	-5 +8	-5 +8	-5 +8	-5 +8	-5 +8	-5 +8	+5 +8	-5 +8	-5 8	-5 8	-5 8	-5 8	-5 8
El grado de la ecuación $y+\frac{1}{y}=0$, es:	2º.grado	2º.grado	2º.grado	2º.grado	2º.grado	2º.grado	2º.grado	2º.grado	2º.grado	2º.grado	2º.grado	2º.grado	2º.grado	2º.grado	2º.grado. No hay sol. real	2º.grado. No hay sol. real	2º.grado. No hay sol. real	2º.grado	2º.grado	2º.grado. No hay sol. real
Las soluciones o raíces de una ecuación son x_1= 8 y x_2=-6, la ecuación de la cual provienen es:	X_1= 8 X_2=--6	X-8 X+6 =0	X-8 X+6 =0	X-8 X+6 =0	X-8 X+6	X-8 X+6	X-8 X+6 =0	X-8 X+6 =0	X-8 X+6 =0	X^2-2x-48 =0 (x)(x) (8)+(-6) (8)(-6	X-8 X+6 =0	X^2-2x-48 =0	X-8 X+6 =0	X-8 X+6 =0	X^2-2x-48 =0	a^2-2^a-48 =0	a^2-2a-48	X^2+2x-48 =0	X-8 X+6 =0	X^2-2x-48 =0
El perímetro de un rectángulo es de 48m y su área es de 140 m^2. Encuentra el largo y el ancho de la figura.	F. F.F S.E. Sol. B_1.10 B_2.14	F. F.F S.E. Sol. Fact B_1.10 B_2.14	F. F.F S.E. Sol. B_1.10 B_2.14	F. F.F S.E. Sol. 14 y 10	F.F S.E. Sol. B_1.10 B_2.14	F. F.F S.E. Sol. Fact B_1.10 B_2.14	F. F.F S.E. Sol. Fact x_1.10 x_2.14	F. F.F S.E. Sol. Fact B_1.10 B_2.14	F.F S.E. Sol. a_1.10 b_2.14	F. F.F S.E. Sol. Fact B_1.10 B_2.14	F. F.F S.E. Sol. B_1.10 B_2.14	F. F.F S.E. Sol. a_1.10 a_2.14	F. F.F S.E. Sol. B_1.10 B_2.14	F. F.F S.E. Sol. X_1.10 x_2.14	F. F.F S.E. Sol. B_1.10 B_2.14	F. F.F S.E. Sol. B_1.10 B_2.12	F. F.F S.E. Sol. B_1.10 B_2.14	F. F.F S.E. Sol. B_1.10 B_2.14	F. F.F S.E. Sol. Y_1.10 y_2.14	F. F.F S.E. Sol. B_1.10 B_2.14

Las celdas sombreadas son consideradas como respuestas correctas

F. figura geométrica — S.E. Sistemas de ecuaciones

F.F. Fórmulas formales — Fact. Factorización

Resultados del examen final.

El examen final fue aplicado al concluir la secuencia didáctica del taller y los resultados fueron:

El primer reactivo de 20 estudiantes, 18 escribieron correctamente las raíces "a_1 =-5, a_2=+8", solo dos escribieron de forma incorrecta ya que las dos raíces se escribieron positivas, como: "a_1= +5, a_2= +8" (Estudiante A).

Estudiante A

1. Las raíces o soluciones de la ecuación (a + 5) (a - 8) = 0 son a_1 = +5 y a_2 = +8.

a^2+3a+8

En el reactivo dos, no hubo una sola equivocación, los veinte estudiantes escribieron de 2º. Grado. Cabe destacar que cuatro de ellos escribieron que "no hay soluciones reales", porque al realizar las operaciones obtuvieron $y^2 + 1 = 0$; despejando: $y^2 = \sqrt{-1}$, lo que representa un número imaginario (Estudiante B).

Estudiante B

2. El grado de la ecuación $y+\frac{1}{y}=0$, es: 2º GRADO

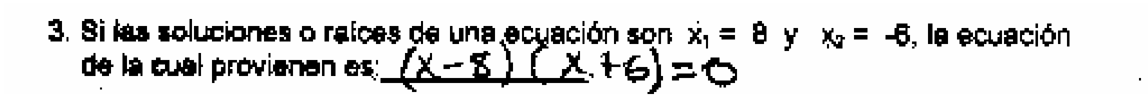
NO HAY SOLUCION REAL

$\frac{y}{1}+\frac{1}{y}=0 \quad \frac{y^2+1}{y}=0$

$y^2 - 1$ $\quad y=\sqrt{-1}$

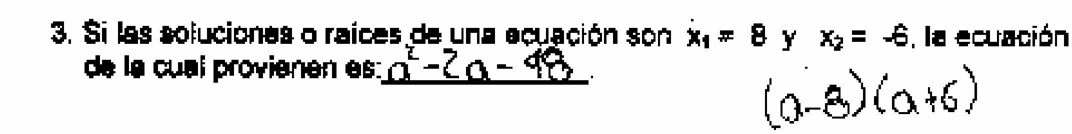
Con el reactivo tres, 15 estudiantes escribieron correctamente la ecuación, 5 escribieron incorrectamente la respuesta, donde 2 de ellos escribieron los productos de binomios como: "(x-8) (x+6)" (Estudiante C) sin igualar a cero, principal característica de la ecuación.

Estudiante C


3. Si las soluciones o raíces de una ecuación son $x_1 = 8$ y $x_2 = -6$, la ecuación de la cual provienen es: $(x-8)(x+6)=0$

Uno más (Estudiante D) realizó los productos pero no igualó a cero: "a^2 –2a – 48".

Estudiante D

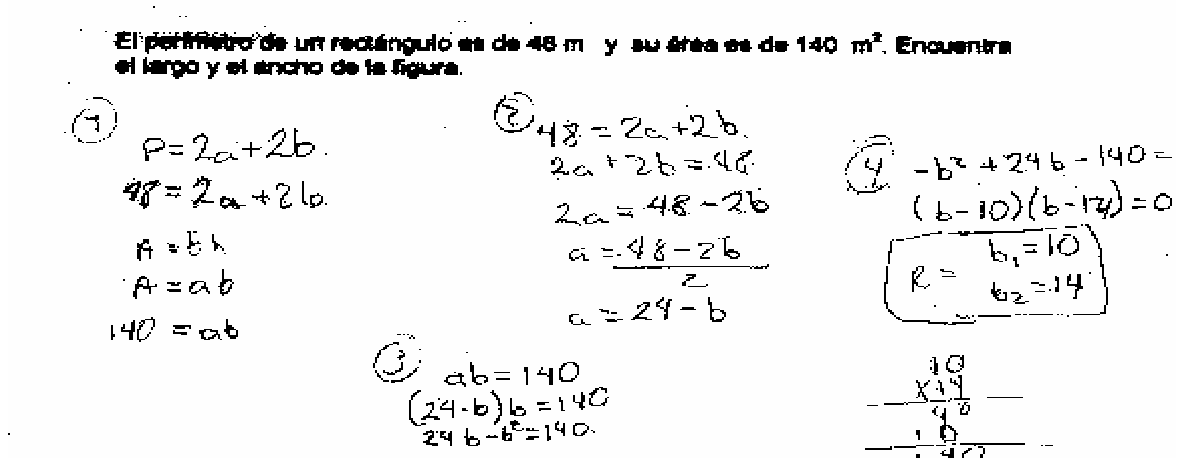

3. Si las soluciones o raíces de una ecuación son $x_1 = 8$ y $x_2 = -6$, la ecuación de la cual provienen es: $a^2-2a-48$.

$(a-8)(a+6)$

Otro alumno obtuvo la ecuación pero un signo es erróneo: " x^2 +2x –48 = 0. Por último un estudiante escribió "x_1= 8, x_2=-6".

El reactivo cuatro fue resuelto suficientemente por la mayoría de los estudiantes (19). Algunos de ellos trazaron la figura geométrica, todos los estudiantes usaron fórmulas formales, sistemas de ecuaciones simultáneas, etc. (Ver estudiante E)

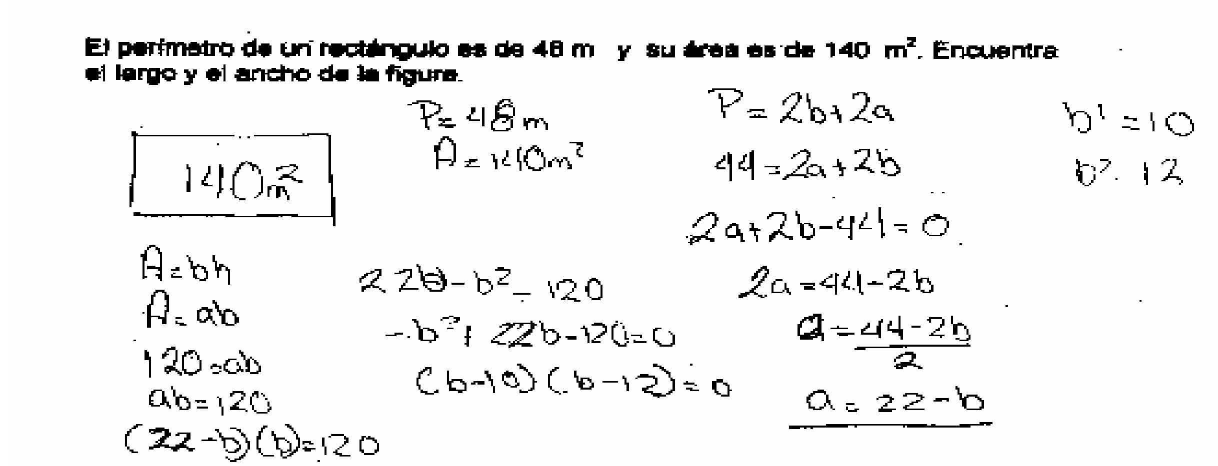
Estudiante E



La mayoría dió un resultado implícito al calcular las raíces, ya que ambas fueron positivas.

Solo un estudiante no llegó a la respuesta correcta ya que la obtención de datos fue incorrecta, en ves de escribir el dato 140 m^2 lo sustituyó por $120m^2$. (Estudiante F)

Estudiante F



Observaciones del curso

El curso - taller se planeó para dos semanas en 8 sesiones de una hora cada una, pero en vista de que el periodo de exámenes extraordinarios compartía la misma fecha del inicio del curso, se modificó en dos prácticas sabatinas para no desviar la atención de los alumnos invitados. En la primera práctica se realizó la presentación del software “Expert Algebra CD”, la aplicación del examen diagnóstico y el desarrollo de las primeras cuatro sesiones del cuadernillo de trabajo. Esta práctica tuvo una duración de 3 horas 30 minutos aproximadamente.

En la segunda práctica se realizaron las sesiones 5,6,7 y 8 con una duración semejante a la primera. Este cambio fue benéfico para los alumnos, ya que no interfirió en la programación de sus exámenes y además, el conocimiento fue secuencial y gradual por lo que el avance en cada una de las sesiones se realizó en un menor tiempo de lo planeado.

CAPITULO 5.

Resumen de los resultados y Conclusiones

Resumen de los resultados.

En este trabajo nos planteamos mostrar de qué manera la graficación de las funciones ayuda a los estudiantes a resolver ecuaciones. En particular se restringió nuestra atención a las funciones del tipo $\mathbf{y = f(x) = ax^2 + bx + c}$ y a las ecuaciones que de ahí resultan, $\mathbf{ax^2+bx+c = \kappa}$, con κ una constante cualquiera.

Nuestra hipótesis fue que tal graficación realmente puede ser útil a la solución de las ecuaciones y a la comprensión de algunos conceptos gráficos relacionados (por ejemplo, con el papel de los coeficientes en las ecuaciones, el signo, intersecciones de la función, raíces, etc.).

Uno de los objetivos del programa de Matemáticas del CECyT en sus primeros cursos, es que a partir del estudio de las funciones polinomiales cuadráticas y su relación con la ecuación cuadrática se obtengan los modelos matemáticos de problemas que conduzcan a una función, en particular aquellos relacionados con una ecuación de segundo grado con una incógnita y que se establezcan los diferentes procedimientos de solución algebraicos y geométricos.

En este sentido se recurre frecuentemente a las gráficas como un importante apoyo para estudiar los distintos tipos de funciones, de modo que se puedan visualizar tanto el modelo algebraico de un cierto problema como su comportamiento gráfico.

En este trabajo se trató de mostrar cómo se puede facilitar el aprendizaje de las ecuaciones de segundo grado con una incógnita utilizando un software graficador en la computadora y con métodos de investigación etnográfica, el trabajo de campo se llevó acabo en la sala audiovisual y en el aula de cómputo del CECyT con alumnos invitados a participar en un curso taller. (Ver anexo, “Registro de Investigación”, 2ª. columna, Pág. 121, 125).

En los inicios de la investigación, se describe la existencia del problema de aprendizaje de las matemáticas, especialmente con la resolución de ecuaciones del tema de nuestro interés. El análisis de la información obtenida del concentrado de los datos del examen de exploración y de diagnóstico muestra la presencia de este problema. (Véase Tabla de Resultados del Examen Tipo A y Tipo B, Págs. 86 , 88 y el concentrado de respuestas de los estudiantes en el Examen Diagnóstico, Pág. 97)

Las principales técnicas que se usaron en el acercamiento etnográfico fueron: la observación participante y no participante, mismas que se hacen referencia en el registro de la investigación. (Ver Diseño de la Investigación Pág. 74,75 y Registro de la Investigación, primera y segunda columna, Pág. 121 a 134)

Con la observación participante se recolectó la información durante el curso-taller conviviendo con los alumnos en el transcurso de las sesiones y participando con ellos en las actividades propuestas, y con la observación no participante la información se obtuvo cuando los alumnos hacían sus actividades de manera individual y registrando algunos comentarios en la exposición de las sesiones.

De acuerdo con las opiniones de los autores de trabajos anteriores (ver capítulo 2, pag. 11), se ha observado que las representaciones visuales ofrecen una introducción a las abstracciones complejas, debido a la potencia y accesibilidad de las imágenes generadas por computadoras que tienen una influencia estimulante en la visualización como lo menciona Tall (1995). La computadora es una herramienta educativa, que puede utilizarse en la enseñanza de las matemáticas.

El abordar aspectos visuales de las matemáticas a través de la computadora, conlleva a la correspondencia del modelo icónico de la representación de Bruner o al modelo visuo – espacial de Tall; tales modelos dan soporte a las ideas matemáticas simbólicas.

El uso de la computadora en la enseñanza de las matemáticas permite generar nuevas secuencias de aprendizaje que recrean diferentes tipos de representación: el preceptivo, el icónico (que es el soporte de este trabajo) y visual-simbólico apropiados para el desarrollo del aprendizaje, y para desplegar en nuevos aprendizajes secuencias previamente no utilizadas. Por ejemplo, con el software que se utilizó (Algebra CD) los estudiantes aprendieron a utilizar las intersecciones de la función cuadrática para resolver una ecuación de segundo grado con una incógnita (ver anexo “Registro de Investigación”, Pág. 131 a 133, 1ª y 2ª columna).

Para trabajar con las expresiones cuadráticas, se usaron las visualizaciones de funciones que dan significado gráfico a los conceptos tales como coeficientes, términos y el grado absoluto de un polinomio.

Por ejemplo, a partir del análisis de lo que hicieron los estudiantes E y F (ver Pág. 101), se verifica que en el caso del estudiante E los procesos de la simbolización son completamente diferentes de los procesos de la imaginación mental, pues en el problema siguiente:

> *"El perímetro de un rectángulo es de 48 m, y su área es de 140 m^2. Encuentra el largo y el ancho de la figura."*

Este se modelo algebraicamente donde el perímetro, 48 m, es igual al doble del largo más el doble del ancho, y su área de 140 m^2 es el producto del largo por el ancho, esto conocido como base por la altura; representado simbólicamente tenemos:

$$48m = 2a + 2b \quad \text{y} \quad 140m^2 = ab$$

Las expresiones anteriores notifican como las ecuaciones comprimen drásticamente la información matemática dada en la primera instancia del problema. Algebraicamente puede ser resuelto por una secuencia de las manipulaciones sometidas en el orden siguiente:

$$48m = 2a + 2b \quad \text{ó} \quad 2a + 2b = 48m$$

La ecuación se divide entre dos: $\frac{2a + 2b = 48m}{2}$

simplifica: $a + b = 24m$

Se substrae b de ambos lados: $a + b - b = 24m - b$

simplifica: $a = 24m - b$

Se sustituye en $ab = 140m^2$ el valor de a: $(24m - b)b = 140m^2$

simplifica: $24mb - b^2 = 140m^2$

Se substrae 140m2: $24mb - b^2 - 140m^2 = 140m^2 - 140m^2$

Simplifica: $24mb - b^2 - 140m^2 = 0$

Se ordenan los términos: $-b^2 + 24mb - 140m^2 = 0$

Se multiplica la ecuación por –1: $b^2 - 24mb + 140m^2 = 0$

Se localizan los factores y se despeja b: $(b - 14m)(b - 10m)$;

La soluciones o raíces son: $b_1 = 14m$, $b_2 = 10m$

La experiencia de resolver una ecuación puede muy probablemente compactar las operaciones de una ecuación y simplificar en una etapa única para dar una secuencia breve de procedimientos intermedios, tal como:

$48m = 2a + 2b$ ó $2a + 2b = 48$

La ecuación se divide entre dos: $a + b = 24$

Se substrae b de ambos lados: $a = 24 - b$

Se sustituye en $ab = 140m^2$ el valor de a: $(24 - b)b = 140$

simplifica: $24b - b^2 = 140$

Se substrae 140m²: $24b - b^2 - 140 = 0$

Se multiplica la ecuación por –1y se ordena: $b^2 - 24b + 140 = 0$

Se localizan los factores y se despeja b: $(b-14)(b-10)$;

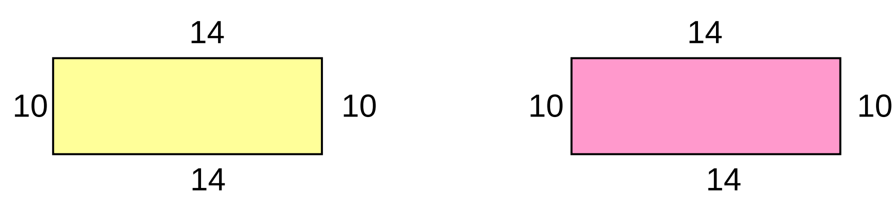
Las raíces son: $b_1 = 14m$, $b_2 = 10m$

Esta solución algebraica envuelve visualmente una secuencia moderada de las manipulaciones del símbolo (Davis, 1984), da cuenta de cómo con una manipulación de la solución algebraica se transforma y se escribe hacia abajo. La secuencia concuerda con la estrategia de simplificar ambos lados, realizando las operaciones indicadas y recolectando probables términos semejantes, entonces a partir de la manipulación se obtienen todos los números en un solo lado y las incógnitas en el otro. En estos casos, después de haber hecho estos procedimientos, la solución es clara.

Las técnicas notifican lo que el cerebro humano usa como recursos para el buen avance: la escritura de los símbolos y el proceso de simplificación. El primer recurso concede el centro de la atención en el estado actual de la solución y el paso siguiente al aprendizaje; y con la experiencia, el segundo recurso es la forma más eficiente para comprimir severamente la expresión original. La utilización de estos recursos puede mejorar el entendimiento de los procesos de solución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita, fortaleciendo la atención y el interés a corto plazo.

El procedimiento de la escritura de símbolos y el proceso de simplificación, son pasos importantes para la solución del problema planteado. Por ejemplo, si el largo del rectángulo es 14 m, el ancho del rectángulo es: $a = 24m - 14m$; entonces, el ancho es 10 m y el área del rectángulo es el producto de 14 m y 10m, lo que resulta 140 m^2.

En el caso del estudiante F (ver pag. 101), se observa que el álgebra es a menudo utilizada como " la aritmética generalizada", donde la noción de perímetro se puede escribir así: "2a+2b ó 2(a+b)". Las dos expresiones nos indican que existen dos formas de conocer la medida a partir del paralelogramo, pero además se genera la siguiente identidad "2a+2b = 2(a+b)", resultado de un proceso de factorización o inversamente como la aplicación de la ley distributiva. Cuando se llega a una prueba aritmética se nivela las declaraciones en la escuela; pero también existen otras formas de prueba, por ejemplo, usando diagramas específicos ilustrando un caso genérico, como en el seguimiento de Skemp (1983) para dar una idea particular de lo que se trabaja con la escritura de símbolos y el proceso de simplificación o el procedimiento.



P =2(10)+2(14)

P = 2(10+14)

Ejemplo genérico en donde asoma la ley distributiva o la factorización para los números enteros

Aunque las operaciones aritméticas son específicas pueden verse como genéricas. En álgebra existe mayor posibilidad de que las operaciones del problema sean más genéricas y generadoras de conceptos por su carácter más general. Por ejemplo, no solamente podemos resolver la ecuación cuadrática específica como $b^2 - 24b + 140 = 0$, si no también la ecuación general de segundo grado con una incógnita, la cual tiene la siguiente forma $ax^2 + bx + c = 0$ y su solución es $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, siempre que $a \neq 0$.

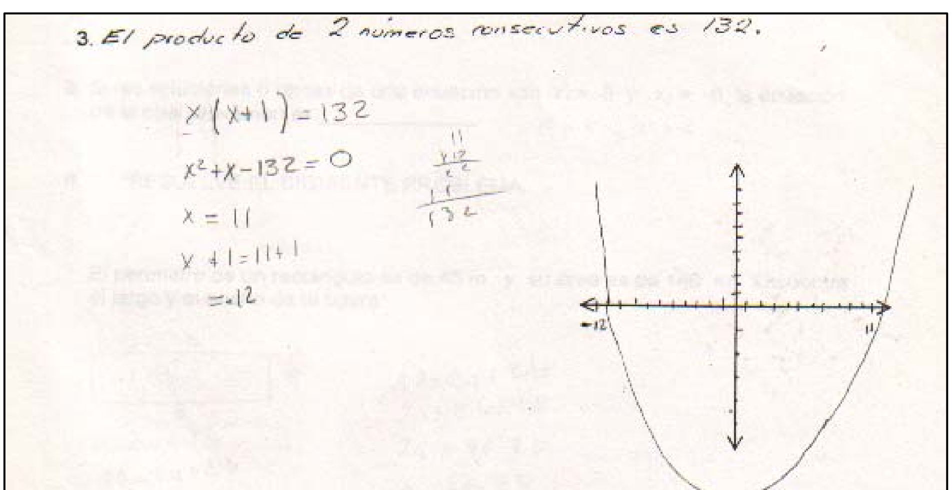
En ambas presentaciones se muestra una secuencia visualmente moderada de las actividades de resolver la ecuación de segundo grado como un proceso; pero también pueden ser tomadas en cuenta en sí mismas como un concepto. Esto es, en lugar de procesos para resolver una ecuación, se tienen expresiones para la solución.

Mientras vemos la manera en que las ideas matemáticas crecen, vemos los valores relativos de la visualización de imágenes y la escritura de símbolos que soportan los aspectos diferentes del pensar matemático. La aproximación visual puede dar una valiosa comprensión cognoscitiva para soportar el pensamiento experimental y habilitar las hipótesis más generales. La aproximación visual puede beneficiar a quienes no puede llevar sus estudios para un nivel formal, pero pueden dar el discernimiento considerable en las ideas y en los problemas que puede hallar.

Conclusiones.

Cabe destacar que al llevar acabo acercamientos de la función en las intersecciones de las abscisas, los estudiantes puedieron hacer una reflexión sobre las soluciones o raíces de una ecuación y también, sobre los procesos de factorización. (Ver sesión 1 del cuadernillo de trabajo, Págs.136-138)

El análisis de los datos obtenidos muestran que hubo progresos significativos en el tema tratado (ver resultados de examen diagnóstico y examen final, Págs. 97, 98), se logro que los estudiantes fueran conscientes de la existencia de relaciones entre las funciones gráficas y las expresiones simbólicas (ver cuadernillo de trabajo de la sesión 5 a 8, Págs. 148 a 153), entre las gráficas y las ecuaciones de segundo grado: así como los organizadores genéricos de cada uno de los preceptos de factorización, expresiones algebraicas cuadráticas, intersecciones y raíces o soluciones de las ecuaciones mencionadas.(ver cuadro 1)



Cuadro 1

Para los procesos del acercamiento visual y el cálculo numérico de la expresión cuadrática se recurrió a la gráfica de la curva llamada parábola. Además la intersección de esta curva en el eje de las equis proporcionó una noción intuitiva de lo que tendría la intención de ser una solución para una ecuación cuadrática. Si la curva no intersecta en las abscisas la ecuación no tendría soluciones reales. (Ver Pág.69)

En un terreno más avanzado, los investigadores matemáticos usan a menudo la imaginación visual para soportar el pensar matemático que antecede a la prueba formal. Pero es importante tener presente la idea de Hadammard (1995) sobre este recurso en donde se puede ser " guiado por las imágenes sin ser esclavo por ellas".

Los estudiantes necesitan ser puestos en dos contextos: uno de ellos es el de calcular con números y manipular símbolos, (ver estudiante I , pag 95) y el otro usar ambientes computacionales, como el software educativo de matemáticas, que les ayudan a manipulación algebraica (ver cuadernillo de trabajo pag. 136 a 153) para lograr mayor fluidez matemática.

Al compartir estos dos contextos pueden tener un mejor significado de las ideas matemáticas, y una construcción cognoscitiva de consideración. Ambos aspectos son necesarios en el pensamiento del individuo para proseguir con la matemática formal más sofisticada (ver cuadro, pag. 63), ya sea que se trabaje en esto de manera paralela, o en momentos posteriores del tránsito de los estudiantes por el bachillerato.

Indudablemente la introducción de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas, implica cambios y esfuerzos en varios aspectos de la actividad educativa: suministro de equipo, currículo, formación de profesores, soporte didáctico y más investigación sobre la materia. (Ver pag. 158 del anexo "Educación Matemática")

En síntesis, el uso del software educativo ayudó a mejorar las conexiones entre representaciones algebraicas, numéricas y gráficas. La lectura e interpretación de información gráfica tiene mayor fluidez al realizar estas conexiones. (Ver primeramente estudiante I pag. 95 y luego estudiante E pag. 101)

El incorporar el uso de apoyos didácticos, como las calculadoras y software educativos en la enseñanza de las matemáticas, pueden desarrollar habilidades y destrezas en el conocimiento matemático, así como también hábitos de investigación y experimentación, que coloquen a la matemática dentro del ámbito de interés de los estudiantes. (Ver Educación Matemática y computación, pag. 164)

En el nivel medio superior, la enseñanza de las matemáticas debe hacerse llegar con la finalidad de enfatizar el papel de la intuición en el camino al formalismo y destacar los usos y la adaptabilidad de la matemática en situaciones problemáticas reales; aquí deben de contribuir los físicos, ingenieros, químicos, etc., (ver Educ.Mat. pag 158).

La opinión de Richard Lesh (1979) nos proporciona otro punto de vista práctico y concreto, al mencionar que “el objetivo de la investigación es desarrollar un cuerpo de conocimientos útiles relacionados con temas importantes de la Didáctica de las Matemáticas (ver pag. 161)

Los resultados de la experimentación didáctica que aquí se llevó a cabo, tratan de dirigirse principalmente a los profesores del bachillerato que buscan completar o sustituir el contenido del libro de texto, con la elaboración de bloques de actividades o situaciones de enseñanza complementarias al programa de estudio se intenta mejorar la eficacia de la enseñanza y la profundidad del aprendizaje de los alumnos de este nivel educativo.

Los estudiantes que participaron en el taller estuvieron permanentemente interesados -no así en sus clases diarias de matemáticas- en los trabajos que se realizaron durante el taller. Algunos de ellos no se limitaban a las actividades propuestas sino que por propia iniciativa se descartaban algunas debido al desarrollo matemático que lograron en el taller.

También en algunos casos se vió que los estudiantes prescindieron del uso de la computadora para resolver los problemas propuestos, como por ejemplo el de factorización de una ecuación de segundo grado para encontrar las soluciones o raíces. (Ver cuadro 2)

Ejercicio 8. Graficar y localizar intersectos en **x.**

$f_1(x) = x^2$

$f_2(x) = -x^2$

$f_3(x) = x^2 + 2$

$f_4(x) = -x^2 - 2$

$f_5(x) = -x^2 + 4x$

$f_6(x) = x^2 - 2x - 3$

$f_7(x) = -x^2 - 7x - 10$

$f_8(x) = 2x^2 - 4x + 6$

$f_9(x) = 3x^2 + 7x - 1$

$f_{10}(x) = (x-3)^2$

$f_{11}(x) = (x+2)^2$ x^2-4x+4

$f_{12}(x) = (x+2)(x+3)$ x^2+5x+6

$f_{13}(x) = (x+5)(x-2)$ $x^2-7x+10$

$f_{14}(x) = (x+3)(x-3)$

$f_{15}(x) = \frac{1}{x} + x$ $1+x^2 \neq 0$

Intersectos
Soluciones

f	x_1	x_2
f_1	0	0
f_2	0	0
f_3	No hay	solución
f_4	No hay	soluciones
f_5	0	4
f_6	-1	3
f_7	No hay	soluciones
f_8	No hay	soluciones
f_9	-.2	-2.2
f_{10}	+3	+3
f_{11}	2	2
f_{12}	-2	-2
f_{13}	-5	+2
f_{14}	-3	+3
f_{15}	No hay	soluciones reales

Cuadro 2

Espero que este trabajo pueda ser útil para avanzar respuestas de cómo se pueden utilizar los programas matemáticos en la computadora para mejorar el entendimiento de los estudiantes de los conceptos matemáticos, y también para mejorar el entendimento de los profesores en la manera de enseñar conceptos matemáticos con ayuda de esos instrumentos.

BIBLIOGRAFÍA

BARRERA Fernando(1997). "*Taller de Algebra para profesores del nivel medio superior del IPN*". Documento del CINVESTAV. México. Pag 1-2.

BERINDERJEET Kaur (1994) , *Equivocaciones algebraicas en primer año del Colegio de Estudiantes de Singapur, (Algebraic misconceptions of firts year College Student,.* En Focus on Learning Problems in Mathematics edition. Volume 16. Number 4. Center for Teaching/Learnin Mathematics).p.43-51

BISHOP A, (1983). S*pace and geometry, en Lesh.*Landau. Pag.176-203.

BISHOP, Alan (1992). *Implicaciones Didácticas de la investigación sobre la visualización.* Antología en Educación Matemática.UPN. México.

BRUNER, J. S. (1966). *Towards a Theory of Instruction, Norton, New York*. Documento mencionado por David Tall. 1994.

BRUNER, J.S. *Hacia unaTeoría de la Instrucción, capítulo1: Pautas de desarrollo.* Traducción de

DIENES, Z.P(1974). *Las seis etapas del aprendizaje de las matemáticas .*Taide. Barcelona, España,

DIRECCIÓN DE EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR (DEMS,1994), *Programa de Estudios : Algebra*. Documento, Talleres-IPN, México. p.5

DUVAL*, R.* (1988). *"Graphiques et equations: l'Articulation de deux registres*". Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 1. University Louis Pasteur.IREM. Strabourg. Pag235-253. Versión en español de Blanca M. Parra.

FUENLABRADA, Irma (1997). *La didáctica, los maestros y el conocimiento matemático*. Documento DIE-43.CINVESTAV.México.Pág. 1-6.

GUTIÉRREZ, Angel (1990). *La investigación en Didáctica de las Matemáticas*, en Enseñanza de las Ciencias. Documento del Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Valencia. España.

HART (1981). *Children´s understanding of mathematics.* Jhon Murray , Londres, G. Bretaña.

HERNÁNDEZ, Joaquín (1995). *Investigación Etnógrafica.* Documento de la Academia de Psicología Educativa. UPN.

HITT Espinosa, Fernando (1991*). "Visualizando el concepto de función y su relación con el uso de la microcom putadora*. CINVESTAV. Sección Matemáticas. Programa nacional de formación y Actualización de Profesores de Matemáticas. México.

HITT, Espinoza F. (1994). *Visualización de las funciones con PC. Editorial Iberoamérica*. México,.p.120.

HITT, Espinosa Fernando (1996). *"Educación Matemática y uso de nuevas tecnologías*". Edt. Iberoamericana. México,.Pp.21-44.

HOYOS V.(1999). *Mathematical Experience within Cabri II Micro world: Constrution and Interpretation of Algebraic Expression*. Reseña "International Conference On Mathematics/Sience Education & Technology (M/SET 99). Marzo. San Antonio Texas. Editor David A. Thomas. AACE.Pag. 267-271.

IMAZ Carlos (1989), *¿Qué es la matemática educativa?*, Revista Pedagógica, Vol. 6.No. 7. Enero-Marzo. UPN. México.

JHONSON, D.C (1980). *Research in mathematics education*. NCTM.Reston EEUU. Pag.20-28.

KOLMOGOROV, A. N. (1990). *Visón general de la matemática.* Revista del seminario de Enseñanza y Titulación. Facultad de Ciencias de la UNAM, México.

LESH, Richard (1979). *Supporting research in mathematics educations: Papers from a research presession. Eric*, Columbus.EEUU. Pag. *1-11*

LESH, Richard (1996). "Usando herramientas tecnológicas en matemáticas". Documento proporcionado en el Coloquio Internacional sobre la Resolución de problemas e incorporación de Nuevas Tecnologías de la Enseñanza de las Matemáticas Básicas. UPN, Ajusco. México.

NCTM (1992). Estándares Curriculares de la Evaluación para la Educación Matemática, 1992. Editorial Andaluza de Educación Matemática “Thales”, España .1994

NCTM (1998*). Principles and Standars for School Mathematics: Discussion Draft. Standar 2: Patterns, Functions and Algebra 9-12*. October 1998.http://standards-e.nctm.org page 280-290.

OLGUIN,Vicente. *La dirección del aprendizaje y sus problemas.* ENM .2ª. Edición 1978. Pag.57 y 58.

SANCHEZ, Ernesto (1995). *Graficador como apoyo en la comprensión de conceptos de álgebra*. Documento. Matemática Educativa-CINVESTAV. México.p.6 <ESanchez@mvx1.red.cinvestav.mx>.

SANTALÓ, (1994) *Matemáticas para no matemáticos, en “Didáctica de Matemáticas”.* Aportes y reflexiones. Capitulo 1. Paidós Educador. España.

SKEMP, R (1983). *The functioning of intelligence and the understanding of mathematics,* en Zweng. Birkhauser. Boston EEUU, pag .533-537.

SOFTWARE’s. Derive, Arizona, Calcula, MathCad, Ud-Mate y Algebra CD (Expert Sofware 95).

TALL, David (1995)**.** “*Un enfoque gráfico al cálculo*”. Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN. Area: Microcomputadoras y Educación. México,.Pp. 81-91.

TALL, David, (1994). *A Versatile Theory of Visualisation and Symbolisation in Mathematics*. Plenary at the CIEAEM, Toulouse, France, July. Pag. 1-10.

VELÁZQUEZ Bustamante, Santiago Ramiro (1986). *Estudio de las habilidades matemáticas en alumnos de sexto grado de primaria y tercero de secundaria*. Tesis de Maestría, Universidad Autónoma de Guerrero.

VINNER, S. 1983. “Concept, Definition, Concept Image and the Notion of Funtion” en International Jounnal of Mathematics Education, Science and Tecnology. Vol. 14 No. 3.

WENZELBURGUER, E., 1991. “Ambientes gráficos en microcomputadoras para la construcción del concepto de función en Matemáticas”. Educación Matemática, Vol.3.No.2.

ZILL, Dennis G. (1993). Algebra y Trigonometría. Editorial Mac Graw Hill. Segunda Edición. México. Pag. 36-50, 77, 120 – 125.

OTRAS REFERENCIAS

Página Web de CABRI: http://www-leibiniz.imag.fr/CABRI/CabriWeb/.INTERNET

Programas Computacionales de Matemáticas: Cabri, Derive, Math Cad, Arizona, Algebra CD.

EVENTOS

De alguna manera los siguientes eventos influyeron en la realización del presente trabajo.

1ª. JORNADA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA(1995). Realizado del 9 de noviembre al 7 de diciembre, en la UPN del Ajusco. Conferencia: Evolución del uso de la computadora en la Educación Matemática.

COLOQUIO INTERNACIONAL SOBRE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS E INCORPORACION DE NUEVAS TECNOLOGÍAS DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS BASICAS(1996). Realizado del 8 al 10 de octubre, en la UPN-Ajusco. "La utilización del CABRI II.

III JORNADA DE HISTORIA,FILOSOFIA Y PEDAGOGIA DE LAS CIENCIAS MATEMÁTICAS (1996**).** Celebrado en ciudad Universitaria. UNAM. Los días 24 y 25 de Abril. Resolución de Problemas.

TALLER DE ALGEBRA (1997). Realizado en el CECYT "Lázaro Cárdenas" por el Dr. Fernando Barrera del 28 de febrero al 6 de junio.

EDUFRANCE 98. Realizado del 12 al 15 de noviembre de 1998 en el World Trade Center en la Ciudad de México. Sección de EduLab: Enseñanza de matemáticas por medio de software educativo y computadoras en red.

V SIMPOSIO INTERNACIONAL EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA. *ELFRIEDE WENZELBURGER.* (1995) Realizado del 16 al 18 de octubre en la UNAM, Ciudad de México. Propuestas didácticas sobre la visualización de funciones cuadráticas.

GUY BROUSSEAU (1999)de la Universidad de Burdeos, Francia. Conferencia Magistral de los "Fundamentos y Métodos de la Didáctica de las Matemáticas" en el CINVESTAV de Av. Instituto Politécnico Nacional, el 5 de noviembre.

ANEXO

Educación Matemática y la investigación en este campo.

La Educación Matemática.

La intención es proponer una primera concepción global y esquemática del área de Educación Matemática. La Educación Matemática es lo que surge cuando, al hacer una serie de abstracciones, abordamos a la matemática como un problema de comunicación[1]; entendida ésta como emisión y recepción de mensajes que deben producir cambios conductuales observables en los receptores y que, en caso de que estos cambios no se presenten o no sucedan en la forma deseada, deben producir cambios en la conducta de los emisores y continuar el proceso hasta que se consigan los objetivos deseados originalmente u otros alternos.

[1] Carlos Imaz, ¿Qué es la matemática educativa?, Revista Pedagógica, Vol. 6.No. 7. Enero-Marzo. UPN. México,1989.

Este problema de comunicación se ve afectado por las condiciones del sistema educativo. En México, no hay un control de los parámetros que perfilan a los receptores, en este caso a los alumnos; ya que aparentemente que el único parámetro controlable es el de la edad. Algo semejante puede decirse de los emisores, es decir de los docentes, sobre todo en los niveles medio superior y superior donde el único parámetro que tiene visos de estar controlado es el de la profesionalización. Como bien sabemos, todas estas limitantes son producto de la masificación en la educación. Nada significativo se ha hecho hasta el momento, sólo algunos intentos aislados y sin continuidad.

Existen hasta ahora argumentos a favor de manejar de un paquete de contenidos mínimos de matemáticas, que sean indispensables para la vida social; sin embargo, esto puede ser contradictorio con la popularización actual de sofisticados equipos de cómputo. Podemos preguntarnos, si la enseñanza de la matemática (en particular a los niveles de educación básica), tal como se práctica actualmente, favorece, es indiferente o quizá perjudicial, para aprender tal paquete de contenidos mínimos.

El sentido común parecería apoyar la hipótesis de que lo peor que puede suceder es el alumno se estanque en determinado momento del proceso de aprendizaje.

Por desgracia aquí el sentido común no tiene cabida; de hecho una regresión en el proceso de aprendizaje se hace presente en un gran número de alumnos por vías diversas. Según los resultados de Velázquez, S (1986): *“existe un descenso notable en las habilidades medias*[2] *de los educandos a medida que aumenta su permanencia en el sistema escolar”.* utilizando algunos de los materiales y técnicas desarrolladas por Krutetski y su grupo, encaminados a determinar los niveles de habilidades matemáticas en niños y jóvenes; éstos estudios realizados en San Marcos, Guerrero[3]; en el marco de una tesis de maestría.

De acuerdo con Velázquez, S., por lo general, los niños antes de ingresar al sistema escolarizado, de manera espontánea se sienten atraídos hacia muchos elementos que forman parte del cuerpo de la matemática, como son las figuras geométricas, los números y su manipulación. Dicha atracción suele permanecer durante los primeros años de su educación primaria; Sin embargo, ese niño se ha convertido en adulto, su enfrentamiento a un problema simple de aritmética puede sacarlo totalmente de quicio, lo que invalida y frena todo intento razonable de acercamiento al problema.

[2] Santiago: ...”habilidades medias: habilidad para formalizar y generalizar el material matemático, operar con números, razonamiento, memoria matemática y flexibilidad de pensamiento”.

[3] Santiago Ramiro Velázquez Bustamante. *Estudio de las habilidades matemáticas en alumnos de sexto grado de primaria y tercero de secundaria*. Tesis de Maestría, Universidad Autónoma de Guerrero, 1986.

Como en el caso de que estudiantes universitarios desconozcan o manejen mal el algoritmo de la división; pero ya en este nivel no significa problema alguno recurriendo a una calculadora de bolsillo. Lo grave, es que dedicó gran parte del tiempo escolar en ejercitar el algoritmo, de lo cual nada ha quedado. Por otro lado puede ser que el problema no esté en la realización del algoritmo, sino en su elección: ¿multiplico o divido? y esto no lo resuelve una calculadora o la computadora. ¿Cuáles son entonces las ventajas de una enseñanza basada en la memorización de algoritmos? El proceso de enseñanza de la matemática a que el individuo estuvo expuesto durante años, provoca a que quede traumado y sea apático al área.

Finalmente otro tipo de problema que se da en la educación matemática, es la existencia de obstáculos naturales para la comprensión de las nociones que se manejan en matemáticas: la noción de medida; de unidad; de un número racional como razón; las dificultades que existen en pasar del lenguaje aritmético al algebraico y viceversa, etcétera.

Algunos alumnos rebasan estas dificultades por su propia cuenta, pero la mayoría suele quedarse en una especie de “limbo conceptual” del cual jamás logran salir y que les impide el ascenso a niveles superiores de instrucción.

Por lo tanto cabe analizar, los procesos de enseñanza aprendizaje de las matemáticas, como medio que permitan proponer alternativas viables en contra de la prevalecía de tales situaciones.

El siguiente comentario pudiera ser considerado: de nada sirve la indicación que suele hacerse a los alumnos de intensificar la dedicación al estudio; no es razonable pensar que en unas horas puedan alcanzar la claridad de conceptos para el que se necesitó siglos de experiencia acumulada para que cristalizara[4]. No es como aprenderse los nombres de los continentes de la Tierra, por ejemplo. Sin embargo, algunos planteamientos generales parecen desprenderse de manera natural de este pequeño análisis:

Es necesario trabajar un diseño nuevo en la enseñanza de las matemáticas que destaque el desarrollo de habilidades y la intuición, así como los hábitos de investigación y experimentación y que coloque a la matemática dentro del ámbito de interés de los estudiantes. Puede ser que el uso de calculadoras y computadoras juegue un papel importante en esta dirección.

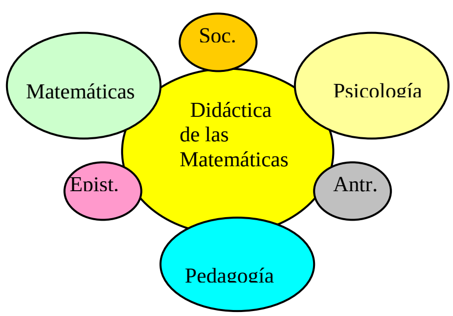
En el nivel medio superior y superior, la enseñanza de las matemáticas debe llegar con la finalidad facilitar el acceso al formalismo y de destacar los usos y adaptabilidad de la matemática; para el logro de tal fin deben de contribuir los físicos, ingenieros, químicos, etc.,.

Finalmente, es necesario desarrollar en México un verdadero programa de divulgación popular o democratización de las matemáticas, y pareciera que en este aspecto también juega un papel adecuado el uso de los nuevos medios tecnológicos

[4] Comentario que se desprende de: A. N. Kolmogorov, *Visón general de la matemática*. Revista del seminario de Enseñanza y Titulación. Facultad de Ciencias de la UNAM, México, 1990.

La Investigación en la Didáctica de las Matemáticas.

Abordaremos otro aspecto de la Educación Matemática, es el de la actividad investigadora dentro de ésta área. La investigación en la Didáctica de las Matemáticas[5] es una actividad básica cuyo objetivo es mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas y se encuentra situada en una posición intermedia entre las investigaciones de otros campos como: la Psicología Cognitiva y Educativa, Matemáticas y Pedagogía; aunque también son influenciadas por la Sociología, Epistemología, Antropología o Historia en determinadas especialidades de la Didáctica de las Matemáticas; pero las tres disciplinas citadas en primer lugar, tienen lazos aun más estrechos. (Gutiérrez, 1990)



Con todo, de acuerdo con Gutiérrez, A. (1990), cada una de estas disciplinas está claramente diferenciada:

---

[5] Terminología utilizada en España de Educación Matemática, según Angel Gutiérrez , *La investigación en Didáctica de las Matemáticas*, en Enseñanza de las Ciencias. Documento del departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Valencia. España, 1990.

- Los pedagogos describen procesos generales del aprendizaje y los didactas se centran en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
- Los investigadores matemáticos se dedican a buscar nuevos conocimientos de Matemáticas y los didactas se centran en los conocimientos ya establecidos, se preocupan por analizarlos para encontrar formas adecuadas de trasmitir y entender las Matemáticas.
- La relación con la Psicología, es en la actualidad la más estrecha de las tres, pues la mayoría de las estructuras mentales del ser humano son globales y los didactas se interesan por aquellas estructuras mentales que tienen relación directa con los procesos de comprensión y utilización de los conceptos y habilidades matemáticas, llegando a un nivel de concreción.

Tomemos como punto de partida esa idea que tenemos de la investigación como un trabajo apoyado en un marco teórico, dirigido al descubrimiento de algo desconocido y a mejorar los conocimientos existentes sobre un tema. En realidad la investigación en Educación Matemática quisiera servir al perfeccionamiento en las actuales formas de actuación de los profesores de matemáticas y en la búsqueda de otras nuevas, y tiene como objetivo final el promover una mejor enseñanza, con herramientas, de los conceptos matemáticos.

Además del logro de una mejor comprensión en los mecanismos mentales ligados a la actividad del aprendizaje de las matemáticas.

Richard Lesh (1979) nos proporciona otro punto de vista, más práctico y concreto " el objetivo de la investigación es desarrollar un cuerpo de conocimientos útiles relacionados con temas importantes de la Didáctica de las Matemáticas". Lesh, aclara que " estos conocimientos útiles se refieren a: a) identificar problemas importantes para la enseñanza de las matemáticas, b) plantear conjuntos de cuestiones concretas relacionadas entre sí y que contribuyan a mejorar el conocimiento disponible sobre el problema subyacente, c) encontrar respuestas a esas cuestiones que sean útiles en diversos contextos, eliminando la información poco válida o inútil, y d)comunicar los resultados y conclusiones que sean comprensibles por profesores e investigadores"[6].

Entre los tipos de investigaciones que se realizan en la educación matemática tenemos el trabajo de elaboración de teorías de enseñanza o aprendizaje de las matemáticas, abordan procesos y capacidades de razonamiento, estrategias de enseñanza, niveles de comprensión, etcétera. Dichas investigaciones son laboriosas y complejas; Como ejemplo se pueden destacar las de Van Hiele(1992)[7], Skemp(1983)[8] y Dienes(1974)[9].

[6] Richard Lesh, *Supporting research in mathematics educations: Papers from a research presession. Eric, Columbus.EEUU, 1979 .pag. 1-11*

[7] Estándares Curriculares de la Evaluación para la Educación Matemática. NCTM, 1992. Editorial Andaluza de Educación Matemática "Thales", España .1994

[8] Skemp R., *The functioning of intelligence and the understanding of mathematics*, en Zweng.Birkhauser.Boston EEUU, 1983 pag .533-537.

Un acercamiento menos elaborado al estudio de lo que está sucediendo en el aula derivado de la experiencia, está representado por el trabajo de aquellos profesores que completan o sustituyen contenidos curriculares y elaboran bloques de actividades o planes de enseñanza complementaria con los que intentan mejorar la eficacia de su enseñanza y la profundidad del aprendizaje de sus alumnos. En esta etapa del trabajo investigativo es la que se llevo acabo en el presente trabajo, aquí interviene más bien un afán de innovación o experimentación didáctica. Faltan entonces algunos componentes importantes de la actividad propiamente investigativa: una planificación cuidadosa que tenga en cuenta los conocimientos disponibles sobre el tema y no sólo la experiencia personal acumulada; una profundización didáctica y matemática que permita identificar los orígenes de las dificultades de aprendizaje; una verificación objetiva de los logros alcanzados más allá de la intuición personal o los resultados en los exámenes. Con esto no quiero decir que el estudio realizado en el presente trabajo y otros similares llevados a cabo de los profesores de matemáticas sea poco productivo; al contrario, el trabajo de innovación que aquí se realiza es imprescindible para mejorar la calidad de la formación matemática de los estudiantes, pues en muchas ocasiones obra como medio de conexión de la investigación con la docencia cotidiana; en todo caso manifiesta el interés de avanzar en el mejoramiento y el conocimiento del fenómeno educativo en la clase de matemáticas.

[9] Dienes,Z.P. *Las seis etapas del aprendizaje de las matemáticas* .Taide. Barcelona, España, 1974.

Por otro lado, entre los campos curriculares que están siendo investigados con mayor intensidad en el área de matemáticas se encuentran la geometría, aritmética y el álgebra. La geometría ha resurgido, no solamente abordando la descripción de conceptos geométricos sino que debe de ir más allá, por ejemplo, de relacionando la comprensión geométrica con el tipo de experiencias que adquieren los estudiantes dentro las escuelas y con diversa metodología de enseñanza usados por los profesores, para llegar a un razonamiento geométrico y destacar la habilidad de visualización espacial[10].

El aprendizaje de la aritmética ha sido siempre y sigue siendo un elemento básico de las Matemáticas elementales; el objetivo de dicha enseñanza está más interesada por procurar la comprensión en los estudiantes de los conceptos y habilidades implicados. Actualmente se pone énfasis en la necesidad de que los estudiantes comprendan los motivos que justifican el uso de los números y la realización de algoritmos.[11]

Por último, en cuanto al campo de interés de esta Tesis, el del Algebra escolar, esta se ha considerado como la continuidad natural de la aritmética; de hecho, los investigadores interesados en el estudio inicial del álgebra, han buscado sus antecedentes en ciertas actividades estructurales de la aritmética, como la de transformar problemas verbales en expresiones simbólicas o simplificar expresiones complejas.

[10] Bishop A.*Space and geometry, en Lesh;*Landau, 1983 pag.176-203.
[11] Lesh, 1979.

Otro elemento básico del álgebra escolar es el de las variables. De acuerdo con Hart (1981), los estudiantes dan ciertas interpretaciones a las letras[12] que aparecen en las expresiones algebraicas o en problemas con valores desconocidos:

Letra evaluada: el estudiante sustituye la letra por un número concreto.
Letra no usada: el estudiante ignora la presencia pero la tiene en cuenta.
Letra como objeto: el estudiante considera la letra como abreviatura de un cierto objeto.
Letra como incógnita específica: es como un número concreto pero desconocido, pudiendo operar con ella directamente.
Letra como número generalizado: en este caso considera que la letra puede tomar diferentes valores.
Letra como variable: es considerada como una cantidad indeterminada de valores y entiende que hay una relación sistemática entre la letra y dichos valores.

Por último otro de los elementos importantes de la enseñanza y de la investigación en didáctica del álgebra son las ecuaciones, principalmente en torno a la traducción algebraica de problemas y enunciados textualmente y a la comprensión y aprendizaje de técnicas para el cálculo de soluciones de ecuaciones y sistemas.

La educación matemática y computación.

El desarrollo tecnológico actual afecta la labor educativa, en particular hacen

[12] En Hart , *Children´s understanding of mathematics.* Jhon Murray , Londres, G. Bretaña. 1981; se aluden seis interpretaciones de las letras que le dan los estudiantes al aparecer en expresiones algebraicas o en problemas con valores desconocidos.

reflexionar sobre el tipo de actividades docentes que se siguen practicando, así como lo relativo a los recursos de que se vale el profesor para promover aprendizajes congruentes con demandas educativas reales.

Por una parte, se plantean necesidades de actualización del profesor en cuanto a los resultados de investigaciones educativas; y por otra, la posibilidad de implementar modelos didácticos que incorporen algunos de los instrumentos auxiliares que el mencionado desarrollo tecnológico ha proporcionado como proyectores, grabadoras, calculadoras, computadoras, etc. Entonces podemos decir que una de las tareas de los educadores matemáticos es la de métodos de enseñanza y alternativas didácticas a problemas educativos concretos, usando por ejemplo recursos computacionales.

La computadora produce cambios en la educación matemática; no sólo vuelve obsoletos los auxiliares como tablas numéricas, trazo de gráficas con papel y lápiz, formularios, etc., sino que también abre nuevas perspectivas.

De acuerdo con Johnson (1980), “el área más fructífera y rica para actividades con computadora está en la exploración”[13]. El estudiante puede usar la computadora para generar resultados con la intención de que éstos muestren un concepto o relación y que ayuden a la resolución de problemas matemáticos.

[13] Jhonson, D.C., Research in mathematics education. NCTM.Reston EEUU.1980 Pag.20-28.

En otras palabras la computadora puede ser utilizada para desarrollar conceptos, retroalimentar el aprendizaje y adquirir habilidades que ayuden a la resolución de problemas. En esta tesis nos hemos propuesto utilizar la computadora y software educativo "EXPERT software, ALGEBRA CD" en la visualización de funciones, con el fin de desarrollar la comprensión del concepto de función que es fundamental en el precálculo.

Publicaciones relativamente recientes mencionan, Elfriede Wenzelburguer(1991) y David Tall (1994)[14], mencionan que la computadora tiene ciertas ventajas en promover experiencias del aprendizaje que complementen las actividades del profesor pues a) puede procesar enormes cantidades de información rápida y precisamente, para producir salidas gráficas movibles que pueden ayudar a los estudiantes a la manipulación de ideas complejas en una forma comprensible, b) externaliza el conocimiento representándolo en una pantalla en lugar de hacerlo en la mente de alguien, c) es democrática en el sentido que responde en la misma forma al maestro y al alumno.

En otra publicación reciente (NCTM 1998 "Los estándares curriculares y de evaluación de matemática escolar") se afirma que todo estudiante debe disponer del uso de una computadora en cualquier momento. Sin embargo, aquí no se elimina la necesidad de aprender algoritmos.

[14] WENZELBURGUER, E., 1991. "Ambientes gráficos en microcomputadoras para la construcción del concepto de función en Matemáticas". Educación Matemática, Vol.3.No.2.

Tampoco se elimina la práctica con lápiz y papel, por ejemplo, se menciona cuando se requiere una respuesta aproximada, hay que decidir un método adecuado: cálculo mental, lápiz y papel, calculadora o bien computadora y que ésta última se escogerá para operaciones y cálculos complicados. Se destaca también en la publicación mencionada que la computadora es un recurso didáctico valioso para aprender matemáticas, explorar ideas y patrones, desarrollar conceptos, resolver problemas e investigar aplicaciones. Un uso bien planeado puede mejorar la calidad del plan de estudio y del aprendizaje. También se mencionan que la experiencia ha demostrado que los alumnos no la usan si hay otras maneras de resolver el problema.

Por otro lado, existen también desventajas en el uso de la computadora. Por ejemplo, invariablemente representa sin exactitud la información cuando se dibujan figuras. Las gráficas no son dibujadas suavemente, están hechas de un número finito de pixeles, así que una línea recta no necesariamente es recta y un círculo no necesariamente se ve como círculo. Una gráfica como:

$$f(x) = x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$$

oscila exactamente arriba y debajo de los ejes cerca de $x = 0$, puede por lo tanto no ser representado fielmente[15].

[15] David Tall**.** "*Un enfoque gráfico al cálculo*". Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN. Area: Microcomputadoras y Educación. México,1995.Pp. 81-91.

Paradójicamente esta desventaja puede tener un resultado ventajoso: en la clase, es necesario subrayar el hecho de que la computadora solamente produce un modelo de gráfica, no la gráfica “teórica” misma. Así que los estudiantes deberán involucrase en una discusión entre lo que está haciendo realmente la computadora y la construcción mental de las figuras.

Los primeros tiempos de la computadora se concentraron en su uso como una máquina de enseñanza, con instrucciones para decir a los alumnos qué hacer, tareas de práctica para reforzar las ideas, tareas de diagnóstico para cotejar errores reconocibles. Un enfoque gráfico destinado a la resolución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita no tiene nada que ver con esto de esto. Las dificultades conceptuales en la resolución de ecuaciones no pueden ser resueltas por la simple psicología simple de estímulo-respuesta: ver la gráfica y resolver la ecuación, sino por una serie de conocimientos ligados entre sí que proporciona la visualización de la función y que se relacionan con la solución de ecuaciones de nuestro interés. Nosotros aquí hemos adoptado un enfoque de enfrentamiento de los estudiantes a un uso de software flexible que estimule la discusión entre el maestro y el estudiante, y entre los mismos estudiantes.

REGISTRO DE INVESTIGACIÓN

Observaciones del investigador	Descripción de la investigación	Observaciones de acuerdo al marco teórico
	PRESENTACION DEL SOFTWARE: **ALGEBRA CD. EXPERT 1995**. ESCENARIO: SALA AUDIOVISUAL. Consta de una computadora multimedia, data show, retroproyector, pantalla, mesa bancos y T.V. 27”. Buena iluminación y ventilación. FECHA: 8 de noviembre de 1997. HORA INICIO: 9:05 a.m. HORA DE TERMINO: 10:14 a.m.	Con el desarrollo visual que proporciona la computadora, David Tall destaca ellos modelos de representación mental de Bruner, las aproximaciones matemáticas (organizadores genéricos) y procesos y conceptos (preceptos).
	DESCRIPCIÓN	
	Se indica a los participantes el propósito de trabajo a desarrollar. Posteriormente se lleva a cabo la demostración del programa matemático educativo. M. El programa contiene el curso completo de álgebra de acuerdo a la curricular de E.U. de 1995. Dicho programa se divide en 2 secciones: Primer semestre con temas como números reales, variables y expresiones, ecuaciones lineales y su gráfica, monomios y exponentes; y polinomios. Segundo semestre: factorización, sistemas de ecuaciones, operaciones con fracciones, radicales y exponentes; y funciones y relaciones. De los cuales utilizaremos el último en las computadoras del aula 4.	En los inicios de la investigación se empieza a trabajar lo visual en el aprovechamiento de la resolución de ecuaciones de segundo grado usando la computadora a través de funciones cuadráticas con la correspondencia del modelo icónico de Bruner y Tall para dar un soporte a las ideas matemáticas.
Refleja interés por los avances tecnológicos	E_1. Lo utilizaremos en CD. M. No, se utilizará un disco 3.5” con el programa previamente grabado para que cada uno de ustedes pueda trabajar, ya que las computadoras (486) de la escuela no cuentan con este sistema.	

Observaciones del Investigador	DESCRIPCIÓN	Observaciones de acuerdo al marco teórico

El programa es compatible con Windows 95 ó MSDOS

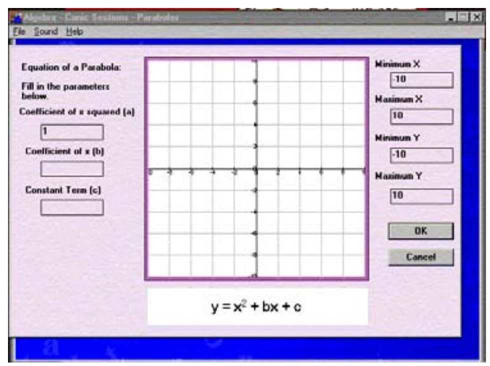
E's. AAHH!...

M. Bien, veamos algunas instrucciones generales para su utilización. Una vez en la pantalla del menú del segundo semestre, nos dirigimos al cuadro del tema de Funciones y Relaciones en la sección de parábolas,

Bruner afirma en su ensayo de *Pautas de Desarrollo* "El sistema preceptivo se realiza durante la acción", misma que fue retomada por David Tall como sistema preceptivo sensorio-motor que está ocupado gran parte de la actividad nuestra, empezando por percibir los objetos del mundo externo (reconocimiento de la pantalla de trabajo) y la acción sobre ellos (el funcionamiento del software).

Cuatro secciones:
1º. a,b,c son coeficientes.
2º.ax^2+ bx +c es la forma general de las expresiones de segundo grado con una incógnita.
3º. Plano Coordenado.
4º." Ok " y "cancel" para trazar o cancelar la función.

en donde obtenemos la siguiente pantalla:



M. a, b y c son los coeficientes de la forma general de las expresiones algebraicas de 2º. Grado con una incógnita.

El sistema preceptivo se interconecta con la computadora a través de el teclado y el ratón, concediendo que los datos simbólicos sean tecleados, por ello es un método simple cuya prueba verificación es por el experimento físico.

El modelo simbólico de Bruner, debe ser la esencia del modelo visuo-simbólico con símbolos que se escriben o se dibujan y se ven. Escribiendo simbolismos concede mayor flexibilidad de comunicación que usando palabras.

Procesos de evaluación de expresión, concepto de expresión algebraica cuadrática.

Observaciones del Investigador

Tiene la visión de números Z

El estudiante relaciona la forma general de expresiones de segundo grado con una incógnita con su trazo de la parábola. Indica antecedente de conocimientos sobre el tema.

DESCRIPCIÓN

desconocida o incógnita. Con el mause se hace un "click" en el rectángulo y con el teclado pulsar el número deseado: 1, 2, 3,... etcétera.

E_3. ¿ Y si son negativos?

M. Antes del número pulsamos la tecla -

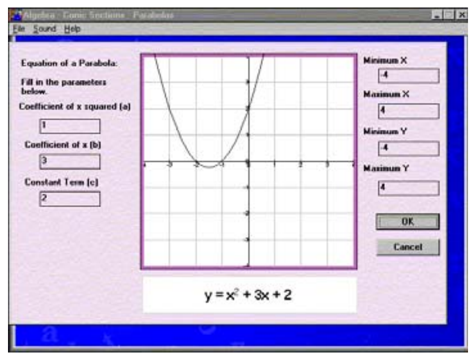
Una vez anotados, en la parte inferior aparecen simultáneamente, después de dar un "enter", los valores de los coeficientes en la forma general.

$$ax^2 + bx + c$$

M. Realicemos un ejemplo, para a: 1,b: 3 y c:2

Observen como se escribe la expresión cuadrática: $x^2 +3x+2$

Y arriba tenemos el plano coordenado:



Donde se traza la gráfica correspondiente haciendo click en ok

E_{10}. El trazo es como una parábola.

M. Si, es una parábola. Bueno este programa será su herramienta de trabajo.

Observaciones de acuerdo al marco teórico

El sistema icónico trata de reunir lo visuo-espacial de la computadora con lo visuo-simbólico del profesor.

De acuerdo con el sistema visuo-simbólico se teclean los símbolos numéricos y el programa escribe simultáneamente la expresión cuadrática y a su vez se representa la gráfica, es decir, utiliza los símbolos como proceso para realizar una función (preceptos)

La computadora es la herramienta adecuada para llevar a cabo los procedimientos rápidamente, y de manera casi instantánea, presentado el rendimiento visual en la pantalla. Es por esto particularmente valioso para dar el soporte en los sistemas visuo-espacial y el preceptual de David Tall.

La visualización concede una gran cantidad de datos compactados, como las propiedades de la función cuadrática que son llevados intuitivamente a los alumnos y los alienta para dar significado gráfico de los conceptos como: parábola, expresión cuadrática.

Observaciones del Investigador	DESCRIPCIÓN	Observaciones de acuerdo al marco teórico
Muestran rechazo a este tipo de evaluación. (Se considera E's a las expresiones de más de 5 estudiantes.)	M. Enseguida ustedes resolverán unas preguntas relacionadas con las ecuaciones de segundo grado con una incógnita. E's. ¿ Es examen? M. No, es un ejercicio para cada uno. Tienen 30 minutos para poder resolverlo... Bien tiempo transcurrido, me entregan las hojas y nos iremos a la aula 4 de computación. Una vez ahí los alumnos esperan afuera del aula, y se procede a revisar y preparar el equipo: se encienden los interruptores de energía y regulador de voltaje, cada computadora es encendida y revisada a que ejecute el sistema operativo MS-DOS. Después de 15 minutos entran los alumnos y se les asigna lugar.	

Observaciones del Investigador	DESCRIPCIÓN	Observaciones de acuerdo al marco teórico
	TEMAS: • Sistemas Coordenadas Cartesianas • Relaciones y Gráficas • Función • Intersectos. Escenario: Se realiza la actividad en el aula de cómputo No. 4 con 25 computadoras, cada una con teclado, CPU, Monitor y mouse. Este equipo es protegido por un regulador de voltaje e interruptores maestros de electricidad. Tiene un pizarrón ecológico. Existe buena ventilación e iluminación. FECHA: 8 de noviembre de 1997. HORA DE INICIO: 10:29 a.m. HORA DE TERMINO: 12: 12 p.m.	
Los estudiantes manejan instrucciones básicas de computación del sistema operativo MS-DOS, debido a que en el programa del bachillerato tecnológico integra a la asignatura de Computación desde el primer semestre.	Se les reparte el material de trabajo, el cual se divide en dos partes; la primera son las instrucciones básicas para la utilización del programa y la segunda son los temas introductorios a la resolución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita.	Etapa preceptiva en los alumnos realizando acciones para la instalación del software y examinan el programa educativo.
	Se inicia con la primera parte del material que corresponde al manejo del software. M. En la primera parte del material contiene un cuadernillo y un disco de 3.5", el cual lo van insertar en el "drive" y cambian de C:> a A:> y den un "dir" y escriban Xalgebra2.Exe,¿qué es lo que aparece? E_1 . Aparece la pantalla del menú del segundo semestre de álgebra. M. ¿Todos están en esa pantalla? E's. Si . M. Ahora bien localicen el tema de Funciones y Relaciones con el cursor y hagan un "click". Enseguida aparecerá otro cuadro de menú.	Los alumnos examinan por el experimento físico de la etapa preceptiva, y llevan acabo la prueba de verificación.

Observaciones del Investigador

Tiene presente la explicación del Software.

Retroalimentación en el uso del programa educativo.

Deficiente concepción del coeficiente del término cuadrático.

El programa educativo ayuda a una mejor concepción del coeficiente 1.

No hay un convencimiento pleno del coeficiente 1 ya que no aparece escrito

Contenido del Tema de nuestra elección

Obtiene una secuencia lógica en la forma de utilizar el programa con los coeficientes.

Refirma la concepción de expresiones de segundo grado con una incógnita con la parábola.

DESCRIPCIÓN

E_3. Si y luego seleccionamos parábola.

M. Bien, háganlo todos los demás...Una vez haciendo “click” tendremos nuestra pantalla de trabajo. Ahora salgan del programa y vuelvan a comenzar solos.

E’s. Ya,,, estamos en la pantalla de trabajo

M. Ahora vamos a graficar esta expresión $x^2 + 3x + 2$, recuerden que solo vamos a anotar los coeficientes, para a: es...

E_{14}. Es 0 .

M. Vamos haber. Anoténlo y tecleemos enter... que sucedió.

E_5. Aparece 0 en $0x^2 + bx + c$.

E_{14}. Entonces es 1 maestro.

M. Hagan el mismo procedimiento .

E_{15}. Maestro ya lo anote y solamente aparece $x^2 + bx + c$.

M. Bien, acuérdense (se escribe en el pizarrón la expresión cuadrática) que el número uno generalmente no se escribe como coeficientes, de términos cuadráticos y lineales; ni en exponentes, pero está representado.

(señalando respectivamente cada uno)

E_3. Entonces en b: anotamos 3.

M. Si, y para c: 2. Una vez que estén todos los valores den click a ok .

Observen la gráfica.

E_3. Es una parábola.

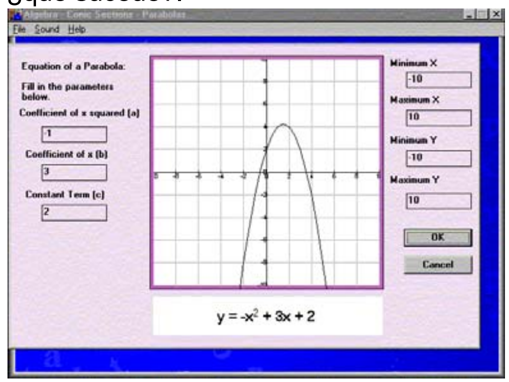
Observaciones de acuerdo al marco teórico

La etapa icónica promueve un aprendizaje versátil, por un lado la visualización de gráficas (objeto) y por el otro la manipulación secuencial de símbolos.

El programa da un soporte a las ideas matemáticas simbólicas dando significados visuales.

En la etapa visuo espacial representa icónicamente los objetos, los traza o los representa para después relizar experimentos mentales.

Los ejemplo y los contraejemplos ayudan a establecer aproximaciones matemáticas (organizadores genéricos), relaciones verbales y conlleva a realizar la prueba euclidiana de la etapa visuo-simbólica .

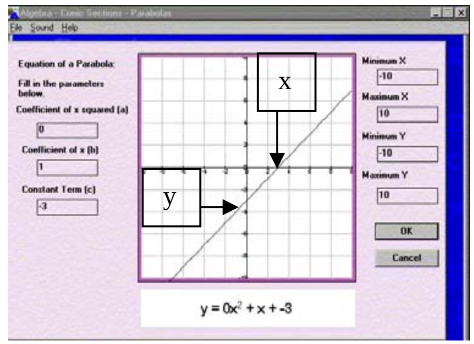
Observaciones del investigador	DESCRIPCIÓN	Observaciones de acuerdo al marco teórico
Posiciones gráficas con el término ax^2 negativo.	M. La parábola es la representación gráfica de las expresiones cuadráticas. Ahora, si ustedes cambian el coeficiente 1 por -1, ¿qué sucede?. 	Los organizadores genéricos como: $-1x^2+...$ y $1x^2$ reflejan relaciones verbales como: “la parábola abre hacia abajo o hacia arriba”
Manejo del lenguaje algebraico: “Término Cuadrático”	E_2. “La parábola está de cabeza” M. La parábola abre hacia abajo. Entonces si el término cuadrático es negativo, sucede lo que acabamos de ver y si es positivo la parábola abre hacia arriba. Bien alguna pregunta. Entonces salgan del programa. Enseguida se les indica tomar la segunda parte del material con los temas de Sistemas de Coordenadas Cartesianas, Relaciones y Gráficas, Funciones e Intersectos.	Con la localización de puntos, se crean organizadores genéricos para formar la idea matemática de noción de relación y de función
La afirmación corresponde a la localización de puntos en el plano coordenado.	Comenzamos con un recordatorio de componentes y definición de Sistemas de Coordenadas Cartesianas. M. Lean el siguiente material. (los alumnos realizan la actividad y una vez terminada esperan la indicación correspondiente) Localizarán puntos en los ejercicios uno y dos de la hoja dos de su material.	Objeto matemático definido. Las relaciones verbales pueden representar definiciones que contienen una serie de organizadores genéricos previos.

Observaciones del investigador	DESCRIPCIÓN	Observaciones de acuerdo al marco teórico
	E_1 . Los números positivos son hacia arriba y hacia la derecha. M. Los números negativos hacia abajo e izquierda del origen. No hubo ningún problema en la localización de puntos en el plano. M. En la hoja 3 tenemos el tema de Función y termina en la hoja 4. Leamos en silencio. (tiempo 7 minutos)	
En el desarrollo de la investigación se utilizaron algunas definiciones como: función	La función es una asociación de objetos mediante una regla de correspondencia.	
	E_2. Es como un nombre del directorio telefónico y su número. M. Si, en este ejemplo tenemos dos conjuntos ¿cuáles son?	Los ejemplos traen consigo las precisiones de las ideas matemáticas con relaciones verbales y el manejo de símbolos.
Dan su propios ejemplos para entender la definición anterior.	E_{15}. Uno podría ser el nombre de la persona. M. Es correcto (se dibujan dos conjuntos X y Y, el nombre se anota en X) y el otro conjunto es... $E_{10.}$ El número de teléfono. M. Bien (se anota número en el conjunto Y) ¿Cuál sería la regla de correspondencia? E_3. Que sea de un directorio teléfonico.	El modo lógico concierne con la combinación de las palabras y los símbolos usados para definir los conceptos matemáticos formales y la deducción subsecuente de sus propiedades y las relaciones en la prueba formal.
Dar contra ejemplos ayuda a diferenciar los conceptos.	M. Bien, muy bien.. y ahora que pasaría si hubiera tres números telefónicos , que a la hora de marcarlos contestara la misma persona en el mismo teléfono ¿se podría? E's. No... no se podría.	La transición para la prueba formal causa en muchos estudiantes enormes dificultades lo que indica que el papel de la definición de los objetos matemáticos son una fuente de gran dificultad.
Concepto intuitivo de relación.	M. Si sucede algo como lo anterior , ya no sería una función sino una relación. Por lo que a cada elemento del conjunto X le corresponde un solo elemento del conjunto Y. Lo que nos interesa son las funciones y podemos dar más ejemplos como entre más tiempo pase la población	

Observaciones del investigador	DESCRIPCIÓN	Observaciones de acuerdo al marco teórico
	crece o entre más volumen tenga un objeto más presión (fuerza de gravedad) tendrá, etcétera.	Objeto descrito. Cualquier objeto que satisface la definición es una instancia del concepto.
	Continuamos con el último tema de la sesión: Intersectos. A través de las parejas de números de una tabulación se graficó una parábola la cuál intersecta en tres puntos.	
	M. Los intersectos se ubican en la intesección de la linea de la parábola con los ejes “x” y “y”. Observen la gráfica ¿cuántos intersectos tenemos en x?	Asociación de valores numéricos a los intersectos. Experimentos mentales (icónica), Descripción de objetos y relaciones verbalizadas (visuo-simbólicas)
Inducienda al lenguaje matemático: “Punto de intersección”	E_2. Son dos M. Y en que punto se intersecta... E_3. En –1 y 3 . Entonces el otro intersecto está en el punto –3. M. Si, bien, realizamos los siguientes ejercicios.	Se realiza la prueba euclidiana (visuo-simbólica).

Observaciones del investigador	DESCRIPCIÓN	Observaciones de acuerdo al marco teórico
	TEMAS • Funciones Lineales • Funciones Cuadráticas Escenario: Se realiza la actividad en el aula de cómputo No. 4 con 25 computadoras, cada una con teclado, CPU, monitor y mouse. Este equipo es protegido por un regulador de voltaje e interruptores maestros de electricidad. Tiene un pizarrón ecológico. Existe buena ventilación e iluminación. FECHA: 15 de noviembre de 1997. HORA DE INICIO: 9: 09 a.m. HORA DE TERMINO: 12: 12 p.m.	
Tiene antecedente de las expresiones de primer grado. Relación de expresión de primer grado con las funciones lineales.	Una vez realizada la lectura de Funciones Lineales, notaron que había una referencia con los temas anteriores: la localización de puntos a partir de la tabulación en un plano coordenado y especialmente los intersectos en los ejes. M. Al unir los puntos de $f(x) = x - 3$ se dibuja una línea recta, lo que significa que es una función lineal. La expresión $x - 3$ es de ¿grado? E_2. Es de primer grado. M. Correcto, es de primer grado ya que su literal "no tiene exponente escrito" pero implícitamente tiene el número 1. Entonces decir función lineal o de primer grado nos estamos refiriendo al mismo concepto. Observen la gráfica:	Los alumnos trasladan los sistemas verbales a la geometría euclidiana para formular las experiencias de las formas geométricas, lo que ha experimentado ya perceptiva y visualmente. Existen muchos eslabones entre los icónico y lo simbólico, por ejemplo funciones simbólicas y gráficas. Esta encapsulación del proceso interno del objeto (función) tiene como un eje de uso del simbolismo (expresión algebraica) para representar cualquier proceso o concepto (expresión lineal) lo que llamamos precepto

Observaciones del Investigador	DESCRIPCIÓN	Observaciones de acuerdo al marco teórico



La etapa visuo-simbólica tiene un constante ir y venir con la etapa icónica, interpretando gráficas, realizando experimentos mentales y posteriormente manejando símbolos matemáticos.

Se hace una comparación de una función lineal con f(x)= 0 con una ecuación de primer grado con una incógnita.

El intersecto en x = 3, el intersecto en y = - 3. Cuando f(x) = 0, el valor de x es 3 (intersecto en x) ; es decir que f(x) = x – 3 lo podemos escribir como 0 = x – 3 o bien x – 3 = 0.

Ejemplo de precepto x – 3, proceso de evaluación de expresión, concepto de expresión.

Ello implica la formación de una **ecuación lineal o de primer grado** cuya incógnita tiene un valor de tres. Sustituyendo en la ecuación x – 3 = 0, x = 3 tenemos:

(3) – 3 = 0

3 – 3 = 0

0 = 0

Podemos decir que el número tres satisface la ecuación anterior.

Los preceptos generan otros preceptos de un mayor nivel de comprensión de símbolos matemáticos (ecuaciones de primer grado).

Los intersectos ayudan a resolver ecuaciones de primer grado

E_3. La gráfica nos da la solución de la ecuación...

M. Y de cualquier ecuación. Ahora con ayuda de su programa tracen la gráfica de f(x) = x – 1 y den la solución de x cuando f(x) = 0 por lo que tendremos la ecuación x – 1 = 0

En esta actividad notifica la diferencia entre lo que está presente en la pantalla de la computadora y una especie de pensar reflexivo requerido por el alumno para presentar los diferentes tipos de prueba.

Observaciones del investigador	DESCRIPCIÓN	Observaciones de acuerdo al marco teórico
Interpreta cuando f(x) = 0, la expresión de primer grado se transforma en una ecuación del mismo grado.	E_{10}. Maestro entonces la ecuación que se forma es x – 1 = 0. M. Muy bien (se escribe en el pizarrón la expresión). E_3. ¿Cómo escribimos los coeficientes en el programa? M. Investiguemos, escribimos en a: el primer coeficiente de x – 1; ¿cuál es? E's. Uno. M. Escriban y observen la expresión ax^2+bx+c, ¿qué sucede?	El sistema preceptual concierne en los símbolos de la aritmética y el algebra, lo que es acostumbrado a representar x-1, F(x), etc., porque la matemática de estos símbolos tienen algoritmos subyacentes para llevar a cabo los procesos, es esta área que se ha convertido en la más fácil de operar en la computadora.
El objetivo es de trazar una función lineal y $x^2+bx + c$, no representa tal situación.	E_{15}. El número uno se escribe en el término cuadrático y no en el lineal. M. Entonces ¿dónde lo escribiremos? E_1. En b: . M. Bien y por consiguiente a c: le corresponde el –1 y en "a" se anota cero. Después den un "click" en ok .Observen la gráfica.	Las imágenes específicas pueden ser vistas como ejemplos genéricos de los conceptos bajo la consideración y por la observación en una rango de los ejemplos puede hacerlos suyos alentando el pensamiento en el concepto mientras lo más general se apropia en estos ejemplos.
Da la solución tomando en cuenta el intersecto en "x" empleando lenguaje algebraico.	E_3 . La solución a la ecuación x – 1 = 0 es x = 1. M. Correcto. Resuelvan el ejercicio 7 y los problemas de aplicación siguientes. (los detalles se presentan en el análisis de respuestas). M. En la funciones cuadráticas tomaremos en cuenta los coeficientes a, b y c. El coeficiente "a" no puede faltar por que da lugar a la parábola.	Con esta imagen mental un estudiante puede aprender para mirar las posibles soluciones de la gráfica. Esta puede ser calculada numéricamente para algunos dando la función y su gráfica dibujada, habilitando el estudiante para explorar las propiedades de la función cuadrática de una gráfica dada y para formular intuitivamente el significado para lo que es calculado simbólicamente como ecuación de segundo grado.
Percibe que las expresiones como ax^2+ bx +c pueden ser completas o incompletas.	E_5. ¿Puede faltar el coeficiente b? M. Si, pero también puede faltar "c" o ambos. Veamos un ejemplo realicen la gráfica de f(x) = x^2 + 3x +2, mencionen cuáles son los intersectos	

Observaciones del investigador	DESCRIPCIÓN	Observaciones de acuerdo al marco teórico

Observaciones del investigador

Intuición de dos soluciones que son representativas de las ecuaciones de segundo grado con una incógnita. Este método sería útil para la Factorización

Retroalimentación utilizando lenguaje Algebraico

En algunos ejercicios como $f(x) = (x + 5)(x - 2)$, cuando $f(x) = 0$ tenemos $(x + 5)(x - 2) = 0$; algunos estudiantes ya no utilizaron la computadora para dar las soluciones. Intuitivamente realizaron un despeje mental como:

$x + 5 = 0$ y $x - 2 = 0$

$x_1 = -5$ $x_2 = 2$

DESCRIPCIÓN

E_1. Tiene dos intersectos en -1 y -2 .

M. Si $f(x) = 0$, tenemos que $0 = x^2 + 3x + 2$ o $x^2+3x + 2 = 0$, con lo cual se forma una **ecuación de segundo grado** con dos soluciones $x_1 = -1$ y $x_2 = -2$. Las cuales son una característica importante de las ecuaciones cuadráticas .

Resuelvan el ejercicio 8 con ayuda de la computadora y escribe las soluciones cuando $f(x) = 0$. Posteriormente los problemas de aplicación.

Observaciones de acuerdo al marco teórico

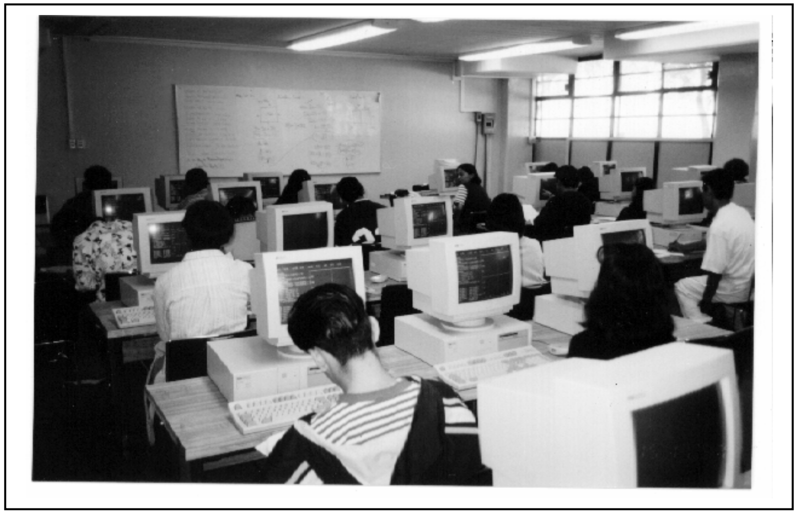
Nota que la imagen dibujada es siempre de una gráfica específica x^2+3x+2. Pero los procesos de representación visual y el cálculo numérico de la expresión cuadrática recurre a todos los ejemplos de las gráficas de las curvas llamadas parábola y así un caso específico puede ser visto como ser típico de una idea más general. Además la noción de intersecto encarna una noción intuitiva de lo que tiene intención para una ecuación para ser solucionada. Si no es solucionada entonces la gráfica no tiene intersecto en el eje de las equis.

De este modo la visualización concede el significado para ser dado para los conceptos tal como expresión cuadrática y no cuadrática, intersectos en el eje x y en el eje y ; ellos son reunidos formalmente.

Tal entorno no grafica realmente el concepto general. Pero significó que puedo ser capaz de trazar, dice, un polinomio típico -un específico cuadrático- pero no puedo, en una instancia de lo individual, trazar un polinomio general, aún cuando puedo simbolizarlo como:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$$

Para esta visualización de la razón sólo es eventualmente inadecuado en matemáticas. Esencialmente conviene para realizar una descripción simbólica o verbal del concepto donde es posible formular el caso general y los medios verbales/simbólicos puede ser acostumbrados a formular los argumentos generales.

Observaciones del investigador	DESCRIPCIÓN	Observaciones de acuerdo al marco teórico
		El software tal como Algebra CD concede la manipulación preceptiva de los ejemplos genéricos pero entonces requiere la traducción en una forma más general para facilitar una prueba de Euclideana. De la misma forma que, el software debe ser utilizado en un contexto que eslabona, para las manipulaciones simbólicas para que la significación visual dinámico da la manipulabilidad simbólica para habilitar, sofisticar y realizar la computación precisa. En un terreno más avanzado, los investigadores matemáticos usan a menudo la imaginación visual para soportar el pensar matemático que presenta eventualmente la prueba formal. Pero, le ponen así sucintamente, es vital para ser " guiado por las imágenes sin ser esclavo por ellas". Un entorno de sofware lo que habilita al usuario para explorar los ejemplos y los contra ejemplos de un concepto en la preparación para la reunión de un gran concepto que se apropia por estos ejemplos es nombrado como organizador genérico.

CENTRO DE ESTUDIOS CIENTÍFICOS Y TECNOLÓGICOS
"LÁZARO CÁRDENAS DEL RÍO"

ECUACIONES DE 2º GRADO

NOMBRE: ____ GRUPO:_______

I. CONTESTA LO QUE SE TE PIDE:

1. Las raíces o soluciones de la ecuación (a + 5) (a - 8) = 0 son a_1 =_______ y a_2 =________.

2. El grado de la ecuación $y + \frac{1}{y} = 0$, es: ______________________________.

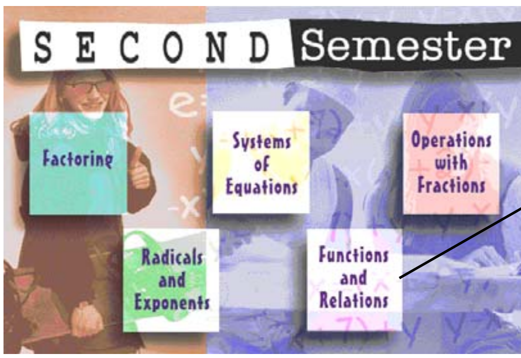
3. Si las soluciones o raíces de una ecuación son $x_1 = 8$ y $x_2 = -6$, la ecuación de la cual provienen es:_____________.

II. RESUELVE EL SIGUIENTE PROBLEMA.

El perímetro de un rectángulo es de 48 m y su área es de 140 m^2. Encuentra el largo y el ancho de la figura.

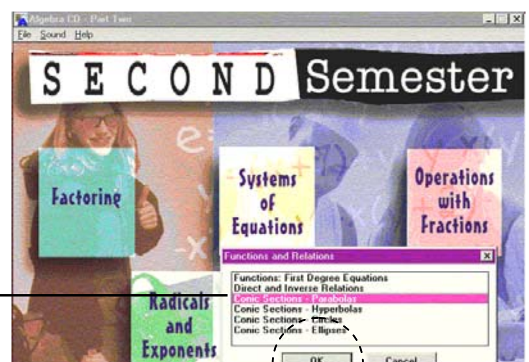
Programa Educativo de Matemáticas

En la pantalla se podrá observar la siguiente presentación:

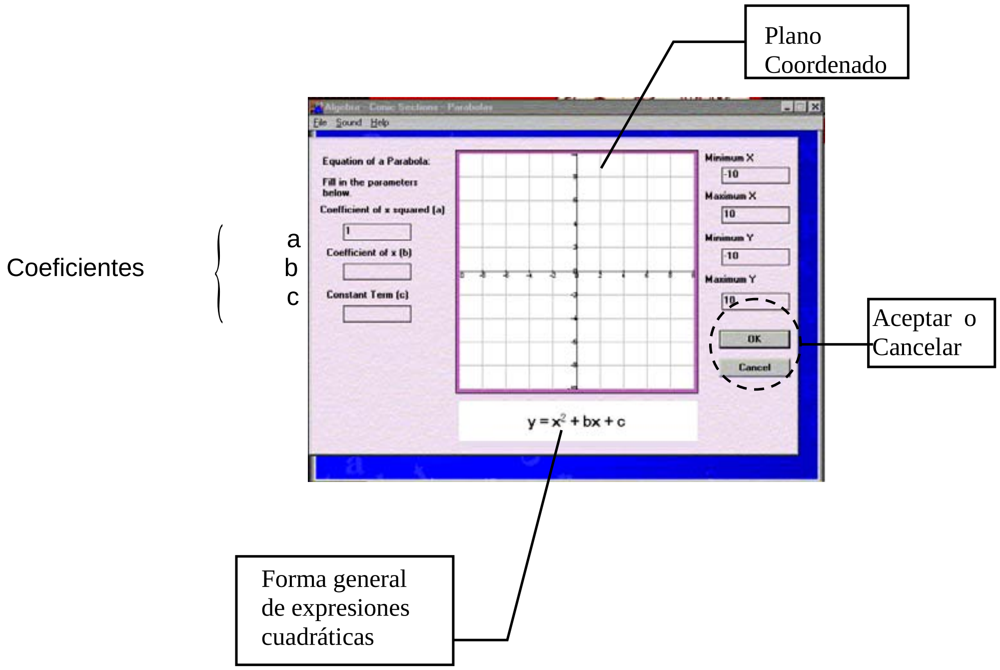


Se dá un click en " Functions and Relations"

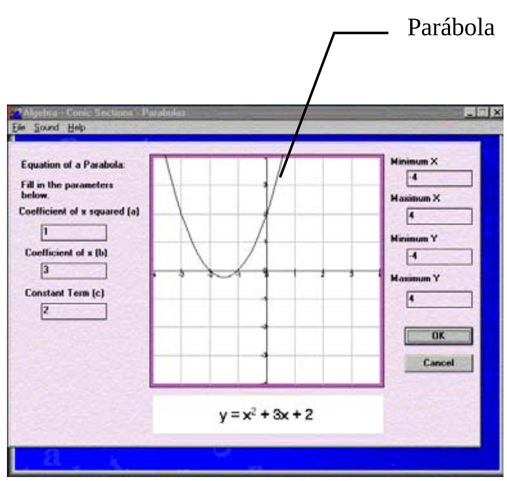
Se despliega el menú donde se selecciona el renglón de "Conic Sections-Parabolas" y después se da un click en "OK"



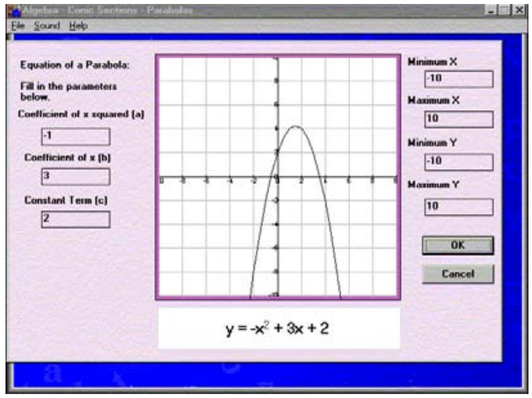
Enseguida aparece una pantalla con un Plano Coordenado:



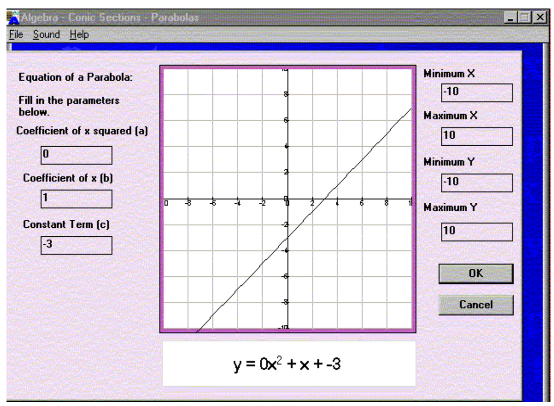
Ejemplo: Escribe en el área de coeficientes a = 1, b = 3 , c = 2 . Observe que la forma general de expresiones cuadráticas aparecen los números escritos anteriormente. Una vez conformada la expresión cuadrática hacemos un click en $\boxed{\text{ ok }}$, y se describe una curva en el plano coordenado como sigue:



Ejemplo 2: Si f(x) = $-x^2 + 3x + 2$, la parábola se representa como:



Ejemplo 3. Si a = 0, b = 1 , c = - 3. ¿ Cuál es su representación gráfica ?.



La forma general de las expresiones de 2º. Grado es : $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$

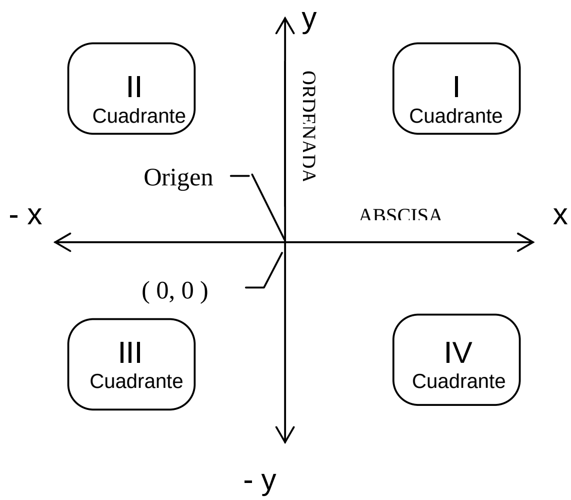
si y es igual a cero entonces la expresión resultante es : $Ax^2 + Dx + F$; para mayor comodidad la expresión se utiliza con las primeras letras del abecedario para los coeficientes

$$ax^2 + bx + c$$

Con programa realiza las gráficas que mencione el profesor.

Sistemas de Coordenadas Cartesianas. Relaciones y Gráficas

SISTEMA CARTESIANO, Plano Cartesiano, Plano Coordenado o Plano xy; se forma con dos rectas perpendiculares que se intersectan en el punto que le corresponde al cero.



RELACIONES Y GRAFICA. Conjunto de pares ordenados de números reales se llama una relación y al correspondiente conjunto de puntos en el plano se llama ***gráfica de relación***.

Ejercicio 1. Localiza:

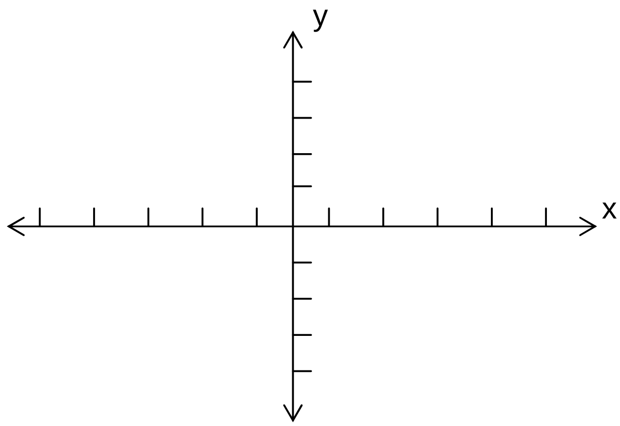
A (1, 2)

B (-4, 3)

C $\left(-\frac{3}{2}, -2\right)$

D (0 , 4)

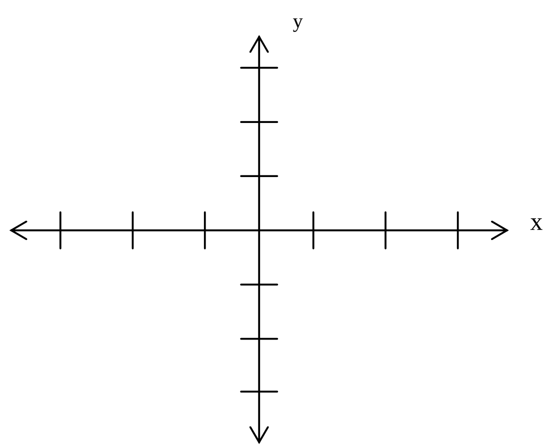
E (3.5 , 0)



Ejercicio 2. Grafique la relación $T = \left\{ (x, y) \mid 0 \le x \le 2, \ |y| = 1 \right\}$

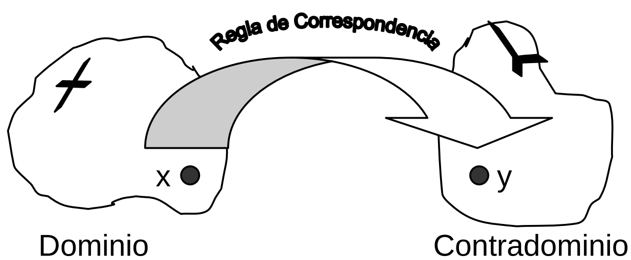
x	y

A (,)
B (,)
C (,)
D (,)
E (,)
F (,)



Función

FUNCION. Al usar personas y objetos del mundo que nos rodea, es fácil establecer una regla de correspondencia que asocie o haga parejas de los miembros de otro. Ejemplo: cada nombre del directorio telefónico hay un número, a cada bebé le corresponde una madre, a cada auto un número de placas.
Una función de un conjunto X en un conjunto Y es una regla de correspondencia que se le asigna a cada elemento x en X uno y sólo un elemento y en Y.



El número y del conjunto Y mostrando en la figura que se está asociando con x del conjunto X por medio de la función **f**. Se escribe:

$$y = f(x)$$

La función usualmente se denota con una letra como **f** o **g.**

$$f : x \rightarrow y$$

Ejercicio 3. Escribe si o no en función o relación.

x	y
1	5
2	7
3	9
4	11

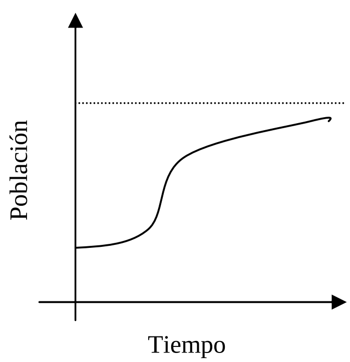
x	y
1	4
2	5
3	6
	7

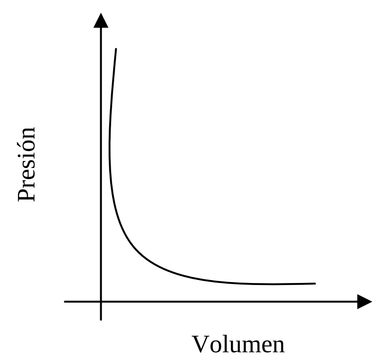
x	y
1	3
3	5
6	7
8	

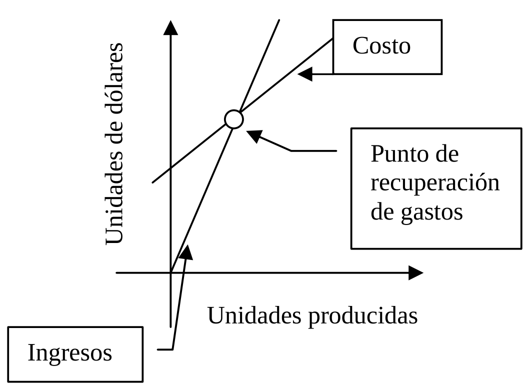
Función :   Función :   Función :

Relación: Relación :   Relación :

A menudo se utiliza una función para describir problemas o fenómenos en campos tales como el de la ciencia, la ingeniería y el comercio. Para interpretar y utilizar datos obtenidos de tal función, encontramos que es útil presentar los datos en forma gráfica.



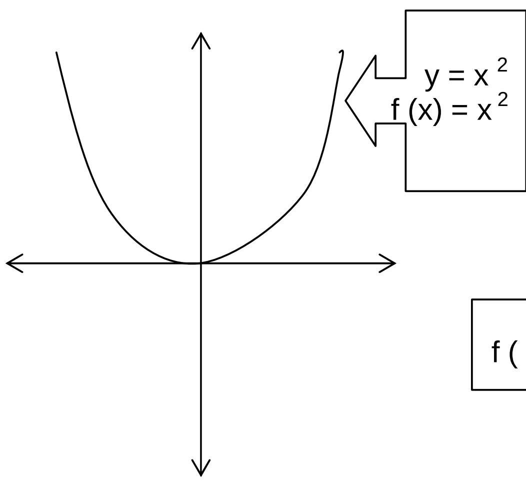




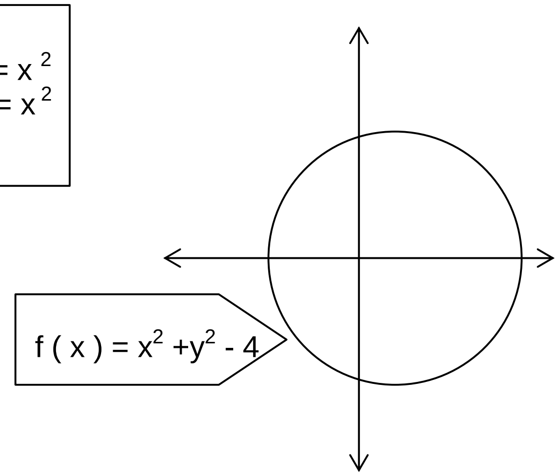
GRAFICAS. En un plano xy, se define la gráfica de una función $y = f(x)$ como la gráfica de la relación:

$$\left\{ (x, y) \;\middle|\; y = f(x),\ \ x \text{ en el dominio de } f \right\}$$

En otras palabras, la gráfica de una función f es el conjunto de puntos (x, y) en el plano cuyas coordenadas satisfacen $y = f(x)$.



Gráfica de una función

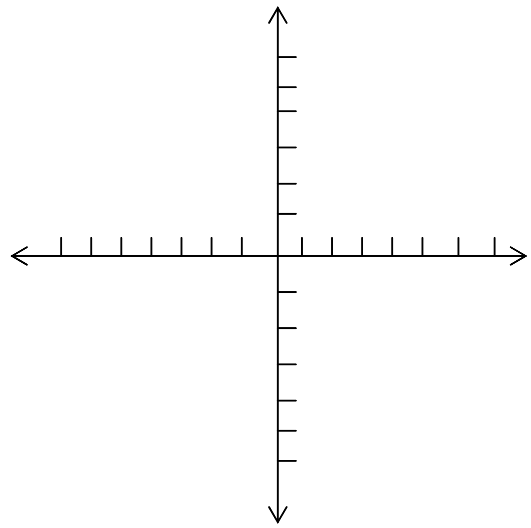


No es gráfica de una Función

La prueba esta en el trazo de una recta vertical, si intersecta a la gráfica **f** en un solo punto, entonces es una función. Realiza esta prueba en las gráficas anteriores.

Ejercicio 4 . Grafica la siguiente relación.

x	f (x)
-2	5
-1	0
0	-3
1	-4
2	-3
3	0
4	5



La anterior gráfica es una función o no. ________ ¿ por qué?________________

____

Intersectos

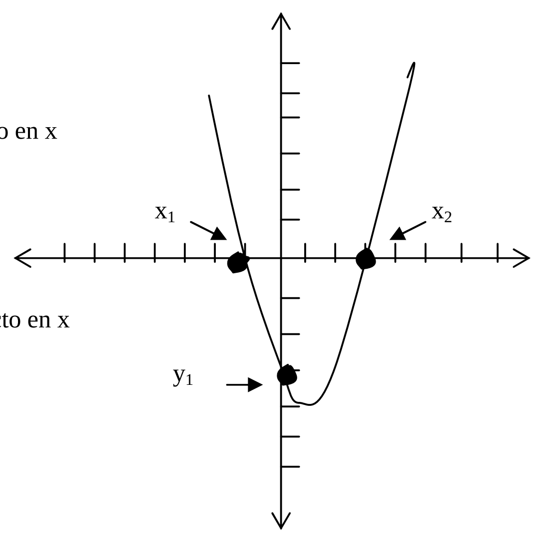
La gráfica de la función anterior se muestra como sigue:

x	f (x)
-2	5
-1	0
0	-3
1	-4
2	-3
3	0
4	5

Intersecto en x

Intersecto en x

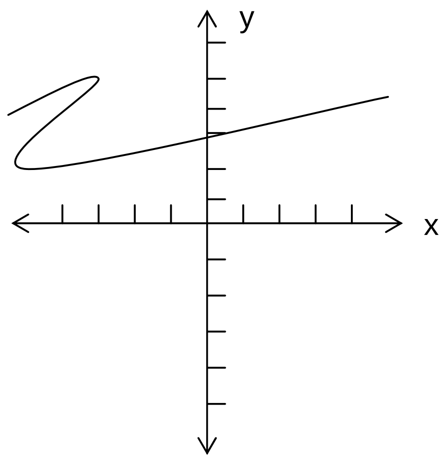
Intersecto en y



El intersecto en **y** es f (0) = - 3, y el intersecto en x es cuando f (x) = 0, es decir - 1 y 3.

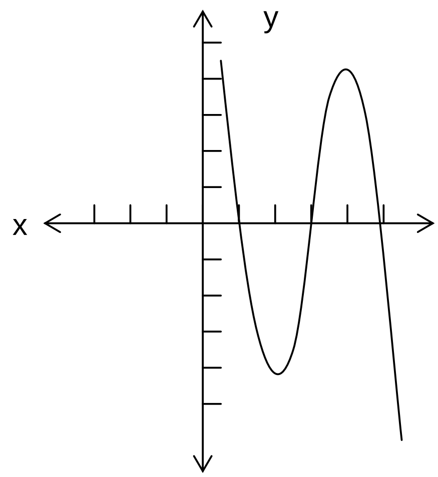
Si 0 esta en el dominio de f, el intersecto en **y** de su gráfica es el número f (0) y de la misma manera para hallar los intersectos en **x** de la gráfica y = f (x), donde f (x) = 0.

Los intersectos de las siguientes gráficas son:



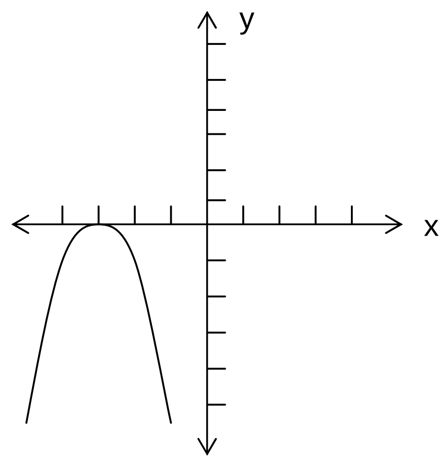
Los intersectos en x son:

Los intersectos en y son:



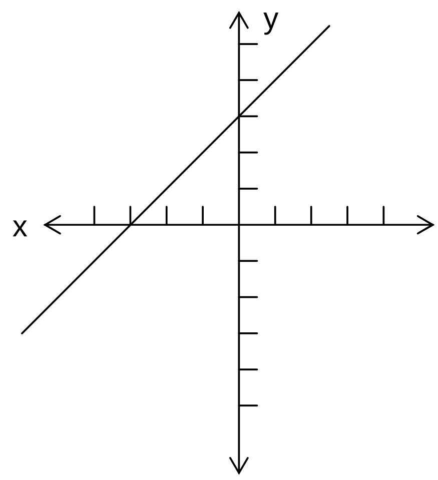
Los intersectos en x son:

Los intersectos en y son:



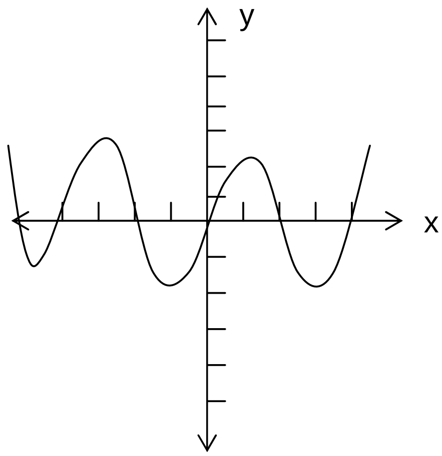
Los intersectos en x son:

Los intersectos en y son:



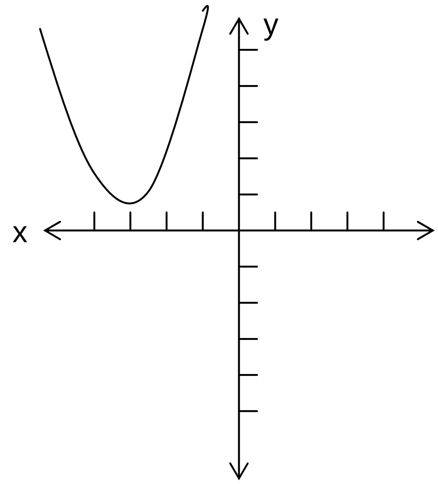
Los intersectos en x son:

Los intersectos en y son:



Los intersectos en x son:

Los intersectos en y son:



Los intersectos en x son:

Los intersectos en y son:

Funciones lineales

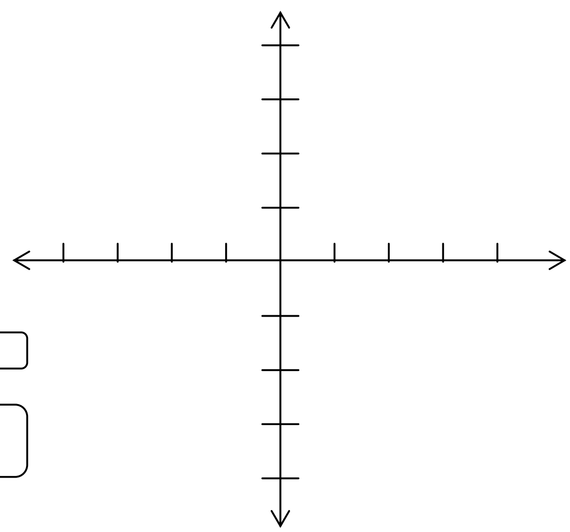
Uno de los más simples pero más importantes tipos de funciones es la función lineal de la forma:

$$f(x) = ax + b,\ a \neq 0$$

Ejercicio 6. Grafica la función lineal:

$$f(x) = x - 3$$

x	f(x)



El intersecto en x es:

El intersecto en y es:

Los ceros de f (x), es decir f (x) = 0, son los números que satisfacen la expresión ya que son los intersectos en x de la gráfica.
Por tanto en la gráfica de $f(x) = x - 3$, el intersecto en x es 3;

entonces la función f (x) = 0, lo que implica que:

$$x - 3 = 0$$

formando una ECUACION LINEAL O DE PRIMER GRADO, con una incógnita, donde 3 es el número que satisface la ecuación:
Sustituyendo x = 3 en $x - 3 = 0$, se tiene:

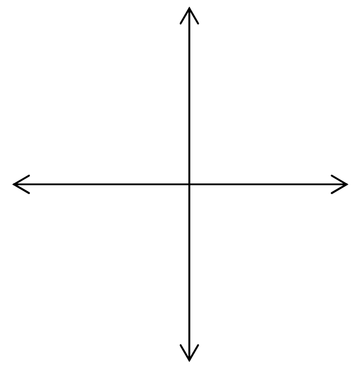
$$\begin{aligned} (3) - 3 &= 0 \qquad \text{Realizando operaciones} \\ 3 - 3 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Ejercicio 7. Grafica las siguientes funciones y escribe las soluciones cuando
f (x) = 0 ó g (x) = 0.

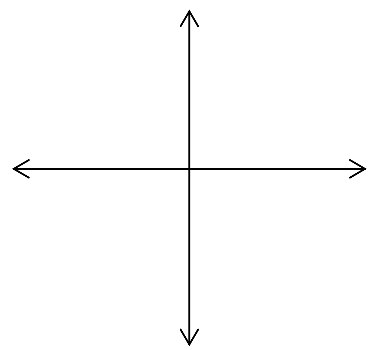
	Soluciones
f(x) = x ó y = x	x =
f(x) = -x ó y =-x	-x =
f (x) = x +1	
f (x) = x - 2	
g (x) = 5x - 5	
g (x) = 8x + 3	
f (x) = $\frac{1}{4}x$ + 8	
f (x) = $\frac{1}{3}$ - x	

Problemas de aplicación:

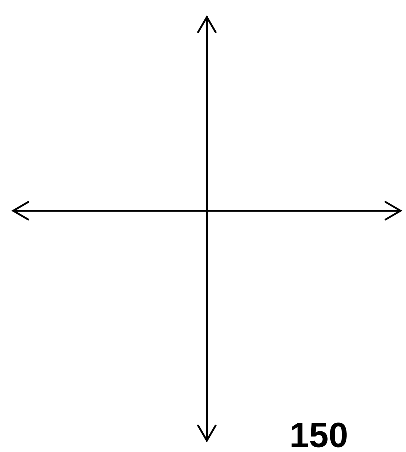
1. José dio 5 hojas blancas a María y 3 a Israel para escribir un ejercicio de ecuaciones. José se quedó con 8 hojas. ¿ Cuántas hojas tenía en total?.



2. Cuatro veces un número menos cinco dá quince, entonces el número es:



3. El perímetro de un rectángulo es igual a 50 cm , su largo es x+5 y su ancho es x. ¿Cuánto mide cada lado del rectángulo?



Funciones cuadráticas

Una función f se llama función polinomial:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

donde a_0 , a_1 ...a_n son constantes reales y **n** es un entero no negativo. Una función polinomial de grado n = 2, tenemos:

$$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

se llama FUNCIÓN CUADRÁTICA, para simplificar :

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

La gráfica de una función cuadrática determina una PARÁBOLA.

Otra forma de representarla es através de la forma general de las curvas en un plano coordenado:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$$

Si y = 0, tendremos:

$Ax^2 + Dx + F$, para simplificar

$ax^2 + bx + c$, si aplicamos a una función

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Ejercicio 8. Graficar y localizar intersectos en **x.**

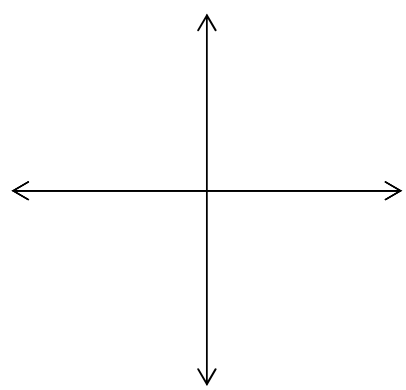
Intersectos
Soluciones

$$f_1(x) = x^2$$
$$f_2(x) = -x^2$$
$$f_3(x) = x^2 + 2$$
$$f_4(x) = -x^2 - 2$$
$$f_5(x) = -x^2 + 4x$$
$$f_6(x) = x^2 - 2x - 3$$
$$f_7(x) = -x^2 - 7x - 10$$
$$f_8(x) = 2x^2 - 4x + 6$$
$$f_9(x) = 3x^2 + 7x - 1$$
$$f_{10}(x) = (x-3)^2$$
$$f_{11}(x) = (x+2)^2$$
$$f_{12}(x) = (x+2)(x+3)$$
$$f_{13}(x) = (x+5)(x-2)$$
$$f_{14}(x) = (x+3)(x-3)$$
$$f_{15}(x) = \frac{1}{x} + x$$

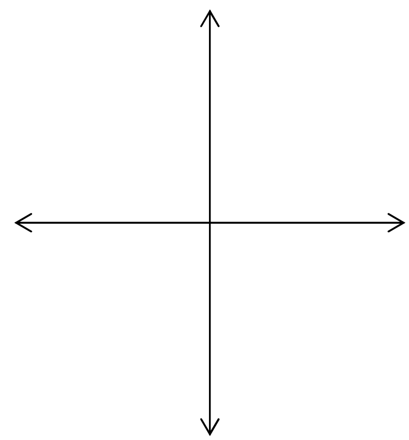
f	x_1	x_2
f_1		
f_2		
f_3		
f_4		
f_5		
f_6		
f_7		
f_8		
f_9		
f_{10}		
f_{11}		
f_{12}		
f_{13}		
f_{14}		
f_{15}		

Problemas de aplicación.

1. Un terreno rectángular mide de largo (x + 4) y de ancho (x - 3), el área del terreno es:



2. El perímetro de un rectángulo es de 44 m y su área es de 120 m^2.
Encuentra el largo y el ancho de la figura.



3. Escribe un problema.