

**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL**  
**Unidad Ajusco**

**EL ESTUDIO DE LOS ERRORES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**  
**ARITMÉTICOS.**

**TESIS**  
**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE LICENCIADO EN PSICOLOGÍA**  
**EDUCATIVA.**

**PRESENTA:**

**JOSÉ OMAR SOLÍS MARTÍNEZ**

**ASESOR DE TESIS:**  
**MTRO. PEDRO BOLLÁS GARCÍA**

**México, D. F.**

**Marzo de 2006**

## DEDICATORIA Y AGRADECIMIENTOS

A Paulina y Alfonso, mis padres, a mi Esby y mi Vale, al Peque T in memoriam. Y también dedico esta tesis a todos aquellas personas que me ayudaron y me apoyaron en esta larga y difícil tarea de la investigación sin hacer distinciones ni exclusiones, esto va por todos ustedes.

Ofrezco el más profundo agradecimiento a las cinco personas que con sus consejos, su tiempo, opinión y atinada sugerencia hicieron posible este trabajo.

Maestro Pedro, por tu paciencia e inteligencia certera, en este trabajo.

Maestro Cuiclahuac, por tus críticas y comentarios oportunos.

Maestro Merlin, por esos consejos e ideas bien definidas.

Maestro José Juárez, por su tiempo y trabajo dedicado.

Maestro Juan Pablo, por su comprensión y ayuda.

Les doy las gracias, a mi papi Alfonso y a mi mami Paulina por la enorme tarea y gran esfuerzo de crear en mi una buena persona alejada de problemas y sobre todo a mi mamá que siempre busco la manera de darme un sí en la vida para las cosas buenas y negarme las cosas que me hacían o hacen daño, ojala Dios me conserve a estos dos seres maravillosos durante más tiempo.

A mi abuelita Zita Sorcia, la última que me queda, pero con ella basta y sobra para decir que tengo mucha abuela, gracias abuelita tú güero hizo algo.

A mis hermanos Peque T y Poncho, a mis hermanas Lau, Clau, Lety, Conchis y Ale, gracias por creer en mí al fin lo logre y esto es también parte de ustedes aunque yo haya hecho primero.

Agradezco también a mi familia Martínez y a todos los grandes que la representa, agradezco por igual a mi familia Solís, que aunque muchos han partido sin regresar los tengo en mi memoria.

Agradezco a todos los que participaron en la realización de este proyecto desde los sujetos con quien se trabajo, hasta las autoridades, profesores y personal docente de la Secundaria en donde con gran entusiasmo y libertad pude trabajar.

Agradezco a una persona que nunca dudo de mí, me apoyo incondicionalmente me ha dado buenos momentos y malos también, me ha hecho madurar y quien simplemente es lo mejor que me ha dado la vida, esa persona eres tú Esby. Esto es por ti.

Ojala no sea la última obra sino el inicio de muchas más, y por ello te doy gracias Dios sin dudar si existes o no, el hecho fue que te pedí y me ayudaste, como no se, cuando tampoco, pero lo hiciste y lo hicimos esta obra es la traducción del esfuerzo que fincaste en mí y a la actitud de mirar desde otra perspectiva eso que llaman error.

Con cariño, amor y respeto  
José Omar Solís Martínez

## ÍNDICE

	Pág.
INTRODUCCIÓN.....	5
<b>DELIMITACIÓN DEL TEMA</b>	
Planteamiento del problema.....	7
Objetivos.....	11
Justificación de la investigación.....	12
<b>CAPÍTULO I</b>	
<b>MARCO TEÓRICO</b>	
1.1 Fundamentos epistemológicos de los errores.....	15
1.2 La investigación sobre los errores en aprendizaje de las matemáticas.....	31
1.3 El método de exploración crítica.....	39
1.4 Causas y clasificación de errores.....	44
1.5 Tratamiento de los errores en el aprendizaje.....	49
1.6 Los errores y la formación del profesorado.....	55
1.7 Delimitación y justificación del contenido matemático de la investigación.....	58
1.8 Delimitación del tipo de problemas para el estudio.....	79

## CAPÍTULO

### MÉTODO

2.1 Sujetos.....	82
2.2 Escenario.....	82
2.3 Diseño de investigación.....	82
2.4 Aplicación de las situaciones en la entrevista.....	84
2.5 Procedimiento de la investigación.....	90

### CAPÍTULO III

#### ANÁLISIS DE DATOS

3.1 Análisis de los datos.....	94
--------------------------------	----

<b>CONCLUSIONES.....</b>	<b>152</b>
--------------------------	------------

BIBLIOGRAFÍA.....	158
-------------------	-----

<b>ANEXOS.....</b>	<b>161</b>
--------------------	------------

## Resumen

El presente estudio tiene el objetivo de analizar, clasificar y evaluar los errores que cometen los alumnos de nivel secundaria al resolver problemas aritméticos.

Se trabajó con un grupo de 30 alumnos, pertenecientes a los tres grados de educación secundaria con edades comprendidas entre los 11 y 15 años. En una escuela secundaria oficial de la zona oriente del municipio de Chimalhuacan, Estado de México.

El estudio se llevó a cabo a través del método de exploración crítica (entrevista clínico-crítica), en el cual se presentó a los alumnos cuatro situaciones que implicaban problemas aritméticos.

Se realizó un análisis por cada situación problema en dos momentos, primero se presenta las frecuencias de respuestas emitidas por los alumnos de manera cuantitativa, en un segundo momento se realiza un análisis cualitativo para describir y explicar los tipos de respuestas, así como los errores.

Se concluyó que uno de los errores más frecuentes se presenta en la entrada de la información, cometiendo el error de omisión de algunos datos y error de ejecución en las operaciones. Además los alumnos presentaron inadecuada comprensión de los enunciados al resolver los problemas y utilizaron de manera incorrecta las estrategias de resolución.

## INTRODUCCIÓN

Los errores en la resolución de problemas matemáticos básicos se han concebido como algo desagradable, penoso, y hasta negativo, estas concepciones provocan en los alumnos una situación de decepción o desagrado sagrado y en casos extremos miedos y angustias. Consideramos que todo esto sucede porque no se observa la otra cara de la moneda, es decir, el valor creativo, provechoso y hasta placentero del acto de trabajar con éstos. Los errores y su exploración es nuestro punto de discusión.

En el presente trabajo se intenta esclarecer cuáles son los errores que comete el alumno en la resolución de problemas aritméticos para después analizarlos. Se realizó una investigación con treinta alumnos de nivel secundaria, diez de cada grado escogidos al azar, pertenecientes a una escuela oficial ubicada en la zona oriente del Municipio de Chimalhuacan.

Los capítulos que componen este trabajo de investigación se plantean de la siguiente forma; se comienza con la delimitación del tema en la cual se aclaran las interrogantes acerca de nuestra investigación, el planteamiento del problema, así como los objetivos y la justificación de la misma.

En el capítulo I se aclaran las afirmaciones, descripciones y fundamentos implicados en un marco teórico donde se abordan algunos conceptos e investigaciones acerca de los errores en la resolución de problemas aritméticos.

En el capítulo II se presenta la metodología utilizada en nuestro estudio en la cual se especifica el método, los sujetos, escenario y la forma en que se recolectaron los datos.

En el tercer capítulo se encuentra el análisis de los datos que permite observar los resultados obtenidos del presente estudio.

Por último se presentan las conclusiones de nuestra investigación en las cuales se hace mención de que la mayoría de los errores en la resolución de problemas aritméticos se comete por una inadecuada comprensión de la situación.

## **DELIMITACIÓN DEL TEMA**

### **PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA**

El error no sólo se puede concebir como algo negativo y poco provechoso, sino por el contrario también puede referirse a una posibilidad constante para la adquisición, construcción y consolidación del conocimiento, ya que podría considerarse como un elemento importante en el conocimiento científico que emplean las personas para el avance de la ciencia.

Popper (1979), plantea que para un sistema científico no debe tomarse en cuenta exclusivamente el criterio de verificabilidad, sino que existe la posibilidad de plantearse en otro sentido por medio del cual se realicen contrastes o pruebas experimentales en cualquier forma imaginable, con el fin de poder decidir mediante ensayos sistemáticos de falsación, los enunciados científicos empíricos, expresados y transformados de distintas maneras con ciertos errores, pero en forma concluyente, bajo una lógica deductiva. En este sentido la ciencia o el conocimiento empírico ha de progresar mediante la falsación de sus enunciados, ésta consiste en la demostración de la existencia del error y no en la verificación o confirmación (Mardones y Ursua 1982).

Bachellard (citado por Astolfi, 1999) a Gaston comenta algunas de las reflexiones de este último autor; las cuales tienen mucho que ver con los errores:

“No hay verdad sin error rectificado”.

“Al volver sobre un pasado de errores, se encuentra la verdad en un arrepentimiento intelectual verdadero”.

“Una psicología sobre la actitud objetiva es una historia de nuestros errores personales”.

“El error sólo es reconocible a posteriori. En el pasado la razón vuelve sobre si misma para juzgarse”.



Desde una perspectiva psicogenética el error es entendido como los razonamientos incorrectos de los niños ante situaciones problemáticas. Los errores dejaron de señalar únicamente una dificultad o una incapacidad, para ser reveladores de una lógica infantil (Castorina, 1988).

Al hablar de errores encontramos el efecto de su negatividad la cual podemos observar en el aula donde los alumnos atribuyen al error un significado indeseable, una postura destructiva, algo que hace que se sientan culpables por no tener cuidado con ellos, y sentir arrepentimiento de haberlos cometido, puesto que el alumno se esmera más en realizar exitosa y cuidadosamente un algoritmo de matemáticas que en comprender el proceso de resolución, por el contrario, observando el efecto positivo, el error supone valerse del efecto de fallo o equivocación como instrumento productivo, es decir tomar el error como elemento que integra un proceso, y de este modo sea coadyuvante en la obtención de un resultado correcto, aún teniendo todo un camino lleno de obstáculos y desaciertos (De La Torre 1993)

En el presente trabajo es necesario tomar en cuenta cuáles son los tipos de errores que podríamos encontrar en los alumnos y para ello, Radatz (citado por Rico, 1994) realiza una clasificación de errores a partir del procesamiento de la información y establece cinco categorías generales:

1. Errores debidos a dificultades de lenguaje.
2. Al realizar ejercicios o tareas de matemáticas el alumno se encuentra con variadas formas e imágenes especiales y visuales que también pasan a ser una fuente de errores.
3. En esta categoría entran aquellas deficiencias del conocimiento por parte del alumno acerca de contenidos y procedimientos destinados y utilizados para hacer una tarea o resolver algún problema.
4. Errores debidos a dificultades para obtener información especial.

5. Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.
6. Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento.

Ante la clasificación de los errores aportada, se requiere la determinación del significado de lo que llamamos problema, al respecto Luceño (1999) plantea el concepto problema a toda situación en la que haya un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarla, y agrega, la vía para pasar de una situación inicial a la nueva situación exigida (o de búsqueda), tiene que ser desconocida; cuando es conocida deja de ser un problema, y pasa a ser un mero ejercicio.

Es importante mencionar la manera en que el alumno de secundaria de entre los 12 y los 16 años se enfrenta ante los problemas al realizar su resolución. Para ello contamos con la aportación de Miranda, Fortes y Gil (1998) quienes sintetizan las faces que suelen llevarse a cabo en la resolución de problemas:

1. Análisis del problema.
2. Representación del problema.
3. Fase de planificación.
4. Ejecución consiste en la aplicación de la estrategia planificada.
5. Generalización del problema en esta última se trata de dar relevancia al reconocimiento y relación entre la solución alcanzada y algún principio general.

Por otra parte cabe subrayar el tipo de problemas en que nos apoyaremos para determinar qué tipo de errores son cometidos por los alumnos al momento de resolverlos. Ante esta situación Rodríguez y Fernández (2000), señalan que en cuanto a los problemas en el área de las matemáticas existe una gran variedad y en ésta se incluyen los problemas geométricos, los trigonométricos, los algebraicos y los aritméticos. En nuestro estudio trabajaremos con problemas

aritméticos aplicados a jóvenes de nivel secundaria. Dichos problemas se definen a continuación:

Luceño (1999), señala que un problema es aritmético cuando implica el conocimiento de conceptos, técnicas y algoritmos matemáticos para su resolución, en donde se realicen una o varias operaciones matemáticas.

Por nuestra parte proponemos trabajar con los problemas aritméticos en donde se promueva el aspecto de la comprensión y el factor creativo de los errores, es decir se puede retomar su efecto constructivo el cual puede surgir en la resolución de un problema, bajo un ambiente de reflexión y análisis.

Los problemas que pensamos manejar en nuestro estudio son:

- a) Problemas que requieran un análisis de la incógnita.
- b) Problemas que se puedan resolver de más de una forma.
- c) Problemas con más de una solución posible.

Hemos seleccionado estos problemas debido a que implican una comprensión, que va a surgir del análisis del problema en el momento en que el alumno de Secundaria se enfrenta a las situaciones problema.

En este sentido Orrantía (2003), al hablar de estrategias de comprensión en la resolución de problemas, afirma que cuando uno se enfrenta a los problemas busca números conjuntos y relaciones entre conjuntos.

Por lo tanto la representación proposicional (problemas aritméticos) o texto base recoge la esencia que clarifica los conceptos y las relaciones que se mencionen en el texto.

De acuerdo con lo mencionado, el interés de esta investigación se enfoca principalmente en el estudio de los errores en la resolución de problemas

aritméticos, con jóvenes de primero, segundo y tercer grado de nivel secundaria, para ello se llevó a cabo una evaluación y el análisis de los mismos. Ante este interés creemos necesario plantear el problema de esta investigación.

Dicho planteamiento se realizó basándose en la formulación de la siguiente pregunta:

¿Cuáles son los errores más frecuentes cometidos por los alumnos al resolver problemas aritméticos?

Creemos que al dar respuesta a esta interrogante cabe la posibilidad de generar una serie de conclusiones que puedan aclarar la importancia de los errores para aprovechar y replantear el papel positivo y constructivo de los errores.

## **OBJETIVOS**

El presente estudio se centra en los siguientes objetivos:

### **Objetivo General:**

- Analizar los errores que cometen los alumnos al resolver problemas aritméticos.

Ante este objetivo pensamos que el estudio brindará una implicación educativa tanto en el diseño y la aplicación de programas de estudio, (debido a que la resolución de problemas es un eje principal tanto en la planeación y diseño de contenidos), como en la práctica docente, razón por la cual ofrece al profesor una alternativa más de consulta para brindar atención y dar un tratamiento adecuado a los errores analizados en alumnos de secundaria, el cual será avalado por un trabajo de investigación.

**Objetivos Particulares:**

- Determinar los tipos de errores que cometen los jóvenes de primero, segundo y tercer grados de nivel secundaria en la resolución de problemas aritméticos.
- Comparar dichos errores cometidos para realizar una clasificación.
- Evaluar y analizar los errores cometidos por los alumnos en la resolución de problemas aritméticos.

Después del planteamiento del problema y aclarados los objetivos de estudio pasaremos al siguiente apartado en el cual se describen los aspectos de la justificación de nuestro trabajo de investigación.

**JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN**

El presente trabajo de investigación puede resultar conveniente por distintas razones: puede coadyuvar a la solución de alguna problemática social o proponer nuevas teorías, sin embargo al considerar la relevancia o la inferioridad de una investigación podría generar cierta discrepancia en opiniones. Ante esta inconveniencia Hernández (1998), citando a Ackoff y Miller propone establecer una serie de criterios: la conveniencia, la relevancia social, implicaciones prácticas, valor teórico, utilidad metodológica, los cuales tienen como propósito la evaluación de la utilidad del estudio.

Por nuestra parte la presente investigación se justifica aclarando que adquiere gran valor por su origen, ya que el campo en donde se desarrolla la investigación el cual es el aprendizaje de las matemáticas es muy amplio, y por ende genera distintas dificultades, una de ellas es la falta de conocimiento y manejo de los errores. Para ello proponemos estudiar y evaluar los errores cometidos en la

resolución de problemas aritméticos para contribuir con un trabajo que a manera de conclusión proponga una serie de recomendaciones pedagógicas para un mejor manejo y control de los errores en los alumnos dando a conocer los diferentes enfoques y las diferentes formas de tratar los errores de algunos autores.

Siguiendo los criterios antes mencionados se justifica la presente investigación aclarando lo siguiente:

El estudio de los errores es conveniente debido a que todo aprendizaje se adquiere bajo la constante presencia de los errores, y si de alguna manera observamos, analizamos y atendemos bien como podemos evaluar y tratar los errores, podemos pensar que nos serviría este estudio como una herramienta para fines educativos.

Por otro lado la importancia que tiene nuestro estudio en el plano social es que conlleva cierto alcance a nivel social en el campo educativo y más específico en las aulas donde se realiza el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en base a la resolución de problemas aritméticos, ya que a nivel internacional nuestro país ocupa uno de los últimos lugares en conocimiento matemático obteniendo bajos resultados en las evaluaciones (Mancera, 2001).

Al respecto las personas que resultarían más beneficiadas serían los alumnos y maestros del nivel básico quienes al trabajar la resolución de problemas aritméticos bajo el enfoque del análisis y evaluación incluidas en esta tesis se aproximarían hacia algunos aspectos importantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje, como es la detección de los errores dentro de la resolución.

Dicha investigación intenta resolver el problema del mal uso o tratamiento de los errores lo cual implica que los errores no se deben de negar, ni tenerles miedo, al contrario se deben de abordar y enfrentarlos, para que sean un medio por el cual se pueda identificar los elementos o la información que hace falta aclarar o

retomar dentro del proceso de resolución de problemas aritméticos; pues en este trabajo se parte de la idea de que los errores son indicadores de pasos inadecuados o equivocaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje, por ende nuestro estudio permite atacar los problemas prácticos que surgen en el momento de la evaluación, y el análisis y tratamiento de los errores, y con ello podría realizarse una mejor práctica docente bajo la consideración de algunas ideas relevantes en el presente estudio.

El valor teórico que tiene esta investigación es moderado y equilibrado, debido a que presenta varios enfoques y distintos autores que mencionan de manera clara y precisa la forma en que se han estudiado y considerado los errores, así como la resolución de los problemas y esto podría servir a las personas que tienen poco conocimiento del tema y pretendan enterarse con mayor énfasis, además esta investigación trata de apoyar la teoría del rol constructivo de los errores, basada en Castorina (1988) y algunas aportaciones de Piaget (1975).

Los resultados obtenidos se dieron en la medida en que se cometieron los errores, la manera de evaluarlos y el tratamiento que se les aplica es criterio de cada profesor quien aplicará estrategias o tratamientos adecuados para una mejor práctica docente tomando en cuenta la alternativa del presente estudio.

Nuestra investigación puede considerarse como un trabajo que presenta utilidad metodológica ya que este método propone realizar recolección de datos con la utilización del método de exploración crítica y su posterior análisis.

En este orden de ideas y sobre la base de nuestro sustento teórico y metodológico el presente trabajo nos permitió realizar una exploración de los errores cometidos por los alumnos al resolver problemas aritméticos, el cual emitió resultados que nos sirvieron de análisis para nuestro estudio y tratar de cumplir nuestros objetivos.

## **CAPÍTULO I**

### **MARCO TEÓRICO DE REFERENCIA**

Cometer errores es parte del conocimiento humano, es decir, el ser humano tiende a cometer errores en la mayoría de los procesos de aprendizaje que dan origen al conocimiento, la capacidad de considerar los errores como algo favorable o desfavorable para el conocimiento, y concebir como verdaderos conceptos y procedimientos deficientemente desarrollados, han sido algunas de las mayores preocupaciones en distintos filósofos y pensadores dedicados al estudio de la capacidad del hombre por conocer y comprender.

El error no sólo se puede concebir como algo negativo y poco provechoso, sino por el contrario también puede referirse a una posibilidad constante para la adquisición, construcción y consolidación del conocimiento, y podría considerarse, también, como un elemento importante en el conocimiento científico que emplean las personas para el avance de la ciencia.

Desde esta perspectiva es necesario aclarar cuales son las aportaciones de distintos teóricos que se referirán principalmente al conocimiento erróneo, las condiciones que lo propician, las funciones que pueden desempeñar en el dominio y estudio de la ciencia, y hasta la clasificación y los tipos de errores que existen en la adquisición de conocimiento en matemáticas, más específicamente en la resolución de problemas.

En el siguiente bloque presentamos los fundamentos epistemológicos de los errores, de algunos estudiosos, filósofos de la ciencia y epistemólogos, entre los que destacan Popper, Bachelard, Lakatos, y Block.

Asimismo presentamos una serie de temas alternos a la temática central los cuales tienen que ver con la definición y resolución de un problema, algunos tipos de problemas aritméticos, la relación existente entre problema y error y



uno de los apartados que cobra gran importancia en el campo de la psicología educativa referente a los procesos psicológicos implicados en la resolución de problemas. Ahora bien iniciaremos con algunas de las reflexiones más relevantes de estos autores, que nos servirán de fundamento para el presente trabajo.

## **1.1 Fundamentos epistemológicos de los errores**

Podemos considerar al error como una posibilidad permanente en la adquisición y consolidación del conocimiento y puede llegar a formar parte del conocimiento científico que emplean las personas. Esto puede observarse, a lo largo de las diferentes disciplinas en las que por muchas épocas se han aceptado como conocimiento válido muchos conceptos que, hoy en día sabemos que fueron en su tiempo incorrectos.

La incertidumbre causada por el conocimiento erróneo, las condiciones que lo provocan y las funciones que puede desempeñar en el dominio y avance de la ciencia y sobre todo podemos decir en la educación, ha provocado el interés de algunos filósofos de la ciencia, y reconocidos epistemólogos como Popper(1979), Bachelard (citado por Astolfi 1999), y Lakatos (citado por Rico1994). Por ello vamos a agregar algunas de las reflexiones más sobresalientes de los autores mencionados, que ayudarán a fundamentar este trabajo.

### **1.1.1 Popper**

Para explicar la importancia de los errores, Popper (1979) propone la siguiente cuestión: ¿cuál es la fuente última del conocimiento?, esta pregunta la toma como pauta para destacar la relevancia que adquieren los errores en la adquisición del conocimiento científico. Y para ello realiza el siguiente argumento:

Se considera que hay, básicamente, dos respuestas clásicas para esta cuestión:

i) la proporcionada por el empirismo, que señala la observación como medio último del conocimiento; ii) la proporcionada por el racionalismo o intelectualismo clásico, que considera como fundamento la intuición intelectual de ideas claras y distintas.

Popper (1979) citando a Sócrates, adelantó una solución con la doctrina de la falibilidad: todos nosotros podemos errar, y con frecuencia erramos individual o colectivamente; pero la idea del error y de la falibilidad implica que podemos buscar la verdad, la verdad objetiva, aún cuando por lo general nos equivoquemos por amplio margen. También implica que, si respetamos la verdad, debemos aspirar a ella examinando persistentemente nuestros errores: mediante la infatigable crítica racional y mediante la autocrítica.

En esta misma dirección este mismo autor, enfatizó la falsabilidad como un criterio para determinar cierto dominio de la ciencia, el cual tiende a ser un sistema de contrastación de ideas basado en la experiencia en términos de falsación de los enunciados, desde esta línea se pretende adoptar un criterio que permita la falsabilidad y dejar de lado el de verificabilidad.

Con esta afirmación Popper, plantea que para un sistema científico no debe tomarse en cuenta exclusivamente el criterio de verificabilidad, sino que existe la posibilidad de plantearse en otro sentido por medio del cual se realicen contrastes o pruebas experimentales en cualquier forma imaginable, con el fin de poder decidir mediante ensayos sistemáticos de falsación, los enunciados científicos empíricos, expresados y transformados de distintas maneras con ciertos errores, pero en forma concluyente, bajo una lógica deductiva, en este sentido la ciencia o el conocimiento empírico ha de progresar mediante la falsificación de sus enunciados, la falsificación consiste en la demostración del error y no en la verificación o confirmación (Mardones, 1982).

Este planteamiento de Popper (1979), tiene mucho que ver con la relevancia de los errores en el proceso de enseñanza aprendizaje, y propone tomar en cuenta que se puede realizar un sistema de contrastación utilizando solamente el sistema de falsación es decir someter a prueba que algún enunciado tiende a ser falso o en éste se puede cometer errores de distintas maneras y por lo tanto al final se deduce y concluye lo más cercano a la realidad del enunciado u objeto de estudio que se está analizando.

Siguiendo con otro de sus argumentos Popper, agrega una pregunta más, diferente a la primera: ¿Cómo podemos detectar y eliminar el error? y ofrece como respuesta optar por una posición denominada *racionalismo crítico* la cual consiste en criticar las teorías y presunciones de otros y al mismo tiempo criticar nuestras propias teorías y presunciones.

Aunque Popper sólo se refería al conocimiento general, y de manera más explícita al conocimiento científico, nosotros podemos rescatar algunas aclaraciones que resultan muy útiles para referirnos a las matemáticas.

En primer lugar cabe destacar que no se pueden determinar cuales son las fuentes últimas del conocimiento, es necesario admitir que todo conocimiento es un proceso, y que este mismo proceso está mezclado con nuestros errores y prejuicios.

Lo cual permite aceptar al error como parte constituyente de nuestra adquisición del conocimiento. Una organización insuficiente, una hipótesis tentativa, una conceptualización incompleta, un resultado incorrecto, o un procedimiento erróneo, son parte original de nuestro pensamiento o manera de ver u observar las cosas, al igual que son una pauta para acceder al conocimiento, también son un modo de conocer lo que nos rodea.

La otra idea fundamental de Popper (1979), es que ante una situación de error se crea una necesidad de hacer un ejercicio de crítica, sometiendo a prueba nuestros conocimientos y acercamientos a la verdad, es decir realizar una crítica del error propio y ajeno para modificar nuestras deficiencias.

Por lo tanto se trata de realizar una búsqueda de errores desde un enfoque autocrítico para modificar nuestros conocimientos deficientes, y de alguna manera verificarlos y corregirlos.

Por otra parte se piensa que no se tiene que utilizar únicamente el sistema de verificación o confirmación de las ideas, por el contrario si entramos en el proceso de enseñanza-aprendizaje bajo el enfoque de la falsación, que no es más que la demostración del error en la experimentación, o en este caso la resolución de los problemas aritméticos.

Desde ésta última perspectiva se aclara que la afirmación que se verificó o que se confirmó tenga muy poco que ver con la realidad, por ejemplo afirmar verbalmente que el delfín es un pez y se confirma por que vive en el mar con otros peces, sin embargo si se analiza cual es la categoría de este animal a través de la demostración del error en el uso de los términos, resulta ser que un delfín es un cetáceo, es decir un mamífero adaptado a la vida acuática diferente a los peces.

Con respecto a las aclaraciones de Popper nos encontramos otro punto de vista en cuanto a los errores, el enfoque de Bachelard que a continuación se aclara.

### **1.1.2 Bachelard**

Por otro lado Rico (1994) citando a Bachelard, nos explica que la aparición inevitable de errores se da por un obstáculo epistemológico y plantea las siguientes ideas en las que afirma:

*“Cuando se investigan las condiciones psicológicas del progreso de la ciencia hay que plantear el problema del conocimiento científico en términos de obstáculos; en el acto mismo de conocer, íntimamente, es donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones; es ahí, donde mostraremos causas de estancamiento y hasta de retroceso, es ahí donde discerniremos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos” (Bachelard citado por Rico 1994 p. 73).*

*“El conocimiento de lo real es una luz que siempre proyecta alguna sombra; jamás es inmediata y plena. Al volver sobre un pasado de errores se encuentra la verdad. En efecto, se conoce en contra de un conocimiento anterior, destruyendo conocimientos mal adquiridos o superando aquello que, en el espíritu mismo, obstaculiza” (Bachelard citado por Rico 1994 p. 73).*

Tomando en cuenta los obstáculos con la perspectiva de Bachelard, Fabre (citado por Astolfi, 1999), habla de seis características del obstáculo de las cuales algunas las relaciona con los errores y se describen en lo siguiente:

*La interioridad del obstáculo*, esta cualidad se atribuye porque el obstáculo desde la palabra latina *obstare* se define como “Lo que se tiene delante” lo que obstruye el camino. De alguna forma los obstáculos son internos, no chocan con el pensamiento sino que residen en el mismo pensamiento, en las palabras, pues donde hay una representación de luz también hay una representación de obscuridad en tu pensamiento. El error es un elemento que constituye el proceso de conocer, que está dentro del pensamiento.

*La facilidad del obstáculo es una característica otorgada y concedida por la propia mente*, es como una comodidad impuesta por la misma mente o intelecto, se puede decir que dicha característica atribuye al obstáculo una facilidad de aparición es como pensar con el pensamiento en descanso con la susceptibilidad de cometer errores cómoda y fácilmente.

*El carácter positivo del obstáculo*, con esta cualidad se retoma al obstáculo como una forma o un medio de conocimiento, que si bien impide la construcción de nuevos conocimientos al superarse este obstáculo se realiza un auténtico proceso de descubrimiento de nuevos conocimientos. Por lo tanto el obstáculo es un “tejido de errores construidos” tenaces y solidarios, que se resiste a la refutación.

*La ambigüedad del obstáculo* se da como característica debido a la funcionalidad que tenga el obstáculo y a las distintas modalidades de uso, esta idea se refuerza al tomar en cuenta que la mente presenta una doble dimensión como herramienta necesaria para pensar, y como una fuente donde emanan los errores, y ante estas dos caras de la moneda se da cierta ambigüedad, puesto que alguien considera algo como un obstáculo, para otra persona no lo es tanto así, o para otra persona es un obstáculo pequeño pero si es un obstáculo.

Otra de las características del obstáculo es *el polimorfismo* lo cual se plantea como una amplia gama de formas de manifestar el obstáculo, dicho de otra manera se trata de percibir que no se puede delimitar totalmente al obstáculo ni circunscribirlo en las distintas interpretaciones y representaciones de los alumnos.

La última característica considerada es *la recurrencia del obstáculo* el cual se refiere a la reaparición del obstáculo erróneo y es considerada un tanto favorable debido a que la consecuencia de cometer algún error va permitir su reconocimiento posterior, por ejemplo tener una falta ortográfica y volverla a cometer, ello significaría poderla corregir en forma reconocible, o también en la resolución de algún problema si se puede ver que en todo el problema se esta hablando de una suma y se opta por utilizar el procedimiento de sustracción, ante esta situación se debería ser más coherente en el próximo problema parecido o relacionado con la suma.

En otra de sus obras de Bachelard (citado por Astolfi, 1999), aclara también algunas ideas respecto a los errores en el campo de la ciencia:

*“El científico no ve que la ignorancia es una trama de errores positivos, tenaces, solidarios. No advierte que las tinieblas espirituales poseen una estructura y que, en esas condiciones, toda experiencia objetiva correcta debe siempre determinar la corrección de un error subjetivo. Pero los errores no se destruyen uno por uno con facilidad. Están coordinados. El espíritu científico solo puede constituirse destruyendo el espíritu no científico” (Bachelard, citado por Rico 1994 p. 74).*

Estas aseveraciones permiten acceder a una visión diferente y menos discriminante de los errores, pues es evidente que en el proceso de aprendizaje y más en el de las matemáticas el alumno se encuentra con ciertos tropiezos, por ejemplo colocar mal los números o simplemente confundirlos o no escucharlos bien.

También el autor afirma que los errores son concebidos como un obstáculo epistemológico el cual es, entendido como un mal necesario para el hombre, pues el entorpecer, y el confundirse al realizar actividades en el campo de la ciencia y en nuestro caso al aprender matemáticas en cuanto a la resolución de problemas aritméticos es como una necesidad funcional, esto deja en claro que en el largo camino del conocimiento se encontraran adheridos los aciertos y los errores.

Por lo tanto los errores no se toman como hechos despreciables y poco provechosos sino por el contrario son de alguna manera, los elementos necesarios que sirven de apoyo, para que el alumno pueda consolidar reafirmar y de alguna forma aprender el conocimiento.

Por tanto al alumno le queda destruir los conocimientos mal adquiridos o superar lo que obstaculiza su buen desarrollo o un buen aprendizaje en forma sistematizada y coordinada, pues de esta misma forma se cometen los errores en algunos casos.

Astolfi (1999), citando a Bachelard, analiza y agrega algunas de las reflexiones de este último autor; las cuales tienen mucho que ver con los errores, como son:

“No hay verdad sin error rectificado”.

“Al volver sobre un pasado de errores, se encuentra la verdad en un arrepentimiento intelectual verdadero”.

“Una psicología sobre la actitud objetiva es una historia de nuestros errores personales”.

“El error sólo es reconocible a posteriori. En el pasado la razón vuelve sobre si misma para juzgarse”.

Astolfi aclara que para poder llegar a evitar los errores se debería conocer de antemano y en profundidad lo que, precisamente se esta aprendiendo con tanto esfuerzo.

Cabe señalar ante esta orden de ideas que Astolfi refrenda las ideas de Bachelard retomando la importancia del error y su inclusión para poder realizar un ejercicio de búsqueda de la verdad y más aún del conocimiento.

De igual forma atribuye al error como algo inaceptable e inevitable en aquellas personas que conocen, profundizan y dominan de antemano algún contenido de orden intelectual, y por el contrario viendo la otra cara de la moneda, se dice que no se puede evitar el cometer errores cuando apenas se esta iniciando a los alumnos en el proceso de aprendizaje, es decir que si se están aprendiendo conocimientos nuevos, estos, en su proceso de enseñanza –aprendizaje van a estar cargados de errores por la misma condición y calidad de ser nuevos a



cambio se tendrá una idea menos superficial de lo que ya se conocía de estos conocimientos.

Una buena base de un conocimiento sería la rectificación y el análisis de los errores pasados y propios para restablecer un aprendizaje real y auténtico.

Por lo tanto apoyando esta última idea se aclara que el error nace como una huella de una auténtica actividad intelectual, actividad que evita la reproducción estereotipada y guiada con estrechez, como acompañante de una verdadera elaboración mental.

Es el error un signo, y al mismo tiempo una prueba de que en el intelecto del alumno se está llevando a cabo un aprendizaje digno, que pone a tela de juicio sus representaciones mentales previas y sus habilidades reales, para esforzarse en construir algo nuevo (Astolfi, 1999).

### **1.1.3 Lakatos**

Por su parte Lakatos (citado por Rico, 1994), propone lo relativo a la lógica del descubrimiento y la elaboración de conceptos en matemáticas. Ofrece una metodología basada en los principios de la falsabilidad para la construcción del conocimiento matemático, considera como posible la retransmisión de la falsedad en un sistema deductivo, en oposición a la idea clásica de la retransmisión de la verdad como única opción.

En esencia, se cambia el estatuto positivo, que toma la verdad como patrón, sustituyéndola por la falsedad. Así la verdad objetiva pasa a ser una verdad relativa a conocimientos, esquemas de interpretación y reglas metodológicas que permiten acceder a esos conocimientos.

Ante este orden de ideas inclinándonos en el aprendizaje de las matemáticas percibiendo los errores, podemos decir que bajo la metodología de este último

autor se cae en la cuenta que también se puede aprender y construir un conocimiento teniendo en cuenta primero los conocimientos falsos o las respuestas falsas para llegar a los conocimientos verdaderos.

Una vez mencionadas los fundamentos epistemológicos, creemos conveniente plantear una postura propia que fundamente en términos epistemológicos nuestra visión acerca del tema central de nuestro estudio, los errores.

Nuestra postura epistemológica se forma desde una perspectiva holística, la cual permite extraer de manera global lo más significativo de las ideas de los filósofos de la ciencia y epistemólogos arriba mencionados, esto tiene como finalidad retomar lo más importante que sirva de ayuda para nuestro estudio en este caso retomamos a Popper y Lakatos citados por Rico (1994), quienes toman a los errores como una situación de gran funcionalidad y oportunidad para una verificación de lo aprendido y una opción más para poder aprender mediante la crítica de los propios errores.

La perspectiva que se plantea según Bachelard (citado por Astolfi, 1999), se puede retomar como una óptica positiva, creativa y reflexiva acerca de los errores, en la cual propone un análisis del error visto como un elemento adherido al conocimiento, concebido como obstáculo epistemológico.

El cual es reflejado en todas y cada una de las tareas que implica el aprendizaje o adquisición del conocimiento y no debe tomarse como algo que provoque angustia o tensión si no por el contrario, es algo que de alguna manera se tiene que encontrar porque después se va a buscar el no cometerlos, o sacar provecho de ellos y tener cuidado con estas herramientas, pues como lo afirma el mismo Bachelard citado por Astolfi (1999), *“no hay verdad sin error rectificado”*, siguiendo la misma línea de ventaja del error como una herramienta de falsación como lo plantea Popper y una idea de verificabilidad como lo determina Lakatos.

Siguiendo con el amplio tema de los errores se cree necesario manifestar algunas definiciones y acepciones acerca de los errores incluidas en el siguiente apartado.

#### **1.1. 4 Definiciones y acepciones del error.**

Una definición del error que aportan los modelos constructivistas mencionada por Astolfi (1999), atribuye al error como una falta no condenable ni como un fallo lamentable de programa; sino que son una especie de manifestaciones interesantes de obstáculos como los que se va a encontrar el alumno en su proceso de aprendizaje, ante esta idea el error adquiere un papel enmarcador en las tareas intelectuales que los alumnos van resolviendo y de los obstáculos con los que se enfrenta su pensamiento al momento de resolver dichas tareas o problemas.

Al respecto Block (citado por Chacón, 1996), refiriéndose a los errores aclara que el error forma parte del proceso mismo del acercamiento al resultado y a las herramientas.

Muchas veces la equivocación (siempre y cuando sea evidente para el alumno sin que un adulto le diga “te equivocaste” sino que lo descubra él sólo) es uno de los motores más importantes en el proceso de construcción de relaciones matemáticas.

Por su parte Moreno (1998), plantea, desde el enfoque constructivista, que el error del alumno es diferente de la “falta de comprensión”, que es la interpretación clásica. El error se ve como producto de una forma inadecuada de conocimiento. Este conocimiento manifiesta ser inadecuado sólo cuando ya no puede asimilar nuevas situaciones. El error se mide, desde la óptica de la transmisión, como la desviación respecto de la única interpretación válida; la del profesor.

Debemos tratar de que el estudiante encuentre una *respuesta posible* a cada problema. En matemáticas, sabemos que un problema puede resolverse de muchas maneras, siempre y cuando pueda resolverse correctamente.

Desde una perspectiva psicogenética el error es entendido como los razonamientos incorrectos de los niños ante situaciones problemáticas. Los errores dejaron de señalar únicamente una dificultad o una incapacidad, para ser reveladores de una lógica infantil (Castorina, 1988).

Tomando en cuenta la perspectiva arriba mencionada, en nuestro estudio tenemos que plantear que esta teoría se preocupa por explicar el origen de donde surge el error, es decir, toma en cuenta de donde emanan los errores para después, tratar de determinar cuál es la fuente o la raíz de los errores.

Ante éste último cuestionamiento de la concepción psicogenética, Castorina (1988) nos dice que la teoría de la equilibración permite desglosar la fuente de los comportamientos erróneos y los mecanismos de superación.

Dicha teoría aclara que cuando un sujeto entra en contacto con un objeto ó conocimiento nuevo, el sujeto le atribuye un significado en la medida en que es asimilado en sus propios esquemas de acción o conocimientos que ya había adquirido.

En dichos esquemas al mismo tiempo se van acomodando las características o ideas que trae consigo ese objeto o conocimiento nuevo, para que de esta forma el sujeto pueda ampliar las estructuras de su conocimiento, no se retorna al estado anterior del equilibrio sino que se deja en claro un aumento en las estructuras cognoscitivas.

Esta doble relación entre la asimilación y la acomodación es lo que en la psicología genética se le conoce como “equilibrio” en el cual se establece una

relación dependiente, implicando el proceso asimilador y el proceso acomodador de las acciones y los objetos. Dicha concepción esclarece de modo general, que la fuente de los errores reside en los desequilibrios del funcionamiento asimilador de los esquemas de acción.

Con respecto al equilibrio relacionado con los errores, y recuperando lo que afirma Pozo (1999), se argumenta que la existencia de un progreso en las estructuras cognitivas se basa en el equilibrio entre la asimilación y la acomodación, y si es mayor ese equilibrio, será menor la presencia de fracasos o errores producidos por las asimilaciones o interpretaciones de los objetos. Sin embargo tenemos que si no surge el desequilibrio entre estos dos procesos el aprendizaje o cambio cognitivo no se hace presente, es decir sólo de los desequilibrios o errores entre la asimilación y la acomodación de los nuevos esquemas surgirá el aprendizaje o cambio cognitivo, lo cual aclara la importancia del error.

Por lo tanto, la teoría de la equilibración de las estructuras cognoscitivas nos explica que es en las pautas (asimilación y acomodación) en las cuales los desequilibrios (errores) son progresivamente compensados. Éstas compensaciones de los desequilibrios, ligadas a las perturbaciones dan lugar a una auténtica construcción o una reestructuración caracterizada por nuevas composiciones entre los esquemas o conocimientos ya adquiridos por el alumno.

Después de todas estas reflexiones se pueden desprender algunas ideas sobresalientes del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas teniendo en cuenta lo siguiente:

Los errores pueden contribuir positivamente en el proceso de aprendizaje, ya que surgen de un marco conceptual consistente, y son adquiridos previamente, ante esta situación sería mejor una previsión, a la imposición arbitraria de una

condena, además se tiene que tomar en cuenta que todo aprendizaje trae consigo una carga extensa de errores en forma coordinada y sistematizada en algunos casos esporádicos o en otros azarosa.

Desde otro punto de vista el error es entendido como una distorsión, inadecuación o improcedencia en un proceso, es decir donde quiera que haya un proceso de aprendizaje es posible el error. Ante este sentido encontramos el error en aquellos fenómenos que comportan un cambio o denotan una adquisición dado que implican un proceso.

Bajo este entendido del error podemos enmarcar dos atribuciones que describen cualitativamente los efectos de éste, como son: 1) la negatividad o destructividad del error, y 2) los efectos creativos y constructivos del error propuestos por De la Torre (1993).

### **1.1. 5 El efecto negativo o destructivo del error.**

Esta cualidad atribuida al error es concebida culturalmente como un fallo irreversible, ya sea que en forma natural, surja de la técnica empleada o del mismo hombre.

Cuantas veces no hemos escuchado el reproche clásico refiriendo frases como: ese fue un error fatal, una falla técnica que propicio pérdidas ecológicas y en el más triste de los casos pérdidas humanas, esta postura de los errores crean una conciencia de culpabilidad, arrepentimiento, algo fuera de control de lo que no se puede esperar algo beneficioso, por lo cual se concentra en los errores la negatividad de sucesos cotidianos, esto lo podemos observar también en el aula donde los alumnos atribuyen al error un significado indeseable, una postura destructiva, algo que hace que se sientan culpables de no tener cuidado con ellos, y sentir arrepentimiento de haberlos cometido, puesto que el alumno se esmera más en realizar exitosa y cuidadosamente un algoritmo de

matemáticas que en comprender el proceso de resolución aplicando sus conocimientos dejando en segundo término los errores cometidos.

Por el otro extremo encontramos el efecto beneficioso y bondadoso de los errores por ello lo aclaramos enseguida.

#### **1.1. 6 El efecto creativo y constructivo del error.**

Este efecto es poco recurrente y casi inusual en términos educativos, sin embargo, para nuestro estudio es de vital importancia aclararlo ya que este efecto se contrapone al anterior, es la otra cara de la moneda, este efecto del error supone valerse del efecto de fallo o equivocación como instrumento productivo, es decir tomar el error como elemento que integra un proceso.

En pocas palabras tomar al error como parte del proceso y de este modo sea coadyuvante en la obtención de un resultado correcto, aún teniendo todo un camino lleno de obstáculos y desaciertos.

Tal efecto permite al alumno crecer en situaciones problemáticas que le brinden la oportunidad de crear nuevas alternativas, y generar otras vías de acceso y solución apoyándose de los errores cometidos.

En este mismo sentido, encontramos el efecto constructivo del error, el cual considera el error como la piedra angular para formular y hacer de la mejor manera las cosas, en el caso de nuestro estudio realizar de la mejor manera la resolución de problemas aritméticos, este efecto nos queda claro al mencionar que es una forma de descubrir, afianzar, consolidar y transmitir conocimientos al encontrarse con errores en el aprendizaje, tal es el caso del método de ensayo y error y la didáctica del error la cual plantea dar mayor peso al error como precursor de progreso y verificación de lo aprendido y no tomar al error como algo castigable e inaceptable.

Esto sólo será posible si el error una vez cometido va seguido de una reflexión sobre sí mismo, una especie de autocrítica y rectificación sobre los errores cometidos y así llegar a soluciones relativamente correctas.

En nuestra investigación creemos conveniente adherirnos a estas dos últimas acepciones del error, debido a que hoy en día es necesario reivindicar la postura tanto del alumno como del profesor hacia los errores y en cierta forma retomar el carácter creativo y positivo de los errores, en pro del proceso de enseñanza – aprendizaje pues como afirma Piaget (citado por De la Torre, 1993), que el error, equivocación o distorsión están en la génesis misma de todo conocimiento, no como efecto deseable sino como posibilidad de progreso.

Ante esta serie de afirmaciones acerca de la definición del error creemos necesario establecer como se ha investigado el tema de los errores y para ello tenemos la siguiente panorámica.

## **1.2 La investigación sobre errores en el aprendizaje de las matemáticas**

Al investigar los errores, tomando en cuenta las dificultades encontradas en los alumnos, es necesario reconocer que los errores también son en función de otras variables del proceso educativo como son: el profesor, el currículo, el entorno social en el que se enmarca la escuela, el medio cultural y sus relaciones, así como las posibles interacciones entre estas variables.

Con respecto a los errores en el aprendizaje de las matemáticas se pueden plantear como el resultado de procesos muy complejos, debido a que el planteamiento de una delimitación clara de la causa de un error en matemáticas es bastante difícil, ya que entran en juego distintas variables del proceso educativo, y a menudo es muy difícil aislar relaciones.



En el momento actual la mayor parte de los investigadores y especialistas Mulhern (citado por Rico, 1994) coinciden en considerar como características generales de los errores cometidos por los alumnos las siguientes:

- Los errores son sorprendentes, esta característica es evidente en la forma en que aparecen los errores, pues el alumno tiende a pensar que su algoritmo o proceso de resolución de algún problema no tiene errores, y de pronto o inesperadamente aparecen los errores de forma sorpresiva, y de igual manera sorprende que se hallan cometido.
- Los errores son a menudo extremadamente persistentes, otra cualidad que tienen los errores es que casi nunca dejan de existir dentro del proceso de enseñanza aprendizaje, lo cual habla de una constante aparición en diferente orden y en distintos factores, pero lo cual da una pauta de refinamiento y de superación si se aprende de ellos.

En cuanto a los errores de este tipo Maza (1989), aclara que consisten en la confusión u olvido de alguna de las etapas de algún procedimiento algorítmico y agrega que estos errores no aparecen en forma esporádica sino que su presencia es sistemática, en su denominación general.

Este mismo autor menciona que los errores suelen conocerse como bugs, quien lo define de la siguiente forma: “bug” es un cambio o perturbación al llevar a cabo un procedimiento (como es el caso de un algorítmico) y tiene como característica fundamental su presencia sistemática al utilizar dicho procedimiento.

Los errores pueden ser o bien sistemáticos o por azar. El error sistemático es aquel que regularmente se presenta de manera muy común en los alumnos y se desarrolla básicamente en determinados pasos en la aplicación de los

algoritmos y en las operaciones básicas o en algún otro proceso en el que se desarrolle un sistema de resolución, por ejemplo:

Al momento de sumar no colocan bien las filas de los números de unidad con unidad, decena con decena o centena con centena de esta forma:

$$\begin{array}{r} 638 \\ + 89 \\ \hline 1428 \end{array}$$

Por otra parte los errores por azar aparecen súbitamente y se manifiestan en forma repentina y en momentos o pasos que no son los usuales o muy comunes por ejemplo: el confundir los números, o el hacer una resta en ves de hacer una multiplicación.

- Los errores ignoran el significado; de este modo, respuestas que son obviamente incorrectas no se ponen en cuestión.

Con respecto a esta última característica general de los errores podemos citar un ejemplo de Bollás (1997), donde plantea el error de un alumno de 4° grado de primaria, el cual realiza la siguiente sustracción:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 50 \\ - 14 \\ \hline 76 \end{array}$$

En esta operación el alumno utiliza un procedimiento que el mismo autor denomina “combinación de operaciones” (resolución de suma y resta de manera simultanea). Ante ello el alumno sólo se limita a decir “lo reste” realizando el mismo algoritmo de la suma en la resta. Este es un claro ejemplo de que en ocasiones los alumnos desconocen el significado de las operaciones y realizan operaciones diferentes como la suma y resta, resolviéndolas con el mismo

procedimiento, ya sea de la suma o de la resta, sin darse cuenta y sin poner en duda si están resolviendo en forma correcta las operaciones.

### **1.2.1 Principales líneas de estudio de los errores en matemáticas**

Rico (1994), aclara que son cuatro los principales ejes en torno a los cuales se articulan los estudios e investigaciones recientes relativos a errores en el aprendizaje de las matemáticas.

Estos cuatro ejes se plantean de manera general sin especificar sobre que contenido han trabajado los cuales son:

1. Estudios relativos al análisis de errores, causas que los producen o elementos que los explican, taxonomías y clasificaciones de errores detectados.
2. Estudios dedicados al tratamiento curricular de los errores del aprendizaje en matemáticas. Se incluyen aquí los trabajos dedicados a la organización didáctica de la enseñanza de las matemáticas que contempla la consideración de los errores como un dato destacable.
3. Se considera aquí los estudios dedicados a determinar que conviene que aprendan los profesores en formación en relación con los errores que cometen los alumnos.
4. Se incluyen aquellos trabajos de carácter técnico que implementan y sostienen una determinada clase de análisis de errores.

El presente trabajo pretende tratar de realizar una combinación de las líneas de investigación arriba mencionadas tratando de extraer lo más relevante de éstas, ya que se busca analizar cuáles son los errores cometidos en la resolución de

problemas para poder explicar cómo se presentan, tratar de descubrir sus causas, realizar una clasificación y por último tratar de dar una propuesta o técnica que brinde mejores resultados al presentarse este tipo de situaciones basándose en el currículo.

### **1.2.2 Estudios sobre los errores en contenido matemático**

Schlaak (citado por Rico, 1994), realizó un estudio en cuanto al contenido de la resolución de problemas, y destacó que los alumnos al enfrentarse y resolver los problemas aritméticos presentan una inadecuada comprensión de los enunciados, y al momento de determinar los números, ya sea al colocarlos o al relacionarlos lo hacían de forma incorrecta.

Por su parte Gluck (citado por Rico, 1994), formuló un estudio con el contenido del cálculo en alumnos de primer grado de educación básica, en el cual el autor pudo diferenciar cinco tipos de errores como son: cambios de operación, aproximación aditiva o multiplicativa, resultados parciales al momento de determinar la respuesta, daban sólo el primer dígito correcto y presentaban errores de transcripción al momento de escribir las operaciones.

Al estudiar el contenido de la resolución de problemas Ginsburg (citado por este último autor, 1994) realizó una serie de observaciones de las cuales se desprendió que la mayoría de los errores en los alumnos surgen por utilizar estrategias y reglas personales basadas en experiencias particulares y poco formales y también con estrategias basadas en interpretaciones de los conocimientos matemáticos iniciales.

Kieran citado por Rico (1994), estudiando el contenido de las ecuaciones lineales encontró que los alumnos del estudio, tomaban el signo igual como un mandato operacional o una señal para hacer algo, y por otra parte se les hace

difícil aceptar el significado de igualdad como un equilibrio entre los dos miembros de la ecuación.

Carpenter (1985), al estudiar la resolución de problemas de tipo verbal, trató de demostrar que las principales variables donde existió mayor dificultad fue en la parte lingüística como la sintáctica y la semántica o una combinación entre ambas.

Bermejo (1990) al efectuar una investigación en el contenido de la Adición, observó que los errores más frecuentes se originan en las llevadas de unidades ya que los niños tienen dificultad para efectuar intercambios entre columnas, también encontró que en cifras más grandes existe mayor dificultad en la alineación de números sobre todo cuando existe en alguna de esas cifras la presencia del cero.

Bollás (1996), aporta un estudio del contenido de la Adición y Sustracción en el cual se observa que en la adición los niños presentan errores en la acomodación de las cifras que se van a sumar, y se les dificulta llevar las decenas y no las unidades. Con respecto a la sustracción la mayoría de los niños sólo se preocupaban por restar en número menor al número mayor sin importar la ubicación del minuendo y del sustraendo, y por lo tanto carecían de la idea de pedir prestado, al igual que la adición los niños descuidaban la colocación de las cifras.

En estudios un poco recientes Nuria (2001), estudia las dificultades comunicativas en el lenguaje matemático, y detecta dificultades de comprensión de normas o reglas matemáticas, encontró que los alumnos presentan obstáculos comunicativos como pobreza de vocabulario matemático, a parte de encontrar respuestas negativas por parte de los alumnos al momento de toparse con errores o fracasos en la comunicación.

Una vez mencionados algunos de los diferentes trabajos enfocados al estudio de los errores en contenidos matemáticos que han sido objeto de estudio para analizar los errores que cometen los alumnos, a continuación se presentan en el cuadro 1 a manera de resumen, los resultados obtenidos en dichas investigaciones.

**Cuadro 1. Estudios sobre los errores en contenidos matemáticos**

AUTORES Y FECHAS	CONTENIDOS MATEMÁTICOS ESTUDIADOS	RESULTADOS OBTENIDOS
Schlaak (1968)	Resolución de problemas	Destacó que los alumnos comprenden inadecuadamente los enunciados, y determinan incorrectamente los números.
Gluck (1971)	Cálculo	Encontró errores como cambios de operación, aproximación aditiva o multiplicativa, resultados parciales, solo el primer dígito correcto y errores de transcripción.
Ginsburg (1977)	Resolución de problemas	Observó que muchos errores de los alumnos surgen por utilizar estrategias y reglas personales y por hacer interpretaciones con base en los conocimientos matemáticos iniciales.
Kieran (1981)	Ecuaciones lineales	Los alumnos toman el signo "igual" como un mandato operacional o una señal para hacer algo y se les hace difícil aceptar el significado de igualdad como un equilibrio entre los dos miembros de la ecuación.
Carpenter (1985)	Resolución de problemas de tipo verbal.	Se demostró que las principales variables donde existió mayor dificultad fue de naturaleza lingüística como la sintáctica, la semántica o una combinación entre ambas.
Bermejo (1990)	Adición	Los errores se originan en "las llevadas" ya que los niños tienen dificultad para efectuar intercambios entre columnas, también que en cifras más grandes existe dificultad en la alineación y colocación de números sobre todo cuando la cifra tiene un cero.
Bollás (1996)	Adición y sustracción	En la adición los niños cometen errores al acomodar las cifras a sumar y se les dificulta llevar las decenas y no las unidades. En la sustracción los niños Oslo se preocupaban por restar el número menor al número mayor sin importar la ubicación del minuendo y sustraendo, carecían de la idea de pedir prestado y también descuidaban la colocación de las cifras.
Nuria (2001)	Dificultades comunicativas en lenguaje matemático	Se detectaron dificultades de comprensión de normas matemáticas, obstáculos comunicativos como pobreza de vocabulario matemático, y se dieron respuestas negativas de los alumnos al toparse con errores o fracasos en la comunicación.

### 1.3 El método de exploración crítica

Cada investigación va acompañada de un método el cual se adhiere en forma solidaria al estudio para tratar de lograr la realización de los objetivos planteados.

Con respecto a nuestra investigación podemos plantear la necesidad de un método el cual tome en cuenta la relación entre el sujeto y los objetivos planteados.

Bajo esta perspectiva se considera al sujeto como un participante activo que establece las relaciones asociando el tiempo, el espacio y sobre todo la comprensión de las situaciones que se le presentan. Este establecimiento de relaciones va a depender sobre todo de la frecuencia de la aparición de estas situaciones.

Algunos teóricos del aprendizaje se inclinan más al principio empirista el cual considera en primer plano lo observable, y han tratado de implantar una metodología enfatizada a las adquisiciones artificiales, sin conocimientos previos y en condiciones idénticas. (Inhelder, 1996).

Por nuestra parte, nos interesa hablar de cuestiones no tan cercanas a la luz de la experiencia, estamos hablando de hechos inobservables como las adquisiciones cognoscitivas, como lo son los procesos implicados en la resolución de problemas aritméticos. Dicho interés nos obliga a plantear este proceso de adquisición cognoscitiva desde la aparición y la perspectiva de los errores.

Está claro que nuestra investigación exige un método que pueda relacionar la exigencias de una experimentación con las adquisiciones no observables, por tal motivo creemos conveniente utilizar en nuestro estudio un método que intente



cubrir la expectativa mencionada y para ello emplearemos el método de exploración crítica.

### **1.3.1 Definición y características del método de exploración crítica**

El método de exploración crítica ha sido empleado ampliamente desde hace muchos años y ha resultado muy fructífero para estudiar el desarrollo cognoscitivo del niño, esta forma de trabajar con los sujetos proviene del método clínico propuesto por Piaget (1978), el cual provoca en los trabajos de experimentalistas estrictos, reacciones que van desde un divertido asombro, hasta el más profundo escepticismo (Inhelder, 1996).

Ahora bien, creemos necesario aclarar qué es y cómo se trabaja el método de exploración crítica, lo cual se describe a continuación.

El método de exploración crítica, proviene del método clínico ligado a toda la obra de Piaget, mismo quien expresaba que este método permite sobrepasar el método de la pura observación, y sin recaer en los inconvenientes del test, alcanzar las principales ventajas de la observación (Piaget, 1978).

El mismo Piaget (citado por Vinh-Bang1992), al formular dicho método insiste en aclarar que “este método crítico consiste siempre en conversar libremente con el sujeto, en lugar de dedicarse a cuestiones fijas y estandarizadas y conserva así todas las ventajas de una entrevista adaptada a cada niño y destinada a permitirle el máximo posible en la toma de conciencia y de formulación de sus propias actitudes mentales.

En opinión del propio Piaget (1978), plantea que una regla principal de este método es partir de algunas preguntas espontáneas formuladas por niños de la misma edad o más jóvenes, y aplicar la misma forma de estas preguntas a las

que nos proponemos plantear a los niños que nos van ayudar con su participación en nuestro estudio al aplicarles la entrevista o interrogatorio.

Podemos decir que de esta serie de preguntas expresadas de manera súbita por parte de los niños podríamos obtener también algunas contraargumentaciones o contra ejemplos que nos servirán al momento de aplicar este método

En este sentido el método crítico prefiere partir de ideas centrales y precisas, para que se puedan adaptar a las expresiones y en caso necesario adaptar las situaciones a las respuestas, a las actitudes y al vocabulario mismo del sujeto, y se deja orientar por las conductas originales imprevistas y a menudo imprevisibles del pensamiento infantil (Vinh-Bang, 1992).

Claparede (citado por Vinh-Bang, 1992) afirma la cualidad propia de este método diciendo “la novedad aquí no es dedicarse a anotar la respuesta del niño a la pregunta, sino dejarlo hablar”. El método de Piaget trata de anotar lo que se oculta atrás de las primeras apariencias”. Ante esta afirmación podemos darnos cuenta de del alcance que tiene la utilización de dicho método.

Otras características del método en cuestión son que al ser aplicado, se elaboran ideas centrales, se pueden variar las condiciones que están en juego, se puede controlar las hipótesis en contacto con las reacciones provocadas, y el examinador se deja dirigir al mismo tiempo que dirige. Tomando en cuenta todo el contexto mental del sujeto, también se utilizan en el método contra ejemplos destinados a la demostración de argumentos en el razonamiento experimental del niño (Vinh-Bang, 1992).

En cuanto a la utilización, un elemento fundamental de nuestro método de exploración crítica consiste en que el experimentador hace sin cesar hipótesis sobre los diversos significados cognoscitivos de las conductas observables y los

comprueba en la realidad, nos ha parecido más justo y apropiado para nuestra problemática analizar, de entrada, los procesos del pensamiento más bien que proceder a interpretaciones precipitadas e imaginar, en varias etapas, experimentos de control.

Este ejercicio de análisis se puede hacer también, e incluso conjuntamente, con las variaciones de situaciones experimentales, como por ejemplo, a través de diálogos entre el niño y el experimentador, haciendo hincapié en los aspectos críticos y reveladores del problema planteado (Inhelder, 1996).

Esta variación o transformación de las situaciones experimentales permite observar en el niño la manera en que justifican sus razonamientos aún pese a los cambios en la situación o contra ejemplos dados por el entrevistador, así como también ponen de relieve la forma en que los niños reconstruyen o no en su pensamiento estas transformaciones para que puedan determinar su respuesta (Castorina, 1988).

Por otra parte es necesario destacar que nuestro método al realizar las variaciones de las situaciones da lugar a plantear tres tipos de preguntas según Castorina (1988), las preguntas de exploración las cuales tienden a develar la noción cuya existencia y estructuración se busca, preguntas de justificación que se encargan de obligar al niño a legitimar su punto de vista, y finalmente las preguntas de control las cuales buscan la coherencia o contradicción de las respuestas a través de la contrargumentación.

En lo referente a las sugerencias o contra-sugerencias verbales (contra ejemplos, o contraargumentación), es lógico que no se tomarán de la lógica adulta, sino de las interferencias y expresiones recogidas en los niños de la misma edad o de edad más cercana, y de esta forma aclara Vinh-Bang (1970), entonces el método es crítico porque se ponen en tela de juicio las afirmaciones del sujeto, no por que se mide la solidez de sus convicciones, sino para

descubrir su actividad lógica profunda, no solamente sus logros funcionales y sus creencias espontáneas, sino la estructura característica de un cierto estadio del desarrollo.

Siguiendo la idea de la contraargumentación se dice que su finalidad principal es la de indagar las estructuras intelectuales a través de una discusión sistemática para establecer si las adquisiciones son o no estables, es decir, cual es el grado de equilibrio de sus acciones ante los problemas.

En su defecto si el niño se resiste a la contraargumentación podría indicar una norma lógica en su pensamiento, en el sentido de que el sujeto tiene conciencia de que sus inferencias no pueden llegar a otros resultados más que a los suyos, o bien pudiese ser que para el niño el contra ejemplo no constituye o no significa ningún problema para él en caso de seguir justificando su razonamiento (Castorina, 1988).

Los interrogatorios se desarrollan en forma de una conversación entre compañeros de juego: el niño y el explorador, en la cual se trata de explorar los razonamientos de los niños, esforzándose por seguir los procesos psicológicos del pensamiento infantil.

El papel que desempeña el experimentador debe conducir al alumno hacia las zonas críticas, manteniendo constante la conversación en un terreno fecundo, tendrá que saber observar, es decir permitirle al alumno que hable, no agotar ningún comentario, no desviar ningún sentido o palabra del niño, y al mismo tiempo saber buscar algo preciso, tener en cualquier momento alguna hipótesis de trabajo, o alguna teoría justa o falsa, que comprobar (Piaget, 1978).

Con respecto al instrumento podemos mencionar que se determina tomando en cuenta las características en el vocabulario, el estadio, y el razonamiento

esperado, manifestado y observado en el sujeto, con la idea de que el instrumento se adapte al sujeto y no que el sujeto se adapte al instrumento.

Después de analizar la manera en que puede ser estudiado el tema de los errores y la manera de interactuar entre el experimentador y el sujeto en un ambiente de entrevista, cabe mencionar que a partir de esta labor se desprende la determinación de las posibles causas y alguna clasificación de los mismos, lo cual es mencionado en el siguiente apartado.

#### **1.4 Causas y clasificación de errores**

El trabajo de investigación ha puesto de manifiesto que el pensamiento matemático es especialmente indicado para representarlo mediante modelos de procesamiento de la información, mediante este enfoque se supone que los problemas matemáticos pueden descomponerse en varios componentes de procesamiento. (Miranda, Fortes y Gil, 1998)

Algunos de los resultados e interpretaciones más valiosos se han logrado mediante el estudio del procesamiento humano de la información, en esta perspectiva se han estudiado los errores a través de patrones consistentes al nivel individual y colectivo.

Radatz (citado por Rico, 1994) realiza una clasificación de errores a partir del procesamiento de la información y establece cinco categorías generales:

1. Errores debidos a dificultades de lenguaje, en esta categoría se encuentran señalados aquellos errores derivados de la inadecuada forma de utilizar los conceptos, símbolos y el vocabulario matemático, mismo que es percibido para muchos alumnos como aprender otra lengua. La comprensión semántica de los textos matemáticos es una fuente de errores, y principalmente en la resolución de problemas verbales, pues se tiene que

hacer una comparación y una traducción del lenguaje natural que posee el niño a un lenguaje formal matemático.

2. Al realizar ejercicios o tareas de matemáticas el alumno se encuentra con variadas formas e imágenes especiales y visuales que también pasan a ser una fuente de errores, lo cual les impide realizar correctamente sus tareas, al colocar mal los números, o al tomar en cuenta algunas situaciones sustituyéndolas por otras o confundiendo las imágenes o hasta los propios números. Al respecto Bryant citado por Karmiloff-Smith (1994) plantea que la disposición espacial es uno de los problemas que acecha a los niños pequeños y de alguna forma si no se corrigen a esa edad nosotros pensamos que persisten los errores.
3. En esta categoría entran aquellas deficiencias del conocimiento por parte del alumno acerca de contenidos y procedimientos destinados y utilizados para hacer una tarea o resolver algún problema, este tipo de errores son: ignorancia de algoritmos, escaso conocimiento de hechos básicos e insuficiencia en la aplicación de métodos y uso de símbolos y conceptos necesarios.
4. Errores debidos a dificultades para obtener información espacial.
5. Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.
6. Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento. Dentro de esta clase de errores se encuentran los siguientes:
  - Errores por perseveración, en los que predominan elementos singulares de una tarea o problema.

- Errores de asociación, que incluyen interacciones incorrectas entre elementos
- singulares.
  
- Errores de interferencia, en los que operaciones o conceptos diferentes interfieren con otros.
  
- Errores de asimilación en los que una audición incorrecta produce faltas en la lectura o escritura.
  
- Errores de transferencia negativa a partir de tareas previas, en las que se puede identificar el objeto de una persona errónea obtenida de un conjunto de ejercicios o problemas verbales.

7. Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes. Este tipo de errores surgen con frecuencia por aplicar con éxito reglas o estrategias similares en áreas de contenidos diferentes.

Movshovitz-Hadar, Zasalavky e Inbar (citados por Rico, 1994), hacen una clasificación empírica de los errores, sobre la base de un análisis constructivo de las soluciones de los alumnos realizada por expertos. Estas categorías son:

- 1) Datos mal utilizados.
- 2) Interpretación incorrecta del lenguaje.
- 3) Inferencias no válidas lógicamente.
- 4) Teoremas o definiciones deformadas.
- 5) Falta de verificación en la solución
- 6) Errores técnicos.

Davis (citado por Rico 1994) elaboró una teoría de esquemas o constructos personales, que se presentan en forma similar en distintos individuos que

comparten las mismas experiencias y cuya combinación mediante los principios generales que regulan el procesamiento humano de la información le permite tipificar e interpretar algunos de los errores más usuales de los escolares en el aprendizaje de las matemáticas.

Este autor también nos plantea un mecanismo mediante el cual se analiza el pensamiento matemático humano y algunos de sus errores.

Algunos de los errores clásicos explicados por el modelo de Davis son:

1. Reversiones binarias. Ej.  $4 \times 4 = 8$ ;  $2^3 = 6$ .
2. Errores inducidos por el lenguaje o la notación. Ej.  $2x - x = 2$ .
3. Errores por recuperación de un esquema previo. Entre los ejemplos que propone se encuentran los errores usuales de la suma y la resta, justificados por esquemas tales como el de la adición con dos entradas, el simétrico de la sustracción y la comparación de unidades en una relación de proporcionalidad.

Errores producidos por una representación inadecuada.

Complementando este apartado de causas y clasificación de los errores, Maza (1989) plantea la teoría generativa de bugs que a continuación se describe:

Al observar que los errores son de distintas clases se podría plantear que sus causas también son diferentes.

Ante esta reflexión Maza (1989) al hablar de los errores algorítmicos propone la tarea de reconocer las causas de los errores algorítmicos tomando en cuenta en primer instancia si el procedimiento tiene u ofrece algún tipo de deficiencia en su representación para el niño que lo utiliza, y además determinar que clase de acciones se ha ejercido sobre dicha representación por parte del niño.

Ante la determinación de Maza y bajo la perspectiva de nuestra investigación podemos decir que, para observar de dónde se generan los errores tomando en



cuenta sus causas, es necesario poner atención en la forma y el fondo del procedimiento, así como el nivel en que éste y el problema son representados para el niño y también si lo utiliza en forma correcta (acción) y si llega al fondo del problema esto es, lograr el objetivo con dicha acción.

En pocas palabras observar si el procedimiento y el problema no representa confusiones, equivocaciones o deficiencias en el niño al resolver algún problema o algoritmo, y de esta forma también observar que sus acciones presenten o no una inadecuada utilización para lograr los objetivos planteados.

La afirmación arriba mencionada es de alguna forma apoyada por la teoría generativa de bugs Brown y Burton 1978; Brown y Van Lehn, 1982; Van Lehn, 1983, citados por Maza, (1989) la cual intenta explicar por qué se encuentran los “bugs” y como se desarrollan su causa, todo esto se aclara al considerar que para que un “bug” sea causado el niño debe tener una representación diferente del procedimiento, sea por olvido o por falta de aprendizaje de alguna etapa del algoritmo, o quizá también por otras causas.

Dado que cada parte o etapa del procedimiento tiene un objetivo (el fondo del algoritmo) la acción de no utilizarla o evadirla traerá consigo una contradicción por la cual se debe ejercer acciones irrealizables por falta de coherencia (la forma de resolver el algoritmo) entre las acciones realizadas y el objetivo a alcanzar.

En el caso de la resolución de problemas podría plantearse desde esta teoría que los errores más comunes son la confusión de operaciones aplicadas para cierto tipo de problemas, o la falta del dominio del proceso y del lenguaje o vocabulario matemático.

## 1.5 Tratamiento de los errores en el proceso de aprendizaje

El tratamiento de los errores es un punto que no podemos soslayar en el presente estudio debido a su valor funcional, pues al estudiar los errores es necesario considerar la existencia de una posible vía de acceso a la solución o un determinado procedimiento que nos indique que hacer, como manejar los errores y para qué servirían éstos en el alumno o docente.

Creemos importante tomar las acciones necesarias ante los problemas detectados o planteados, y en este mismo sentido proponer un tratamiento de los errores.

Bajo este preámbulo del tratamiento de los errores Bell (citado por Rico, 1994) ha realizado una serie de estudios sobre estructuras multiplicativas y comprensión por los alumnos de las mismas, se encuentran dentro de los ejemplos más conocidos de investigación sobre errores para producir un tratamiento curricular.

El material desarrollado por éste autor se articula en torno a un modelo de lección diagnóstica a lo que se incorporan algunos tipos de tareas. La lección diagnóstica típica utiliza uno o unos cuantos problemas críticos (casi siempre desarrollados originalmente como items) para descubrir concepciones erróneas y así provocar discusiones conducentes a una resolución; después se siguen problemas similares con algún tipo de retroalimentación inmediata en cuanto a la corrección, para consolidar la conciencia recién adquirida.

Se desarrollan varios tipos de tareas que proporcionan diversas maneras de descubrir conocimientos erróneos, provocar la reflexión o activar los conceptos pertinentes. Estas tareas son: empleo de diagramas, sustitución de números fáciles, juegos, invención de preguntas, calificación de deberes y tareas colectivas.

De la interpretación exclusiva de los errores como instrumentos de diagnóstico y corrección, se aprovecha solo una parte proporcional del potencial educativo del error a discutir o a corregir según sea el caso.

Ante esta posibilidad de aprovechamiento de los errores Rico (1994) atribuye que los errores pueden ayudarnos a investigar cuestiones abstractas relativas a la naturaleza de las matemáticas a las que es difícil acercarse por otra vía, lo cual indica utilizar el contraste destacado del error al igual que su contenido informativo.

Utilizar los errores como motivación y medio para interrogar sobre la naturaleza de las matemáticas puede mejorar la comprensión de las matemáticas como disciplina por parte de los estudiantes. Por ejemplo al momento de detectar errores en la resolución de problemas aritméticos se puede dar la pauta para observar la naturaleza del problema y retomar o encontrar el significado del problema, para una posterior resolución que concluya con el mejor de los resultados (Rico, 1994).

Desde otro enfoque De la Torre (1993), propone un modelo con el cual se lleva a cabo un tratamiento de los errores, el cual se describe en el siguiente cuadro y se explica posteriormente.

MODELO DE ANÁLISIS DIDÁCTICO DE LOS ERRORES (MADE).	
Comprensión	
- Léxica	↓
- Conceptual	↓
- Lógica	↓
Percepción	
I ENTRADA	
- Omisión	
I - Reducción	
- Distorsión	
I Intensión (objetivos)	
I - Ambigüedad	
I - Conflicto	
II ORGANIZACIÓN	II Ordenación
II Conexión	
II - Análisis y Síntesis	
III EJECUCIÓN DEL PROCESO:	
I Errores Mecánicos	
II Errores de Ejecución	III Errores Operativos
- Errores Estratégicos	

En esta tabla se plantea el “Modelo para el Análisis Didáctico de los Errores” (MADE), en el cual se recogen las principales dimensiones y categorías del error, que pueden servir de guía tanto para la investigación como para su análisis y tratamiento didáctico. Entendiendo al aprendizaje, al igual que la ocurrencia del error dentro del mismo, como un proceso.

El Modelo de Análisis Didáctico de los Errores (MADE) acreditado por De la Torre (1993), lleva a cabo un tratamiento de carácter reflexivo, analítico y evaluativo de los errores donde se sugiere estudiar los distintos tipos de errores y ubicarlos en los momentos en que puedan surgir en forma sistemática o por azar ya que están dentro del proceso de aprendizaje, y para ello afirma que si definimos al error como un desajuste entre lo esperado y lo obtenido, como fallo de un proceso, se tendría que analizar y evaluar reflexivamente los datos de entrada, su percepción y comprensión por parte del alumno, determinar si los datos de organización de la información son concretos así como la realización o ejecución de la tarea.

En otras palabras el tratamiento propone trabajar en los tres momentos o sobre los tres parámetros del proceso: Entrada, Organización y Ejecución.

### **1.5.1 Tratamiento de errores en la entrada de información**

En el parámetro o proceso de entrada el autor aporta que es indispensable tomar en cuenta los errores en el plano de las intenciones, es decir no tener una mala definición de metas o falta de intención al realizar las actividades, se debe tomar en cuenta también la comprensión en la parte Léxica, Conceptual y Lógica, por consiguiente de inicio tenemos que aclarar si el alumno presenta o no un buen nivel de percepción para que no omita, se confunda, se atrofie o distorsione con la información nueva y todo esto sea motivo o causa de error en el alumno.

### **1.5.2 Tratamiento de errores en la organización del proceso**

De la Torre (1993), indica que se necesita considerar la tarea del alumno en su análisis y síntesis del problema o tarea a realizar pues dada la complejidad de estos procesos se requiere de un seguimiento de la forma en que el alumno

aplica sus juicios y conocimientos para evaluar, diferenciar y elegir las relaciones y conclusiones para tomar una decisión a posteriori.

Por otro lado en este mismo momento se debe retomar la forma y estilo de ordenación de la información por parte del alumno en su secuenciación coherencia y sentido pues el alterar el orden, saltarse pasos o etapas de solución o simplemente discrepar con el ejercicio, tiene mucho que ver con el orden en que fue procesada y planteada la información.

Lo anterior encierra una gran relación en la conexión o interferencia de la información misma que si no se engancha a lo adquirido o aprendido previamente y además existen fallos al transferir y aplicar conocimientos adquiridos a situaciones diferentes podría ser que surjan errores por esa inconexión o falta de relación de un esquema adquirido con otro nuevo.

### **1.5.3 Tratamiento en el momento de la ejecución del proceso**

En este último momento el MADE propone enfatizar nuestro interés también en los errores que regularmente se cometen en la culminación de una tarea, encomienda tomar mayor atención en la ejecución de las operaciones, atendiendo a los errores que comúnmente llamamos equivocaciones, y si trabajáramos en términos informáticos o de algoritmos hablaríamos de “bugs” o fallos de programación.

Este es un momento que brinda ciertos frutos debido a que no solo proporciona un análisis, ni enmarca cuales errores se han producido. Si no también en forma relevante da cuenta de que estrategias se utilizan para su rectificación en el proceso de realización de un proyecto, tarea, ejercicio o en el caso de nuestro estudio la resolución de un problema aritmético.

Este parámetro tiene que ver con la actitud y estilo del alumno, su carácter estratégico y sobre todo está relacionado con el análisis de los errores mecánicos cometidos en la comunicación oral o escrita como omisión de letras, alteración o sustitución de un signo por otro o de una palabra por otra etc.

Por otro lado se analiza y evalúa los errores operativos y de despiste que se dan al operar o ejecutar un procedimiento, ejemplos de errores como estos son: confusión de signos en las operaciones y los despistes producen también una confusión el orden de operaciones o pasos en el procedimiento, este tipo de errores se da cuando aún no se domina el procedimiento.

Los errores estratégicos tienen lugar en este momento y requieren cierta atención pues basta con determinar si el alumno manifiesta una equivocación en la utilización de la estrategia para la resolución de un problema, que no es más que tomar una estrategia inadecuada para resolver algún problema.

Es grato destacar que este Modelo es un tanto práctico pues basta con determinar y evaluar que tipo de error es cometido, ubicar en que momento se produce, observar que estrategia utiliza el niño para la solución de los ejercicios y plantear o sugerir al niño la rectificación y corrección pero bajo un juicio conjunto tanto del profesor como del alumno y así lograr de manera cooperativa un buen proceso.

Al observar la manera de como se pueden tratar los errores desde una postura más provechosa, motivante, progresiva y fructífera, cabe aclarar algunos planteamientos acerca de la formación de los profesores por lo cual se presenta el siguiente apartado.

## 1.6 Los errores y la formación del profesorado

La función prioritaria de los profesores en dirigir y guiar el desarrollo de ideas matemáticas en las mentes escolares, retoma gran importancia en su adiestramiento en el dominio de pautas de observación cuidadosa sobre el trabajo de los alumnos con el fin de conocer con profundidad lo que los estudiantes están pensando ( Rico, 1994).

Además de este entrenamiento de observación los profesores de formación inicial y permanente deben tener en el mejor de los casos, un conocimiento general de las consideraciones teóricas y de fundamentación que hemos hecho en los apartados anteriores.

Desde otra perspectiva De la Torre (1993) plantea que el profesor en su formación y en su ejercicio docente esta de alguna manera habilitado a transmitir lo que cree correcto, sin embargo no deja entrar en sus planteamientos la posibilidad de aceptar el error, en ningún momento de intervención en el proceso de aprendizaje, y menos aún, no permite partir del error como punto estratégico para un mejor desarrollo en el aprendizaje de los niños.

En contraposición este mismo autor defiende que el error entendido como desajuste conceptual o de ejecución – ha de incorporarse como estrategia didáctica, al igual que la interrogación o la discusión, estando implícito el error en la propia trama o proceso del aprendizaje.

Queda claro que el tomar el error como una estrategia sencilla y aplicable como punto de partida retomando sus efectos creativo y constructivo arriba mencionados, es una propuesta viable para la práctica del profesor.



Pero como se podría desarrollar esta estrategia, ante esta cuestión De la Torre (1993) afirma que dentro de la interacción y dialogo entre el maestro y el alumno el error juega un papel importante ya que gracias a él, la comunicación se hace dialógica e interactiva, donde basta activar o incentivar la localización y detección de los errores para poder trabajar con ellos y a partir de esta situación tomar acciones pertinentes como corregir, verificar, recapitular, recalcar o subrayar detalles con la finalidad de mejorar y enriquecer el proceso y generar el progreso en el desarrollo intelectual proporcionando la creatividad en los alumnos.

En esta misma línea encontraríamos a un profesor mucho más consciente de las necesidades del alumno, de que posiblemente el alumno no ha asimilado nuevos conceptos o procedimientos, que ha seguido caminos diferentes o acciones diferentes a los esperados o a lo que se considera correcto.

Con este tramado de ideas nosotros pensamos que el profesorado tiene en los errores una opción más como herramienta o elemento didáctico, tomando a éstos como un complemento que permite observar las necesidades de ayuda, proporciona pistas de cómo razona el alumno, frente el aprendizaje de, contenidos y da pauta para el conocimiento de la naturaleza en que se da el error para una posterior intervención o método.

Otro punto a favor de esta postura didáctica del error es que proporciona información objetiva del progreso del alumno de manera personalizada dejando de lado el enfoque tradicionalista punitivo e inaceptable de los errores. Pues estos son solo una serie de acciones distintas o equivocadas que tienden a ayudar a descubrir y a darse cuenta de que no se realizo el ejercicio como la mayoría; y que basta con observar, criticar y reflexionar, sobre las acciones propias para corregirnos o verificar nuestros errores con miras a una mejor solución y llegar a un resultado correcto.

Al respecto existen dos cuestiones de interés con la formación del profesorado y el estudio de los errores, primero es el análisis de los errores cometidos por los alumnos y la discusión en seminario de vías posibles para su corrección, y así poner de manifiesto la propia concepción que tiene cada profesor en formación respecto del conocimiento matemático.

En segunda, poner de manifiesto las concepciones deficientes y los errores cometidos en una tarea formativa, y de esta manera aprovechar para proponer esquemas de trabajo correctivo y situaciones en las que el conflicto cognitivo entre las concepciones inadecuadas y las adecuadas se pongan fuertemente de manifiesto y obliguen a una reestructuración positiva de los esquemas previos, tomando en cuenta los procesos de asimilación y acomodación que vimos más arriba, en el momento en que el alumno plantea una resolución a los problemas designados Pozo, (1994).

Por su parte, Gardner (1997) hablando de los problemas en matemáticas y su profesorado, recomienda a padres y maestros estar atentos a las dificultades o errores tratándolos como fenómenos de la naturaleza humana que pueden resultar instructivos, por lo tanto es necesario alentar a los alumnos a reconsiderarlos críticamente.

Gardner afirma también que el punto central que los errores o concepciones equivocadas son un signo de alarma, una señal de comprensión incompleta, por ello el maestro no debe únicamente indicar los procedimientos correctos si lo hace, el alumno volvería a la habitual memorización.

Dicho autor aclara y recomienda que más bien, el maestro necesita trabajar con el alumno en tres dimensiones: a) una comprensión de lo que está en juego; b) una exploración del dominio semántico particular que se está trabajando o investigando, c) determinar cuál es el modo de relacionar mejor y en forma

adecuada y coordinada las reglas de los algoritmos formales con las percepciones individuales de cada alumno en el plano semántico planteado.

Al observar el cuadro de arriba donde se aclara en forma general algunos de los estudios de los contenidos en los cuales se ha tratado de indagar sobre los errores más cometidos en el aprendizaje de las matemáticas, y después de mencionar algunos de los factores con respecto a los errores que son de vital importancia para nuestro estudio, creemos necesario delimitar y seleccionar que contenido vamos a trabajar en nuestro estudio, por lo tanto en la siguiente parte se aclara y justifica la elección del contenido.

### **1.7 Delimitación y justificación del contenido matemático de investigación**

En el presente estudio se seleccionó el bloque de contenido referente a la **resolución de problemas aritméticos**, debido a que en este tipo de contenidos se retoman aspectos de vital importancia como la reflexión y análisis del medio o contexto en que se encuentra el alumno.

Se puede decir que la resolución de problemas es una cualidad en el alumno con miras a convertirse en una habilidad depurada, basándose en el estudio de los errores cometidos por el alumno. Al abordar este bloque de contenidos se podría dar cuenta de cómo lograr dar una posible respuesta a esta demanda de reflexión y análisis del entorno del alumno.

Desde el punto de vista funcional, se dice que a nivel curricular los problemas en matemáticas juegan un papel muy importante en la formación del alumno, dado que generan situaciones en las que el alumno utiliza o recrea habilidades que va mejorando con el paso del tiempo, y además hace que el alumno conozca

más su medio, desarrollando un pensamiento crítico y por otra parte estratégico, que desemboca en un desarrollo integral en el alumno.

Mencionada la idea anterior Pérez y Pozo (1994) plantean que la resolución de problemas tiene dos tendencias generales:

- La resolución de problemas como habilidades generales.
- La resolución de problemas como proceso específico.

La primera se refiere a que con la resolución de problemas aritméticos se adquieren estrategias generales aplicables, bajo ciertas restricciones a otros tipos de problemas.

Y la segunda plantea la necesidad de que en la resolución de problemas y su instrucción deben ser abordadas en las áreas y contextos específicos a los que se refieren los problemas.

Esta última aclaración nos puede dar la pauta para poder estudiar de alguna forma el origen de los errores que comete el alumno desde la perspectiva psicogenética analizando los errores cometidos en los procesos mentales implicados para la resolución de problemas. Otorgando un valor más favorable a los errores y no tomarlos como algo negativo y poco provechoso para el rendimiento escolar del alumno.

Para retomar con claridad las ideas mencionadas en la presente investigación es imprescindible definir el término de problema y los aspectos relacionados al mismo, por esta razón se define en los siguientes párrafos.

### **1.7.1 CONCEPTO DE PROBLEMA**

Se puede pensar que entre más claras estén las partes que conforman nuestro estudio se genera un margen de duda menos amplio, por nuestra parte es

necesario aclarar algunos aspectos acerca del problema, como es su concepción, su resolución, la relación del problema y error, la clasificación de los problemas y por último dar a conocer cuál es el problema que vamos a trabajar en nuestro estudio. Por tanto iniciamos este importante apartado con la concepción del problema que a continuación describimos.

Originalmente problema significaba como un obstáculo en el terreno físico como por ejemplo una barda, cerca o una persona en el camino, ya entrando al terreno psicológico y reproduciendo una analogía se hace la metáfora entendiendo que un problema pasa a ser algo que se interpone en el camino entre la realidad actual de una persona y lo que necesita o busca.

Podemos pensar que problema es considerado no como una realidad física, sino una realidad de carácter psicológico: es una experiencia, una toma de conciencia.

Por esta afirmación se cree que para algunas personas quienes piensan que tal situación es un problema terrible, para otras es algo medio sencillo y para otras no significa ningún problema. Por lo tanto el problema emana de una relación entre lo que un sujeto o un grupo tiene y lo que necesita y quiere resolver o aclarar, (Rodríguez y Fernández, 2000).

Los autores arriba mencionados opinan acerca del significado del problema desde un punto de vista general retomando de éstos tres elementos mencionados, la toma de conciencia, la presencia de algo desconocido o dudoso, y una cierta necesidad o simplemente otorgamiento de un grado de importancia a lo que se concibe como problema ya sea para resolverlo o para tenerlos en consideración.

Ahora bien, consideramos que nuestro estudio exige una concepción en el plano de las matemáticas con un punto de vista más específico y para ello

contamos con las aclaraciones de Mayer (citado por Luceño, 1999) quien habla acerca de la concepción del problema en la aritmética, el cual contiene los siguientes elementos:

1. Datos: de información presente en el problema ya sea en forma implícita o explícita.
2. Los objetivos: Es el estado final o deseado del problema.
3. Los obstáculos: Que son dificultades propias de las diferentes operaciones que deben realizarse para llegar a la respuesta correcta o solución.

Por su parte Luceño (1999), asimila el concepto problema a toda situación en la que haya un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarla, y agrega, la vía para pasar de una situación inicial a la nueva situación exigida, (o de búsqueda) tiene que ser desconocida; cuando es conocida deja de ser un problema, y pasa a ser un mero ejercicio.

Pero a todo esto ¿qué se dice del problema aritmético?, ante esta interrogante Luceño (1999) responde que un problema es aritmético cuando implica el conocimiento de conceptos técnicos y algoritmos matemáticos para su resolución, y presenta las siguientes características que lo definen: el enunciado y la posible resolución.

- Enunciado: En este se presenta la información de carácter cuantitativo, los datos son palabras y cantidades. Se expresan y relacionan de manera cuantitativa, las preguntas planteadas se refieren a la determinación de una o varias cantidades, o relaciones entre cantidades.
- Resolución: Esta es la realización de una o varias operaciones aritméticas que conduzcan a la solución.

Al ser aclarado conceptualmente al problema, tanto en forma general, como en forma específica (problema aritmético) podemos aterrizar cuales son los procesos psicológicos en la resolución de problemas que a continuación se describe.

### **1.7.2 Procesos Psicológicos para la Resolución de Problemas Aritméticos.**

Miranda, Fortes y Gil (1998) sintetizan lo referente a las investigaciones realizadas en cuanto a las fases que suelen llevarse a cabo en la resolución de problemas de las cuales se plantean en forma secuenciada y son las siguientes:

- 1) Análisis del problema, se trata de hacer una descomposición de la información que ofrece el enunciado del problema, aclarando ¿Cuáles son los datos? y ¿Qué es lo que se debe obtener o cuál es el objeto o búsqueda?
- 2) Representación del problema los datos que se han analizado anteriormente; en esta fase deben relacionarse y entablar una conexión entre si de los datos, ya sea en forma manipulativa, (concreta), Icónica (imágenes) o simbólica (abstracta) para darse una idea de lo que trata el problema.
- 3) Sigue la fase de planificación en la cual se selecciona una de las más adecuadas estrategias para llegar con las dos fases anteriores a la solución. De entrada se compara el problema a resolver con otros ya resueltos y de alguna manera saber si se puede aplicar la misma estrategia ya utilizada en el problema nuevo, principalmente en esta fase se establecen submetas, que son momentos en los cuales se ha alcanzado parcialmente la solución utilizando dicha estrategia.

- 4) Ejecución; consiste en la aplicación de la estrategia planificada, marcando y tomando en cuenta si el camino elegido es el más eficaz, y determinar si con el uso de dicha estrategia se está alcanzando el objetivo planteado y delimitando lo más adecuadamente posible, para obtener un resultado más aproximado.
- 5) Generalización del problema; en esta última fase se trata de dar relevancia al reconocimiento y relación entre la solución alcanzada y algún principio general, es decir determinar si el resultado obtenido es correcto y si el método puede ser utilizado para otras situaciones o problemas.

En opinión de Maza (1995), se plantea que uno de los elementos de mayor reflexión sobre el proceso para la solución de problemas consiste en analizar los elementos del problema atendiendo lo siguiente:

1. Los problemas deben representarse con claridad en cuanto a las cantidades numéricas que sirven de datos en el problema.
2. Comprender las relaciones entre estas cantidades y la cantidad buscada, diferenciando los datos de la incógnita.
3. Establecer la relación de equivalencia entre las acciones efectuadas sobre los datos y el resultado final.

Aquí el autor pone un mayor énfasis en los propios elementos del problema, para que el alumno al tomar esta postura analítica y reflexiva pueda encontrar la solución más precisa

Luceño (1999), señala que en trabajos realizados desde la psicopedagogía se rescatan tres momentos o fases para el desarrollo de la resolución de problemas, entre ellos están: Orientación, Ejecución y Control.



Dichas fases o momentos se vinculan con el procedimiento que el mismo autor propone el cual consiste en establecer una serie de preguntas y sistematizar las técnicas, en pocas palabras el autor da importancia al significado en cada paso de la etapa, estableciendo ¿qué? y ¿cómo hay que hacerlo? para alcanzar la meta o en este caso la solución.

A continuación se describe el procedimiento generalizado para la resolución de problemas según Luceño (1999).

Cuadro 2 Procedimiento generalizado para la resolución de problemas.

FASES	ACCIONES	TÉCNICAS
1° ¿Qué dice el problema? ¿Lo he comprendido? ¿Entiendo el significado de las palabras de este problema? ¿Cuál es la pregunta?	Leo y releo detenidamente el enunciado del problema	Lectura global Lectura analítica Modelación (esquemas gráficos)
2° ¿Puedo decirlo de otra forma?	Reformulo	Lectura analítica y reformulación (profunda o superficial)
3° ¿Cómo lo puedo resolver? ¿Tengo todos los datos necesarios para resolver este problema? ¿Qué información necesito? ¿Qué paso/acciones debo realizar? ¿Qué hago primero? ¿Cómo debo calcular la solución? ¿Con qué operación? ¿Con qué operaciones tengo dificultades?	Busco la vía de solución (trazo un plan)	Lectura analítica y reformulación Modelación Determinación de problemas auxiliares (subproblemas) Tanteo inteligente (ensayo y error) Analogía con problemas ya resueltos Empiezo desde atrás Resuelvo el problema con datos más sencillos
	Resuelvo (Ejecuto el plan)	Estimación
4° ¿Es correcto lo que hice? ¿Para qué otra cosa me sirve? ¿Se puede resolver de otra manera? ¿Puedo comprobar si es correcto el resultado?	Hago consideraciones (compruebo, analizo la solución y el procedimiento). Repasar cada uno de los pasos y comprobar que no se ha fallado en ninguna de las operaciones.	Comprobación
5° ¿Puedo explicar lo que he hecho, como y por qué?	Explico con mis palabras lo que he hecho y anoto otras formas o vías de solución aportadas por los demás.	

Pensamos que en este trabajo es necesario aclarar este tipo de fases o procesos psicológicos retomados de forma más extensiva, es por ello que consideramos las propuestas de Maza (1995) y Luceño (1999), debido a que dan mayor énfasis al que hacer del alumno y manejan una postura dialéctica y reflexiva, de manera que los alumnos interactúan más con el problema a resolver.

Así mismo cabe señalar con que tipo de dificultades o factores interactúan en el alumno al momento de resolver los problemas y también determinar en que momento existen los errores, y para ello presentamos el siguiente apartado.

### **1.7.3 La resolución de problemas aritméticos y los errores.**

Es necesario retomar que la resolución de problemas aritméticos y los procesos implicados en su realización explicados en el apartado anterior cobran vital importancia para nuestro estudio, más aún si están relacionados con los errores o factores que dificultan el proceso de resolución de problemas aritméticos, por ello lo aclaramos a continuación.

En la resolución de problemas aritméticos regularmente se tiene una mayor probabilidad de que se cometa algún error, debido a que es más posible la que existencia de un error que el acierto en la resolución de algún problema, pero esto no es más que un punto a favor del aprendizaje pues este se desarrolla también en la base de la detección y corrección o rectificación del error.

Esta última idea concuerda con lo que Piaget (citado por De la Torre, 1993), afirma planteando que el error como distorsión, es un “inquilino” permanente del proceso de aprendizaje, ya que tanto el conocimiento individual como el científico se adquiere por aproximaciones adaptativas.

Más adelante el mismo De la Torre citando a Piaget afirma que el error, equivocación o distorsión están en la génesis misma de todo conocimiento, no como efecto deseable sino como posibilidad.

Por lo tanto creemos que los errores se desarrollan de manera natural y su presencia tiene la misma posibilidad, que la presencia de un acierto, teniendo los errores como un elemento inminente en el proceso de resolución de problemas aritméticos, sin embargo si se tiene mayor prioridad y atención a la rectificación o recapitulación de contenidos o las propias soluciones de los problemas teniendo como eje los errores se adquiere un proceso más fructífero y un proceso de aprendizaje más auténtico y adecuado.

En este sentido Piaget (1967), atribuye que la corrección de errores y las tareas que tienen como base las equivocaciones suelen ser más fecundas que los aciertos inmediatos, debido a que existiría una toma de conciencia y utilización de las contradicciones, absurdos y errores con objeto de facilitar la comprensión de la realidad, mejorarla o resolver problema (De la Torre, 1999), con esta idea no se pretende promover a que cometan errores lo alumnos, sino que se aprendan de ellos al momento de su aparición sin tener cierto miedo o angustia por los errores.

Ahora bien, es preciso aclarar cuales son las dificultades o los factores que propician el error que presentan los alumnos en la resolución de problemas aritméticos, para ello es posible agregar lo que Charles y Lester (citados por Luceño 1999), señalan como 3 grupos de factores que interaccionan en la tarea de resolución de problemas.

- *Factores de experiencia a nivel personal:* fundamentos matemáticos previos, familiaridad con el contexto y contenido.
- *Factores afectivos:* tensión, interés, presión, ansiedad, perseverancia, motivación.
- *Factores cognitivos:* habilidad lectora, memoria, habilidad analítica y lógica.

Nieto citado por Luceño (1999) describe 7 factores que según éstos, influyen en la resolución de problemas los cuales se mencionan a continuación:

1. *Complejidad del enunciado del problema:* la complejidad de la sintaxis, la cantidad de información proporcionada, el número de condiciones y variables que intervienen y el contenido matemático del problema.
2. *Presentación y representación del problema:* la manera en la que se plantea un problema influye en el éxito de su resolución.
3. *Familiaridad con procesos adecuados de resolución:* la experiencia previa en el uso de determinados procesos de solución.
4. *Problemas que sugieren soluciones o procedimientos engañosos:* la manera de presentar un problema puede sugerir en alguno de ellos modos de solucionarlos inadecuadamente o soluciones engañosas.
5. *Dificultad en lograr soluciones parciales:* a veces los resolutores inexpertos no saben como abordar un problema, desconfiando de sus posibilidades.
6. *Limitaciones que surgen de los conceptos erróneos o incomprensión del problema:* la falta de comprensión del enunciado del problema suele ser causa corriente para fallar en la resolución del problema, puede ocurrir que partan de una interpretación parcial del problema sin solucionarlo adecuadamente.
7. *Factores afectivos relacionados con el resoltor:* esta idea esta relacionada con la primera condición señalada por la existencia misma del problema, es decir, la necesidad o deseo del resolutor.

En esta misma línea Rico (citado por Luceño 1999) indica las dificultades más comunes en la resolución de problemas:

1. Una deficiente comprensión lectora.
2. La complejidad del texto.
3. Deficiente representación mental del problema.

4. Dificultad en localizar las metas a alcanzar que faciliten la solución.
5. Escasa familiaridad del sujeto con los procedimientos necesarios para resolver el problema.
6. La utilización de un plan inadecuado.
7. El desconocimiento del procedimiento operativo (fallos en los algoritmos).
8. Factores afectivos (ansiedad, escasa motivación).

Por otra parte Brueckener y Bond (citados por Rico 1994) aprecian las siguientes fuentes de errores en la resolución de problemas:

1. Significado de las operaciones y percepción de las relaciones entre ellas.
2. Aptitud para el cálculo.
3. Capacidad para ver las relaciones cuantitativas implicadas en los problemas verbales.
4. Dominio de ciertos tipos de lectura exigidos en la resolución de problemas.
5. Conocimiento del vocabulario aritmético.
6. Conocimientos aritméticos básicos: combinaciones, reglas y fórmulas.
7. Amplitud sobre las aplicaciones sociales de la aritmética.
8. Práctica en la resolución de problemas verbales.

Además de estos aspectos, Puente (al ser citado por Rico 1994), apunta las siguientes dificultades desde un punto de vista estilístico, el cual plasma las dificultades bajo el estilo atribucional y el estilo cognitivo y de aprendizaje:

1. Estilo atribucional. La actitud de afrontamiento del problema viene determinada por las creencias que posee el sujeto acerca del problema. Si la persona cree que el problema es fácil de resolver es probable ponga escasos recursos; si, por el contrario, piensa que el problema es difícil, utilizará muchos recursos.

2. Estilo cognitivo y de aprendizaje. La reflexividad – impulsividad, la dependencia – independencia de campo, etc. determinan como afronta la tarea el alumno a la hora de resolver los problemas.

Valles (1987), distingue las siguientes dificultades en la resolución de problemas de manera un poco más directa:

1. Desconocimiento de estrategias.
2. Dificultades en la comprensión del lenguaje.
3. Dificultades en la representación inicial de los problemas:
  - Falta de esquemas.
  - Limitaciones en las ideas previas.
  - Esquemas erróneos.
4. Dificultades en el razonamiento e inferencias.
5. Dificultades referidas al conocimiento.
6. Dificultades referidas a la memoria.
7. Dificultades propias del estilo atribucional.
  - Percepción de dificultad.
  - Autopercepción de competencia.

Bajo esta serie de factores y dificultades que influyen en la resolución de los problemas creemos que en estas se corre el riesgo de cometer errores es por esta razón que creemos necesario abarcar este tema y dar cuenta de las condiciones y los elementos con los que el alumno interactúa al enfrentarse a la tarea de resolver problemas, pues es sin lugar a dudas bajo alguna o algunas de estas circunstancias se pueden encontrar los alumnos al resolver problemas o situaciones problema.

Al ver planteados cuales son los factores y dificultades que influyen en el alumno en la resolución de problemas en el siguiente apartado nos parece oportuno aclarar a que tipo de problemas nos vamos a referir en nuestro estudio y para ello

realizamos una somera clasificación de problemas matemáticos la cual nos va dar una idea general para después seleccionar el tipo de problemas que emplearemos en la metodología.

#### **1.7.4 CLASIFICACIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS**

Es importante determinar cuales son los diferentes tipos de problemas y en especial cual es su característica principal de cada uno de ellos, podríamos decir que clasificaciones hay muchas pero en esta ocasión manejaremos aquella que inicie partiendo de lo general hasta lo particular, ante esta consigna se describe lo siguiente.

Rodríguez y Fernández (2000), señalan que dentro de los problemas en el área de las matemáticas incluyen los geométricos, los trigonométricos, los aritméticos y los algebraicos.

En nuestro estudio trabajaremos con problemas aritméticos, pero, de que tipo de problemas aritméticos.

Para contestar esta cuestión se puede plantear una clasificación de los diferentes tipos de problemas aritméticos de manera más detallada con los aportes de Luceño (1999), quien enfatiza una clasificación de 22 tipos de problemas de los cuales mencionaremos sólo 15 de éstos por razones de interés y selección del tipo o tipos de problemas que vamos a analizar y a evaluar con los alumnos en la presente investigación, dicho lo anterior plantearemos los diferentes tipos de problemas aritméticos en las siguientes líneas.

### 1.7.5 Tipología de problemas

#### 1. Problemas que requieran un análisis de la incógnita.

El alumno se encuentra frente a problemas que consistan en un cálculo directo/inmediato/mecánico de la respuesta, en vez de esto se deben utilizar problemas que exijan razonar/calcular con atención.

Ejemplo: “Luis tiene 16 pesos y María tiene 24 pesos ¿Cuántas pesos tienen en total?”. Se podría transformar en un problema no rutinario cambiando la pregunta por: “¿Tienen dinero suficiente para comprar un cuento que cuesta 50 pesos?”

#### 2. Problemas que se puedan resolver de más de una forma

A los alumnos se les deberán proponer problemas que admitan más de un método de solución. A este respecto se debe animar a los alumnos a que intenten llegar a la solución de distintas formas.

Ejemplo: “Luís posee 268 pesos. Quiere comprar un cuaderno que vale 185 pesos y un bolígrafo que cuesta 80 pesos ¿Tendrá dinero para comprar las dos cosas?”

*Primer método:*  $185+80=265$  pesos. El precio total es menor de lo que posee (268 pesos). Puede, pues, comprar las dos cosas.

*Segundo método:*  $268-185= 83$ ,  $83-80= 3$ . Después de restar el precio del cuaderno y el precio del bolígrafo, le quedan todavía 3 pesos puede, pues, comprar las dos cosas.



### 3. Problemas con demasiados datos (con datos no necesarios), con datos escasos (incompletos) o con datos incorrectos

Este tipo de problemas requiere un análisis detallado de los datos conocidos y desconocidos (incógnitas).

Las situaciones problemáticas que nos plantea la vida ordinaria no vienen acompañadas con todos y cada uno de los datos precisos para resolverlas. Separar la información necesaria de la innecesaria es una actividad útil y se refleja en el problema siguiente:

“Juan posee 30 gallinas y 8 ovejas. Luís solamente 25 gallinas. ¿Cuántas gallinas poseen los dos?”.

*Ejemplos de problemas sin datos necesarios son los siguientes:*

“En una comida se utilizaron 680 gramos de pescado para 4 personas. ¿Cuántos pesos costo la comida?”.

“Se quiere construir un depósito de agua con una capacidad de 6000 litros, ¿Qué dimensiones debe tener?”

La solución de este problema depende de muchas condiciones que no están dadas:

- a) La forma del depósito, pues puede ser, por ejemplo cilíndrico o cónico. En cada forma las dimensiones están entre sí en una relación diferente.
- b) De que material se dispone, que se gasta más o menos en dependencia de la forma y dimensiones escogidas.

Con datos incorrectos se puede proponer problemas como el siguiente:

“Pablo tiene que recorrer 125 km en bicicleta para ir de su casa al Zoológico. El primer día recorre 30 km., el segundo día 80 km. y el tercero 45 km. ¿Cuántos km. le quedan por recorrer?”

#### 4. Problemas con más de una solución posible

Los alumnos deben acostumbrarse al hecho de que algunos problemas pueden tener más de una respuesta. Son problemas que se acercan mucho a lo que ocurre en la vida real. Son más creadores e imaginativos.

“Luís va a la dulcería con 30 pesos. Los chupa-chups cuestan 5 pesos y las barras de chicle cuestan 3 pesos. ¿Qué puede comprar Luís?”.

Suele dar varias respuestas:

6 chupa-chups.

5 chicles y 3 chupa-chups.

4 chupa-chups, 3 chicles y le sobra 1 peso.

#### 5. Problemas que no tienen solución (contradictorias)

Cualquier solución que se encuentra contradice alguna de las condiciones dadas en el enunciado.

Ejemplo: “Compré 80 objetos entre gomas y lápices por 500 pesos 50 lápices a 5 pesos y las gomas a 10 pesos ¿Cuántas gomas compré?”.

Una vía de solución es calcular lo que cuestan los lápices (250 pesos) y restarlo de 500 pesos Entonces como se restó es lo que se invierte en gomas y cada una cuesta 10 pesos Se tiene que son 25 gomas. Al comprobar la solución se obtiene que  $50+25=75$  objetos que se compraron, pero eso contradice la información de que son 80 objetos.

Comprobando de nuevo tenemos que el coste de las gomas sería:

$$30 \times 10 = 300$$

Pero como los lápices cuestan 250 pesos, en total se gastaría 550 pesos y eso contradice la información de lo que se gastó 500 pesos

## **6. Problemas cuya solución está en el propio texto**

En este tipo de problemas lo que cabe es interpretarlos correctamente.

Ejemplo: “¿Cuántos juguetes habría que fabricar si se necesitan hacer 9184 y aún faltan 1, 315?”.

En estos casos se dice que la situación planteada no es realmente un problema, pues las exigencias (lo que se busca) están dadas.

## **7. Problemas que tengan el número cero como solución**

Un ejemplo puede ser:

“En un supermercado había 108 docenas de huevos, de ellos se vendieron 1, 296, ¿Cuántos huevos quedan por vender?”.

## **8. Problemas sin datos numéricos**

Este tipo de problemas sin datos es muy útil para los alumnos en los primeros niveles debido a que en este periodo se trata de lograr la comprensión de lo que hay que hacer para resolverlos, pero lamentablemente son muy poco utilizados. Ante esta contrariedad se dan algunos ejemplos:

“En una escuela se recibe una cierta cantidad de libros de lectura y se distribuye una parte a las dos clases de 1° curso. ¿Cómo se puede saber qué cantidad de libros quedan por repartir?”.

Un automovilista viaja de su casa al Bosque de Chapultepec; al mismo tiempo otro automovilista su vecino viaja del Bosque de Chapultepec a su casa. ¿Cuál

de los dos está más lejos del Bosque de Chapultepec cuando se encuentran, el primero o el segundo automovilista?”.

Están a la misma distancia del Bosque de Chapultepec cuando se encuentran.

### **9. Problemas en los que el alumno tiene que formular la pregunta o preguntas**

Ejemplo: “Luis compró un cuaderno por 60 pesos Y un lápiz por 25 pesos ¿Cuál podrá ser la pregunta? ¿Qué otras preguntas podrías realizar?”.

### **10. Problemas en los que dada la incógnita, el alumno debe completar los datos**

Ejemplos: “¿Cuánto dinero le devuelven a Rosa?”  
 “¿Cuántos pesos recibirá cada uno?”

### **11. Problemas donde dada una situación, se pide el enunciado del problema**

Ejemplos:

“Las entradas al museo costaron 260 pesos”

“La comida cuesta 300 pesos por persona y comieron 37 alumnos”

“El autobús costó 120 pesos, por cada uno de los alumnos”

A partir de las tres frases anteriores, referidas a la realización de una excursión ¿Puedes escribir tres problemas.

### **12. Problemas donde ante un conjunto de datos se solicita elegir los datos que encajan con la pregunta del problema**

Ejemplo: “Tenían 50 pesos, Su hermano Juan gastó 146 pesos”

“Anduvo 5 km”.

“Compró un lápiz por 80 pesos Y un cuaderno por 20 pesos”.

“Su tía le regalo 145 pesos”.

“¿Cuántos pesos le sobraron?”.

**13. Problemas donde, ante un conjunto de datos y preguntas se tiene que encajarlos para formular uno o varios problemas**

Ejemplo: Con las siguientes frases escribe 2 problemas:

“Luís ha comprado 4 chicles de 3 pesos cada uno”.

“En un autobús van 80 pasajeros”.

“Tenían 25 pesos”.

“Se bajan en una parada 25 pasajeros”.

“¿Cuántos pesos le sobraron?”

“¿Cuántos viajeros quedaron en el autobús?”

**14. Problemas donde, dada la operación u operaciones los alumnos tienen que formularlos**

$$6 \times 12 = 72$$

$$25 + 34 + 46 = 105$$

$$75 \times 5 = 375$$

$$105 - 28 = 77$$

Ejemplo: Escribe problemas que se resuelvan con estas operaciones.

**15. Proponer situaciones problemáticas de las que sean posibles formular varias preguntas**

Ejemplo: El equipo (x) ganó 12 partidos de 30 jugadores.

El equipo (y) ganó solo 8 partidos.

- ¿ Cuántos partidos perdió el equipo (x)?
- ¿Cuántos partidos perdió el equipo (y)?
- ¿Cuántos partidos ganó más el equipo (x) que el (y)?
- ¿ Cuántos partidos perdió más el equipo (y) que el (x)?
- ¿Cuántos partidos ganaron entre los dos?
- ¿Cuántos partidos perdieron entre los dos?

En el cuadro 3 se describen a manera de resumen, los tipos de problemas explicados anteriormente.

**Cuadro 3 Tipología de problemas Aritméticos**

Tipo de Problema	Características	Ejemplo
1. Problemas que requieran un análisis de la incógnita.	Su resolución exige razonar y calcular con atención.	“Luis tiene 16 pesos y María tiene 24 pesos “. ¿Tienen dinero suficiente para comprar un balón que vale 50 pesos?”
2. Problemas que se puedan resolver de más de una forma.	Sugieren más de un método para resolverlos y se solucionan de formas distintas.	“Luis posee 268 pesos Quiere comprar un cuaderno que vale 185 pesos y un bolígrafo que cuesta 80 pesos ¿Tendrá dinero para comprar las dos cosas?”
3. Problemas con demasiados datos (con datos no necesarios), con datos escasos (incompletos) o con datos incorrectos.	Requiere un análisis detallado de las incógnitas y los datos del problema.	“Juan posee 30 gallinas y 8 ovejas. Luis solamente 25 gallinas. ¿Cuántas gallinas poseen entre los dos?” “En una comida se utilizaron 680 gramos de pescado para 4 personas. ¿Cuántos pesos costó la comida?”
4. Problemas con más de una solución posible.	Se acercan mucho a la realidad y son más creadores e imaginativos en los alumnos para fomentar respuestas.	“Luis va a la tienda con 30 pesos. Los chupachups cuestan 5 pesos y las barras de chicle cuestan 3 pesos. ¿Qué puede comprar Luis?”
5. Problemas que no tienen solución (contradictorios).	La solución encontrada contradice alguna de las condiciones dadas en el enunciado.	“Compré 80 objetos entre gomas y lápices por 500 pesos 50 lápices a 5 pesos y las gomas a 10 pesos ¿Cuántas gomas compré?”
6. Problemas cuya solución está en el propio texto.	Sólo es necesario interpretarlos correctamente.	“¿Cuántos juguetes habría que fabricar si se necesitan hacer 9184 y aún faltan 1315?”.
7. Problemas que tengan el número cero como solución	El único resultado será cero.	“En un supermercado había 108 docenas de huevos, de ellos se vendieron 1296, ¿Cuántos huevos quedan por vender?”
8. Problemas sin datos numéricos	Útiles en los primeros niveles debido a que tratan de lograr la comprensión de lo que hay que hacer para resolverlos	“En una escuela se recibe una cierta cantidad de libros de lectura y se distribuye una parte a las dos clases de 1° curso. ¿Cómo se puede saber qué cantidad de libros queda por repartir?”
9. Problemas en los que el alumno tiene que formular la pregunta o preguntas	La incógnita es la pregunta del problema.	“Luis compró un cuaderno por 60 pesos y un lápiz por 25 pesos ¿Cuál podrá ser la pregunta? ¿Qué otras preguntas podrías realizar?”

10. Problemas en los que dada la incógnita, el alumno debe completar los datos.	Es necesario que el alumno pueda completar el problema con los datos necesarios.	“¿Cuánto dinero le devuelven a Rosa?” “¿Cuántos pesos recibirá cada uno?”
11. Problemas donde dada una situación, se pide el enunciado del problema.	Se ofrece una respuesta y se exige la formulación del problema.	“Las entradas al museo costaron 260 pesos” A partir de la frase anterior, que trata de una excursión, ¿puedes escribir un problema?.
12. Problemas donde ante un conjunto de datos se solicita elegir los datos que encajan con la pregunta del problema.	Se tienen que relacionar las situaciones con las respuestas que se ofrecen.	“Tenían 50 pesos, su hermano Juan gastó 146 pesos” “Anduvo 5 km”. “Compró un lápiz por 80 pesos y un cuaderno por 20 pesos”. “Su tía le regaló 145 pesos”. “¿Cuántos pesos le sobraron?”.
13. Problemas donde ante un conjunto de datos y preguntas se tiene que encajarlos para formular uno o varios problemas	Exigen la construcción del problema al relacionar los datos y las preguntas dada la situación.	Con las siguientes frases escribe 2 problemas: “Luis ha comprado 4 chicles de 3 pesos cada uno”. “En un autobús van 80 pasajeros”. “Tenían 25 pesos”. “Se bajan en una parada 25 pasajeros”. “¿Cuántos pesos le sobraron?” “¿Cuántos viajeros quedaron en el autobús?”
14. Problemas donde dada la operación u operaciones los alumnos tienen que producir los problemas.	Como requisito principal se debe utilizar los datos propuestos al momento de formular los problemas.	Escribe problemas que se resuelvan con estas operaciones. $6 \times 12 = 72$ $25 + 34 + 46 = 105$ $75 \times 5 = 375$ $105 - 28 = 77$
15. Proponer situaciones problemáticas de las que sean posibles formular varias preguntas.	De una situación comparativa o relacional se derivan diferentes preguntas.	El equipo (x) ganó 12 partidos de 30 jugados. El equipo (y) ganó solo 8 partidos. ¿Cuántos partidos perdió el equipo (x)? ¿Cuántos partidos perdió el equipo (y)? ¿Cuántos partidos ganó más el equipo (x) que el (y)? ¿Cuántos partidos perdió más el equipo (y) que el (x)? ¿Cuántos partidos ganaron entre los dos? ¿Cuántos partidos perdieron entre los dos?

## 1.8 Delimitación del tipo de problemas aritméticos para el estudio

Es conveniente en estos momentos determinar con que herramientas trabajamos y para ello pensamos que también es relevante mencionar a que se debe la elección de estas.

Bajo el orden de estas dos ideas propusimos trabajar con los problemas aritméticos en donde promueva el aspecto de la comprensión y el factor creativo de los errores, es decir se puede retomar el efecto constructivo de los errores que pueden existir en la resolución de un problema, bajo un ambiente de reflexión y análisis, en caso de que se cometan errores.

Ahora cómo se lograría esto, contestando esta cuestión pensamos en problemas de carácter analítico y reflexivo donde se realice una comprensión del problema para su resolución, y así de esta manera el alumno al estar resolviendo dicho problema y encontrarse con ciertos errores determine que éstos no solo sirven para saber si esta bien o mal y ser castigado e inaceptado. Sino que también sirven para darse cuenta del proceso de resolución en si y determinar un mejor dominio de la estrategia y su aplicación una vez que se hayan corregidos, autocriticado y rectificado los errores cometidos.

Los problemas que pensamos manejar en nuestro estudio son:

- a) Problemas que requieran un análisis de la incógnita.
- b) Problemas que se puedan resolver de más de una forma.
- c) Problemas con más de una solución posible.

No utilizamos otro tipo de problemas debido a la preocupación planteada desde nuestro marco teórico referente al poco aprovechamiento que se le atribuye a los errores, aunque existan problemas donde se observen más los errores, nosotros consideramos que la selección de estos tipos de problemas se debe a la



importancia y alcance que estos pueden atribuir a la enseñanza de las matemáticas.

Desde estos dos factores encontramos que la base de estos tres tipos de problemas son el razonamiento y análisis matemático, mismas bases las podemos promover a través de la motivación en los alumnos al plantear los problemas con cierta incertidumbre y con la idea de mejorar la actitud hacia las matemáticas aprovechando el rol positivo de los errores.

También los problemas que emplearemos implican la resolución de manera individualizada y personalizada con respecto al problema es por esta razón que incluimos este tipo de problemas.

Al respecto Gascón (2000), afirma que en base a la cultura escolar existen como ideas dominantes la recomendación de lo siguiente:

“Motivar a los alumnos y conseguir que mejoren su actitud respecto a las matemáticas y su aprendizaje es una de las responsabilidades principales del profesor de matemáticas y constituye uno de los factores que determinan el éxito o el fracaso de la enseñanza de las matemáticas”.

“La educación matemática debe tender hacia una enseñanza cada vez más individualizada y personalizada”. Esto es en cuanto a la atención de alumnos que requieran de más tiempo o explicaciones detalladas.

Ante estas ideas podemos decir que los problemas que proponemos podrán tener el alcance de motivar al alumno para cambiar de actitud hacia las matemáticas y además se puede concebir la idea de que la enseñanza basada en estos problemas tiende a promover un aprendizaje individual y personalizado como se aclara en los problemas propuestos.

Con respecto a la primera recomendación de Gascón (2000), Tahan (1980) en este mismo sentido considera que se debe promover problemas que despiertan el interés, sea por el enunciado o por lo ingenioso de las soluciones, pues en los problemas que aclararemos en las siguientes situaciones problema la solución no es generalmente la que primera que se nos ocurre.

Esta índole de problemas en las clases de enseñanza media constituye un valioso expediente al cual debe recurrir el profesor para hacer sus clases más amables, interesantes y atractivas (Tahan, 1980).

Por otra parte hemos seleccionado estos problemas porque se considera que implican una comprensión, la cual va a surgir del análisis del problema en el momento en que el alumno se enfrenta a las situaciones problema. En este sentido Orrantia (2003), al hablar de estrategias de comprensión en la resolución de problemas afirma que cuando uno se enfrenta a los problemas busca números conjuntos y relaciones entre conjuntos.

Por lo tanto la representación proposicional (problemas aritméticos) o texto base recoge la esencia que clarifica los conceptos y las relaciones que se mencionen en el texto.

Aunque en ciertos casos también es necesario hacer inferencias puede que sirvan para conectar las proposiciones entre sí. Lo cual supone comprender cada una de las frases trasladándolas a una representación proposicional en la que se recogen los aspectos esenciales y asegurando la conexión lineal entre ellas.

Paralelamente a esta representación proposicional se va creando el modelo de la situación problema, una representación mental de la situación descrita en el enunciado. Este componente es clave en la comprensión del enunciado, y en el se recogen las inferencias necesarias para resolver el problema y que no aparecen en el texto base.

## **CAPÍTULO II**

### **MÉTODO**

#### **2.1 Sujetos**

Se trabajó con un grupo de 30 alumnos, 15 mujeres y 15 hombres, de primero, segundo y tercero grados de educación secundaria pertenecientes al turno matutino.

Se trabajó con 10 alumnos, 5 alumnas y 5 alumnos por cada grado con edades comprendidas entre los 11 y los 15 años.

#### **2.2 Escenario**

Se realizaron las actividades de investigación en una escuela secundaria oficial ubicada en la zona oriente del municipio de Chimalhuacán, Estado de México.

Se utilizó como escenario una aula debidamente acondicionada con un escritorio y dos sillas una para el experimentador y otra para el alumno, en dicha aula se contemplaron las condiciones necesarias para la instalación de una vídeo cámara, y el espacio suficiente para realizar las actividades programadas.

#### **2.3 Diseño de investigación**

Se realizó un estudio exploratorio de tipo explicativo; tal como nos afirma Hernández (1998), estos estudios se centran en explicar por qué ocurre un fenómeno y en qué condiciones se da éste, o por qué dos o más variables están relacionadas, y proporcionan un sentido de entendimiento del fenómeno a que hacen referencia.

Para la realización de este estudio se aplicó el Método de Exploración Crítica debido a que nuestra investigación exigía un método que pudiera relacionar las exigencias de una experimentación con las adquisiciones no observables.

Por tal motivo es conveniente utilizar en nuestro estudio un método que intente cubrir la expectativa mencionada y para ello emplearemos el método de exploración crítica, el cual ha sido empleado ampliamente desde hace muchos años y ha resultado muy fructífero para estudiar el desarrollo cognoscitivo del niño, esta forma de trabajar con los sujetos proviene del método clínico propuesto por Piaget (1937), el cual provoca en los trabajos de experimentalistas estrictos, reacciones que van desde un divertido asombro, hasta el más profundo escepticismo (Inhelder, 1996).

El mismo Piaget, al formular dicho método insiste en aclarar que “este método crítico consiste siempre en conversar libremente con el sujeto, en lugar de dedicarse a cuestiones fijas y estandarizadas debido a que conserva casi todas las ventajas de una entrevista adaptada a cada niño y destinada a permitir el máximo aprovechamiento de las interacciones para la toma de conciencia y de formulación de sus propias actitudes ante las diferentes situaciones.

Otras características del método en cuestión es que al ser aplicado, se elaboran ideas centrales, se pueden variar las condiciones que están en juego, se puede controlar las hipótesis en contacto con las reacciones provocadas, y el examinador se deja dirigir al mismo tiempo que dirige. Tomando en cuenta las habilidades del sujeto, también se utilizan en el método contra ejemplos destinados a la demostración de argumentos en el razonamiento experimental del niño. (Vinh-Bang, 1992).

Esta variación o transformación de las situaciones experimentales permite observar en el niño la manera en que justifican sus razonamientos aún pese a los cambios en la situación o contra ejemplos dados por el entrevistador, así como también pone de relieve la forma en que los niños reconstruyen o no en su pensamiento estas transformaciones para que puedan determinar su respuesta (Castorina, 1988). Para obtener una mayor información acerca de este tipo de método, (ver anexo 1).

A continuación se plantea la aplicación de las situaciones que implican la resolución de un problema aritmético, en las cuales se utilizó dicho método.

## **2.4 Aplicación de las situaciones en la entrevista**

En este bloque se menciona de manera particular cuál es el procedimiento de aplicación de las situaciones en la entrevista, para dar una idea general acerca de cómo se desarrollaron las interacciones entre el entrevistador y el sujeto, para ello primero se menciona la secuencia en que se trabajó con los alumnos y después se expone cada situación en particular.

### **2.4.1 Secuencia de aplicación de situaciones en la entrevista**

1. Se presenta al alumno el problema de manera oral.
2. Se presenta al alumno el problema de forma escrita.
3. El alumno resuelve la situación problema recomendándole que no elimine equivocaciones (tratar de evidenciar sus errores y no negarlos).
4. El alumno expone su respuesta.
5. El experimentador contrargumenta para reafirmar en el alumno la respuesta correcta o aclarar la respuesta incorrecta.
6. El experimentador proporciona al sujeto los materiales para que mediante una situación concreta pueda resolver las dudas y comprobar o sustituir su respuesta.

Ahora se procede a explicar el procedimiento de aplicación por cada situación:

### **Primera situación**

En esta situación se propone al alumno que resuelva un problema aritmético que requiere el análisis de una incógnita. En el problema el alumno tiene que enfrentarse

a una situación en donde realizará un cálculo aritmético.

Se le presenta al alumno el siguiente problema (tomado de Tahan, 1980); de manera verbal y posteriormente de manera escrita.

El problema del sastre

“Un sastre tiene un trozo de tela que va a cortar y mide 12 metros de largo, pero en su trabajo sólo le permiten cortar 2 metros por día, es decir cada día sólo puede cortar 2 metros, y de pronto surge la pregunta: ¿Cuántos días tarda el sastre en cortar completamente esta pieza?”

Experimentador: “Esta misma situación la tienes escrita en esta ficha” (se le da una ficha que contenga escrita la misma situación).

Experimentador: “Te pido por favor, si crees que al buscar la respuesta te equivocas, no borres ni hagas rayones (para evidenciar el error), sólo utiliza otra ficha y listo, continúa.”

Respuesta del alumno \_\_\_\_\_

El niño resuelve el problema y se le da la siguiente instrucción:

“Ahora explícame cómo llegaste a esa solución, pero como si tú fueras el maestro y yo el alumno”.

"Lo siguiente es que realices una explicación pero ahora de manera escrita, con palabras o con dibujos, como sí le explicarás a uno de tus compañeros,”.

Si el alumno da una respuesta correcta (5 días), se le dirá un contraargumento diciendo que “pero si uno de tus compañeros me dijo que la respuesta correcta es en 6 días, ¿tú qué le dirías?”.

Y por el contrario, si el alumno da una respuesta incorrecta se le planteará un contraargumento, pero determinando la respuesta correcta de antemano, algo como: "Otro compañero no recuerdo su nombre me dijo que la respuesta correcta era en 5 días" (agregando porque en el quinto día se restan 4 metros por cortar y basta con hacer un sólo corte para terminar de cortar el trozo de tela completamente).

Dada su respuesta, se le presentó al alumno el siguiente material con el fin de que observe la situación y pueda llegar a la respuesta de manera empírica.

Un trozo de tela o cartulina de 12 cm

Una regla de 30 cm

Un gis para que realice trazos sobre la tela

Tijeras

Papel y lápiz

Entregado el material se le indicará:

“Mira aquí este material. Puedes utilizarlo para verificar tu respuesta o simplemente para encontrar la solución a la pregunta planteada”.

Con esta situación planteada de forma concreta, se pretende encontrar algún tipo de error cometido por el alumno a fin de hacerle ver que así puede estar más seguro al verificar el problema de manera y también puede corregir los errores aprendiendo de ellos. Por otra parte, podemos observar la solidez de sus respuestas y la manera de argumentar al momento de plantearle contraejemplos.

### **Segunda situación.**

En esta situación se tiene como objetivo que el alumno resuelva un problema verbal con una incógnita. Dicho problema presenta algunas variaciones de la situación.

Se le presenta al alumno el siguiente problema de manera verbal y posteriormente de forma escrita en una ficha.

El vendedor de aceite

“Un comerciante vende al día 10 botellas de aceite a \$9 pesos cada una.

¿Cuánto ganará en la venta de todas las botellas de aceite durante 5 días?”

Dada su respuesta se le pide al alumno que describa como logro llegar a la solución de manera verbal y de forma escrita.

Si el alumno responde con la respuesta correcta, que sería \$450 pesos se le plantea una contrargumentación, (diciendo que es otra cantidad por ejemplo es de \$456 o \$445 pesos).

Por el contrario, si el alumno responde en forma errónea se le plantea un contra ejemplo con la respuesta correcta para conocer su razonamiento matemático.

### **Segunda situación con variación**

Siguiendo con el mismo problema, se le planteó al alumno lo siguiente:

“Ese mismo comerciante se hace algunas preguntas:

¿Cuánto ganará si compra 50 botellas y las vende en 8 pesos durante 10 días?

¿Cuánto perdería si en vez de trabajar esos 10 días sólo trabajara 3?

Dada la explicación de su respuesta se realiza el mismo ejercicio de contraargumentación arriba descrito. En esta ocasión las respuestas correctas 400 y 280 pesos, respectivamente.



### **Tercera Situación**

Esta situación al igual que la anterior, pretende generar en el alumno un análisis de la incógnita donde se pueda observar su razonamiento lógico y determinar si presenta errores al resolver el problema.

Al alumno se le presenta el siguiente problema de manera verbal, posteriormente escrita en una tarjeta y por último se ofrecerá material para su manipulación.

La sombra de la vela

Una vela mide 15 centímetros de largo, pero su sombra es 45 centímetros más larga.

¿Cuántas veces la sombra es más de lo que mide la vela?

Una vez que efectuó su respuesta el alumno posteriormente se le pide que explique como llegó al resultado de manera verbal y también de manera escrita.

Cuando ya dio su explicación, se prosigue a realizar una contraargumentación de sus respuestas, y en caso de ser correcta, es decir que su respuesta sea “4 veces” (porque si se dice que es 45 cm más lo de la vela que son 15 como resultado sería 60, y 15 cabe cuatro veces en 60), se maneja un contraejemplo incorrecto diciendo que son 3 veces.

En caso de que conteste de manera incorrecta se le propone un contraargumento con la respuesta correcta explicando el análisis ya mencionado.

Por último, se ofrece una situación en forma concreta empírica para que el alumno de esta manera compruebe o llegue a la solución correcta. Para ello se le presenta un dibujo a escala, de una vela que mide 15 cm y tiene una sombra en

forma horizontal que mide 60 cm; en vez de los supuestos 45 cm aclarados en la situación problema.

Se ofrece al alumno la regla, plumón y lápiz para que realice mediciones de la vela y la sombra.

### **Cuarta situación**

Esta situación tiene la finalidad de que el alumno logre hacer un análisis de la incógnita del problema el cual se ofrecerá de manera verbal y de manera escrita únicamente.

El alumno recibe el siguiente problema:

Canicas ganadas

Juan ganó 7 canicas por la mañana, perdió 3 canicas por la tarde y ganó 5 canicas al día siguiente, y además se encontró 4 canicas más.

¿Cuántas canicas ganó Juan?

Posteriormente se le da al alumno una tarjeta donde está escrito este mismo problema.

Dada la respuesta del alumno se procede a la contraargumentación de su respuesta, y en la misma línea del problema de arriba se contraargumentan las respuestas correctas con incorrectas y las respuestas incorrectas se contraponen con las correctas, en este caso la respuesta correcta es 12 canicas porque lejos de decir cuántas le quedaron o le restan, la pregunta sólo dice cuántas ganó.

## **2.5 PROCEDIMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN**

Previamente seleccionaron a 10 sujetos por cada uno de los grados de secundaria.

El instrumento que se aplicó fue el conjunto de situaciones que se describieron de manera más detallada en los párrafos anteriores.

Al ser aplicadas las entrevistas se logró realizar una clasificación de los errores en base a la propuesta de De la Torre (1999), ésta se aclara a mayor detalle en la tabla 2.5.1.

Por último se llevo a cabo un análisis de éstos datos con la finalidad de detectar y explicar los errores cometidos, y de esta forma dar paso a las conclusiones en base a un análisis y una evaluación de estos errores.

Ante la importancia que adquiere la recolección y el análisis de datos se aclara lo siguiente.

### **2.5.1 Recolección de datos.**

La recolección de los datos se consiguió llevando a cabo la filmación de toda la entrevista realizada al alumno en forma individual, y para lograrlo se instaló una cámara de video.

También se recolectaron algunas producciones escritas por los alumnos al momento de la entrevista las cuales se incluyen en nuestro análisis.

La forma en que se intentaron medir los errores se plasmó desde un nivel nominal en el que simplemente se sustituyen los objetos reales por símbolos, números, nombres. Esta clasificación de los elementos de un universo de acuerdo a determinados atributos o características, da a la medición un significado más cualitativo que cuantitativo (Padua, 1996).

Este mismo autor aclara que en este nivel se asignan símbolos o signos al atributo del objeto o conjunto de objetos que se desea medir, con la condición básica de no asignar el mismo signo a categorías que son diferentes; o diferentes signos a la misma categoría. Por medio de esta medición simplemente diferenciamos a los objetos de acuerdo con la categoría a la que pertenecen.

### **2.5.2 Análisis de resultados bajo el Modelo de Análisis Didáctico de los Errores (MADE) propuesto por De la Torre (1993).**

Se cree necesario agregar en el análisis de información otra forma de trabajar los datos o errores observados en el método de exploración crítica y para lograrlo se plantea una tabla de análisis inspirada en el Modelo de Análisis Didáctico de los Errores (MADE), avalado por De la Torre (1999) el cual nos indica que los errores pueden ser analizados en tres diferentes momentos: 1) En la entrada de la información, 2) En la organización de la información dentro del proceso de resolución, y, 3) En la ejecución de operaciones en la resolución de problemas.

En este análisis se propone una lista de posibles errores que puede presentar el niño en cada situación especificando que tipo de error comete, aclarando algunos ejemplos y determinando en que momento cometió dicho fallo.

En la siguiente tabla (2.5.1) se presentan los errores que pueden cometer los alumnos en un determinado momento mientras resuelven las situaciones problema.

Esta tabla se utilizó como referencia para clasificar los errores definidos por dicho autor observando la existencia de los mismos en la entrada, organización y ejecución de las operaciones cometidos por el alumno.

El formato de clasificación de errores se puede ver en el anexo 6.

**TABLA 2.5.1 ANÁLISIS DE RESULTADOS BAJO EL MODELO DE ANÁLISIS DIDÁCTICO DE LOS ERRORES (MADE) PROPUESTO POR DE LA TORRE (1993).**

Sujeto y Escolaridad	Situación 1ra	1.- Presencia de errores en la entrada de la información.	2.- Presencia de errores en la organización del proceso de resolución de problemas.	3.- Presencia de errores en la ejecución de operaciones en la resolución.
Juan 12, 5 meses 1º	El problema del sastre	<p>1.1.- Indefinición de metas: El alumno no sabe lo que se le pide.</p> <p>1.2.- Incomprensión o confusión del objetivo: El alumno no comprende lo que se le pregunta.</p> <p>1.3.- Desvío de la meta o confusión de objetivos: El alumno hace tareas o ejercicios ajenos al objetivo o pregunta planteada.</p> <p>1.4.- Omisión de la información: El alumno no toma en cuenta todos los datos.</p> <p>1.5.- Entorpecimiento por redundancia o saturación de información: El sujeto al repetirle o saturarle la información hace que no la integre adecuadamente.</p> <p>1.6.- Distorsión: Se dan cuando la información no se domina, es poco clara ambigua, imprecisa o ajena a los intereses del alumno."El niño ve lo que ya sabe, para indicarnos que percibe lo que ha asimilado y distorsiona lo que no domina" Piaget , (citado por De la Torre, 1993).</p> <p>1.7.- Incomprensión de información: El alumno no reconceptualiza ni se crea un significado o expresión diferente con sus propias palabras teniendo problemas en la Incomprensión léxica-palabras o expresiones.</p> <p>1.7.1 Incomprensión Conceptual: Significado de estas palabras o signos.</p>	<p>2.1.- Errores de análisis y síntesis.</p> <p>2.1.1 No separa los datos ni los relaciona.</p> <p>2.1.2 No diferencia lo relevante y lo irrelevante.</p> <p>2.2.- Errores de ordenación.</p> <p>2.2.1 Inadecuada relación o secuenciación de la información.</p> <p>2.2.2 No existe sentido en las relaciones hechas o establecidas, (altera el orden pertinente o conveniente de la información).</p> <p>2.3.- Errores de conexión e interferencia.</p> <p>2.3.1 Desajuste y dificultad en integrar la experiencia de resolución de ciertos problemas a problemas o situaciones nuevas rechazándolas.</p> <p>2.3.2 Se hace cualquier variación y traslada las estrategias ya conocidas y utilizadas a problemas nuevos.</p> <p>2.3.3 Dificultad de proyectar estrategias utilizadas a situaciones problema diferentes, y a nuevas, con variaciones.</p>	<p>3.1.- Errores mecánicos.</p> <p>3.1.1 Omisión de letras alteración o sustitución de un signo por otro en la resolución, abundante cuando se precipita la tarea o premura de tiempo.</p> <p>3.2.- Errores Operativos o de despiste al hacer operaciones o ejecutar procedimientos.</p> <p>3.2.1 Confunde los signos de operaciones utiliza + para multiplicar o multiplica cuando debe sumar o dividir.</p> <p>3.2.2 Los despiste (perderse en el camino) presenta confusión o alteración en el orden de pasos u operaciones para resolver el problema.</p> <p>3.3.- Errores estratégicos</p> <p>3.3.1 Equivocación en la utilización de la estrategia adecuada para la resolución de un problema o situación problema nueva.</p> <p>3.3.2 El alumno utiliza un procedimiento inapropiado en la solución de un problema.</p>

El cuadro antes descrito muestra una manera de cómo poder clasificar los errores según el enfoque de De la Torre (1993), y para ello se presentan una serie de características por las cuales se pueden diferenciar los errores unos de otros en tres diferentes momentos según su orden de aparición.

En un primer momento, hace referencia a los errores cometidos en la entrada de la información en el cual el sujeto realiza el primer manejo de los datos y determina la naturaleza del problema, en dicho momento pueden surgir dificultades o errores de indefinición de metas, de incomprensión o confusión del objetivo o errores de omisión (no tomar en cuenta algún dato).

En un segundo momento en el que se puede ubicar los errores, si aparecen, es en el momento de la organización del proceso de resolución de problemas, por medio del cual se pueden cometer errores de análisis y síntesis de datos, relación, orden, y hasta manifestar la dificultad de aplicar estrategias ya utilizadas a diferentes situaciones problemas.

En el tercer y último momento, planteado como la ejecución de las operaciones para la resolución, se clasifican los errores en la parte de la resolución de las operaciones, en el cual el alumno puede manifestar errores desde el momento en que efectúa una alteración o sustitución de los datos hasta la equivocación en la aplicación de la estrategia adecuada que se emplea para resolver la situación problema.

## CAPÍTULO III

### Análisis de datos

En este apartado se presenta un análisis de cada una de las situaciones aplicadas en nuestro estudio.

Inicialmente se presenta un análisis cuantitativo para aclarar las frecuencias y porcentajes de cada tipo de respuesta; esto nos dará la pauta para determinar cuántos errores se cometieron en las situaciones planteadas.

Posteriormente se presenta un análisis cualitativo en el cual se realiza una descripción y explicación de las respuestas encontradas.

Por último se llevó a cabo un análisis comparativo de las situaciones presentadas.

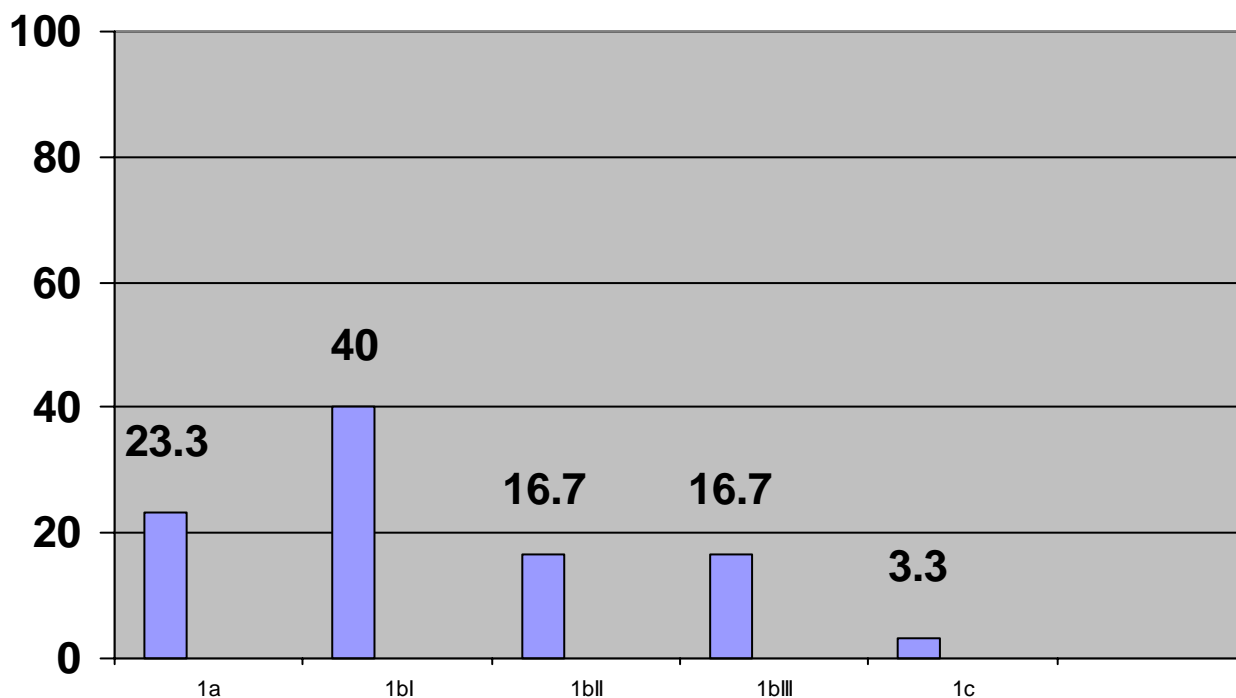
A continuación presentamos el análisis cuantitativo de la primera situación para plantear las frecuencias encontradas en las respuestas emitidas por los sujetos.

### Análisis cuantitativo de la 1<sup>o</sup> situación

En este análisis cuantitativo presentamos la frecuencia del tipo de respuestas halladas sin error y con error, las cuales se observan en la siguiente tabla.

Respuestas 1<sup>o</sup> Situación “El problema del sastre”

Respuestas		Frecuencia	Porcentaje %
Sin error	1a) Respuesta correcta a través de la suma iterada (2) se suma cinco veces 2 metros.	7	23.3
Con error	1bI) Multiplica 2 m x 6 días =12m dando como resultado el trozo total de la tela.	12	40.0
	1bII) Divide el trozo de tela (12m) entre 2 m de cada día, dando como resultado 6 días.	5	16.7
	1bIII) Suma iterada de (2) por cada día.	5	16.7
	1c) Multiplica la medida de la tela (12m) por 1 día obteniendo como resultado 12 días.	1	3.3
<b>TOTALES</b>		<b>30</b>	<b>100.0 %</b>



En la presente gráfica se observa que del total de los sujetos el 23.3% obtuviera respuestas correctas (sin error) mientras que el 76.7% obtuviera respuestas incorrectas (con errores), de estas últimas se encontraron 2 respuestas distintas 12 días y 6 días; de ésta última respuesta se encontraron tres variaciones en la resolución del problema abarcando casi el total de las respuestas incorrectas con un 73.3%, por otro lado para la respuesta “12 días” sólo se presentó en un caso con un 3.3%.

También se puede observar que la respuesta de mayor frecuencia ante este tipo de situación es dar como resultado “6 días” (respuesta con error) con 21 casos, debido a que los alumnos tienen una tendencia a dar una respuesta concreta que relacione los datos sin realizar un análisis de las condiciones en que se plantea la situación.

En cuanto a la respuesta de menor frecuencia la respuesta sin error “5 días” la cual solo se presenta en siete casos de treinta, en los cuales los sujetos tienden a



responder de manera más analítica relacionando todos los datos y las condiciones en que se esta presentando la situación.

Cabe mencionar que se presentó un caso aislado de respuesta (12 días) en la cual no se compara ni se relacionan los datos adecuadamente, además de que no se acerca a la tendencia de respuesta que la mayoría de los sujetos obtiene ante la pregunta implicada en la situación. (Ver anexo 1)

Al ser aclarados los datos de las frecuencias es necesario plantear una descripción y explicación de las respuestas y los errores cometidos ante la 1º situación implicados en el análisis cualitativo de estos datos.

1a. Respuesta correcta a través de la suma iterada (2) se suma cinco veces 2 metros.

En esta resolución los sujetos analizan la situación problema desde el inicio, hasta el final de los cortes, en la cual se suma cinco veces 2 metros, realizando una suma iterada (de 2m), relacionando el dato de la tela y el tiempo; por otro lado toma en cuenta que en el quinto día se hace un corte doble puesto que los últimos dos metros ya están cortados dando como respuesta 5 días lo cual es correcto. A continuación se presenta un ejemplo de esta respuesta.

Entrevistador	Guadalupe 13; 02 (2º grado)
<p>“El problema del sastre”</p> <p>Un sastre tiene un trozo de tela que va a cortar y mide 12 metros de largo, pero en su trabajo sólo le permiten cortar dos metros por día, es decir cada día sólo puede cortar 2 metros: ¿Cuántos días tarda el sastre en cortar completamente esta pieza.</p>	Cinco días
Explícame como llegaste a esa respuesta	Porque se supone que en el primero corta 2, en segundo otros 2, en el tercero otros 2, en el cuarto otros 2, en el quinto otros 2 entonces como el último trozo ya lo cortó pues ya son los 12 metros.

<p>Ahora lo puedes escribir</p>	<p>“Porque en el 1er día corta 2m, en el 2do otros dos, en el 3ro otros 2, en el 4to otros 2, en el 5to otros 2 más, se acompletan 10m pero como ya corto el 5to trazo ya el último para que sean doce m ya lo corto en el último día.”</p>
---------------------------------	---

1bl. Multiplica 2 m x 6 días =12m dando como resultado el trozo total de la tela.

En esta forma de resolución el sujeto multiplica la medida de la tela que puede cortar en un día (2m) por el número de días (6) obteniendo como resultado 6 días.

A continuación se presenta un ejemplo:

<p>Entrevistador</p>	<p>Daniela 12; 04 (1 ° grado)</p>
<p>“El problema del sastre” Un sastre tiene un trozo de tela que va a cortar y mide 12 metros de largo, pero en su trabajo sólo le permiten cortar dos metros por día, es decir cada día sólo puede cortar 2 metros: ¿Cuántos días tarda el sastre en cortar completamente esta pieza.</p>	<p>Seis días</p>
<p>Explícame como llegaste a esa respuesta</p>	<p>Aquí yo multiplique 2 x 6 y nos da 12, son los 12 metros que tiene el sastre de tela.</p>
<p>Ahora lo puedes escribir</p>	<p>Respuesta: <math>6 \times 2 = 12</math> metros de tela. Yo multiplique <math>6 \times 2</math> lo que me salió de la multiplicación fue 12 entonces esos 12 son los metros de tela que va a cortar.</p>

1bII. Divide el trozo de tela (12m) entre 2 m de cada día, dando como resultado 6 días.

En este tipo de respuesta el sujeto lleva a cabo su procedimiento mediante una división de la medida del total del trozo de tela (12m) entre la cantidad de tela que puede cortar por día (2m) y sin tomar en cuenta otro dato obtiene como resultado 6 días para cortar el trozo de tela completamente.

A continuación se presenta un ejemplo:

Entrevistador	Aremita 12; 11 (1º grado)
<p>“El problema del sastre”</p> <p>Un sastre tiene un trozo de tela que va a cortar y mide 12 metros de largo, pero en su trabajo sólo le permiten cortar dos metros por día, es decir cada día sólo puede cortar 2 metros: ¿Cuántos días tarda el sastre en cortar completamente esta pieza.</p>	Seis días
Explícame como llegaste a esa respuesta	Los 12 m se dividen entre 2 y ya sale en 6, en 6 días.
Ahora lo puedes escribir	6 días, los 12 metros se dividen en 2. $12 / 2 = 6$

1bIII. Suma iterada de (2) por cada día.

En estas respuestas los sujetos reflexionan únicamente en la medida de la tela que puede cortar por día (2m) sumando 6 veces ésta medida, utilizando una suma iterada de la medida de la tela que puede cortar por cada día 2 metros hasta llegar a la medida del trozo de tela que se cortara inicialmente (12m).

Ahora presentamos un ejemplo de esta respuesta:

Entrevistador	Raúl 12; 10 (1º grado)
<p>“El problema del sastre”</p> <p>Un sastre tiene un trozo de tela que va a cortar y mide 12 metros de largo, pero en su trabajo sólo le permiten cortar dos metros por día, es decir cada día sólo puede cortar 2 metros: ¿Cuántos días tarda el sastre en cortar completamente esta pieza.</p>	Seis días
Explícame como llegaste a esa respuesta	Porque sumando 2, 6 veces da a 12.
Ahora lo puedes escribir	6 días, sume 6 veces 2 y el resultado fue 12 y llegue a la conclusión de que 6 días tardó el sastre en cortar la tela.

1c. Multiplica la medida de la tela (12m) por 1 día obteniendo como resultado 12 días.

En esta respuesta el alumno centra su reflexión en la medida del trozo de la tela que va a cortar el sastre (12m), la cual multiplica por un día sin relacionar ni comparar otros datos, lo que da como resultado (12 días).

A continuación se presenta un ejemplo:

Entrevistador	Claudia 14; 05 (1 ° grado)
<p>“El problema del sastre”</p> <p>Un sastre tiene un trozo de tela que va a cortar y mide 12 metros de largo, pero en su trabajo sólo le permiten cortar dos metros por día, es decir cada día sólo puede cortar 2 metros: ¿Cuántos días tarda el sastre en cortar completamente esta pieza.</p>	12 días
Explícame como llegaste a esa respuesta	Porque si son metros se tiene que cortar 2 metros cada día y son 12 metros por tela entonces son 12 días, porque tiene que cortar 2 metros por día.
Ahora lo puedes escribir	<p>La respuesta a la cual yo llegue fue porque se supone que si son 12 metros y tiene que cortar 2 metros cada día entonces son 12 días y llegue contando bien.</p>

### **Análisis de las respuestas de la 1º situación.**

De acuerdo a los errores encontrados en la resolución de los sujetos ante el problema del sastre se encontraron cinco tipos de respuestas diferentes, una de estas sin error y las otras presentaron error las cuales se presentan a continuación:

1a. Respuesta correcta a través de la suma iterada (2) se suma cinco veces 2 metros.

En este tipo de respuesta los sujetos llegaron a la resolución considerando los metros de tela (2) permitidos en cada corte por día realizando una suma iterada tomando en cuenta como dato final en su respuesta que los últimos metros ya estaban cortados al final de la tela ante este argumento los alumnos dieron como respuesta 5 días contestando correctamente.

1bl. Multiplica 2 m x 6 días =12m dando como resultado el trozo total de la tela.

En esta respuesta el procedimiento que sugirieron los sujetos se centra en multiplicar la medida de tela que puede cortar por día (2m) por 6, dando como resultado 6 días relacionando únicamente el dato del tiempo, cada día con el número de metros por cada corte y el trozo de tela que se va a cortar, pero no toma en cuenta que en el quinto día realiza dos cortes en uno, debido a que los últimos 2 metros ya se cortan simultáneamente en dicho día; por otro lado se puede decir que a comparación con el procedimiento de la respuesta 1a, en estas respuestas se descuida esta característica del problema cometiendo un error de omisión pues no toma en cuenta todos los datos inmersos en la situación problema.

1bll. Divide el trozo de tela (12m) entre 2 m de cada día, dando como resultado 6 días.

Para esta respuesta el alumno centro su atención en realizar una división de la medida del total de la tela que cortara el sastre (12m) entre la medida de la tela

que puede cortar por cada día relacionando y comparando únicamente estos dos datos dan como resultado 6 días lo cual es incorrecto; en comparación con la respuesta correcta 1a, podemos decir que en este procedimiento de resolución los sujetos omitan el dato final que determina que ya en el quinto día con un solo corte los otros dos metros restantes se cortan simultáneamente por este error de omisión esta respuesta se asemeja a la 1bl pues tampoco se toman en cuenta todos los datos del problema.

1bIII. Suma iterada de (2) por cada día.

En esta resolución el sujeto realizó su procedimiento considerando la medida de la tela que se corta por cada día (2m) sumando 6 veces esta medida llevando a cabo una suma iterada y dando como resultado 6 días, dicho procedimiento en comparación con la respuesta 1a no toma el dato final implicado en la situación el cual ya se menciona en las últimas respuestas arriba referidas, por otro lado de igual forma en este tipo de respuesta se comete un error de omisión de la información pues no tomo en cuenta el dato que se debe considerar al final de los cortes y dar como respuesta 5 días en vez de 6 días, igual que en las respuestas 1bl y 1bII.

1c. Multiplica la medida de la tela (12m) por 1 día obteniendo como resultado 12 días.

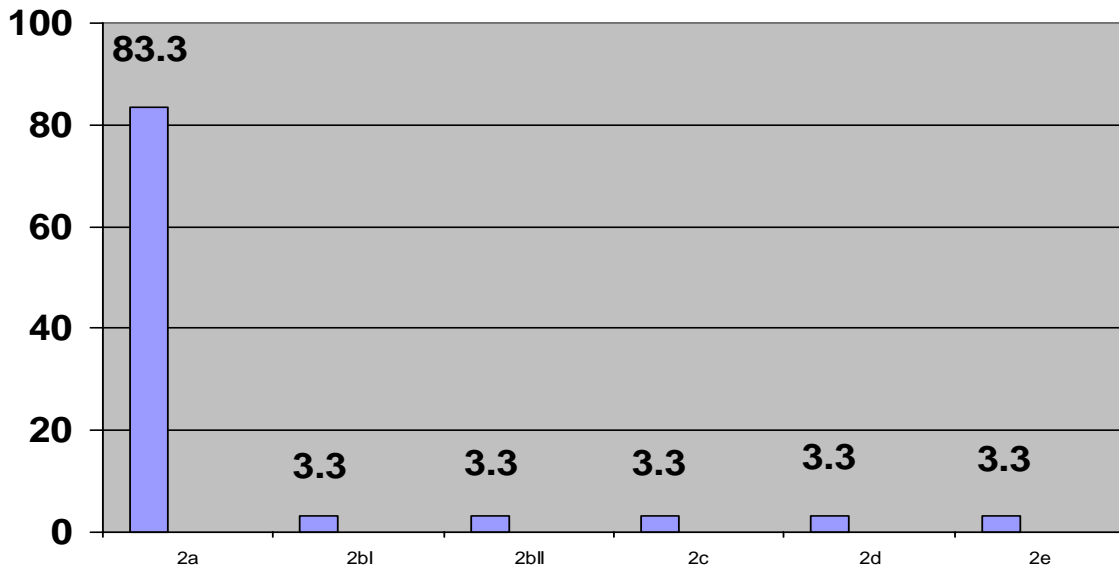
En esta respuesta el procedimiento el sujeto centra su atención en la medida del trozo de la tela que se cortara (12m), y la multiplica por un día en que corta dos metros (cada día) sin relacionar o comparar otro dato implicado en el problema dando como respuesta 12 días, que al ser comparada con la respuesta 1a no tiene ninguna relación o semejanza alguna, lo mismo sucede si comparamos esta respuesta con las respuestas 1, por otro lado podemos decir que tiene errores en dos momentos de la resolución pues en un primer momento comete un error en la entrada de la información omitiendo algunos datos, y en un segundo momento en la organización de la resolución del problema comete un error de análisis donde no separa ni relaciona los datos implicados en el problema.

### Análisis cuantitativo de la 2º situación

En cuanto al análisis cuantitativo a continuación presentamos la frecuencia del tipo de respuestas encontradas las cuales se observan en la siguiente tabla.

Respuestas 2º situación “El vendedor de aceite”

Respuestas		Frecuencia	Porcentaje %
Sin error	2a) Respuesta sin error multiplica $10 \times 5 = 50$ y después multiplica $50 \times 9$ da como resultado 450 pesos.	25	83.3
	2bl) Respuesta en la que el sujeto multiplica $9 \times 10$ obteniendo la respuesta de 90 pesos.	1	3.3
Con error	2bl) Respuesta de suma iterada de 10 botellas en 5 días, multiplicación de $50 \times 9$ y división de $450/5$ obteniendo la respuesta de 90.	1	3.3
	2c) Respuesta donde el sujeto multiplica las botellas vendidas al día por su costo que le da el resultado de 60.	1	3.3
	2d) Respuesta de suma iterada de costo de la botella y multiplica $10 \times 9 \times 5$ obteniendo 44 pesos.	1	3.3
	2e) Respuesta en la que el sujeto multiplica el costo de cada botella por las 10 que vende al día $9 \times 10 = 900$ dando como resultado 900 pesos.	1	3.3
<b>TOTALES</b>		<b>30</b>	<b>99.80 %</b>





En la gráfica anterior se puede observar que del total de los sujetos el 83.3% obtuviera respuestas correctas (sin error), mientras que el 16.7% obtuviera respuestas incorrectas (con errores), de éstas últimas se encontraron 5 respuestas de las cuales la más frecuente fue la respuesta de 90 pesos con dos procedimientos distintos que suman un porcentaje de 6.6%, las otras 3 respuestas restantes obtuvieron un 3.3%.

Por otro lado se puede observar que la respuesta de mayor frecuencia ante esta situación fue la respuesta correcta (sin errores) "450 pesos" la cual se presentó en 25 casos lo cual nos muestra que la tendencia de los jóvenes ante este tipo de situaciones es responder correctamente haciendo una apropiada relación y comparación de los datos.

En cuanto a las respuestas con menor frecuencia encontramos únicamente cinco tipos de respuestas incorrectas (con errores) dos de ellas con la misma cantidad en el resultado (90), pero con procedimiento y explicaciones diferentes lo cual nos indica que la tendencia a contestar de forma incorrecta ante esta situación es menos frecuente y presenta formas de resolución muy particulares. (Ver anexo 2)

A continuación presentamos la descripción y explicación de las distintas respuestas encontradas ante la 2<sup>o</sup> situación.

2a. Respuesta sin error multiplica  $10 \times 5 = 50$  y después multiplica  $50 \times 9$  da como resultado 450 pesos.

En esta respuesta el sujeto multiplica la cantidad de botellas que vende al día el comerciante (10) por el número de días (5), este resultado lo vuelve a multiplicar por el precio de cada botella (\$9.00) obteniendo un resultado correcto de 450 pesos.

A continuación presentamos un ejemplo.

Entrevistador	Aremiti 12; 11 (1 ° grado)
“El vendedor de aceite” Un comerciante vende al día 10 botellas de aceite a \$9 pesos cada una. ¿Cuánto ganará en la venta de todas las botellas de aceite durante 5 días?	450 pesos
Explícame como llegaste a esa respuesta	Primero multiplique las 10 botellas de aceite por 5 días, después el resultado que me dio que fue de 50 lo multiplique por 9 pesos de cada botella.
Ahora lo puedes escribir	$10 \times 5 = 50$ $50 \times 9 = 450$ R= \$ 450 1.- Primero multiplique 10 botellas por los 5 días y mi resultado fue = 50. 2.- El resultado que me dio lo multiplique por el precio de cada botella que es de \$9 y mi resultado fue \$ 450.

2bl. Respuesta en la que el sujeto multiplica  $9 \times 10$  obteniendo la respuesta de 90 pesos.

En esta respuesta el alumno centra su reflexión en multiplicar el costo de la botella (\$9.00) por la cantidad de botellas(50) que vende al día el comerciante obteniendo una respuesta de 90 pesos.

Se presenta un ejemplo a continuación:

Entrevistador	Raúl 12;10 (1 ° grado)
“El vendedor de aceite” Un comerciante vende al día 10 botellas de aceite a \$9 pesos cada una. ¿Cuánto ganará en la venta de todas las botellas de aceite durante 5 días?	90 pesos
Explícame como llegaste a esa respuesta	De diez botellas a 9 son 90
Ahora lo puedes escribir	90 pesos Multiplique nueve por 10 y el resultado fue 90.

2bII. Respuesta de suma iterada de 10 botellas en 5 días, multiplicación de  $50 \times 9$  y división de  $450/5$  obteniendo la respuesta de 90.

En esta resolución el sujeto toma en cuenta la cantidad de botellas (10) y el número de días (5) en los cuales va a vender el comerciante sumando 5 veces la cantidad de botellas, llevando a cabo una suma iterada (10), posteriormente a este resultado lo multiplica por el costo de cada botella (\$9.00) y ésta última respuesta la divide entre el número de días (5) los cuales están implicados en la pregunta del problema planteado.

A continuación se presenta un ejemplo:

Entrevistador	Abraham 16:00 (3 ° grado)
“El vendedor de aceite” Un comerciante vende al día 10 botellas de aceite a \$9 pesos cada una. ¿Cuánto ganará en la venta de todas las botellas de aceite durante 5 días?	90 pesos
Explícame como llegaste a esa respuesta	90, porque eso me salió multiplicando $50 \times 9$ y me salió 450 y lo dividí así $450 / 5 = 90$ y me salió a 90.
Ahora lo puedes escribir	Primero sume 5 días de 10 botellas después multiplique $50 \times 9 = 450$ después dividí $450 / 5 = 90$ Serían 90 pesos.

2c. Respuesta donde el sujeto multiplica las botellas vendidas (50) al día por su costo (\$9.00) lo que da como resultado de 60.

En esta respuesta el sujeto centra su reflexión en la cantidad de botellas que el comerciante vende al día (10 botellas), y lo multiplica por el costo de cada una de éstas, obteniendo como resultado 60 pesos.

Se presenta un ejemplo a continuación

Entrevistador	Mercedes 12:06 (1 ° grado)
“El vendedor de aceite” Un comerciante vende al día 10 botellas de aceite a \$9 pesos cada una. ¿Cuánto ganará en la venta de todas las botellas de aceite durante 5 días?	60 pesos
Explícame como llegaste a esa respuesta	Porque si lo sumamos $10 + 9$ el resultado es 60, porque si son 10 botellas de aceite a 5 pesos y dice cuánto ganará durante 5 días solo se tiene que sumar lo que gana.
Ahora lo puedes escribir	Si cada botella cuesta 9.00 pesos se suma $10 \times 9 = 60$ pero si dice que es entre 5 días.

2d. Respuesta de suma iterada de costo de la botella y multiplica  $10 \times 9 \times 5$  obteniendo 44 pesos.

En esta respuesta el sujeto suma cinco veces el costo de cada botella (9 pesos) efectuando una suma iterada (9); por otro lado en su explicación escrita confunde la multiplicación con una resta en su procedimiento obteniendo de la siguiente multiplicación  $10 \times 9 \times 5 = 44$  una respuesta de 44 pesos.

A continuación se muestra un ejemplo:

Entrevistador	José 12;10 (1 ° grado)
“El vendedor de aceite” Un comerciante vende al día 10 botellas de aceite a \$9 pesos cada una. ¿Cuánto ganará en la venta de todas las botellas de aceite durante 5 días?	44 pesos
Explícame como llegaste a esa respuesta	Restando 9 por 5 y de ahí me salió.
Ahora lo puedes escribir	<p>Cuando reste nueve por cinco me salió = 44  Porque tiene que ir restando cinco por nueve y luego acabando la operación.  <math>9+9+9+9+9</math>  <math>10 \times 9 \times 5 = 44</math></p>

2e. Respuesta en la que el sujeto multiplica el costo de cada botella por las 10 que vende al día  $9 \times 10 = 900$  dando como resultado 900 pesos.

En esta resolución el sujeto realiza una multiplicación del costo de cada botella (\$9.00) por la cantidad de botellas que vende el comerciante en un día (10), obteniendo como respuesta 900 pesos.

A continuación se presenta un ejemplo:

Entrevistador	Juan 13:09 (2 ° grado)
“El vendedor de aceite” Un comerciante vende al día 10 botellas de aceite a \$9 pesos cada una. ¿Cuánto ganará en la venta de todas las botellas de aceite durante 5 días?	900 pesos
Explícame como llegaste a esa respuesta	Gana 90 pesos x 5 días y gana 900 pesos, si el vendedor vende 10 botellas a 9 pesos y se multiplica $9 \times 10$ sale 900 a los 5 días es lo que ganó 900 pesos.
Ahora lo puedes escribir	R = 900. El vendedor si vende 10 botellas de aceite si las da a 9.00 pesos si a los 5 días gana 900 pesos.

### **Análisis de las respuestas de la 2ª situación.**

Ante el problema del vendedor de aceite encontramos seis tipos de respuestas distintas, una de ellas sin error y las restantes presentaron errores; de acuerdo a estos se puede decir:

2a. Respuesta sin error multiplica  $10 \times 5 = 50$  y después multiplica  $50 \times 9$  da como resultado 450 pesos.

En esta resolución el sujeto multiplica la cantidad de botellas que se venden al día (10) por los días que se trabaja (5), posteriormente este resultado lo multiplica por el precio de cada botella ( $50 \times 9$ ) obteniendo un resultado de 450 pesos lo cual consideramos correcto debido a que el alumno relaciona y compara los datos de manera adecuada efectuando las operaciones pertinentes con un buen manejo de la información y una apropiada organización y ejecución en las operaciones aritméticas.

2bl. Respuesta en la que el sujeto multiplica  $9 \times 10$  obteniendo la respuesta de 90 pesos.

Por su parte el sujeto en este tipo de respuesta únicamente centra su atención en multiplicar el costo de cada botella de aceite (9) por el número de botellas vendidas al día (10) obteniendo un resultado de 90 pesos que en contraste con la respuesta 2a en este tipo de respuesta el sujeto no relaciona el dato de los días durante los cuales vende el comerciante, lo cual le hace cometer un error de omisión en el proceso de la entrada de la información debido a que el alumno no toma en cuenta todos los datos del problema.

2bII. Respuesta de suma iterada de 10 botellas en 5 días, multiplicación de  $50 \times 9$  y división de  $450/5$  obteniendo la respuesta de 90.

En la cual el sujeto realiza todos y cada uno de los pasos de la respuesta 2a en el mismo orden y con las operaciones pertinentes sin embargo al final de su procedimiento agrega una operación aritmética en la cual divide  $450/5$  y obtiene como resultado 90 lo cual en la operación es correcta; pero para la situación es incorrecto debido a que comete un error operativo o despiste porque altera el procedimiento para resolver el problema ya que realizó la división que no hace falta para encontrar la solución correcta.



2c. Respuesta donde el sujeto multiplica las botellas vendidas al día por su costo que le da el resultado de 60.

En este procedimiento se puede observar que el sujeto centro su reflexión en tomar dos datos (costo de cada botella y el número de botellas) para realizar una multiplicación de forma inadecuada cometiendo errores en la entrada de la información debido a que distorsiona la información, con dificultad de proyectar estrategias a situaciones problemas nuevas, que en comparación con la respuesta 2a y la 2bI y 2bII en esta respuesta no existe relación ni comparación con los datos adecuados.

2d. Respuesta de suma iterada de costo de la botella y multiplica  $10 \times 9 \times 5$  obteniendo 44 pesos.

En la cual el sujeto suma cinco veces el costo de cada botella (9.00) mediante una suma iterada (9.00) y posteriormente realiza una multiplicación confundiendo la forma de explicar su procedimiento diciendo que esta restando en vez de decir que esta multiplicando, además obtiene una respuesta ajena al objetivo planteado, lo cual a diferencia de las respuestas 2a y las anteriores este procedimiento presenta errores en la entrada de la información pues demuestra una incomprensión o confusión del objetivo, y no diferencia lo relevante y lo irrelevante cometiendo también errores de análisis y síntesis en la organización del proceso de resolución del problema.

2e. Respuesta en la que el sujeto multiplica el costo de cada botella por las 10 que vende al día  $9 \times 10 = 900$  dando como resultado 900 pesos.

En esta resolución el sujeto centra su reflexión en multiplicar el costo de cada botella (\$9.00) por la cantidad de botellas que vende el comerciante durante el día (10) teniendo como resultado 900 pesos, lo cual en comparación de la respuesta

2a, difiere bastante puesto que omite el dato de cuantos días va a trabajar, este error no le permite terminar de integrar los datos cometiendo un desajuste en la resolución y un error de ejecución en la operación pues afirma que  $9 \times 10$  es igual a 900, algo parecido sucede con la respuesta 2bl pues en ambos se omite el dato implicado en la pregunta lo cual hace que se obtenga la respuesta incorrecta.

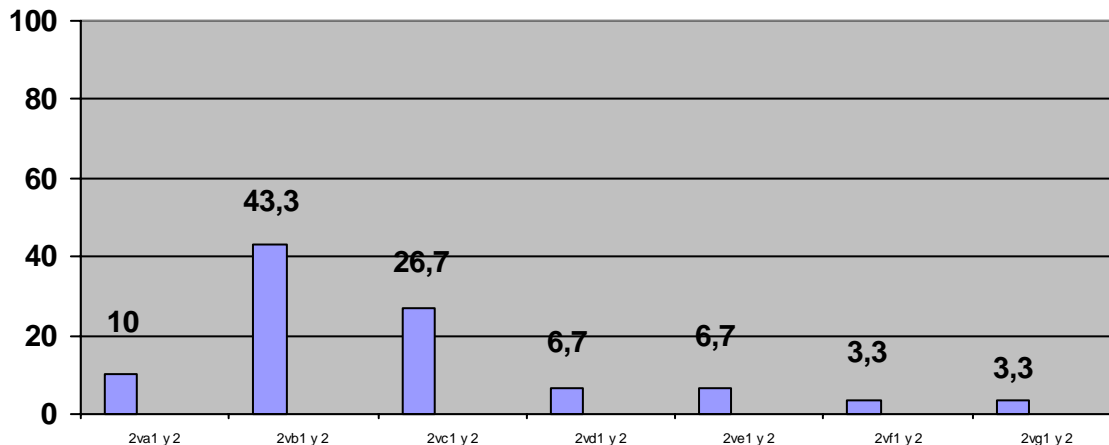
Ahora presentamos el análisis cuantitativo de las respuestas emitidas al aplicar la 2º situación con variación para determinar la frecuencia de los errores cometidos.

### Análisis cuantitativo de la 2º situación con variación

En cuanto al análisis cuantitativo realizado en las respuestas de la 2º situación con variación, presentamos la frecuencia del tipo de respuestas encontradas las cuales se observan en la siguiente tabla.

Respuestas 2º situación con variación “El vendedor de aceite II”

Respuestas		Frecuencia	Porcentaje %
	Respuesta a 1º pregunta	Respuesta a 2º pregunta	
Sin error	2va1.- Multiplica $5 \times 8 = 40$ y 40 lo multiplica por 10 días $40 \times 10$ obtiene como resultado 400	2va2.- Si gana 40 en el día multiplica $40 \times 3 = 120$ y resta $400 - 120$ de lo que resulta 280	3 10.0
Con error	2vb1.- Multiplica el número de botellas (50) por el precio (8) $50 \times 8$ teniendo como respuesta 400	2vb2.- Divide $400 / 100 = 40$ después multiplica por el número de días $40 \times 3$	13 43.3
	2vc1.- Multiplica las botellas (50) por los días y después multiplica $500 \times 8$ ante esto contesta 4000	2vc2.- Divide $4000 / 10$ y multiplica $400 \times 3 = 1200$ y resta $4000 - 1200$ obteniendo como respuesta 2800	8 26.7
	2vd1.- Multiplica $8 \times 10$ botellas y obtiene 800 después resta $800 - 450$ de la situación anterior $800 - 450$ de lo que resultan 350	2vd2.- Multiplica $15 \times 8$ y se lo resta al resultado de la 1a multiplicación $800 - 120$ dando como respuesta 680	2 6.7
	2ve1.- Centrado solo en multiplicar el número de botellas por los 10 días $50 \times 10$ obteniendo 500	2ve2.- Multiplica el número de botellas por 3 días trabajados $50 \times 3$ de lo que resulta 150	2 6.7
	2vf1.- Multiplica el precio de botella 8 por 10 días que vende el aceite $8 \times 10$ de lo que resulta 80	2vf2.- Multiplica el costo de botellas por 3 días $8 \times 3 = 24$ después resta 24 al resultado anterior $80 - 24 = 66$ para lo cual contesta 66	1 3.3
	2vg1.- No considera alguna ganancia, sin relación ni comparación de datos centrado en la segunda pregunta sin respuesta	2vg2.- Considera vender las 50 botellas en 3 días y no perder nada, sin relacionar ni comparar datos teniendo un resultado de 0	1 3.3
<b>TOTALES</b>		<b>30</b>	<b>100.0 %</b>



En esta gráfica se observa que del total de los sujetos el 10% obtuvo respuestas correctas (sin errores), mientras que el 90% obtuvo respuestas incorrectas (con errores) de este tipo de respuestas se encontraron seis respuestas distintas, de estas la que obtuvo un mayor porcentaje fue la respuesta de 400 en la primer pregunta y 120 en la segunda 2vb1 y 2vb2 respectivamente, (con un 43%) después le sigue la respuesta de 4000 en la primer pregunta y 2800 en la segunda (2vc1 y 2vc2) con un 26.7%, obteniendo el menor porcentaje as respuestas restantes (con un 3.3% ).

Por otro lado podemos decir que las respuestas que tuvieron una mayor frecuencia ante esta situación con variación fueron las respuestas incorrectas (con errores) de las cuales resultan 23 casos de 30 entrevistas lo cual denota que los alumnos tienden a contestar de forma errónea al momento de presentarles una variación en la situación, la cual la tratan de contestar de manera similar a la situación anterior, lo cual muestra que hay poco manejo de estrategias.

De estas respuestas incorrectas la más frecuente fue la respuesta 2vb1 y 2vb2 con 13 casos y posteriormente la respuesta que tuvo una mayor frecuencia fue la 2vc1 y 2vc2 con 8 respuestas de este mismo tipo.

Cabe mencionar que la respuesta correcta fue la menos frecuente lo cual da cuenta de que en este tipo de situaciones exista muy poca probabilidad de que el

alumno conteste de manera correcta, por falta de análisis y la aplicación de estrategias de resolución ante situaciones nuevas. (Ver anexo 3)

Posteriormente presentamos la descripción y explicación de las distintas respuestas ante la 2º situación con variación, implicadas en un análisis cualitativo, cabe mencionar que se plantean dos respuestas debido al diseño de la variación de la situación, incluidas en el problema.

Respuestas correctas

2va1.- Multiplica  $5 \times 8 = 40$  y 40 lo multiplica por 10 días  $40 \times 10$  obtiene como resultado 400.

2va2.- Si gana 40 en el día multiplica  $40 \times 3 = 120$  y resta  $400 - 120$  de lo que resulta 280.

En la respuesta de la primer pregunta el sujeto centra su reflexión en multiplicar el numero de botellas vendidas en un día (5) por el costo de cada una (8.00), después a este resultado lo multiplica por el numero de días que vendió (10 días), multiplicando  $5 \times 8 = 40$ ,  $40 \times 10 = 400$  obteniendo un resultado correcto.

En cuanto a la respuesta de la segunda pregunta el sujeto obtuvo un resultado correcto de 280 pesos que perdería el comerciante debido a que una vez que tenía el dato de cuanto ganaba al día (40 pesos) esto lo relacionó con el numero de días que trabajaría (3), multiplico estas cantidades y el resultado lo resto a los 400 pesos de la pregunta anterior  $400 - 120 = 280$ .

A continuación presentamos un ejemplo.

Entrevistador	Rodrigo 14:03 (2 ° grado)
<p>“Ese mismo comerciante se hace algunas preguntas:  ¿Cuánto ganará si compra 50 botellas y las vende en 8 pesos durante 10 días?  ¿Cuánto perdería si en vez de trabajar esos 10 días sólo trabajara 3?”</p>	<p>Primer pregunta 400  Segunda pregunta 280</p>
Explicame como llegaste a esa respuesta	<p>En 10 días ganaría 400 pesos porque el señor compra 50 botellas y las vende en 8 entonces si multiplicamos <math>5 \times 8</math> nos da 40 o sea ganaría 40 pesos al día por 5 botellas que venda aquí que son 10 días multiplicaríamos 10 días por los 5 botellas que vende en un día entonces serían 50 y estas 50 botellas ganaría 400 pesos y son 40 pesos al día y son 10 días en total que tiene que vender las entonces <math>40 \times 10</math> serían 400 pesos que ganaría.  Perdería 280 pesos porque gana 40 pesos al día, vende solamente 3 días de los 10 y solo ganaría 120 que serían <math>40 \times 3</math> son 120 pesos y a 400 le restamos 120 pesos y solo nos quedaría la cantidad de 280 pesos que perdería 280 pesos y solo ganaría 120 de todos los 400 pesos de los 10 días.</p>
Ahora lo puedes escribir	<p>400 pesos x 10 días. Compra 50 botellas y cada botellas vale 8 pesos y las tiene que vender en 10 días y entonces si vende 5 botellas al día x 8 pesos que cuesta cada una son 40 pesos.</p> <p>Entonces vende 50 botellas por 10 días y si se multiplica 40 pesos que gana la día por 10 días ganaría 400 pesos.  4 pesos al día de 10 días serían 400  <math>8 \times 5 = 40</math> <math>10 \times 5 = 50</math> <math>40 \times 10 = 400</math>  2a  40 pesos al día de tres días ganaría solo 120 pesos 280 pesos perdería  <math>40 \times 3 = 120</math> <math>120 - 400 = -280</math></p>

Respuestas incorrectas.

2vb1.- Multiplica el numero de botellas (50) por el precio (8)  $50 \times 8$  teniendo como respuesta 400

2vb2.- Divide  $400/100=40$  después multiplica por el numero de días  $40 \times 3$  teniendo como respuesta 120

En la resolución de la primer pregunta, el alumno multiplica el numero de botellas (50) por el precio de cada una de estas (\$8.00), obteniendo una respuesta correcta.

Por otro lado para la segunda respuesta el sujeto centra su reflexión en dividir el resultado de la pregunta (400) entre el número de días ( $400/10$ ), posteriormente el resultado de esta operación lo multiplica por los días que trabajará (3) obteniendo:  $40 \times 3 = 120$ . A continuación presentamos un ejemplo:

Entrevistador	Elizabeth 13:09 (2º grado)
<p>“Ese mismo comerciante se hace algunas preguntas:                  ¿Cuánto ganará si compra 50 botellas y las vende en 8 pesos durante 10 días?                  ¿Cuánto perdería si en vez de trabajar esos 10 días sólo trabajara 3?”</p>	<p>En la primera 400                  Y en la segunda 120.</p>
Explicame como llegaste a esa respuesta	<p>Primero multiplique el número de botellas que ganará si las vende en 8, y lo multiplica por 8 y son 40 y luego para que supiera cuánto ganará lo multiplica por 10 y salieron 400.                  En la segunda lo que me había salido de la multiplicación de <math>50 \times 8</math> en vez de multiplicarlo por 10 lo multiplica por 3 y son 120.                  (Se refleja un razonamiento lógico y bien definido al calcular todos los datos excepto el último paso de restar 120 a 400, lo cual se refleja el exceso de confianza y el no analizar detenidamente la pregunta).</p>
Ahora lo puedes escribir	<p>Primero multiplique el número de botellas por el precio y lo volví a multiplicar por el número de días que fue:  <math>50 \times 8 = 400</math>  <math>400 / 10 = 40</math>                  Y en la segunda en vez de multiplicarlo por 10 lo multiplica por 3.  <math>40 \times 3 = 120</math></p>

2vc1.- Multiplica las botellas (50) por los días y después multiplica  $50 \times 8$  ante esto contesta 4000

2vc2.- Divide  $4000/10$  y multiplica  $400 \times 3 = 1200$  y resta  $4000 - 1200$  obteniendo como respuesta 2800

En la respuesta de la 1a pregunta el sujeto multiplica las 50 botellas por los días durante los cuales vende (10),  $50 \times 10 = 500$ , posteriormente a este resultado lo multiplica por el costo de las botellas (8) obteniendo un resultado de 4000.

Para la 2a pregunta el sujeto centra su atención en determinar cuanto se gana en un día y lo hizo dividiendo el resultado anterior (4000) entre los días durante los cuales se venden las botellas (10) obteniendo 400 a este resultado lo multiplico por el numero de días que trabajara (3)  $400 \times 3 = 1200$  y esta cantidad la resta al resultado de la respuesta 1, ( $4000 - 1200$ ), obteniendo un total de 2800 pesos.

A continuación se presenta un ejemplo de este tipo de respuestas:

Entrevistador	Raúl 12:10 (1 ° grado)
<p>“Ese mismo comerciante se hace algunas preguntas:                  ¿Cuánto ganará si compra 50 botellas y las vende en 8 pesos durante 10 días?                  ¿Cuánto perdería si en vez de trabajar esos 10 días sólo trabajara 3?”</p>	<p>1er respuesta ganaría 4000 pesos                  2da respuesta perdería 2800 pesos</p>
Explicame como llegaste a esa respuesta	<p>Primero multiplique las 50 botellas por lo que costo salió 400 después lo multiplique por 10 y salió 4000.                  Después multiplique por cuántos días hubiera saco en 3 días y gana 1200 y perdería 2800 de lo que podría ganar en 3 días.</p>
Ahora lo puedes escribir	<p>Ganaría 4000 pesos                  Porque se multiplica el número de botellas que compró y por cuántos días estuvo vendiendo entonces dice que nada más trabajo 3 días.                  Entonces se hace la cuenta de cuánto dinero ganó en esos 3 días y el resultado se le resta a cuánto dinero ganó y el resultado sale que perdió 2800.</p>

2vd1.- Multiplica 8x10 botellas y obtiene 800 después resta 800-450 de la situación anterior 800-450 de lo que resultan 350

2vd2.-Multiplica 15x8 y se lo resta al resultado de la 1a multiplicación 800-120 dando como respuesta 680

En la resolución de la primera pregunta el sujeto multiplica el precio de cada botella (8) por los días durante los cuales venderá el comerciante (10) obteniendo un producto de 800 pesos, después a este resultado le resta la cantidad que obtuvo en la 2a situación 450, obteniendo un total de 350.

En la segunda respuesta el sujeto se dispone a multiplicar 15 (resultado de la suma de los días de la 2a situación (5), y de la primer pregunta de la 2a situación con variación (10), por el costo de cada botella (8)  $15 \times 8 = 120$ , este resultado lo resta a la respuesta de la primer multiplicación ( $8 \times 10 = 800$ ) realizando la operación  $800 - 120 = 680$ .

A continuación se presenta un ejemplo:

Entrevistador	Celia 13;02 (1º grado)
"Ese mismo comerciante se hace algunas preguntas: ¿Cuánto ganará si compra 50 botellas y las vende en 8 pesos durante 10 días? ¿Cuánto perdería si en vez de trabajar esos 10 días sólo trabajara 3?"	1er respuesta gana 350 pesos 2da respuesta perdería 680 pesos (respuesta escrita)
Explícame como llegaste a esa respuesta	1er R= 350 se supone que en la otra ganaba 450 en 5 días, y aquí los da de a 8 y las vende en 10 días entonces saca 800 pesos pero como en la otra gana 450 en 5 días y entonces gana 350 pesos más porque son 800 pesos en 10 días y multiplique 80 pesos por los 10 días. 2da R= pierde 776 porque $8 \times 3 = 24$ $800 - 24 = 776$ No pierde nada, porque no esta diciendo por cada día cuantas botellas vendía y a lo mejor podría haber vendido en 3 días las 50 botellas, y a lo hice de acuerdo al otro problema.



<p>Ahora lo puedes escribir</p>	<p>Gana 350 puesto que cuando las vendía en 9 pesos ganaba en 5 días 450 y no pierde nada porque en esos 3 días pudo vender todas las botellas, (vuelve hacer el problema y contesta), gana 800 y pierde 680 llegue a esa solución al sacar la cantidad de botellas que vendía por cada día y multiplicándolo por la cantidad de precio de cada botella, y como vende 5 botellas por día y si gana 800 en los diez días, ganaría 350 pesos más que en el otro problema y perdería 680 si se restan <math>800 - 120 = 680</math> 120 es de <math>15 \times 8 = 120</math>.</p>
---------------------------------	---

2ve1.- Centrado solo en multiplicar el número de botellas por los 10 días  $50 \times 10$  obteniendo 500

2ve2.- Multiplica el numero de botellas por 3 días trabajados  $50 \times 3$  de lo que resulta 150

En la respuesta de la primera pregunta el sujeto centra su atención en el número de botellas (50), las cuales multiplica por la cantidad de días durante los cuales el comerciante vende las botellas  $50 \times 10 = 500$ .

Con respecto a la respuesta de la segunda pregunta el sujeto multiplica una vez más el número de botellas (50) por el número de días que trabajara el comerciante (3) obteniendo una respuesta de 150.

A continuación se presenta un ejemplo:



después ejecuta una resta del resultado anterior (80 pesos) menos el producto de  $3 \times 8 = 24$  efectuando la operación y obteniendo como resultado 66 pesos

A continuación se considera un ejemplo:

Entrevistador	Juan 13:09 (2º grado)
“Ese mismo comerciante se hace algunas preguntas: ¿Cuánto ganará si compra 50 botellas y las vende en 8 pesos durante 10 días? ¿Cuánto perdería si en vez de trabajar esos 10 días sólo trabajara 3?”	Ganaría 80 pesos. Perdería 66 pesos.
Explícame como llegaste a esa respuesta	Para la primera multiplique $8 \times 10$ y lo que me salió fueron 80 pesos y ya después $8 \times 3$ y salieron 24 y ya lo que ganó en 10 días se restan 3 y sale a 64 pesos.
Ahora lo puedes escribir	Gana en 10 días 80 pesos y en 3 días pierde 66 pesos Por que en los 10 días a 80 pesos y en los otros tres días nada mas gana 24 R= 64 pesos perdió

2vg1.- No considera alguna ganancia, sin relación ni comparación de datos centrado en la segunda pregunta sin respuesta

2vg2.- Considera vender las 50 botellas en 3 días y no perder nada, sin relacionar ni comparar datos teniendo un resultado de 0

La respuesta de la pregunta inicial el sujeto no la considera, lo cual no le permite relacionar ni comparar los datos debido a que su reflexión está centrada en la segunda pregunta.

En la respuesta de la segunda pregunta el sujeto centra su atención en considerar que el vendedor tiene la posibilidad de vender todas las botellas (50) en tres días, sin realizar otro tipo de relación o comparación de datos.

A continuación se presenta un ejemplo:

Entrevistador	Gabriela 15;11 (1º grado)
“Ese mismo comerciante se hace algunas preguntas: ¿Cuánto ganará si compra 50 botellas y las vende en 8 pesos durante 10 días? ¿Cuánto perdería si en vez de trabajar esos 10 días sólo trabajara 3?”	Primera pregunta = nada (0). Segunda pregunta = nada (0).
Explícame como llegaste a esa respuesta	Responde, pues yo digo que nada porque en esos 3 días también puede vender todas las botellas
Ahora lo puedes escribir	Nada porque esos tres días puede vender todas las botellas.

### **Análisis de las respuestas de la 2º situación con variación.**

Con referencia a los errores encontrados y de acuerdo a las respuestas emitidas por los sujetos ante el problema planteado encontramos siete tipos de respuestas diferentes una de ellas sin errores y las restantes con errores.

2va1.- Multiplica  $5 \times 8 = 40$  y 40 lo multiplica por 10 días  $40 \times 10$  obtiene como resultado 400

2va2.- Si gana 40 en el día multiplica  $40 \times 3 = 120$  y resta  $400 - 120$  de lo que resulta 280

En la resolución de la primer pregunta el sujeto toma en cuenta todos los datos y realiza una adecuada relación y comparación de los datos determinando cuánto se gana en un día multiplicando  $5 \times 8$  y ante este resultado lo multiplica por el número total de días  $40 \times 10 = 400$  llevando un procedimiento apropiado debido a que desde un inicio considera cuanto gana por 1 día y esa cantidad la relaciona con el objetivo de la pregunta.

En la segunda resolución el sujeto al determina cuanto gana en un día esta cantidad la multiplica por el número de días que se trabajaran, este resultado lo relaciona con el resultado de la respuesta anterior implicando una resta para determinar que diferencia existe si solo trabaja 3 días llevando a cabo un procedimiento adecuado y obtener un resultado correcto.

2vb1.- Multiplica el número de botellas (50) por el precio (8)  $50 \times 8$  teniendo como respuesta 400

2vb2.- Divide  $400/10 = 40$  después multiplica por el número de días  $40 \times 3$

En el procedimiento de la primer pregunta el sujeto de manera directa multiplica la cantidad de las botellas (50), por el precio de cada botella (\$8.00), lo que le permite tener el resultado acertado aunque no lleve a cabo el mismo procedimiento de la respuesta 2va1, el cual es también correcto.

En cuanto a la resolución de segunda pregunta el sujeto solo centra su atención en dividir los 400 de la respuesta anterior entre 10, obteniendo el resultado por trabajar en un día 40 pesos, lo cual multiplica por 3 obteniendo un resultado final de 120, sin embargo no realiza el último paso implicado en la respuesta 2va2 que consiste en restar  $400 - 120$  para obtener la respuesta correcta cometiendo errores de omisión de la información debido a que no se toma en cuenta este dato.

2vc1.- Multiplica las botellas (50) por los días y después multiplica  $500 \times 8$  ante esto contesta 4000

2vc2.- Divide  $4000/10$  y multiplica  $400 \times 3 = 1200$  y resta  $4000 - 1200$  obteniendo como respuesta 2800

En la respuesta de la primer pregunta el sujeto realiza todos y cada uno de los pasos del procedimiento de la respuesta 2va1, pero existe la gran diferencia de que agrega un paso más, en este procedimiento el sujeto multiplica las botellas (50) por los días durante los cuales se vende el producto, lo cual le provoca cometer un error de ejecución en la resolución, presenta un error de despiste debido a que presenta confusión o alteración en el orden de pasos, para resolver el problema.

Para la segunda pregunta el sujeto realiza el mismo procedimiento de la respuesta correcta 2va2, y de igual forma que en la respuesta anterior presenta el error de alterar el orden y las operaciones implicadas en la resolución de este problema lo cual difiere en la respuesta 2va2 debido a que hace una agregación de datos y operaciones adicionando la división de  $4000/10=400$ .

2vd1.- Multiplica  $8 \times 10$  botellas y obtiene 800 después resta  $800-450$  de la situación anterior  $800-450$  de lo que resultan 350

2vd2.- Multiplica  $15 \times 8$  y se lo resta al resultado de la 1a multiplicación  $800-120$  dando como respuesta 680.

Para la resolución de la primer pregunta el sujeto se centra en multiplicar el costo de las botellas (8) por los días, obteniendo como resultado 800 pesos y después resta 800 menos el resultado de la situación anterior obteniendo una respuesta de 350, lo cual comparado con la resolución de la respuesta 2va1 el sujeto no relaciona correctamente los datos y no proyecta estrategias de resolución ante la variación de la situación.

En la resolución de la pregunta dos, el sujeto realiza una suma de los días implicados en las preguntas de la segunda situación (5) más los días de la primer pregunta de la segunda situación con variación (10) lo cual al igual que en su primer respuesta se demuestra que el sujeto presenta una dificultad para

proyectar estrategias utilizadas a situaciones problemas con variación pues compara esta situación con la segunda, sin organizar de manera adecuada y aislada la resolución.

2ve1.- Centrado solo en multiplicar el número de botellas por los 10 días  $50 \times 10$  obteniendo 500

2ve2.- Multiplica el número de botellas por 3 días trabajados  $50 \times 3$  de lo que resulta 150

En la resolución de la pregunta inicial en este tipo de respuestas el sujeto centra su reflexión en multiplicar la cantidad de botellas (50) por el número de días (10) ante lo cual podemos observar que en el procedimiento utilizado no se toma en cuenta el dato del costo de las botellas el cual es sustituido por los días durante los cuales se vende el aceite, por lo tanto se cometen errores tanto en la entrada de la información (error de omisión), como en la ejecución de las operaciones en la resolución (error de sustitución, sustituye un dato por otro).

Por otro lado en la resolución de la segunda pregunta el sujeto se limita a multiplicar el número de botellas (50) por los días implicados en la pregunta (3) obteniendo 150 pesos, lo cual indica que de igual forma que en la respuesta inicial, el sujeto omite tanto el paso de la división de  $400/10=40$  ó  $5 \times 80=40$  y el paso de la resta de  $400-120$ , ante estas dos diferencias comparada con la respuesta 2va1 se puede decir que el sujeto comete este tipo de errores en la entrada de información, y también sustituye lo que gana en un día (cuarenta pesos) sustituidos por 50 botellas cometiendo el mismo error de la respuesta inicial dentro de estas respuestas.

2vf1.- Multiplica el precio de botella 8 por 10 días que vende el aceite  
 $8 \times 10$  de lo que resulta 80

2vf2.- Multiplica el costo de botellas por 3 días  $8 \times 3=24$  después resta 24 al resultado anterior  $80-24=66$  para lo cual contesta 66

En esta respuesta la resolución que lleva a cabo el sujeto implica multiplicar el precio de cada botella (8) por los días en que labora el comerciante (10) la cual comparada con la respuesta correcta 2va1 se puede decir que adquiere la diferencia al relacionar los datos y al igual que en la respuesta anterior 2ve1 se realiza una omisión y una sustitución de datos que no le permiten al sujeto conseguir la respuesta correcta, debido a que omite la cantidad de botellas (50) la cual es sustituida por el número de días (8).

Por otro lado la respuesta de la segunda pregunta se vuelve a cometer el mismo error de omisión y sustitución de la primer pregunta, ahora se completan los pasos de la respuesta 2va1 pero presentando errores de omisión y sustitución de datos, se omite el número de botellas vendidas en un día (5) por el costo de cada botella (8) y se omite el dato de lo que gana en tres días (120) el cual es sustituido por 24 pesos producto de la multiplicación de  $(8 \times 3 = 24)$  del costo de cada botella por el número de días que trabajará el comerciante, cometiendo errores tanto en la entrada de la información como en la ejecución de operaciones,  $(80 - 24 = 66)$  pues de esta operación realizada de manera correcta se obtienen 56.

2vg1.- No considera alguna ganancia, sin relación ni comparación de datos centrado en la segunda pregunta sin respuesta

2vg2.- Considera vender las 50 botellas en 3 días y no perder nada, sin relacionar ni comparar datos teniendo un resultado de 0

En cuanto a la resolución de este tipo de respuesta el sujeto únicamente no compara ni relaciona los datos con lo cual se puede observar que existe un error de indefinición de metas debido a que el alumno no sabe lo que se le pide, ya que su reflexión se centro en la resolución de la segunda pregunta cometiendo error antes mencionado en la entrada de la información.



En la segunda pregunta la respuesta se centra en la posibilidad de que se vendan las 50 botellas en los tres días implicados en la segunda pregunta sin perder nada de dinero, lo cual no le permite relacionar ni comparar otros datos dando a conocer que no tiene ninguna relación con el procedimiento de la respuesta correcta 2va1, pues en este caso se comete un error de incomprensión ó confusión del objetivo debido a que el alumno no comprende lo que se le pregunta dicho error se presenta en el proceso de entrada de la información, más a parte omite los datos y la relación y comparación de estos para conseguir una respuesta correcta.

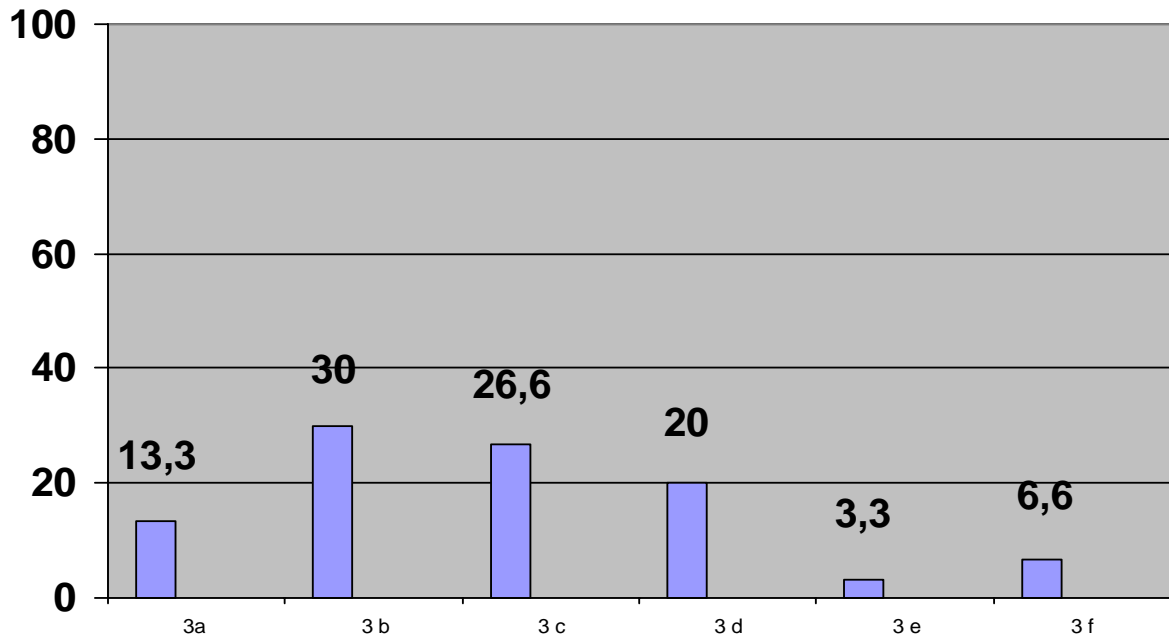
Continuando con el análisis de los datos se presentan las frecuencias encontradas en las respuestas de los sujetos al resolver la 3<sup>o</sup> situación.

### **Análisis cuantitativo de la 3<sup>o</sup> situación**

En cuanto al análisis cuantitativo a continuación presentamos la frecuencia del tipo de respuestas encontradas, las cuales se observan en la siguiente tabla.

Respuestas de la 3<sup>o</sup> Situación “La sombra de la vela”

Respuestas		Frecuencia	Porcentaje %
Sin error	3a) Suma y divide para encontrar respuesta dando como resultado 4.	4	13.3
Con error	3b) Suma iterada de la medida de la vela (Suma tres veces 15).	9	30.0
	3c) Resta la medida de la vela (15cm) a la sombra (45cm) dando como resultado 30 cm	8	26.7
	3d) Respuesta inversa, resta 45-15 y divide 30/15 lo que le resulta 2 veces	6	20.0
	3e) Centrado en el dato final sin relación a la comparación dando el resultado de 45	1	3.3
	3f) Sólo multiplica los datos del problema 45x15	2	6.7
TOTALES		30	100.0 %



En la presente gráfica se observa que del total de los sujetos el 13.3 % obtuviera respuestas correctas (sin error), mientras que el 86.7 % obtuviera respuestas incorrectas (con errores), de estas últimas se encontraron cinco respuestas diferentes, de las cuales la que obtuvo un mayor porcentaje fue la respuesta de “3 veces”, (con un 30 %) otro porcentaje alto fue el de la de “30 cm” (con un 26.6 %); contando con un porcentaje de 20 % la respuesta de 2 veces.

Por otro lado se puede mencionar que las respuestas con mayor frecuencia en la resolución de esta situación fueron las incorrectas (con errores) con 26 casos, lo cual nos da a conocer que la mayoría de los sujetos ante este tipo de problemas tienden a contestar de manera errónea debido a que se requiere un análisis detallado de los datos y las condiciones que plantea la situación, en estas respuestas 9 sujetos contestaron de manera despistada 3 veces, otros 8 alumnos contestaron la respuesta de 30 veces existiendo la diferencia de 1 entre estas dos últimas respuestas.

Aparece un caso totalmente aislado de respuesta incorrecta el cual se centra en contestar la medida del dato final 45, ante lo cual se puede decir que este alumno no comprendió el objetivo de la pregunta.

Por el contrario las respuestas correctas fueron las menos frecuentes en la resolución del problema lo cual indica que los alumnos de secundaria la tendencia para resolver este tipo de problemas de manera correcta es menor. (Ver anexo 4)

En las siguientes paginas se presenta la descripción y explicación de las distintas respuestas de los sujetos ante la 3<sup>o</sup> situación implicadas en un análisis cualitativo.

Respuesta correcta

3a.- Suma  $45+15$  y divide entre 15 dando como respuesta 4 veces.

En esta respuesta los sujetos suman la medida de la sombra (45 cm) más la medida de la vela (15 cm), y después divide el resultado entre 15 ( $60/15$ ).

A continuación presentamos un ejemplo.

Entrevistador	Jordan 12; 04 (1 ° grado)
Una vela mide 15 centímetros de largo, y su sombra es de 45 centímetros más larga. ¿Cuántas veces la sombra es más de lo que mide la vela?	Cuatro veces
Explicame como llegaste a esa respuesta	Porque la vela mide 15cm y su sombra 45cm más larga entonces $45+15$ son 60 y eso sería así 15, 30, 45 y 60 y quedarían las 4 veces más larga (señalando por cada una, 15, 30, 45 y 60 sus 4 dedos).
Ahora lo puedes escribir	<p>Respuesta 4</p> <p>Se suman los 45cm de la sombra más los 15cm de la vela y se divide cuántas veces cabe el 15 en el 60.</p>

### Respuestas incorrectas

3b.- Suma iterada de la medida de la vela (suma tres veces 15).

En este tipo de respuestas el sujeto centra su reflexión en la medida de la vela, sumando tres veces la medida de ésta, utilizando la suma iterada (15 cm) hasta alcanzar la medida de la sombra (45 cm), dando como resultado 3 veces.

Ahora se presenta un ejemplo de este tipo de respuestas.

Entrevistador	José Guadalupe 13; 04 ( 2 ° grado)
Una vela mide 15 centímetros de largo, y su sombra es de 45 centímetros más larga. ¿Cuántas veces la sombra es más de lo que mide la vela?	Tres veces
Explícame como llegaste a esa respuesta	Porque si la vela mide 15cm de largo y su sombra es de 45 yo nada más multiplique 3 x 15 y me da 45 o sea son 3 veces mayor la sombra de la vela, que la vela.
Ahora lo puedes escribir	<p>Porque la vela mide 15cm y quiere saber cuántas veces es mayor la sombra yo multiplique 15 que es lo que mide la vela y 3 son las veces que más mide la sombra y son 15 x 3 son 45.</p> <p>R= es 3 veces más larga la sombra de la vela.</p>

3c.- Resta la medida de la vela (15cm) a la sombra (45cm) dando como resultado 30 cm

En esta respuesta el sujeto resta tomando en cuenta la medida de la sombra (45 cm), menos la medida de la vela (15 cm), y da como resultado 30 cm.

A continuación se presenta el ejemplo.

Entrevistador	Sonia 12; 06 (1 ° grado)
Una vela mide 15 centímetros de largo, y su sombra es de 45 centímetros más larga. ¿Cuántas veces la sombra es más de lo que mide la vela?	Treinta centímetros
Explícame como llegaste a esa respuesta	Porque haciendo la resta de lo que mide la vela a lo de la sombra dan 30.
Ahora lo puedes escribir	<p>Primero reste los centímetros de la sombra de la vela lo que mide la vela y mi resultado fue 30 centímetros o el doble.                  Porque 15 es la mitad de 30 y vendría siendo el doble</p>

3 d.- Respuesta inversa, resta 45-15 y divide 30/15 lo que le resultó 2 veces.

En esta resolución el sujeto se propone resolver la situación de manera inversa a la correcta, es decir en vez de sumar, se dedica a restar 15 cm de la vela a 45 cm de la sombra obteniendo 30 cm después divide entre 15 y su resultado es dos veces.

A continuación se presenta un ejemplo.

Entrevistador	Mónica 14; 02 (2 ° grado)
Una vela mide 15 centímetros de largo, y su sombra es de 45 centímetros más larga. ¿Cuántas veces la sombra es más de lo que mide la vela?	Dos veces
Explícame como llegaste a esa respuesta	Porque se resta lo que mide, se resta entre los cm más que mide de la sombra entonces el resultado serían 30 porque dice que cuántas veces más que la vela, si la vela mide 15 serían 15 x 2 serían 30 entonces son 2 veces la sombra.
Ahora lo puedes escribir	<p>45 – 15 = 30</p> <p>-Se resta la medida de la vela menos lo que mide la sombra.</p> <p>-El resultado fue 30, este se divide entre 15 y sale 2 que sería el número de veces que mide la sombra de la vela.</p> <p>-La respuesta sería 2 veces más que la medida de la sombra.</p>

3e.- Respuesta en que el sujeto reflexiona centrado en el dato final sin relación a la comparación dando el resultado de 45.

En esta respuesta el sujeto explica su procedimiento reflexionando que la sombra va disminuyendo conforme va bajando el nivel de la luz del sol o reflector, sin relacionar ni comparar los datos, y da como respuesta 45 cm.

A continuación se presenta un caso de esta respuesta.

Entrevistador	José 12; 10 (1 ° grado)
Una vela mide 15 centímetros de largo, y su sombra es de 45 centímetros más larga. ¿Cuántas veces la sombra es más de lo que mide la vela?	Cuarenta y cinco
Explícame como llegaste a esa respuesta	Son los que quedan de la sombra si la vela nada más esta parada y su sombra son 45cm y en la fotografía están 45cm que da la sombra y con lo que va disminuyendo el reflejo de la luz va disminuyendo la sombra a cada centímetro que va sin luz va disminuyendo la sombra de la vela hasta que no se vea.
Ahora lo puedes escribir	Va disminuyendo la sombra de la vela, con la que va bajando el nivel del sol o reflector y bajo un centímetro. R= 45cm



3f.- Respuesta en la cual se multiplican los datos del problema  $45 \times 15$

En esta resolución el sujeto únicamente se centra en resolver la situación multiplicando los datos del problema, cumpliendo con las siguientes características:

- a) El sujeto multiplica los datos.- ésta cualidad se refiere a que el sujeto se dedica a multiplicar la medida de la sombra (45 cm), por la medida de la vela (14 cm).
- b) Error de ejecución.- éste rasgo se pudo observar en el momento en que el sujeto realiza la operación sin llevar a cabo el procedimiento correcto para la multiplicación, obteniendo un resultado incorrecto.

A continuación se presenta un ejemplo

Entrevistador	Juan 13; 02 (2º grado)
Una vela mide 15 centímetros de largo, y su sombra es de 45 centímetros más larga. ¿Cuántas veces la sombra es más de lo que mide la vela?	275
Explícame como llegaste a esa respuesta	Porque se multiplica $45 \times 15$ y lo que sale es lo de la sombra de lo largo.
Ahora lo puedes escribir	R = 275 Porque la sombra mide 45 y la vela mide 15 y en el total es de 275 lo que mide la sombra. Porque multiplique $15 \times 45$ sale 275cm es lo que mide la sombra.

Otro ejemplo de ésta respuesta se presenta a continuación:

Entrevistador	Abraham 16; 00 (3 ° grado)
Una vela mide 15 centímetros de largo, y su sombra es de 45 centímetros más larga. ¿Cuántas veces la sombra es más de lo que mide la vela?	4725 veces
Explícame como llegaste a esa respuesta	No más multiplique 15 x 45 y nada más. 45 x 15 = 4725
Ahora lo puedes escribir	<p>Multiplique 15 x 45 y me salió</p> $\begin{array}{r} 225 \\ 45 \\ \hline 22545 = 25 \\ 22545 = 4725 \end{array}$

### **Análisis de las respuestas de la 3<sup>o</sup> situación.**

Ante el problema de la sombra de la vela encontramos seis tipos de respuestas distintas, una de ellas sin error y las demás con errores; de acuerdo a estos errores se puede decir:

3a. Respuesta sin error. En esta respuesta el sujeto suma la medida de la vela (15cm) más la medida de la sombra (45cm) y por ultimo divide el resultado entre 15 ( $60/15$ ); podemos plantear que este procedimiento es correcto debido a que considera todos los datos que implican una adecuada resolución y por ultimo realiza las operaciones aritméticas mas apropiadas para encontrar la respuesta de manera precisa.

3b. respuesta con error. En esta respuesta el sujeto centra toda su reflexión en la medida de la vela, sumando tres veces la medida de esta, llevando a cabo una suma iterada (de 15cm) hasta lograr llegar a la medida de la sombra (45cm) y da como resultado 3 veces ante esta respuesta podemos comentar que el sujeto omite el dato de sumar la medida de la vela a la medida de la sombra lo cual difiere de la respuesta 3<sup>a</sup>, y también omite dividir el resultado de ( $60/15$ ) debido a que realizo una suma iterada para explicar su procedimiento y de esta manera llegar a la medida de la sombra, cometiendo doble error de omisión en la entrada de la información, con dificultad para aplicar estrategias ante la situación, por otro lado no comete errores de ejecuciones la suma iterada.

3c. Respuesta con error. En el procedimiento de esta resolución únicamente se resta la medida de la sombra de la vela (45cm) menos la medida de la vela dando 30cm como resultado lo cual indica que el sujeto tuvo un error de distorsión en el cual no se domina la información y lo que asimila lo distorsiona pues la respuesta que emite la da en centímetros y la pregunta del problema dice cuántas veces, realizando tres omisiones, la suma de la medida de la vela (15cm) más la medida de la sombra (45cm), la división de ( $60/15$ ) y las unidades de respuesta (obtiene

centímetros en vez de número de veces) existiendo tres rasgos de diferencia con respecto a la respuesta de igual forma comete los dos errores de la respuesta 3b.

3d. En este tipo de respuesta la resolución se caracteriza por invertir el primer paso del procedimiento pues en lugar de sumar, resta la medida de la vela (15cm) a la medida de la sombra (45cm), dando como respuesta 2 veces, esta característica muestra un entorpecimiento por redundancia o saturación de información, puesto que el sujeto al repetirle la información esto provoca que no la integre adecuadamente obteniendo una respuesta incorrecta, por otro lado no omite ninguno de los pasos del procedimiento de la respuesta 3a pues se observa que relaciona los datos y al final divide, pero altera la operación invirtiendo completamente la resta en lugar de la suma, diferenciándose también de las respuestas 3b y 3c.

3e. En esta resolución el sujeto se centra en el dato final explicando que la sombra va disminuyendo conforme va bajando el nivel de la luz del sol o reflector, sin relacionar ni comparar los datos y da como respuesta 45cm, ante este tipo de procedimiento se puede comentar que el sujeto realiza una resolución totalmente diferente al procedimiento de la respuesta correcta 3<sup>a</sup> pues explica un proceso de resolución que demuestra un desvío de la meta o confusión de objetivos pues el alumno hace tareas o explica de forma ajena al objetivo o pregunta planteada, dicha característica la diferencia de las otras respuestas.

3f. En esta última respuesta el procedimiento que utiliza el sujeto está centrado en realizar una multiplicación de los datos del problema con errores de ejecución dicho procedimiento es semejante al de la respuesta anterior pues su respuesta es ajena al objetivo o pregunta planteada demostrando una incompreensión o confusión de objetivo debido a que no muestra que comprende lo que se le pregunta, por otro lado esta resolución no tiene ninguna semejanza con el procedimiento de la respuesta 3a sin error.

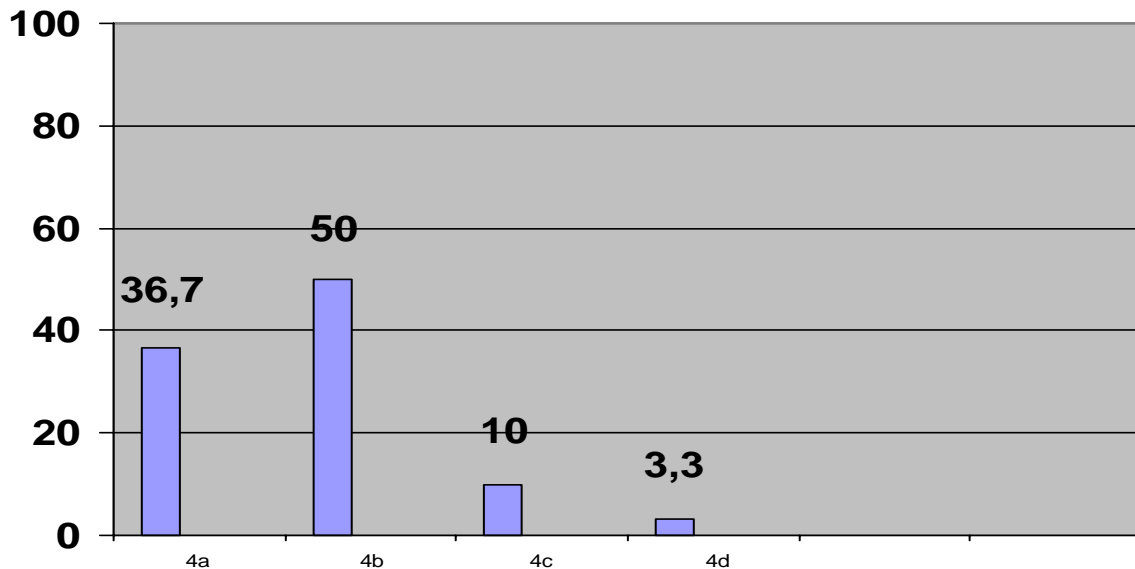
Ahora se presentan el número de respuestas con error y sin error de la 4<sup>o</sup> situación observados en lo siguiente.

### Análisis cuantitativo de la 4<sup>o</sup> situación

En cuanto al análisis cuantitativo a continuación presentamos la frecuencia del tipo de respuestas encontradas las cuales se observan en la siguiente tabla.

Respuestas 4<sup>o</sup> Situación "Canicas ganadas"

Respuestas		Frecuencia	Porcentaje %
Sin error	4a) Suma únicamente las canicas ganadas $5+7=12$ (12)	11	36.6
Con error	4b) Resta $7-3=4$ después suma $4+5=9$ , y suma las canicas encontradas $9+4=13$ (13)	15	50.0
	4c) Resta $7-3=4$ después suma las canicas que gana al final $4+5=9$ (9)	3	10.0
	4d) Resta $7-3=5$ Al resultado le suma 5 canicas ganadas $5+5=10$ y suma las encontradas (14)	1	3.3
TOTALES		30	100.0 %



En la presente gráfica se observa que del total de los sujetos ante esta situación se encontró que el 36.7 % obtuviera respuestas correctas (sin error), mientras que el 63.3 % obtuviera respuestas incorrectas (con errores), de estas últimas se

encontraron tres respuestas distintas, de las cuales la que presento mayor porcentaje fue la respuesta de “13 canicas”, (con un 50.0 %), después se encuentra la respuesta de “9 canicas” (con un 10.0 %), encontrando un 3.3% en la respuesta de “14 canicas”.

Con respecto a la frecuencia encontramos que las respuestas con mayor número de casos fueron las incorrectas con 18 alumnos que contestaron con respuesta errónea lo cual nos indica la tendencia a que los alumnos al resolver este tipo de problemas cometan algún error, cabe mencionar que de éste tipo de respuestas el 50 % del total de los alumnos obtuviera la respuesta de 13 canicas debido a que realizaron las operaciones para determinar el total de las canicas ganadas, sin tomar en cuenta el objetivo principal de la pregunta.

Por otro lado las respuestas con menor frecuencia, como el caso de 12 alumnos que contestaron de forma correcta, nos demuestra que la tendencia a que los alumnos respondan de forma correcta sea menor debido a que muy pocos alumnos se dieron a la tarea de analizar de forma adecuada el objetivo de la pregunta del problema planteado. (Ver anexo 5)

A continuación presentamos el análisis cualitativo de las respuestas de la 4<sup>o</sup> situación con la finalidad de hacer una descripción y explicación de las distintas respuestas encontradas.

Respuesta correcta

4a.- Suma únicamente las canicas ganadas  $5+7=12$

En esta respuesta los sujetos suman la cantidad de canicas que gana por la mañana (7) más las canicas que Juan ganó el día siguiente (5), sin relacionar ni comparar otros datos, sumando únicamente las canicas ganadas.

A continuación presentamos un ejemplo:

Entrevistador	Raúl 12; 10 (1º grado)
<p>“Canicas ganadas”</p> <p>Juan ganó 7 canicas por la mañana, perdió 3 canicas por la tarde y ganó 5 canicas al día siguiente, y además se encontró 4 canicas más.</p> <p>¿Cuántas canicas ganó Juan?</p>	12 canicas
Explicame como llegaste a esa respuesta	<p>Porque dice Juan ganó 7 canicas después dice perdió 3 canicas y no se cuentan y por la tarde ganó 5, <math>5+7</math> da a 12 y al día siguiente se encuentra 4 canicas, se las encontró no las ganó y entonces nada más serían 12.</p>
Ahora lo puedes escribir	<p>12 canicas ganó.</p> <p>Primero dice que ganó 7 canicas después perdió 3 pero esas no se cuentan porque no ganó, dice que por la tarde ganó 5 canicas entonces se suma <math>5 + 7 = 12</math> que al otro día se encontró cuatro canicas esas canicas no cuentan porque no las ganó se las encontró.</p>

### Respuestas incorrectas

4b.- Resta  $7-3=4$  después suma  $4+5=9$ , y suma las 4 canicas encontradas  $9+4=13$ .

En este tipo de respuestas el sujeto centra su reflexión en restar las canicas que perdió por la tarde a las canicas que gana en la mañana, posteriormente al resultado le suma las canicas ganadas al día siguiente ( $4+5$ ), el resultado obtenido lo vuelve a sumar agregando las canicas que se encontró. ( $9+4=14$ )

Ahora se presenta un ejemplo de este tipo de respuestas.

Entrevistador	Edgar 14; 04 (2º grado)
<p>"Canicas ganadas"</p> <p>Juan ganó 7 canicas por la mañana, perdió 3 canicas por la tarde y ganó 5 canicas al día siguiente, y además se encontró 4 canicas más.</p> <p>¿Cuántas canicas ganó Juan?</p>	13 canicas
Explicame como llegaste a esa respuesta	13, porque en la mañana Juan ganó 7 canicas por la tarde perdió 3 canicas o sea $7 - 3$ son 4 y por la tarde y ganó 5 canicas o sea las 4 que le sobraron + 5 serían 9 y al día siguiente se encontró 4 canicas + 9 que tenía + 4 son 13.
Ahora lo puedes escribir	<p>R= 13 canicas</p> <p>Juan por la mañana ganó 7 canicas por la tarde perdió 3 canicas en la tarde ganó 5 canicas y al día siguiente ganó 5 canicas en total de canicas ganadas fue de 13 canicas, canicas.</p>



4c.- Resta  $7-3=4$  después suma las canicas que gana al último  $4+5=9$

En esta respuesta el sujeto resta la cantidad de canicas que ganó por la mañana (7), menos las canicas que perdió por la tarde (3), a este resultado le adiciona 5 canicas que Juan ganó (5) sin tomar en cuenta las canicas que se encontró.

A continuación se presenta el ejemplo:

Entrevistador	Enrique 14; 05 (2º grado)
<p>"Canicas ganadas"</p> <p>Juan ganó 7 canicas por la mañana, perdió 3 canicas por la tarde y ganó 5 canicas al día siguiente, y además se encontró 4 canicas más.</p> <p>¿Cuántas canicas ganó Juan?</p>	9 canicas
Explícame como llegaste a esa respuesta	Porque Juan ganó 7 canicas por la mañana y perdió 3 quedan 4 y al día siguiente ganó 5, porque los que se encontró no valen porque nada más te esta indicando cuántas ganó Juan no te están diciendo que las que se encontró y ganó.
Ahora lo puedes escribir	<p>Juan ganó 7 canicas pero pierde 3 y después ganó 5 al día siguiente y Juan ganó 9 canicas <math>4 + 5 = 9</math>.</p>

4d.- Resta  $7-3=5$  al resultado le suma 5 canicas ganadas  $5+5=10$  y suma  $10+4=14$ .

En esta resolución el sujeto se propone resolver la situación restando la cantidad de canicas que gana por la mañana (7) menos las canicas que pierde por la tarde (3) obteniendo como resultado 5, lo cual indica que comete un error de ejecución en la resta, posteriormente a este resultado le suma las canicas que ganó al día siguiente ( $5+5=10$ ), concluye, agregando a este resultado las otras cuatro canicas que se encontró Juan obteniendo un total de 14 canicas. A continuación se presenta un ejemplo:

Entrevistador	Marlen 14; 04 (3 ° grado)
<p>"Canicas ganadas"</p> <p>Juan ganó 7 canicas por la mañana, perdió 3 canicas por la tarde y ganó 5 canicas al día siguiente, y además se encontró 4 canicas más.</p> <p>¿Cuántas canicas ganó Juan?</p>	14 canicas
Explicame como llegaste a esa respuesta	14 canicas, porque en la mañana ganó 7 canicas y luego perdió 3 le quedan 5 canicas y luego al otro día ganó 5 canicas y se encontró 4 y todo eso lo sume y dan 14 canicas.
Ahora lo puedes escribir	<p>Juan ganó el primer día 7 canicas y perdió 3 le quedaron 5, y el otro día ganó 5 y se encontró 4 y lo sume y dieron 14 canicas que el había encontrado.</p>

### **Análisis de las respuestas de la 4ª situación.**

Ante el problema de las canicas ganadas descubrimos cuatro tipos de respuestas distintas, una de ellas sin error y las demás con errores:

4a.- Respuestas correctas (12 canicas) suma únicamente las canicas ganadas  
 $7+5$

En esta respuesta el sujeto centra su reflexión únicamente en las canicas que gana Juan lo cual se considera correcto, debido a que el objetivo de la pregunta planteada es encontrar las canicas ganadas y ningún otro dato más, por lo tanto se puede decir que el sujeto no comete ningún tipo de error ya que relaciona bien los datos implicados en la situación y la pregunta.

4b.- Resta  $7-3=4$  después suma  $4+5=9$ , y suma las canicas encontradas  $9+4=13$ .

En esta resolución el alumno toma como primer paso en su procedimiento una resta de la cantidad de canicas que gana por la mañana (7), menos las que pierde de éstas (3), y al resultado le suma las canicas que ganó al día siguiente,  $4+5=9$ .

Posteriormente suma las canicas que Juan había encontrado, lo que demuestra que en comparación con la respuesta correcta 4 a, existe la diferencia de que en este caso, si toma en cuenta todos los datos que se manejan en la situación, tanto las canicas ganadas y pierde como las que encuentra, cometiendo un error de entorpecimiento ocasionado por la redundancia o saturación de la información, pues bajo la condición del problema el sujeto no logra integrar la información adecuadamente, lo cual también provoca que no diferencie lo relevante y lo irrelevante presentando errores tanto en la entrada de la información como en la organización del proceso de resolución respectivamente.

4c.- Resta  $7-3=4$  después suman las canicas que gana al final  $4+5=9$

En este tipo de respuesta el procedimiento utilizado por estos sujetos se toma en consideración la resta de las canicas ganadas por la mañana (7) menos las canicas que pierde (3), y agrega a éste resultado las canicas que ganó al día siguiente.

En comparación con la situación 4 a, en esta resolución se encontró la semejanza de que el alumno si considera que se deben contar las canicas que ganó Juan y no las que encuentra, sin embargo también considera las canicas que pierde, lo cual hace la diferencia y provoca que se presente un error de despiste debido a que se confunde y se pierde en el camino, cometiendo un error de ejecución en la resolución.

4d.- Resta  $7-3=5$  al resultado le suma 5 canicas ganadas  $5+5=10$  y suma  $10+4=14$ .

En el proceso de éste tipo de resolución el sujeto se centra en resolver la situación restando la cantidad de canicas que gana por la mañana (7) menos las canicas que pierde por la tarde (3) obteniendo como resultado 5, lo cual indica que comete un error de ejecución en la resta, posteriormente a este resultado le suma las canicas que ganó al día siguiente ( $5+5=10$ ), concluye, agregando a este resultado las otras cuatro canicas que se encontró Juan.

Ante lo cual podemos decir que en contraste con la respuesta correcta 4 a la diferencia se da en la entrada de la información ya que en esta resolución existe cierto entorpecimiento por redundancia de la información, pues no integra al final el objetivo planteado en la pregunta del problema, además no diferencia lo relevante de lo irrelevante al no considerar las canicas ganadas.

Este procedimiento tiene gran semejanza en cuanto a la secuencia de los pasos a seguir correspondientes a la respuesta 4 b, con la única diferencia de que en

éste caso (4d) se comete un error de ejecución en el primer paso de la resta de  $7-3=5$  y lo correcto es  $7-3=4$ , lo cual hace que el resultado final sea de 14 canicas, obteniendo una respuesta incorrecta.

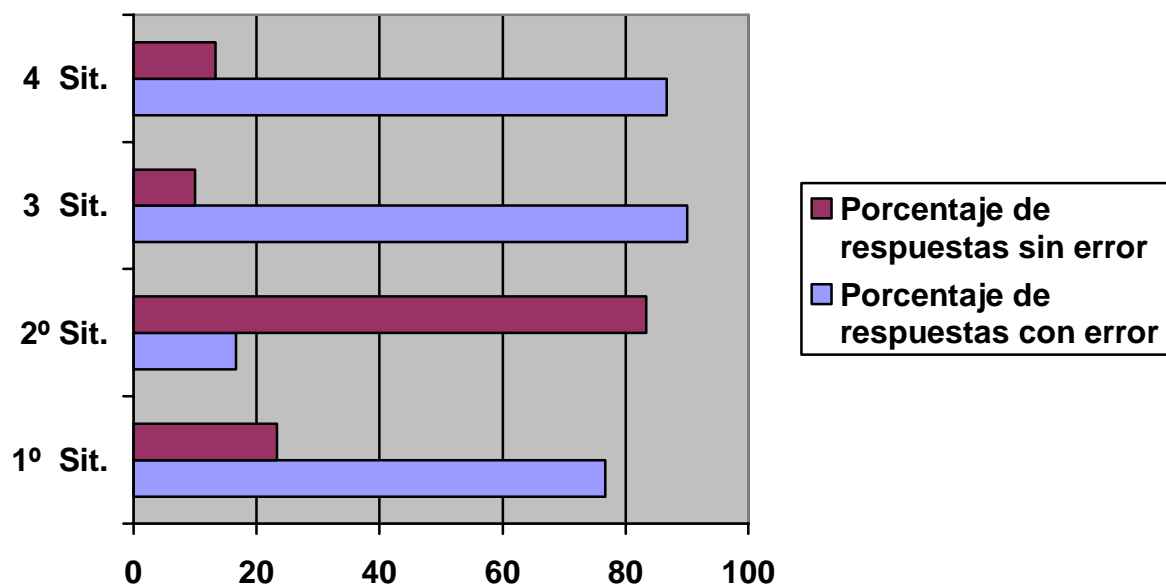
De acuerdo al análisis de las respuestas realizado de manera particular ante cada una de las situaciones a continuación se presenta un análisis comparativo de éstas desde una perspectiva global.

### **Análisis comparativo de las situaciones**

Con respecto al análisis comparativo se realizó una recopilación de datos que muestran de manera general la frecuencia de respuestas correctas e incorrectas lo cual se presenta a continuación:

Respuestas de los alumnos ante las situaciones

Situaciones	Tipos de respuestas			
	Sin error		Con error	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
1º) El problema del sastre	7	23.3	23	76.7
2º) El vendedor de aceite	25	83.3	5	16.7
2ºv) El vendedor de aceite II	3	10.0	27	90.0
3º) La sombra de la vela	4	13.3	26	86.7
4º) Canicas ganadas	11	36.6	19	63.3
TOTALES	50 de 150	33.32%	100 de 150	66.68%



En la presente gráfica basada en la tabla anterior, se muestra que en todas y cada una de las situaciones existe la posibilidad de que el alumno de nivel secundaria tienda a cometer error, y por el contrario existe una tendencia menor de que el alumno pueda resolver las situaciones problema de manera correcta en la mayoría de las situaciones.

#### 1º Situación

Las respuestas encontradas en esta situación fueron en su mayoría incorrectas debido a que el problema fue resuelto por los alumnos de manera rápida y muy concreta en las operaciones pensando que era fácil, lo cual llevo a que aparecieran 23 casos de error, que comparados con la 2º situación no tiene mucha semejanza, pero si es muy similar a las respuestas erróneas de la 3º y 4º situación, esta misma similitud se observa en las respuestas correctas pues aparecen respuestas correctas desde 4 casos de la 3º situación, hasta los 11 casa de la 4º situación.

## 2º Situación

Esta situación difiere bastante en comparación con las demás situaciones debido a que se obtuvieron los más altos porcentaje y por ende las máx. altas frecuencias de respuestas correctas, lo cual quiere decir que esta situación fue una de las más sencillas de resolver debido a que solo manejaba la delación y comparación de dos datos que se multiplicaban, la única similitud de complejidad se podría comparar con la cuarta situación debido a la facilidad de las operaciones implicadas en ambas situaciones.

## 2º Situación con variación

Por el contrario a la situación anterior en ésta situación se encontró el número mayor de errores con 27 casos que superan a los 25 casos de respuestas correctas de la respuesta anterior, debido a que el alumno no pudo dejar de comparar ésta variación de situación con la 2º situación, lo cual quiere decir que para la mayoría de los alumnos la segunda situación con variación fue una de las más difíciles ,la cual se asemeja bastante a la 3º situación tanto en el nivel de frecuencia como en el grado de dificultad para poder determinar lo relevante de lo irrelevante, aplicar una estrategia y tratar de no cometer tantos errores al momento de relacionar y hacer comparaciones con los datos.

## 3º Situación

Esta situación al igual que la anterior 2º situación con variación al parecer tuvieron un significativo grado de dificultad debido a que en ambas situaciones los alumnos respondieron con errores con un 86% y un 90% respectivamente, dicha característico hace que exista también gran diferencia entre la 1º situación y principalmente la 2º situación por la sencillez de los problemas.

#### 4º Situación

Por último este tipo de situación podemos decir que una de las más equilibradas, sin dejar de mencionar que se tiene una mayor frecuencia de respuestas con error; esto se debe a que el alumno intentó analizar de manera detallada la pregunta para captar el objetivo, aun que no todos lo lograron si hubo 11 casos de 30 es decir casi se acercaba a la mitad lo cual no se asemeja con ninguna de las anteriores situaciones debido a que éstas se van a los extremos, ya sea a un mayor número de respuestas correctas como es el caso de la 2º situación, o se encuentran también con un mayor número de respuestas incorrectas, como es el caso de la 1º situación, 3º situación y principalmente la 2º situación con variación.



## CONCLUSIONES

Podemos concluir que nuestro estudio si logró alcanzar los objetivos formulados inicialmente debido a que se plantearon problemas aritméticos en distintas situaciones donde se podrían cometer errores los cuales se presentaron en los procedimientos y razonamientos realizados por los alumnos, ya teniendo a estos como materia prima se pudo lograr analizarlos desde el momento en que aparecían dentro del razonamiento utilizado por el alumno, con esto podríamos proponer una serie de aclaraciones que se mencionarán más adelante, y también cubrir la demanda de los otros objetivos particulares implicados en lo antes dicho, ya que se determinó que errores cometieron los jóvenes de los tres grados de secundaria, se compararon y posteriormente se observaron en base a una categorización auxiliada por el Modelo de Análisis Didáctico de los Errores (MADE) propuesto por De la Torre (1996), el cual se utiliza en el análisis de las respuestas ante las situaciones para presentar los errores de manera detallada.

Asumiendo una postura psicológica podemos concluir con base en los datos, que los errores dan información acerca del proceso de enseñanza-aprendizaje, y son un elemento importante para comprender los contenidos matemáticos. Es necesario tratar de promover la parte positiva y descartar la parte negativa de los mismos, aclarando que no se trata de provocar a que se cometan errores, sino que a través del análisis y la reflexión, se pueda retomar los errores para aprender de ellos, sin burlas, sin angustias, y sin temor de que ocurran, y si no ocurren sería lo ideal, ya que de esta forma se podría acceder a un mejor proceso de enseñanza-aprendizaje.

Se concluye que en la práctica del método de exploración crítica se logró en primer lugar, observar la existencia de errores en la resolución de problemas aritméticos los cuales fueron analizados y de este análisis podemos decir lo siguiente:

En esta investigación se encontró que uno de los errores mas cometidos por los alumnos al resolver un problema aritmético se presenta en la entrada de la información, debido a que los alumnos no relacionan bien todos los datos implicados en la situación; ya que omiten algunos de éstos.

Ésta cualidad provoca que contesten de manera errónea como en el caso de la 1º situación “El problema del sastre” en donde se comete este tipo de error en 23 respuestas de los sujetos presentando un 76.7 %, lo mismo sucede en las respuestas de la 3º situación donde se encontraron 26 respuestas con error con un 86.7 %, lo cual muestra que los sujetos en el nivel secundaria no integran de forma adecuada la información y cometen errores de ejecución en las operaciones, ante un problema que requiere mayor análisis de los datos e implica una mejor comprensión al momento de realizar las relaciones de comparación.

Se puede decir que cuando se presenta al sujeto una primera situación aparentemente sencilla, y después se le agrega una variación como se da en la segunda situación y en la segunda situación con variación los sujetos en su mayoría tienden a resolver la situación con variación de forma similar a la anterior, retomando datos de la segunda situación ya que en las respuestas encontradas ante la variación se encontró una frecuencia de 27 casos la más alta de todas las respuestas con error en las situaciones aplicadas obteniendo un 90 %.

Lo cual se considera una cifra muy significativa para nuestro estudio y para aquellas personas que se interesen en la aplicación de este tipo de problemas aritméticos, consideramos que esto se debe a que el alumno no tiene la posibilidad de aplicar otro tipo de estrategia o forma de resolución ante una variación de una situación de manera independiente, cometiendo errores de despiste en el momento de la entrada de la información; y errores en la ejecución de operaciones en la resolución explicados por De la Torre (1996).

También se encontró que la cuarta situación fue una de las más equilibradas en cuanto a la resolución (en comparación a las diferencias considerables de las otras respuestas), sin dejar de mencionar que se tiene una mayor frecuencia de respuestas con error que dieron un total de 19 con un 63.3%, mientras que en respuestas correctas sin error se presentaron 11 casos con un 36.7%; esto se debe a que el alumno intentó analizar de manera detallada la pregunta para captar el objetivo, aunque no todos lo lograron, si hubo alumnos que se dieron a la tarea de comprender la situación y resolverla correctamente.

Por otro lado las respuestas correctas encontradas ante la resolución de las situaciones fueron de menor frecuencia casi en todas las situaciones excepto en la segunda situación en la cual se presenta una gran diferencia con respecto a las respuestas de las otras situaciones debido a que se observaron 25 casos y un 83.3% con resultados correctos lo que indica que el alumno tiende a contestar de manera correcta si se le plantea sólo una relación ante un par de datos pues realizando una operación de multiplicación adecuada se obtiene el resultado correcto, en los 5 casos restantes con respuestas incorrectas se encontraron errores de confusión de los datos y de incompreensión de la información en el momento de entrada de la información.

Se concluye que nuestro trabajo en base al análisis MADE realizado en la fase final se encontró que los alumnos de nuestro estudio, al igual que en los del trabajo de Schlaak (1968) en cuanto a la resolución de problemas, presentan inadecuada comprensión de los enunciados ya que en nuestro trabajo los alumnos tienen errores por la falta de comprensión de las relaciones de los datos o variables sin dar mayor peso al análisis más detallado del problema implicado en la situación.

Esta última aclaración, se observa en la primera y segunda situación con variación y de forma más evidente en la tercera situación que imperaba un grado de comprensión mayor, lo cual indica que pese al paso del tiempo se siguen dando

los mismos problemas y mismos errores que desde hace mucho tiempo fueron objeto de análisis de estudio para una futura solución.

En este mismo orden de ideas nuestro estudio cobra semejanza al estudio realizado por Ginsburg (citado por Rico, 1993) quien al estudiar a alumnos en la resolución de problemas observó al igual que en los alumnos con quienes trabajamos, que muchos de los errores surgen por utilizar estrategias y reglas personales y por hacer interpretaciones en base a los conocimientos matemáticos iniciales, puesto que sucede lo mismo en los alumnos al momento de resolver la segunda situación con variación tomando como modelo el procedimiento de la 2<sup>o</sup> situación, ante esto surgieron el mayor número de casos de error donde los alumnos utilizaron una estrategia similar ante una situación nueva interpretada como la inicial (la segunda situación).

Nuria (2001) al estudiar las dificultades comunicativas en el lenguaje matemático detectó dificultades de comprensión de normas matemáticas, obstáculos comunicativos, como la pobreza del vocabulario matemático y las negativas de los alumnos al toparse con errores o fracasos en la comunicación, ante este estudio incluido en nuestro marco teórico podemos decir que en cierta forma si se encontró falta de comprensión de normas matemáticas, pero no fue igual y difiere en la forma que los alumnos percibieron el error o fracaso en la comunicación puesto que los alumnos al creer que tenían toda la razón y dar las respuestas más lógicas, comunes y usuales se sentían confiados y sin temor a equivocarse lo cual les genera una seguridad y aunque estén mal la misma situación generaba un ambiente propicio para admirarse de lo sorprendente y creativo de los errores mismos que también generan situaciones de aprendizaje.

Para terminar esta parte de los hallazgos podemos decir que los errores también pueden funcionar como herramientas básicas para lograr ambientes de aprendizaje, que son tan fructíferos y productivos como cualquier otro tipo de materiales y lo mejor es que los errores se desarrollan y manifiestan de manera

natural y lógica, pero también pueden corregirse bajo esta misma forma, brindándoles atención antes que miedo o vergüenza, sería de gran utilidad detectarlos en las distintas situaciones didácticas, pues al final no se desaprovechan, ya que pueden resultar ser formadores y generadores de conocimiento más que el éxito escolar inmediato.

En este mismo sentido se puede concluir que los errores desde el punto de vista pedagógico se pueden utilizar en dos aspectos:

1. Para determinar en qué momento el alumno carece de un buen manejo en la entrada de la información, o si comprende bien la información, quizá no organiza en forma precisa el proceso de resolución o aplicación de estrategias, o bien, si no presenta errores en estos dos últimos momentos pero aún comete errores en la ejecución de las operaciones aritméticas el docente tendría la posibilidad de determinar en qué momento se encuentra cometiendo el error y dar una explicación adecuada para ya no volverlo a cometer y aprender de éste.
2. Es posible aprovechar los errores al retomar o reafirmar los procedimientos de resolución de algún problema, y recuperar los errores tomados como conocimientos previos para que en algún determinado momento puedan servir para enganchar nuevos conocimientos, es decir, a través de los errores observados y analizados de manera conjunta entre el maestro y alumnos, se puedan utilizarlos como un referente para anclar nuevos conocimientos, diferenciando lo correcto de lo incorrecto.

Para finalizar este apartado de conclusiones proponemos dos planteamientos que se traducen en dos preguntas: la primera hace referencia el tema central de los errores, la cual se plantea con la siguiente pregunta ¿Cómo funcionarían los errores como metodología, para crear didácticas o ambientes de aprendizaje aplicada en distintos contenidos matemáticos?

Y el otro planteamiento que se propone, es estudiar de otra forma los errores tomando en cuenta como base la presente investigación al tratar de determinar ¿Cuál es el impacto que tiene la relación, errores y método de exploración crítica utilizados como metodología de enseñanza, para mejorar el aprovechamiento en el alumno?

## BIBLIOGRAFÍA

- Astolfi, J. P. (1999). El "error" un medio para enseñar. Diada Editora, España, pp. 7-81.
- Ayala, M.I. (2001). "Tipos de razonamiento y su aplicación estratégica en el aula". Trillas, México, pp. 31 - 110.
- Bermejo, V. (1990). El niño y la aritmética. Ed. Paidós, Barcelona
- Bollas, P. (1996). "Procedimientos infantiles en la resolución de operaciones de adición y sustracción"; en Antología y programa del curso Consejo y Educación. U P N, México, pp. 73-83
- Castorina, J. A. (1988). "El rol constructivo de los errores en la adquisición de los conocimientos"; en : Castorina, J. A., Lenz, A., Fernández, S., Cavasolo, H.M., Kaufman, A.M., Palau, G. (Edit). Psicología Genética. Aspectos pedagógicos e implicaciones pedagógicas. Miño y Dávila. Buenos Aires. pp. 43-61
- Carpenter, T. P. (1985). Aprendiendo a sumar y restar: Un ejercicio sobre solución de problemas. En Enseñanza aprendizaje en resolución de problemas Ed. Silver.
- Chacon, M. (1996). Problema y error. El nuevo enfoque en la enseñanza de las Matemáticas en Revista de Educación Huaxyacac, Vol. 5 Enero-Abril Num. 5.
- Cea D'Ancona (1999) Metodología Cuantitativa. Estrategias y técnicas de investigación social. Síntesis Sociología, Madrid pp. 328-350.
- Cook, T y Reichardt, S. (2000) Métodos cualitativos y cuantitativos en investigación evaluativa. Editorial Morata, Cuarta edición Madrid pp.228.
- De la Torre, S. (1993) Aprender de los errores. El tratamiento didáctico de los errores como estrategia de innovación. Editorial Escuela Española, Madrid, pp. 15-90.
- Gallardo, A. Pinzón, (1999) Semántica versus sintaxis en la resolución de ecuaciones. en: Educación Matemática, Vol. 12 No. 2 Agosto 2000 pp. 81-96.
- Gardner, Howard (1997). La mente no escolarizada. Como piensan los niños y como deberían enseñar las escuelas. Paidós Iberica, Barcelona pp. 149-190.
- Gascón, J. Bosh, M. y Bolea, P. (2000) ¿Cómo se construyen los problemas en didáctica de las matemáticas? en: Educación Matemática, Vol. 13 No. 3 Diciembre 2001 pp. 22-63.
- Giry, M. (2002). "Aprender a razonar, aprender a pensar". Siglo XXI editores, México pp. 8 – 80.

- Hernández, R. (1998) Metodología de la investigación, Mc. Graw Hill, Segunda edición. México, D.F. pp.501.
- Inhelder, B. (1996) Aprendizaje y estructuras del conocimiento, Editorial Morata; Madrid pp. 28-91.
- Karmiloff-Smith, A. (1994) Más allá de la modularidad Editorial Alianza, Madrid
- Latapí, P. (1994). "La investigación Educativa en México" F.C.E. México pp 195 – 230.
- Luceño, C. (1999). La resolución de problemas aritméticos en el aula. Ediciones Algibe, Málaga, España pp. 115.
- Maza, C. (1989). Estructura de los problemas de suma y resta, en Sumar y restar. Ed. Visor, Madrid, España
- Maza, C. (1995). Aritmética y representación. De la comprensión del texto al uso de materiales. Ediciones Paidós Ibérica Barcelona España.
- Mardones, J. M. y Ursua, N. (1982). Filosofía de las ciencias humanas y sociales. Materiales para una fundamentación científica. Ed. Fontamara, México.
- Miranda, A., Fortes, C., y Gil, D. (1998) Dificultades del aprendizaje de las matemáticas. Un enfoque evolutivo. Ed. Algibe, Málaga, pp. 148-175.
- Núria, R. (2001) Obstáculos en el aprendizaje matemático: la diversidad de interpretación de la norma en: Educación Matemática, Vol. 13; No. 3 diciembre 2001, pp 121-128.
- Orrantía, J. (2003) El rol del conocimiento conceptual en la resolución de problemas aritméticos con estructura aditiva en Infancia y Aprendizaje, 2003 Vol. 26 No. 4 pp. 451-468.
- Padua, J. (1997) Técnicas de investigación aplicadas a las ciencias sociales, Fondo de Cultura Económica México D. F. pp. 360.
- Piaget, J. (1978) La representación del mundo en el niño. Edit. Morata, Madrid, pp. 11-36.
- Popper, K. (1979). El desarrollo del conocimiento científico. México: Siglo XXI pp. 15- 90.
- Pozo, I. (1994). Teorías cognitivas del aprendizaje. Madrid, Esp. Morata
- Rico, L. (1994). "Errores en el aprendizaje de las matemáticas". en: Kilpatrick, J., Gómez, P. y Rico, L. (Edit). Educación Matemática. Editorial Iberoamericana, Colombia. pp. 68-107.
- Tahan, M. (1980) El hombre que calculaba. Ediciones Alonso, Madrid, pp. 229.



Vinh-Bang (1992) El método clínico y la investigación en la psicología del niño. en Ajuriaguerra, A. Psicología y epistemología genéticas. Homenaje a Jean Piaget. Difusión Editorial. México, pp. 81- 120.

# ANEXOS

## Anexo 1

Tabla de frecuencias y porcentajes de respuestas de 1º situación.

Sujetos	Respuestas emitidas				
	Sin error	Con error			
	1a) Suma iterada (2m) con doble corte en el quinto día 5 días	1bI) Multiplica corte de cada día (2m) por 6 = 12 6 días	1bII) Divide trazo de tela 12m entre 2 metros 6 días	1bIII) Suma iterada de medida de corte por día 6 días	1c) Multiplica el trozo de tela (12m) por un día de corte 6 días
1		x			
2		x			
3			x		
4	x				
5		x			
6			x		
7			x		
8	x				
9				x	
10		x			
11			x		
12		x			
13	x				
14	x				
15	x				
16		x			
17				x	
18				x	
19	x				
20		x			
21				x	
22		x			
23		x			
24			x		
25					x
26		x			
27		x			
28				x	
29		x			
30	x				
<b>Frecuencias</b>	7	12	5	5	1
<b>Porcentajes</b>	23.3	40.0	16.7	16.7	3.3

## Anexo 2

Tabla de frecuencias y porcentajes de respuestas de 2º situación

Sujetos	Respuestas emitidas					
	Sin error	Con error				
	2a) Multiplica 10 botellas por 5 días y después 50 por 9. <b>450</b>	2bl) Multiplicación de 9 x 10a de la vela <b>90</b>	2bl) Suma iterada de 10 botellas en 5 días multiplica 50 x 9 y divide 450/5 <b>90</b>	2c) Multiplica las botellas de cada día por su costo (10x9) <b>60</b>	2d) Suma iterada de costo de botella y multiplica <b>44</b>	2e) Multiplica costo de cada botella por las 10 que vende al día <b>900</b>
1	X					
2	X					
3	X					
4	X					
5				X		
6	X					
7	X					
8	X					
9		X				
10					X	
11	X					
12	X					
13	X					
14	X					
15	X					
16	X					
17	X					
18						X
19	X					
20	X					
21	X					
22			X			
23	X					
24	X					
25	X					
26	X					
27	X					
28	X					
29	X					
30	X					
<b>Frecuencias</b>	25	1	1	1	1	1
<b>Porcentajes</b>	83.3	3.3	3.3	3.3	3.3	3.3

Anexo 3 Tabla de frecuencias y porcentajes de respuestas de 2º situación con variación

Sujetos	Respuestas emitidas						
	Sin error	Con error					
<b>Respuesta a 1º pregunta</b>	2va1 Multiplica $5 \times 8 = 40$ y 40 lo multiplica por 10 días $40 \times 10$ obtiene como resultado 400  (400)	2vb1 Multiplica el numero de botellas (50) por el precio (8) $50 \times 8$ teniendo como respuesta 400  (400)	2vc1 Multiplica las botellas (50) por los días y después multiplica $500 \times 8$ ante esto contesta 4000  (4000)	2vd1 Multiplica $8 \times 10$ botellas y obtiene 800 después resta 800-450 de la situación anterior 800-450 de lo que resultan 350  (350)	2ve1 Centrado solo en multiplicar el numero de botellas por los 10 días $50 \times 10$ obteniendo 500  (500)	2vf1 Multiplica el precio de botella 8 por 10 días que vende el aceite $8 \times 10$ de lo que resulta 80  (80)	2vg1.-No considera alguna ganancia, sin relación ni comparación de datos centrado en la segunda pregunta sin agregar respuesta  (0)
<b>Respuesta a 2º pregunta</b>	2va2 Si gana 40 en el día multiplica $40 \times 3 = 120$ y resta $400 - 120$ de lo que resulta 280  (280)	2vb2 Divide $400/10 = 40$ después multiplica por el numero de días $40 \times 3$ teniendo como respuesta 120  (120)	2vc2 Divide $4000/10$ y multiplica $400 \times 3 = 1200$ y resta $4000 - 1200$ Obteniendo como respuesta 2800  (2800)	2vd2 Multiplica $15 \times 8$ y se lo resta al resultado de la 1a multiplicación $800 - 120$ dando como respuesta 680  (680)	2ve2 Multiplica el numero de botellas por 3 días trabajados $50 \times 3$ de lo que resulta 150  (150)	2vf2 Multiplica el costo de botellas por 3 días $8 \times 3 = 24$ después resta 24 al resultado anterior $80 - 24 = 66$ para lo cual contesta 66  (66)	2vg2 Considera vender las 50 botellas en 3 días y no perder nada, sin relacionar ni comparar datos teniendo un resultado de 0  (0)
1				X			
2		X					
3					X		
4			X				
5				X			
6		X					
7		X					
8		X					
9			X				
10		X					
11		X					
12		X					
13			X				
14		X					
15			X				
16			X				
17	X						
18						X	
19		X					
20		X					
21			X				
22		X					
23			X				
24					X		
25		X					
26	X						
27							X
28			X				
29	X						
30		X					
Frecuencias	3	13	8	2	2	1	1
Porcentajes	10.0	43.3	26.7	6.70	6.70	3.3	3.3

## Anexo 4

Tabla de frecuencias y porcentajes de respuestas de 3º situación.

Sujetos	Respuestas emitidas					
	Sin error	Con error				
	3a) Suma y divide para encontrar respuesta dando como resultado 4.  4 veces	3b) Suma iterada de la medida de la vela (Suma tres veces 15).  3 veces	3c) Resta la medida de la vela (15cm) a la sombra (45cm) dando como resultado 30 cm  30 cm	3d) Respuesta inversa, resta 45-15 y divide 30/15 lo que le resulto 2 Veces  2 veces	3e) Centrado en el dato final sin relación a la comparación dando el resultado de 45  45	3f) Sólo multiplica los datos del problema 45x15  275
1	x					
2				X		
3			x			
4			x			
5	x					
6	x					
7			x			
8		x				
9		x				
10					x	
11				X		
12			x			
13		x				
14		x				
15		x				
16			x			
17			x			
18						x
19		x				
20				x		
21				x		
22						x
23			x			
24		x				
25		x				
26				x		
27				x		
28			x			
29	x					
30		x				
<b>Frecuencias</b>	4	9	8	6	1	2
<b>Porcentajes</b>	13.3	30.0	26.6	20.0	3.3	6.6

## Anexo 5

Tabla de frecuencias y porcentajes de respuestas de 4º situación.

Sujetos	Respuestas emitidas			
	Sin error	Con		Error
	4a) Suma únicamente las canicas ganadas $5+7=12$  <b>12</b>	4b) Resta $7-3=4$ después suma $4+5=9$ , y suma las 4 canicas encontradas $9+4=13$  <b>13</b>	4c) Resta $7-3=4$ después suma las canicas que gana al último $4+5=9$  <b>9</b>	4d) Resta $7-3=5$ al resultado le suma 5 canicas ganadas $5+5=10$ y suma $10+4=14$  <b>14</b>
1	x			
2		x		
3		x		
4	x			
5	x			
6			x	
7		x		
8		x		
9	x			
10		x		
11		x		
12	x			
13	x			
14	x			
15	x			
16			x	
17		x		
18	x			
19	x			
20		x		
21		x		
22		x		
23				X
24		x		
25		x		
26		x		
27		x		
28		x		
29			x	
30	x			
<b>Frecuencias</b>	<b>11</b>	<b>15</b>	<b>3</b>	<b>1</b>
<b>Porcentajes</b>	<b>36.7%</b>	<b>50%</b>	<b>10%</b>	<b>3.3%</b>

