SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

POTENCIAL DE LA CALCULADORA EN LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS CON SIGNO Y SUS OPERACIONES

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN DESARROLLO EDUCATIVO
CON ESPECIALIDAD EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
PRESENTA

SILVESTRE ORTEGA ARELLANO

DIRECTOR DE TESIS:
DR. TENOCH ESAÚ CEDILLO ÁVALOS

México, D.F., Diciembre de 2005.

AGRADECIMIENTOS

A mi madre y a mi padre (✝) y a ustedes hermanos, gracias por su apoyo moral.

A mis alumnos de la Sec. 39 que les dio gusto siguiera estudiando, y a los de la 90, en especial el 1º “C” por su participación entusiasta para la realización de esta tesis.

A todos mis compañeros y amigos, en especial a ti Enrique J Sánchez, por las traducciones de los diferentes textos en inglés.

A todos mis compañeros de la Maestría: Alfredo, Gloria, Chío, Naty y Rubén.

A Todos mis maestros de la UPN, en especial a los de la línea Educación Matemática por sus comentarios en pro de esta tesis.

A la Maestra Santa, le agradezco sus comentarios, observaciones y el tiempo que dio para concluir este trabajo.

Al CONACYT por el apoyo otorgado a través de la beca con número de registro 177950.

A mi asesor, por compartir sus conocimientos, por guiar el trabajo de tesis y por hacerme ver la matemática desde otra perspectiva.
Dr. Cedillo, mil gracias.

A mi esposa que me animó a hacer la maestría y que confió siempre en mí.
Te agradezco tu apoyo y comprensión.

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo está estructurado en 7 capítulos. En el capítulo 1, Presentación y justificación del problema de investigación, se aborda la problemática de la matemática escolar en referencia a los resultados que los estudiantes mexicanos han obtenido en evaluaciones internacionales, lo cual sugiere la generación de nuevos programas orientados a la actualización de la práctica docente y una revisión de los planes y programas de estudio de la enseñanza básica. Se hace notar que en México se incluye como un tema básico *los números con signo* en el área de Preálgebra y el énfasis que se da a la inclusión de la calculadora; por ende, en la necesidad de cultivar nuevas formas de enseñanza. En la segunda parte del capítulo 2, se presentan las preguntas de investigación que orientaron la realización de este estudio. Por último, se plantean los resultados del PRONAP, que los maestros sustentantes obtuvieron en los ciclos escolares 2001-2002, 2002-2003, 2003-2004 y 2004-2005 en el tema preálgebra.

En el Capítulo 2, “Revisión de la literatura de investigación”, se discuten las investigaciones realizadas en torno al álgebra y en un segundo momento, se abordan las investigaciones sobre los números con signo. En el Capítulo 3, denominado “Referente Teórico”, se discuten dos grandes corrientes del aprendizaje: el cognoscitivismo y el sociocultural; el propósito de esta sección es plantear el enfoque educativo que se adopta en este trabajo. Asimismo, se aborda el enfoque para la enseñanza de los números con signo *como lenguaje en uso,* que se basa en proponer el aprendizaje de manera similar a la forma en que adquirimos la lengua materna (Cedillo, 1996); se eligió abordar este enfoque de enseñanza como instrumento que ayude a los alumnos en el proceso de construcción de significados con el apoyo de la calculadora algebraica.

El Capítulo 4 hace referencia a la metodología implementada para la realización de esta investigación. Se eligió el método de análisis cualitativo debido a que el tipo de datos que se obtienen de esta investigación son episodios en el aula y porque el método de análisis cualitativo nos permite estudiar procesos, lo cual es un asunto fundamental en cuestiones sobre aprendizaje. Asimismo, se aborda lo correspondiente a los sujetos que participaron en el trabajo de campo, el ambiente de trabajo y las actividades de enseñanza. En este capítulo se describe el diseño de la investigación de campo, en esta sección hay un apartado que trata de las posibles estrategias de solución que los alumnos podrán dar a las hojas de trabajo a través del uso de la calculadora, esto tiene como propósito diseñar un proyecto de enseñanza-aprendizaje con base en un análisis a priori que permita al profesor (investigador) orientar a los alumnos en concordancia con los objetivos de este trabajo. Las actividades de las hojas de trabajo abordan el tema *números con signo y sus operaciones* y éstas son tomadas de Cedillo (1999).

En el capítulo 5, denominado "Descripción por sesión y observaciones", se analizan las trascripciones de las vídeo grabaciones correspondientes a las sesiones de trabajo en el aula y se describen los hallazgos correspondientes, los cuales muestran interesantes razonamientos por parte de los alumnos, las principales dificultades que enfrentaron, los procedimientos que usaron para resolver problemas, los significados que asignaron a las expresiones numéricas, algunas generalizaciones, todo esto mediante el uso de la calculadora.

En el Capítulo 6 se revisan las respuestas que los alumnos dieron en las hojas de trabajo, dando como producto una valiosa información empírica sobre los efectos de usar la calculadora respecto a la familiarización de los estudiantes con los números con signo y sus operaciones; información que en algunos casos da respuesta a las preguntas iniciales de la investigación y en otros, genera otras líneas de investigación.

En el capítulo 7, se presentan las conclusiones de este estudio, esta sección constituye uno de los apartados más importantes de este trabajo; en éste se formulan respuestas a las preguntas de investigación con base en los datos empíricos que se recabaron, posteriormente se comentan las conclusiones de esta tesis en el marco de las investigaciones reportadas en el capítulo dedicado a la revisión de literatura; por último, se discuten los obstáculos que algunos autores han reportado y los avances que podrían obtenerse empleando la calculadora.

CAPÍTULO 1
EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Antecedentes

El desempeño de los estudiantes en las matemáticas escolares continúa siendo un objetivo primordial a nivel internacional. En particular, los resultados obtenidos por los estudiantes mexicanos en las evaluaciones internacionales que se han efectuado recientemente (Beaton et al, 1996; OECD, 2000) han acentuado la atención que la Secretaría de Educación Pública dedica a la enseñanza y aprendizaje de esta disciplina (Plan Nacional de Educación, 2000-2006, SEP). El análisis de esas evaluaciones sugiere enfáticamente que una línea que debe atenderse para mejorar esos resultados es la generación de nuevos programas orientados a la actualización de la práctica docente y el conocimiento de la disciplina de los profesores de matemáticas en servicio.

La investigación realizada en los últimos 30 años sobre el aprendizaje de las matemáticas ha proporcionado un conocimiento importante que plantea la necesidad de nuevas formas de enseñanza, nuevos paradigmas para la formación de profesores, un nuevo currículo y nuevas formas de evaluación (Kilpatrick, 1992). Los resultados de esas investigaciones han ejercido influencia en el diseño de los planes y programas de estudio de la enseñanza básica y, por lo mismo, nuevas exigencias en el desempeño de los profesores. En particular, en México se incluyeron las líneas temáticas de Preálgebra y Presentación y Tratamiento de la Información en los programas de estudio (Educación Básica, Secundaria, Plan y Programas de Estudio, SEP, 1993).

Como se señaló anteriormente, un objetivo de esta tesis es abordar el tema de números con signo empleando como recurso didáctico la calculadora y estudiar en qué medida se pueden superar las dificultades en el aprendizaje que las investigaciones recientes reportan en torno a este tema. A este respecto, sabemos que varios de los contenidos estipulados en los planes y programas actuales ya estaban contemplados en los anteriores, sin embargo, la forma de abordarlos es una de las grandes diferencias que el actual programa manifiesta; también se destaca como una diferencia importante la inclusión de las nuevas tecnologías como recursos didácticos para plantear nuevos problemas o para favorecer una mayor reflexión (el vídeo, la calculadora y la computadora). En particular, se hace énfasis en que la calculadora puede ser utilizada para retroalimentar el aprendizaje, profundizar algunas nociones, desarrollar ciertas habilidades y como un apoyo en el descubrimiento de regularidades (Alarcón, 2001).

1.2. La problemática

El Álgebra ha sido tradicionalmente uno de los temas centrales de la enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria y conserva este carácter en los nuevos programas, sólo que ahora se contempla una aproximación inicial menos abrupta (Alarcón, 1999). Con esta finalidad se propone su estudio desde el primer grado de educación secundaria, acudiendo a los conocimientos previos que tienen los alumnos sobre aritmética.

El estudio y manejo del álgebra representa en la mayoría de los alumnos un problema que se manifiesta en el bajo aprovechamiento y en la reprobación de la asignatura de matemáticas; a su vez, como docentes tal vez no le hemos dado la importancia a toda esa gama de actividades que anteceden al álgebra, como lo sugieren los resultados del examen del PRONAP 2001-2002, 2002-2003, 2003-2004 y 2004-2005, del curso *La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria,* en el contenido de preálgebra. En particular, en el ciclo escolar 2001-2002 pueden observarse algunas deficiencias que tienen los profesores de Matemáticas respecto al dominio del contenido algebraico y al enfoque de los nuevos planes y programas; esto puede resumirse en que sólo el 35 % de los profesores poseen un dominio aceptable en estos temas.

Rojano (1991) señala que parte de los procesos de adquisición del lenguaje algebraico tienen lugar dentro de un período de transición de un tipo de pensamiento, el aritmético, a otro, el algebraico; dicho de otra manera, la ausencia del tema del preálgebra puede conducir a una agudización de las dificultades reportadas por la investigación en el proceso de apropiación de las nociones y uso del álgebra simbólica.

Considerando los conocimientos previos de los alumnos respecto a los números, ellos sólo han trabajado en la primaria los naturales, las fracciones y decimales positivos; en secundaria, los alumnos extienden su conocimiento respecto a los números con el tema de números con signo, los cuales involucran a los enteros, las fracciones y los decimales positivos y negativos.

Como ya se señaló, este acercamiento debe ser paulatino ya que los alumnos se enfrentan a dificultades como dar sentido a cantidades negativas; en la suma la idea de incrementar cambia; algo similar sucede en la resta, en la multiplicación y en la división; nuevas reglas en la operatividad, aceptación del número negativo como resultado de operaciones, la dualidad de los signos + y – como signos del número y de operación.

De lo anterior se desprende que la importancia del estudio de los números con signo radica en su presencia implícita en contenidos propios del álgebra (iniciación al lenguaje algebraico, ecuaciones de primer grado, plano cartesiano, sistema de ecuaciones, operaciones con monomios y polinomios, funciones, productos notables y factorización entre otros). De no tener cuidado en la enseñanza de los números con signo, el aprendizaje de este tema puede constituir uno de los obstáculos perdurables que tendrán los alumnos en el estudio del álgebra (Gallardo,1994).

1.3. El problema de investigación

Iniciaremos esta sección analizando sucintamente el tema de los números con signo en el marco de su ubicación en el Plan y Programas de estudio 1993. Anteriormente, en la escuela secundaria se abordaba el estudio de los números con signo con el tratamiento de los números enteros después de A ver trabajado con los números naturales; en el actual Plan y Programas de Estudio de Educación Secundaria (1993) se ha hecho hincapié en este contenido y se propone trabajarlo no como un tema que se aborda secuencialmente en la línea de desarrollo de la aritmética, sino como un tema de preálgebra, debido a que corresponde a un nuevo sistema numérico que incorpora reglas de operación distintas y otros criterios para establecer el orden entre esos números; esos aspectos estructurales del sistema de los números con signo le asocian características algebraicas que no se derivan directamente del acervo aritmético que los estudiantes poseen al término de la escuela primaria. El tipo de razonamiento formal que se requiere para una comprensión cabal de las reglas que gobiernan la operatividad de los números con signo y la relación de orden entre éstos, van claramente más allá de los referentes de la vida cotidiana a que puede acudirse para ejemplificar los conceptos y relaciones aritméticas.

Lo antes expuesto es centralmente la razón por la que se incluye esta sección, consideramos relevante señalar que los resultados de investigación que reportan dificultades en el aprendizaje de los números con signo ya se reflejan en el diseño del plan y programas de estudio oficiales para los cursos de matemáticas de la escuela secundaria en México. Esto aunado al desempeño aún insatisfactorio de nuestros estudiantes en las evaluaciones internacionales, hace evidente la necesidad de continuar realizando estudios basados en la puesta en práctica de propuestas didácticas alternativas con la intención de documentar una experiencia, aunque modesta, que pudiera ser una aportación para el trabajo en el aula.

En los programas oficiales se recomienda la introducción de los números con signo en el primer grado mediante la presentación de ejemplos para la suma y la resta; para el tratamiento de este tema se recomienda el uso de la calculadora y en particular de las funciones asociadas a las teclas:+/-, M+ y M- (Alarcón, 1999). En el de segundo grado se retoman los números con signo iniciando con una revisión de la suma y la resta y se agrega la multiplicación y la división, particularmente las reglas de los signos. Creemos pertinente destacar que no es casual que el Plan y Programas de estudio proponga a los números con signo antes de abordar el álgebra, ya que este sistema numérico se emplea instrumentalmente en temas algebraicos, lo cual se hace evidente en el párrafo que hace referencia al tercer grado.

El tema números con signo y su ubicación en el currículo es vertical en el sentido de Tyler (1986). Este autor llama relaciones verticales a los casos en que, como se observa en el currículo mexicano, en el primer grado sólo se ve la suma y la resta de los números con signo y en segundo grado, después de una revisión de éstos, se agrega la multiplicación y la división. Además de la relación vertical se observa un criterio secuencial, el cual enfatiza sobre la importancia de que cada experiencia sucesiva se funde sobre la precedente, pero avanza en amplitud y en profundidad (Tyler, 1986).

En tercer grado ya no se aborda el contenido de números con signo como tal, sino que se aborda en forma implícita al relacionarlo con otros contenidos de la misma área como son: iniciación al lenguaje algebraico, ecuaciones de primer grado, plano cartesiano, sistema de ecuaciones, operaciones con monomios y polinomios, funciones, productos notables y factorización, entre otros. A esta postura Tyler (1986) la denomina organización horizontal.

Alarcón (1999) reporta que no resulta difícil para los alumnos utilizar los símbolos + y - para indicar cómo se ubican en la recta numérica ciertas cantidades respecto a otra que se toma como referencia, pero les resulta complicado plantear y realizar operaciones donde intervienen números con signo. En este trabajo asumimos la hipótesis de que esta complejidad puede ser disminuida usando la calculadora como auxiliar en la solución de problemas; pueden explotarse los recursos que ofrece esa máquina para realizar un acercamiento empírico a las leyes de los signos y propiciar un desarrollo intuitivo de nociones acerca de las operaciones y el orden de los números negativos, así como desarrollar algunas habilidades del pensamiento matemático (Cedillo, 1998).

Los números negativos son el resultado de un proceso de abstracción que desempeñó un papel central en el desarrollo del álgebra y sus procedimientos, dada la naturaleza abstracta de este sistema numérico, nos parece interesante estudiar los resultados de una propuesta de enseñanza que brinde oportunidades a los alumnos para abordar actividades y problemas empleando procedimientos no convencionales y validándolos con la retroalimentación que brinda la calculadora. Consideramos que esto favorecerá una mayor comprensión que permitirá a los alumnos “descubrir” los procedimientos convencionales.

Por lo antes expuesto, en esta tesis nos proponemos estudiar las estrategias y nociones que pueden desarrollar los estudiantes cuando abordan el aprendizaje de los números con signo empleando como recurso didáctico la calculadora, adoptando como enfoque de enseñanza el propuesto por Cedillo (1996) para abordar el álgebra como lenguaje en uso.

Preguntas de investigación

1. ¿Qué estrategias desarrollan los alumnos en un ambiente de enseñanza basado en el uso de la calculadora?
2. ¿El uso de la calculadora permitirá a los alumnos descubrir leyes, regularidades y/o patrones en la operatividad con números con signo?
3. ¿Pueden los estudiantes realizar operaciones con números con signo correctamente sin usar la calculadora?
4. ¿Qué obstáculos reportados por investigaciones previas pueden salvar los alumnos bajo el enfoque de enseñanza que se propone en esta tesis?

CAPÍTULO 2
REVISIÓN DE LITERATURA DE INVESTIGACIÓN

2.1 El álgebra: la transición desde la aritmética

En ésta sección se retoma el trabajo de Nickson (2000) quien analiza diversas investigaciones acerca de las relaciones entre la aritmética y el álgebra. Además, se examinan las diferencias entre la aritmética y el álgebra identificadas por la investigación y algunas perspectivas teóricas que nos ayudan a entender la naturaleza de esas diferencias; posteriormente se revisan cuestiones mas especificas, como la resolución de ecuaciones y de problemas verbales, la simbolización, el uso del signo de igualdad y el papel de la tecnología en la enseñanza del álgebra.

Diferencias entre la aritmética y el álgebra

En los últimos años se ha reportado la necesidad de que los alumnos asignen significados correctos a los números para que puedan emplear la aritmética como una herramienta para su razonamiento y, con base en esto, tener mejores posibilidades para abordar el estudio del álgebra (Peck y Jencks, 1988). Asimismo, se observan dificultades cuando los alumnos trasladan procedimientos de un contexto aritmético a un contexto algebraico y se sugiere que esto ocurre porque no respetan las restricciones formales que se aplican en niveles mas abstractos. A este respecto, Vygotsky (1962) plantea una analogía en la que sugiere que el álgebra es para la aritmética lo que el lenguaje escrito es para la lengua. Argumenta que no es posible leer y escribir coherente e inteligentemente sin un entendimiento aceptable de la naturaleza del habla y de las reglas generales que se aplican para el uso aceptado de las palabras y sus significados. Con base en esto propone que no es posible apropiarse de las habilidades para “hacer álgebra” sin que antes se tenga un entendimiento y una habilidad para “hacer aritmética”.

Vergnaud (1997), señala que el álgebra es demandante para los niños porque no sólo requiere llevar a cabo cálculos simbólicos, sino también involucra el aprendizaje de nuevos conceptos, como ecuación, fórmula, función, variable y parámetro. Mientras que las unidades de significado en la aritmética son números, las unidades de significado en el álgebra son nuevos objetos matemáticos; aunque los símbolos por sí mismos pueden tener significado, en el álgebra están relacionados a diferentes objetos matemáticos (no solamente números) y a diferentes operaciones (no sólo a la adición, sustracción, multiplicación y división).

Aprender a reconocer nuevos objetos matemáticos es una dificultad mayor que los estudiantes deben superar para realizar una transición efectiva de la actividad aritmética a la algebraica (Sutherland, 1987). Esto puede ser visto como un salto de la 'realidad' de la aritmética al mundo más abstracto del álgebra; lo sorprendente es que muchos docentes esperan que el alumno lo realice por sí mismo.

Vergnaud (1997) señala que los niños son capaces de utilizar métodos intuitivos cuando solucionan problemas mediante procedimientos aritméticos y con esto evitan el uso de estructuras algebraicas implícitas en el proceso de resolución de esos problemas. Sin embargo, en el álgebra, las estructuras no pueden ser ignoradas y tienen que ser reconocidas y usadas si se quiere que los problemas algebraicos sean solucionados satisfactoriamente (Kieran, 1989). La investigación sugiere que algunas de las dificultades que los niños tienen en el reconocimiento y uso de esas estructuras surgen por formas erróneas en que los alumnos perciben algunos de los símbolos que se emplean en el álgebra; en particular, los alumnos continúan usando los símbolos como lo hicieron en la aritmética, sin considerar los aspectos estructurales que no pueden ser ignorados en el nivel algebraico. Parece ser que sin un entendimiento adecuado de este cambio en los roles representados por los símbolos, los niños no pueden ser capaces de realizar la transición del pensamiento aritmético al algebraico. Estas diferencias necesitan ser tratadas explícitamente para que los niños aprendan álgebra de forma significativa (Chaiklin y Lesgold 1984; Kieran 1992; Boulton–Lewis *et al.* 1997).

La estructura en el álgebra

La estructura es un aspecto fundamental del álgebra que necesita ser considerado en la enseñanza. Freudenthal (1991) señala que la estructura es una forma abstracta de una expresión lingüística, por ejemplo, en el caso de la suma, si agregas una cosa (*a*) a otra *(b)* obtienes una tercera *(c)*. El uso de la palabra 'estructura' en el contexto del álgebra es objeto de debate, Kieran (1989) identificó algunas de las complejidades en su uso que se describen a continuación.

Estructura superficial. Kieran llama *estructura superficial* a las relaciones entre los diferentes términos y operaciones que se utilizan en las expresiones algebraicas (o aritméticas). Por ejemplo, en la expresión $2x+y=7$, la estructura está determinada por el orden en el que los símbolos crean la apariencia de la expresión.

Estructura sistémica. Se refiere a las propiedades de las operaciones dentro de una expresión algebraica y las relaciones entre los términos de la expresión que provienen del sistema matemático. Por ejemplo, la expresión $5+3(x+2)$ puede ser escrita como $3(x+2)+5$ utilizando la ley conmutativa, o como $3x+11$ utilizando la ley distributiva y la adición.

Estructura de una ecuación. Se refiere a la estructura de una ecuación (como en la estructura sistémica), pero va más allá porque incluye las propiedades de la relación de *igualdad.* Esto quiere decir que, así como los otros tipos de propiedades incluidas en la estructura sistémica, se cumplen las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva. Por ejemplo, para la resolución de la ecuación*3(x+2)+5=20*, el balance en ambos lados del signo de igualdad debe ser sostenido en forma uniforme.

Kieran (1989) argumenta que identificar estos niveles en que se aplica la palabra estructura ayuda a esclarecer los orígenes de algunas de las confusiones que surgen en los alumnos cuando llegan al estudio del álgebra. La importancia de hacer esto explícito en la enseñanza de los números puede permitir que estas estructuras lleguen a ser bien entendidas y establecidas por los alumnos (Chaiklin & Lesgold, 1984). Vale la pena señalar que en el proceso de transición de la aritmética al álgebra las reglas que gobiernan el uso del signo de igualdad y el concepto de incógnita pueden convertirse en barreras que surgen de un concepto erróneo acerca de la estructura. Por ejemplo, se les presenta a los niños desde edad muy temprana el uso del signo de igualdad y varios símbolos para representar una incógnita. Cuando enfrentan expresiones como *4+5 =?*, el mensaje que reciben del signo de igualdad "es que indica algo que tiene que hacerse" y que requiere cierta acción con respecto a ambos números (Kieran, 1992; Sáenz-Ludlow, 1998). En los periodos tempranos, generalmente se enseña a los niños a llevar a cabo dichos procedimientos en conexión con objetos físicos, regularmente relacionados con la respuesta a preguntas del tipo "¿cuantos....?", pero pronto se enfrentan con problemas numéricos que carecen de contexto.

Al resolver ecuaciones, en lugar de que los alumnos piensen en equivalencia, encuentran frecuentemente una respuesta "deshaciendo operaciones" por medio de una secuencia de operaciones inversas, sin que se formalice el problema ni la solución. Kieran se refiere a esto argumentando que en aritmética el objetivo es encontrar la respuesta y este objetivo es regularmente alcanzado llevando a cabo algunas secuencias de operaciones aritméticas entre los datos numéricos de los problemas o de los valores inmediatos derivados del mismo (Kieran, 1992), pero en el caso del álgebra, por ejemplo, x+y, no saben qué hacer y construyen significados para expresiones abiertas como es las que provienen de su experiencia en aritmética, por ejemplo, x+y=z, por el simple hecho de que creen que se trata de “dar una respuesta”.

El significado de equivalencia en términos de una relación reflexiva, simétrica y transitiva es importante para el estudio del álgebra y esto no es necesariamente parte del pensamiento de los niños cuando se enfrentan con problemas numéricos simples de este tipo. En lugar de eso, la idea de llegar a una respuesta se fija de manera importante en sus mentes cuando se enfrentan con el signo de igualdad, mientras que en una situación algebraica de resolución de problemas se requiere algo distinto (Lesh, Post y Behr, 1987).

Una situación similar surge con la idea de incógnita. Muy temprano en sus experiencias aritméticas se plantea a los niños preguntas del tipo *4+□=9,* donde el cuadro significa el número que está ‘perdido’ y los niños tienen que encontrar su valor. Expresiones de este tipo se presentan regularmente en un contexto donde los números se relacionan con objetos o cosas especificas. Por ejemplo, se les pregunta cuántos bloques tienen que ser agregados a un grupo de cuatro bloques para que dé un total de nueve bloques. En una situación como ésta, los niños son capaces de realizar intuitivamente una variedad de estrategias, como contar hacia adelante o hacia atrás (Vergnaud, 1997). Cuando “□” es remplazado por una letra, como en *4+a=9,* muchos niños continúan manejando la letra *a* como una etiqueta para un objeto o cosa. Aunque esto puede facilitar la introducción de las ecuaciones más simples, dicha situación cambia radicalmente cuando se les presentan expresiones que involucran más de una incógnita; se ha observado que en este caso muchos alumnos continúan manejándolo de esta manera sin atender las restricciones estructurales que impuestas en el álgebra, de esta forma sus métodos inevitablemente fracasan (Kieran 1992).

Las dificultades que surgen en los alumnos como resultado de la carencia de entendimiento de las diferencias en el significado del signo de igualdad y de las literales (como incógnitas o variables), proporcionan ejemplos de las diferencias cruciales que se aprecian entre la aritmética y el álgebra. Algunas de estas dificultades pueden ser resueltas en los primeros grados por medio de estrategias simples, como hacer énfasis en las propiedades de la relación de igualdad (reflexividad, simetría y transitividad).

Aspectos estructurales y de procedimiento

Kieran (1992) destaca que las grandes diferencias entre la aritmética y el álgebra se sitúan en los procesos de *procedimiento* y de *transformación.* La aritmética es vista como si únicamente estuviera relacionada con los *procedimientos,* donde las operaciones son llevadas a cabo con números para llegar a otros números, por ejemplo, $15-7=8$. Kieran contrasta esto con expresiones del tipo de $3x+y$, donde, remplazando x por 4, y y por 5, se obtiene como resultado 17. Ella hace el señalamiento de que aunque $3x+y$ es una expresión algebraica, la respuesta que se pide es numérica y corresponde a un *procedimiento* natural del álgebra. En cambio, la naturaleza *estructural* del álgebra es ejemplificada por medio de las operaciones con una expresión algebraica para producir otra que no es estrictamente numérica. Por ejemplo, $3x+y+4x=7x+y$.

Las diferencias entre ambos ejemplos se resumen a continuación. En el álgebra:

(a) Los objetos con los que se opera son expresiones algebraicas y no son estrictamente numéricas, como en el caso de la aritmética.

(b) Las operaciones no son sólo cálculos numéricos, como en la aritmética.
(c) Los resultados pueden ser numéricos u otras expresiones algebraicas.

Kieran destaca que generalmente la enseñanza del álgebra empieza con la sustitución, la cual refleja un aspecto procedimental del álgebra que se basa en el cálculo numérico y posteriormente se abordan aspectos estructurales de las operaciones con expresiones algebraicas, como la simplificación y resolución de ecuaciones por medio de los métodos formales, sin que esta transición se haga explicita. En la realización de esto, se les pide a los profesores que sus alumnos lleven a cabo un cambio cognitivo considerable sin que se les haga completamente conscientes de la naturaleza de ese cambio. Los alumnos son abruptamente sumergidos en un aspecto más formal y más abstracto de la materia sin que lleguen a ser conscientes del hecho de que se están apartando del mundo de la aritmética y de sus fundamentos más tangibles.

Kieran (1992), identifica las exigencias cognitivas conforme los niños van progresando del pensamiento aritmético al algebraico. Por un lado, los alumnos son introducidos al tratamiento de representaciones simbólicas, las cuales tienen poco o nulo contenido semántico. Por otro, los niños están al mismo tiempo modificando sus primeras interpretaciones de ciertos símbolos y empiezan a representar las relaciones entre los datos de un problema con operaciones que regularmente se plantean en orden inverso a aquellas que utilizaron para la resolución de problemas similares en la aritmética. Kieran (1992, p.393) proporciona el siguiente ejemplo:

> Daniel fue a visitar a su abuela, quien le dio $1.50. Después compró un libro que le costó $3.20. Si al final de

esto él tiene \$2.30 sobrantes, ¿cuánto dinero tenia antes de visitar a su abuela?

Cuando el problema se plantea mediante una ecuación, por ejemplo, x+1.50–3.20=2.30, la expresión se desarrolla exactamente en el orden inverso al que el alumno emplearía si resuelve el problema aritméticamente: 2.30+3.20=5.50; 5.50-1.50=4.00.

Como Vergnaud (1997) y otros han establecido, cuando se solucionan dichos problemas los niños trabajan “hacia atrás”. El signo de igualdad es interpretado como “da” y no como “es igual a” y esto parece inducir una señal para proceder de izquierda a derecha en la resolución del problema. Las propiedades transitiva y simétrica de la igualdad no son respetadas y no existe un intento de modelar el problema algebraicamente.

Para entender los aspectos estructurales del álgebra, la atención de los niños necesita ser llevada explícitamente a la estructura implícita de los problemas de este tipo para ayudarlos a darse cuenta de que sus enfoques son matemáticamente incorrectos. Por ejemplo, aunque algunos alumnos encuentran respuestas correctas a este problema, manifiestan en sus procedimiento una concepción equivocada del signo de igualdad, por ejemplo, 2.30+3.20=5.50–1.50=4.00. El significado correcto del signo de igualdad no es respetado: 2.30+3.20 no es igual a 5.50–1.50. En cambio, cuando es escrito como x+1.50=3.20+2.30, la transitividad y simetría de la igualdad son conservadas. Debe notarse que en lugar de empezar con el resultado final del problema (es decir con lo que a Daniel le ha sobrado) y de trabajar hacia atrás, como se procede en una resolución aritmética, se pide a los alumnos que modelen o describan la situación mediante una ecuación y después lleguen a una solución.

Si este tipo de problemas se incluyen en la enseñanza del álgebra y no son resueltos algebraicamente, pueden conducir a los alumnos a la perpetuación de aplicar procedimientos aritméticamente correctos, pero que no les permitirán comprender las estructuras algebraicas.

Proceso y estructura

Sfard (1991) argumenta que aunque las abstracciones dentro del álgebra pueden ser concebidas como estructurales (objetos) y operacionales (procesos), los objetivos implícitos del álgebra escolar son esencialmente estructurales, como se ejemplifica con la ecuación en el problema citado anteriormente.

Los conceptos operacionales son los que se dan a conocer a los niños primero (Kieran se refiere a éstos como procesos de procedimiento) y con esto se intenta ayudarlos a realizar la transición de la aritmética al álgebra. Aunque existen operaciones estructurales dentro de la aritmética, estas son diferentes a las del álgebra por razones que ya hemos visto; por ejemplo, un problema aritmético tendrá un número como respuesta. Sfard ve un vacío entre ambas estructuras, se basa en el hecho de que una estructura algebraica debe ser vista como una entidad matemática, como una estructura que existe en algún lugar del espacio y del tiempo, que tiene el potencial para convertirse en "una entidad real" y que da como resultado una serie de acciones (Sfard, 1991). Ella se refiere a un proceso dinámico, secuencial y detallado. Sin embargo, el hecho de que es abstracto y separado de cualquier contexto inmediato es una limitante que contribuye a las dificultades de los niños en el entendimiento de dichas estructuras. El ver las estructuras algebraicas como entidades (objetos matemáticos), representa un salto cognitivo que los niños necesitan realizar cuando se desplazan de la aritmética al álgebra. Sfard ve las fases de desarrollo conceptual como sigue:

1. *Interiorización.* Es un proceso que es representado mediante una entidad matemática conocida (esto se relaciona con los procedimientos aritméticos).
2. *Condensación.* El proceso es analizado dentro de las unidades manejables (correspondiendo con la estructuración y simbolización del proceso);
3. *Reificación.* Algo familiar es visto de una nueva forma y el proceso llega a solidificarse dentro de la estructura estática.

Estas tres fases se ubican en un largo periodo y claramente la fase de reificación requiere un gran salto en términos del proceso cognitivo requerido y es algo que muchos de los estudiantes no alcanzarán (incluso ni en nivel superior). De esta forma, el álgebra escolar es vista como una serie de modificaciones del objeto-proceso (o estructural y de procedimiento) conforme los niños vayan entendiendo su naturaleza estructural y para llegar a ello es necesario recapitular cada una de las fases. Existe evidencia de que los niños tienden a manejar la aritmética y el álgebra como dos sistemas cerrados e independientes; a la vez que es importante hacer énfasis en la conexión de la aritmética-álgebra, es igualmente importante asegurarse que existe una conexión álgebra-aritmética (Lee y Wheeler, 1989).

A manera de síntesis, se recomienda preparar a los niños para trabajar hacia atrás y hacia delante entre álgebra y aritmética y que sean capaces de identificar las ventajas de cada una, dependiendo de la naturaleza de las tareas con las que tienen que tratar. Se considera que este intercambio cíclico entre ambas permitirá un mejor entendimiento de la naturaleza estructural del álgebra. Lo anterior destaca la importancia de realizar la conexión entre el razonamiento intuitivo y los cálculos formales conforme se involucren en las primeras fases de la aritmética (Vergnaud, 1997), de esta manera parece más factible que los alumnos construyan un conocimiento intuitivo que los lleve a la resolución de problemas matemáticos y que propicie que puedan aprender álgebra de manera significativa (Fischbein, 1987).

Preálgebra

Lee y Wheeler (1989) ven que los pasos de la aritmética al álgebra están sembrados de obstáculos en los nuevos procedimientos y también de tipo lingüístico, conceptual y epistemológico. La mayor parte de la enseñanza del álgebra en los grados iniciales puede ser manejada como un periodo de transición que Gray y Tall (1994) han llamado un “vacío cognitivo” entre las dos asignaturas. En ese periodo los niños tienden a llevar consigo los procesos y procedimientos establecidos en la aritmética y abandonarlos cuando se enfrentan con situaciones algebraicas en las que no pueden operar como antes lo hacían. A continuación se aborda con mayor detenimiento lo antes expuesto.

Términos literales

Hersovics y Linchevski (1994) sugieren que el vacío cognitivo entre la aritmética y el álgebra puede ser caracterizado como *la incapacidad de los estudiantes para operar espontáneamente con una incógnita*. Algunos de los orígenes en la dificultad de usar términos literales se ubican en las diferentes formas en que son usados. Harper (1987) pone atención a este tipo de confusiones, identifica como un problema que se enseñe a los alumnos a ver las literales como incógnitas en las primeras etapas del aprendizaje aritmético y en la resolución de problemas, pero después cambian con mucha rapidez a la noción de variable cuando se calcula un grupo de valores al completar una tabla.

Harper sugiere que existen etapas a través de las cuales los niños tienen que progresar con la finalidad de entender el papel de un término literal como una variable. Destaca que los niños adquieren las concepciones de procedimiento de los términos literales antes de que puedan entender los aspectos estructurales que gobiernan el álgebra. Se pide a los alumnos que representen un patrón numérico en forma algebraica antes de que entiendan completamente el concepto de generalización y posiblemente antes de que tengan un entendimiento significativo del concepto de patrón numérico.

El uso del signo de igualdad

La importancia que se ha dado en la investigación a las dificultades en torno al signo de igualdad se ubican en las formas en que es interpretado. Saenz-Ludlow y Waldgrave (1998), investigaron la interpretación del concepto de igualdad y el uso del signo de igualdad con alumnos de tercer grado. Encontraron que la interpretación de los alumnos sobre la igualdad cambia y se desarrolla gradualmente. Inicialmente el signo de igualdad es tomado como un comando que indica "algo por hacer" y más tarde identificarán la "monotonía cuantitativa" a ambos lados del símbolo. Los diálogos entre alumnos y alumnos y el profesor, son también identificados como aspectos vitales del aprendizaje de los niños en los procesos de simbolización en este estudio.

Ellos encontraron que el diálogo entre los niños y de ellos con el profesor hace evidente el esfuerzo cognitivo que exige la interpretación y la construcción de significados matemáticos de los símbolos convencionales. Sugieren que existen dos procedimientos complementarios, por una parte, los niños tienen que construir significados aritméticos de igualdad y, por otra, tienen que aprender a utilizar el lenguaje simbólico involucrado. Durante el transcurso de esta “actividad simbólica” los niños escriben sus “simbolizaciones habladas”, las cuales son vistas como una etapa en el proceso de transición para llegar a expresarse usando símbolos convencionales, sin perder el significado que estos símbolos conllevan. En el proceso de asignación de significados al signo de igualdad usando sus propias palabras, y de abordar esto en el diálogo entre ellos y con el profesor, llegan a reconocer y a entender los factores esenciales para la interpretación correcta del signo de igualdad, lo cual concuerda con resultados de otros estudios (Kieran 1992, Sfard 1991, Lee & Wheeler 1989).

La importancia de la verbalización para llegar a entender el significado de los símbolos en la transición del nivel aritmético al algebraico, es una nueva evidencia de la importancia del lenguaje en la construcción de significados para los conceptos matemáticos; este aspecto es visto de manera importante desde el enfoque constructivista para la enseñanza y el aprendizaje, en el que el diálogo se plantea como un medio básico para alcanzar un entendimiento compartido y también proporciona a los profesores e investigadores una idea de cómo los alumnos alcanzan este entendimiento (Goodchild 1995).

Obstáculos Cognitivos

En una extensión del trabajo anterior, Lincheviski y Herscovics (1994) exploraron la naturaleza de los obstáculos cognitivos en niños de pensamiento prealgebraico. Este estudio involucró alumnos del séptimo grado (12 y 13 años de edad) y tuvo los siguientes propósitos:

(a) Tratar de evaluar el potencial del conocimiento prealgebraico en alumnos de esa edad.

(b) Estudiar la habilidad aritmética en el nivel prealgebraico para ver si los obstáculos cognitivos ya identificados podrían existir en un contexto puramente aritmético y, si existen, encontrar cuán generalizados eran.

Se identificaron los siguientes obstáculos:

1. *Jerarquía de las operaciones*. Se les pidió a los sujetos de la muestra realizar las siguientes operaciones:

a) 5+6x10=?

b) 7–3x5=?

c) 27-5+3=?

d) 24: 3x2=?

Encontraron que los alumnos tienen la tendencia a verla con prioridad sobre la resta. Donde la resta estaba involucrada, tenían la tendencia de compartir la expresión con el signo de sustracción y proceder desde ahí. Solamente la pregunta (c) fue resuelta correctamente por toda la muestra.

2. *Fracaso en la concepción de la cancelación.* Esto se refiere a la forma en que los niños continúan trabajando de izquierda a derecha cuando manejan expresiones de este tipo y no ven todo el panorama para determinar dónde podrían cancelar o reunir términos. Por ejemplo, solamente 59.3% de la muestra obtuvo la respuesta correcta para 329+167-167.

3. *Visión estática del uso de los paréntesis.* Los alumnos de la muestra entendieron que los paréntesis querían decir “hacer esto prime-

ro” y todos tuvieron éxito con la operación *8x(5+7).* Sin embargo, una vez que cambió el contexto y que se les solicitó que determinaran si 926–167-167 era lo mismo que 926-(167+167), solamente dos de los 27 alumnos pensaron que eso era correcto.

4. *Objetividad del término de la operación indicada.* En investigaciones anteriores Linchevski y Herscovics habían encontrado algunas evidencias de que los alumnos presentaban la tendencia de separar un término cuando se les indicaba una sustracción. Por ejemplo, en 27–5+3, responderían 27-5 primero, para después agregar 3. Sus explicaciones para hacerlo incluían afirmaciones como “si se mezclaran con la multiplicación tendría que ser cuidadoso”.

5. *Saltarse a la operación siguiente.* Este obstáculo se refiere a la forma en la que los alumnos tienen la tendencia de agrupar los términos similares donde se involucra una distancia entre los términos y se enfocan a las operaciones siguiendo dicho término. Por ejemplo, solamente 70.3% canceló el 217 correctamente en la operación 217+175–217+175+67 y se enfocaron en el signo de la resta después del segundo término. De hecho, dos de los alumnos se negaron a hacer esta tarea, argumentando que “tienes que ir de izquierda a derecha, simplemente no puedo saltármela”.

Después se pidió a los alumnos que resolvieran ecuaciones lineales. La mayoría fueron capaces de resolverlas utilizando procedimientos basados exclusivamente en procedimientos de tanteo o sustituciones numéricas. Cuando fracasaban, los investigadores identificaron dicho fracaso en alguno de los obstáculos cognitivos que han sido descritos.

Este estudio es particularmente importante respecto a los trabajos realizados por Gray y Tall (1994). Llama la atención especificar las cuestiones que pueden ser útiles en las clases de preálgebra. Linchevski y Herscovics (1994) sustentan que el orden de las operaciones es una convención que debe ser comprendida por los alumnos para que de esta forma pueda ser vista como una regla necesaria y no como una imposición arbitraria. El uso de paréntesis también necesita ser tratado cuidadosamente y debe prevenirse que los alumnos no hagan generalizaciones incorrectas. Éste es un caso donde se puede enfatizar el uso de la calculadora, al utilizarla en forma exploratoria, los alumnos son capaces de ver más rápidamente los diferentes resultados que ocurren cuando no se respeta la jerarquía de las operaciones.

Boulton-Lewis y sus colaboradores (1997) realizaron un estudio longitudinal sobre la resolución de ecuaciones lineales con estudiantes de 8º grado (equivalente al 2° grado de secundaria en México). Utilizaron materiales manipulables como parte del enfoque de enseñanza. Un resultado importante de este estudio fue que después de la instrucción inicial, ninguno de los 21 alumnos en la clase utilizó los materiales concretos para ayudarse en la resolución de las ecuaciones lineales. La mayoría (14) acudió a las operaciones inversas. Esto concuerda con otras investigaciones en que se reporta una tendencia en los niños para usar procesos aritméticos en la resolución de problemas algebraicos (Sfard 1989, Kieran 1992, Lincheviski y Herscovics 1996). Las conclusiones de dicho estudio son establecidas a continuación.

La estrategia más común empleada por los alumnos fue usar operaciones inversas. Las respuestas de los estudiantes concuerdan con las conclusiones de Hart (1981), en que existe un vacío entre las representaciones concretas y las simbólicas. Las conclusiones hacen énfasis en la enorme carga cognitiva que se involucra al utilizar recipientes y objetos. Estos resultados refuerzan el modelo presentado por Kieran (1992) en el sentido de que el conocimiento del álgebra se desarrolla de los procedimientos a las estructuras (Boulton-Lewis et al., 1997)

Este estudio involucró entrevistas con los alumnos para obtener información de lo que saben acerca de las operaciones, de las leyes operacionales, de igualdades y variables. Encontraron que fue necesario enseñarles cómo operar con igualdades y que ninguno de sus conocimientos sobre variables o ecuaciones lineales pudo A verse derivado intuitivamente de sus conocimientos de aritmética (Boulton–Lewis, 1997).

Del análisis de las respuestas de los alumnos se encontró que cerca del 26 % de la muestra identificó el orden correcto de las operaciones aritméticas y pudieron aplicarlo en la resolución de ecuaciones lineales. En lo que se refiere al signo de igualdad, reportan que casi el 100% de los estudiantes cree que deben encontrar una respuesta para expresiones de la forma a+b; en el caso de ecuaciones, solamente la mitad de los estudiantes pueden decir que ambos lados de la ecuación es lo mismo. La mitad de ellos no presentan evidencia sobre algún conocimiento del concepto de equivalencia.

Una de las implicaciones derivadas de este estudio es que la mayoría de los alumnos necesitan una mejor comprensión de la división y del orden de operaciones aritméticas. Otro resultado obtenido por Boulton-Lewis fue que los alumnos no entendieron las diferencias entre el uso de las *literales* como variables y como incógnitas cuando se abordan ecuaciones que implican un múltiplo de la variable. Por ejemplo, ellos consideraron *3x* como una variable y no como múltiplo de *x.*

Las dificultades que los niños mostraron en el estudio antes referido indican que existe una carencia de conocimiento en las reglas estructurales que se aplican en el álgebra. Sfard y Linchevski (1994) destacan que este tipo de dificultades se presentan cuando los niños transfieren incorrectamente reglas de la aritmética al álgebra. Destacan que la tendencia a operar es heredada de la aritmética y argumentan que la espontaneidad de las perspectivas operacionales se exhibe cuando los estudiantes manejan ecuaciones lineales simples de la forma $ax+b=c$. Para ellos es intuitivamente obvio que simplemente tienen que deshacer la ecuación para llegar a la incógnita. Mientras que este acercamiento intuitivo se presenta, el mismo entendimiento intuitivo no es evidente en aspectos más profundos del aspecto estructural. Por ejemplo, los niños no parecen tener dificultades para resolver la ecuación $7x+157=248$, pero presentan dificultades para resolver ecuaciones como $112=12x-247$; el simple hecho de tener la incógnita en el miembro de la derecha los confunde (Sfard y Linchsviski 1994)

Resolución de problemas

Sfard y Linchevski (1994) sugieren que un acercamiento abrupto al álgebra parece provocar que los estudiantes se vean dominados por una tendencia a realizar operaciones sin analizar previamente qué significado tienen la expresiones algebraicas; esto no se refiere a que los estudiantes no asignen algún significado a las expresiones algebraicas, sino que en muchos casos esos significados son incorrectos y no cuentan con elementos que les permitan ver por qué sus repuestas no son aceptadas por el profesor.

Lo no significativo de los problemas en álgebra ha sido objeto de interés de los investigadores (Douady 1997, Davis 1988, Noddings 1993, Sfard & Linchevski 1994). Estos autores reportan que los problemas utilizados en la enseñanza y los libros de texto no invitan al desenvolvimiento de los alumnos, esencialmente porque no surgen de ninguna actividad de los alumnos y no pueden relacionarlos con nada tangible en sus vidas.

Existen dos tipos de problemas a los que los alumnos se enfrentan típicamente en el aprendizaje del álgebra. Los primeros son simplemente ecuaciones algebraicas que se les pide resolver, sin otro contexto que el de las matemáticas. El segundo tipo son los problemas puestos en un contexto que involucra el uso del álgebra; primero en la modelación del problema, después expresándolo mediante una ecuación y finalmente solucionándolo. Estos problemas son bien conocidos en el nivel aritmético y es difícil definir la distinción entre los primeros y los del segundo tipo de problemas en álgebra, si es que efectivamente existe esa diferencia (Kieran 1989).

Resolución de Ecuaciones

Cuando se resuelven ecuaciones de la forma $ax+b=c$ los alumnos pueden usar sus conocimientos aritméticos y encontrar una solución utilizando una variedad de estrategias. Sin embargo, cuando aparece la incógnita más de una vez, o en ambos miembros de la ecuación, dichas estrategias tienden a fracasar. Se encuentran en una situación donde tienen que hacerle algo a las ecuaciones sin ninguna clave contextual para proceder, particularmente si no entienden completamente las reglas estructurales que gobiernan el signo de igualdad y su uso.

Chaiklin y Lesgold (1984) estudiaron las nociones de estructura algebraica que tienen alumnos de 11 años de edad pidiéndoles que juzgaran la equivalencia de diferentes expresiones numéricas sin que fuera necesario que obtuvieran el total. Un ejemplo que usaron es el siguiente:

685–492+947	947+492+685
947–685+492	947–492+685

Encontraron que los alumnos utilizan métodos diferentes para combinar los números, aun con una sola expresión. Fue evidente que lo que pensaban dependía de los resultados aritméticos y acudieron a calcular en lugar de juzgar la equivalencia con base en un análisis de los números o de las reglas que gobiernan las manipulaciones de los símbolos. Los que intentaron hacer un juicio basado en las reglas de transformación tuvieron dificultades que se manifestaron en respuestas erróneas.

Técnicamente resolver una ecuación implica realizar la misma operación en ambos miembros. Las evidencias sugieren que lo primero que hacen los alumnos es adivinar y después examinar sus conjeturas. Kieran (1992) enlista las estrategias usadas por los niños:

1. El uso de datos numéricos. Por ejemplo, $3+n=5$; $5-3=2$; $n = 2$.
2. El uso de técnicas de conteo. Por ejemplo, en $3+n=5$ cuentan desde 3 hasta 5 para encontrar que $n = 2$.
3. Ocultar, por ejemplo, en $2x+9=5x$, encuentran que 9 debe ser igual a $3x$ y entonces $x=3$.
4. Deshacer o trabajar hacia atrás; por ejemplo, $2x+4=18$; $18=2x+4$; $18–4=2x$; $16 = 2x$; $x = 8$.
5. Ensayo y error.
6. Transformación; cambiar los términos de un miembro a otro de la ecuación y cambiar los signos de los términos.
7. Realizar la misma operación en ambos miembros de la ecuación.

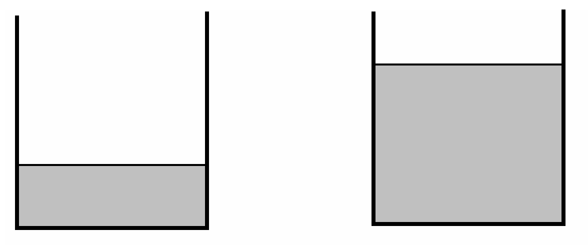
Las dos últimas estrategias son técnicas formales ya que involucran propiedades de conocimiento y aplicación algebraica, mientras que las dos primeras son de naturaleza aritmética y la tercera y cuarta parecen ser una combinación de ambas. El estudio sugiere que los alumnos a los que se ha enseñado a resolver ecuaciones formalmente, fueron menos exitosos.

El concepto de parámetro parece producir una gran dificultad para los alumnos. Bloedy- Vinner (1994) realizó una investigación con alumnos del nivel preuniversitario; su estudio sugiere que las dificultades con el concepto de parámetro se deben particularmente a deficiencias en el entendimiento del lenguaje algebraico. Küchemann (1981) y Usiskin (1988), reportan que el uso más frecuente de las letras es como números generalizados. Sin embargo, las letras son también utilizadas como parámetros, como en la ecuación lineal $y=ax+b$. Se crea confusión porque no se proporciona una indicación de lo que representan los parámetros y cuándo las letras son usadas como incógnitas o cuándo como variables.

Ecuaciones y números con signo

Lins (1994) propone que el conocimiento matemático de los alumnos es un par formado por una *afirmación-creencia* y una *justificación* para ello. Por ejemplo, cuando se resuelve la ecuación $3x+10=100$, uno podría decidir en tomar 10 de cada lado, lo que es una *afirmación-creencia* y lo justifica diciendo que es como una situación que involucra un balance en un par de escalas. Señala que esta justificación no se aplicaría si la ecuación fuera $3x+100=10$. Esto requeriría una justificación diferente que resulta de un nuevo conocimiento, porque tomar 10 de cada lado produce una nueva expresión que no aparenta un equilibrio ($3x+90=0$). Lins sugiere que aquí radica la importancia de dar sentido a los números con signo, porque al trabajar con estas expresiones los alumnos dicen que no es posible resolver estas ecuaciones.

Lins (1994) utiliza el concepto de campo semántico en un estudio llevado a cabo en una serie de lecciones en niños de 11-12 años de edad en una escuela brasileña. Se les presentó el problema que se describe a continuación y se les pidió que trabajaran en una discusión de grupos pequeños.



Con nueve cubetas más de agua, el tanque de la izquierda estará lleno; con cinco cubetas más, el tanque de la derecha estará lleno. ¿Qué se puede decir acerca de la situación de este tanque?

Los alumnos generaron una serie de expresiones por sí mismos para representar lo que habían encontrado en las situaciones que habían escogido y en cado caso las tenían que justificar. Para la etapa siguiente, tenían que proponer una justificación diferente para sus expresiones. Por ejemplo, se les pidió que encontraran una transformación para una de las expresiones, $x+9b=y+5b$, lo que les conduciría a una de las otras expresiones, $x+4b=y$. Aparentemente no tuvieron problema para representar dicha transformación debido a que esta actividad se había derivado de sus propias expresiones. Por ejemplo, Lins se refiere a estrategias como "*toma 5b de cada lado"* como un nuevo modo de producir un significado y señala la importancia que tiene en el aprendizaje de los alumnos el tener que dar una justificación.

Este autor reporta que la actividad antes mencionada apoyó el aprendizaje de la manipulación de las expresiones como una forma de darle sentido a la producción de nuevas expresiones; asimismo, que por medio de la utilización de actividades que están enfocadas a la justificación (como opuesto a encontrar una solución numérica), las justificaciones debían tener sentido para los alumnos. Al realizar estas actividades los alumnos se vieron en la posición de tener que pensar y actuar por sí mismos en lugar de producir una respuesta que pudiera verse meramente como ‘correcta’. Lins reporta que una vez que la manipulación directa de la expresión haya sido una actividad ‘con sentido’, no ocurrirían solamente las dificultades técnicas, sino que los estudiantes también empezarían a generar métodos aritméticos de representación, por ejemplo, simplificar expresiones racionales simples.

Una característica muy importante de esta investigación es pedir a los alumnos que generen sus propias ecuaciones a partir de una situación que por lo menos puedan identificar como parte de su realidad cotidiana. Los alumnos entendieron la acción de balancear, por ejemplo, sustrayendo *5b* de cada lado de la ecuación que habían producido, ya que podían relacionar mentalmente el 5 con el número de cubetas. En este tipo de actividades la parte significativa se reduce y se presenta una situación problemática en la que los alumnos tienen que generar sus propias representaciones simbólicas; esto parece permitir que acepten y entiendan las condiciones del problema para resolverlo con base en algún significado.

Problemas verbales.

Los problemas de palabras tradicionales tienden a conducir a los alumnos a una traducción directa de variables y constantes en el orden en el que aparecen en el problema escrito (Crowley, 1994). Sin embargo, el enfoque adopta-do en varios países para la enseñanza basada en la resolución de problemas algebraicos (o de hecho aritméticos), es pedir a los niños que construyan una ecuación que contenga una incógnita, para después, encontrar su valor.

Lesh (1987) describe que la resolución de problemas tiene tres traducciones significativas:

1. De lenguaje común al lenguaje algebraico.
2. De una expresión algebraica a una aritmética.
3. Retroceder de la expresión aritmética a la situación del problema original.

El siguiente ejemplo podría ilustrar lo que Lesh llama procedimientos de traducción-transformación como componentes de los procesos para modelar en álgebra.

> Nadia tiene 15 manzanas. Este número es tres veces el número de manzanas que tiene Kevin. ¿Cuántas manzanas tiene Kevin? (1) Sea x el número de manzanas que tiene Kevin. Entonces $3x = 15$. (2) Si tres veces un numero es 15, entonces el numero debe de ser 15/3; (3) Kevin tiene 5 manzanas.

Este es un ejemplo en el que el término literal es una incógnita y claramente la traducción-transformación llega a ser más difícil cuando se convierte en una variable.

Simbolización

Reggiani (1994) estudió los niveles de generalización en niños de 11 a 12 años de edad, enfocándose en un problema dado a los alumnos en el que la solución no depende de un dato inicial. El problema fue el siguiente:

Consideren el siguiente juego: piensen en un número, duplíquenlo, súmenle 5, resten el número que pensaron primero, súmenle 2, ahora resten otra vez el número que pensaron primero, y después multipliquen el total por 3. Un alumno dice que no importa el número en que pienses, el resultado siempre será 21. Inténtenlo y vean si está en lo cierto.

a) Empieza con el número 7 y realiza los cálculos necesarios. Escribe los cálculos.
b) Ahora empieza con el número 20 y después con 100 y haz lo mismo. Escribe los cálculos.
c) Intenta entender por qué siempre obtienes 21 y escribe tus observaciones. Puedes usar esquemas, letras u otros símbolos para ayudarte.
d) ¿Está en lo cierto tu amigo? ¿Por qué?

Encontró que los niños que habían experimentado con álgebra no formal fueron capaces de pensar algebraicamente y darle sentido a lo general a partir de casos particulares. Algunos fueron capaces de explicar sus soluciones verbal y simbólicamente, aunque en un nivel intuitivo; por ejemplo, un alumno que contestó "siempre obtengo el mismo número porque multiplico, sumo, resto y sumo otra vez los números diferentes... siempre los mismos números, el resultado no cambia", parecía tener una apreciación intuitiva de la generalidad de la situación plantea, pero el nivel de generalización alcanzado no fue considerado estable.

El uso de la tecnología

El álgebra es un área de las matemáticas donde se ha visto que tiene un gran potencial el uso de la tecnología en la enseñanza y el aprendizaje (Monaghan, 1995). Hay muchos estudios que reportan ventajas en el uso de la tecnología en la enseñanza del álgebra, sin embargo algunos investigadores señalan lo contrario o recomiendan que se tengan ciertas precauciones. Por ejemplo Pimm (1995), argumenta que la tecnología está siendo utilizada para apoyar la interpretación gráfica de las formas algebraicas y señala que existe una fuerte suposición de que las formas simbólicas deben ser interpretadas gráficamente, en lugar de manejarlas directamente.

Pimm parece estar sugiriendo que la perspectiva del álgebra que se transporta al contexto de la tecnología llega a ser rígida y estática y pierde lo que para él es esencialmente su poder transformador. Aunque algunos de los estudios reportados más adelante indican que el uso de las calculadoras gráficas y las computadoras han tenido resultados positivos, otros autores coinciden con Pimm y proponen que el álgebra sea enseñada más directamente, al menos en una etapa mas temprana del aprendizaje.

Yerushalmy (1997) toma una posición diferente; ve a la tecnología como un medio para llevar el mundo real al salón de clases y ofrecer una variedad de opciones para modelar y resolver problemas. Yerushalmy argumenta que la tecnología no es simplemente un recurso que permite un cambio en la secuencia de aprendizaje, sino que conlleva un cambio mayor en la enseñanza. Sugiere que abordar el álgebra a partir del estudio de las funciones ayudándose de la tecnología, porque este enfoque reorganiza los modelos comunes para la resolución de problemas, particularmente en aquellos alumnos con poca habilidad en el álgebra.

Calculadoras graficadoras: la variable y el lenguaje algebraico

La calculadora graficadora fue utilizada para presentar el concepto de una variable en niños de edades de 12 a 14 años en un estudio emprendido en cinco escuelas en el Reino Unido por Graham y Thomas (1997). Estudios anteriores (Thomas y Tall, 1988; Tall y Thomas, 1991) habían conducido a concluir que era posible mejorar el entendimiento del concepto de variable por medio de proporcionar a los alumnos ambientes en los que pudieran manipular los ejemplos, predecir, probar y ganar experiencias en las que pudieran ser construidos niveles altos de abstracción.

Cinco de los profesores escogieron un grupo para enseñar los módulos de álgebra y un segundo grupo que fue utilizado como grupo control. A ambos grupos se les aplicó un cuestionario antes y después del estudio. Los resultados mostraron un mejoramiento relativo en el desempeño del grupo que utilizó calculadoras.

Cedillo (1997) reporta un estudio con niños mexicanos de 11 a 12 años de edad el cual involucraba el uso de la calculadora graficadora para presentar y enseñar el álgebra como un lenguaje en uso. La intención era investigar el alcance en el que el 'lenguaje' de la calculadora se veía como un medio de expresar las reglas que gobiernan patrones numéricos, si podría ayudar a los niños a captar el hecho de que el código algebraico puede ser utilizado como una herramienta para ayudar en la resolución de problemas. La evidencia recolectada siguiere que el uso de la calculadora les ayuda a asignar significados correctos a las literales y a ganar autonomía en el uso del código algebraico como un medio para expresar y justificar generalizaciones. Este estudio reporta que en las estrategias que desarrollaron los estudiantes se observa una notoria tendencia hacia la generalización y que esto propició que los alumnos discutieran los diversos métodos que habían generado y presentaron argumentos plausibles para decidir cuál método era mejor (Cedillo, 1999).

Otros resultados importantes que reporta este estudio fueron los siguientes:

- Para ninguno de los estudiantes representó alguna dificultad la abrupta inclusión de literales en el contenido de expresiones aritméticas.
- Todos los estudiantes pudieron resolver las ecuaciones de las formas $ax+b=c$.

- Quince alumnos pudieron resolver las ecuaciones de la forma a÷x=b; doce de ellos a través de ensayo y error, tres de ellos pudieron desarrollar métodos que muestran que fueron capaces de empezar a operar con “lo aún desconocido”. Sus respuestas muestran una versión del proceso denominado *operar con la incógnita* (Filloy y Rojano, 1984).

Respecto a la actitud de los estudiantes sobresale la motivación, la cual puede estar relacionada con la novedad del uso de la calculadora en la clase, asimismo, otro factor que puede influir en este interés es que las actividades están planteadas en el esquema de un juego.

Cedillo señala que el desempeño de los estudiantes en la clase de matemáticas mejora notablemente con el apoyo de la calculadora, lo cual cuestiona fuertemente el hecho de que los cursos de matemáticas se centren en el dominio de destrezas de cálculo (en el caso de la aritmética), y en el dominio de la manipulación simbólica (en el caso del álgebra), en lugar de promover el uso de las operaciones en la resolución de problemas.

Los números con signo

Los trabajos de investigación sobre números con signo se pueden agrupar en dos planos: el histórico y el didáctico.

Respecto al plano histórico, Gallardo (1994) señala que Filloy y Rojano (1984) han recurrido al método histórico-crítico como componente teórico metodológico para analizar los problemas de enseñanza y aprendizaje del álgebra elemental. El uso del método histórico-crítico en matemática educativa se caracteriza por recurrentes movimientos de ida y vuelta entre el análisis de textos clásicos de la historia de las matemáticas y la experimentación dentro de los sistemas educativos. El análisis histórico crítico posibilita la construcción de secuencias de enseñanza-aprendizaje que reflejan los avances de la investigación teórica y ponerlas a prueba en situaciones donde los estudiantes y los maestros están involucrados, para después regresar a la historia de las ideas enriquecidos con los resultados del análisis empírico.

En el estudio "Operación de la incógnita" reportado en Filloy y Rojano (1985) y Rojano (1985), se trabajó con alumnos de 12 a 13 años de edad; la indagación y análisis de métodos y estrategias de solución de ecuaciones condujo a una conjetura acerca de si es espontáneo o no en los alumnos operar con la incógnita. En una segunda etapa de este estudio se reconocieron áreas de dificultad en la adquisición del lenguaje aritmético-algebraico; de éstas destacamos lo relacionado con la naturaleza de los números negativos; Filloy y Rojano (1985) se refieren a esta dificultad como un conflicto en la operatividad y conceptualización de los números con signo.

Piaget (1960) recurre a la historia en su reflexión sobre los números negativos. Cita que D'Alembert los consideró tan "reales" como los positivos y diferentes de estos últimos sólo por el signo colocado delante de ellos. D'Alembert presenta el siguiente ejemplo: "se busca el valor de un número x que sumado a 100 haga 50. Se tendrá por las reglas del álgebra x+100=50 y x=-50. Esto significa que la cantidad x es igual a 50 y en lugar de ser agregada a 100 debe ser quitada. El problema debería enunciarse así: "Encontrar una cantidad x que siendo restada de 100, queden 50. Se tendría entonces 100–x=50, x=50 y la forma negativa de x no subsistirá más". Ante estas consideraciones de D'Alembert, Piaget afirma que al comprar más de lo que se ha pagado se contrae una deuda y al retroceder más de lo que se ha adelantado se realiza una marcha hacia atrás, que constituye propiamente un uso en la acción misma del número negativo. Afirma que el resultado más simple de las operaciones concretas, el número positivo, produce una toma de conciencia muy anterior al número negativo, vinculado al desarrollo del mecanismo operatorio como tal. La propiedad esencial del número no es estática y perceptual, sino dinámica y vinculada a la acción misma, interiorizada en operaciones. Desde este punto de vista, el número negativo puede compararse con el positivo, es resultado de la misma acción, en el sentido más estricto del término, pero simplemente orientado en sentido inverso.

Glaeser (1981), que también se apoya en un planteamiento histórico, reporta los siguientes obstáculos:

1. Ineptitud para manipular cantidades negativas aisladas.
2. Dificultad para darle sentido a cantidades negativas aisladas.
3. Dificultad para unificar la recta numérica.
    a) Diferencias cualitativas entre las cantidades negativas y los números positivos.
    b) La recta como yuxtaposición de dos semirrectas opuestas con símbolos heterogéneos.
4. Ambigüedad de los dos ceros.
    a) Cero absoluto (equivalente a “nada”).
    b) Cero origen (se marca arbitrariamente sobre un eje).
5. El estancamiento en el estudio de las operaciones concretas (dificultad para desprenderse de un sentido concreto atribuido a los números).
6. Deseo de un modelo unificador. Aspiración de hacer funcionar un modelo aditivo igualmente válido para ilustrar el dominio multiplicativo en donde ese modelo es inoperante.

Freudenthal (1983) adopta una perspectiva histórica y plantea que los números negativos se originaron a partir de la necesidad algebraica formal de validar la solución general de las ecuaciones, pero no fue sino hasta la algebrización de la geometría, es decir, la geometría analítica, que adquiere vigencia su contenido.

Esta algebrización y los sistemas de coordenadas asumen la existencia y uso de los números negativos; los números con signo fueron introducidos como magnitudes, pero cuando se utiliza el método cartesiano no se puede evitar que las letras representen también números negativos.

Con respecto a la introducción de la enseñanza de los números negativos, Freudenthal (1973) destaca que la necesidad de una racionalización que supere la intuición es percibida por vez primera con los números negativos, las fracciones se encuentran en la aritmética y los números negativos en el álgebra. Por lo general, los enteros negativos son abordados intuitivamente con la recta numérica y resulta útil este enfoque; sin embargo este autor no lo considera confiable. Argumenta que el método inductivo-exploratorio puede combinarse con el método intuitivo, donde el estudiante trabaja con tablas como la siguiente:

3+2=5	3-2=1	3x2=6	(-3)x2=-6
3+1=4	3-1=2	3x1=3	(-3)x1=-3
3+0=3	3-0=3	3x0=0	(-3)x0=0
3+(-1)=	3-(-1)=	3x(-1)=	(-3)x(-1)=
3+(-2)=	3-(-2)=	3x(-2)=	(-3)x(-2)=

El método inductivo-exploratorio se basa en una extrapolación al otro lado del cero. Es un complemento dinámico de la contemplación pasiva de la recta numérica, incluso, si se conserva el enfoque intuitivo, es un complemento valioso y si no se utiliza la recta numérica, resulta el acercamiento más natural. En la presente tesis asumimos la hipótesis de que, con el apoyo de la calculadora los alumnos podrán anticipar resultados y formular generalizaciones trabajando con actividades como las que Freudenthal menciona.

Fischbein (1987) concuerda con Freudenthal y profundiza en los significados intuitivos de los conceptos; señala que el número negativo aparentemente contradice la existencia de sí mismo. Los números negativos surgieron en la historia de las matemáticas como una clase de artefactos, como subproductos de problemas matemáticos diseñados inadecuadamente.

La dificultad es mayor cuando se realizan operaciones con estos números, en particular la multiplicación. Estas dificultades guardan paralelismo con las encontradas en los decimales, mientras que 3 veces 0.65 significa 0.65+0.65+0.65, 0.65 veces 3 (con 0.65 como operador) no tiene significado intuitivo; la idea de incrementar cambia en los enteros cuando el primer sumando es positivo y el segundo es negativo.

Un acercamiento a la historia nos muestra que la nociones de número y función han sido concebidas operacionalmente por largo tiempo, antes de crearse sus definiciones y representaciones. El número fue un proceso cíclico en que se observa la misma sucesión de eventos cada vez que se origina una nueva clase de número (natural, entero, racional, real, complejo), Sfard (1991) propone que tal sucesión tiene tres fases.

Preconceptual. En ésta los matemáticos se familiarizan con ciertas operaciones sobre números ya conocidos, las manipulaciones rutinarias se consideran como lo que son, sólo procesos.

Operacional. Surge una nueva clase de números de los procesos familiares; la idea de un nuevo constructo abstracto aunque de amplio uso provocará aún fuertes objeciones y acaloradas discusiones filosóficas.

Estructural. Aquí el número se ha reconocido finalmente como un objeto matemático maduro.

Analizada esta sucesión de eventos, la historia de los números puede visualizarse como una larga cadena de transiciones de la concepción operacional a la estructural.

Sfard (1991) señala que los números negativos pueden adquirir sentido en muchas áreas con consecuencias insospechadas, por ejemplo:

- El sistema de coordenadas en geometría, se completó y fortaleció por la introducción de los números negativos.
- El concepto de vector contribuyó a nuevas simplificaciones en comparación con la geometría analítica.
- La operatividad y los conceptos asociados a los números negativos permiten que en física haya cobrado sentido hablar de voltajes, velocidades, fuerzas, entre otros conceptos.

Investigaciones sobre números con signo

Algunos autores han hecho planteamientos teóricos acerca de la problemática de los números enteros basadas en evidencias empíricas. Al respecto, Bell (1986) utiliza una estrategia de enseñanza que denomina "por diagnóstico" para analizar algunos problemas que presentan estudiantes de 8 a 9 años de edad con los números enteros. Este método implica el estudio de la comprensión que poseen los alumnos del tema, la identificación de errores y las falsas concepciones y después el diseño de la enseñanza en donde las falsas concepciones sean expuestas y resueltas a través de un conflicto.

Bell encontró cuatro obstáculos que surgen en situaciones acerca de transacciones de dinero y escalas de temperaturas:

1. Dificultades en la conceptualización de cantidades enteras o de los propios números negativos, su ordenación y su uso.

2. Dificultades en problemas cuya solución requiere una inversión del pensamiento; en problemas que contienen palabras clave como “más” o “sube”, suponen que estas palabras implican sumar.
3. Dificultades para aceptar números menores que cero.
4. Dificultades al trabajar con cambios, cuando éstos se refieren a un punto de partida desconocido; errores conceptuales como: ”subir es aumentar”, “ignorar el signo”, “signo denota región”, “omitir el signo mientras se está operando” y “confundir posición y movimiento”.

Peled (1991), estudió cómo perciben los estudiantes los números negativos y su operatividad; su investigación condujo a la identificación de niveles de conocimiento en dos dimensiones: de cantidad por un lado y de la recta numérica por otro. Con respecto a la recta numérica, este autor describe cuatro niveles:

1° El alumno reconoce los números negativos a la izquierda del cero sobre la recta numérica; son una reflexión de los números ya conocidos y comienzan con -1; la relación de orden se amplía a toda la recta, el número que se encuentra más a la derecha es el mayor.

2° El alumno extiende las operaciones de adición y sustracción con los números negativos.

3° El alumno extiende las definiciones de adición y sustracción; existen dos mundos, uno positivo, a la derecha, y otro negativo, a la izquierda; así, la adición significa ir hacia números mayores en el mundo positivo y también significa ir hacia números de “mayor negatividad”.

4° El estudiante no tiene que considerar el signo de ambos números, sino puede referirse simplemente al segundo número y determinar si el movimiento sobre la recta numérica será a la derecha o a la izquierda.

Vergnaud (1982), comenta que le sorprende que en Francia el álgebra sea introducida tardíamente y con lentitud y que el cálculo de los números negativos se enseñe antes de introducir el tratamiento de ecuaciones. Según Vergnaud, el problema didáctico a resolver consiste en crear las condiciones para que los estudiantes representen algebraicamente los problemas utilizando en forma simultánea los números sin signo (medidas de tamaños o de cantidades) y los números con signo (cuantificación de transformaciones y relaciones).

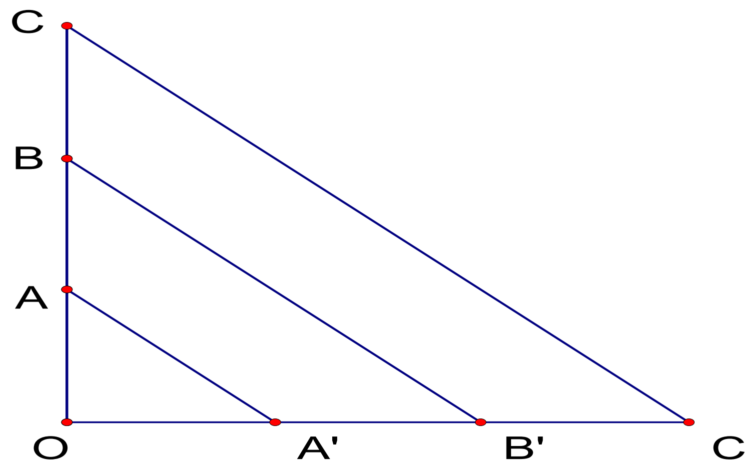
Investigación sobre modelos de enseñanza

Janvier (1985) propone clasificar estos modelos en dos categorías: la recta numérica y objetos de naturaleza opuesta. En este trabajo incluiremos investigaciones que corresponden a otra categoría: problemas aditivos.

Recta numérica.

Entre los modelos de enseñanza para números enteros en el dominio multiplicativo se ubica el de Glaeser (1981) y más tarde el de Crowley (1985); ambos recurren al esquema de velocidades (d =vt) donde un sujeto o un auto, se mueve sobre una recta.

Cofman (1981) acude a situaciones cotidianas para ilustrar la multiplicación y la división de enteros, por ejemplo: el día está despejado y el sol penetra por una ventana cuyos barrotes forman sombras paralelas en el piso; Cofman sugiere lo siguiente:



Los rayos del sol AA’, BB’ y CC’ pueden considerarse paralelos, ya que el sol está muy lejos. Supongamos que OA=AB=BC. Se tiene entonces que OA’=A’B’=B’C’. De ambas se sigue que OC=3OA, OC’=3OA’; por lo tanto OC:OA=3 y OC’:OA’= 3.

Si hacemos OA’= 1, entonces: OC’:OA’=OC’. Esto nos conduce a un diagrama para la división: OC:OA=OC’.

Como podrán observar, esto sólo se ha aplicado para números positivos y la actividad continúa para propiciar la reflexión sobre los números negativos extendiendo los ejes hacia la izquierda y hacia abajo respectivamente.

Romero (1999) aborda el modelo de la recta como instrumento de investigación en la descripción de las dificultades en la adición y sustracción de números con signo. Haciendo referencia a Freudenthal (1983), menciona algunos aspectos en torno al uso del modelo de la recta para introducir y operar dentro del dominio numérico de los enteros, hace énfasis en que los modelos más antiguos son: ganar y perder, subir y bajar escaleras y el del termómetro. Sin embargo, la adición y sustracción de enteros siguen manifestando dificultades debido a que los estudiantes no dan sentido a las operaciones efectuadas en la recta. Bruno (1994) indica que el error más frecuente que cometen los alumnos, tanto en la suma como en la resta, es representar los números de forma aislada.

Romero (1999) utilizó en su investigación una metodología cualitativa con el fin de indagar el tipo de dificultades y procedimientos que se presentan en el alumno de secundaria al realizar la adición y sustracción de números enteros. Para diseñar el cuestionario inicial, revisó algunos libros de texto de matemáticas, de 1° y 2° grado de secundaria para seleccionar ejercicios afines al trabajo de investigación. El cuestionario hizo referencia a los siguientes temas:

- Ubicación de enteros en la recta numérica.
- Vinculación entre un número entero y una situación que es expresada en lenguaje verbal.
- Operaciones con números enteros a nivel sintáctico.
- Resolución de problemas verbales.

Los temas estudiados durante el período de instrucción para el grupo de trabajo se relacionaron con los números enteros hasta la adición y la sustracción, tomando como base de toda la explicación el uso de la recta numérica. El período de instrucción consistió en trabajar una hora diaria por cuatro semanas. El profesor explicó los temas para generar la participación y la intercomunicación entre el expositor y los escolares. Los temas fueron los siguientes:

- Ubicación de enteros en la recta numérica horizontal empleando diferentes escalas.
- Vinculación de números enteros a situaciones de la vida cotidiana expresadas en lenguaje verbal.

- Relación de orden de los enteros en la recta numérica horizontal y vertical.
- Valor absoluto de un entero en la recta numérica.
- Números simétricos en la recta numérica.

Las conclusiones a que llegó Romero fueron enfocadas a dos grandes rubros, la ubicación e interpolación de enteros y la relación de orden en los mismos.

Con respecto a la ubicación e interpolación de enteros se concluyó que los estudiantes:

- Tienen distintas maneras de registrar los signos de un número entero.

  a+ = +a   b- = - b
- Emplean diferentes escalas en la misma recta.
- Pierden al cero como origen en algunas situaciones.
- Tiene problemas cuando cruzan al cero.
- Omiten el signo menos al referirse en forma verbal o escrita a un número negativo.

Respecto a la relación de orden de los enteros se concluyó que:

- Los alumnos indican el orden de los enteros en la recta numérica, los procedimientos que emplean para establecer la tricotomía entre dos números enteros se describen a continuación:
- Señalan al cero como referencia para comparar dos enteros negativos: el que está más cerca del origen es mayor; lo mismo sucede para comparar enteros positivos.
- Señalan al cero como referencia para comparar dos enteros positivos: el que está más lejos del origen es mayor.
- Justifican el orden de los negativos en la recta como si fueran naturales.

- Señalan que un número negativo es menor que otro conforme se aleja de los positivos.
- Establecen que los números positivos son mayores que los negativos porque los primeros están a la derecha del cero.
- Caracterizan al cero como un número mayor que los negativos por estar más cerca de los positivos.

Como podemos ver, las conclusiones no hacen énfasis en las dificultades de adición y sustracción de números enteros, esto sugiere que el modelo de la recta numérica no aporta elementos contundentes que puedan describir las dificultades en la suma y la resta.

Alarcón (1990) señala que cuando tenemos que enseñar a nuestros alumnos los enteros nos encontramos que como (-6)+(-3) les resultan excesivamente difíciles y cuando en cursos posteriores tienen que realizar este tipo de operaciones se equivocan al realizarlas.

Las contrariedades se agudizan cuando el alumno accede al estudio del álgebra como consecuencia y no ha comprendido por qué se produce determinado signo en el resultado de una operación. Con referencia a lo anterior, Gallardo (1994) reporta que los números negativos constituyen uno de los obstáculos perdurables con que se enfrenta la enseñanza del álgebra y que el ámbito de las ecuaciones no es suficiente para darle sentido a estos números.

Objetos de naturaleza opuesta

El trabajo de Gallardo (1994), denominado “El estatus de los Números Negativos en la resolución de ecuaciones algebraicas” consiste en determinar el nivel conceptual de los números negativos que el estudiante necesita alcanzar para poder resolver ecuaciones. Para emprender esta investigación partió de los resultados arrojados en el estudio clínico "Operación de la Incógnita" (Rojano, 1985), ya que en éste se encontraron evidencias de que los números negativos constituyen uno de los obstáculos perdurables con que se enfrenta la enseñanza del álgebra.

Su trabajo de investigación está formado en dos etapas. En la primera analiza obras históricas en busca de elementos explicativos de los hechos observados en el proceso de enseñanza de la resolución de ecuaciones en cuanto a la incidencia de los números negativos; la segunda hace referencia al montaje de un diseño experimental que comprende los siguientes pasos:

a) Elección de una población estudiantil.
b) Diseño y aplicación de un cuestionario a la población seleccionada, con el fin de explorar la eficiencia operatoria en la resolución de ecuaciones y las respuestas que conducen a soluciones negativas.
c) Selección de alumnos para entrevistas clínicas. Se utiliza el método clínico con el propósito de registrar la observación del mayor número posible de hechos en un solo individuo; el método se caracteriza por centrar la investigación sobre comportamientos narrados por el sujeto y reacciones observables.
d) Análisis e interpretación de estudio de casos con relación a tres componentes: uso de un modelo de enseñanza, resolución de problemas verbales y dificultades sintácticas.
e) Contraste de los resultados obtenidos en los ámbitos histórico y dinámico.

Gallardo señala que en el proceso de enseñanza aprendizaje de los números negativos es necesario recurrir a los modelos; la explicación abstracta no es suficiente para los estudiantes, ya que ellos desearían vincular cosas de la realidad al nuevo concepto de número y modelar las nuevas operaciones de alguna forma.

El análisis realizado en el trabajo de investigación sugirió el uso del modelo chino. Este modelo se centra en la oposición entre positivos y negativos; el concepto básico es “la suma de opuestos es cero”. El modelo se basa en dos aspectos:

1) El conteo de los números positivos extendido a los números negativos.
2) El proceso de sustracción; existen casos en que se requiere una representación alternativa del minuendo para llevar a cabo la operación de resta.

En el modelo chino, la acción de sumar se representa al unir o juntar los elementos del modelo, donde las bolas blancas representan a los números positivos y las negras a los negativos; cuando se aparean la misma cantidad de bolas se convierte en elementos nulos, principio fundamental del modelo.

No aparece la sustracción entendida como “completar a”. La representación alternativa del número cobra relevancia para la resta cuando el sustraendo es mayor que el minuendo. El cero juega un papel dual, como elemento nulo y como elemento compuesto por opuestos. Esta dualidad del cero, de ser nada o ser totalidad lo convierte en un elemento privilegiado que ayuda o dificulta el proceso de comprensión de los números negativos.

Cabe señalar que el interés fundamental del modelo chino no se encuentra en su uso para la enseñanza, sino como un recurso que muestra las tendencias cognitivas de los sujetos manifestadas ante la presencia de nuevos conceptos y operaciones (Filloy, 1991).

Estas tendencias exhiben el nivel de aceptación del número negativo que poseen los alumnos. Así la noción de número negativo atraviesa por diversas etapas de conceptualización, a saber: como sustraendo, donde la noción de número está subordinada a la magnitud; como número con signo, cuando se le asocia el signo más o el signo menos; como número relativo (o número dirigido), donde en el dominio discreto surge la idea de cantidades opuestas con relación a una cualidad y en el dominio continuo la idea de simetría; como número aislado donde se advierten dos niveles, el de resultado de una operación o como solución de un problema o ecuación; y por último, el concepto matemático formal de número negativo, donde éste adquiere el mismo estatus que el número positivo (Gallardo, 1994).

Entre las conclusiones de Gallardo destaca el "predominio del negativo" que se manifiesta en los siguientes hechos:

- La suma se interpreta como resta: $a+(-b)$ como $a-(+b)$
- La resta no puede visualizarse como suma: $a-b \neq a+(-b)$

La mayoría de los estudiantes que presentan este predominio exhiben una operatividad débil en las situaciones sintácticas, así como la preferencia de métodos aritméticos en la resolución de problemas verbales en el uso del lenguaje algebraico, por lo tanto estos alumnos no alcanzan niveles avanzados de conceptualización del número negativo.

Los estudiantes que resultaron competentes del Modelo Chino poseían:

- Una clara visión de que la suma de opuestos es cero.
- Un buen uso de la naturaleza dual del cero: como elemento nulo y formado por el punto anterior (opuestos).
- Representación del número ***a*** como ***a***+0+0+...
- Permanencia en el dominio aditivo y no intervención de la regla multiplicativa de los signos.

- Clara diferenciación de las acciones de sumar y restar. Es importante señalar que el modelo diferencia claramente los signos de operación (acciones) de los signos del número (colores), esto es, la dualidad del signo menos se pone al descubierto.
- Distinción de los lenguajes utilizados (del modelo y del aritmético).
- Reconocimiento del negativo como número con signo y como número relativo.
- Aceptación del negativo como resultado de operaciones.

Por otro lado, el modelo permite inferir la regla de los signos al comprobar que los resultados de a+b y a-(-b) son iguales. Así como también que a–b = a–(+b) = a+(-b). Posiblemente los alumnos de secundaria podrían descubrir estas dos últimas situaciones si se realizaran actividades y/o situaciones didácticas con la calculadora.

También se reporta un fenómeno denominado "algoritmia ciega de la sustracción", generalizado en la población, que consiste en el uso ciego de las reglas sintácticas que impiden la comprensión de los conceptos, esto es, la interacción dialéctica semántica-sintaxis siempre está presente; cabe mencionar la extrañeza manifiesta en el sujeto cuando comprueba que la suma no siempre se agranda, la resta no siempre disminuye y que la multiplicación no siempre es una suma reiterada. Gallardo señala que no resultó relevante enseñar a multiplicar y a dividir con el Modelo Chino, pues las reglas de operación se complican.

Esta última afirmación se abordará en la presente tesis a través de situaciones de enseñanza con el uso de la calculadora.

Problemas aditivos.

El número negativo en la resolución de problemas aditivos

Dentro de este ámbito encontramos el trabajo de Torres (2001), que aborda la introducción del concepto de número negativo en el nivel medio básico mediante la resolución de problemas de tipo aditivo. Torres, señala que cuando se trata de un problema algebraico se ha visto que una de las dificultades a las que se enfrenta el alumno es donde aparece el empleo de los números con signo.

Introducir este tema en la enseñanza, y en especial el concepto de los números enteros negativos requiere de singular cuidado, pues se ha visto en la práctica que para los jóvenes de 12 y 13 años es difícil concebir un número menor que cero. Sobre todo, cuando el estudiante se enfrenta a operaciones que incluyen un doble signo, de inmediato recurre a la ley de los signos que, aunque muchas veces no entienda su significado, resulta un recurso que le facilita la resolución del algoritmo, pero si no lo sabe de memoria, lo lleva a un rotundo fracaso.

Torres pretendió averiguar si mediante la resolución de problemas los estudiantes de secundaria mejoran el nivel de conceptualización de los números negativos y darle sentido a su uso. El propósito principal de su trabajo fue estudiar si con la enseñanza de los números negativos mediante la resolución de problemas, el estudiante de primero de secundaria es capaz de aminorar sus dificultades al operar con estos números y lograr una mayor comprensión de ellos, además de localizar los errores más persistentes en que los estudiantes incurren al resolver operaciones con números enteros.

Torres se apoyó en el trabajo de Ernest (1985), quien utiliza la recta numérica para la resolución de problemas de tipo aditivo, y en el de Bell (1986), quien considera que los alumnos pueden vencer la mayoría de los obstáculos al trabajar con números negativos si se les plantean situaciones que les sean familiares.

El trabajo de investigación de Torres (2001) fue de corte cualitativo, se realizó un estudio preliminar con alumnos de primer grado de secundaria; los instrumentos empleados fueron un cuestionario inicial, la propuesta de enseñanza, el cuestionario final y seis entrevistas.

El cuestionario inicial se formó por ocho bloques, los cuales contenían operaciones de suma y resta en la recta numérica, problemas verbales con números con signo (en diferentes contextos), representaciones numéricas de situaciones cotidianas con números con signo, se pidió a los alumnos que plantearan situaciones en las que estuvieran presentes los números con signo, orden en los números enteros, la representación en enunciados verbales de lo presentado simbólicamente y el simétrico de un número con signo.

Los contenidos que se abordaron en la propuesta en cada una de las siete sesiones fueron: El ascensor; deudas, pérdidas y ganancias (dinero), temperaturas, números simétricos, listas de popularidad (música); resolución de problemas (en contextos de listas y tablas de popularidad) y la resolución de problemas (en contextos de edades, ubicación en la recta numérica, pérdidas y ganancias y temperaturas).

Dentro de las conclusiones a las que dieron lugar la investigación se destacan las siguientes:

- Las situaciones tales como pérdidas y ganancias, temperaturas, el ascensor, el termómetro y los desplazamientos hacia la derecha y hacia la izquierda, en las que se encuentran los números positivos y negativos favorece la comprensión que los estudiantes alcanzan con el conjunto de los enteros. A esta conclusión ya se había llegado al parecer en otros estudios.

- Los estudiantes relacionan algunas frases como “bajo cero”, “ganancias” y “sobre el nivel del mar” con los signos “- “ y “ + “ respectivamente.
- Ante el doble signo (-(-10)), por lo general consideran el signo de operación y omiten el signo del número.
- Al igual que en otras investigaciones los estudiantes muestran dificultades al cruzar el cero.
- La invención de problemas con números enteros, favorece la comprensión que sobre éstos logran los estudiantes.

Problemas aditivos con números negativos

Otra investigación reciente y que tiene relación con los números negativos es la realizada por Bruno y Espinel (2002), denominada “Problemas aditivos con números negativos: estudio sobre tres métodos de enseñanza con alumnos de nivel medio básico” cuyo objetivo es comprobar si seguir una metodología de enseñanza de los problemas aditivos con números negativos en la que los alumnos redactan problemas, reflexionando y distinguiendo sus estructuras e incógnitas, es beneficiosa para la enseñanza de los problemas aditivos con números con signo.

Esta investigación (Bruno y Espinel, 2002) analiza tres métodos de enseñanza sobre problemas aditivos verbales con números negativos con alumnos de 13 a14 años de edad; cabe señalar que los alumnos habían tenido en el curso anterior una introducción a los números negativos.

Los “tres métodos de enseñanza” de problemas aditivos que emplearon son los siguientes:

- Redactar: los alumnos redactan enunciados de historias y luego de problemas, aprenden a distinguir sus estructuras, los intercambian y resuelven con sus compañeros.
- Resolver: los alumnos practican de forma sistemática una amplia variedad de problemas con las estructuras mencionadas, que se les proponen secuenciados y en orden de dificultad, según la posición de la incógnita.
- Control: los alumnos estudian las reglas operatorias de los números negativos y posteriormente, practican la resolución de problemas aditivos sin poner énfasis en una secuencia según su dificultad o en distinguir las estructuras.

En los métodos de redactar y resolver, la experiencia se desarrolló en 10 horas (2 horas semanales, durante 5 semanas). Se aplicó una prueba inicial, nueve problemas aditivos con números negativos y el último día una prueba final con igual cantidad de problemas y con iguales estructuras pero diferentes contextos. Sólo en estos dos métodos el trabajo de los alumnos fue por parejas.

Para el método de control, no se preparó material curricular ni se temporalizaron actividades; los alumnos siguieron las actividades propuestas por su profesor y su libro de texto. Estos alumnos aprendieron las reglas operatorias de los números negativos y practicaron problemas aditivos sin seguir una secuencia concreta.

Todos los alumnos que siguieron cada uno de los tres métodos, resolvieron las tres pruebas: inicial, final y de retención; esta última prueba se aplicó cuatro meses después de aplicar la final.

Cabe señalar que se realizó un estudio estadístico descriptivo (para las tres pruebas y para los tres métodos) de las variables de interés: dificultad de los problemas y estrategia de resolución. Las investigadoras reportan lo siguiente respecto a las pruebas escritas (inicial, final y de retención) y los métodos.

- En la prueba inicial la puntuación más alta corresponde al método de control, seguido por el de resolver y, por último, el de redactar; los alumnos del método control eran los que tenían menos conocimiento de los números negativos.
- En las pruebas final y de retención las mayores puntuaciones corresponden al método resolver, seguido del método redactar, y por último, el de control. Es decir, los alumnos que siguieron un trabajo sistemático con los problemas aditivos con números negativos obtuvieron mejores resultados que los que siguieron su libro de texto, esto es, los alumnos que usaron el método control.

- Respecto a la resolución de problemas, en los tres métodos existen similitudes en las respuestas erróneas, la que ocurrió con más frecuencia fue el planteamiento incorrecto de las operaciones, seguido del uso de las reglas operatorias incorrectas. Por lo tanto, de esto derivan que la principal dificultad de los problemas aditivos con números negativos está en asociar el enunciado del problema con una operación correcta. Para muchos alumnos esa dificultad no está producida por una mala o una inadecuada comprensión del enunciado, sino por no identificar la operación que resuelve el problema, y por no relacionar el significado con los aspectos formales y operatorios (Bruno y Espinel, 2002).

- Por otro lado, el método redactar implica que el profesor tiene un papel diferente al tradicional, rompe el esquema habitual de clase: explicación del profesor, y luego, práctica de ejercicios; al contrario hay gran participación de los alumnos ya que propició que expresaran sus ideas, así como descubrir sus contextos preferidos.

- Afirman que un trabajo sistemático de los problemas aditivos con números negativos (métodos redactar y resolver), produce mejoras en la resolución de los mismos por parte del estudiante de nivel básico.

- Posiblemente se mejoren los resultados obtenidos en el método redactar si se propicia de manera más eficiente que los estudiantes reflexionen sobre los enunciados, que no respondan mecánicamente y que comprendan que no todos los problemas son iguales en cuanto a su estructura.

- Para las autoras el método redactar es una alternativa de enseñanza al menos mejor que el usual (el método control), pero no soluciona las dificultades que tienen los problemas aditivos con números negativos. Se necesita más tiempo de enseñanza; tal vez a lo largo del curso escolar se consigan mayores resultados.

CAPÍTULO 3
REFERENTE TEÓRICO

En este capítulo se discuten algunas de las aportaciones del cognoscitivismo y del paradigma sociocultural. En estas posturas teóricas se enmarca el acercamiento al aula en que se sustenta esta tesis. A este respecto cabe señalar que la investigación de Bruner sobre la enseñanza de la lengua materna desempeña un papel central en el referente teórico que aquí adoptamos.

El cognoscitivismo

Los psicólogos de la Gestal desarrollaron una teoría en Europa que apuntaba hacia la importancia de comprender la estructura[1] para la resolución de problemas y para el pensamiento en general.

Wertheimer (1959), fue uno de los psicólogos que se preocupó del aprendizaje y de la enseñanza de las matemáticas y pretendía demostrar las diferencias de resultados que se podían obtener del aprendizaje memorístico y el aprendizaje con significado. En particular quería poner de manifiesto el fundamento del pensamiento productivo por medio del problema del paralelogramo y encontró que los niños que aprendían el algoritmo para calcular el área sin comprender los principios estructurales en que se basaba, se limitaban a seguir ciegamente las reglas que marcaba el profesor, quedaba claro que se les había enseñado el algoritmo de forma mecánica y no lo habían aprendido de forma significativa. Resnick (1990) llamaba feas a las soluciones mecánicas mientras que a aquellas que se basaban en una verdadera comprensión de la estructura las consideraba elegantes y de un pensamiento productivo.

---

[1] Para comprender la estructura de las matemáticas hay que comprender las interrelaciones entre los conceptos y las operaciones como las reglas por las que se pueden manipular y reorganizar para descubrir nuevos patrones y propiedades. Resnick. Ministerio de Educación y Ciencia. Ed. Piados. México.1990.

Otro de los representantes de este enfoque fue Polya (1945), su aportación se centró en las pistas que ayudan a la gente a tener insights[2] en la resolución de problemas; propone una serie de preguntas específicas o pasos a seguir cuando se trabaja un problema considerado heurístico, lo cual permite proceder de forma sistemática hacia el insight en vez de esperar a que el pensamiento productivo sea fruto del azar o aparezca a los poco alumnos superdotados. Según Polya la resolución de problemas se puede dividir en cuatro etapas:

1. Comprender el problema
2. Concebir un plan
3. Llevar a cabo el plan y
4. Comprobar el resultado.

Para David Ausubel “las personas aprenden mediante la organización de la nueva información, colocándola en sistemas codificados” (Antología. SEP. E-321), es decir, que el aprendizaje debe tener lugar a través de la recepción mas no del descubrimiento; los profesores deben presentar materiales a los alumnos de una forma cuidadosamente organizada, en secuencias. Además, Ausubel considera que el aprendizaje debe progresar deductivamente, partiendo de los conceptos generales para llegar a una comprensión de los específicos.

Para este autor, “el objetivo de la enseñanza estriba en ayudar a los alumnos a comprender el significado de la información presentada de forma tal que puedan combinar el nuevo material con lo que ya saben” (Antología. SEP. E-

[2] Vocablo inglés. Comprensión consciente y repentina de la solución de un problema, de una relación lógica, comprensión que no es producto de un aprendizaje por ensayo y error ni por condicionamiento sino de una reorganización del campo perceptivo. Diccionario Ciencias de la Educación.. Ed. Santillana. México.

321), o sea, para que pueda A ver aprendizajes significativos es preciso realizar conexiones con el conocimiento ya existente de los alumnos.

Su enfoque es a través de la exposición y tiene cuatro características:

- Interacción entre el profesor y los alumnos
- Hacer uso de los ejemplos (dibujos, gráficos o imágenes)
- Es deductivo y
- Es secuencial

Uno de los autores más reconocidos en el enfoque cognoscitivista es Piaget, él se preocupó específicamente del proceso y del desarrollo del pensamiento de los niños, es decir por las estructuras cognoscitivas y aunque estas estructuras no se podían observar directamente como en el caso de las físicas, intentó poner de manifiesto los procesos del pensamiento a través de la entrevista clínica.

La estructura para este autor, es algo que construye activamente el organismo, es una creación humana; su concepto de estructura se asocia con la teoría evolutiva del intelecto humano, en la que su esencia es que al ir creciendo las personas, no sólo adquieren más conocimiento, sino que desarrollan estructuras cognitivas nuevas y más complejas.

Para Piaget, el aprendizaje de las matemáticas y su aplicación consiste en pensar activamente y en actuar sobre el entorno, no en advertir pasivamente lo que se presenta, ni tampoco en memorizarlo (Resnick, 1990). Con referencia a este aprendizaje activo, Piaget citó a Pestalozzi, Froebel, Montessori y otros autores que desarrollaron métodos activos en el sentido de que privilegiaron las acciones sobre cosas más que escuchar al maestro.

Además, señaló que Sócrates usaba un método activo con el lenguaje y que la característica del método socrático era comprometer al discípulo para que construyera activamente su propio conocimiento (Antología. SEP. E-321), luego entonces, la labor del docente consiste en averiguar qué es lo que ya sabe el alumno y cómo razona con el fin de formular la pregunta precisa en el momento exacto, de modo que el alumno pueda construir su propio conocimiento (Antología. SEP. E-321), al formular la pregunta se realiza lo que conocemos como intervención didáctica.

A continuación se señalan tres principios pedagógicos derivados de la teoría de Piaget.

1. El aprendizaje debe ser un proceso activo, porque el aprendizaje se construye desde adentro. Una buena pedagogía debe abarcar situaciones que presentadas al niño, le den la oportunidad de que él mismo experimente, manipulando símbolos, haciendo preguntas y buscando sus propias respuestas.

2. Las interacciones sociales, la cooperación entre los niños y entre el niño con el adulto, es importante para el desarrollo intelectual.

3. Prioridad de la actividad intelectual basada más sobre experiencias directas que sobre el lenguaje. Algunos autores como Almy, Duckworth y Furth apoyan esta situación y hacen notar que el lenguaje es importante, pero no a expensas del pensamiento. Como veremos más adelante, este principio no concuerda con lo propuesto por Bruner.

Por último, este autor señala que las escuelas deben privilegiar no la obediencia, sino desarrollar la autonomía y la cooperación; Furth además agrega que el primer objetivo de la educación debe ser enseñar a pensar.

El álgebra como lenguaje

Un autor que también dio grandes aportaciones a la educación fue Bruner, de él recuperamos dos ideas principales aplicadas a la enseñanza en el aula, el aprendizaje por descubrimiento y la enseñanza de la lengua materna, enfoques que han sido adoptados por varios investigadores en el campo de la educación matemática.

Cedillo (1996) señala que muchos educadores matemáticos han asumido la posición de considerar al álgebra como un lenguaje. Al respecto Mason (1985) argumenta que el álgebra es en primer lugar un lenguaje, una manera de decir y de comunicar. Para Sutherland y Rojano (1992) en el álgebra está el lenguaje de las matemáticas, un lenguaje que se puede utilizar para expresar las matemáticas o aún dentro de otras disciplinas. Cedillo (1996), propone que el lenguaje algebraico se puede aprender de manera similar a como se aprende la lengua materna. La visión del álgebra como lenguaje ha sido cambiada y ensanchada por la tecnología. La disponibilidad de diversas representaciones para expresar relaciones cuantitativas tales como gráficos y tablas ha influenciado las maneras en que los educadores conciben la enseñanza y el aprendizaje del álgebra.

Desde esta visión el álgebra se puede considerar como un lenguaje con varios dialectos: símbolos, gráficos y tablas. Particularmente, los nuevos recursos tecnológicos parecen consolidar esta visión del álgebra como lengua para generalizar la aritmética. A este respecto Tall (1993) señala que él aboga por introducir el simbolismo algebraico usándolo como un lenguaje para comunicarse con la computadora, con la programación propiciar un lenguaje algebraico significativo que se pueda utilizar para describir patrones numéricos y sugiere que usar el código simbólico de un lenguaje en programación, y en particular hablarlo en un contexto, es donde el lenguaje algebraico tiene sentido. Por ejemplo, un comando en BASIC tal como a=3 seguido por

IMPRIMIR a+1 producirá el valor 4, esto parece ser una tarea fácil para que los niños predigan qué sucede con la aplicación del comando IMRPIMIR a+2. Los resultados de tal comando pueden ser predichos y después ser probados. Aunque el lenguaje BASIC está cerca del álgebra tradicional hay diferencias, por ejemplo el signo de multiplicación (es decir 2*x en vez de 2x o de 2Xx).

La primera, y quizás más clara tentativa de acercar el aprendizaje de las matemáticas basado en la metáfora de la adquisición del lenguaje materno fue hecha por Papert (1980). El retomó de Piaget la idea de considerar a los niños como constructores de sus propias estructuras intelectuales. Señala que los niños parecen ser principiantes naturalmente dotados, adquiriendo mucho antes de ir a la escuela una cantidad extensa de conocimiento por un proceso que el llamo *aprendizaje Piagetiano* o *aprendizaje sin enseñanza*. Por ejemplo, los niños aprenden a hablar, aprenden intuitivamente la geometría y aprenden bastante de lógica y de retórica, todo esto en el entorno de sus padres, lo más sorprendente es que esto se da “sin ser enseñado” (sin una enseñanza formal). Debemos preguntar por qué ocurre que algunos niños aprenden tan temprano y espontáneamente, mientras que algo se retrasa muchos años o no sucede en todos sin la enseñanza formal deliberadamente impuesta.

El aprendizaje por descubrimiento

Bruner plantea que una progresión en la enseñanza de las diferentes materias ayuda a los estudiantes a descubrir relaciones, esto desde luego tomando en cuenta el desarrollo cognitivo de los alumnos. Esta organización en las materias de enseñanza refleja que el aprendizaje procede de lo simple a lo complejo, de lo concreto a lo abstracto y de lo particular a lo general; al contrario que Ausubel, el aprendizaje debe ser inductivo.

En el enfoque del aprendizaje por descubrimiento el profesor debe organizar la clase de tal manera que los alumnos aprendan a partir de su propia actividad, debe plantear a los estudiantes preguntas que les intriguen, situaciones desconcertantes o problemas interesantes. Para que esto se pueda llevar a cabo, se requiere un pensamiento intuitivo y analítico.

El aprendizaje por descubrimiento presenta algunas ventajas, entre éstas:

- Ayuda a los niños a aprender cómo aprender.
- Produce una excitación y auto motivación.
- Permite al alumno actuar de acuerdo a sus propias capacidades.
- Fortalece el concepto que de sí mismo tenga cada estudiante.
- Es probable que los alumnos desarrollen un sano escepticismo respecto de las soluciones simplistas a los problemas.
- Los estudiantes son responsables de su propio aprendizaje (tal vez sea la ventaja más importante).

La enseñanza de la lengua materna

Cedillo (1996) propone que existen dos principios que pueden explicar la adquisición de la lengua materna:

Los significados del lenguaje determinan sus diferentes usos

Este enfoque ha sido utilizado ampliamente en matemáticas, algunos profesores y libros ilustran este principio; inician con definiciones, ejemplos y reglas sintácticas (parte de la gramática que estudia la estructura de la oración) y se termina con problemas que requieren de aplicar esas definiciones, reglas y ejemplos. Aun cuando muchos de nosotros hemos aprendido bajo este enfoque, los resultados de alguna manera no han sido satisfactorios, así lo muestran los resultados que México obtuvo en PISA 2003, particularmente en matemáticas el 66% de los estudiantes se ubicó en el nivel 1 de complejidad; sólo el 0.4% se ubicó por arriba del nivel 5 y no tuvo estudiantes que se desempeñaran en el nivel 6. Cabe señalar que PISA tiene clasificaciones del 1 al 6, donde los estudiantes que se ubican en el nivel 1 son los que resuelven los problemas más sencillos, mientras que los que se ubican en el nivel 6 están capacitados para resolver problemas realmente complejos (Ramos,[3] 2005).

El uso del lenguaje determina sus significados

Este principio concuerda con el trabajo de Bruner (1980,1982, 1983, 1985), quien condujo extensamente un estudio que indagó cómo se adquiere el lenguaje natural (Cedillo, 2000). Si asumimos que el álgebra es un lenguaje, este principio sugiere que la enseñanza del álgebra como *lenguaje en uso; este enfoque* se basa en proponer la enseñanza de esta disciplina de manera similar a la forma en que adquirimos la lengua materna. En esta tesis asumimos este principio. La lengua materna se aprende a través del uso, no parte de reglas y definiciones, es mediante la interlocución con los adultos que el niño va asignando significados al lenguaje aún antes de poder emitir su primera expresión verbal y gradualmente va afinando sus estrategias de comunicación lingüística" (Cedillo, 1996; 2001, 2003).

Bruner sugiere que el lenguaje natural no sólo es una consecuencia del desarrollo intelectual, como fue establecido por Piaget (1985), tampoco un resultado del impresionante sistema neurológico que tiene el ser humano, como fue propuesto por Chomsky (1987), sino que encontró que el lenguaje natural es enseñando y que el adulto crea un ambiente de aprendizaje de acuerdo con las capacidades del niño para que éste aprenda (Cedillo, 2000).

---

[3] Ramos Gabriela I. es Directora de la Oficina de la OCDE en México.

Por otro lado, el trabajo de Bruner aporta evidencias que sugieren que el lenguaje se enseña y que su aprendizaje se da a través de formas de interacción entre la madre y el niño claramente tipificadas; estos hallazgos, aportan elementos para construir la metáfora en que se sustenta la enseñanza del álgebra como lenguaje en uso (Cedillo, 1996).

Cedillo (1996) propone que asumiendo que el álgebra es un lenguaje matemático, la transición de la comunicación pre-verbal al uso del lenguaje puede tomarse como un recurso que inspira el diseño de un enfoque didáctico para el uso de calculadoras graficadoras en la transición de la aritmética al álgebra. En este enfoque, el álgebra es utilizada como una herramienta para modelar y resolver una serie de problemas.

Dentro de sus aportes teóricos, Bruner señala que existen tres aspectos que se encuentran bien relacionados en el estudio del lenguaje: la sintaxis, la semántica y la pragmática. Las dos primeras tratan casi exclusivamente con la comunicación de la información usando un código para representar una parte del conocimiento que concierna al mundo real. La pragmática se refiere al proceso evolutivo en el aprendizaje de la lengua a través de su uso e implica diferentes procesos, como los que ocurren para llegar a dominar un grupo de códigos semánticos y sintácticos. Los elementos de la pragmática no representan algo; sino que ellos mismos son algo. La pragmática está relacionada con el discurso que depende de un contexto compartido. (Cedillo, 2001)

En realidad, muchos actos del discurso son medios para armonizar formas de compromiso recíproco o compartido, esto se observa en forma muy particular en la interacción entre el alumno y el profesor. A este respecto, Bruner (1983) creó el concepto de *formato* para estudiar la forma en que los adultos crean un ambiente de aprendizaje para que de esta forma puedan interactuar con un niño que aún no es capaz de comunicarse a través del habla. Esto es similar a la situación de un profesor cuando trata de enseñar álgebra a un estudiante que no es aún capaz de expresarse por él mismo o ella misma a través del uso del álgebra (Cedillo, 2001).

En términos de Bruner (1983), un formato es un esquema de interacción que consiste en una rutina de comunicación entre el niño y el adulto; es una forma de interacción que permite al adulto anticiparse a las intenciones del niño y viceversa. Los niños deben participar en un tipo de relación social que se relaciona con el uso del lenguaje en el discurso para que puedan recibir las claves del lenguaje, esto se refiere a una intención común y al establecimiento de una presuposición. En otras palabras, eso implica que para entender lo que el niño quiere decir, uno debe ver qué está haciendo.

Un formato es un esquema de interacción regulada, en la que el niño y el adulto hacen cosas uno para el otro y en conjunto. Por medio de los formatos se regula la interacción comunicativa antes que sea usado el discurso lexico-gramatical, los formatos constituyen los vehículos para la transición de la comunicación al lenguaje. En un nivel formal, un formato significa una interacción de contingencias entre por lo menos dos partes activas, contingencia en el sentido de que puede ser demostrado que las respuestas de cada miembro dependen de las respuestas de las otras personas. (Cedillo, 1996)

Un formato es un esquema altamente regulado en el que, con el tiempo y de acuerdo con el progreso de las habilidades lingüísticas del niño, el adulto introduce sistemáticamente nuevos y más sofisticados elementos que hacen la forma de comunicación altamente compleja. Una característica particular de los formatos usados por el niño y el adulto es que la relación entre ellos es asimétrica: hay uno que sabe qué está pasando, mientras que el otro sabe menos (Cedillo, 1996).

Ratner y Bruner (1997) encontraron que los juegos son los primeros formatos usados por el padre (madre) para hacer que el niño interactúe mediante el lenguaje, los formatos tienen la propiedad de hacer evidente a través de la actuación cuáles son sus reglas y sus objetivos. Las acciones de los niños, son la clave para que el adulto moldee el ambiente de la comunicación, cuando el adulto sabe cómo lograr que las cosas se hagan mediante palabras y cómo guiar los niños, de esta forma ellos empiezan a darle sentido a las palabras con base en un contexto dado por reacciones corporales.

Esta investigación asume los resultados de Bruner sobre la adquisición del lenguaje y proporciona un marco para modelar un enfoque de enseñanza para el álgebra en la escuela, particularmente para abordar el estudio del potencial de la calculadora en la enseñanza de los números con signo y sus operaciones.

A manera de conclusión se anexan algunos puntos importantes que comparten los autores antes citados en el campo de la corriente cognoscitivista.

Para ellos, enseñar es plantear problemas a partir de los cuales sea posible reelaborar los contenidos escolares y es también poner al alcance la información necesaria para que los niños puedan avanzar en la reconstrucción de esos contenidos. Es promover la discusión, es brindar la oportunidad de coordinar diferentes puntos de vista, es propiciar redefiniciones sucesivas, es que los niños se planteen nuevos problemas. Parte de lo individual a lo social y algo fundamental es que se centra en el interés del alumno.

En las metas que proponen se destaca el favorecer y potenciar el desarrollo integral del alumno; crear hombres capaces de hacer cosas nuevas, creativos, inventivos, descubridores y no sólo repetir lo que han hecho otros; fomentar mentes que puedan criticar, verificar y no aceptar todo lo que se les ofrezca; promover la autonomía moral e intelectual en los educandos.

El educando es visto como un constructor de su propio conocimiento y el re-constructor de los distintos contenidos escolares a los que se enfrenta. Es un aprendiz que posee un nivel determinado de conocimientos (estructuras y esquemas: competencia cognitiva), los cuales determinan sus acciones y actitudes en el aula. Se debe ayudar a los alumnos a que adquieran confianza en sus ideas, que las desarrollen y las exploren por sí mismos, a tomar sus propias decisiones y a aceptar sus errores como algo constructivo. Es un ser eminentemente activo

En este enfoque, el docente es un promotor del desarrollo y de la autonomía de los educandos; es quien debe promover una atmósfera de reciprocidad, de respeto y auto confianza para el alumno, dando oportunidad para el aprendizaje auto estructurante. Debe respetar los errores y estrategias de conocimiento propias de los niños y no exigir la respuesta correcta así como elaborar situaciones didácticas.

Para los cognoscitivistas existen dos tipos de aprendizaje: el aprendizaje en el sentido amplio (desarrollo) y el aprendizaje en el sentido estricto (aprendizaje de datos y de informaciones puntuales: aprendizaje propiamente dicho). En el sentido amplio aprender es comprender, inventar, construir uno mismo, es ensayar ideas, hacer pruebas para descubrir cuáles métodos de resolución funcionan y cuáles no. Aquí el error no se concibe como tal, es parte del proceso natural de aprendizaje.

Las actividades y los procedimientos de enseñanza, deben estar encaminados a facilitar las actividades en forma progresiva, así como a partir de distintos contenidos deberán plantearse situaciones problemáticas.

Está en contra de los exámenes porque generalmente evalúan la adquisición de información y no las habilidades del pensamiento. Respecto a la evaluación señalan, que no es tan fácil ya que exigiría a los docentes conocimientos sobre los estadios de las nociones operatorias, un manejo adecuado del método clínico-crítico, tiempo para realizar las evaluaciones individuales y realizar estandarizaciones y/o tipificaciones de las respuestas.

Por último señalar que los resultados de la evaluación son orientaciones tanto para el maestro como para el alumno, sobre los procesos y la eficacia de las estrategias.

El paradigma sociocultural

Este paradigma fue desarrollado por el soviético Vigotsky a partir de 1920 quien se preocupó por las aplicaciones e implicaciones educativas. Su postura fue relacionar la psicología y la educación formando así su esquema teórico integrado por cuatro aspectos: el aprendizaje, el desarrollo psicológico, la educación y la cultura. Sus influencias para poder desarrollar su teoría además de su interés en el ámbito educativo y de su incursión como académico fue su formación en distintas disciplinas sociales (historia, economía política) y humanas (filosofía, lingüística, literatura, teatro), así como el contexto y el momento histórico de la época posrevolucionaria del fervor socialista (Hernández, 1999).

Las obras de Vigotsky se dieron a conocer en 1982 en la todavía URSS, luego se publicaron en inglés y recientemente han sido divulgadas en español. A Vygotsky le interesaba desarrollar una psicología general que tuviera como núcleo el estudio de la conciencia en todas sus dimensiones; se preguntaba cómo era posible que no existiera una explicación sólida sobre las funciones psicológicas superiores (otorgó un peso especial a los temas referentes al lenguaje, al pensamiento y al intelecto) y la conciencia, que es lo que distingue al hombre de los animales.

De acuerdo con Vigotsky, en la evolución psicológica existen dos líneas de desarrollo: la natural y la cultural o social. Como consecuencia del proceso del desarrollo natural (filogenia) se dan las funciones inferiores, éstas son comunes en los animales y el hombre; en cambio, con el proceso de mediación cultural[4], gracias a las actividades mediatizadas por instrumentos (especialmente el lenguaje y el trabajo) en prácticas colectivas, se originan las funciones psicológicas superiores, que son específicamente humanas.

Un aspecto fundamental dentro de la teoría de Vigotsky es el concepto de Zona de Desarrollo Próximo (ZDP), definida como *la distancia entre el nivel real de desarrollo, determinada por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de una adulto o en colaboración con otro compañero más capaz* (Hernández, 1999).

Los tres aspectos a considerar sobre la ZDP son los siguientes:

a) Un enfoque holístico de enseñanza y aprendizaje.
b) La mediación social de los instrumentos culturales en el aprendizaje.
c) El análisis de los procesos de transición y de cambio.

[4] La mediación cultural es un hecho común demostrado en todos los hombres de todas las culturas; la diferencia identificable entre las formas en que se expresa dicha mediación en cada forma sociocultural se debe en que en algunas se desarrollan formas específicas de mediación que en otras no existen, o en otras son sólo simples variaciones de tipo cualitativo. Paradigmas Educativos. Hernández. Ed. Paidós. Pág. 221.

Retomando lo anterior, el proceso de desarrollo psicológico individual no es independiente o autónomo de los procesos socioculturales, ni de los procesos educacionales en particular, sino más bien, el ser humano se desarrolla en la medida en que se apropia de una serie de instrumentos de índole sociocultural, y cuando participa en dichas actividades prácticas y relaciones sociales con otros que saben más que él acerca de esos instrumentos y de esas prácticas.

De esta manera, gracias a la enseñanza ocurrida en las escuelas, se desarrollan las formas maduras de las funciones psicológicas superiores, siendo ésta una de las funciones de la educación desde éste paradigma.

Para lograr la meta, el alumno debe ser entendido como un ser social, producto y protagonista de las múltiples interacciones sociales en que se involucra a lo largo de su vida escolar y extraescolar (Hernández, 1999). Por otro lado, el profesor debe ser un agente cultural, que enseña en un contexto de prácticas y medios socioculturalmente determinados, y como mediador entre el saber cultural y los procesos de apropiación de los alumnos.

En este paradigma, el papel de la interacción social con los otros (especialmente los que saben más: experto, maestro, padres, niños mayores, iguales, etc.) tiene importancia fundamental para el desarrollo psicológico (cognitivo, afectivo, etc.) del niño, del alumno.

Respecto a la evaluación, este enfoque toma en cuenta los productos, pero especialmente los procesos en desarrollo.

Este soporte teórico junto con el enfoque de la enseñanza de las matemáticas propuesto en el actual programa, es el que guiará la parte metodológica para la realización del trabajo de campo.

CAPÍTULO 4
METODOLOGÍA

En este capítulo se describe cómo se realizó el trabajó de investigación. El punto inicial fue formular las preguntas de investigación, las cuales permitieron determinar el tipo de datos que se requerían y la elección del método de recopilación y análisis de datos. En este capítulo se informa quiénes fueron los sujetos que participaron en el estudio, los instrumentos que se emplearon para la recolección de datos y el ambiente escolar donde se realizó el trabajo de campo.

Preguntas de investigación

1. ¿Qué estrategias desarrollan los alumnos en un ambiente de enseñanza basado en el uso de la calculadora?
2. ¿El uso de la calculadora permitirá a los alumnos descubrir leyes, regularidades o patrones en la operatividad con números con signo?
3. ¿Pueden los estudiantes realizar operaciones con números con signo correctamente sin usar la calculadora?
4. ¿Qué obstáculos reportados por investigaciones previas pueden salvar los alumnos bajo el enfoque de enseñanza que se propone en esta tesis?

Método de recopilación y análisis de datos

Retomando la clasificación de Blaxter (2000), se eligió el método de análisis cualitativo, se hizo inicialmente un trabajo de gabinete que consistió esencialmente en preparar la búsqueda de bibliografía; el producto de esta primera parte fue el estado del arte en la investigación sobre álgebra en general y de los números con signo en particular. Posteriormente se diseñó el trabajo de campo mediante el que se llevó a cabo la recolección de datos empleando como instrumento básico para este fin las hojas de trabajo que se usaron con los estudiantes durante las sesiones de clase en el aula.

Las razones por las cuales se eligió el análisis cualitativo fue porque el estudio se enfocó a conocer el tipo de estrategias que los alumnos emplearon en su aprendizaje en el tema *los números con signo y sus operaciones*, por lo que los datos que se recabaron son episodios donde se indagó sobre sus formas de razonamiento; la información recabada proviene de la observación del trabajo desarrollado en la clase, la fuente de datos más importante fue el trabajo escrito de los estudiantes, en este caso las *hojas de trabajo* que se distribuyeron a cada alumno, estos instrumentos arrojaron información sobre la manera en que los estudiantes abordan cada actividad con la ayuda de la calculadora.

El método de análisis que se seleccionó es el que desarrollaron Miles y Huberman (1984). El análisis cualitativo permite documentar cuáles fueron las formas de razonamiento que emplearon los estudiantes, cómo fueron afinando sus estrategias, cómo realizan sus conjeturas, cómo el error es parte de la construcción de sus conocimientos, lo cual consideramos que es congruente con las preguntas de investigación planteadas para este estudio.

Descrito sucintamente, el método de Miles y Huberman destaca tres fases esenciales: el proceso de reducción de datos, la representación de datos y el establecimiento de conclusiones. En la primer etapa, los autores recomiendan una actividad anticipadora o inicial que permite perfeccionar las actividades que tendrán que ver con la segunda etapa, la representación de los datos o estudio principal. A manera de estudio piloto se preparó un ensayo a priori sobre las posibles estrategias de solución que los estudiantes podrían emplear para enfrentar las actividades didácticas. Este aspecto se aborda con mayor detalle más adelante.

El segundo momento, la representación de datos, consiste en localizar los componentes más significativos que dan sustento a la tarea de búsqueda y que están estrechamente relacionados con las preguntas de investigación para posteriormente desencadenar esto en la última fase en el apartado de conclusiones. Cabe destacar que estos tres momentos, no se dan de manera aislada, son tres fases interactivas que siempre deben estar en el proceso de investigación.

Otra técnica que se empleó fue la de observación, ésta, tal como se la usa para registrar e interpretar los hechos del aula, requiere de un observador que coloque los hechos en categorías; éstos se registran por medios mecánicos (en esta investigación sólo se utilizó la video grabación) y luego se codifican; o bien el observador registra y codifica los hechos simultáneamente, mientras está en el aula. Las tres etapas del proceso implican, a) el registro sistemático de los hechos tal como suceden, b) la codificación de esos hechos en categorías previamente especificadas y c) el análisis posterior a fin de proporcionar descripciones de la interacción entre el alumno y el docente (Blaxter, 2000). Estas tres etapas se podrán observar claramente en este trabajo; el inciso b en el punto 4.7 de este capítulo, el inciso a en el capítulo 5, y el inciso c en el capítulo 6.

Sujetos

El trabajo de campo se llevó a cabo con un grupo escolar que cursa el primer grado de la escuela secundaria[5] (edad promedio 11-12 años). El grupo consta de 39 alumnos y se trabajó con ellos durante 14 sesiones de 50 minutos cada una aproximadamente (por razones varias, hubo sesiones de 15 ó 20 minutos) entre los meses de octubre y diciembre de 2004. El trabajo se desarrolló como parte del curso regular y cabe señalar que los alumnos no tenían conocimiento del tema de números con signo.

[5] Escuela Secundaria Dna. No. 90 “Ing. Juan Guillermo Villasana”. Del. V. Carranza. D.F.

Ambiente de trabajo

El trabajo de campo se llevó a cabo en la Escuela Secundaria Diurna No. 90 "Ingeniero Juan Guillermo Villasana", del Distrito Federal. Desde la primera sesión de clases se les comentó a los alumnos la forma de trabajar, se les explicó que al inicio iban a trabajar por parejas, se les dio una hoja de trabajo a cada uno y una calculadora TI-92 para cada pareja de alumnos; posteriormente la forma de trabajar fue en equipos de cuatro, a cada alumno se le dio una hoja de trabajo y 2 calculadoras TI-92 para los cuatro alumnos, cabe señalar que esta segunda forma de trabajo fue más productiva, se observaba mayor socialización.

Después de entregar las hojas, se dio tiempo para que los alumnos resolvieran las actividades, durante las sesiones algunos alumnos le pedían apoyo al profesor, las dudas más comunes eran la parte técnica para operar con la calculadora. Otros alumnos le avisaban al profesor que ya habían terminado, a lo que el profesor daba unos segundos más para proceder a revisar las primeras dos o tres actividades según fuera el caso pero en forma grupal; la revisión de las actividades fue enriquecedora ya que en la mayoría de los casos había respuestas diferentes, lo cual propició que los alumnos argumentaran sus respuestas y/o las justificaran, de esta manera se generó un aprendizaje construido desde los alumnos y no proporcionado por el profesor.

Cuando fue necesario, el profesor pasó a los alumnos al pizarrón para que expresaran lo que habían encontrado u obtenido en su calculadora y en algunos casos los mismos alumnos pidieron pasar al pizarrón para explicarse mejor.

El investigador se incorporó como profesor del curso de matemáticas, su participación se centró en orientar el trabajo de los alumnos cuando éstos lo requerían y en vídeo grabar directamente las sesiones.

Fuentes de datos: Actividades de Enseñanza

Las actividades se presentaron en el formato de hojas de trabajo de las cuales seis de las siete se tomaron de Cedillo (1999), la otra fue elaborada por el investigador bajo la asesoría del Dr. Cedillo. Las primeras seis hojas corresponden al tema: números con signo y sus operaciones; la última hoja corresponde al tema: relación de orden de números con signo. Cabe señalar que todas las hojas están diseñadas para abordarse con la calculadora.

Toma de datos

Con el fin de documentar el trabajo se diseñaron las actividades de enseñanza como *hojas de trabajo* y se reprodujeron para ser entregadas a cada uno de los alumnos. Esto proporcionó datos que fueron analizados una vez que los alumnos entregaron sus hojas de trabajo al profesor; los datos dieron origen a ciertas categorías: los aciertos de los alumnos, los errores más comunes y las estrategias no convencionales que desarrollaron (ver Capítulo 6).

Las transcripciones de las video grabaciones, constituyen otra fuente importante de datos, en especial la parte que corresponde a *observaciones* (Ver Capítulo 5).

Estrategias de solución de las hojas de trabajo: Un análisis a priori.

En este apartado se reporta el ensayo a priori que se efectuó con la finalidad de anticipar las posibles estrategias de solución y dificultades que los alumnos podrían tener en cada pregunta y actividad de las hojas de trabajo.

HOJA DE TRABAJO 1

¿CÓMO SUMAMOS NÚMEROS CON SIGNO?

En estas hojas de trabajo aprenderás cosas importantes sobre los números negativos. Los números con signo pueden ser **positivos o negativos, el cero no es positivo ni negativo**. Los números positivos los conoces bastante bien.

Los números negativos se usan para referirse a ciertas situaciones. Por ejemplo, la temperatura "siete grados bajo cero" puede representarse mediante la expresión **–7 grados**. Los números negativos también se usan para referirse a deudas, por ejemplo, si una persona debe $1000.00, esa deuda puede representarse mediante la expresión **–1000 pesos** (se lee "menos mil pesos").

¿Puedes dar otro ejemplo de una situación en que puedan usarse los números negativos?

1. Usa la calculadora para realizar las siguientes actividades. Nota que en la calculadora hay dos signos que representan "menos". Uno de esos signos sirve para efectuar la operación de restar, el otro, el signo (–), es el que debes usar para escribir un número negativo en la calculadora.

a) –7+9=	b) –5+–7=	c) 8+–7=	d) –15+–17 =
e) –30+–50=	f) 0.5+–2=	g) –19+–30=	h) –72+30=

2. ¿Qué operaciones hizo la calculadora para sumar un número negativo con un número positivo?
3. ¿Qué operaciones hizo la calculadora para sumar un número negativo con otro número negativo?
4. ¿Qué hace la calculadora para saber qué signo le pone al resultado de esas operaciones?
5. En cada inciso encuentra tres parejas de números que al sumarlos den el resultado que se indica. Verifica tus respuestas usando la calculadora.

a) Resultado: –32	b) Resultado: –45	c) Resultado: –27	d) Resultado: –40
e) Resultado: –55	f) Resultado: –78	g) Resultado: 0	h) Resultado: –1

Análisis a priori de la hoja de trabajo 1

Tema: suma de números con signo

Temas implícitos: Usos de los números con signo como formas de representación de magnitudes. Estimación de sumas con números con signo. Cálculo mental con números con signo.

Otros ejemplos: En el fútbol, respecto a goles a favor (+) y goles en contra (-). En los estados de cuenta bancarios, abonos (+) y retiros (-). En la escuela ante expresiones: un punto más (+1) o menos un punto (-1).

Inciso 1

Tal vez, haya errores en el uso de los signos negativos al no diferenciar que uno es del número y el otro representa la operación (aún cuando se ha hecho esta observación al iniciar la hoja de trabajo).

En los incisos a) y c), al número positivo se le restó.

En los incisos f) y h), le sumó.

En los incisos b), d), e) y g), sólo sumó los números y se puso el mismo signo de los sumandos (ambos son iguales).

Inciso 3

- Sumó los dos números y como ambos números tienen signo negativo, el signo del resultado es negativo.
- Como al sumar dos números positivos el resultado es positivo, al sumar dos negativos el resultado debe ser negativo.

Inciso 4

- Le pone el signo del número que se encuentra más lejos del cero en la recta numérica.
- Le pone menos si los dos números son negativos.
- Pone el signo del que tiene mayor valor absoluto.

Inciso 5

- Que al principio use sólo números positivos y posteriormente, les cambie de signo a cada sumando.
- Que sólo use tres sumandos negativos.
- Que use dos sumandos negativos y uno positivo.
- Que use un sumando positivo y dos negativos.
- Que sólo usen enteros.
- Que usen números decimales tanto positivos como negativos.
- Que realicen primero la suma de dos sumandos y luego, el resultado lo sumen al tercer sumando (por separado).

Observaciones. Se trabaja la reversibilidad y la flexibilidad del pensamiento. Faltó poner actividades con números decimales. Poner contraejemplos como buscar tres sumandos cuyo resultado sea 5.

HOJA DE TRABAJO 2

ALGO MÁS SOBRE SUMAS

1. ¿Puedes encontrar tres números que al sumarlos den por resultado cero? ¿Cuáles son?

2. ¿Puedes encontrar cuatro números que al sumarlos den por resultado –1? ¿Cuáles son?

3. ¿Puedes encontrar cinco números que al sumarlos den por resultado –27? ¿Cuáles son?

4. Construye una suma con tres sumandos de manera que el resultado sea –0.25.

5. Construye una suma con cuatro sumandos, dos positivos y dos negativos, de manera que el resultado sea –0.763.

6. Construye una suma con cinco sumandos, dos negativos y tres positivos, de manera que el resultado sea 38.5.

7. Construye una suma con cinco sumandos, cuatro negativos y uno positivo, de manera que la suma sea –7.328.

8. Encuentra los números que faltan. Verifica tus respuestas con la calculadora, no debes tener ningún error.

a) $-15+13+m = 0$ $m =$	b) $17+-20+n = -75$ $n =$	c) $p+18+-35 = -100$ $p =$
d) $-2.5+q+-12 = 7.8$ $q =$	e) $\frac{1}{3}+r+-\frac{1}{9} = -2$ $r =$	f) $-\frac{1}{5}+s+\frac{3}{8} = 0$ $s=$
g) $-1.3+t+-2.4 = -10$ $t =$	h) $7.45+-12.8+u = 15$ $u =$	i) $-v+\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=0$ $v =$

Análisis a priori de la hoja de trabajo 2

Tema: Suma con números con signo

Temas implícitos: Cálculo mental. Estimación. Primeras nociones de orden en el conjunto de los números con signo. Resolución de ecuaciones que contienen números negativos. Sumar dos enteros positivos y luego el entero negativo (su simétrico).

Posiblemente los alumnos harían lo siguiente:

Inciso 1

- Sumar dos enteros positivos y luego restar.
- Usar números pequeños (decimales) o próximos a cero.
- Sumar dos números simétricos y luego el cero.

Inciso 2

- Sumar tres números positivos y el cuarto un número negativo.
- Sumar tres números negativos y el cuarto un número positivo.
- Sumar dos enteros consecutivos y luego sumar dos veces el simétrico del mayor.
- Sumar cuatro números decimales negativos.

Inciso 3

- Poner -27 en la calculadora y luego sumar dos veces dos simétricos o viceversa.
- Sumar cinco números negativos.
- Sumar tres enteros positivos que den 27, luego sumar el simétrico del doble de 27.

Inciso 4

- Sumar los tres números decimales sin tomar en cuenta el valor posicional, por lo tanto cometerán errores.
- Sumar los tres números negativos considerando el valor posicional.
- Sumar dos enteros positivos y luego el tercero negativo en forma decimal.
- Iniciar de –0.25 y luego la suma de dos números simétricos.

Inciso 5

- Sumar dos enteros positivos cualesquiera, sumar su simétrico y luego -0.763.
- Sumar por separado, primero dos números enteros positivos, buscar otros dos cuyo resultado exceda en 0.763 a la primera suma, y luego, cambian signos.
- Buscar dos simétricos y sumarlos, buscar dos sumandos uno excederá en 3 y luego, colocar los signos.
- Anotar –0.763, sumar un entero positivo, luego 2 sumandos negativos cuyo resultado sea el simétrico del segundo sumando.

Inciso 6

- Sumar dos veces dos simétricos, luego sumar 38.5.
- Sumar tres positivos, al resultado sumar su simétrico y por último, sumar 38.5.
- Poner 38.5, luego sumar dos veces dos simétricos.
- Sumar al inicio puros enteros y al final el decimal.

Inciso 7

- Sumar dos simétrico, sumar –0.328, más 2 negativos que den –7.

- Poner –0.328, sumar 3 sumandos que den un número mayor que 7, por último sumar la diferencia entre –7 y el número mayor que siete.

Inciso 8

8 a): Sumar por partes (Reducción de términos semejantes) para que quede –2+m =0 y luego explorar con m = -2 o con m = 2.

8 b): Por partes sumar 17 + -20 para quedar -3 + n = -75, luego por ensayo y error.

8 c) Por partes (Reducción de términos semejantes), luego por ensayo y error.

En general estas actividades tendrán estas mismas estrategias; en los casos de los incisos a, f e i, se espera utilicen el simétrico después de reducir términos semejantes.

Tal vez algunos empiecen a inferir que después de la reducción de términos semejantes, sumen o resten los valores numéricos que hay a cada lado del signo igual.

Los ejercicios más complejos son en los que aparecen fracciones.

Observaciones. Una actividad previa a la actividad 1, sería que en lugar de buscar tres sumandos, que sean dos, para identificar claramente los números simétricos. En los ejercicios número 8, sería bueno que se muestren expresiones donde sea más evidente la equivalencia, por ejemplo:

n + 25 = 200 + -75 -36 + -63 = n + 1

HOJA DE TRABAJO 3

¿CÓMO RESTAMOS NÚMEROS CON SIGNO?

También podemos hacer restas con números negativos. Por ejemplo, haz en tu calculadora la siguiente operación **9 - – 8.**

Nota que el primer signo "menos" **(-)** es el que se usa para restar, y que el segundo signo "menos" **(–)** es el que se usa para escribir números negativos en la calculadora.

1. ¿Qué resultado da la calculadora cuando haces la operación 9 - – 8? ______ ¿Por qué crees que se obtiene ese resultado?

2. Teclea en la calculadora la expresión **10-** –**6** y luego presiona la tecla "**ENTER**" O "**EXE**" según corresponda. ¿Qué resultado da la calculadora? ________ ¿Qué crees que hace la calculadora cuando tecleas, uno enseguida del otro, los dos signos para la expresión "menos"?

3. Realiza las siguientes operaciones usando la calculadora.

a) 9- –10 =	b) 14- –14 =	c) $\frac{1}{2} - -\frac{1}{2} =$
d) $\frac{1}{3} - -\frac{1}{3} =$	e) –18-–14 =	f) –100-–48 =

4. Explica lo que crees que hace la calculadora para restar un número negativo.

5. Encuentra el número que falta. Usa la calculadora para verificar tus respuestas.

a) 4-a = 10 a =	b) $-\frac{1}{2} - b = \frac{3}{4}$ b =	c) $-\frac{1}{3} - c = \frac{1}{2}$ c =
d) –18-d = 20 d =	e) –40-e = 50 e =	f) 16-f = 40 f =
g) –17.5-g = –19.4 g =	h) 38.7-h = 62.4 h =	i) –17.9-k= 100 k =

En el laboratorio de química un alumno observó que cada 60 segundos la temperatura de una substancia disminuía la misma cantidad de grados. Al iniciar el experimento la temperatura de esa substancia era 36°C y seis minutos después era −24°C. En otro experimento ese alumno observó que la temperatura de otra substancia era −30°C y que disminuía 4°C cada minuto. Si él inició los dos experimentos al mismo tiempo, ¿después de cuántos minutos las dos substancias tendrán la misma temperatura? ¿Cuál es esa temperatura?

Análisis a priori de la hoja de trabajo 3

Tema: Resta con números con signo

Temas implícitos: Introducción al uso de signos concatenados (+-,--). Resolución de ecuaciones que contienen números negativos. Resolución de ecuaciones que involucran signos concatenados (--). Introducción de -1 como coeficiente implícito. Resolución de problemas que involucran operaciones con números con signo. Relación inversa entre la suma y la resta.

1. El resultado es 17, porque:
   - No sé.
   - Al quitarle nueve a menos ocho, en realidad se le está sumando.
   - Tal vez al usar dos signos negativos seguidos, se ha de interpretar como una adición.
   - La calculadora ha de aplicar la ley de signos como señala mi hermano de la preparatoria.
2. ¿Qué resultado da la calculadora? 16 y creo que la calculadora hace:
   - Considerar los dos signos negativos seguidos como una suma.
   - Convertir los dos signos en uno positivo.
   - Negar la posibilidad de restar, es decir sumar.
   - No sé.
3. Se realizaron las operaciones, en algunos se tiene la particularidad de que el minuendo es negativo a diferencia de las primeras actividades.

4.1 Que al minuendo, independientemente de que sea entero o fracción, se le ha de sumar el sustraendo.

4.2 Que la resta la convierte en suma, cuando el sustraendo es negativo.

4.3 Cambiar dos signos negativos seguidos por un positivo, por lo tanto se convierte en una adición.

4.4 Si el primer número (minuendo) es positivo y el segundo es negativo (sustraendo), en la resta, realiza una suma común y corriente.

5 En estos ejercicios, tal vez algunos alumnos hagan uso del ensayo y el error.

a) Posiblemente le den valores a "a" de 6 hasta –6 tratando de identificar una de las estrategias "operación inversa".
b) A -½ le restarán –2/2, 2/2, 4/6 ó –4/6; luego b = ± ¼ ó b = ± 5/4.
c) Tratando de perfeccionar las estrategias, a –1/3 le podrán sumar ± 2/5 ó ± 5/6.
d) Se puede intuir que d = ± 2.
e) Similar al anterior sólo que e = ± 10
f) f puede ser tomada como ± 24
g) g puede valer ± 36.9
h) h puede valer ± 23.
k) puede tener como valor ± 82.1 o bien, ± 117.9.

6. El problema pude tener ciertos procedimientos.

- Podrán iniciar con 36 grados, en el primer minuto tendrán 30 grados, en el segundo minuto 24, en el tercero 18, así sucesivamente pero se darán cuenta que después de 6 minutos no llegarán a –24 grados.
- Otros primero obtendrán cuántos grados hay desde 36 hasta –24, y realizarán una simple resta omitiendo el signo de la operación y les saldrá 12 grados. Otros sí se darán cuenta de que hay 60 grados de diferencia. Si los niños realizan lo último, algunos: dividirán 60 entre 60 segundos; otros, 60 entre 6 minutos. Los que hagan la segunda divi-

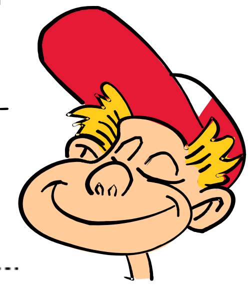
sión, obtendrán 10, que corresponde a los grados que debe bajar cada minuto. Posiblemente hagan una tabla de valores.

Tiempo A	Tiempo B	Sustancia 1	Sustancia 2
1	0	36	-30
2	1	26	-34
3	2	16	-38
4	3	6	-42
5	4	-4	-46
6	5	-14	-50
7	6	-24	-54
8	7	-34	-58
9	8	-44	-62
10	9	-54	-66
11	10	-64	-70
12	11	-74	-74
13	12	-84	-78

Algunos alumnos podrán hacer la tabla considerando el tiempo A y otros el tiempo B. Por lo tanto algunos darán como respuesta 12 y 11 minutos respectivamente. Sin embargo, lo correcto es 11 minutos que corresponde a la temperatura de –74 grados.

HOJA DE TRABAJO 4

¿CÓMO MULTIPLICO NÚMEROS CON SIGNO?



El trabajo que realices en esta hoja te ayudará a aprender cómo hacer multiplicaciones con dos números negativos.

1. Efectúa las siguientes operaciones usando la calculadora:

a) $-8\times 6 =$	b) $-3\times 4 =$	c) $5\times(-6) =$	d) $-9\times 3 =$
e) $5\times -7 =$	f) $8\times(-4) =$	g) $10\times(-10) =$	h) $-1\times 8 =$

2. Explica lo que crees que hace la calculadora para multiplicar un número positivo por un número negativo.
3. Un alumno dice que -7×13 da el mismo resultado que $13\times(-7)$. ¿Lo que dice ese alumno es correcto? _____________ Justifica tu respuesta
4. Efectúa las siguientes operaciones sin usar la calculadora.

a) $-9\times 7 =$	b) $-8\times 5 =$	c) $7\times(-4) =$	d) $-10\times 5 =$
e) $6\times -7 =$	f) $9\times(-9) =$	g) $7\times(-7) =$	h) $-1\times 9 =$

5. Ahora usa la calculadora para revisar las respuestas que diste en el inciso anterior. ¿Todas tus respuestas fueron correctas? __________ ¿Cometiste algunos errores? ______ ¿En qué consistieron?
6. Exploremos ahora como multiplicar dos números negativos. Para hacer esto realiza las siguientes operaciones usando la calculadora.

a) $-8\times(-5) =$ ______	b) $-7\times -9 =$ ______	c) $-6\times(-6) =$ ______	d) $-10\times -4 =$ ______
e) $-5\times(-7) =$ ______	f) $-4\times -9 =$ ______	g) $-8\times(-8) =$ ______	h) $-1\times -10 =$ ______

Explica qué hace la calculadora para multiplicar un número negativo por otro número negativo.

Análisis a priori

Tema: Producto con números con signo

Temas implícitos: Comparación entre el producto con números positivos y con números negativos. Propiedad conmutativa del producto.

1. En esta primer actividad no hay al parecer ningún problema ya que sólo se deben ingresar los datos a la calculadora, es decir se le pide al alumno que efectúe las operaciones.

2. Lo que creo que hace es:

- Multiplicar comúnmente, pero el resultado es negativo.
- Como no hay signo positivo, coloca el negativo y el resultado de la multiplicación.
- Coloca siempre el signo negativo y el resultado de la multiplicación.
- No sé.

3. Sí es correcto, porque:

- Ya lo comprobé con la calculadora.
- En la actividad 1, cada multiplicación tiene un número con el signo menos y el otro no lo tiene y en todas el resultado es negativo, en esto que dice el alumno se tiene esta misma característica.
- En una multiplicación, si un número es negativo y el otro positivo, el resultado será negativo, esto sucederá sin importar el orden.
- El orden en que se multiplican los números no importa, el resultado siempre va a ser el mismo, en este caso, negativo.

4.1 Multiplicarán pero algunos tendrán duda de poner el signo menos o más.

4.2 Multiplicarán correctamente y colocarán adecuadamente el signo menos.

5.1 Algunas incorrectas: puede ser que no multiplicaron adecuadamente y además, no colocar el signo correspondiente.

5.2 Todas correctas.

6.1 Tal vez se equivoquen algunos alumnos pero por usar el signo “-“ de la operación al inicio en la multiplicación, en lugar de usar el signo “-“ para escribir un número negativo.

6.2 No A ver errores ya que sólo se ingresan los números.

7.1 Realiza una multiplicación sin importar o tomar en cuenta los signos negativos.

7.2 En la actividad 1, se tenía sólo un número negativo y el resultado siempre daba negativo, en estos ejercicios los dos números son negativos, tal vez usar dos números negativos dará como resultado un número positivo.

7.3 Tal vez multiplicar dos números negativos dé como resultado un número positivo.

7.4 Se eliminan los signos negativos y el resultado es sin signo negativo.

8. Sí es correcto porque:

8.1 Ya lo comprobé con la calculadora.

8.2 En la actividad 6, vimos que si se multiplican dos números negativos, el resultado no será negativo, entonces las dos multiplicaciones tendrán el mismo signo, o sea positivo; además 4 X 12 es lo mismo que 12 X 4, por lo tanto el resultado debe tener el mismo signo y el misma valor numérico.

8.3 Son los mismos números, sólo que uno aparece primero, pero eso no importa, el resultado va a ser el mismo.

8.a. Otra alumna dice que –(-8) equivale a la operación –1 X –7. ¿Estás de acuerdo?

Sí porque:

8.a.1. Ya lo comprobé con la calculadora.

8.a.2. Porque el signo que antecede al paréntesis, hace que cambie el de –7 por +7.

8.a.3. Porque el signo "-" expresa lo mismo que –1, es decir, - = -1.

8.a.4 Por la razón anterior, -(-7) es lo mismo que –1(-7) y como esto representa una multiplicación, entonces equivale a decir -1 X –7. Son expresiones equivalentes.

HOJA DE TRABAJO 5

ALGO MÁS SOBRE MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS CON SIGNO

1. Veamos ahora cómo hacer multiplicaciones con más de dos números con signo. Para esto realiza las siguientes operaciones usando la calculadora.

a) $2\times4\times(-5) =$	b) $-2\times4\times(-5) =$	c) $-2\times(-4)\times(-5) =$	d) $2\times4\times5 =$
e) $3\times(-2)\times(-4) =$	f) $3\times(-2)\times4 =$	g) $-3\times(-2)\times(-4) =$	h) $3\times2\times4 =$
i) $5\times3\times(-4) =$	j) $-5\times(-3)\times 4) =$	k) $-5\times(-3)\times (-4) =$	l) $5\times3\times4 =$

2. ¿De qué depende el signo del resultado cuando multiplicas tres números?

3. Realiza las siguientes operaciones sin usar la calculadora.

a) $3\times5\times(-4) =$	b) $-4\times4\times(-2) =$	c) $-2\times(-3)\times(-3) =$	d) $3\times4\times3 =$
e) $4\times(-1)\times(-3) =$	f) $5\times(-1)\times2 =$	g) $-6\times(-2)\times(-4) =$	h) $4\times3\times6 =$
i) $6\times2\times(-1) =$	j) $-3\times(-4)\times5) =$	k) $-5\times(-2)\times (-1) =$	l) $5\times5\times4 =$

4. Ahora usa la calculadora para revisar las respuestas que diste al inciso anterior. ¿Todas tus respuestas fueron correctas? _____ ¿Cuáles de tus respuestas fueron incorrectas? ______________ ¿En qué consistieron tus errores?

5. La siguiente actividad es un juego. Las operaciones están hechas y sólo falta el signo del resultado. El juego consiste en **que digas cuál es el signo del resultado sin hacer ninguna operación**. Escribe el signo del resultado dentro del cuadro correspondiente.

a)	$-10 \times 2\times (-5) =$		100	e)	$-7\times (-8) \times (-0.2) =$		11.2
b)	$-1.5\times(-2)\times(-6) =$		18	f)	$-1.7 \times 0.8 \times -2 =$		2.72
c)	$-6.4\times(-3.2)\times -1 =$		20.48	g)	$-1.3 \times(-3.8) \times 5.1 =$		25.194
d)	$-4.6 \times 2.7\times 5.9 =$		73.278	h)	$4.5 \times 5.7 \times 9.3 =$		238.545

i)	$-1.5\times(-2.3)\times (-5.1) \times -1.2=$		21.114	m)	$-1.7\times2.3)\times(-5.6)\times3.3 =$		72.2568
j)	$-8.5\times(-2.5)\times(-5.4)\times-1.8 =$		206.55	n)	$7.5\times(-2)\times(-5.4)\times-1.6 =$		129.6
k)	$-9 \times 10.2 \times (-5.1) \times 4.5 =$		2106.81	o)	$-1.2\times(3.4)\times(-6.1)\times-3 =$		74.664
l)	$-8.5\times(-1.1)\times(-2.1)\times-1.4 =$		27.489	p)	$-2.5\times(-4.8)\times6.4\times1.2 =$		92.16

Usa la calculadora para revisar las respuestas que diste al inciso anterior. ¿Todas tus respuestas fueron correctas? _______ ¿Cuáles de tus respuestas fueron incorrectas? _________ ¿En qué consistieron tus errores?

Análisis a priori de la hoja de trabajo 5

Tema: Producto con números con signo

Temas implícitos: Producto con más de dos factores. Determinación del signo del producto a partir del número de factores negativos. Propiedad asociativa del producto.

1 En esta actividad considero que no habrá problema debido a que sólo se deben ingresar los números a la calculadora.

2.1 De la cantidad de signos positivos que tiene cada multiplicación.

2.2 De la cantidad de signos negativos que tiene cada multiplicación.

2.3 De la cantidad de signos negativos y positivos que tiene cada multiplicación.

3.1 Algunos no sabrán poner el signo del resultado.

3.2 Otros revisarán las multiplicaciones de la actividad 1 y tratarán de buscar una analogía con respecto a la cantidad de signos que se encuentran en cada multiplicación, para que de esta manera sepan qué signo debe tener cada resultado.

3.3 Otros empezarán a ver ciertas regularidades como:

- El resultado será positivo si en la multiplicación de tres factores dos de ellos, son negativos; o bien si sólo hay un número positivo.
- El resultado será negativo si en la multiplicación de tres factores uno de ellos es negativo, si los tres son negativos o bien si dos números son positivos.

4.1. Incorrectas:

- No se colocó adecuadamente el signo del resultado.
- No se multiplicó correctamente
- No se ha percibido en qué condiciones el resultado debe ser negativo o positivo.

4.2 Correctas:

- Se ha identificado correctamente qué signo debe tener el resultado de cada multiplicación,

5.1 Puede ser que en algunos resultados los alumnos coloquen más veces el signo menos, que se dejen llevar por la presencia de los signos negativos en el caso de las multiplicaciones con tres factores.

5.2 En el caso de las multiplicaciones con cuatro factores tal vez duden más en colocar el signo.

5.3 Si los alumnos analizan adecuadamente la pregunta 2 de esta hoja de trabajo y si tratan de buscar una analogía con el punto 1, podrán resolver la actividad 5.

5.4 En el caso de los cuatro factores, algunos alumnos podrán resolverlo por partes, es decir, primero obtendrán el signo de los dos primeros factores y posteriormente el signo de los otros dos, para que por último sólo consideren estos dos signos y obtengan el signo que deben colocar al resultado.

6.1 No todas fueron correctas y los errores consistieron en:

- No colocar adecuadamente el signo que corresponde.
- Abusar de la presencia del signo menos.

6.2 Sí todas las respuestas fueron correctas.

Observaciones: Otra actividad para que los alumnos usen y manipulen más los números con signo, sería:

De los siguientes números: ± 2, ± 4, ± 5 y ±10, cuáles usarías como factores para obtener como resultado los números -40, 20, -80, 80.

Otra actividad para trabajar la equivalencia de números indicada con factores sería como la siguiente:

Buscar los factores que hacen falta para que las multiplicaciones indicadas sean equivalentes, verifica tus resultados con la calculadora.

(5) (-4) = (   ) (2)   (-2)(4) (5) = (2) (   ) (   )

Otra actividad en la que estaría implícita la solución de ecuaciones de la forma $ax=b$ sería:

¿Qué número multiplicado por -4 da -20, 44, -100, 100?

Es decir, calcular el valor de "n"

$(-4)\,(n) = -20 \quad (-4)\,(n) = 44 \quad (-4)\,(n) = -100 \quad (-4)\,(n) = 100$

HOJA DE TRABAJO 6

¿CÓMO DIVIDO NÚMEROS CON SIGNO?

1. Efectúa las siguientes operaciones usando la calculadora.

a) $-8 \div 2 =$	b) $-12 \div 4 =$	c) $18 \div (-6) =$	d) $-9 \div 3 =$
e) $15 \div (-5) =$	f) $8 \div (-4) =$	g) $10 \div (-10) =$	h) $-1 \div 8 =$

2. Explica mediante un ejemplo qué crees que hace la calculadora para hacer divisiones con números con signo.

3. Un alumno de otra escuela dice que $-8 \div 20$ da el mismo resultado que $20 \div (-8)$. ¿Lo que dice ese alumno es correcto? ____________ ¿Por qué?

4. Efectúa las siguientes operaciones <u>sin usar la calculadora</u>.

a) $-91 \div 7 =$	b) $-80 \div 5 =$	c) $70 \div (-4) =$	d) $-10 \div 5 =$
e) $6 \div (-7) =$	f) $9 \div (-9) =$	g) $7 \div (-7) =$	h) $-1 \div 9 =$

5. Usa la calculadora para revisar tus respuestas a la pregunta anterior. ¿Todas tus repuestas fueron correctas? ________________ ¿Cuáles respuestas fueron correctas? ______________________________________ ¿En qué consistieron tus errores?

6. Exploremos ahora como dividir un número negativo entre otro número negativo. Para hacer esto realiza las siguientes operaciones usando la calculadora.

a) $-8 \div (-5) =$	b) $-7 \div (-9) =$	c) $-6 \div (-6) =$	d) $-10 \div (-4) =$
e) $-5 \div (-7) =$	f) $-4 \div (-9) =$	g) $-8 \div (-8) =$	h) $-1 \div (-10) =$

7. Explica mediante un ejemplo qué crees que hace la calculadora para dividir un número negativo entre otro número negativo.

8. Un alumno de otra escuela dice que $-4\div(-12)$ da el mismo resultado que $-12\div(-4)$. ¿Lo que dice ese alumno es correcto? _________ ¿Por qué?

¿Qué semejanza encuentras entre la multiplicación y la división con números positivos y negativos?

Análisis a priori de la hoja de trabajo 6

¿Cómo divido números con signo?

Tema: División con números con signo

Temas implícitos: Comparación entre el cociente con números positivos y el cociente con números negativos. No-conmutatividad en la división.

1.1 No habrá problemas ya que sólo se ingresarán los datos a la calculadora.

2.1 Dividir en forma normal y colocar el signo menos.

2.2 Colocar el signo negativo si en la división un número es positivo y el otro negativo sin importar el orden.

2.3 Similar a la multiplicación con dos factores, si el dividendo es positivo y el divisor negativo, o al revés, si el dividendo es negativo y el divisor positivo, en ambos casos el resultado será negativo.

3.1 No es correcto porque:

- Ya lo comprobé con la calculadora.
- Considerando el punto 2.3, el signo sí será negativo, pero el resultado de la división no, ya que no es lo mismo repartir 8 naranjas a 20 niños que 20 naranjas a 8 niños, no les toca lo mismo.

4.1 No representa ningún problema ya que sólo se tienen que ingresar los números a la calculadora.

5.1 No todas, las únicas correctas fueron las del inciso a, b, c, d, f y g.

5.2 Los errores fueron en los incisos h y e, en ambos casos cambié los números para que me dieran enteros, así como en los otros incisos.

6.1 Ningún problema, sólo se ingresan los números a la calculadora.

7.1 Hace la división común y corriente e incluso sin tomar en cuenta los signos negativos.

2 No pone signo negativo, cuando en toda división tanto el dividendo como el divisor ambos son negativos.

7.3 Similar a la multiplicación de dos factores, si los dos números que se dividen son negativos, el resultado será negativo.

8.1 No porque:

- Ya lo comprobé con la calculadora.
- Por las mismas razones que la actividad 3 de esta hoja de trabajo.
- No es lo mismo repartir 4 naranjas entre 12 niño, que 12 naranjas entre 4 niños.

9.1 Que cuando dos números se multiplican o dividen la calculadora ejecuta lo mismo, es decir:

- Si los dos son negativos, el resultado será positivo.
- Si los dos son positivos, el resultado será positivo.
- Si el primero es negativo y el segundo positivo, el resultado será negativo.
- Si el primero es positivo y el segundo negativo, el resultado será negativo.

Observaciones. Se puede trabajar también la equivalencia con actividades como la siguiente.

$(-100) / (4) = (80) / (\quad)$ $\qquad\qquad$ $(-100)(4) = (-80) / (\quad)$

Otra sugerencia sería la solución de ecuaciones de la forma $a/x = b$.

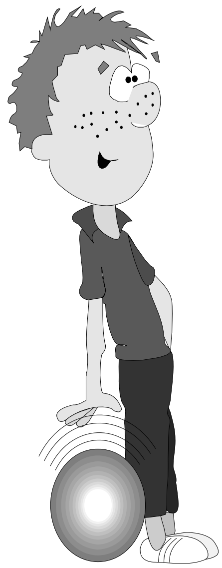
¿Entre qué número debemos dividir a 24 para que nos dé -10?

Calcula el valor de "n"

$-60 / n = 120$ $\qquad\qquad$ $-60 / n = 7.5$ $\qquad\qquad$ $80 / n = -320$

HOJA DE TRABAJO 7

POTENCIAS DE NÚMEROS CON SIGNO



1. Un alumno de otra escuela dice que $5^2=5\times2=10$. ¿Es correcto lo que dice ese alumno? __________ ¿Por qué? ______________ ¿Qué resultado da la calculadora si haces la operación 5^2? ____________________

2. Haz las siguientes operaciones con la calculadora:
   a) -6^2 y b) $(-6)^2$

3. ¿Qué resultado obtuviste en el inciso a)? ____________ ¿Y en el inciso b)? ________ ¿Cómo "interpreta" la calculadora la expresión -6^2? ______________________________________ ________ ¿Cómo "interpreta" la calculadora la expresión $(-6)^2$?

4. ¿Qué debes escribir en la calculadora si quieres "elevar menos siete al cubo"? ________________ Si escribiste correctamente esa expresión debes obtener como resultado -343. Si tu respuesta no fue correcta, corrígela y escríbela a continuación.

¿Qué debes escribir en la calculadora si quieres restar "seis al cubo de 100"? _______________ Si escribiste correctamente esa expresión debes obtener como resultado -116. Si tu respuesta no fue correcta, corrígela y escríbela a continuación.

6. Haz las siguientes operaciones sin usar la calculadora.

a) $-5^2=$	b) $-7^3=$	c) $-3^4=$
d) $-4^3=$	e) $-2^6=$	f) $-5^4=$

7. Usa la calculadora para revisar las respuestas que diste en el inciso 3. ¿Cuántos aciertos obtuviste? ¿Cometiste algunos errores? ¿En qué te equivocaste?

8. La siguiente actividad es un juego. Las operaciones ya se están hechas y al resultado sólo le falta el signo. El juego consiste en que encuentres el signo del resultado sin hacer ninguna operación con los números. Escribe el signo del resultado en el espacio correspondiente.

a) $-5^3 =$	$\boxed{}$	125	b) $(-3)^6 =$	$\boxed{}$	729	c) $(-9)^5 =$	$\boxed{}$	59049
d) $-7^8 =$	$\boxed{}$	5764801	e) $(-8)^{4 =}$	$\boxed{}$	4096	f) $-(-5)^4 =$	$\boxed{}$	625

9. Usa la calculadora para revisar las respuestas que diste en el inciso 8. ¿Cuántos aciertos obtuviste? _______ ¿Cometiste algunos errores? ¿En qué te equivocaste?

Análisis a priori de la hoja de trabajo 7

Tema: Potencia de números con signo

Temas implícitos: Los casos de $-a^n$ y $(-a)^n$. Determinación del signo de la potencia a partir del signo de la base y de la paridad del exponente. Propiedad asociativa del producto. Estrategias para efectuar multiplicaciones iteradas sin usar la calculadora.

1.1 No es correcto, porque:

- Con la calculadora 5^2 es igual a 25 y 5 X 2 es igual a 10.
- 5^2 significa 5 X 5, es decir cinco veces cinco, o sea 25 y, 5 X 2 significa dos veces cinco, o sea 10.

2.1 Sólo se pide hacer las operaciones.

3.1. En el inciso a) –36 y en el b) 36

El inciso a) la calculadora lo interpreta como:

- Deja el mismo signo "-" y sólo eleva el 6 al cuadrado dando como resultado -36.
- Al elevar al cuadrado, no toma en cuenta el signo "-" pero sí en el resultado.

El inciso b) la calculadora lo interpreta:

- Como si se multiplicara (-6) (-6) y, según vimos en la hoja de trabajo anterior, si dos números negativos se multiplican, el resultado será positivo, es decir, 36.
- Como multiplicar el número que está dentro del paréntesis por sí mismo.

4.1 Se debe escribir en la calculadora lo siguiente:

- (-) 7 X (-) 7 X (-) 7 =
- (-) 7 ^ 2 X 7
- (-) 7 ^ 3

5.1 Escribiría en la calculadora:

- 100-6
- 6 lo elevaría a la tercera potencia y le resto 100
- 100 menos 6 elevado a la tercera potencia
- No sé, no entiendo

6.1 Tal vez tengan duda de poner el signo principalmente, ya que puede ser positivo o negativo.

7.1 Se pueden tener errores:

- Poner resultados positivos.
- Multiplicar la base por el exponente.

8.1 Posiblemente ahora a todos los resultados les pongan signo negativo influenciados por la actividad 6 de esta hoja.
8.2 Otros tendrán correctamente las potencias en las que no hay paréntesis, sin embargo donde existe paréntesis dudarán.
8.3 Otros tendrán correctas todas excepto la última.

8.4 El último es un caso particular, ya que el signo "-" que antecede al paréntesis lo podrán considerar como -1, luego considerar la operación así $(-1)(-5)^4$ como una simple multiplicación y poner como positivo al resultado.

9.1 ¿En qué te equivocaste?. En el signo ya que:

- Cuando un número es negativo elevado a cualquier potencia sin paréntesis el resultado es negativo
- Cuando un número es negativo y está dentro de paréntesis y además la potencia es par, el resultado será positivo.
- Cuando un número es negativo y está dentro de paréntesis y además la potencia es impar, el resultado será negativo.
- Cuando le antecede un signo "-" a un paréntesis, éste le cambia de signo al obtenido dentro del paréntesis una vez elevado a la potencia indicada.

Observaciones. Se puede trabajar equivalencia, por ejemplo:

¿A qué potencia debe estar elevado el -2 para que sean equivalentes?

$(-4)^3 = (-2)^n$ $\qquad\qquad$ $-4^n = -2^{12}$

Hoja de trabajo 8
RELACIÓN DE ORDEN DE NÚMEROS CON SIGNOS

1. De cada pareja de números, encierra en un círculo el número que es mayor.

a) 8 y 6 **b)** –7 y –9 **c)** 2.05 y 2.10 **d)** – ½ y 0 **e)** –3.9 y –1

f) –11/12 y –7/8 **g)** –3 y –2 **h)**-1 y – ¾ **i)** 3.6 y 6.3 **j)** –3.6 y –6.3

2. ¿De qué manera podrías usar la calculadora para verificar si tus respuestas en el ejercicio 1 son correctas? Describe tu procedimiento.

3. De las parejas del ejercicio 1, al número que consideraste como mayor, réstale el otro. Realiza las operaciones con tu calculadora y compara los resultados con otros compañeros.

a)______ **b)**______ **c)**______ **d)**_______
e)______

f)______ **g)**______ **h)**______ **i)**_______

j)______

3.1. ¿Cómo son los resultados: todos positivos, todos negativos o algunos son positivos y otros negativos?

4. Un alumno comenta que si al efectuar 8 – 6, el resultado es un número **positivo**, quiere decir qué el 8 es mayor que 6.
Pero si se realiza la resta al revés, es decir: 6 – 8, el resultado es un número **negativo**, entonces 6 es menor que 8.

¿Será cierto lo que dice éste alumno? Coméntalo con tus compañeros y busca un contraejemplo:

5. Anota el símbolo >, < o = entre cada pareja de números según sea el caso.

a) -17 _____ - 20 **b)** –3/4 _____ -4/5 **c)** 3/4 _____ 4/5 **d)** –3/4 _____ 0.8

e) – 0.75_____ -0.708 **f)** –4.5_____ 0 $\boxed{\textbf{g)}}$ ½ _____ -100

h)-11/12 _____ -1/10

6. Ordena de mayor a menor las siguientes ternas de números.

O, -1, 1	½, -1/4, -0.5	-3, -1/3, 0	-2/5, 1/3, -5/8

Análisis a priori de la hoja de trabajo 8

Temas Implícitos: Relación de orden: entre números positivos; entre números negativos; entre un número positivo y un negativo; y con respecto al cero.

Análisis a priori

1. Podrán dar las siguientes respuestas:

a) Cuando ambos números son positivos, encerrarán el mayor. No creo que tengan problemas.

b) Cuando ambos números sean negativos podrán responder:

1b. Encerrarán el que tiene mayor valor absoluto.

2b. Encerarán el que tiene menor valor absoluto (el que esté más cerca del cero).

c) Cuando comparan un negativo con el cero, encerrarán al cero.

2. Para verificar con la calculadora, harían lo siguiente:

a) Al mayor (el que encerró), restarle el menor; y como es el mayor al quien le quité, debe sobrar algo.
b) Al primer número de la pareja a comparar, restarle el segundo.
c) Al más grande pasando por alto el signo negativo, restarle el otro número.
d) No sé.

3. No hay problema ya que sólo se realiza la resta de los números.

3.1 Ante los resultados con respecto al signo habría diferentes respuestas.

a) Todos son positivos.
b) Algunos son positivos y otros negativos.
c) La mayoría son positivos.
d) Todos son negativos.

4. Ante esta situación los alumnos podrían dar las siguientes respuestas:

a) Es cierto y no hay contraejemplos.
b) En algunos casos es cierto.
c) No es cierto.

5. Al utilizar los símbolos <, > ó = entre parejas de números podrían dar respuestas como las siguientes:

a) Poner el signo de "mayor que" al número que tiene mayor valor absoluto; es decir poner el signo de "menor que" al número que tiene menor valor absoluto (el que está más cerca del cero).

b) Poner el signo de “menor que” al número que tiene mayor valor absoluto; es decir, poner el signo de “mayor que” al número que tiene menor valor absoluto (el que está más cerca del cero).
c) No utilizarán el signo igual.

6. Respecto a ordenar de mayor a menor una terna de números, pueden dar como respuesta lo siguiente:
a) Ordenar la terna en forma correcta.
b) Ordenar la terna en forma invertida (colocando primero el menor).
c) Colocar primero el número que está entre el mayor y el menor número.

CAPÍTULO 5

DESCRIPCIÓN POR SESIÓN Y OBSERVACIONES

En este capítulo, el lector podrá encontrar las transcripciones completas de todas y cada una de las video grabaciones que se llevaron a cabo durante la puesta en marcha de la investigación. Además en forma paralela se rescatan los hallazgos, es decir, se muestran las dificultades, la problemática, los procedimientos seguidos por los alumnos al resolver las actividades de trabajo, o bien, las conclusiones y/o generalidades a las cuales los alumnos fueron capaces de obtener con relación a la operatividad de los números con signo con el apoyo del recuso didáctico: la calculadora (Texas Instruments TI-92) y hojas de trabajo[6].

La escuela donde se llevó a cabo el trabajo de investigación fue la Secundaria 90 Ing. Juan Guillermo Villasana, en particular, el grupo 1º C del turno matutino, ubicada en la Delegación Venustiano Carranza (D. F.), en el periodo de octubre a diciembre de 2004.

El código que se usó en la descripción de cada sesión fue el siguiente:

Mo. Maestro
Ao. Alumno
Aa. Alumna
As. Alumnos (as)
Las Observaciones que se hicieron durante las descripciones de cada una de las sesiones, están escritas con letra *cursiva*.

[6] Las hojas de trabajo fueron tomadas del libro “La calculadora en el Salón de clase I”. Sentido numérico e iniciación al álgebra. Cedillo, T. (1999). Grupo editorial Iberoamérica. México. Págs. 67 a la 73.

5.1 Descripción de la sesión 1

El tema general es "Números con signo", y ésta es la primera clase donde se desarrolla el subtema "adición de números con signo". El recuso didáctico fundamental es la calculadora y la hoja de trabajo 1.

Ambiente y organización del trabajo

Mo. "Buenos días muchachos, el tema que vamos a trabajar en general durante estas sesiones se llama Números con Signo, pero hoy, específicamente vamos a trabajar la adición, ¿de acuerdo? Les voy a entregar hojas de trabajo sobre las cuales van a trabajar por parejas y a veces en equipos de 4 alumnos..., (el maestro termina de dar las indicaciones de trabajo y continúa) posiblemente la calculadora nos ayudará a resolver estas actividades...a ver quién quiere hacer favor de darle lectura a la hoja que les acabo de entregar (algunos alumnos levantan la mano y dicen ¡yo!)"

Ao. Hoja de trabajo No. 1 ¿Cómo sumamos números con signo? En estas hojas de trabajo aprenderás cosas importantes sobre los números negativos. Los números con signo pueden ser positivos o negativos, el cero no es positivo ni negativo. Los números positivos lo conoces bastante bien.

Los números negativos se usan para referirse a ciertas situaciones. Por ejemplo, la temperatura "siete grados bajo cero" puede representarse mediante la expresión –7 grados. Los números negativos también se usan para referirse a deudas, por ejemplo, si una persona debe $1,000.00, esa deuda puede representarse mediante la expresión –1000 pesos (se lee "menos mil pesos").

¿Puedes dar otro ejemplo de una situación en que puedan usarse los números negativos?..."

Mo. "Pueden pensar en algún ejemplo sobre números negativos como los ejemplos más o menos para posteriormente realizar la actividad No. 1, vamos a ver quién puede decir un ejemplo (los alumnos se quedan pensando, reflexionando)... pueden dar un ejemplo o alguna situación donde se usen los números negativos (da un tiempo y vuelve a preguntar) ¿alguien tiene ya alguna situación?...”

Ao. “Para sacar coordenadas de un punto terrestre.”

Mo. “Para sacar coordenadas de un punto terrestre... (Repite, como analizando la respuesta), bien, ¿qué les parece?..., ¿dónde has visto eso?”

Ao. “En un mapa...”

Mo. “Muy bien, ¿algún otro ejemplo?...”

Aa. “En la calculadora...”

Mo. “En la calculadora (repite como reflexionando)... ¿A ver qué has visto en la calculadora?”

Aa. “Cuando hacemos una operación, digamos una resta, cuando el número de arriba sea menor (se refiere al minuendo) y el de abajo mayor (se refiere al sustraendo), el resultado es negativo...”

Mo. “Cuando el minuendo es menor que el sustraendo... bien, ¿algún otro ejemplo? (los alumnos se quedan pensando y otra alumna dice)”.

Aa. “En una resta”.

Mo.”¿Cómo cuál’”

Aa. “10 menos 12 igual a menos 2” (el maestro anota la resta en el pizarrón)

Mo. “Bueno este es un ejemplo de las actividades que vamos a realizar, y vamos a ver si este signo (señala el del –2), realmente nos representa el signo del número o de la operación... bueno vamos a realizar la primera actividad, ¿quién le da lectura? (una alumna levanta la mano)”.

Aa. “Uno, usa la calculadora para realizar las siguientes actividades. Nota que en la calculadora hay dos signos que representan “menos”. Uno de esos signos sirve para efectuar la operación de restar, el otro, el signo (-), es el que debes usar para escribir un número negativo en la calculadora”.

Mo. “Bien, observaron eso (repite)..., nota que en la calculadora hay dos signos que representan “menos”. Uno de esos signos sirve para efectuar la operación de restar, el otro, el signo (-), es el que debes usar para escribir un

número negativo en la calculadora, hay dos tipos de signo entonces, ¿uno para qué nos sirve?...”
Aa. “Para hacer la operación”.
Mo. “¿Y el otro?”.
Ao. “Para escribir un número negativo”.

Existen dudas en la parte operativa, específicamente en los signos, ya que aquí los alumnos tienen su primer acercamiento ante la dualidad de significado del signo menos: como operación y como signo del número.

Mo. “Abusados con esto en la calculadora... vamos a dar tiempo para realizar los cuatro primeros incisos, después de un tiempo las revisaremos (después de un breve acercamiento de los alumnos a la calculadora, observa que tienen problemas para operar)... ¿Hay alguna diferencia entre las dos teclas? (se refiere a la que representa la resta y a la que representa el signo de un número)”.
As. ¡Sí!... (contesta, la mayoría)”.
Mo. “Vamos a diferenciarlas para que no tengamos problemas, ¿una de color es?”.
As. “¡Gris!, ¡negra! (contestan simultáneamente)”.
Mo. “¿Cómo es la de arriba?...”.
As. “¡Gris! (contestan todos)”.
Mo. “¿La otra es entonces?”.
As. “¡Negra! (contestan todos)”.
Mo “Para que no suceda lo que a su compañera lo que le salió de ANS (le salió en la pantalla de la calculadora ANS, porque al realizar la operación –7+9=, la alumna primero oprimió la tecla menos que representa la operación en lugar de utilizar la tecla menos que está entre paréntesis, la cual representa el signo del número) ¿qué teclas debe oprimir entonces?”.

As. "¡La gris! (lo dicen convencidos, ya que de lo contrario, no les va a salir el resultado)".
Aa. "Ya terminé las cuatro primeras..."
Mo. "Dime qué teclas oprimiste".
Aa. "La gris, siete más nueve y luego enter (al mismo tiempo que el maestro anota en el pizarrón)

(-)   7   +   9   enter

Comienzan a identificar la tecla que representa el signo del número.

Mo. "¿Cuánto te salió en la pantalla?"
Aa. "¡Dos!"
Mo. "¿A alguien le salió algo diferente en la pantalla?..."
As. "¡no! (se continua con la actividad)".
Mo. "Bien, inciso b niña"
Aa. nosotras pusimos menos entre paréntesis (refiriéndose a la tecla (-), o bien, la tecla que representa el signo del número), cinco más, menos entre paréntesis, siete y enter (simultáneamente, el profesor anota en el pizarrón)

(-)   5   +   (-)   7   enter

Mo. "¿Qué les dio en la pantalla?".
Aa. "Menos doce"
As. "¡No, no es correcto! (dicen algunos niños)".
Mo. "Menos doce (repite y anota en el pizarrón)...qué salió en la pantalla".
As. "¡Menos doce!"
Mo. "Oprime las teclas en el orden como se anotó en el pizarrón y vean lo que sale en la pantalla (les dice a los alumnos que habían dicho que no salía menos doce)"

As. “Menos doce (contestan convencidos)”

Mo. “Continuamos, inciso c niño, ¿qué teclas oprimiste?”

Ao. “8, más, menos con paréntesis, siete y luego, enter (al mismo tiempo que el profesor anota las teclas que oprimió el alumno)”

8 + (-) 7 enter

Mo. “¿Qué te salió en la pantalla?

Ao. “uno”

As. “Menos uno”

Mo. “¿Uno o menos uno?

As. ¡Uno! (convencidos)”

Mo. “¿A alguien le salió un número diferente?

As “¡No!

Mo. “Vamos a revisar el otro (observa al grupo y le da la palabra a una alumna después de levantar la mano), A ver tu niña qué teclas oprimiste”.

Aa. “Menos entre paréntesis, uno, cinco, más entre paréntesis, uno, siete, luego enter y me sale menos 32 (simultánemante, el profesor escribe en el pizarrón)”

(-) 1 5 + (-) 1 7 enter

As. “¡Sí!”

Mo. “¿A alguien le salió un número diferente?”

As.”¡No!

Mo. “Siguiente inciso”

Ao. “Me salió 80”

As. “Menos 80 (gritan)”

Mo. “¿A alguien le salió otro resultado?

As. “¡No!

Mo. “Inciso f (levantan la mano varios alumnos e inclusive dicen ¡yo!, ¡yo!), a ver niño”

Ao. “Me salió en la pantalla uno punto cinco”

Mo. “0.5 + 1.5 + -2 (al mismo tiempo que repite los números de la suma escribe en el pizarrón con la intención de que revisen todos con las calculadoras y observen que hay un error, en particular este alumno que dio la respuesta)”

As. “Es menos 1.5 (haciendo referencia de que 1.5, es incorrecto)”

Ao. “Es cero... (repite el alumno que dio primero la respuesta después de hacerlo nuevamente en la calculadora, pero lo dice sorprendido, sobre todo porque la mayoría dice que es –1.5 y sólo él había dicho 1.5)”

Mo. “¿Menos 1.5? (pregunta para verificar e intentar que el alumno observe el error)”

As. ¡Sí!”

Mo. “¿Qué oprimiste en la calculadora? (se dirige al alumno que dijo 1.5)”

Ao. “Lo mismo, oprimí el 0, luego el punto, luego 5, luego el signo +, luego el signo del negativo (simultáneamente el profesor va anotando en el pizarrón y repitiendo en voz alta)”

Mo. “¿Así como está (señala en el pizarrón el signo menos, el de la operación)?”

Ao. “Entre paréntesis (se refiere al signo del número, o sea el que está entre paréntesis en la calculadora)”

Mo. “Luego...”

Ao. “2 y por último enter”

As. “¡Sale uno punto cinco!”

Mo. “¿Positivo o negativo?”

As. “¡Negativo! (contestan todos)”

Mo. “¿Positivo o negativo? (se dirige nuevamente al alumno que inicialmente dio el resultado incorrecto)”

Ao. “Negativo”

Mo. “Seguimos, inciso h niña”

Aa. “Apreté la tecla (-), luego 7, el signo +, enter y me dio como resultado menos 42”

As. “¡Sí! (todos contestan aprobando el resultado)”

Mo. “Bien, eso es lo que nos resultó trabajando con la calculadora, ahora lo interesante es contestar las preguntas. Fíjense en la primera, qué operaciones hizo la calculadora para sumar un número negativo con un número positivo, escriban qué hizo la calculadora primero, posteriormente lo comentamos (levantan la mano algunos alumnos para dar respuesta a la pregunta)”

Ao. “Restar (contesta después de leer otra vez la pregunta)”

Comienzan a dar sus primeras conclusiones a través de la observación de ciertas regularidades; en efecto se hace una resta al sumar un número negativo con otro positivo.

Mo. “Restar (repite, como pidiendo al alumno a que justifique). ¿Alguien tiene otra respuesta?”

Aa. “Restar y sumar”

Mo. “¿En qué casos resta y suma... dime en qué inciso, en el a, en el b, en el c en el d...?”

Aa. “En el e”

En el inciso e, no ubican que los números que se suman, ambos son negativos y la pregunta hace referencia a un número positivo y a un número negativo.

Mo. “ –30+-50=20”

As. “¡No! Da menos 80”

Mo. “Da menos 80 (como preguntando), ¿en qué momento restó? (le pregunta a la alumna que dio inciso e)”

Aa. “¿En el menos 30? (pregunta pero no justifica)”
As. “¡No! (sólo algunos responden)”
Mo. “¿Ahí qué hizo niños?...fíjense, qué pasa en el inciso e, cómo se resta en el inciso e...”
Ao. “El mejor ejemplo es el inciso c (recapacitando que el inciso e, no es un ejemplo en el que se aplique la resta)”
Mo. “En el c..., entonces observen todos, el inciso c, 8+ -7 (anota la suma en el pizarrón), ¿qué hace la calculadora?”
As “Resta menos 7”
Mo. “¿Resta o suma? En el caso de este inciso en particular”
Ao. “Las dos vienen ahí”
Mo. “Es restar (como diciendo de qué otra manera los hago reflexionar)...bueno, vamos a ver si la segunda pregunta nos ayuda a esclarecer un poco la primera... ¿qué operación hizo la calculadora para sumar un número negativo con otro número negativo?”
As. “Sumar” (eso les queda claro).

Para sumar un número negativo con otro número negativo, saben perfectamente que sólo basta sumar ambos números y colocar el signo negativo. No hay problema.

Mo. “Vamos a ver qué ejercicio suman un negativo con un número positivo”
Ao. “El inciso a, el inciso c y el f”
Mo. “¿El h?”
Aa. “El h también”
Ao. “Y en la primera (se refiere al inciso a) le restas el negativo al positivo para que te resulte”
Mo. “Bien, ¿en el inciso a?”
Ao. “Sí en el caso del inciso a”
Mo. “¿Qué pasó cuando los dos números son negativos?”

Ao. “Se sumaron”

Los alumnos son capaces de hacer una generalización para poder sumar dos números negativos.

Mo. “Entonces están sumando”
Ao. “En los números negativos se suman los dos y cuando tienes un positivo y un negativo, al positivo le restamos el negativo”

Aquí generalizan qué signo va a tener la suma de dos números negativos.

Mo. “Bien, vamos a ver si en las demás actividades sucede esto que están observando. Vamos a la siguiente pregunta: ¿qué hace la calculadora para saber qué signo le pone a las operaciones?..., (da un tiempo y pregunta) ¿qué pasa con el inciso a?”
Ao. “En realidad es menos 7 y por lo tanto se le resta 9, pero como no es menor que cero, es número positivo y no tiene signo de menos”

Se manifiestan procedimientos interesantes para sumar un número positivo con uno negativo.

Mo. “En la pantalla de la calculadora, ¿qué nos sale?”
Ao. “2”
Mo. “2 (repite afirmando), en realidad no se ve el signo positivo, pero en la pantalla de la calculadora no está el signo positivo, se entiende que el resultado es positivo. Bien, por ejemplo, en el inciso b (la operación es: -5 + -7=), ¿qué signo le pone la calculadora?”
Ao. “Negativo, como ahí son dos números negativos, se suma normal, pero sólo que se pone el signo negativo”

Sólo les queda claro que cuando se suma un positivo con un negativo se resta, pero no así para determinar el signo que debe tener el resultado.

Mo. "A ver, en el caso del inciso h, qué nos resulta si la operación es -72 + 30 = -42. La pregunta es, ¿qué hace la calculadora para saber qué signo le pone resultado?"
Aa. "Yo le hice así: al siete le quito 3 y me quedan 4 (trabajó con las decenas), entonces serían 40, y el 2 nada más lo pasó al lado para que sea 42 y el menos se lo pongo"
Mo. "Eso es lo que tu hiciste, y la pregunta es qué hizo la calculadora"
Ao. A veces depende de los números positivos y de los números negativos. En el inciso a el positivo es mayor que el negativo (se refiere al valor absoluto), entonces nada más se resta; en el inciso h, es similar al inciso a, es un número negativo (se refiere al valor absoluto) y otro positivo, pero aquí el número positivo es menor, entonces igual se resta; igual en el inciso f, como el positivo es menor que el negativo (se refiere al valor absoluto), se le resta al número negativo"

Romper la estructura que traen o que conocen de la suma en los naturales, les cuesta trabajo en los enteros.

Mo. "Entonces, ¿qué signo pone la calculadora?"
Aa. "En sí lo que hace la calculadora, es ver si el número es negativo o positivo"
Mo. "Lo que hace la calculadora, es ver si el número es negativo o positivo (es insuficiente y se queda pensando)"
Ao. "Yo le puse, según la operación que estés haciendo"
Mo. "Hay una sola operación que estamos trabajando, ¿qué operación estamos trabajando? (le dice al alumno)"
Ao. "La suma"

Mo. "Por qué le pones, según la operación que estas haciendo (le pregunta nuevamente)"
Ao. "Porque si estamos haciendo una suma, no puede ser una resta o una división (se le complicó justificar)"
Mo. "Eso es lo interesante, a nosotros en la primaria (se refiere a los alumnos) nos enseñaron a trabajar con los números naturales: el 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,... los números negativos, casi no nos los enseñaron, horita en secundaria es un tema que tenemos que trabajar y si ustedes observan, a la mejor algunos niños, por ejemplo, el caso de su compañero dice *es que va a depender de la operación*; es decir se están rompiendo ciertas reglas que ustedes ya conocían, y por eso es importante que se fijen qué hace la calculadora para saber qué signo va a poner al sumar un negativo con un positivo, un negativo con otro negativo y/o un positivo con un número negativo,... niña (le da la palabra)"
Aa. Es que *depende si el número negativo es mayor o menor, o el positivo es mayor o menor* (esta situación lo escribe el profesor en el pizarrón)"

Se remite de alguna manera al valor absoluto de los números, sin embargo esta situación les fue un tanto complicada para los alumnos y tuve que recurrir hasta cierto punto a la exposición del valor absoluto.

Mo. Bien, fíjense lo que acaba de decir su compañera, si lo ubicamos en la recta numérica (traza una recta horizontal sobre el pizarrón), dónde quedaría más o menos el número 30 (pone el cero por la mitad de la recta y como referente el 10 a la derecha del cero a una distancia x)..., niña"
Aa. "Antes de la punta (el profesor marca sobre la recta y a la derecha el 30)"
Mo. "¿Por aquí (al mismo tiempo señala el extremo derecho de la recta)? Entonces, más o menos el menos 72, ¿dónde quedaría?..., niño"
Ao. "Más o menos por aquí (extiende la recta por la izquierda y marca el punto -72)"

Mo. "¿Más o menos? (se dirige al grupo para ver si aprueban lo que el alumno está haciendo en el pizarrón)"

As. "¡Sí!, ¡más o menos!"

Mo. ¿Cuál está más lejos del cero?"

As. "-72"

Mo. "Entonces, la calculadora está tomando el signo del número que está más lejos del cero, en este caso el inciso h, la calculadora está poniendo el signo del número que se encuentra más lejos del cero. El inciso f, ¿qué signo le puso?"

As. "¡Más!, ¡menos!"

Los alumnos muestran lo complejo que es el poder saber qué signo se le ha de poner en la suma de números con signo, el caso particular: un positivo con un negativo ya que solicita al maestro la aprobación de la respuesta a la pregunta respectiva.

Mo. "Chequen, si aquí pongo el cero, quién pasa a poner el 0.5 y el -2 (traza una recta numérica y ubica el cero casi a la mitad). Pásale (se dirige a una alumna que lo solicita al levantar la mano). Si ahí puso e su compañera el 0.5, dónde estará el –2 (la alumna puso el 0.5 a la derecha del cero)"

Ao. "Del otro lado del cero"

Mo. "¿Cuál de los dos números está más lejos del cero?"

As. "El menos 2"

Mo. "La calculadora está tomando en cuenta el número que está más lejos o retirado del cero y coloca el signo de ese número, esto era lo que decía su compañera, *depende de si el negativo es mayor o menor*, si el negativo es menor que el positivo (el valor absoluto), entonces el resultado es positivo, pero si el negativo es mayor (el valor absoluto) que el positivo, el resultado entonces va a ser negativo"

Ao. "Entonces, esa es la respuesta que vamos a poner"

Mo. “Esa es parte de la respuesta, les decía, conforme pasen las actividades, vamos a ir viendo si esto se confirma lo que dice su compañera...”

Ao. “Número 5. En cada inciso encuentra tres parejas de números que al sumarlos den el resultado que se indica. Verifica tus respuestas usando la calculadora”

Mo. “Busquen los números de cada uno de los resultados... quién me da la respuesta de la primera”

Aa. “-40+8 (simultáneamente el profesor anota en el pizarrón)”

Mo. “Al darle enter te da -32. ¿Alguien tiene otras parejas diferentes?

Ao. “-16+ -16, también da -32”

Mo. “Muy bien, ¿quién tiene otra?”

Ao. “-106 + 74 = -32”

Mo. “¿Cuántas parejas creen que haya diferentes para que me den –32?”

As. “¡huuu! (como diciendo que muchas)”

Mo. “Mucha verdad, hay bastantes. Bueno, vamos al inciso b, busquen dos números que sumados me den –45 (al terminar algunos alumnos levantan la mano para pasar al pizarrón y anotar la pareja de números que obtuvieron)”

Ao. “-90 + 45 = -45 (el profesor anota en el pizarrón al mismo tiempo que aprueban los alumnos)”

Mo. “Ese es uno (dando a entender que está bien), muchacho, ponte de pie...”

Ao. “-75 + 30 = -45 (simultáneamente, el profesor anota en el pizarrón)”

Mo. “A ver tu respuesta muchacho (le dice a otro alumno)”

Ao. “-32 + -22 = -45 (simultáneamente, el profesor anota en el pizarrón)”

Mo. “Bien, ahora traten de buscar los sumandos del inciso c, d, e y f para luego poner los resultados en el pizarrón”

Mo. “Inciso c (le da la palabra a una alumna), dime qué números sumados me da -27”

Aa. “-10 + -17 es igual a –27”

Mo. “Pásale al pizarrón y anota otros 2 sumandos que den -27”

Ao. “-12 + -15 = -27 (lo anota el alumno en el pizarrón)”
Mo. “-12 pone su compañero más, menos 15, ¿sí dará –27?”
Ao. “¡Sí!”
Aa. “-7 –20 = -27”
Mo. “¿Está correcto en la forma que lo escribió? (le pregunta a un alumno)”
Ao. “¡No! (seguro de sí)”

Si bien no saben qué signo poner cuando se suman dos números con signo: un positivo y otro negativo, cuando es el proceso inverso, dado un resultado negativo o uno positivo, encuentran más fácil los sumandos.

Mo. “¿Qué le falta?”
Ao. “La suma”
Mo. ”La suma verdad, más menos 20 (corrige su error la alumna que pasó al pizarrón y anota correctamente quedando -7 + -20 = 27). Díganme el inciso siguiente, el cual tiene como resultado –40”
Aa. “-80 + 40 = 40”
Mo. “¿ -80+40 me da 40? (verbalmente repite y va señalando los números así como el resultado)”
As. “No, es menos”
Mo. “Estamos buscando dos números que nos den –40 (pasa a otro alumno al pizarrón)”
Ao. “-120 + 80= -40”
Mo. “Muy bien, pásale (le dice a otra alumna)”
Aa. “-46 + 6= -40”
Mo. ”Bien. ¿Alguien podrá obtener dos sumandos negativos y que le dé menos 40?”
Ao. “¡Yo!... (pasa al pizarrón y anota –160 + -120)”
Mo. “-160 + -120, A ver si da menos 40 (lo repite en voz alta)”
Aa. “¡Da -280! (al mismo tiempo el profesor anota en el pizarrón)”

Mo. “Quién pasa a poner dos números negativos”
Aa. “-20 + -20 (anota en el pizarrón)”
Mo. “¿Es correcto?
As. “¡Sí!”
Mo. “Bien, inciso e... Karen ¿cuánto es el resultado?”
Aa. “-55”
Mo. “¿Quién pasa a anotar sumandos negativos?”
Ao. “-25+-30=-55 (lo anota en el pizarrón)”
Mo. “¿Es correcto?”
As. “¡Sí!
Ao. “-50+-5=-55”
Mo. “Muy bien. A ver, ahora quiero dos sumandos negativos pero además, que sean decimales, (un alumno levanta la mano)... su compañero va a poner 2 sumandos negativos pero con números decimales”
Ao. “-27.5+-27.5 (lo anota en el pizarrón)”
Mo. “A ver chéquenlo en la calculadora, no creo que salga ese...”
As. “¡Si sale!”
Mo. ”Bien… ahora el inciso f, el resultado debe ser –78 (pasa una alumna al pizarrón), que sean negativos los sumandos. ¿Qué es más fácil buscar dos sumandos negativos o uno positivo y otro negativo?”
As. “2 positivos, 2 negativos, uno positivo y otro negativo (no les queda claro, como que tienen duda)”
Ao. “-39 + -39 = 78”
Ao. “-46 + -32= -78”
Ao. “-68 + -10= -78”
Ao. “Es como sumar...”

Algunos alumnos perciben que basta sumar sólo los dos sumandos en forma común, una vez que ha identificado que ambos números son negativos.

Mo. “Pero si ahora quiero un positivo y un negativo, ¿qué tengo qué hacer?”
Ao. “Es como restar...”
Mo. “Vamos a ver el ejemplo que pone su compañera y revisen si es como resta...
Aa. “-156 + 78 = -78 (escribe en el pizarrón)”
Mo. “Niña ¿qué hiciste para saber que son esos 2 números? (en esta actividad, deben hallarse los dos sumandos dado el resultado, en este caso –78)”
Aa. “Multiplico 78X2 que sale 156 y lo convierto a número negativo, después sumo el número positivo y te da el resultado.”

Se observa elaboración de procedimientos que los alumnos idean sin la ayuda del profesor.

Mo. “Queda claro”
As. “¡Si!”
Mo. “Y será la única estrategia”
As. “¡No!”
Mo. “Habrá más!”
As. ¡Si!”
Ao. “Se puede con cualquier número
Mo.”A ver si es cierto... anótame aquí los dos sumandos, de tal manera que me dé –78 (anota el –78 en el pizarrón el profesor y señalando donde debe colocar los dos sumandos el alumno)..., dices que se puede con cualquier número”

Con estas actividades, se están resolviendo situaciones de la forma $x+y=a$ (intuitivamente), donde los sumandos son variables y a, una constante. Anteriormente los alumnos expresaron que tienen n sumandos para obtener como resultado a.

Ao. “Si fuera 200, me tiene que dar (se dirige al pizarrón y escribe –78), entonces a 200 se le podría restar 78 y me da 122 (pero no muestra la suma como tal), pero como es 78 le resta 8 y me da 70 (hace operaciones en el pizarrón), entonces sería -70 + -8 = -78”

Mo. “Muy bien, entonces cuáles son los dos sumandos... (se refiere al 200 que había propuesto el alumno, como uno de los sumandos)”

Ao. “... Tiene que ser menor que el resultado...”

Mo. “Entonces, ¿cuáles serían los números?”

Ao. “-8 + -70=-78”

Mo. “¿En el caso del 200, no se puede?”

Ao. “No, no se puede (no convencido)”

Mo. “Entonces, ¿no es cualquier número o sí es cualquier número?”

As “¡No!”

Mo. Bueno, según su compañero no es cualquier número el que se puede poner, vamos a hacer lo siguiente: si yo quiero 200, mejor dicho, si pongo 200 como uno de los sumandos, ¿cuál sería el otro sumando, de tal manera que me dé –78?”

Ao. “¡Es –278!”

Mo. “¿Sí saldrá eso?”

As. “¡Si!”

Mo. “Seguros..., háganlo en la calculadora”

Aa. “El 200 ¿es positivo o negativo?”

Mo. “Si no tiene signo, ¿es positivo o negativo?”

As. ¡Positivo!”

Mo. “¿Sí salió o no? (se refiere a la operación 200 + -278 ó –278 + 200 si da como resultado –78)

Con estas actividades se trabajan expresiones algebraicas de la forma $a+x=b$, *o bien, x+a=b intuitivamente. La dificultad es mayor ya que se trabajan con números con signo*

As. "¡Si!"

Mo. "Ahí les va otro número; -78 es el resultado (anota en el pizarrón), ahora el 400 como uno de los sumandos, ¿cuál sería el otro sumando de tal manera que al sumarlo con 400, de cómo resultado –78?"

Aa. "menos 322 (el profesor lo anota en el pizarrón)"

Mo. "A ver háganlo en la calculadora, (dicta) –322+400 (en este momento lo interrumpen algunos alumnos)"

As. ¡No, es menos 478! (refiriéndose a que el –322 es incorrecto). ¡El resultado es mas 78 (refiriéndose al resultado de la operación –322+400)"

Mo. "Entonces no es correcto este número (señala el –322 y lo borra, en su lugar pone al –478 quedando la operación -478+400=-78)"

Ao. "Yo encontré una forma más fácil para obtener los sumandos"

Mo. "Bien, su compañero ya encontró una forma más fácil de hacer la suma, ¿cómo sería en el caso del inciso g? (el inciso g, pide obtener dos sumandos que como resultado de cero) o bien, vamos a suponer que el resultado es –15, ¿qué es lo que encontraste para sumar 2 números con signo para hallar el –15?"

Ao. "-15 + -0"

Mo. "Su compañero pone +-0, ¿el cero es negativo?"

As. "Ninguno de los dos (se refiere al signo negativo y al signo positivo)"

Mo. "Entonces quedaría –15+0, ¿quién tiene otros sumandos?"

Ao. "Yo, -30 + 15 = -15"

Mo. "Verifiquen si es correcto"

As. "¡Si!"

Mo. "Muy bien, en el caso del cero,... ¿qué tengo que buscar? (se dirige al alumno que había señalado al cero como negativo)"

Ao. “10 + -10”

A pocos alumnos les cuesta comprender que la suma de un número con signo, al sumarlo con su simétrico va a ser cero

Mo. “10 + -10 (repite al mismo tiempo que anota en el pizarrón)”
Ao. “2 números iguales, pero uno negativo y otro positivo”
Mo. “Su compañero dice 2 números iguales pero uno debe ser positivo y el otro negativo; ¿siempre va a ser eso para que me dé cero?”
As. “¡Si! ¡no! (las opiniones están divididas)”
Mo. “Para que me dé cero, ¿siempre va a ser eso? (uno positivo y otro negativo)”
Ao. “¡No! También se puede con puros negativos.
Mo. “¿Con puros negativos se puede también?”
As. “¡Si! (en realidad son pocos alumnos pero convencidos)”
Mo. “A ver, por ejemplo, si yo pongo –2.5 (lo anota en el pizarrón) más cuánto para que me dé cero”.
Aa. “Más 2.5”
As. “¡Si!”
Ao. “Uno positivo y otro negativo”
Mo. “A ver, si yo pongo 4.86”
As. “-4.86”
Mo. “-4.86 (repite y anota simultáneamente en el pizarrón); es decir, su compañera decía hace un rato: *siempre va a ser un número positivo y otro negativo para que me dé cero*.”

Sin embargo la mayoría comprende bien que la suma de un número con su simétrico, les va a dar siempre cero

As. “¡Si!”

Mo. “No podré sumar dos números negativos para que me dé cero?”
As. “¡No!, ¡si! (la mayoría de los alumnos dice que no, sin embargo persiste la respuesta si)”
Mo. “A ver niña (se dirige a uno que dijo que si), busca 2 números negativos que al ser sumados me dé cómo resultado cero”
Ao. “No hay (se escucha la voz de un niño)”
Mo. “Ya lo tienes (le pregunta a la misma alumna), a ver dime el primer número “
Aa. “-0 + -0=0”
As. “No puede ser –0 + -0”
Mo. “Aquí su compañera le está dando un signo negativo al cero. ¿El cero es negativo?
As. “¡No!”
Mo. “El cero niños, no es ni positivo ni negativo, no le podemos dar el signo de menos cero, de acuerdo (y pasa a otro alumno al pizarrón)”
Ao. “-10 + -10 da cero”
Mo. “A ver háganlo en la calculadora”
As. “¡Está mal!, da –20”
Mo. “¿Podemos encontrar la suma de 2 números negativos que den cero?”
As. “¡NO!”

Con la intervención del profesor, los alumnos llegan a concluir que no hay dos sumandos positivos que al sumarlos dé como resultado cero, ni dos negativos que me dé como resultado, cero

Ao. “Ni de dos positivos”
Mo. “¿Ni de dos positivos?”
As. ”¡No!”
Mo. “Sólo debe ser de un positivo con un negativo, niña”
Aa. “Maestro, ¿tampoco puede ser –100-0?”

Mo. “-100 + -0, no le podemos dar al cero el signo de negativo”

Aa. “Además no sale (dice una alumna)”

Ao. “da –100 (dice otro)”

Mo. “Bueno, inciso h... niño, díctame dos sumandos que me den –1”

Ao. “-10 + 9”

Mo. ¡Es cierto!”

As. “¡Si!”

Mo. “¿Cómo son los sumandos, ¿uno es...?”

As “Negativo”

Mo. “¿Y el otro?

As. “Positivo”

Mo. “A ver de pie (le da la palabra a uno que está levantando la mano para participar)”

Ao. “1+ -2”

Mo. “1+ -2 (repite y escribe en el pizarrón)”

Ao. “da 3 (dice un alumno)”

Mo. “¿da 3?”

As. “¡No!, da –1”

Mo. “Ahora quiero una suma donde los dos sumandos sean positivos y el resultado de –1...niña, los dos sumandos positivos (se prepara para anotar en el pizarrón)”

Aa. “No, no puede ser...”

Mo. “A ver dime, por qué no puede ser, por qué no podemos obtener 2 sumandos que sean positivos de tal manera que al sumarlo nos dé –1”

Aa. “Lo que pasa es que, *si tu sumas 2 números positivos te da un número mayor y no un número menor*”

Sus conocimientos previos respecto a los números naturales, les permite tener seguridad respecto a que la suma de dos números positivos, jamás les *dará un número negativo. Sin embargo, muestran poco trabajo en los números decimales; en las expresiones:*

x+y= -1 es difícil y

x+y=-43 es más fácil

donde x y y, son números negativos.

Mo. "Si sumamos 2 números positivos da un número mayor, entonces ¿no podemos obtener 2 sumandos positivos que me den –1?"
Aa. "¡Ni negativos!"
Mo. "¿Tampoco podemos obtener 2 sumandos negativos que al sumarlos me den –1?, ¿será cierto lo que dijo su compañera?"
As. "¡No!"
Mo. "2 números negativos que al sumarlos den –1"

Ya no se pudo grabar, sin embargo, se dieron ejemplos en los que los alumnos si pudieron obtener 2 números negativos cuya suma de el numero uno pero negativo.

5.2 Descripción de la sesión 2

Esta hoja de trabajo es una extensión de la sesión anterior cuyo título es *Algo más sobre sumas*, donde además se abordan otros temas implícitos como estimación y la resolución de ecuaciones que contienen números negativos.

Mo. “¿Puedes encontrar 3 números que al sumarlos den por resultado cero?, ¿cuáles son?

Ao. “-3+-2+-1”

Mo. “A ver háganlo en la calculadora”

Aa. “¡Da menos 6!”

Mo. “Cada quien en la hoja de trabajo anota una suma de 3 sumandos, de tal manera que de cero, pero sin usar el cero como sumando”

Ao. “1+1+-2”

Mo. “1+1+-2” (repite y anota en el pizarrón, da la palabra a un alumno)

Ao. ”-3+-2+5”

Mo. “Verifiquen si da como resultado cero”

As. “¡Si da!”

Mo. “Bien, ¿alguien más tiene otros sumandos diferentes?”

Ao. “4+-3+-1”

Mo. “4+-3+-1 (repite y anota el profesor en el pizarrón) igual a cero. Un último ejemplo, niño...”

Ao. “–3+-1+4”

Mo. “–3+-1+4 igual a cero (repite y anota). A ver, en el primer ejemplo (seña-la la suma 1+1+-2=0) ¿cuántos números positivos usaron?”

As. “¡Uno!”

Mo. “En el ejercicio número 3”

As. “Un número positivo”

Mo. “¿Y en el número cuatro?”

As. “También un número positivo”

Mo. “Quiero que me den un ejemplo donde tengan 2 números positivos y un número negativo que me dé cómo resultado cero”

Ao. “Yo tengo uno: 4+4+-8”

Mo. “4+4+-8 (repite y anota en el pizarrón), ¿si da cero ese ejercicio?”

As. “¡Si!”

Mo. “Es decir, podemos obtener cero, usando 2 números positivos y un negativo”
Aa. “O dos números negativos y un número positivo”

Aquí se muestra la suma como expresión algebraica de la forma: x+y+z=a, donde x, y, z son variables (números con signo) y a, una constante; los alumnos identifican claramente que hay sólo dos formas diferentes para obtener cero, usando

a) Dos números positivos y uno negativo.
b) Dos números negativos y uno positivo

Mo. “Exactamente. Vamos a resolver la actividad número 2 donde se piden 4 sumandos, si queremos –1 ¿cuáles serían los sumandos?. Recuerden que pueden usar: (anota en el pizarrón)

Un positivo y 3 negativos
2 positivos y 2 negativos
3 positivos y 1 negativo
4 positivos ó 4 negativos

Este problema obliga al alumno a utilizar los números decimales, situación que en la hoja de trabajo anterior se les complicó a algunos alumnos.

Ao. “Yo puse -0.25+-0.25+-0.25+-0.25”
Mo. “Su compañero puso -0.25+-0.25+-0.25+-0.25, ¿si le da –1 a su compañero?, ¿es cierto?”
As. “¡Si! (después de verificar en su calculadora)”

La estrategia que usa este alumno es muy clara, él sabe que el menos uno puede dividirse entre cuatro y por tanto, cada sumando es igual, en este caso *menos 0.25. Resulta obvia para algunos alumnos, pero la mayoría no percibe esta situación.*

Mo. "A ver (se dirige a una alumna), ¿lo dictas o pasas al pizarrón?"
Aa. "2+2+2+-7"
Mo. "2+2+2+-7 (repite y anota en el pizarrón) y me da –1, su compañera uso 3 números positivos y uno negativo. Bien..., niña (se dirige a otra alumna)"
Aa. "1+1+-2+-1"
Mo. "1+1+-2+-1, el resultado debe dar –1 a su compañera. Muchacho (se dirige a otro alumno para que lo haga en su calculadora y le de la respuesta)"
Ao. "Si da –1"
Mo. "Muchacho..."
Ao. "5+6+7+-19"
Mo. "5+6+7+-19 (repite y anota en el pizarrón) y le da –1 a su compañero. Bien, ahí tenemos 4 ejemplos, niña... otro"
Aa. "-3+-2+-1+5"
Mo. "-3+-2+-1+5, ¿sí dará –1?"
As. "¡si!"
Mo. "Muy bien, ¿cuántos números está pidiendo (se refiere al punto número 2 de la hoja de trabajo)"
As. "¡4 sumandos!"
Mo. "4 números, aquí están ocupando 3 números positivos y un número negativo, aquí su compañero ocupó los cuatro números negativos, aquí ocupó 3 números negativos y un positivo. Ninguno ocupó 4 números positivos, ¡10 participaciones para el niño que me de los 4 números positivos que al sumarlos de –1 ((una alumna levanta la mano y le da la palabra)"
Aa. "0.25+0.25+0.25+0.25"
Mo. "0.25+0.25+0.25+0.25 (repite y anota en el pizarrón), ¿le va a dar 1 ó –1?"
As. "¡UNO!"

Ao. “Es lo que vimos la vez pasada”
Mo. “¿Es lo que vimos la vez pasada? (como que no se acuerda o no sabe)”
Ao. “*Si sumamos números positivos no nos puede dar números negativos*, ¿no?”

Reafirman que la suma de números positivos no les puede dar como resultado algún número negativo.

Mo. “¿Sumando números positivos, no nos puede dar números negativos?”
As. “¡No! (pero pocos alumnos contestan)”
Mo. “¿Seguros?”
As. “¡Si!”
Mo. “Bueno, vamos a ver si en las siguientes actividades encontramos sumas de números positivos que nos den números negativos como resultado.... Número 3, ¿qué nos dice el número 3?”
Aa. “¿Puedes encontrar cinco números que al sumarlos den por resultado –27?, ¿cuáles son?”
Mo. Ahora la suma debe ser –27. Muchacho los tienes“
Ao. “5+3+4+3+-42”
Mo. “5+3+4+3+-42 (repite y anota en el pizarrón), a ver, verifiquen con la calculadora el resultado”
Aa. “Da –46”
As. “¡No! Sí sale –27”
Mo. “¿Si es correcto?”
As. “¡Si!”
Mo. “Otra suma...”
Ao. “102+-25+-25+-26”
Mo. “102+-25+-25+-26 (repite y anota en el pizarrón), ¿sí saldrá –27? A ver chequen en su calculadora”
Ao. “Son sólo cuatro números”

Mo. “¡Es cierto!”
As. “Además sale 26 positivos”
Mo. “Es 26 positivo, bien (otro alumno pide la palabra)”
Ao. “-9X3”
Mo. “¿-9X3 da –27?”
Ao. “Pero no tiene 5 números”
Mo. “Es cierto, pero además no es suma, ¿qué esta trabajando el compañero?”
As. “¡Multiplicación!”
Mo. “Estamos todavía con la suma”
Ao. “Yo tengo otro”
Mo. “Adelante...”
Ao. “–5.4+-5.4+-5.4+-5.4+-5.4”

Se observa una estrategia muy clara, el alumno sabe que si suma números negativos, le va a dar como resultado un número negativo, entonces procede a dividir el –27 entre cinco, y le da –5.4, además de esta manera está trabajando la división de negativo entre un positivo inconscientemente.

Mo. “–5.4+-5.4+-5.4+-5.4+-5.4 (repite y anota en el pisarrón), da –27. Muy bien muchacho, último ejercicio, a ver tú (se dirige a una alumna)”
Aa. “5+8+4+5+-49”
Mo. “5+8+4+5+-49 (repite y anota en el pisarrón), ¿sí dará –27?, verifíquenlo por favor”
Ao. “¡Si! si da!...”

Un alumno interrumpe y al parecer ya tiene uno de los ejercicios pendientes donde el profesor pide busquen 4 números positivos que al ser sumados dé como resultado –1.

Mo. “Muy bien, de la actividad número 2, su compañero parece que ya tiene la suma de 4 números positivos que le dan –1, sí muchacho ¿o no?”
Ao. “Si, los números son 0.025+0.025+0.025+0.025”
Mo. “0.025+0.025+0.025+0.025 (repite y anota en el pizarrón), denle enter y... ¿dará –1?”
As. “¡NO!, da 0.1”
Mo. “¿Y qué número queríamos obtener?”
As. “-1”

Pocos alumnos no identifican que al sumar números positivos, aún cuando los números son muy chicos, no se obtendrá un número negativo.

Mo. “Entonces, no nos dio –1. El objetivo era buscar 4 números positivos que al sumarlos diera –1... Ejercicio número 4”
Ao. “Construye una suma con 3 sumandos cuyo resultado de –0.25”
Mo. “Ahora debe dar –0.25 (da la palabra a un equipo), ¿ya lo comprobaron?”
As. “¡Ya!”
Mo. “¿Quién me dicta entonces?”
Aa. “0.10+-0.10+-0.5”
Ao. “¡No!, no da –0.25”
Mo. “Vamos a checar el ejercicio de su compañera (anota en el pizarrón lo que le dicta la alumna), -0.10+-0.10+-0.5=-0.25”
As. “Si da (después de comprobar en la calculadora)”
Mo. “Otro ejercicio diferente”
Ao. “5+6+-11.25”
Mo. “5+6+-11.25 (repite y anota en el pisarrón), a ver verifiquen, ¿da –0.25?”
As. “¡Si!”

Mo. “Siguiente actividad, construye una suma con cuatro sumandos, dos positivos y dos negativos, de manera que el resultado sea –0.763. A ver...le da la palabra a un alumno que levanta la mano)”

Ao. “-6+-4+5.382+5.381”

Mo. “-6+-4+5.382+5.381 (repite y lo anota en el pizarrón)... eso debe ser igual a –0.763”

Ao. “Está mal, eso da un número positivo (dice otro)”

Mo. “Verifiquen bien, si da –0.763”

Ao. “No está bien”

Mo. “Bueno, alguien tiene dos números positivos y dos números negativos que de –0.763”

Ao. “1+1+-2+-0.763”

Mo. “1+1+-2+-0.763 (repite y anota en el pizarrón), ¿es correcto?”

As. “¡Si!”

Mo. “¿Alguna otra suma?”

Aa. “5+4+-9+-0.763”

Mo. “5+4+-9+-0.763 (repite y anota en el pizarrón), verifiquen el ejercicio y chequen si esta bien”

As. ¡Está bien!”

Se observa una estrategia común en algunos niños, primero suman dos positivos, al resultado le suman su simétrico, por lo tanto da cero, y por último, suman el número negativo que falta el cual, es el resultado que se está buscando.

Mo. “Vamos a pasar al ejercicio número ocho, dale lectura (le dice a un alumno)”

Ao. “Encuentra el número que falta, verifica tu respuesta con la calculadora”

Se trabajan ecuaciones de primer grado de la forma: a+b+x=c, donde a, b, c son constantes y x, una ***incógnita****. Observe que es claro que se induce al alumno a reconocer que una incógnita tiene un valor único, mientras que la variable no puede tener ese valor único para hacer verdadera una expresión algebraica.*

Mo. “De pie, díctame la suma del inciso a”
Ao. “-15+13+m=0”
Mo. “-15+13+m=0 (repite y anota en el pizarrón), ¿cuánto vale m según tu?”
Ao. “27”
As. “¡No!”
Mo. “m vale 27, ¿27 positivo o 27 negativo?”
Ao. “Positivo”
Mo. “Verificamos, si m=27, entonces el resultado sería 25 según su compañero. Si m vale 27, entonces tendríamos 25 como resultado. Pero no queremos 25 como resultado, queremos cero muchacho (se dirige a un alumno que desea participar”
Ao. “Es dos”
Mo. “Su compañero dice que m, vale dos”
As. “¡Si!”
Mo. “y sí sale cero... vamos al inciso b, díctame la suma niña.
Aa. “17+-20+n=-75 n, vale –72”
Mo. “17+-20+n=-75 n, vale –72 (repite y anota en el pizarrón). ¿Es correcto?”
As. ¡Si!”
Mo. “¿sí vale n igual a -72”
As. “¡Si!”
Mo. ¿Quién me dicta el c, ... niño (se dirige a otro alumno)”
Ao. “p+18+-35=-7”
Mo. “p+18+-35=-7 (repite y anota en el pizarrón). ¿Cuánto vale p?”

Ao. “-83”

Mo. “-83 (repite y anota en el pizarrón). ¿Sí vale p –38?”

As. “¡Si!”

CONTINUACIÓN

Mo. Hace referencia a algunas generalidades vistas la clase anterior y continúa con el ejercicio.

Ao. “El inciso d, (escribe en el pizarrón) -2.5+q+-12=7, q=6.7”

Mo. “A ver niños, si suman -2.5+q+-12 sale 7.8”

As. “¡No! (después de verificar con la calculadora)”

Mo. “No sale 7.8. ¿Qué valor le diste tú?”

Aa. “22.3”

Mo. “¿22.3?”

As. “¡Si!”

Mo. “¿Y así si sale?”

As. “¡Si!”

Mo. “Esa es una fracción (le dice a una alumna que está resolviendo el inciso e), vamos a ver si la pueden trabajar con la calculadora y espero no tengan ningún problema”

Ao. “No..., si va a A ver problema, porque yo no se fracciones”

Mo. “1/3+r+-1/9, debe dar –2, ustedes ya tienen el resultado (se dirige a un grupo de alumnos los cuales dicen que no con la cabeza). ¡No!... según su compañera (la que está trabajando en el pizarrón) r vale 14/9, a ver, pongámoslo en la calculadora...”

Ao. “Maestro, yo tengo otra (dice otro alumno)”

Mo. “¿Otro resultado?”

Ao. “Es esa (está de acuerdo con r=14/9), pero obtengo otro resultado”

Mo. “Primero verifica con tu calculadora si da 2 cuando r vale 14/9”

Ao. “¿cómo se pone fracciones?”

Mo. “Igual 14÷9, ¿si o no?”

As. “¡No!”

Mo. “1/3 más el valor de r, ¿la calculadora lo pone como 6.4 ó 6.4+1/9...?”
Ao. “”No, es que sale 6.4444
Mo. “¡ah! Sale infinitamente 6.4444… ¿Qué fracción corresponde a 6.4444... Porque si vamos a trabajar con fracciones, vamos a convertir ese número (6.4444); o al revés, en decimal, ¿cuánto es 1/3 niños?”
Ao. “0.3333”
Mo. “A ver, dividan uno entre 3 (con objeto de que lo hagan todos)”
Ao. “Sale 3”
Mo. “¡Sólo 3 nada más! (sorprendido, convencido de que algo está mal)”

Se detectan grandes dificultades al trabajar con las fracciones, los alumnos no tienen esa abstracción de uso y significado de las fracciones; asimismo, no es tan difícil trabajar con los números decimales, aunque pasar de un número representado en fracción a un número decimal, también se les dificulta a los alumnos.

5.3 Descripción de la sesión 3

En esta hoja de trabajo se aborda la lección ¿Cómo restamos números con signo?, asimismo se tocan algunos temas implícitos como: Introducción al uso de signos concatenados (+-,--); resolución de ecuaciones que contienen números negativos; resolución de ecuaciones que involucran signos concatenados (--); introducción de -1 como coeficiente implícito; resolución de problemas que involucran operaciones con números con signo así como la relación inversa entre la suma y la resta.

Se inicia la hoja de trabajo realizando la resta 9 - -8, una vez realizada en la calculadora, el resultado es 17 positivo, a lo que el maestro cuestiona a sus alumnos diciéndoles ¿qué hace la calculadora?

Ao. “No se explicar bien, pero es como si se sumara, porque ya hice 9+8 y es igual a 17, y da lo mismo que 9 - -8”
Mo. “No sabes bien por qué en realidad”
Ao. “No...”
Mo. “A ver Victoria”
Aa. “Se le quitan los dos signos y se suma”
Mo. “Bien, ¿pueden verificar con otro ejercicio?... muchacho”
Ao. “Sale 17 porque uno es negativo y otro positivo, si fueran los dos positivos sí se hace la resta normal, pero uno es negativo y el otro positivo”

Aunque no existe una explicación convincente, los alumnos se dan cuenta que es similar a la suma, es decir ya empiezan a hacer ciertas conjeturas que tienden a generalizar. Lo señala perfectamente un alumno, si ambos números fueran positivos, se realizaría una resta normal, al minuendo le quitamos lo del sustraendo.

Mo. “Bien, fíjense en la observación que hace su compañero, uno es positivo y el otro negativo, en este ejemplo, ¿cuál es el positivo?”
As. “¡El 9!”
Mo. “¿Y el negativo?”
As. “¡Menos 8!”
Mo. “Menos 8 verdad; el otro signo es de la operación (se refiere al primer signo negativo) de acuerdo, ¿quién dijo que ya lo había comprobado con otros ejercicios?... Actividad número 3, realiza las siguientes operaciones usando la calculadora (lo interrumpen)”
Aa. “Maestro ya le entendí, se supone que el primer número si es positivo o negativo es el que agarra para dar el resultado (continua su compañero de trabajo explicando)”
Ao. “Por ejemplo, si el primer número es positivo el resultado va a ser positivo y si es negativo el resultado va a ser negativo”

Mo. “¿Siempre?, ¿creen que siempre?”

Comienzan a hacer sus generalidades, pero todavía no se han percatado que esto no se aplica en todos los casos.

As. “¡Si! (pero no convencidos)

Mo. “Vamos a ver si el ejercicio 3 cumple con lo que están manejando ustedes, por ejemplo inciso a es 9—10, el primer número, (el minuendo) ¿es positivo o negativo?”

As. “Positivo”

Mo. “¿Y el resultado es positivo o negativo’”

As. “Negativo”

Mo. “El resultado entonces, ¿cuál va a ser?”

As “19”

Mo. “Se cumple con lo que habíamos checado en la pregunta 1 y 2 (se refiere da la hoja de trabajo)”

As. “¡Si!”

Mo. “Entonces en el inciso b, ¿cuánto va a dar?”

As. “28”

Mo. “positivo o negativo”

As. “positivo”

Mo. “Comprueben con la calculadora... el inciso c, la vez pasada tuvimos problemas con las fracciones, vamos a ver si ahora en la resta es más sencillo o más complicado trabajar con una fracción, ¿qué creen que de cómo resultado?”

Aa. “¿Los dos son negativos?

Mo. “No es ½ - -½”

Ao. “El primero es positivo (repite el maestro)”

Ao. “El segundo es negativo (repite el segundo”

Ao. “Sale 2”

Mo. “¡Sale 2!, ½ - -½!, a ver, ¿en la calculadora sale eso?”

Ao. “Uno”

Mo. “A ver dónde está la calculadora (le dice a un alumno), tu compañera dice que sale 2 (le pregunta)”

As. “¡Sale uno!”

Mo. “Oigan, pero su compañera puso en la calculadora: uno al cuadrado menos, menos uno elevado al cuadrado (1^2- -1^2) y le dio 2 como resultado, entonces no está aplicando la operación de la resta... ¿cuánto les da como resultado?”

As. “¡Uno!”

Mo. “Uno, ahora sí. ½ - - ½ da como resultado...”

As. “¡Uno!

Mo. “Resuelvan el inciso d, e y f”

Aa. “Porque en lugar que sea una resta, se hace una suma, no es una resta, por ejemplo ½+½ da un entero (después de comprobar con su calculadora)”

Mo. “Bien, ½+½, sí da un entero”

As. “¡Si!”

Mo. “Ahora dímelo con los números que estás utilizando, los números que están utilizando es ½ - -½ qué pasa con eso, ve tu hoja, qué te dio (le dice a una alumna)”

Aa. “Uno”

Mo. “¡Dio uno!, entonces qué pasa con el inciso b, 14 - -14, ¿qué pasa niña?”

Aa. “¡También se suma!”

Mo. “Entonces, cuál sería tu conclusión, todavía no terminamos y tú ya estás llegando a una conclusión, ¿cuál es tu conclusión hasta este momento?”

Aa. “*Que el primer número tendría que ser positivo y el segundo negativo para que se pueda hacer la suma, como si fueran sólo números positivos*”

Excelente conclusión, si el minuendo es positivo y el sustraendo negativo, el minuendo y el sustraendo se suman.

Mo. “Muy bien, vamos a ver qué pasa cuando el minuendo, o sea, el primer número es negativo, por mientras continuamos con el inciso d, dime el ejercicio (le dice a un alumno)”
Ao. “1/3 - -1/3” es igual a 2/3”
Mo. “¿Positivo o negativo?”
Ao. “Positivo”
Mo. “¿A los demás les salió positivo?”
As. “¡Si!”
Mo. “Inciso e... (es interrumpido por una alumna)”
Aa. “Maestro pero si le aprietas el diamante verde y enter el resultado es 0.6 (otro interrumpe)”
Ao. “¡Sale 5 seises y luego un 7!”
Mo. “Bueno ese número es aproximado, el número exacto es 2/3, de acuerdo...”
As. “¡Si!”
Mo. “¿Cuál es mayor 2/3 ó 0.666666”
As. ¡2/3!”

Aquí algunos alumnos parecen tener mayor seguridad al utilizar un número decimal en lugar de fracción, y al hacer la conversión de 2/3, observan que una calculadora lo expresa como 0.6 y otra como 0.666667 (desde luego estos dos números, son sólo aproximaciones de la fracción 2/3), esta situación se aprovecha para aclarar que no todas las fracciones al convertirlas a decimales son equivalentes como el caso de 2/5=0.4. Tal vez esto no se aclara lo suficiente en la primaria.

Mo. “El 0.666666 es aproximado, se acerca mucho a 2/3, pero bastante a 2/3, ¿queda claro?”
As. “¡Si!”

Mo. “Inciso e, niña...”
Aa. “-18 - -14 y da como resultado -32”
Mo. ¡-32! ¿Alguien tiene otro resultado diferente? (varios levantan la mano)”
Aa. “-4”
Mo. “-4”
As. “¡Si!”
Mo. “Bien, tenemos dos resultados y no podemos tener dos resultados diferentes, tenemos varias opciones: o las dos están mal, o uno de las 2 está mal. Niña, ¿tú que opinas?...”
Aa. “Es que ahí no se ve una rayita pero es –18 - -14”
Mo. “A la mejor el problema está en que no salió en la copia”
As. “¡Si falta un signo!”
Mo. “Pero el problema dice –18 - -14, sale...”
Ao. “-4”
Mo. “-4 dice su compañero”
As. “¡Si!”
Mo. “Siguiente: -100 - - 48, a ver muchacho...”
Ao. “La respuesta es -148”
Mo. “-148, ¿alguien tiene una respuesta diferente?... niña”
Aa. “-52”
Mo. “¿Sí es correcto?”
As. “¡Si!”
Mo. “Todos tienen –52”
As. “¡Si!”
Mo. “Pregunta: ¿explica lo que crees que hace la calculadora para restar un número negativo?, de pie muchacho...”
Ao. “Como se dijo, en realidad no es restar, es sumar”

Todavía no identifican claramente en qué casos se suma en forma normal (como ellos lo señalan).

Mo. “El inciso e, es –18 - -14, ¿ahí sumamos?”
As. “¡No!”
Ao. “Es que si es un número positivo y otro negativo, se suman; pero si es un negativo con otro negativo, es decir, un negativo con un negativo se resta en forma normal:
Si los 2 números son positivos el resultado es positivo,
Si los 2 números son negativos el resultado es negativo”

Aquí ya dan indicios de una generalización, de cuándo se suma y cuándo se resta, sin embargo sólo sucede para algunos casos ya que:

2-5=-3; el 2 y el 5 son positivos, y el resultado es negativo. Sin embargo es una buena conjetura.

Por otro lado, (-2)-(-5)=3; el –2 y el –5 son negativos, y el resultado es positivo.

Mo. “A ver, inciso f, tienes –100- -48=, ¿realizas una suma?”
As. “¡No!”
Mo. “¿Ahí que hace?”
Ao. “Lo resta normal”
Aa. “Le resta el –48 a –100”
Mo. “O sea que el –48 qué sería en realidad... positivo prácticamente y el 100 negativo, y el resultado qué meda”
As. “-52”
Mo. “Muchacho, tú dices que viste algo, ¿qué viste?”
Ao. “Con lo que explicó Rafael, primero hice una suma con el signo positivo y luego con el signo menos, es decir, si anoto 54+65 da 119, pero si cambio los dos signos por negativo quedaría 54- -65 da lo mismo”

La operación suma la cambió por la resta primero, y después el segundo sumando que es positivo, le cambia el signo en la resta quedando ahora como sustraendo. Es decir es lo mismo sumar dos positivos que restar un negativo a un positivo.

Mo. “Bien, pero en este caso es diferente el inciso e y el f. Victoria...”
Aa. “Si ponemos el signo negativo al 54, se hace una resta normal”
Mo. “A ver, díctale a tu compañero”
Aa. “-54 - -65”
Mo. “Eso es igual a..., ahí qué pasa Victoria”
Aa. “Ahí como los números son negativos se hace una resta normal”

Identifican que cuando el minuendo y el sustraendo son negativos, se hace una resta común; sin importar cuál es el minuendo y cuál el sustraendo, sólo quitan al mayor el menor. Al parecer, no tiene problema cuando ambos números son negativos.

Mo. “En este caso, ¿cuál sería el resultado?, ¿positivo sería el resultado?”
As. “¡Once positivo!”
Aa. “Yo me he dado cuenta que por ejemplo, si cambiamos los números, primero el –65 y luego el –54, el resultado sería negativo”

Pero si invierten el minuendo y el sustraendo, el resultado será su simétrico del resultado sin invertir los números. Esta es una excelente observación.

Mo. “A ver díctale Karen”
Aa. “-65 - -54”
Mo. “Igual a... ¿cuánto me da la calculadora?”
As. “¡Once negativo!”
Mo. “¿Qué más Karen?”

Aa. “¡Hay, es que ya se me olvidó lo que le iba a decir”

Mo. “No te preocupes... muchacho (se dirige a otro alumno)”

Ao. *Si son dos números negativos y el primero es más chico que el segundo (se refiere al valor absoluto), el resultado sale positivo, pero si el primer número es mayor que el segundo (se refiere al valor absoluto), el resultado sale negativo”*

Algunos alumnos presentan dificultad para saber el signo del resultado cuando se restan números negativos, sin embargo la participación de este alumno, permite generalizar lo anterior y por lo tanto quedaría así:

a – b = positivo

b – a = negativo

Siendo a y b números con signo, si y sólo si /a/</b/

Mo. “Todos están de acuerdo”

As. “¡Si!”

Mo. “A ver, estamos en una fase de conclusión general, espero que con esto pueden resolver el punto número 5 de la hoja de trabajo; resuélvanla (después de un tiempo de exploración), ¿qué inciso están trabajando?”

Ao. “El b, ya hicimos los otros, pero las fracciones otra vez se nos están dificultando”

Mo. “¿Están trabajando -1/2 -b =3/4?”

As. “Si”

Nuevamente se manifiesta dificultad para trabajar con las fracciones ya que no les son significativas.

Un alumno dice que el valor del inciso d) –18 – d =20 es –2.

Mo. “Cómo sabes que es –2. A ver anota la expresión en el pizarrón. –18- d =20, ¿cuánto vale d según tú?”

Ao. “Menos 2 (escribe en el pizarrón el valor de d)”

Mo. “Pon abajo: -18 - -2, hazlo en tu calculadora, ¿da 20 positivo niños?”

As. “No, da –16”

Mo. “Pásale muchacho (desea participar un alumno), su compañero puso que d vale, ¿cuánto niño?”

Ao. “38”

Mo. “¿38 ó –38?”

As. “-38”

Mo. “Entonces queda –18 - -38 igual a 20. Bien, siguiente (pasa a una alumna y escribe en el pizarrón –40-e =50), ¿cuánto vale e?”

Aa. “e vale –60”

Mo. “¿Eso pusiste en la calculadora?”

As. “Da 20, es incorrecto”

Mo. “A ver, pásale niña (una alumna desea participar)”

Aa. “e vale –90 (escribe -40- -90 = 50)”

Mo. “¿90 negativo, -90?”

As. “¡Si!”

Mo. “-90, eso es lo que resulta según su compañera. Niño pásale a hacer el siguiente”

Ao. “16-f =40 (lo escribe al mismo tiempo en el pizarrón), f vale -24”

Mo. “El problema es ver si f es positivo o negativo; fíjense lo que escribe su compañero 16 - -24 =40”

As. “¡Sí sale!”

Mo. “¿Seguros que sale eso?”

As. ¡Si!”

Mo. “¿No hay un error en el procedimiento?”

As. “¡No!”

Se trabaja otro problema, en este caso el inciso g.

Mo. “Bien, qué valor le diste a g,... tu niño”

Ao. “1.9”

Mo. "¿La letra g vale 1.9?"

As. "¡Si!"

Mo. "Penúltimo ejercicio: 38.7 – h = 62.4, ¿cuánto vale h?

Ao. "h vale –23.7"

Mo. "¿Será correcto?

As. "¡Si"

*En este sección de la hoja de trabajo, las diferentes posibilidades de hacer una resta con números con signo son: cuando el minuendo y el sustraendo son positivos; cuando el minuendo es negativo y el sustraendo es positivo; cuando el minuendo es positivo y el sustraendo negativo y cuando ambos números son negativos. Lo que se observó en los resultados de las hojas de trabajo fue que es **fácil** resolver restas cuando el minuendo es positivo y el sustraendo negativo; **relativamente fácil** cuando el minuendo es negativo y el sustraendo es positivo; **difícil**, cuando ambos números son negativos (como fue el caso del inciso i) –17.9 – k = 100; no hubo actividades cuando el minuendo y el sustraendo son positivos, sin embargo, parece que son fáciles ya que son los números con los que se inicia el algoritmo en primaria.*

Lo anterior, sugiere poner atención y ser cuidadosos como docentes al enseñar la sustracción de números con signo, en especial cuando ambos números son negativos.

Mo. "Último: -17.9 – k = 100, ¿cuánto vale k?"

Ao. "Es 117.9 no maestro"

Mo. "¿Eso crees que valga?"

Ao. "Sí porque es –17.9"

Mo. "A ver hazlo en la calculadora"

Ao. "Lo hice sin calculadora"

Este alumno lo resuelve mentalmente, omite el signo negativo de la operación y sabe que a –17.9 basta sumarle 117.9 para que le de 100 (El alumno hace lo siguiente:-17.9 + 117.9 = 100. Aquí ya no es una resta, sino una adición); pero lo más interesante es que él sabe que +117.9 es la misma expresión que - - 117.9, sólo que él la omite en su explicación.

Mo. "¿Sin la calculadora?... díctale el número (su compañero está trabajando en la calculadora y se le pide que ingrese los datos)"
Ao. "117.9"
Mo. "A ver, ponle 117.9... (los alumnos se dan cuenta que si se le pone 117.9 como positivo directamente, el resultado no va a dar, sin embargo, si comprende el número como tal debe ser positivo, es decir, el primer número es –17.9 y el otro debe ser positivo, en este caso 117.9). ¿Es correcto lo que puso su compañero (mientras otro alumno está trabajando en el pizarrón y anota).

-17.9 - - 117.9 = 100?"

As. "¡Si!"

5.4 Descripción de la sesión 4

En esta hoja de trabajo 4, se aborda la lección: ¿Cómo multiplico números con signo?, se analiza y compara el producto con números positivos y con números negativos; asimismo se trabaja la propiedad conmutativa del producto.

Después de saludar a los alumnos, se les indica que van a trabajar otra hoja en la que el tema es multiplicación, el profesor le pide a un alumno que de lectura a la hoja y así iniciar.

Ao. "El trabajo que realices en esta hoja, te ayudará a comprender como realizar multiplicaciones con números negativos. Efectúa las siguientes operaciones con la calculadora"

Mo. "Ahora lo van a trabajar en la hoja , no voy a estar dirigiendo, les voy a dar 3ó 5 minuto, trabajen el punto número uno"

Al observar el trabajo en equipo, una alumna dice lo siguiente.

Aa. "¡Ya!... ¡ya!, explica lo que crees que hace la calculadora para multiplicar un número positivo por un número negativo (lee la hoja y contesta explicándole a su compañera la multiplicación es –8X6); si le quitamos el signo menos, podemos ver que 8X6 da 48 y como el primer número es negativo, el resultado es negativo y como es mayor (se refiere al valor absoluto), también le hace caso (se refiere a la calculadora)"

Se inician las primeras observaciones, se da cuenta de ciertas regularidades, sin embargo las conclusiones primeras, no son correctas, pero es un buen inicio.

Después de un tiempo, el profesor se acerca a otro equipo y le pregunta.

Mo. "¿Ustedes en qué ejercicio van?"

Aa. "En el 3"

Mo. "¿Qué dice el 3"

Aa. "Un alumno dice que -7X13 da el mismo resultado que 13X(-7), ¿lo que dice ese alumno es correcto?. Si.

Mo. "¿Por qué crees que es correcto?"

Ao. “Maestro, ¿qué significa el paréntesis, qué tiene que ver?, aquí lo que entendemos es que los números cambian de lugar, pero no sabemos qué significa el paréntesis”
Mo. “¿La pregunta les pide algo en particular del paréntesis?”
As. “No”
Mo. “¿Qué pueden deducir si ocupas el paréntesis, de algo nos servirá el paréntesis?”
Aa. “No porque da el mismo resultado”

Respecto al paréntesis que les hace ruido al inicio a los alumnos, es grato que deduzcan que en este caso particular no les sirve de nada, no influye en el resultado.

Mo. “Tal vez, nada mas se puso para que ustedes identifiquen que hay dentro del paréntesis un número y que es negativo”
As. “Bueno”

El profesor va a otro equipo, el cual está trabajando la actividad 8

Ao. “Un alumno de otra escuela dice que –4 X –12 da el mismo resultado que –12 X –4, (contestan) sí pues nada más cambió los números (lo comprueba en la calculadora y le muestra a su compañero lo que obtuvo en la pantalla)”
Mo. “¿Podrían comprobar con otros números?”
As “¡Si!”
Mo. “Pongan un ejemplo, pero anótenlo en la hoja, ¿qué números pondrías?”
Ao. “-9X-8 (esta operación la realiza en la calculadora)”
Mo. “Les da 72, luego qué hicieron”
Ao. “-8X-9 igual a 72. Si es multiplicación, cambian los números pero no cambia el resultado (los alumnos lo comprobaron con otros números, por

ejemplo: con –2X-4 y –4X –2 y observaron que en cada caso el resultado era el mismo, o sea 8).

Aquí se muestra el caso de multiplicar dos número negativos y los alumnos concluyen que al cambiar los números, el orden, el resultado es el mismo, esto es la propiedad conmutativa de la multiplicación deducida por ellos.

Al pasar a otro equipo, que trabaja la pregunta 4 de la hoja de trabajo, la cual dice lo siguiente: efectúa las siguientes operaciones sin usar la calculadora.
Mo. "¿En qué coincidieron las multiplicaciones?"
Aa. "En que todos los resultados son negativos"
Mo. "Para que los resultados fueran positivos, qué tendríamos que poner o agregar"
Aa. "Todavía no se maestro... (dice una integrante del equipo, pero otra contesta de inmediato)"
Aa. "2 negativos"
Mo. "¿Ya lo comprobaste?"
Aa. "¡Si!"
Mo. "¿En la hoja o en la calculadora?"
Aa. "En la hoja y en la calculadora"
Mo. "¿En los 2?"
Aa. "¡Si!"
Mo. "A ver ponme un ejercicio a mí en la calculadora"
As. "-6X-6 (lo realiza en la calculadora y lo muestra al profesor)"
Mo. "A ver ponlo, qué te da con esos números"
Ao. "36"
Mo. Bien, muy bien"

En esta actividad los alumnos trabajan la multiplicación de un número negativo por un positivo, ellos observan que en todos los casos el resultado es ne-

gativo; y para que el resultado de estas operaciones sea positivo, es necesario que ambos números sean negativos.

Posteriormente se procede a revisar la hoja de trabajo.

Aa. "Efectúa las siguientes operaciones usando la calculadora (da las respuestas de todos los incisos)"
Mo. "Bien, ¿alguien tuvo una respuesta diferente a las que dio su compañera?"
As. "¡No!"
Ao. "*Acabamos de ver, cómo hacer si no tuviéramos calculadora, al fin de cuentas se hace una multiplicación normal, sólo se le agrega el signo* (otro alumno señala)"
Ao. "*Si multiplico un número positivo por otro negativo, nada mas se le agrega el signo al resultado* (se refiere al signo negativo)"
Mo. "Bien, vamos a ver el número dos de la hoja... niño"
Ao. "Explica lo que hace la calculadora al multiplicar un número positivo y otro negativo. L*a calculadora multiplica y el resultado siempre da negativo*"
Mo. "Bien, a ver muchacho (le da la palabra a un alumno que está levantando la mano)"
Ao. Primero multiplicas y luego arreglas los signos"
Mo. "Bien, a ver (se dirige a otro alumno el profesor)"
Ao. "*Es como si estuviéramos haciendo multiplicaciones normales, sólo se le agrega el signo negativo*"

Generalizan la multiplicación de un número negativo por un positivo, saben que siempre el resultado va a ser negativo, incluso llegan a decir que hasta sin calculadora pueden obtener el resultado.

Mo. "Bien, entonces, vamos a ver el punto número 3"

Ao. “Un alumno dice que –7X13 da el mismo resultado que 13X-7, ¡sí!, *es la misma operación nada mas que invertida*”

Se observa que los alumnos redescubren la propiedad conmutativa de la multiplicación.

Mo. “El orden sólo cambia, pero es el mismo resultado. Bien, punto número 4, quien me dice el número 4”
Aa. “Efectúa las siguientes operaciones sin usar la calculadora (da las respuestas de los incisos a y b, interviene el profesor)”
Mo. “Si alguien tiene una respuesta diferente, me avisa... siguiente”
Aa. “c) 7X-4=-28 d) –10X5=-5 e) 6X-7= -42
Mo. “Bien, faltan incisos (continúan contestando diferentes alumnos y no hay ningún problema). Continuamos, quién le da lectura”

En esta actividad los alumnos no tuvieron ningún problema, en realidad lo hicieron bien sin cometer errores, esto hace suponer que lo comprenden.

Ao. “Ahora usa la calculadora para verificar las respuestas del ejercicio anterior...”
Mo. “Alguien cometió algún error”
As. “¡No!”
Mo. “Punto número 6... niña”
Aa. “Exploremos ahora cómo multiplicar 2 números negativos, para hacer esto realiza las siguientes multiplicaciones usando la calculadora. Inciso a, -8X-5=40”
Mo. “¿Alguien tiene resultados diferentes?”
As. “¡No!”
Mo. “Como nadie tuvo resultados diferentes, pasemos a la siguiente actividad”

Los alumnos no manifiestan ningún problema al realizar estas multiplicaciones, saben que todas estas multiplicaciones el resultado va ser positivo.

Ao. "Explica qué es lo que hace la calculadora para multiplicar un número negativo por otro número negativo. Se multiplica normal"
Aa. "Nada mas hace la multiplicación"
Mo. "¿Toma en cuenta los signos?"
As. "¡No!"
Mo. "No los toma en cuenta ¿verdad?, nada mas los quita, bueno, eso fue lo que a todos les dio en la calculadora. Bien, siguiente"
Ao. "Un alumno de otra escuela dice que –4X-12 da el mismo resultado que –12X-4, (el alumno contesta) sí porque el orden no afecta"
Mo. "El orden no afecta qué..."
Ao. "El orden no afecta el resultado"

Reconocen la propiedad conmutativa de la multiplicación.

Mo. "Bien, seguimos"
Ao. "Otra alumna dice que la expresión –(-7) es equivalente a la operación –1X-7, ¿estás de acuerdo con ella?, ¿por qué?. No porque no hay número uno (inmediatamente interrumpen sus compañeros y dicen que está mal)"
Mo. "Vamos a ver, qué dice tu compañera, algunos no están de acuerdo contigo"
Ao. "Sí, porque al efectuar la resta –(-7) nos da 7, igual al multiplicar –1X-7 nos da el mismo resultado 7"
Mo. "¿Les dio lo mismo?"
As. "¡Si!"
Mo. "Niña..."

Aa. “Si, el paréntesis que está no afecta al número, las operaciones que hemos hecho no afectan al número (este equipo ya comprobó con varios ejemplos)”

Los alumnos concluyen que la expresión –(-a) es lo mismo que la multiplicación –1X(-a), es decir:
-(-a) = -1 X (-a)

CONTINUACIÓN

Aa. “Algo más sobre multiplicación de números con signo (hoja de trabajo 5).
1 Veamos ahora cómo hacer multiplicaciones con más de 2 números con signo, para esto realiza las siguientes operaciones usando la calculadora.

Vuelven a trabajar en equipos de 4 solos, sin la guía del profesor. Se observa el trabajo en equipo, se ve que andan explorando.
Mo. “Vamos a revisar la primera parte, si alguien tiene un resultado diferente lo comenta. Inciso a, quién quiere decir el resultado... niña de pie”
Aa. “2X4X(-5)= -40”
Mo. “¿correcto?”
As. “¡Si!”
Mo. “Bien, inciso b, muchacho”
Ao. “-2X4X-5=40”
As. “¡Si!”
Mo. “Está bien o esta mal”
As. “¡Bien!”
Mo. “Bueno, muchacho...”
Ao. “2X-3X-3 = -18
As. “¡No!”
Mo. “Estamos en el inciso...”

As. “c”

Ao. “-2X(-4)X(-5)= -40”

Mo. “¿-40?”

As. “¡Si!”

Mo. “Siguiente, niña...”

Aa. “2X4X5=40”

Mo. “Ese si es 40, inciso e...”

Ao. “3X-2X-4= 24”

Mo. “24 ¿positivo o negativo?

Ao. “¡positivo!”

Mo. “Ahora si allá atrás (participa un alumno de los de atrás)...”

Aa. “3X-2X4= -24”

Mo. “¿Es correcto?”

As. “¡Si!”.

En esta primera parte de la hoja de trabajo, los alumnos no tienen ningún problema, tal vez porque sólo ingresan los datos a la calculadora.

Mo. “Correcto, punto número 2, ¿de qué depende el signo del resultado cuando multiplicas 3 números?... niña”

Aa. “Que el tercer número ayuda los dos primeros para que saga el resultado”

Mo. “Alguien tiene otra respuesta... a ver muchacho”

Ao. “Depende cuando hay menos números negativos, en el inciso c es –2 X (–4) X (-5) = si hay más números negativos, el resultado es positivo y viceversa”

Al inicio no encuentran una razón precisa sobre de qué depende el signo del resultado.

Mo. “Por ejemplo, cuánto es más números, cuántos multiplicandos hay en total”

Ao. “3”

Mo. “3, si nosotros tenemos 3, si los 3 son negativos, el resultado cómo va a ser”

Ao. “negativo”

Mo. “Negativo, si nada mas tenemos un solo signo negativo en los tres factores, el resultado cómo va a ser”

Ao. “Negativo”

Mo. “¿Qué se necesita para que el resultado sea positivo?

Ao. “Que los tres sean positivos”

Mo. “¡ho!”

Ao. “Que nada mas sea uno positivo”

Mo. “En lugar de decir un solo número positivo (factor), entonces los otros 2 factores cómo deben ser”

Ao. “Negativos”

Este alumno empieza a darse cuenta que algo tiene que ver el número de signos negativos que hay en la operación.

Empiezan a concluir que cuando se tienen tres factores, el resultado será negativo si los tres factores son negativos, o bien, si sólo uno es negativo. El resultado será positivo si los tres factores son positivos, o bien, si sólo uno es positivo.

Mo. “Abusados he, porque la siguiente actividad es sin calculadora. Punto número 3, realiza las siguientes operaciones sin usar calculadora, niña...”

Al revisar las operaciones, en general todos estuvieron bien casi no hubo errores, sin embargo me da la impresión que si bien las realizaban al inicio sin calculadora, inmediatamente las comprobaban y por ende corregían.

Mo. “Bien, No. 4. Ahora usa la calculadora para revisar las respuestas que diste en el inciso anterior, ¿todas las respuestas fueron correctas?

As. “¡Si!”

Mo. “Quienes tuvieron un resultado incorrecto (un alumno levanta la mano)... niño, ¿en qué te equivocaste?”

Ao. “En el g (la operación es -6X-2X-4)”

Mo. “¿Qué pusiste en el g?”

Ao. “Había puesto –40”

Mo. “¿Y qué resultado debe ser?”

Ao. “-48”

Mo. “Ahí fue un error de atención a la hora de oprimir las teclas tal vez, pero, ¿en qué consistieron tus errores?”

Ao. No se, a la mejor oprimí una tecla mal”

Mo. “Tal vez...niña”

Tal vez un problema que presente el trabajo con calculadora, es que el alumno podría creer más en la calculadora que en él, o mejor dicho el alumno no llega a razonar los resultados.

Aa. “*Yo encontré una forma más fácil de multiplicar, sin usar la calculadora, este... por ejemplo 3X-2X-4, yo se que cuando hay 3 cifras (quiere decir factores) y tengo un negativo, entonces el resultado va a ser positivo, y por ejemplo en 3 cifras (factores) tengo dos negativos, el resultado va a ser positivo*”

Mo. “Ya comprobaste con los ejercicios”

Aa. “¡Si!”

El ejemplo que puso, no lo utilizó, pero se empieza a dar una generalización aunque la alumna se equivoca en la primera parte, el resultado no es positivo *cuando se tiene un número negativo en una multiplicación con tres factores, a lo que un alumno corrige y de manera segura*

Mo. “¿Alguien está de acuerdo con su compañera, o en desacuerdo?”
Ao. “¡Yo estoy en desacuerdo!”
Mo. “¿Por qué?”
Ao. “Porque en el primer ejercicio el inciso a es 2X4X(-5), ahí sólo hay un solo número negativo, sin embargo el resultado sale negativo”
Mo. “Y eso no dijo tu compañera?, a ver (le da la palabra a la alumna anterior)”
Aa. “*Lo que yo trataba de explicar es que cuando nada mas hay un negativo el resultado es negativo, y cuando hay 2 negativos sale el resultado positivo*”

Excelente conclusión, pero todavía está incompleta, ya que faltan el caso cuando son los 3 números negativos, ¿el resultado cómo es?

Mo. “Niño (se dirige al alumno que había dicho que estaba en desacuerdo, aunque en realidad, la niña se había equivocado en la primera parte de su explicación)”
Ao. “Entonces entendí mal su explicación”
Mo. “¿Alguien está de acuerdo en lo que dijo Karen?”
As. “¡Si!”
Mo. “Alguien está en desacuerdo con lo que dijo Karen?”
As. “¡No!”
Mo. “Niña…”
Aa. “Yo estoy de acuerdo con Karen, porque en las operaciones con tres números (se refiere a la multiplicación con 3 factores), cuando hay un número positivo, el resultado es positivo; y cuando hay un número negativo, el resultado es negativo, esto fue lo que yo entendí a lo que explicó Karen”
Mo. “O sea que estás de acuerdo con Karen”

Posteriormente se realiza el punto número 5 de la hoja de trabajo (5), que consiste en poner el signo del resultado de cada multiplicación. Se trabajan multiplicaciones con 3 factores y con 4 factores.

Mo. “Del inciso a al d, ¿quién me da los resultados?, si alguien tiene resultados diferentes, lo dice de inmediato”
Ao. “El a es positivo, el b negativo, el c es negativo y el d negativo”
Mo. “Bien, ¿es correcto?”
As. “Si”
Mo. “Del inciso e al h, ¿quién da los resultados?”
Aa. “El inciso e da menos, el f es positivo, el g es positivo y el h también es positivo”
Mo. “¿Quién obtuvo resultados diferentes?”
Ao. “No, todos están bien”
Mo. “Inciso del i al l, ... niña (aquí estas multiplicaciones son con 4 factores)”
Aa. “El inciso i es positivo, el j es positivo, el k también es positivo y el l también es positivo”
As. “¡Si! (ante esta expresión el maestro ya no pregunta)”
Mo. “Últimos cuatro, ... niño”
Ao. “El inciso m es positivo, el n el resultado da positivo, el o también positivo y el p es positivo”
Mo. “Bien, ahora si se fijan, en los últimos ejercicios hay cuatro multiplicandos, 4 factores, alguien ya podrá darme una conclusión cuando usamos 4 números para multiplicar, cuándo siempre el resultado va a ser positivo, y cuándo siempre el resultado va a salir negativo, o no lo pudieron observar... a ver muchacho”
Ao. “*Va a salir positivo cuando los números de la multiplicación sean negativos*”

Mo. “Va a salir positivo cuando los números de la multiplicación sean negativos, a ver hay un ejercicio donde los 4 factores sean negativos”
As. “el inciso i y el j”
Mo. “El inciso i tiene los cuatro factores negativos, ¿cómo es el resultado?”
As. “Positivo”
Mo. “El inciso j, también tiene 4 factores negativos, ¿cómo salió el resultado?”
Ao. “Positivo”
Mo. “Positivo, ojo... tú estabas en desacuerdo con lo que había dicho tu compañero”
Ao. “Si”
Mo. “¿Por qué?”
Ao. “En el inciso k salió un número positivo y no todos son negativos”
Mo. “Ha lo que pasa que tu compañero está tratando un caso. El primer caso que su compañero está diciendo es cuando los 4 números son negativos, el resultado es positivo, ¿habrá otro caso en el que el resultado me de positivo?”
Ao. “Cuando son 2 positivos y 2 negativos”
Mo. “Cuando son 2 positivos y 2 negativos dice su compañero. A ver, revisen en qué inciso se cumple esto”
As. “En el o, en el p y en el m”
Ao. “El inciso o no, tiene 3 negativos”
Mo. “Bien, en qué otros incisos se cumple esto y el resultado es positivo”
As. “Nada mas”
Mo. “Niñas, a ustedes cómo les salió el resultado, positivo o negativo en el inciso p y m”
As. “Tenemos un error”
Mo. “Bueno”

Los alumnos llegan a concluir que:

Con cuatro números negativos, el resultado será positivo.
Con dos signos negativos, el resultado será positivo.
Con un signo negativo, al igual que con tres factores, el resultado será negativo.

Desafortunadamente, con tres números negativos, no se llegó a concluir qué signo dará como resultado. Esto implica poner atención en la enseñanza de la multiplicación con tres factores negativos.

5.5 Descripción de la sesión en el aula 5

En esta sesión se abordó la lección: ¿Cómo divido números con signo?; en forma implícita se analiza la comparación entre el cociente con números positivos y el cociente con números negativos, además la no-conmutatividad del cociente.

La sesión inicia cuando una alumna le da lectura a la hoja de trabajo.
Aa. "¿Cómo divido números con signo? Efectúa las siguientes operaciones usando la calculadora.
Mo. "Resuelvan la primera actividad (después de un tiempo se procede a revisar)... niño"
Ao. "Inciso b, -12÷4=-3"
Mo. "-12÷4=-3, ¿a todos les sale eso?"
As. "¡Si!"
Mo. "Niña…"
Aa. "18÷(-6)=108"
Mo. "¿A todos les sale eso?"
As. "¡No!, es –3"
Mo. "-3, siguiente inciso..."

Se continúa revisando y no hay problemas para hacer la división en la calculadora.

Mo. “Bien, vamos a la pregunta 2. Niña...”
Aa. “Explica mediante un ejemplo, ¿qué crees que hace la calculadora para hacer divisiones con números con signo?”
Mo. “¿Quién tiene la respuesta?”
Aa. “Lo divide normal pero en negativo”
Mo. “Bien, niño”
Ao. “Cuando un número negativo se divide por un afirmativo (quiere decir un número positivo), el resultado es negativo”

En la división de un número negativo con un positivo, sin importar quién sea el dividendo y el divisor, los alumnos identifican con claridad que el resultado va a ser un número negativo.

Mo. “¿Alguien tiene una respuesta diferente?... Bien, siguiente. Niña”
Aa. “Un alumno de otra escuela dice que -8÷20, da el mismo resultado que 20÷(-8). ¿Lo que dice ese alumno es correcto?”
Mo. “¿Qué pusieron ustedes como respuesta? (se dirige a un equipo)”
As. “¡Si!”
Mo. “¿Por qué?
As. ¡No, está mal! (contestan otros alumnos de otro equipo)”
Mo. “¿No es lo mismo?
Ao. “No, porque en la primera operación una sale –0.4 y en la otra –2.5”
Mo. “Niñas, están de acuerdo con la persona de la otra escuela, ¿es lo mismo dividir de una manera que de otra? (se dirige al equipo que dijo que sí era lo mismo)”
As. “¡No!”

Mo. “A ver, pongan otro ejemplo similar al de la hoja (se dirige al mismo equipo nuevamente)”

As. (se quedan pensando)

Mo. “Niños, ¿es lo mismo dividir –10÷5, que 5÷ -10?”

As. “¡No!”

Mo. “Ahora, por qué no... muchacho”

Ao. “Porque...”

Mo. “¿Cuánto te sale –10÷5 y 5÷ -10?”

Ao. “–10÷5 sale –2, y 5÷ -10 sale –0.5”

Mo. ”¿Es lo mismo, o no es lo mismo?”

Ao. “¡No!”

Mo. “No es lo mismo... niña, vas a decir algo”

Aa. “*Cualquier división que se invierte, no sale el mismo resultado, no es lo mismo; cuando dividimos 5÷-10, sale como resultado una fracción (un numero decimal), y cuando dividimos –10÷5 sale un resultado normal (se refiere a un entero)”*

Identifican bien la operación e indagan cómo debe ser el signo del resultado, en este caso, saben que el resultado siempre será negativo, pero con diferente valor.

Si a<0 y b>0, entonces a÷b= negativo.

b÷a= negativo. Esto es, a/b es diferente de b/a, no existe la propiedad conmutativa.

Mo. “¿Cómo es normal?, ¿quieres decir entero?”

Aa. “Si, entero”

Para la alumna hablar de normal se refiere a número natural o bien a un entero.

Mo. “Muy bien, niño siguiente actividad”

Ao. “Efectúa las siguientes operaciones sin usar la calculadora”

Aún con la indicación de no usar la calculadora, la mayoría de los equipos no lo hizo de esta manera desafortunadamente, ya que esto no me permitió darme cuenta si podrían hacer divisiones de números con signo sin calculadora.

Mo. “Ahora van a efectuar las operaciones sin usar la calculadora, ¡ya terminaron! (se dirige a un equipo que levantó la mano)... A ver díctame el primero”
Ao. “El 1° es -91÷7= 30.333 (periódico la parte decimal), -80 ÷ -5 = -16, 70÷-4=-17.5 y el último -10 ÷ 5 = -2”
Mo. “¿Eso lo resolvieron sin calculadora? (lo pregunta, porque el primero está mal, el resultado es -13)”
As. “Si”
Mo. “¿Ya las comprobaron?”
As. “¡Ya!”
Mo. “Bien, ... (pasa a otros equipos a observar el trabajo, y desafortunadamente la mayoría las estaba haciendo con calculadora, situación que correspondía a la actividad 5, usarla para revisar las respuestas)”
Mo. “Pasemos al número 6... niña”

La actividad número 6, no se grabó, pero consistió en dividir un número negativo entre otro número negativo, a través del uso de la calculadora. Se hizo la actividad 7 y el profesor le pidió a una alumna le diera lectura.

Aa. “Explica mediante un ejemplo qué crees que hace la calculadora para dividir un número negativo entre otro número negativo”

Mo. “Explica mediante un ejemplo qué crees que hace la calculadora para dividir un número negativo entre otro número negativo. Allá en el fondo (se dirige a un equipo)”
Ao. “*Quita los signos y hace la operación normal*”

Es una explicación sencilla, en términos coloquiales, en forma verbal generaliza.

Mo. “Bien, esa es una respuesta que ellos tienen. Tú tienes otra respuesta (se dirige a otra alumna de otro equipo que levanta la mano)
Aa. “Este... por ejemplo en la a, b, d, e, f y h (del punto número 6 de la hoja de trabajo), no da números negativos, dan positivos”

La alumna no se percata de que en los incisos c y g, también los resultados son positivos.

Mo. “¿En cuál inciso?”
Aa. “En todos, es que me equivoqué. Tengo 2 números iguales (se refiere a que ambos son negativos), por ejemplo -6 ÷ -6 me da un número positivo, o sea no me da un número decimal; y si tengo -10 ÷ -4 me sale un número positivo pero con punto decimal”

Se da cuenta que hay divisiones cuyo resultado es entero y en otros es decimal, pero lo sobresaliente es que, en ambos los resultados son positivos.

Mo. “Esa es una diferencia, pero ¿los resultados son positivos o los resultados son negativos?”
Aa. “Los resultados son positivos”
Mo. “Bien, ...niño”

Ao. “Yo decía que al dividir dos números negativos, se hace igual que como los positivos, sólo que al final se le agrega el signo menos”

Mo. “Por ejemplo...”

Ao. “El inciso c, sería -6 ÷ -6, si nada mas sería -6 ÷ 6 ¡ha no ¡ mentira, es que se hace igual como si fueran positivos”

Mo. “¿Entonces?”

Ao. “Es lo mismo que si se dividen 2 negativos como con 2 positivos”

Mo. “Niño... (se dirige a un compañero que levanta la mano y que es del mismo equipo)”

Ao. *La división se realiza normalmente porque los dos números son de un mismo tipo (del mismo signo), entonces la división se realiza normal*”

Enuncian verbalmente parte de la ley de signos cuando ambos son del mismo signo:

1. Menos entre menos da más, esto es $a \div b$ = positivo, si $a<0$ y $b<0$

2. Mas entre mas de mas, esto es $a \div b$ = positivo si $a>0$ y $b>0$ (conocimiento previo de los alumnos con los naturales).

Mo. “Por ejemplo, a ver ¿cuánto es -10÷ -2?”

Aa. “5”

Mo. “¿Positivo o negativo?”

Ao. “Positivo”

Mo. “Si tuvieran por ejemplo... -24÷ -8, ¿qué me daría?”

Ao. “3”

Mo. “¿3 ó -3?”

Ao. “3, porque los dos números son negativos, entonces el resultado debe ser positivo; la calculadora quita la resta (se refiere a los signos negativos) y hace la división normal”

De alguna manera, los alumnos saben por qué el resultado es positivo o negativo de acuerdo a lo observado en las divisiones hechas anteriormente, esta justificación es mejor que si el profesor da la ley de los signos para que los alumnos la memoricen.

Mo. "Bien,... niño"
Ao. "Lo hace normal, los números negativos los borra, bueno no los borra, no los toma en cuenta, al dividir, los quita"
Mo. "Muy bien, siguiente..."
Ao. "8. Un alumno de otra escuela dice que -4 ÷ (-12), da el mismo resultado que -12 ÷ (-4), ¿lo que dice ese alumno es correcto? No, porque se divide un número más grande"
Mo. "¿Alguien está en desacuerdo con su compañero?"
As. "¡No! (la mayoría lo comprobó con la calculadora y observó que el resultado es diferente)"

Saben que no se aplica la propiedad conmutativa y la calculadora les permite saberlo de inmediato

Mo. "Bien, siguiente"
Ao. "¿Qué semejanza encuentras entre la multiplicación y la división con números positivos y números negativos? (él mismo contesta), que se multiplican normal también en la división, pero sólo aumenta el signo positivo o el signo negativo"
Mo. "A ver niños, qué semejanza hay... niño"
Ao. Que ambas operaciones se realizan normalmente, pero no hay ningún cambio al realizarlas"
Mo. "Si los dos números son negativos y si multiplico -2X-3, ¿qué te da? (se siente ausencia de respuesta, tal vez porque ya tocaron y se sienten impacientes por salir e irse a otra clase)"

Ao. “6”

Mo. “Ahora si divides -4÷ -2, ¿qué te da?”

Ao. “2”

Mo. “En los dos casos te da positivo el resultado, esa sería una semejanza, ¿y si uno de los dos números fuera negativo, qué pasaría si fuera -2X3, qué te daría?”

En el video no se ve que puedan detectar una semejanza entre ambas operaciones, para concluir la ley de signos, pero desafortunadamente fue por tiempo y ya no lo retomé.

5.6 Descripción de la sesión 6

En esta hoja de trabajo, la lección trata el subtema “Potencias de números con signo” y como temas implícitos se abordan los casos de $–a^n$ y $(-a)^n$; determinación del signo de la potencia a partir del signo de la base y de la paridad del exponente; la propiedad asociativa del producto y estrategias para efectuar multiplicaciones iteradas sin usar la calculadora.

La forma de trabajo en esta sesión, también fue por equipos de cuatro, a cada equipo se le dio 4 hojas de trabajo y dos calculadoras. El profesor le pide a un alumno inicie la sesión de trabajo dando lectura a la hoja, da un tiempo para que la aborden y se procede a revisarla.

Ao. “Potencias de números negativos. Un alumno dice que 5^2= 5X2=10, ¿es correcto lo que dice el alumno? No”

Mo. “Niño, dice tu compañero que no es correcto”

Ao. “No, porque 5^2 es 5X5 y el resultado es igual a 25”

Mo. “No, porque 5^2 es 5X5 y el resultado es igual a 25, ¿están de acuerdo o en desacuerdo?, ¿alguien piensa como el alumno de la otra escuela, que 5^2 es 10?”

As. “¡No! (algunos se quedan callados)”

Mo. “Bien, punto número 2”

Aa. “Haz las siguientes operaciones con la calculadora. Inciso a) -6^2 y b) $(-6)^2$”

Mo. “Bien, háganlo en la calculadora y observen los resultados que les da”

Ao. ¿Cómo pongo la potencia?”

Mo. “Buena pregunta, busquen en su calculadora la tecla que tiene el siguiente símbolo (lo anota en el pizarrón) ^”

As. “¡Ya abajo de enter!”

Mo. “Pónganle 2, luego ^, luego elévenlo a la 3a. potencia, o sea 3, después enter, ¿qué sale en la pantalla?”

As. “¡8!”

Mo. “Bien, vamos a hacer un último ejemplo para que todos estemos en el mismo tono. Pónganle número 5 luego la tecla ^, luego pónganle a la tercera potencia (oprimir la tecla 3) y por último enter”

As. “¡da 125!”

Mo. “¿Qué es lo que hace la calculadora al elevar 5 a la 3a. potencia?... niña”

Aa. “Multiplica”

Mo. “¿Qué multiplica?”

Aa. “*Multiplica el 5, bueno, no lo multiplica como debe ser 5X3 que da 15, pero no, tienes que multiplicar 3 veces el 5*”

Muestran sus conocimientos previos algunos alumnos y otros observan que si se multiplica 5X3 es 15, sin embargo el resultado que da en la calculadora es de 125 por lo que deducen que no puede ser 15.

Mo. “O sea”

Ao. “5X5X5”

Mo. “5X5X5, a ver háganlo en la calculadora”

As. “¡Ya! (algunos contestan)”

Mo. “¿Si les da?”

Aa. “Si (muestra su calculadora y en la pantalla aparece 5^3=125 y 5X5X5=125)”

Mo. “Muy bien, preguntas”

As. “¡No!”

Mo. “Ahora sí podemos resolver el número 2”

As. “Si”

Mo. “Chequen el punto número 2,... ¿respetan los signos que aparecen ahí?”

Al observar el trabajo de una pareja se registró lo siguiente.

Aa. “-6^2 sale -36, ahora la otra $(-6)^2$ da 36. ¿Qué resultado tuviste en el inciso a, -36; y en el inciso b, 36, ¿cómo interpreta la calculadora la expresión $(-6)^2$? Este…, poniendo,... poner el signo de menos potencia 2, o elevado al cuadrado... si no maestro, primero ponemos el signo de menos”

Mo. “Fíjate en la pregunta, qué es lo que te pide, uno es positivo y el otro negativo”

Ao. “Si”

Mo. “¿Cómo interpreta la calculadora la expresión $(-6)^2$?, ¿qué te da como resultado?”

Aa. “La primera -36 y la segunda 36... “

No les queda claro cómo la calculadora lo interpreta.

Al pasar con otra pareja de alumnos, se observó su trabajo así y surgieron las siguientes dudas.

Ao. Maestro, ¿al cubo es 3?”
Mo. “¡Si!, da un ejemplo”
Ao. “-7 a la tercera potencia”
Mo. “Exactamente”

Se vislumbra de alguna manera el lenguaje algebraico, se observó que a algunos alumnos les cuesta trabajo comprenderlo.

Aa. “¿y aquí que dice?... ¿qué debes escribir en la calculadora si quieres restar seis al cubo de 100?”
Ao. “¡ha ya se!”
Mo. “Qué entiendes, chécalo y coméntalo con tu compañera...”

Una pareja le pide al profesor que pase a su lugar ya que desean explicarle lo que han observado.

Mo. “¿Qué pasó?”
Ao. “*Se le puso entre paréntesis -6 y luego al cuadrado y le salió 36; pero sin el menos, le digo (se refiere a su compañero) que ahí es como si el paréntesis le quitara el signo este (el signo negativo del seis), ¡el paréntesis lo quita!, y si lo pone normal (se refiere al* -6^2*) sale -36. Sin el paréntesis sale -36 y con el paréntesis sale 36”*

No identifica claramente qué es lo que hace la calculadora, sin embargo, se da cuenta que el uso del paréntesis en estos casos determina el signo (positivo o negativo) del resultado.

Mo. “¿Qué es lo que hace la calculadora entonces?”
Ao. “Quita el signo (se regresa a la expresión $(-6)^2$)”
Mo. “En el del paréntesis”

As. “Si”

Mo. “¿Y en el otro?”

Ao. “Lo hace normal y deja el signo”

Mo. “¿Y los dos resultados son los mismos?”

Ao. “Sí, nada mas que uno tiene menos y el otro positivo”

Consideran que los números son lo mismo, aún cuando uno es positivo y otro negativo, es decir:

+a=-a

Ambos, sólo tienen el mismo valor absoluto.

Mo. “¿Pero es lo mismo?”

Ao. “¡Si!”

Mo. “¿Es el mismo valor?”

Ao. “Si”

Mo. “Si los ubicamos en la recta numérica, ¿se va a colocar el 36 y el - 36 en el mismo punto?”

As. “¡Ah no!”

Mo. “¿Entonces es lo mismo 36 que -36?”

Ao. “¡Ah no!”

Mo. “Entonces, ¿el resultado es el mismo en -6^2 que $(-6)^2$?”

As. “¡No!”

Mo. “Bueno...”

Se procede a revisar el punto número 3.

Mo. “¿Cómo interpreta la calculadora la expresión $(-6)^2$?... muchacho”

Ao. “*Multiplica -6X6, va a salir el resultado negativo”*

Mo. “¿En qué inciso, en el a, o en el b?”

Ao. En el a”

Mo. "En el a multiplica -6X6, a ver pasa a ponerlo en el pizarrón muchacha... Pon -6^2 eso es igual a, ¿cómo lo interpreta? (repite la pregunta)... fíjense lo que va a poner su compañera:

El alumno escribe en el pizarrón lo siguiente

$$-6^2 = (-6)X(6)$$

A ver coloquen en la calculadora lo que puso su compañero (-6)X(6), luego enter, ¿sí sale -36?"
As. "¡-36!"

Esta puede ser una forma de interpretación y es válida pues genera la siguiente regla: $-a^2 = (-a)(a)$.
Se observa que al primer número le están asignando el signo negativo y no a toda la operación –(6x6), expresión que quizá es la correcta, matemáticamente hablando.

Mo. "¿Si sale -36?, ¿seguros que sale eso en la calculadora?"
Ao. "Pero maestro, aquí nosotros obtuvimos 36 positivo"
Mo. ¡Ah!, ¡salió positivo!, éste es el inciso a"
Ao. "No, éste es el b"
Mo. "Niños, ¿este es el inciso a, o el b?"
As. "¡a!"
Mo. "Niña, de pie..."
Ao. "*El inciso a, es* -6^2 *y da negativo como resultado, porque el cuadrado como no está entre paréntesis (quiere decir la base no está entre paréntesis), es negativo, entonces se va a multiplicar (-6)X(6)*"
Mo. "Así como está en el pizarrón (se refiere a lo que escribió el alumno anterior)"

Ao. *“¡Si!, y en el inciso b, como encierra al -6 entre paréntesis y deja al cuadrado (el exponente) fuera, entonces el resultado va a ser positivo, entonces se multiplicaría (-6)X(-6)*”

Distinguen la diferencia entre las bases, es decir del –6 y del (-6), por lo tanto, concluyen que el primero siempre será negativo y el segundo siempre va a ser positivo, pero no sólo eso, sino también cómo la calculadora interpreta esas dos expresiones

Mo. “Pasa a anotarlo en el pizarrón... ¿cómo interpreta la calculadora?, ahí está el primer ejemplo inciso a, eso es lo que expresó su compañero.

En el pizarrón está:

a) $-6^2= -36$

b) $(-6)^2=$

Niño, pasa a anotar en el pizarrón cómo quedaría”

Ao. “¿El resultado?”

Mo. “No, cómo lo interpreta, tu compañero puso en el inciso a: (-6)x(6);

Señala el pizarrón para que observen todos lo siguiente:

a) $-6^2=$ ***(-6)X(6)***$=-36$

b) $(-6)^2=$

... en el caso del inciso b, ¿cómo lo interpretaría?”

Ao. “Es 36 (anota sólo el resultado)”

Se anota en el pizarrón:

a) $-6^2= (-6)X(6)= -36$

b) $(-6)^2=$ ***36***

Mo. “Pero antes del 36, ¿qué pondría la calculadora?, pon lo que piensas que hace la calculadora”
Ao. “6X6 = 36”

Así se muestra en el pizarrón

a) -6^2= (-6)X(6)= -36

b) $(-6)^2$= ***6 X 6***= 36

Aquí el alumno expresa el procedimiento que la calculadora realiza, pero el instrumento de cómputo no puede mostrar. Esto es muy valioso debido a que el alumno lo ha descubierto, por lo tanto le será más significativo.
Ante la potencia $(-6)^2$, el alumno llega a expresar lo que la calculadora no muestra (el procedimiento) ante una expresión matemática, en este caso la potencia. Es decir: $(-m)^2 = m \times m$.

Mo. “Bien, eso es lo que cree su compañero que hace la calculadora. ¿Tienes otra respuesta tú muchacho? (mueve la cabeza el niño diciendo que sí), a ver ponlo abajo del signo igual”

Esto aparece en el pizarrón y se le pide que lo escriba adelante del último signo igual.

a) -6^2= (-6)X(6)= -36

b) $(-6)^2$= ***6 X 6***= 36

=

Ao. “El resultado de $(–6)^2$ es igual a 36 y como lo interpreta la calculadora es (-6)X-6= 36”

Lo agrega en el pizarrón como se indica

a) -6^2= (-6)X(6)= -36

b) $(-6)^2$= *6 X 6*= 36

= ***(-6)X-6***= 36

Concluyen otro posible procedimiento que la calculadora hace para la misma expresión $(-6)^2$.

Es decir: $(-m)^2 = (-m) \times -m$

Con esto, también:

$(-m)^2 = m \times m = (-m) \times -m$

Mo. “Ahora pongan en la calculadora lo que puso su compañero (-6)X-6 y denle enter y vean si da esto (señala el 36)”

Aa. “¡También puede salir sin el paréntesis!”

Mo. “Ponlo en el pizarrón, dice su compañera que también sale de otra manera”

Aa. “-6X-6= 36 (lo anota en el pizarrón)”

$$\begin{aligned} a)\ & -6^2 = (-6)X(6) = -36 \\ b)\ & (-6)^2 = 6\ X\ 6 = 36 \\ & = (-6)X\text{-}6 = 36 \\ & = \boldsymbol{-6X\text{-}6} = 36 \end{aligned}$$

Mo. “Ahora utilicen esas 2 expresiones, la de arriba y la de abajo (se refiere a las expresiones: (-6)X-6 y -6X-6)... en los dos les da 36 positivo muchacho”

Encuentran otra forma de proceder, que al realizarla en la calculadora, también da el mismo resultado.

Es decir:

$(-m)^2 = -m \times -m$

Con esto también se muestra que:

$(-m)^2 = m \times m = (-m) \times –m = -m \times -m$

Ao. “En las dos da, pero el correcto es el primero porque en el inciso b está encerrado entre paréntesis el –6, entonces, toda la multiplicación se tiene que encerrar al –6 igual, y luego pasar al cuadrado que ya es normal”

Aa. “Pero también sale la otra (se refiere a –6X-6)”

Mo. “En los dos casos sale, entonces fíjense, podemos mostrar un tercer caso...”

Ao. *“¡Si! también sale cuando los dos números están encerrados entre paréntesis (pasa y escribe en el pizarrón (-6)X(-6)= 36)”.*

También se anota en el pizarrón

a) -6^2= (-6)X(6)= -36

c) $(-6)^2$= *6 X 6*= 36

= *(-6)X-6*= 36

= *-6X-6*=36

= ***(-6)X(-6)*** = 36

As. “¡Si! (después de comprobarlo con la calculadora)”

Mo. “Su compañero dice que también sale si encerramos los dos números entre paréntesis, ¿será cierto eso?, niña...”

Aa. “Y también sale cuando por ejemplo tenemos -6X(-6) = 36...”

Mo. “A ver pásale al pizarrón, éste sería un quinto caso”

La alumna pasa al pizarrón y anota en el último renglón

a) -6^2= (-6)X(6)= -36

d) $(-6)^2$= *6 X 6*= 36

= *(-6)X-6*= 36

= *-6X-6*=36

= *(-6)X(-6)* =36

= ***-6X(-6)*** = 36

-6x(-6) también da 36, es decir, los 5 casos que están manifestando, en los 5 casos da el mismo resultado (se refiere a lo expresado en negritas)

a) $-6^2 = (-6)X(6) = -36$

b) $(-6)^2 =$ ***6 X 6*** $= 36$

$=$ ***(-6)X-6*** $= 36$

$=$ ***-6X-6*** $=36$

$=$ ***(-6) X (-6)*** $= 36$

$=$ ***-6X(-6)*** $= 36$

,¿observan la diferencia entre el inciso a y el inciso b?"

As. ¡Si!"

Muestran un ¡cuarto! y ¡un quinto procedimiento! que posiblemente realiza la calculadora y son los siguientes:

En general, los alumnos han descubierto cinco procedimientos para una misma expresión:

$\boldsymbol{(-m)^2} = m \times m = (-m) \times -m = -m \times -m = (-m) \times (-m) = -m \times (-m)$

Mo. "Niño"

Ao. "Si hay diferencia, porque en el inciso a sólo sale –36 y en el b no"

Mo. "¿Podríamos expresar de otra forma diferente para que me dé –36 o será el único y de A ver, cuál sería?"

Ao. "¡Sí maestro!"

Mo. "Díctale a tu compañero..."

Ao. "$-6^2 = -6 \, X \, 6 = -36$ (el alumno le dicta a su compañero para que lo anote en el pizarrón)"

Mo. "Fíjense, ahí no ocupa ningún signo de paréntesis y también sale –36"

Ao. "*Pero es porque ocupó el –6*"

Mo. “Lo que estoy mostrando es que puede llevar el paréntesis o puede no llevarlo, ¿habrá otro caso?... muchachas”
As. “*6X(-6)= -36* (muestra una de ellas la pantalla de la calculadora al maestro)”
Mo. “Dicen sus compañeras que el segundo número debe llevar paréntesis”
As. ¡Si, si sale!”
Aa. “*No importa el orden, el paréntesis puede ir en el primer número o en el segundo*”

Observan que la expresión -6^2, también tiene diferentes procedimientos; éstos son:
$\boldsymbol{-n^2} = (-n) \times (n) = -n \times n = n \times (-n) = (n) \times (-n)$
Esto es, muestran cuatro procedimientos diferentes para una misma expresión.

CONTINUACIÓN

Mo. “Anoten en su hoja de trabajo: -4^2 y $(-4)^2$, ¿sale lo mismo?, ¿en cuál sale positivo, y en cuál sale negativo, o bien, en los dos sale positivo , o en los dos sale negativo?, niña...”
Aa. “En -4^2 sale -16 y en $(-4)^2$ sale positivo”
Mo. “¿A alguien le salió algo diferente?”
As. “No”

¡Sorprendente!, sin usar la calculadora contestaron correctamente.

Mo. “Su compañera colocó -6^4 y $(-6)^4$, ¿qué salió en la calculadora?
Ao. “En el primero negativo y en el segundo positivo”
Mo. “¿Será cierto?”

Ao. "*Sí, yo creo que sale así porque cuando está entre paréntesis no pone el signo negativo, y cuando no tiene el paréntesis toma en cuenta el signo negativo*"

Excelente conclusión pero a medias, porque cuando está entre paréntesis, sólo es positivo cuando el exponente es par; cuando no hay paréntesis, efectivamente siempre es negativo.
Desde luego ya se tuvo el tiempo para explorar la primera parte cuando el número tiene paréntesis.

Mo. "Muy bien, pasemos al ejercicio 4, niña..."
Aa. "¿Qué debes escribir en la calculadora si quieres elevar menos siete al cubo?"
Mo. "¿Qué pusieron?, niña..."
Aa. "Yo puse –7 la tecla ^ y luego 3"
Mo. "Bien, su compañera puso –7 ^ luego 3, ¿qué les dio como resultado en la hoja?"
As. "¡Negativo!"
Mo. "Bien, punto número 5"
Ao. "¿Qué debes escribir en la calculadora si quieres restar 6 al cubo de 100?"
Mo. "¿Qué hiciste tú?"
Ao. "Puse en la calculadora 216-100 y me dio como resultado 116"
Mo. "¡Y te dio ese número? (se refiere al –116)"
Ao. "No"
Mo. "Niña, ¿tú que pusiste?"
Aa. "Puse 100-6 la tecla ^ y luego 3"
Mo. "A ver ponlo en el pizarrón

Coloca en el pizarrón lo siguiente

100-6 ^ 3

¿Eso pusieron?, en ese ejercicio $100-6^3$ al darle enter da -116"

As. "¡Sí, no! (la opinión está dividida, pero se ve en el video que no lo habían hecho en la calculadora)"

Mo. "A ver háganlo para ver si es cierto"

Ao. "Yo vi que cuando ponemos 6^3-100 el resultado sale 116, y cuando ponemos primero el $100-6^3$ el resultado sale –116, ¡negativo!"

Mo. "¿Y en la hoja qué me pide +116 ó -116?"

As. "¡Piden –116!"

Mo. "Entonces, ¿es correcto lo que puso tu compañera en el pizarrón?"

As. "¡Si!"

Se dan cuenta que en la resta no existe la propiedad conmutativa, el resultado es diferente.

Mo. "Muy bien, siguiente, niño..."

Ao. "Número 6. Haz las siguientes operaciones sin usar la calculadora"

Mo. "Sin usar la calculadora, ¿quién me dice el inciso a?"

Ao. "$-5^2= -25$"

Mo. "¿Correcto?"

As. "¡Si!"

Aa. "Yo tengo una observación, en el inciso d y en el e (las expresiones son: -4^3 y -2^6, respectivamente), son el mismo resultado. Si cambio los números, el 4 por el 2 y el 3 por el 6, nos da el mismo resultado"

Mo. "¿Tu crees que haya otro par de números que tenga el mismo resultado como el caso de esos incisos?"

Aa. "Sí, por ejemplo $–6^6$ y -3^3"

Mo. "¿Crees que te da el mismo resultado?"

Aa. "¡Si!"

Mo. "Háganlo en la calculadora y díctenle a su compañera el resultado"

Aa. “para -6^6 = -46656 y para -3^3 = -27”

Mo. “Bien, ¿saldrá para cualquier número, o ahí cambió, o qué pasó?”

Aa. “Lo que pasa es que me equivoqué”

Ao. “Maestro, no le salió porque el inciso a es -4 a la 3ª potencia, si fuera a la 2ª potencia sí le saldría con un número par, pero como es impar por eso no le sale”

Mo. “Tú crees que con los pares saldría, con qué ejemplo saldría”

Ao. “Si puede salir pero las potencias van al revés”

Mo. “A ver cámbialas, cómo sería (le dice a una alumna que está escribiendo en el pizarrón y escribe -6^3 y -3^6)... calculen esas potencias en la calculadora”

As. “¡No da! (se refieren a que no da el mismo resultado)”

Mo. “A ver, ¿cuáles son los resultados?”

Aa. “Para -6^3 = -216 y para -3^6 = -729”

Mo. “Ahora están bien colocados los exponentes, ¿los resultados dieron lo mismo, o no?, niña”

Aa. “Lo que pasa es que tienen que ser números pares”

Mo. “¿Qué ejemplos darías?”

Aa. “ –4 a la 2ª potencia y -8 a la 4ª potencia”

Ao. “¡No!, así saldría más (se refiere al –8 elevado a la 4ª potencia)”

Mo. “Sería ocupar los mismos números ¿no?, el que está como base (señala al –4 y al –8) ponerlo como exponente, y el que está como exponente cambiarlo como base.

Anota en el pizarrón lo siguiente:

-4^2 y -2^4

Bien, ahora cuánto es -4^2 y -2^4”

Ao. “-4^2 = -16 y -2^4 = -16 también”

Mo. “Esos números no eran el inciso d y e”

As. “¡No!”

Mo. “Veamos otro ejemplo, ¿cuál pondrías tú?”

Ao. " -10 elevado a la quinta y, luego –5 elevado a la 10ª"

Mo. "Bien, , obtengan esos datos en la calculadora, niño -10^5"

Ao. "$-10^5 = -100, 000$"

Mo. "¿En la otra nos da -100, 000?, niña -5 a la 10ª"

Aa. "-5 a la 10ª potencia es -9, 765, 625"

Mo. "Es decir, ¿nos dio el mismo resultado?"

As. "No (como sacados de onda)"

Mo. "¿Será que esto sucede sólo en números pares?"

As. "¡Si!"

Ao. "No, lo intenté con número pares y no me dio"

Mo. "Intentaste con números pares y no te dio, ¿qué números pusiste?"

Ao. " –12 a la 8ª potencia y, luego -6 ..."

Mo. "¡No!, sería -8 ¿no?, en este caso a la 12ª potencia. Vamos a ver si sale lo mismo, ¿cuánto es -12 a la 8ª potencia?"

Aa. " –429, 981, 696"

Mo. "¿Es los mismo, o no es lo mismo?"

Ao. "*En ese caso el 8 no es par del 12 (ha de querer expresar que el 12 no es múltiplo de 8*)"

Ao. "No sale de cualquier modo... (señala otro alumno)"

Mo. "¿Tu crees que no sale con otros números (le dice a la alumna)"

Ao. "Es en algunos casos"

Mo. "Entonces, ¿habrá sido coincidencia en el inciso d y e?"

Ao. "Podrá ser en algunos casos"

Mo. "Tal vez en algunos casos"

Ao. "Como por ejemplo en lugar de -4^2 y -2^4, si se cambia -4^{10} y -2^{20} saldría el mismo resultado"

Hay una parte que no se grabó, pero se continúa con otro ejemplo.

Mo. “A ver ponlo abajo (le dice a una niña para que lo anote en el pizarrón y van a calcular -4^4 y -2^8)”

As. “¡Sí maestro!”

Mo. “¿Da lo mismo?”

As. “¡Si!”

Mo. “Niña...”

Aa. “-256 sale en los dos”

Mo. “En los dos casos da –256”

Ao. “O sea es en algunos casos y se tiene que llevar por el doble o la mitad”

Mo. “Se tiene que llevar por el doble la potencia (mejor dicho el exponente)...”

Al revisar las 6 potencias, los alumnos no muestran ningún problema.

Observan que dos potencias con diferentes bases y diferentes exponentes tienen el mismo resultado. Intentan hallar alguna relación entre base y exponentes; las primeras conjeturas que hacen son:

- *Cambiar las bases y exponentes.*
- *Base negativa y exponente positivo con igual valor absoluto.*
- *Invirtiendo el exponente del primero como base pero negativo y la base del primero como exponente pero positivo.*
- *Tanto la base como el exponente, deben ser números pares.*
- *El profesor, orienta, ocupa los mismos números, tanto la base como el exponente pero que sean pares.*
- *Experimentan los alumnos usando los mismos números, pero utilizan números pares e impares.*
- *Señalan que la base del primero, debe ser múltiplo o bien, divisor de la base del segundo, pero usando sólo números pares.*

Faltó poco para llegar a una generalización de 2 potencias diferentes que tengan el mismo resultado, sólo un caso particular.

Es decir, 2 potencias diferentes tendrán el mismo resultado, si la base de uno es -2 y la base del otro es –4, pero además, si el producto de la base con su exponente respectivo, son iguales.

Esto es: $\boldsymbol{-4^{n} = -2^{4n \div 2} = -2^{2n}}$

CONTINUACIÓN

Mo. “La vez pasada les dejé de tarea que revisaran los números que elevados a una determinada potencia dieran el mismo resultado... niña pásale, su compañera va a dictar unos números que encontró, de tal manera que elevados a una determinada potencia les da el mismo resultado, adelante...”

Aa. “4 elevado a la 4ª potencia (una alumna está anotando en el pizarrón)”

Mo. “Igual”

Aa. “A 256”

Mo. “Chequen si da ese resultado”

Aa. “2 elevado a la 8ª potencia igual a 256”

Mo. “Muy bien, esto era lo que estábamos revisando la clase pasada... niña, ¿tienes otro ejemplo?, díctalo”

Aa. “2 a la 4a potencia da 16 y 4 a la 2ª potencia también da 16”

Mo. “Muy bien, ¿alguien tiene otro ejemplo?”

Aa. “3 a la 4ª potencia da 81 y 9 a la 2ª potencia, igual da 81”

Mo. “A ver por ejemplo, el último, ¿es como los que estábamos buscando?, ahí no se invierte el exponente con la base, como en el primer ejemplo. A ver quién tiene otro ejemplo... niña”

Aa. “2 a la 6ª potencia da igual a 24 y, 4 a la 3ª potencia también da igual a 24 (aquí hubo un error, el resultado es 64, y no 24)”

Mo. “Bueno ahí ustedes estaban buscando números que dieran igual (se refiere al resultado de las potencias), pero no están invirtiendo el exponente y la base”

Ao. "¡No sale eso!, ¡sale 64!"
Ao. "Sí está bien pero sale 64"

El ejemplo que muestra la alumna, cumple la generada intuitivamente por ellos, ya que las bases son 4 y 2, y los exponentes son 4 y 8 respectivamente; así al multiplicar la base con su exponente, en ambos da el mismo resultado, que es 16, y por lo tanto, el resultado de las potencias, son iguales, 256. Ejemplo de esto, es lo mostrado por los alumnos: 2^4 y 4^2; 2^6 y 4^3.

No sucede lo mismo con las primeras potencias 3^4 y 9^2, así como con 4^6 y 8^4, de entrada las bases son diferentes de 2 y de 4. Aquí faltaría obtener la regla general de cada caso.

Ao. Maestro, ya encontré otro número: 4 elevado a la 6ª potencia da como resultado 4096, y 8 elevado a la 4ª potencia, también me da 4096"
Mo. "Muy bien da el mismo resultado. Vamos al siguiente punto, actividad número 7..."
Aa. "Usa la calculadora para revisar las respuestas que diste en el inciso 3. ¿cuántos aciertos obtuviste?"
As. "Ninguno (según ellos ninguno)"
Mo. "Bien, número 8..."
Aa. "La siguiente actividad es un juego. Las operaciones ya están hechas sólo le falta el signo. El juego consiste en que encuentres el signo del resultado sin hacer ninguna operación con los números. Escribe el signo del resultado en el espacio correspondiente"
Mo. "Niña..."
Aa. "-5^3 = a menos 1125"
Mo. "¿Es negativo?"
As. "¡Si!"
Mo. "Inciso b, niño..."

Ao. “$(-3)^6$ = 729 ¡positivo!”

Mo. “Inciso c, niña...”

Aa. “$(-9)^5$ = da negativo”

Mo. “Correcto niños”

As. “¡Si!”

Mo. “Inciso d...”

Aa. “-7^8 salió negativo (da la impresión que lo hizo primero con calculadora)”

Mo. “¿Negativo?”

As. “¡Si!”

Mo. “Bien niña”

Aa. “$(-8)^4$ sale positivo”

As. “¡Si!”

Mo. “¿Hay inciso f?... niña”

Aa. “$-(-5)^4$ es igual a negativo”

Mo. “¿Da resultado negativo?. Bien, siguiente punto niño”

Ao. “Usa la calculadora para revisar las respuestas que diste en el inciso 8. ¿Cuántos aciertos obtuviste?, ¿cometiste algunos errores?. Sí , ¿en qué te equivocaste? *Pensé que cuando había paréntesis siempre salía positivo*.

En esta actividad, de poner sólo el signo, los alumnos muestran cierto dominio, a excepción del último inciso, el signo negativo que precede al paréntesis cambia lo que los alumnos ya habían comprendido, por eso un alumno dice: pensé que cuando había paréntesis siempre salía positivo.

Mo. “Tú pusiste que cuando hay paréntesis siempre sale positivo, y ya te diste cuenta que no siempre sale positivo”

Ao. “Puede salir positivo o negativo”

Mo. “¿De qué depende que salga positivo o negativo... niña”

Aa. “¿Puedo pasar al pizarrón?”

Mo. "¡Sí!, fíjense lo que va a decir su compañera, posiblemente sea algo que nos pueda ayudar a deducir cuándo el resultado va a salir positivo o negativo. Su compañera pone $(-3)^6$ y $(-9)^5$ (anota estas potencias la alumna en el pizarrón). Sólo que un resultado le da positivo y otro negativo...

EN EL PIZARRÓN PUSO:

$(-3)^6= 729$ $(-9)^5= -59049$

... ¿por qué crees niña?"

Aa. "Aquí para que me pueda salir positivo este (señala al –3 ó a la base) tiene que tener su número duplicado que es el 6; y aquí no me puede dar positivo porque el número 9 no tiene su duplicado que sería 18"

Al intentar saber si el resultado es positivo o negativo en una potencia cuya base está entre paréntesis (donde el número puede ser negativo), una alumna hace sus primeras conjeturas relacionando la base con su exponente, en el primer ejemplo $(-3)^6$, dice que es positivo porque el exponente es el doble de la base; y en el segundo ejemplo $(-9)^5$, es negativo el resultado porque esta relación no se da.

Mo. "Tú crees eso, bien... ¿están de acuerdo con su compañera?"

As. "¡Si! (pero no convencidos)"

Mo. "Bueno, anoten todos: (-4) lo van a elevar a la 4ª potencia, según lo que dijo su compañera, ¿el resultado va a ser positivo o negativo?"

As. "¡Positivo!"

Mo. "¿Qué número les da?"

As. "256"

Mo. "Bien, ahora (-4) elevado a la 5ª potencia, ¿el número será positivo o negativo?"

As. ¡Negativo!”

Mo. “¿Cuál es el resultado?”

As. “-1024”

Mo. “Pon el siguiente... (le dice a la alumna que está escribiendo en el pizarrón) si yo quiero que me dé como resultado –64, y si la base es (-2), ¿a qué potencia debe estar elevada?”

Ao. “Debe ser a la 6ª”

Mo. “Debe ser a la 6ª, ahora háganlo en la calculadora $(-2)^6$ les dio”

Ao. “64 positivo”

Mo. “Ya tienen el procedimiento para saber cuándo un número negativo que esté dentro de un paréntesis lo eleve a una determinada potencia, saber cuándo siempre va a ser positivo y cuándo siempre va a ser negativo... niño”

Ao. “*Por ejemplo, si el número -2 lo elevamos a un número equivalente: 2, 4, 6, 8... (quiere decir múltiplo de 2, o bien par), va a salir positivo*”

Se muestra la generalización en forma verbal del signo del resultado de un número negativo elevado a una potencia determinada (exponente natural).

Mo. “Uno del equipo pasa y anota esos números, otro dicta...”

Ao. “$(-2)^4$= a 16”

Mo. “Bien, ahora quiero que me digas cuándo va a salir negativo”

Ao. “*Con un número que no va a ser equivalente (quiere decir que no es múltiplo de 2), por ejemplo (-2) elevado a la 3ª potencia*”

Ao. “El resultado es menos 8 (dice otro alumno)”

Mo. “Bien, lo quiero más general, su compañero ha puesto sólo algunos ejercicios, quiero que me digan para qué números o cuándo siempre va salir positivo o negativo... niña”

Aa. “*Para que el resultado salga negativo, ... este... el número de la potencia (el exponente) debe ser impar; y para que salga positivo, debe ser número par*”

Es grato observar las conclusiones de los alumnos; una de las alumnas lo dice muy claro y concreto: Para que el resultado salga negativo, la potencia (el exponente) debe ser impar; y para que salga positivo, debe ser número par.

En términos matemáticos quedaría de la siguiente manera:

$(-x)^{2n}$ *= positivo*

$(-x)^{2n-1}$ *= negativo*

Mo. "¿Ya lo comprobaste con algunas potencias?"

As. "¡Sí! (dice al unísono un equipo)"

Mo. "Podrían pasar al pizarrón,... y los demás van a comprobar para verificar lo que dijeron sus compañeras"

Pasa una alumna al pizarrón a escribir algunos ejemplos que tiene en su calculadora, pero antes le muestra la pantalla al maestro

Mo. "Su compañera va a anotar $(-2)^6$ (lo dice en voz alta)"

Ao. "Va a salir positivo (dice de inmediato)"

Mo. "¿Por qué va a salir positivo?"

Ao. "Porque es número par, y par con par sale positivo (se refiere a la base y al exponente)"

No le ha quedado clara la generalización que dio su compañera en la actividad anterior, ya que su justificación de que el resultado es positivo porque tanto la base como el exponente son pares, si bien es correcta, también es limitada.

Mo. "Pero a ver pon $(-3)^6$ en tu calculadora, ¿qué va a salir?"

As. "¡Positivo!, ¡sale igual!"

Mo. "Niña"

Aa. “Tiene razón, si es número par va a salir positivo; y si es número impar, es negativo”

Mo. “Los exponentes”

Aa. “¡Si!”

Mo. “Su compañera va a poner unos ejemplos (la alumna anota en el pizarrón (-9) elevado a la 9ª potencia)... $(-9)^9$ ¿qué debe salir, positivo o negativo?”

As. “¡Positivo!, ¡negativo!, ¡negativo porque no es par! (se oye simultáneamente)”

Mo. “¿Habrá un número negativo que elevado a un exponente impar me dé como resultado un número positivo?, o ¿todos me van a dar positivos?, o ¿todos me van a dar negativos?”

Una alumna muestra al profesor su calculadora y en la pantalla se observa lo siguiente:

$$(-4)^5 = -1024$$
$$(-2)^3 = -8$$
$$(-2)^4 = 16$$
$$(-7)^5 = -16807$$
$$(-4)^2 = 16$$

Mo. “¡Bien niña! (otra alumna levanta la mano para explicarle lo que observó en su calculadora después de hacer algunas potencias en su calculadora y le da la palabra)”

Aa. *“Como el número al que se va a elevar la potencia es positivo (quiere decir par, y señala el exponente 6 de la expresión* $(-2)^6$*) el resultado es positivo (le muestra su calculadora). Y aquí como el número que se está elevado la potencia es negativo (quiere decir impar y señala el exponente 9 de la expresión* $(-9)^9$*), el resultado es negativo. Y aquí tengo más ejemplos... (le muestra al profesor su calculadora y en la pantalla se observa lo siguiente)”*

$$(-2)^{12} = 4096$$
$$(-2)^{9} = -512$$
$$(-9)^{9} = -387420489$$
$$(-3)^{12} = 531441$$
$$(-3)^{6} = 729$$

La pantalla de la calculadora muestra una de sus ventajas, esto es permite ver claramente varios resultados al mismo tiempo, en este caso cuando los exponentes son impares, el resultado es negativo; y cuando los exponentes son pares, el resultado es positivo.

Mo. "Se observa bien que los exponentes pares da como resultado un número positivo y los exponentes impares los resultados son negativos. Muy bien"

Vuelven a reafirmar la generalización a través de otros ejemplos que los alumnos comprueban con la calculadora.

5.7 Descripción de la sesión 7

En esta última sesión, se abordó la lección "Relación de orden de números con signo". Para el desarrollo de esta hoja de trabajo, se organizó al grupo en equipos de cuatro alumnos y a cada uno de los alumnos se les repartió una hoja de trabajo y dos calculadoras TI-92. Se inició dándole lectura a la hoja.

Ao. "Relación de orden de números con signo. De cada pareja de números, encierra el número que consideres mayor"

Mo. “Si quieren usar la calculadora úsenla si creen que les va a servir de algo”

Después de un tiempo se procede a revisar y el profesor le pide al alumno de respuesta a un inciso.

... Tú muchacho, inciso d”

Después de un tiempo, se procede a revisar esta primera parte y se observa que en algunos incisos no presentan problema, sin embargo llaman la atención otros.

Ao. “Es –1/2 y 0”
Mo. “¿Cuál de los dos es más grande?”
Ao. “El cero”
Mo. “¿Por qué? (se dirige a una alumna)”
Aa. “... (se queda pensando)”
Mo. “Victoria, tú dijiste que el cero es más grande, ¿por qué?”
Aa. “Porque si le sumamos ½ a -½ da cero”

Realiza sus primeras conjeturas para explicar por qué es mayor el cero que un negativo.

Mo. “Y... si sumamos ½ a cero me da ½... (se quedan pensando los alumnos), niño...
Ao. “-1/2 es un número negativo y el cero es positivo, y siempre que haya número negativo, el positivo es mayor”

Considera al cero como positivo, aun cuando es un error, le queda claro que un positivo es mayor que un negativo.

Mo. “Su compañero dice que el cero es positivo, ¿el cero es positivo?”

Ante la polémica de si el cero es positivo o negativo, se consensa de que el cero es un número que no tiene signo, ni positivo, ni negativo sino neutro, como lo señaló un alumno más adelante.

As. “¡No!, ¡No es ni negativo ni positivo!, ¡es negativo! (contestan simultáneamente varios alumnos)”
Mo. “Entonces, qué es, ¿es negativo?”
Ao. “Es neutro”
Aa. “Un procedimiento para saber cuál es mayor, sería sumar dos veces cada uno de los números (se refiere a cada pareja, en este caso –1/2 y 0)”

Otra conjetura para saber qué número es mayor, es sumar por sí mismo ambos números por comparar, sin embargo, no es consistente, no hay claridad.

Mo. “En el caso de –1/2, ¿cómo sería?”
Aa. “Sumar en la calculadora –1/2+-1/2 y me da cero (hay un error, no da cero sino –1)”
Mo. “¿Y el cero?”
Mo. “¿Cuál es mayor? (la alumna se queda pensando, sabe que su explicación no es consistente). Niño...”
Ao. “Yo digo que el cero es mayor, si por ejemplo si tengo el 1000, el –1/2 está más lejos del 1000 que del cero, por eso el cero es más grande”

Otra conjetura. Dado un número mayor (1000) a los que se comparan, en este caso el –1/2 y 0, el que está más lejos (si nos apoyamos en la recta numérica) es más chico, por ende el que está más cerca de dicho número, es *mayor. Curiosamente esta situación se cumple si comparamos dos números positivos.*

As. "¡Ya acabamos! (dice un equipo)"
Mo. "¿El cero no tiene valor?"
As. "¡No!"
Mo. "¿Y el –1/2 no tiene valor?"
Ao. ¡Sí!"
Mo. "¿Qué valor tiene –1/2, más o menos que el cero?"
Aa. "-1/2 vale menos"

Identifican que un número negativo tiene menor valor que el cero.

Mo. "¿Creen que –1/2 tiene más valor que cero? Si te digo, sabes muchacho sacaste –1/2 de calificación, en lugar de cero, van a decir: ¡ah! saqué más valor con –1/2 que con cero... niño"
Ao. "Como decía Emilio hace rato, el cero es mayor, porque es el que se acerca a un número positivo, y un positivo siempre va a ser mayor que un negativo"

Justifican, por qué el cero es mayor que un negativo, y la razón es que está más cerca de los positivos.

Mo. "Fíjense, el cero se acerca más a los positivos, ¿y el –1/2?, ¿Quién de los dos números está más cerca de los positivos, -1/2 o el cero?"
As. "¡El cero!"
Mo. "Bien, buenos razonamientos. Siguiente inciso"
Aa. "-3.9 y –1"
Mo. "-3.9 y –1, ¿quién es más grande según ustedes?"

En el sentido estricto sería un error hablar de números grandes y pequeños, sin embargo ya establecimos un código, nos referimos a mayor o menor valor.

Aa. “-1, porque el –1 se acerca más a los positivos que el –3.9”

Bajo la justificación anterior, la respuesta que dan ante la comparación de dos negativos, su razonamiento es correcto al decir cuál es mayor con seguridad.

Mo. “La respuesta es similar al –1/2 y al cero. El inciso que sigue... niño”
Ao. “-11/12 y –7/8, y yo puse que es mayor el –11/12”
Ao. “¡No es cierto es –7/8 (le dice su compañero de equipo al que dijo –11/12)”
Mo. “¿Por qué es mayor –7/8”
Ao. “Porque está más cerca de los positivos”

Faltó preguntar cómo sabía que estaba más cerca del cero.

Mo. “Bien, siguiente inciso”
Ao. “-3 y –2, el –2 es mayor...”
Mo. “¿Por qué?”
Ao. “*Porque es como si tuviéramos un entero y si le quito –2, quito menos; si quito –3 quito más, por lo tanto, es más grande –2*”

Otra manera de explicar cuál es mayor, pero creo que es bajo la primera justificación (porque está más cerca del cero, y el cero de los positivos)

Mo. “Bien, siguiente inciso... muchacha”
Aa. “-1 y –3/4, el mayor es...”

Mo. ”¿Quién es más grande?”
Ao. “-3/4 es más grande”
Mo. “¿Por qué –3/4 es más grande?”
Ao. “*Porque entre más chico es el número negativo, es más grande, pero sólo aplica a números negativos*”

Excelente justificación, pero además la limita sólo a números negativos, ya que sabe muy bien que esto no aplica en los positivos. Es decir, comienzan a darse cuenta que cuando se comparan dos números, la estructura de los números positivos, se invierte cuando se habla de números negativos.

Mo. “Eso, sólo se aplica entre números negativos; es una nota importante lo que acaba de decir su compañero. Si yo combino (si comparo) un número positivo y un número negativo, ¿coincide (aplica) con lo que acaba de decir su compañero?”
As. “¡No!”
Mo. “No verdad, bueno pues abusados porque nada más aplica en los números negativos. Bien, siguiente inciso... chavo”
Ao. “*3.6 y 6.3, el mayor es 6.3 porque son números positivos, entonces, el 6 es mayor que el 3*”

Aquí es e un ejemplo de lo señalado arriba, pero sólo comparando positivos.
Mo. “¿Cómo son con respecto al cero?, ¿Quién es más grande el 3 o el 6?”
As. “¡El 6!”
Mo. Abusados, siguiente inciso, niña...”
Aa. “-3.6 y -6.3, el mayor es –3.6”
Ao. “*Porque ahí se aplica lo que dijo Alexander, en 2 números negativos mientras menor sea el número, es más grande o mayor*”
Mo. “Vámonos al punto número 2. Ya lo resolvieron la mayoría... ¿no?, lo van a resolver con ayuda de la calculadora...

No grabé la respuesta, sin embargo, en la hoja de trabajo hubo dos alumnos que respondieron en forma excelente.

Ante la pregunta ¿de qué manera podrías usar la calculadora para verificar tus respuestas de la primera actividad?, encontramos lo siguiente:
Poniendo un número entero mayor que la pareja de números e ir restando uno y luego el otro número (los números que se están comparando) y cuando quede más grande el entero (o bien, ha de ser tan general el resultado), ese es el número más grande (el alumno puso el más grande, pero debe ser, el más chico). Por ejemplo, si tomamos los números del inciso "f" quedaría así:
10 es un número mayor a ambos números a comparar, entonces se ingresan a la calculadora los siguientes datos:
10 – (-11/12) = 10.91
10 – (-7/8) = 10.87

Podemos ver que 10.87 es más chico que 10.91, por lo tanto, -7/8 es mayor que –11/12.
Esta respuesta es excelente.

Esta es otra justificación más consistente y de alguna manera general, quedando de la siguiente manera:
Si a es positivo y
m, n negativos, entonces:

$a - (-m) = +p$
$a - (-n) = +q$

Si $p < q \rightarrow -m > -n$.

Pero

Si p > q → -m < -n

Lo que me llamó la atención es que esto ¡lo concluyeron con la ayuda de su calculadora!.

Mo. Punto número 3, dime el punto número 3 niño...”

Ao. De las parejas del ejercicio 1, al número que consideraste como mayor, réstale el otro. Realiza las operaciones con tu calculadora y compara las respuestas con otros compañeros.

Del inciso a, lo resté y me da 2 (el inciso a los números son 8 y 6)”

Mo. “El inciso b (dice como pidiendo la respuesta a éste inciso)”

Ao. “¡Da 2 también!”

As. “¡No! ¡Sí! (se dividen las opiniones)”

Mo. “Niño, el inciso b (vuelve a repetir el mismo inciso, se da cuenta que algo anda mal)”

Ao. “Dos (un poco seguro)”

As. “¡Da dos maestro!”

Mo. “Niñas, ¿ustedes qué pusieron? (se dirige a otro equipo que no se ven convencidos con el 2 positivo)”

Aa. “-2”

Mo. “-2, ¿eso les dio en la calculadora?”

As. “¡Si!”

Mo. “A ver, ¿qué pusieron en la calculadora?”

Aa. “-9 - -7 da –2”

Algunos alumnos todavía muestran dificultad para identificar entre dos números negativos, cuál de ellos es mayor.

Mo. “A ver, ellas pusieron –9 - -7, ¿qué pasó con ellas?, ellas tomaron el primer número (o sea el –9) ¿como mayor o como menor?”

Aa. “Como menor (dice una alumna de otro equipo)”

Mo. “Ustedes tomaron a –9 como mayor, y –9 no es mayor que –7, de acuerdo...”

As. “Si (sólo con la cabeza)”

Mo. “Niños de aquel lado, inciso c”

Ao. “2.05 menos 2.10, el resultado es –0.05”

Mo. “¿Positivo o negativo?”

Ao. “Positivo”

Ao. ¡Es negativo! (contesta otro alumno de otro equipo)”

Mo. “A ver niños, hay un alumno que dice que es positivo y otro, que dice que el resultado es negativo”

Ao. “*Todos son positivos* (dice otro alumno de otro equipo)”

Este alumno identifica claramente el número que es mayor, de entre cada pareja de números propuesto.

Mo. “A ver niños, su compañero dice que todos son positivos, ¿será cierto?”

As. “¡Sí! ¡No! (se dividen las opiniones)”

Mo. “¿Cuál sale negativo?”

Ao. “El inciso e”

Mo. “Fíjense en el inciso e, ¿qué números son muchacho?”

Ao. “-3.9 y –1”

Mo. “¿Cuál de los dos tomaste como mayor?”

Ao. “El –1, y puse en la calculadora –1-3.9”

Mo. “¿El resultado es positivo o negativo?”

Ao. “Negativo”

Aquí muestran estos alumnos del equipo, un error al ingresar los datos en la calculadora, y de alguna manera confían en ella, ya que no se dan cuenta que de esta manera estarían haciendo una suma y no una resta.

Mo. “¿Qué te sale?”
Ao. “-4.9”

Aquí se observa claramente que hicieron una suma. Es decir omitieron el signo menos de la operación.

Mo. “A ver, opriman en la calculadora -1- -3.9, a ver, aquel equipo, ¿cuánto sale?”
As. “Sale 2.9”

En efecto, entonces el mayor de los números –1 y –3.9, es el número –1.

Mo. “¿Positivo o negativo?”
As. “Positivo”
Mo. “¿Qué pasó? (revisan y se dan cuenta que el mayor es en realidad –1, pero les faltaba el signo menos de la operación)”
Aa. “El inciso d, también sale negativo, ¿no maestro? (los números a comparar son 0 y –1/2)”
Mo. “A ver el inciso d, niñas allá atrás, usando la calculadora realicen la resta del inciso d. ¿Cuál consideraste como mayor niño?”
Ao. “El cero”
Mo. “El cero..., pónganle en la calculadora 0 - -1/2, ¿qué les sale?”
As. “¡Positivo!”
Mo. “*Su compañero dice que todo sales positivos*, ¿es cierto?”

El mismo alumno insiste que todos los resultados son positivos.

As. “¡Sí! ¡No! (se dividen opiniones)”

Aunque algunos tienen problemas en identificar al número mayor ya que dicen que no todos son positivos.

As. “¡Sí! ¡No! (se dividen opiniones)”

Aunque algunos tienen problemas en identificar al número mayor ya que dicen que no todos son positivos.

Ao. “A ver en el inciso f, tenemos los números –11/12 y –7/8, ¿cuál de los dos es mayor?”
As. “¡-7/8!”
Mo. “Coloquen en la calculadora -7/8 - -11/12, ¿qué te dio en la calculadora?”
Ao. “1/24 y es positivo”
Mo. “Pero te dio positivo. *Dice un equipo, que en todas son positivos*”

Este equipo, de alguna manera aplica la definición de la relación de orden de números racionales, la cual dice lo siguiente:
Si m y n son dos números racionales cualesquiera, decimos que m > n, si y solo si, (m-n) es un número racional positivo.

As. “¡Sí!”

CONTINUACIÓN
Ao. “Un alumno comenta que si resta 8-6, el resultado es un número positivo, quiere decir que el 8, es mayor que el 6. Pero si realiza la resta al revés, es decir 6-8, el resultado es un número negativo, entonces 6 es menor que 8”

Mo. “¿Es cierto o falso?”

Ao. “Falso (pero me da la impresión que no entiende y sólo contesta por contestar)”

Mo. “¿Falso?... niña”

Aa. “¡Es cierto!”

Mo. “Tu compañera dice que es cierto, tú dices que es falso, ¿es cierto, es falso?, los demás ¿qué opinan?”

As. “¡Es cierto!”

Faltó pedirles su justificación

Mo. “Siguiente punto”

Aa. “Anota el símbolo más, menos o igual entre cada pareja de números según sea el caso”

Mo. “¿Quién conoce esos símbolos?, no se lee más, o menos, ¿cómo se lee?”

Ao. “¡Más que!, ¡Mayor que!, ¡Menos que!, ¡Menor que!, ¡Igual que! (dicen simultáneamente)”

No saben leer los símbolos de las desigualdades <, > , =.

Mo. “Pongan los símbolos entre cada pareja de números, pongan el símbolo que consideren correcto y luego revisamos”

Se observa el trabajo de los equipos y en uno se muestra las respuestas siguientes:

a) -17 > -20 b) –3/4 > -4/5 c) ¾ > 4/5 d) –3/4 < 0.8

e) –0.75 > -0.708 f) –4.5 < 0 g) ½ $\square$ -100 h) –11/12< -1/10

Posteriormente se procedió a revisar esta parte de la hoja. Al parecer no presentaban problemas, sin embargo, se procedió a revisar detenidamente el inciso e...

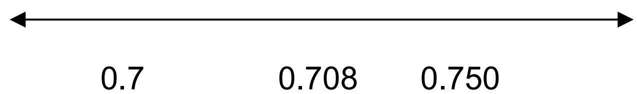
Se observan dos errores. En el c no visualizan que los dos son positivos y por tanto, el mayor es 4/5. En el inciso e no consideraron que ambos son negativos, y que por tanto, el menor es el más grande. En el g, tardaron para decidir, iban a poner al –100 como mayor, pero después pusieron que ½ es mayor que –100.

Aa. "-0.75 y -0.708, yo puse que es mayor –0.75..."
Mo. "Niño, si los dos números fueran positivos, ¿quién sería mayor?. Anota los mismos números pero positivos"
Aa. "*Maestro, lo que pasa es que en los decimales va a ser igual que con los números negativos, entre más números sean después del punto, menor es la cantidad*"

En este caso, la alumna va haciendo ciertas conjeturas y se observa que procede sólo para algunos casos, por lo tanto no podemos generalizar.

Ao. "¡No es cierto!"
Mo. "A ver chequen, si pongo el número como positivo, pondría 0.75 y 0.708, le agrego un cero al 0.75 para que visualicen que ambos números tienen 3 cifras decimales, entonces quedarían 0.708 y 0.750, ¿qué es mayor 0.708 y 0.750?"
As. "¡0.750!"
Mo. "Si yo ubicara al 0.750 en la recta numérica, ¿dónde lo pondría, a la derecha o a la izquierda de 0.708?"
As. ¡A la derecha! ¡A la izquierda!"

Mo. “En dónde pondrías los puntos en la recta numérica. A ver pon una recta numérica, ¿dónde pondrías el 0.7, dónde estaría el 0.75?, chequen la recta numérica (se observa la siguiente recta en el pizarrón, en ella ya está localizado previamente el punto 0.708)...



... Bien, ¿están bien localizados los puntos?”

As. “¡Sí!”

Mo. “Niña...”

Aa. “*En la calculadora me sale que el mayor es 0.750 y el menor 0.708 si son positivos; pero anteriormente aquí en la hoja, en el inciso e, como los números son negativos, la calculadora al número que toma como mayor es –0.708*”

La alumna le restó al mayor el menor, y es correcto porque el resultado fue positivo. Es decir:
a-b= positivo sí y sólo sí   a > b

Mo. “Bien, entonces ponme aquí quién es el mayor y quién el menor. Fíjense lo que está diciendo su compañera, no sé qué hizo en la calculadora, pero con signos positivos dice que es mayor el 0.75; pero en la hoja tenemos negativos y no positivos, entonces ponlo como debe ser, como dice la hoja...

La alumna escribe en el pizarrón: $-0.75 < -0.708$

... de acuerdo niños...”

Ao. "*Cuando son números positivos, mientras más alejado esté el número del cero, más grande es el número; pero en los negativos, mientras más cerca esté del cero, será más grande el número*"

Las reglas de los números positivos cambian en los negativos, en este caso se invierten

Con el otro inciso que manifestaron cierta dificultad fue el g. Veamos.

Aa. "1/2 y el –100 (le da lectura)"
Mo. ¿1/2 es mayor o ½ es menor?, ¿Quién es más grande ½ ó –100?"
Aa. "-100"
Mo. "¿Están de acuerdo?"
As. "¡No!"
Mo. "Niña, tú que opinas, ¿quién es más grande?"
Aa. "1/2"
Mo. "¿Por qué ½ es más grande que -100?, ¡Si un medio es la mitad de un entero!"
Aa. "*Es mayor ½ porque es positivo, y –100 es negativo*"

Al comparar dos números, uno positivo y otro negativo, la mayoría de los alumnos comprenden sin dificultad, que el mayor es el positivo.
Mo. "Simplemente por esa razón. ¿Oye y quién sería más grande si comparo 0.0001 con –100000?"
As. "0.0001"
Mo. "¿Por qué?"
As. "Porque es positivo"
Mo. "Último, -11/12 y -1/10, ¿quién es mayor?"

Ao. “*Yo puse –1/10, porque si los pasamos a números decimales, el -1/10 sale -0.1 y está más cerca del cero; y -11/12 sale menos 0.916667. Entonces el –0.1 está más cerca del cero*”

No visualizan con las fracciones, les es más fácil trabajar con decimales. Nuevamente al comparar dos negativos, identifican que el mayor es el que está más cerca del cero; para saberlo, el cero se ha convertido en un referente importante.

Mo. “¿Qué opinan los demás?”
Aa. “Yo tengo una observación sobre los incisos by c”
Mo. “¿Qué observas?...”
Aa. “Que en el inciso b son números negativos, y que en el c, son los mismos números pero positivos”
Mo. “Bien, qué más, síguele niña...”
Aa. “*Entonces cuando son negativos, el mayor es el que es el menor en los positivos*”

Mientras en los números positivos, el mayor es el que tiene mayor valor absoluto; en los negativos, el mayor es el que tiene menor valor absoluto.

Mo. “Muy bien, también está correcto lo que puso tu compañera, repítelo...”
Aa. “*Mientras en los números positivos uno es el mayor, cuando los convertimos a negativos, el mayor ya no es mayor, sino menor*”
De alguna manera aunque los alumnos no utilizan términos y/o conceptos matemáticos, el lenguaje que utilizan es claro, entendible y sobre todo razonado adecuadamente.

Mo. “Bien. Último punto, niña...”
Aa. “Ordena de mayor a menor las siguientes ternas de números”

Se da un tiempo y posteriormente se procede a revisar.

Mo. “Bien, me dictan los números, luego cuál es el mayor hasta mencionar el menor, ¿de acuerdo?”

No hubo gran problema al revisarlos a excepción del inciso c.

Ao. “Los números son –3, -1/3 y 0. Yo puse –1/3, -3 y luego 0”

Para este alumno no le queda claro cuál número es menor de los dos negativos.

Mo. “¿Será cierto eso, que primero va –1/3?”

As. “¡Si!”

Mo. “¿Quién está más cerca del cero, -1/3 ó –3?”

As. “-3”

Mo. “¿-3 está más cerca del cero?”

As. “¡No!”

Mo. “En la recta numérica, ¿quién está más cerca del cero?”

Ao. “-1/3 está más cerca del cero”

Mo. “Entonces, ¿quién es el menor de esos tres números?”

As. “-3”

Mo. “Luego a quién pondrían”

As. “-1/3”

Mo. “Por ultimo”

As. “¡Cero!”

Mo. “Último niña.

Aa. “-2/5, 1/3 y –5/8. El más pequeño es –5/8, luego el –2/5 y *el más grande es 1/3, sólo por ser un número positivo”*

Identifican de entre tres número, si dos de ellos son negativos y el tercero positivo, el mayor será el positivo, simplemente por eso.

Mo. “Simplemente por ser positivo. Eso es lo que deben concluir, de 3 números, si 2 son negativos y el otro positivo, el mayor es el positivo”

Ao. “Aunque sea 0.1”

Mo. “Si es 0.0000001”

Aa. “Va a ser mayor por ser positivo”

Mo. “Exacto”

CAPÍTULO 6
ANÁLISIS DE RESULTADOS

En este apartado se describirán los resultados que se obtuvieron al aplicar las hojas de trabajo al grupo 1° “C” (formado por 39 alumnos) de la Escuela Secundaria Diurna N° 90 del turno matutino ubicada en la Col. Moctezuma, en la Delegación Venustiano Carranza. Los temas abordados fueron: suma, resta, multiplicación, división, potenciación y relación de orden de números con signo; aquí se mostrará el análisis de las respuestas que dieron los alumnos ante las actividades, se describirán las dificultades que presentaron ante un contenido dado y las respuestas correctas que emitieron al respecto.

Hoja de Trabajo 1 “Suma de números con signo”

Al inicio de la hoja, se le pide al alumno que mencione algunas situaciones en las cuales pueden usarse los números con signo; los alumnos contestaron lo siguiente: en la calculadora (13 alumnos), en el uso de coordenadas (7 alumnos), no contestaron la pregunta (6 alumnos), para representar deudas o pérdidas (5 alumnos), en la operación de la resta (5 alumnos), en la escuela los maestros la usan para bajar puntos dicen ”menos uno” ó -1 y anotan en la lista (2 alumnos) y sólo un alumno dio un ejemplo sobre el uso de los números con signo en la temperatura.

Nótese que este resultado da información empírica sobre los efectos de usar la calculadora respecto a la familiarización de los estudiantes con los números con signo.

Después se pide sumar 2 números con signo usando la calculadora y se observa que 30 alumnos de 39 no tienen ningún problema al manipular la calculadora, es decir, al ingresar los datos en ella; 7 alumnos tuvieron error al no colocar el signo negativo, o sea, cuando se suman dos números negativos y no colocar el signo negativo. Dos alumnos tuvieron más errores al poner como resultado la diferencia entre un número negativo y otro, por ejemplo:

-30 + -50 = -20   ó   -5 + -7 = -2

Éstos ejemplos hacen suponer que no usaron la calculadora.

Este resultado sugiere enfáticamente que el uso de la calculadora no introduce dificultades para los estudiantes, es decir, que no es necesario consumir una gran cantidad de tiempo para instruirles cómo usar la máquina.

En el punto número dos se le pregunta al alumno *qué hace la calculadora para sumar un número negativo con un número positivo,* la mayoría (25 alumnos) sí identifica lo que hace la calculadora, sabe que realiza una resta; los demás alumnos (14 alumnos) no llegan a percibir esta situación.

Este resultado sugiere que el uso de la calculadora proporciona los estudiantes un ámbito en el que puede experimentar con conceptos y dominios numéricos que los estudiantes desconocen. Esto indica que la calculadora les permite, en el caso del estudio de los números con signo, abordar la matemática como una ciencia experimental, lo cual favorece que realicen "experimentos" diseñados por el profesor en los que ellos tiene claridad de qué es lo que se busca, una evidencia de esto es que pueden proponer y validar conjeturas que ellos mismos formulan.

Ante la pregunta *qué hace la calculadora para sumar un número negativo con otro número negativo,* la mayoría (27 alumnos) sabe que la calculadora realiza una suma, y el resto de los alumnos (12) no lo sabe.

Para responder la pregunta *qué hace la calculadora para saber qué signo le pone al resultado,* en general los alumnos no pueden expresar correctamente lo que la calculadora hace, sin embargo, uno de ellos expresa lo siguiente: “pone el signo del número que está más alejado del cero”, esto hace suponer que sólo es aplicable en la suma de un número negativo con otro número positivo.

Misma conclusión que en el párrafo anterior, pero ahora es aún de mayor relevancia porque la suma de números con signo es la parte más compleja para lograr un dominio aceptable sobre sus operaciones. Además la suma de números con signo es una acción que realizan los estudiantes de la que pueden obtener significados propios, y correctos, sobre ese sistema numérico.

En el punto número 5 de la hoja de trabajo, se le pide a los alumnos encontrar los dos sumandos dado el resultado (los resultados son en todos los casos negativos) usando la calculadora, ante este problema la mayoría de los alumnos contestan adecuadamente; lo sobresaliente son los procedimientos que utilizan. Por ejemplo:

1. Si el número tiene mitad entera, colocan dos sumandos negativos iguales, por ejemplo si el resultado que se debe obtener es -78, entonces los sumandos son ambos -39.

2. Consideran el resultado como positivo, luego buscan dos números enteros positivos que sumados den el resultado, posteriormente agregan los signos negativos a los números buscados. Por ejemplo si el resultado es -78, entonces:

78 = 46 + 32 entonces, - 78 = -46 + -32

78 = 29 + 49 entonces, -78 = -29 + -49

Estos resultados indican claramente que los estudiantes han observado a partir de la experimentación con la calculadora que la operatividad con núme-

ros con signo tiene fuertes similitudes con la operatividad con números positivos que ellos ya conocen. Es decir, la experimentación con la calculadora les permite aprovechar sus conocimientos previos sobre números positivos con el nuevo conocimiento que están construyendo acerca de números negativos.

3. Colocan el primer sumando menor que el resultado, posteriormente el segundo sumando como número positivo y a través de ensayo y error. Por ejemplo si el resultado es -32, los alumnos hacen lo siguiente:

-48 + 8 = -40

-48 + 12 = -36

-48 + 14 = -34

-48 + 16 = -32

Misma conclusión que en párrafo anterior: la calculadora es usada como un medio de exploración para experimentar mediante estrategias de "ensayo/refinación" y de esta manera obtener las respuestas. Nótese que no es simplemente "ensayo y error", porque el trabajo de los estudiantes muestra claramente, en sus aproximaciones sucesivas, que ellos saben perfectamente qué es lo que deben obtener; en otras palabras es una exploración orientada por la consecución de un fin claramente preestablecido.

4. Ningún alumno puso como primer sumando un número positivo.

Esto parece ser un indicador de que aún hay un fuerte anclaje en la operatividad aritmética con enteros positivos, en los que la resta no tiene solución si el minuendo es mayor que el sustraendo.

Hoja de Trabajo 2 "Algo más sobre sumas"

En la primera parte de esta hoja de trabajo, a diferencia de la anterior, se piden más de dos sumandos para obtener un resultado dado, y en una segunda parte se pide hallar tres sumandos para obtener un resultado ya determinado. Aquí, además de los números enteros, se abordan los números decimales y fracciones con signo.

En el punto número uno de la hoja de trabajo se pide obtener cero usando tres sumandos, los alumnos manifiestan dos procedimientos:
1. Los alumnos primero suman dos números negativos y el tercer sumando debe ser el simétrico del resultado de la primera suma y viceversa. Ejemplo:

$-3 + -2 = -5$, el simétrico de -5 es 5, por lo tanto: $-3 + -2 + 5 = 0$

2. Otros suman un número positivo y un número negativo, el resultado que se obtiene servirá para obtener el simétrico como tercer sumando. Por ejemplo:

$3 + -6 = -3$ el simétrico de -3 es 3, por lo tanto quedaría
$3 + -6 + 3 = 0$

Quizás lo que están pensando los alumnos aquí es “sumar y restar lo mismo”

Los ejercicios que más se les complicaron a los alumnos fueron cuando los resultados son números decimales negativos, es decir, los puntos 5, 6 y 7 de la hoja de trabajo.

En la segunda parte, que consiste en dados dos sumandos, buscar un tercero para obtener el resultado ya determinado, de los nueve problemas que conforman esta actividad, el grupo obtuvo un promedio de 5.6, las causas son las siguientes:

1. El principal error que cometieron fue la omisión del signo negativo.
2. De los nueve problemas, tres son con fracciones, se puede ver que existe dificultad para sumar números negativos; por otro lado no tienen la noción o idea de fracción, se nota que no se aproximan de manera fácil a los resultados. Esto ratifica por qué se recomienda que la suma y resta con números con signo se aborde usando sólo números enteros debido a que los alumnos aún a este nivel del programa escolar siguen teniendo dificultades con la operatividad con números fraccionarios (con signo o sin él). Hay que observar más adelante sus respuestas, si los alumnos son capaces de superar esta dificultad nos estaría diciendo que el trabajo con la calculadora puede ayudar a que ellos asignen significados a los números fraccionarios, lo cual debe manifestarse en el desarrollo de estrategias para operar con números fraccionarios (decimales y fracciones comunes), ya sea que sean positivos o negativos.

3. Con los números decimales sucede algo similar que las fracciones, pero la dificultad es menor.

Hoja de Trabajo 3 "¿Cómo restamos números con signo?"

Esta hoja inicia mostrándole al alumno que se puede también realizar restas con número con signo, en este caso se muestra la operación 9 - - 8= (cabe identificar que el minuendo es positivo y el sustraendo negativo) y se le pregunta al alumno *qué crees que hace la calculadora cuando tecleas un signo negativo enseguida del otro, los dos signos para la expresión "menos".* Se dan tres tipos de respuestas:

1. Dieciocho alumnos sí identifican que en realidad se realiza una suma.
2. Catorce alumnos no contestan nada, creo que no identifican qué es lo que hace la calculadora.

3. 4 de 7 alumnos señalan que el primer número es el que determina el signo y los otros tres señalan que los eliminan.

En una segunda actividad se le pide a los alumnos que realicen operaciones usando la calculadora, es decir, obtener la diferencia entre el minuendo y el sustraendo. De los 39 alumnos, 2 tuvieron problemas para resolverlos, el resto contesto adecuadamente, sin problemas.

Esto es una clara evidencia del tipo de apoyo que brinda la calculadora, aquí es importante saber si los alumnos, después de esta experiencia pueden trabajar bien sin la calculadora.

En otra actividad, el sustraendo se desconoce por ejemplo: $-\frac{1}{2} - b =$. De los nueve problemas, 2 de ellos el valor del sustraendo es una fracción y se tuvieron grandes problemas como los que a continuación se señalan:

1. Ningún alumno tuvo correctamente el valor del sustraendo.
2. Quince alumnos contestaron adecuadamente sólo uno de los 2 problemas.
3. Veinticuatro alumnos no contestaron ninguno de los dos problemas.

Puedo concluir que el trabajo con fracciones se les dificulta demasiado en la suma y en la resta de números con signo. Es decir, esto se puede reportar como una evidencia más de la falta de dominio de los alumnos sobre la operatividad con fracciones, sean números positivos o no.

Al último se le plantea un problema de temperaturas, de manera sorprendente, sólo un alumno contesta correctamente las dos preguntas planteadas y otro alumno contesta bien la primera pregunta. Se observa que la resolución de problemas es un punto débil en los alumnos.

Una posible conclusión a este respecto es que las respuestas de los alumnos muestran que es necesario incluir sistemáticamente este tipo de problemas, su falta de competencia ratifica que hay una distancia considerable entre el conocimiento y dominio de la operatividad y el uso de los números con signo como herramienta en la resolución de problemas. De hecho se incluye el problema con la finalidad de ir más allá de la operatividad y empezar a confrontar al estudiante con problemas cuya resolución involucra el conocimiento de los números con signo.

Hoja de Trabajo 4 "¿Cómo multiplico números con signo?"

En esta hoja se pretende que el alumno identifique el signo que debe tener el resultado cuando se multiplica un número negativo por un número positivo, así como el signo que debe tener el resultado cuando se multiplica un número negativo por otro número negativo.

Al iniciar la hoja se le pide al alumno que realice las operaciones de multiplicación usando la calculadora donde los factores son uno positivo y el otro negativo; se observa que todos tienen correctamente los resultados. A la pregunta *qué crees que hace la calculadora para multiplicar estos números*, se obtienen varias respuestas, a saber:

1. Se multiplica y queda el signo de menos.
2. Hace la multiplicación normalmente pero el resultado es negativo.
3. Multiplica los números y luego pone el signo negativo cuando es (+) X (-) ó (-) X (+).
4. La calculadora multiplica pero el resultado de un positivo y un negativo siempre es negativo.
5. Algunas hojas quedaron en blanco (supongo que no llegan a comprender qué es lo que hace la calculadora).

Posteriormente se le pregunta al alumno si es lo mismo -7 X 13 que 13 X (-7), todos dijeron que sí pero la justificación varía, por ejemplo:

1. Porque lo comprobé
2. Los números nada más cambian de lugar
3. Es la misma operación sólo se invierten los números
4. El orden de los factores no altera el producto.

Estas respuestas son bastante promisorias en términos del aprendizaje, vía la experimentación, de las leyes de los signos.

Al realizar otras operaciones (negativo por positivo), pero sin usar la calculadora, 37 alumnos no tuvieron ningún problema, sólo 2 alumnos se equivocaron en algunas operaciones.

Este resultado es magnífico, sugiere que el uso de la calculadora propicia que los alumnos aprendan cómo se manejan los signos en la multiplicación. Esto ratifica el potencial de usar la calculadora como un medio para lograr que los alumnos aprendan que el producto de un positivo con un negativo es negativo.

En una segunda parte de la hoja de trabajo, se le pide al alumno realizar la operación de multiplicación entre un factor negativo y otro factor negativo con el uso de la calculadora, las respuestas muestran que no hay ningún problema, y al tratar de justificar, se encontró lo siguiente:

1. Multiplica normal y sale un número positivo.
2. Quita los signos y luego multiplica.
3. Hace la multiplicación común y corriente.
4. Al multiplicar dos números negativos el resultado da un número positivo.

Estas respuestas muestran que ante un análisis de los resultados emitidos por la calculadora, se propicia que los alumnos empiecen a deducir cuál es el signo que debe tener el resultado de una multiplicación con dos factores, donde uno es positivo y el otro negativo. El punto número cuatro, muestra una justificación de tipo matemática propiamente dicha.

Ante la pregunta es lo mismo -4 X (-12) que -12 X (-4), todos verifican el resultado a través de la calculadora y la mayoría justifica que el orden no afecta, otros dicen que es lo mismo porque son las mismas cifras. Aquí los alumnos deducen a través de la experimentación con diversos ejemplos la propiedad conmutativa; se observa claramente que es una forma de abordar el contenido de otra manera, ya que anteriormente, la enseñanza se basaba primero en conceptos (primero se daba la definición de propiedad conmutativa), se daban ejemplos y luego se procedía a practicar con ejercicios.

Por último, se le pide al alumno si es equivalente la expresión - (-7) y la operación -1 X -7; la mayoría de los alumnos señalan que sí porque en los dos sale de resultado 7, y un alumno es más claro y dice *"se está multiplicando el -1 X -7 y el - (-7) es igual porque el primer signo negativo es igual a -1";* otro alumno dice *"el - (-7) es como una resta y el resultado es 7 y la multiplicación su resultado es 7".* Sólo dos alumnos dicen que las expresiones no son equivalentes, uno dice que *"- (-7) no es una operación"*; el otro alumno dice que en la expresión *"-(-7) no hay número uno y que por lo tanto la calculadora lo tomaría como error".*

Los significados ante la expresión -(-7) que los alumnos dan, son diferentes. En la primera respuesta, se le da un significado de multiplicación, donde el signo negativo que antecede al paréntesis es igual a –1, siendo éste un factor; en la segunda respuesta, otros alumnos le dan un significado de resta, donde el minuendo tiene un valor de cero. Ambos significados son funcionales para la comprensión del tema “sustracción de polinomios”.

Es importante señalar que ningún alumno percibió el signo negativo que antecede al paréntesis como inverso aditivo del número que está dentro del paréntesis; éste es otro de los significados de la expresión en cuestión, y tal vez el más apropiado desde el punto de vista de las matemáticas.

Hay dos alumnos que señalan que las expresiones -(-7) y -1X-7, no son equivalentes. Para éstos alumnos posiblemente la primera expresión no la perciben como operación (en particular como sustracción) tal vez porque en la primaria se les enseñó como una operación binaria (pareja de números ordenados) y por lo tanto, les falta un número. Además se observa la tendencia a ver *las* diferentes *operaciones como algo que hacer,* en vez de considerarlo como *una forma de expresar un número;* en este caso, la expresión -(-7), también es una forma de expresar un número, en este caso el 7.

Hoja de trabajo 5 “Algo más sobre multiplicación de números con signo”

Esta hoja aborda la multiplicación con más de dos factores usando sólo números enteros y decimales.

En la primera parte se abordan multiplicaciones con tres factores de números enteros, se le pide a los alumnos las realicen usando la calculadora; en las hojas de trabajo se observa que no tienen problema al realizar las operaciones, sin embargo, ante la pregunta *¿de qué depende el signo del resultado cuando multiplicas tres números?*, existen varias respuestas:

1. Depende del signo que tengan los números (ésta es una respuesta incompleta)

2. Si hay más positivos el resultado es positivo y viceversa: Esto lo interpreto de la siguiente manera: si dos factores son positivos y uno negativo; o bien, si dos son negativos y el otro positivo, entonces el resultado es positivo en el primer caso y negativo en el segundo. Sin duda, ésta es una de sus primeras conjeturas, ya que la primera aseveración es incorrecta y la segunda correcta.

3. Veinte alumnos no contestaron, no pueden dar una respuesta.

No existe una respuesta que generalice qué signo debe tener el resultado cuando se realizan multiplicaciones con tres factores. Siguiendo a Piaget, en estas actividades se muestra un desequilibrio en los alumnos, ya que en la hoja de trabajo anterior, se abordó la multiplicación usando sólo dos factores, por lo tanto, les llevará un tiempo poder deducir el signo del resultado después de un análisis de las mismas.

Luego se le pide resolver multiplicaciones con tres factores sin usar la calculadora. Los resultados fueron los siguientes: Treinta y cuatro alumnos no tuvieron errores, es decir, parece que se comprende la ley de signos en la multiplicación con tres factores (aunque cabe la posibilidad de que las hayan resuelto con la calculadora); las cinco personas restantes tienen dificultad para saber si el resultado es positivo o negativo (posiblemente estos alumnos sí siguieron la indicación de la hoja de trabajo: sin usar la calculadora).

En la segunda parte se abordan multiplicaciones con 4 factores, donde solo falta anotar el signo del resultado sin hacer la operación. De las 16 operaciones el que tuvo más errores fue un alumno con sólo 6, una con 5, 4 personas con 4 errores, 12 con 3, 4 con 2, 6 con 1 y 11 personas no tuvieron errores. Las hojas de trabajo muestran que si bien existen más errores que la multiplicación con tres factores, los errores cometidos por los alumnos es mínima, por lo tanto, más de la mitad “comprende” qué signo debe tener el resultado de una multiplicación con cuatro factores. Es importante señalar que al revisar las hojas de trabajo en este punto, se observa que algunos alumnos que se equivocaron fue porque se dejan influenciar por las reglas que ya habían obtenido con tres factores, las cuales no son las mismas con cuatro factores en algunos casos.

Hoja de trabajo 6 “¿Cómo divido números con signo?”

En esta hoja se aborda la división sólo de números enteros cuando el dividendo o divisor es negativo y cuando ambos son negativos.

Al inicio se pide realizar las divisiones donde el dividendo o el divisor son negativos usando la calculadora y al igual que las operaciones anteriores no existe problema alguno para resolverlas. Ante la pregunta *qué crees que hace la calculadora para hacer divisiones*, las diferentes respuestas que dan los alumnos son:

1. No sé (cinco alumnos).
2. Pone el signo del divisor (cuatro alumnos).
3. Los divide normal pero en negativo (veinte alumnos).
4. Cuando uno de los dos números es negativo, el resultado es negativo, pero la división se hace normal (cuatro alumnos).
5. Siempre cuando hay un número positivo y un número negativo da el resultado negativo (un alumno).
6. Cuando un número negativo es dividido por un afirmativo (quiere decir un número positivo), el resultado es negativo (un alumno).
7. Se divide igual, sólo que al resultado se le aumenta el signo menos (cuatro alumnos).

De alguna manera sólo ocho alumnos no conciben qué es lo que hace la calculadora para dividir números con signo; sin embargo, el resto de los alumnos (treinta y uno) responden con seguridad lo que la calculadora hace, los datos reflejan que el uso de este recurso permite que los alumnos aprendan a utilizar los signos en la división.

Ante le pregunta, *es lo mismo dividir -8÷20 y 20÷(-8)*, sólo un alumno dice que sí es lo mismo pero no justifica, tal vez no resolvió la división con la calculadora, porque los demás alumnos dicen que no es lo mismo ya que los resultados salen diferentes. Implícitamente los alumnos se dan cuenta que en la división no existe la propiedad conmutativa; en la división al cambiar los números a dividir, las resultados no son iguales como es el caso de la multiplicación.

Posteriormente se le pide al alumno realizar las operaciones de división sin usar la calculadora, la mayoría no tuvo problema al colocar adecuadamente el signo del resultado, algunos alumnos se equivocaron en la parte operativa.

Uno de los propósitos del uso de la calculadora es precisamente el que sólo sea un recurso para poder llegar a ciertas generalidades, en este caso usar los signos en la división. Posteriormente, no depender de ella en la realización de divisiones con números con signo, sería la meta inmediata.

La segunda parte del trabajo consistió en realizar divisiones donde tanto el dividendo como el divisor son números negativos a través del uso de la calculadora; nuevamente los alumnos no llegaron a tener ningún problema para resolver las divisiones con el uso de la calculadora, sin embargo, ante la pregunta *qué crees que hace la calculadora para dividir un número negativo entre otro número negativo,* los alumnos respondieron:

1. Lo divide normal pero respetando el signo (seis alumnos).
2. Lo mismo que con los números normales (quince alumnos).

3. Los convierte en un número o una fracción positiva (cuatro alumno).
4. Quitan los signos y hacen la operación normal (tres alumnos).
5. Se realiza normal porque los dos signos son del mismo tipo (un alumno).
6. Otros alumnos no identifican qué es lo que hace la calculadora (diez alumnos).

Considerando la respuesta 1 como ambigua y los diez alumnos que no identifican qué es lo que hace la calculadora para dividir un número negativo entre otro número negativo, cerca de las dos terceras partes (veintitrés alumnos) del total de los alumnos, identifican cómo realizar estas divisiones. Las respuestas de los alumnos (2, 3, 4 y 5) dan mucho de qué hablar acerca de cómo interpretan el procedimiento para realizar divisiones con números con signo, esto favorecerá la comprensión, en la realización de divisiones con lápiz y papel.

Ante la pregunta de análisis si *se obtiene el mismo resultado cuando se divide* $-4 \div (-12)$ *y* $-12 \div (-4)$*,* 34 alumnos identificaron perfectamente que los resultados que se obtienen son diferentes, por ende no es lo mismo dividir $a \div b$ que $b \div a$, es decir, no existe la propiedad conmutativa en la división; cuatro alumnos no contestaron la pregunta, esto hace suponer que no saben, y uno, sólo un alumno manifestó que sí es lo mismo ya que son los mismo números pero al revés, al parecer no llega a comprobar con la calculadora.

A la pregunta *¿qué semejanza encuentra entre la multiplicación y la división con números positivos y negativos?*, las repuestas que se dieron fueron:

1. Ninguna (por lo tanto, algunos alumnos no llegan a percibir cierta similitud entre ambas operaciones).
2. La multiplicación cuando es inversa sale lo mismo y en la división no (esto no es semejanza, más bien es una diferencia).

3. Que se multiplican o se dividen normal y nada más se le pone el signo negativo o positivo (no es claro).
4.15 alumnos no escriben nada en la hoja de trabajo, esto hace suponer que no identifican la semejanza que hay en las operaciones de multiplicación y división.

La respuesta que se pretendía que dieran los alumnos era que en ambos casos cuando se divide un número negativo entre otro número negativo, al igual que cuando se multiplica un número negativo por otro número negativo, el resultado es un número positivo. Y cuando se divide un número negativo entre otro un número positivo, al igual que cuando se multiplica un número negativo por otro número positivo, el resultado es un número negativo. Sin embargo, no la dan, porque siguen anclados en el resultado, sin tomar en cuenta el signo del resultado. O sea solamente les importa el número normal, más que el signo.

Hoja de trabajo 7 "Potencias de números con signo"

En esta hoja de trabajo se aborda el tema de potencias de números con signo, donde la base puede ser cualquier número entero, y el exponente un número natural.

La hoja inicia con una reflexión hacia el alumno, se le pregunta si es correcta la expresión $5^2 = 5X\ 2 = 10$, a lo que 37 alumnos de 39 contestaron que no, justificando que debe ser $5 \text{ X } 5 = 25$, los otros dos alumnos dicen que sí es correcto, pero no justifican.

Posteriormente se le hace otra pregunta sobre si es lo mismo las expresiones -6^2 y $(-6)^2$ y se le pide que use la calculadora; aquí 38 alumnos obtienen el resultado correcto y un alumno invierte los resultados, esto hace suponer que no lo hizo con la calculadora, o bien, que cometió un error al pasar el resultado de la calculadora a la hoja de trabajo. Ante la pregunta *cómo lo interpreta la calculadora*, los alumnos escribieron que...

1. $(-6)^2$ el resultado es positivo por el paréntesis (esta respuesta hace pensar que si se tuviera otra expresión que lleve paréntesis como $(-6)^3$, el resultado sería positivo, y no es así).
2. -6^2 multiplica el 6 X 6, sólo que en un número le pone el signo negativo, o sea -6 X 6, por lo tanto, el resultado es -36 (correcto).
3. $(-6)^2$ se entendería como -6 X –6 = 36 (excelente).
4. Sólo dos alumnos no justifican, no saben cómo lo interpreta.

Menos de la tercera parte (10) del total de los alumnos (39), no saben cómo la calculadora interpreta las operaciones -6^2 y $(-6)^2$; sin embargo, los alumnos que explican cómo interpreta la calculadora las operaciones, son de gran valor, de soporte bien consolidado, ya que muestran el uso correcto de los números con signo. Cabe señalar que otra de las interpretaciones no fue reconocida por los alumnos en el caso de la expresión -6^2 como $-(6^2)$.

Posteriormente se le pide a los alumnos resolver las potencias pero sin usar la calculadora. De los 39 alumnos, sólo uno no colocó el signo negativo en dos operaciones, el resto lo hizo adecuadamente. Podría dar la impresión que esta actividad la realizan por medio de la calculadora.

En la última actividad se le pide al alumno sólo colocar el signo al resultado de cada potencia sin hacer ninguna operación con los números, los resultados fueron:

1. Sólo 2 de los 39 alumnos se equivocaron en el inciso “c”, señalan que se confiaron, ya que los incisos “b” y “e” daban un resultado positivo y el “c”, da un resultado negativo.

2. Los 37 alumnos restantes no tuvieron ningún problema, esto hace suponer que:

$-a^n$, el resultado siempre será negativo.
$(-a)^{2n}$ el resultado siempre será positivo.
$(-a)^{2n-1}$ el resultado siempre será negativo.
Y que por lo tanto, las expresiones:
$-(-a)^{2n}$ el resultado siempre será negativo.
$-(-a)^{2n-1}$ el resultado siempre será positivo.

Después de un previo análisis por parte de los alumnos al trabajar la potencia, se muestra que la calculadora propicia la exploración de ciertas generalizaciones acerca del signo de los resultados de las potencias, las hojas de trabajo de los alumnos son la evidencia de dichas situaciones.

Hoja de trabajo 8 "Relación de orden"

Esta hoja trata de que el alumno identifique qué número con signo es mayor con respecto a otro; el tipo de números que se abordan son enteros, decimales y fracciones.

En la primera actividad se le pide al alumno que encierre el número que considere mayor de cada pareja de números que se muestran. La mayoría identifica en forma clara, qué número es mayor con respecto a otro, sólo 8 alumnos de los 39 presentan algunos problemas en ciertas parejas de números, por ejemplo en los incisos c) 2.05 y 2.10, d) -1/2 y 0 f) -11/12 y -7/8 h) -1 y -3/4, pero el inciso en el que mayor dificultad tuvieron los alumnos fue el f). Es claro que la comparación de números fraccionarios se les complica, a veces no entienden cuál número es mayor al comparar, por ejemplo, ½ y ¾, siendo ambos números positivos.

Ante la pregunta *¿de qué manera podrías usar la calculadora para verificar tus respuestas de la primera actividad?*, encontramos lo siguiente:

1. La mayoría no da una explicación clara y señalan a veces situaciones incompletas o incongruentes como: haciendo unas restas, al sumar negativos se resta, sumando y en algunos casos restando, no usé la calculadora, haciendo operaciones, al que pienso que es mayor le resto el otro.
2. Cinco alumnos no contestaron la pregunta, tal vez porque no saben cómo lo harían con la calculadora.
3. No es necesario usar la calculadora, porque ya sabemos un procedimiento, este es que cuando sea número negativo, el número chico es el mayor.
4. Cuando son positivos, es mayor el más grande, y cuando ambos números sean negativos va a ser mayor el número más chico.
5. Poniendo un número entero mayor que la pareja de números e ir restando uno y luego el otro número (los números que se están comparando) y cuando quede más grande el entero (o bien ha de ser tan general el resultado), ese es el número más grande (el alumno puso el más grande, pero debe ser el más chico). Por ejemplo, si tomamos los números del inciso "f" quedaría así:

10 es un número mayor que ambos números a comparar, entonces se ingresan a la calculadora los siguientes datos:

10 – (-11/12) = 10.91

10 – (-7/8) = 10.87

Podemos ver que 10.87 es más chico que 10.91, por lo tanto, -7/8 es mayor que –11/12.

Esta última respuesta es excelente. La estrategia utilizada por un alumno a través de la calculadora tiene un sustento fuerte, porque funciona para comparar cualquier pareja de números.

En la siguiente actividad de la hoja de trabajo, se le pide al alumno que reste al que consideró mayor el número menor, y se le pregunta *¿cómo son los resultados positivos, negativos o algunos positivos y otros negativos?*

1. Doce alumnos contestaron que los resultados son positivos y pocos son negativos. No identificaron con claridad qué número es mayor con respecto a otro.
2. Cinco alumnos no contestaron.
3. Veintidós alumnos contestaron que todos son positivos, esto significa que identificaron perfectamente qué número es mayor o menor con respecto a otro.

Ante la afirmación de que al restar 8-6, si el resultado es positivo, entonces 8 es mayor que 6; pero si la resta es 6-8 y el resultado es negativo, entonces el número 6 es menor que 8; la mayoría de los alumnos están de acuerdo con estas afirmaciones ya que lo comprobaron con varios ejemplos y no encontraron algún contraejemplo que negara dichas afirmaciones. Sólo 4 alumnos no contestaron si estaban de acuerdo o en desacuerdo ante tales afirmaciones.

Posteriormente se les pide a los alumnos que anoten el símbolo <, > ó = entre las parejas de números. Sólo un alumno tuvo 6 errores de 8 problemas, otro tuvo 4 de 8, 13 alumnos tuvieron 1 ó 2 errores, los más comunes fueron los incisos f) –4.5 y 0, no han identificado que el cero es mayor que cualquier número negativo; e) y h). Creo que estos alumnos están en un proceso de transición, o bien, de extensión de los números naturales a los números racionales ya que no conciben cómo un número negativo pueda ser menor que el cero, si éste en realidad no vale, representa la ausencia de determinado número de elementos.

Por último, se le pide al alumno que ordene de mayor a menor cuatro ternas de números y las respuestas fueron en general las siguientes:

1. Cuatro alumnos ordenaron correctamente 2 de las 4 ternas.
2. Siete alumnos ordenaron correctamente 3 de las cuatro ternas.
3. Veintiocho alumnos ordenaron correctamente las 4 ternas.

Esto muestra que todavía a algunos alumnos (alrededor de una cuarta parte del total de los alumnos) les cuesta trabajo identificar qué número es mayor o menor con respecto a otro y por ende ordenar los números con signo.

CAPÍTULO 7
CONCLUSIONES

El desarrollo de este trabajo de investigación permite dar, a manera de conclusiones o comentarios finales, las siguientes respuestas a las preguntas planteadas originalmente y a otras que durante el transcurso de la investigación surgieron.

Pregunta de investigación 1

¿Qué estrategias desarrollan los alumnos en un ambiente de enseñanza basado en el uso de la calculadora?

A través de una enseñanza basada en el uso de calculadora y con el apoyo de sus conocimientos previos, *los alumnos son capaces de desarrollar diferentes estrategias correctas*, esto se muestra en un caso muy específico, en la operación de la suma con relación a diferentes casos (sólo se mencionan algunos).

a) Encontrar dos sumandos dado un resultado negativo, se tienen los siguientes:

1. se divide entre dos el resultado y se obtienen dos sumandos iguales
2. se toma el resultado como positivo, buscan dos números que sumados de el resultado, y por último le cambian los signos
3. ensayo /refinación

b) Encontrar cinco sumandos dado un resultado negativo, se tiene el siguiente:

1. Es similar al uno del inciso a, sólo que ahora divide entre 5, lo sorprendente es que está trabajando la división con números con signo.

c) Obtener el cero usando tres sumandos.

1. suman dos negativos y a éste, su simétrico.

2. suman un número positivo y un número negativo, el resultado que se obtiene servirá para obtener el simétrico como tercer sumando.

Estas estrategias muestran que los estudiantes han observado a partir de la experimentación con la calculadora que la operatividad con números con signo tiene fuertes similitudes con la operatividad con números positivos que ellos ya conocen, es decir, la experimentación con la calculadora les permite aprovechar sus conocimientos previos sobre números positivos con el nuevo conocimiento que están construyendo acerca de números negativos.

Además, la calculadora es usada como un medio de exploración para experimentar mediante estrategias de "ensayo/refinación" y así obtener las respuestas. Es decir, los alumnos realizan una exploración orientada por la consecución de un fin claramente preestablecido. (Para ver los procedimientos, se sugiere revisar las descripciones por sesión en el aula 1 y 2, del capítulo 5).

Con lo expuesto arriba, puedo mostrar la contraparte a lo identificado por Glaeser (1981) como uno de los obstáculos en su investigación: *deseo de un modelo unificador. Aspiración de hacer funcionar un modelo aditivo igualmente válido para ilustrar el dominio multiplicativo en donde ese modelo es inoperante;* desarrollar las habilidades matemáticas, en este caso la flexibilidad del pensamiento, es uno de los propósitos de la educación básica en la matemática. Unificar modelos, es restringir el potencial cognitivo de todos y cada uno de los alumnos.

Pregunta de investigación 2

¿En qué medida las estrategias no convencionales para resolver ecuaciones que se usan en este estudio, ayudan a los estudiantes a desarrollar nociones plausibles de lo que es una ecuación?

Al respecto Kieran (1992) identificó uno de los obstáculos que ha observado en los niños, señalando que éstos no entienden la diferencia de “x” como variable y como incógnita. Al mismo tiempo Gallardo (1994) señala que los números negativos constituyen uno de los obstáculos perdurables con que se encuentra la enseñanza del álgebra. Considerando lo que dicen los autores y contestando la pregunta, las transcripciones de los temas adición y sustracción, muestran evidencias de que el alumno identifica intuitivamente las variables y la incógnita sin tener en claro todavía que es cada una, es más a través de la calculadora las manipula en forma dinámica.

En la actividad 5 de la hoja de trabajo 1 se pide al alumno encontrar tres parejas de números que al sumarlos den un determinado resultado; ante la pregunta del maestro

Mo. “¿Cuántas parejas creen que haya diferentes para que me de –32?”

As. “¡huuu!, ¡hay muchas parejas que me dan -32!

Aquí se manifiesta en forma intuitiva, lo que es una variable, y al mismo tiempo que un número tiene diferentes formas de expresarse. En general, en el punto 5 de la hoja de trabajo 1, se está abordando una ecuación de primer grado del tipo: $x + y = a$

Donde x, y pueden tomar cualquier número (variables), y a, es una constante.

En la actividad 8 de la hoja de trabajo 2, Se trabajan ecuaciones de primer grado de la forma: $a + b + x = c$, donde a, b, c son constantes y x, es una incógnita. Aquí los alumnos saben que no puede ser cualquier número el valor de la incógnita, que el valor que tiene es único. En la resta, también sucede esta situación, en específico en el punto 5 de la hoja de trabajo 3.

Considero que actividades como las diseñadas en las hojas 1, 2 y 3, ayudarían al estudiante a tener menos problemas en la solución de ecuaciones de primer grado de la forma que en este estudio se abordaron. La estrategia de solución que manifestaron los alumnos fue la de ensayo/refinación.

Pregunta de investigación 3

¿El uso de la calculadora permitirá al alumno descubrir leyes y/o patrones en la operatividad con números con signo?

Sí, el alumno con el apoyo de la calculadora deja de lado la parte operativa y se ocupa más por descubrir leyes o regularidades (en algunos casos casi llegan a generalizar, sin embargo son excelentes acercamientos), pero lo más satisfactorio es que ellos mismo las descubren. Por mencionar algunas, citaré lo encontrado en este trabajo de investigación.

1. Coincidiendo con una de las conclusiones de Gallardo (1994), lo que llama *predominio del negativo*, los alumnos que participaron en la investigación que aquí se reporta, *también interpretan a la suma como una resta cuando un sumando es negativo y el otro positivo (esto lo entienden perfectamente)*, pero se les dificulta determinar el signo que debe tener el resultado. Gallardo, no reporta si a sus alumnos se les dificultó o no determinar el signo del resultado.

Asimismo, otro hecho del predominio del signo es que, los alumnos en la investigación de Gallardo, no pueden visualizar a la resta como suma, además no se especifican los diferentes casos; algunos alumnos en este trabajo llegan a ser más puntuales y señalan *que el primer número tendría que ser positivo y el segundo negativo para que se pueda hacer la suma, como si fueran sólo números positivos*, en este caso sí se visualiza como una suma a la resta. Además, Identifican que cuando el minuendo y el sustraendo son negativos, se hace una resta común sólo que de negativos, pero no sólo eso, sino van más alla *si invierten los números, el minuendo y el sustraendo, el resultado será su simétrico del resultado sin invertir los números*.

En este estudio, se manifiestan dos extremos con respecto al signo que debe tener el resultado cuando ambos números son negativos en la resta: algunos alumnos no saben si el resultado será negativo o positivo, mientras otro dice ”*si son dos números negativos y el primero es más chico que el segundo el resultado sale positivo, pero si el primer número es mayor que el segundo, el resultado sale negativo”*. Esto es, algebraicamente:

-a - -b = + y - b - -a = - si y sólo si -a>-b

De aquí se obtendría que:

-a - -b = - y - b - -a = + si y sólo si -b>-a

Durante el trabajo, en la operación de la resta se dejan ver las diferentes posibilidades de hacerla: cuando el minuendo y el sustraendo son positivos; cuando el minuendo es negativo y el sustraendo es positivo; cuando el minuendo es positivo y el sustraendo negativo y cuando ambos números son negativos. Lo que se observó en los resultados de las hojas de trabajo fue:

- Es *fácil* resolver restas cuando el minuendo es positivo y el sustraendo negativo
- *Relativamente fácil* cuando el minuendo es negativo y el sustraendo es positivo
- *Difícil*, cuando ambos números son negativos.
- No hubo actividades cuando el minuendo y el sustraendo son positivos, sin embargo, parece que son fáciles ya que son los números con los que se inicia el algoritmo en primaria.

2. Mientras Alarcón (1990) señala que la suma de dos números negativos al alumno le resulta excesivamente difícil, que cuando en cursos posteriores tienen que realizarla, no sólo duda al realizarla, sino que se equivoca al realizarla. La mayoría de los estudiantes que participaron en este estudio, gene-

ralizan y señalan que para sumar dos números negativos, se suma normal, pero sólo se pone el signo negativo. Esta conclusión a la que llegan los alumnos podría parecer muy fácil o sencilla, sin embargo, por ser los primeros acercamientos es tan significativa como cuando aprendimos a sumar los naturales en nuestros primeros años escolares.

3. En el caso de la multiplicación, concluyen los alumnos con el apoyo de la calculadora, la propiedad conmutativa. Asimismo la no existencia de esta propiedad en la división.

4. Los alumnos llegan a deducir la ley de signos en la multiplicación, pero algo sobresaliente, no sólo cuando tienen 2 factores, sino también cuando hay tres factores, dice uno de ellos: *“yo encontré una forma más fácil de multiplicar,* **sin usar la calculadora***, este... por ejemplo 3X-2X-4, yo sé que cuando hay 3 cifras (quiere decir factores) y tengo un negativo, entonces el resultado va a ser negativo, y por ejemplo en 3 cifras (factores) tengo dos negativos, el resultado va a ser positivo”*. Con tres factores negativos, la mayoría de los alumnos no llegó a concluir qué signo dará como resultado, sólo algunos se dieron cuenta que el resultado es negativo.

Cuando se abordó la multiplicación con cuatro factores, algunos alumnos tuvieron ciertos problemas ya que se dejaron llevar por lo que sucedía con la multiplicación con tres factores. Otros alumnos sí dedujeron que:

- Con cuatro números negativos, el resultado será positivo.
- Con dos números negativos (y dos positivos), el resultado será positivo.
- Con un número negativo (y tres positivos), al igual que con tres factores, el resultado será negativo.

No se llegó a concluir:

- Qué signo dará como resultado con tres números negativos (y uno positivo).
- Con cuatro números positivos, el resultado será positivo.

5. Respecto a la ley de signos en la división, también es descubierta por los alumnos. Identifican la operación e indagan cómo debe ser el signo del resultado, saben que el resultado siempre será negativo cuando un número es positivo y el otro negativo, pero distinto. Esto es, si:
$a < 0$ y $b > 0$, entonces, $a \div b$ = negativo, y $b \div a$ = negativo.

Asimismo, identifican que al dividir un número negativo entre otro número negativo, el resultado siempre será positivo.

6. En el tema potencias, surge también algo interesante, pues se le pide al alumno cómo interpreta la calculadora las expresiones -6^2 y $(-6)^2$. La interpretación que hacen los alumnos es válida pues genera la siguiente regla: $-a^2= (-a)(a)$, se observa que al primer número le están asignando el signo negativo y no a toda la operación $–(6x6)$, expresión que quizá es la correcta, matemáticamente, hablando.
Algunos alumnos fueron capaces de obtener 4 posibles procedimientos para la misma expresión:
$\boldsymbol{-n^2} = (-n) \times (n) = -n \times n = n \times (-n) = (n) \times (-n)$

Ante la potencia $(-6)^2$, el alumno llega a expresar lo que la calculadora no muestra (el procedimiento) ante una expresión matemática, en este caso la potencia. Es decir:
$(-m)^2 = m \times m$
Algunos alumnos concluyen 5 posibles procedimiento que la calculadora hace para la misma expresión:
$\boldsymbol{(-m)^2} = m \times m = (-m) \times –m = -m \times –m = (-m) \times (-m) = -m \times (-m)$

7. Como lo señala Kieran (1992), la VERBALIZACIÓN permite al alumno entender la transición de la aritmética al álgebra que es más evidente la importancia general del lenguaje en el significado de la construcción de significados, no es la excepción a lo largo de todo el trabajo de investigación, sin embargo quiero enfatizar la generalización mostrada por algunos alumnos al intentar saber si el resultado es positivo o negativo en una potencia cuya base está entre paréntesis (donde el número es negativo), una alumna dice:
"Como el número al que se va a elevar la potencia es positivo (quiere decir par, y señala el exponente 6 de la expresión $(-2)^6$*) el resultado es positivo (le muestra su calculadora). Y aquí como el número que se está elevado la potencia es negativo (quiere decir impar y señala el exponente 9 de la expresión* $(-9)^9$*), el resultado es negativo. Y aquí tengo más ejemplos..."*
Es grato observar sus conclusiones de los alumnos; otra de las alumnas lo dice muy claro y concreto: *Para que el resultado salga negativo, la potencia (el exponente) debe ser impar; y para que salga positivo el resultado, la potencia (el exponente) debe ser número par.*
En términos matemáticos quedaría de la siguiente manera:
$(-x)^{2n}$ = positivo
$(-x)^{2n-1}$ = negativo

8. Por último, respecto a la relación de orden, se llega a las siguientes conclusiones:

- Identifican que un número negativo tiene menor valor que el cero, su justificación: porque el cero está más cerca de los positivos.
- Al comparar dos números negativos, al igual que Romero (1999), el cero es el punto de referencia, un alumno lo concluye de la siguiente manera: "*Cuando son números positivos, mientras más alejado esté el número del cero, más grande es el número; pero en los negativos, mientras más cerca esté del cero, será más grande el número*". Podemos observar que la estructura se invierte cuando se habla de los

números negativos. Sin embargo los alumnos expresan de diferentes formas la relación de orden de dos números negativos:

a) Es más grande el que se acerca a los números positivos.
b) En 2 números negativos mientras menor sea el número, es más grande o mayor.
c) El mayor es, el que es menor en los positivos. Esto es, mientras en los números positivos, el mayor es el que tiene mayor valor absoluto; en los negativos, el mayor es el que tiene menor valor absoluto.
d) Cuando son fracciones, proceden a transformar los números a decimales ya que les es más fácil trabajar con éstos; de esta manera identifican que el mayor es el que está más cerca del cero. Como se señaló anteriormente, el *cero* se ha convertido en un referente importante para comparar dos números con signo.
e) Una justificación más consistente la desarrollaron dos alumnos al trabajar en equipo: Si a es positivo y m, n negativos, entonces:

$a - (-m) = +p$

$a - (-n) = +q$

Si $p < q \rightarrow -m > -n$

Pero Si $p > q \rightarrow -m < -n$

Lo sobresaliente es que esto lo concluyeron con la ayuda de su calculadora.

- Otra pareja de alumnos aplica la definición de la relación de orden de los números racionales, la cual dice lo siguiente:

  Si m y n son dos números racionales cualesquiera, decimos que $m > n$, si y solo si, $(m-n)$ es un número racional positivo. Este es un claro ejemplo (así como las otras conclusiones) de que e*l uso del lenguaje* *determina su significado* (Bruner 1980,1982, 1983, 1985), donde su principio esencial en este enfoque es que la lengua materna se aprende a través del uso, no parte de reglas y definiciones (sino se pretende llegar a ellas), es mediante la interlocución con los adultos que el niño va asignando significados al lenguaje aun antes de poder emitir su primera expresión verbal y gradualmente va afinando sus estrategias de comunicación lingüística. Para lograr llegar a esta generalización fue fundamental la actividad de enseñanza así como la intervención didáctica por parte del profesor.

- Peled (1991) señala que los alumnos amplían esa relación de orden, así al comparar dos números con signo, el que se encuentra más a la derecha, es el mayor. Ésta ha sido una forma tradicional de enseñar la relación de orden, sin embargo, no existe un análisis por parte de los alumnos por lo que se puede considerar que no es tan significativa.

- ¿Pueden los alumnos obtener conclusiones matemáticamente correctas cuando abordan las operaciones de números con signo experimentalmente?

Definitivamente, sí hay evidencias suficientes en las que los alumnos muestran las reglas, patrones y/o generalidades al abordar las operaciones de números con signo a través del uso de la calculadora, basta recordar lo que Alonso (1993) señala: la generalización es uno de los procesos esenciales de la actividad matemática y más particular del álgebra, además, incluso con el lenguaje natural se puede hacer uso de esta habilidad (así lo mostraron los alumnos durante la aplicación de las hojas de trabajo).

- ¿Pueden los estudiantes realizar operaciones con números con signo correctamente sin usar la calculadora?

Algunos alumnos sí pudieron resolver algunas actividades sin utilizar la calculadora, así se proponía en algunas actividades. Sin embargo, faltó una segunda etapa en la que realmente se realizaran situaciones problemáticas específicamente sin usar la calculadora.

- ¿Podrán los alumnos salvar obstáculos reportados por investigaciones previas, y dar nuevos significados a las operaciones?

1. De acuerdo con la investigación de Torres Galicia (2001) los niños "Ante el doble signo - (- 10) por lo general consideran el signo de operación y omiten el signo del número". Sin embargo, yo pude observar a los alumnos, ante la pregunta si la expresión - (-7) es equivalente a la operación -1 X -7; la mayoría de ellos que sí porque en los dos sale de resultado 7, y un alumno es más claro y dice *"se está multiplicando el -1 X -7 y el - (-7) es igual porque el primer signo negativo es igual a -1";* otro alumno dice *"el - (-7) es como una resta y el resultado es 7 y la multiplicación su resultado es 7".* Sólo dos alumnos dicen que las expresiones no son equivalentes, uno dice que *"- (-7) no es una operación"*; el otro alumno dice que en la expresión *"-(-7) no hay número uno y que por lo tanto la calculadora lo tomaría como error"*.

Los significados ante la expresión –(-7) que los alumnos dan, son diferentes. En la primera respuesta, se le da un significado de multiplicación, donde el signo negativo que antecede al paréntesis es igual a –1, siendo éste un factor; en la segunda respuesta, otros alumnos le dan un significado de resta, donde el minuendo tiene un valor de cero. Ambos significados son funcionales para la comprensión del tema "sustracción de polinomios".

Es importante señalar que ningún alumno percibió el signo negativo que antecede al paréntesis como inverso aditivo del número que está dentro del paréntesis; éste es otro de los significados de la expresión en cuestión, y tal vez el más apropiado desde el punto de vista de las matemáticas.

Hay dos alumnos que señalan que las expresiones –(-7) y –1X-7, no son equivalentes. Para éstos alumnos posiblemente la primera expresión no la perciben como operación (en particular como sustracción) tal vez porque en la primaria se les enseñó como una operación binaria (pareja de números ordenados) y por lo tanto, les falta un número. Además se observa la tendencia a ver *las diferentes operaciones como algo que hacer,* en vez de considerarlo como *una forma de expresar un número;* en este caso, la expresión -(-7), también es una forma de expresar un número, en este caso el 7.

2. Gallardo (1994) señala que en el proceso de enseñanza aprendizaje de los números negativos, *es necesario recurrir a los modelos*; la explicación abstracta no es suficiente para los estudiantes, ya que ellos desearían vincular cosas de la realidad al nuevo concepto de número y modelar las nuevas operaciones de alguna forma. A diferencia de lo que dice la Doctora (1994) por un lado y lo hallado por Romero (1999) en su trabajo "El modelo de la recta..." donde las operaciones: la adición y la sustracción de enteros siguen manifestando dificultades debido a que los estudiantes no dan sentido a las operaciones efectuadas en *la recta*, en mi trabajo de investigación se obtuvieron evidencias empíricas y sólidas, de que la operatividad de números con signo y los números con signo, tuvieron para los alumnos un uso y un significado a través del recurso didáctico electrónico: la calculadora. Es decir, no necesariamente se requiere de un modelo para la enseñanza y el aprendizaje de los números con signo; y el modelo de la recta numérica, no permite a los alumnos dar sentido a las operaciones, como dice Bruno (1994), el error que cometen los alumnos es representar los números de forma aislada.

3. Uno de los resultados en la que los alumnos tuvieron cierta competentes con el Modelo Chino utilizado por Gallardo (1994) fue la clara visión de que la suma de opuestos es cero, pero esto sólo con números enteros; en mi investigación, los alumnos fueron más allá, ya que no sólo con números enteros obtenían el cero, sino que con números decimales y en algunos casos con fracciones.

4. Por último, Gallardo (1994) señala categóricamente que no resultó relevante enseñar a multiplicar y a dividir con el Modelo Chino, pues las reglas de operación se complican. En este trabajo de investigación, pude observar que a través del uso de la calculadora se enseñó no sólo la suma, la resta, la multiplicación y la división, sino también la potencia.

Uno de los aspectos que coincide con los hallados por Gallardo (1994) fue la aceptación de un número negativo como resultado de operaciones, esto, en general no sucede en su enseñanza en el nivel primaria.

El uso de la tecnología en la enseñanza básica, si bien no es la panacea para dar significado a las operaciones con números con signo, es una alternativa muy sugestiva que el docente de educación secundaria pudiera considerar en su planeación para abordar el tema: números con signo. El uso de la calculadora, en este trabajo no mostró en ningún momento que los alumnos tuvieran ciertos retrocesos o que complicaran la comprensión de la operatividad de los números con signo, por el contrario, fue un recurso en el cual el alumno descargó la parte operativa para preocuparse más por darle sentido a estas operaciones y, a las relaciones de estos números.

Desde luego, no todo fue positivo. También en esta investigación, se hallaron ciertas dificultades al trabajar con fracciones, la mayoría de los alumnos al trabajar con la calculadora no pudo dar significado a las fracciones, fue muy difícil.

Podemos señalar que la estructura de los números naturales es diferente que la de los números con signo en general:

Números naturales	**Números con signo**
La suma es entendida como juntar, reunir, agregar, añadir y por ende, como aumentar. Al sumar, siempre se obtiene un tercer número de mayor valor absoluto que los sumandos.	En la adición de números con signo no siempre se obtiene un tercer número cuyo valor absoluto es mayor que cualquiera de los sumandos (como aumento). Si $a>0$ y $b<0$, $a+b<a$. Si $a<0$ y $b<0$, $a+b<a$ y $a+b<b$.
La resta en los naturales se entiende como quitar, como disminución. Si $a>0$ y $b \leq a$, entonces $a-b \geq 0$.	Aquí no siempre se puede entender como disminución. Si $a<0$ y $b<a$, se da un incremento en valor absoluto. Si $a>0$ y $b<0$, $a-b>0$. En b-a, también se da un incremento en valor absoluto.
La concepción de la suma como aumento se traslada también a la multiplicación, o bien como una adición repetida. Dadas dos magnitudes $a>0$, $b>0$, tales que $ab=c$, se obtiene una tercera, tal que $c \geq a$ ó $c \geq b$.	Esta idea de incremento permanece sólo si $a>0$ y $b>0$, o si $a<0$ y $b<0$. La idea de incremento no se da si $a>0$ y $b<0$ o si $a<0$ y $b>0$.
La división se entiende como cuántas veces cabe una cantidad en otra, o	En los números con signo, si a y b tienen el mismo signo, siempre se

bien, como agrupamiento o como reparto. Si $a>0$ y $b<a$, $a/b=c$, donde $c<a$.	obtendrá un número positivo. Pero si a y b tienen signos distintos su cociente es negativo y es mayor que a si a es negativo.
La potencia es una extensión de la multiplicación y ésta de la adición, por lo tanto se interpretará también como un incremento.	Si $a<0$, $(a)^{2n}>0$ si $n>0$ se da un incremento, pero $(a)^{2n-1}<0$ (no hay incremento).

Los resultados da los que se ha llegado con este trabajo de investigación muestran que el profesor de primaria que trabaja el tercer ciclo y el de primero de secundaria deben tener presentes estas diferencias entre los números naturales y los números con signo para tener mayor éxito en la enseñanza de los números con signo.

En este sentido, vale la pena destacar que la evidencia empírica obtenida en esta tesis sugiere enfáticamente que es posible abordar no sólo la enseñanza de la suma y la sustracción en primer grado de secundaria como lo estipula el programa actual, sino que resulta favorable incluir en este grado la multiplicación y la división en un ambiente basado en la calculadora, como un antecedente que ofrece un apoyo relevante para el desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alarcón, J. (1999). *Libro para el maestro*. Educación secundaria. Matemáticas. SEP. México.

Alarcón, J. (2001). *Libro para el maestro. Educación secundaria. Matemáticas. SEP. México.*

Alarcón, P. (1990). *Jugamos con los enteros.* Grupo de matemáticas. Centro de profesores de Alcalá de Henares. Ministerio de Educación y Ciencia.

Análisis de los niveles de dominio de los resultados de los exámenes del CNA 2002-2003. Curso: "La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria. Noviembre 2002.

Antología. (1993). *Teorías del aprendizaje*. SEP. E-321. UPN. México.

Bell, A. (1986). *Diagnostic Teaching. A Report o fan ESRC Project.* University of Nottingham: Shell Centre for Mathematical Education.

Blaxter, L y Cols. (2000). *Cómo se hace una investigación.* Biblioteca de educación. Herramientas universitarias. Editorial Gedisa. Barcelona, España.

Bloedy- Vinner, H. (1994). The analgebraico mode of thinking – the case of parameter. *Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. II, 88-95.*

Boulton–Lewis (1997). The transition from arithmetic to algebra: a cognitive perspective. *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* 2, 185-92.

Bruner, J. (1982). *The formats of Language Acquisition*. American Journal of Semiotics. Vol. 1. Nº 3.

Bruner, J. (1983). *Child's talk*. New Cork: Norton.

Bruno, A. y Espinel, M. (2002). *Problemas aditivos con números negativos: estudio sobre tres métodos de enseñanza con alumnos de nivel medio* *básico.* Artículos de Investigación. Educación Matemática. Vol. 14. Nº 1. Grupo Editorial Iberoamérica.

Bruno, A. y Martinón, A. (1994). *La recta en el aprendizaje de los números negativos. Suma*. No. 18.

Cedillo, T. (1996). *Algebra as a Language in-use: A study with12-13 year olds using graphic calculators.* Doctoral dissertation. University of London, Institute of Education, UK.

Cedillo, T. (1997). Algebra as language in use: a study with 11-12 year olds using graphic calculators. *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. 2, 137-44.

Cedillo, T., 2001. Towards an Algebra Acquisition Support System: A study based on using graphic calculators in the classroom. Mathematical Thinking and Learning, Vol. 3, Num. 4, pp 221-260. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, USA.

Cedillo, T. (2003) "El álgebra como lenguaje en uso: Una alternativa plausible como factor de cambio en las concepciones y prácticas de los profesores de matemáticas". Centro de Informática y Educación. UPN. México.

Cedillo, T. (1999). Introducción al álgebra. *Sentido numérico e iniciación al álgebra*. La Calculadora en el Salón de Clase. Vol. 1. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Chaiklin, S. y Lesgold, S. (1984). Prealgebra Student`s Knowledge of Algebraic Task with Arithmetic Expressions. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, New Orleans, LA.

Chomsky, N. (1957). *Learning and the Structure of Language*. University of Chicago.

Cortes, A. (1998). Implicit cognitive work in putting word problems into equation form. *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. 2, 208-15.

Cofman, J. (1981). Operations with negative numbers. Mathematics Teaching.

Crowley, L., Thomas, M. and Tall, D. (1994). Algebra, symbols, and translation of meaning. Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. II, 240-7.

Davis, R. (1988). The interplay of algebra, geometry and logic. Journal of Mathematical Behaviour. 7, 99-28.

Diccionario (2001). “Nuevo Espasa ilustrado”. España.

Diccionario (1998). “Ciencias de la educación”. Santillana. México.

Douady, R. (1997). Didactic engineering. In Nunes, T. and Bryant, P. (eds). Learning and Teaching Mathematics: An International Perspective. Hove, East Sussex: Psychology Press Ltd.

Ernest, P. (1985). The number line as a teaching aid. Educational Studies in Mathematics.

Fischbein, E. (1987). Intuition in Science and Mathematics. Dordrecht, The Netherlands: Reidel.

Filloy, E. (1991). Cognitive tendencies and abstraction processes in algebra learning. Editor: Fluvia Furinghetti. Proceedings of the XV Psychology of Mathematics Education. Vol. 2, Assisi, Italia.

Filloy y Rojano, T. (1984). La aparición del lenguaje aritmético-algebraico. L’Educazione Matematica. Año V, No. 3.

_____ , _____ (1985). Operating the unknown and models of teaching (a clinical study with 12-13 year olds with a high proficiency in pre-algebra). Editors: Suzanne K. Damarin, Marilyn Shelton. Proceedings of the Seventh Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter.

Fischbein, E. (1987). Intuition in Science and Mathematics. An Educational Approach. Reidel, Holland. Chapter 8: The practicality of intuitive meanings, analysis of an example: the negative numbers.

Freudenthal, H. (1983). Mathematics as an educational task. Chapter XII. Reidel. Dordrecht.

______ (1985). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Chapter XV. Reidel. Dordrecht.

______ (1991). Revisiting Mathematics Education. Dordrecht: Kluwer Academia Publishers.

Gallardo, A. (1994). El estatus de los números negativos en la resolución de ecuaciones algebraicas. Cinvestav. IPN. Tesis Doctoral. México.

Glaeser, G. (1981). Epistemologie des nombres relatifs. Recherches en Didactique des Mathematiques. Vol. 2 No. 3.

Goodchild, S. (1995). Seven dimensions of learning – a tool for the analysis of mathematical activity in the classroom. Proceedings of the 19th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. (Recife, Brazil). 3, 113-20.

Graham, A. and Thomas, M. (1997). Tapping into algebraic variables through the graphic calculator. Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 3. 9-16.

Gray, E y Tall, D. (1994) Duality, ambiguity and flexibility: a perceptual view of simple arithmetic. Journal for Research in Mathematics Education. 26, 115-41.

Harper, E. (1987). Ghosts of Diophantus. Educational Studies in Mathematics. 18, 75-90.

Hernández, G. (1999). Paradigmas en Psicología de la Educación. Piados educador. México.

Herscovics, N y Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. Educational Studies in Mathematics. 59-78.

Hart, K. (1981). Children's Understanding of Mathematics 11-16. London: John Murray.

Janvier, C. (1985). Comparison of models aimed at teaching signed integers. Proceedings of the Nineth Meeting of the PME. State University of Utrecht. The Netherlands.

Kieran, C. (1989). The early language of algebra: a structural perspective. In Wagner, S. and Kieran, C. (eds). Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra. Virginia: National Council of Mathematics Teachers (Lawrence Erlbaum Associates). 159-96.

______ (1992). The learning and teaching of school algebra. In Grouws, D. A. (ed.). Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. NY: Macmillan. 390-419.

Kilpatrick, J. (1992). A History of Research in Mathematics Education. En Grouws, D.A., (Ed), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. National Council of Teachers of Mathematics. Macmillan Library Reference, Simon & Schuster Macmillan, Part I, 3-38. New York, USA.

Kuchemann, D. (1981). Algebra. In Hart, k. (ed). Children's Understanding of Mathematics: 11-16. John Murray. 102-19.

Lee, L Wheeler, D. (1989). The arithmetic connection. Educational Studies in Mathematics. 20, 41-54.

Lins, R. (1994). Eliciting the meanings for algebra produced by students: Knowledge, justification and semantic fields. Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. II, 184 - 91

Linchevski, L. y Herscovics, N. (1994). Cognitive obstacles in pre-algebra. Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. III, 176-83.

_____ (1996). Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra: Operating on the unknown in the context of equations. Educational Studies in Mathematics. 30, 39-65.

Lesh, R. Post, T. and Behr, M. (1987). Dienes revisited: Multiple embodiments in computer environments. In Wirzup, I. and Streit, R. (eds). Development in School Mathematics Education Around the World. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. 647-80.

Mancera, E. (1991). “La matemática en la educación básica: El enfoque de la modernización Educativa”. Revista: Educación Matemática. Vol. 3. N° 3. Diciembre. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Miles, M. and Huberman, A. (1984). Qualitative Data Analysis, a Sourcebook of New Methods. SAGE Publications, London.

Monaghan, J. (1995). Student learning in a computer algebra environment: Where are we and where do we go from here?. Proceedings of the Third British Congress of Mathematics Education. Manchester Business School. 263-70.

Nickson, M. (2000). Teaching and Learning Mathematics. A Teacher’s Guide to Recent Research and its Application. New York, USA.

Noddings, N. (1993). Politiciaing the mathematics classroom. In Restivo, S., Van Bendegem, J. and Fischer, R. (eds). Math Worlds: Philosophical and Social Studies of Mathematics and Mathematics Education. Albany: State University of New York. 150-61.

OECD (2000). The PISA 2000 Assessment of Reading, Mathematical and Scientific Literacy. Programme for International Student Assessment. Paris, Francia.

Peck, D. y Jencks, S. (1988). Reality, arithmetic, algebra. Journal of Mathematical Behaviour. 7. 85-91.

Peled, I. (1991). Levels of Knowledge about signed numbers: Effects of age and ability. Proceedings of Fifteenth Annual Psychology of Mathematics Education Conference. Vol. 3. Furinghetti, F. (editor). Assisi, Italy.

Piaget, J. (1960). Introducción a la epistemología genética. El pensamiento matemático. Biblioteca de Psicología Evolutiva. Paidós. Buenos Aires, Argentina.

Pimm, D. (1995). Symbols and Meanings in School Mathematics. London: Routledge.

Polya, G. (1945). How to solve it (2a. Ed.). Nueva York: Doubleday Anchor Books.

Polya, G. (2002). “Cómo plantear y resolver problemas”. Trillas. México.

Ramos, G. (2005). Educación 2001. Revista mexicana de educación. Núm. 117. Febrero.

Reggiani, M. (1994). Generalizations as a basis for algebraic thinking: observations with 11-12 year old pupils. Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. IV, 89-96.

SEP. (1993). Plan y Programas de estudio. Educación Básica. Secundaria. México: Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos.

SEP. (2003). Saberes científicos, humanísticos y tecnológicos: procesos de enseñanza y aprendizaje. El campo de la educación matemática, 1993-2001. La investigación educativa en México. 1992-2002. México: Consejo Mexicano de Investigación Educativa.

Resnick, L. (1991). “La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos”. Ministerio de Educación y Ciencia

Rojano, T. (1985). Tesis de Doctorado. De la aritmética al álgebra (estudio clínico con niños de 12 a 13 años de edad). Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. México.

______ (1991). Revista Educación Matemática. Grupo Editorial Iberoamérica. Vol. 3 No. 3.

Romero, S. (1999). Tesis de Maestría. El modelo de la recta como instrumento de investigación en la descripción de las dificultades en la adición y sustracción de números con signo. Cinvestav. IPN. México.

Saenz-Ludlow, A. y Waldgrave, C. (1998). Third Graders` interpretations of equality and the equal symbol. Educational Studies in Mathematics. 35, 153-87.

Sfard, A. (1989). Transition from operational to conceptual construction: The notion of function revisited. In Vergnaud, G., Rogalski, J. and Artigue, M. (eds). Proceedings of the 13th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. III, 162-9.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects, as differents sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics.

Sfard y Linchevski (1994). The gains and pitfalls of reification – the case of algebra, Educational Studies in Mathematics. 26, 191-228.

Sutherland, R. (1987). A study of the use and understanding of algebra related concepts within a Logo environment. In Bergeron, J. C., Herscovics, N and Kieran, C. (eds). Proceedings of the 11th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. I, 241-7.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variable. In Coxford, A. F. and Shulbert, A. P. (eds). The ideas of algebra K-12. Reston, Virginia: NCTM 8-19.

Tall, D. and Tomas, M. (1991). Encouraging versatile thinking in algebra using the computer. Educational Studies in Mathematics. 22, 191-228.

Tomas, M and Tall, D. (1988). Longer term conceptual benefits from using a computer in algebra teaching. Proceedings of the 12th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Veszprem, Hungary.

Tyler, R. (1986) Principio básicos del currículo. Ediciones Troquel. Argentina.

Vergnaud, G. (1997). The nature of mathematical concepts. In Nunes, T. and Bryant, P. (eds).

Vygotsky, L. (1962). Thought and Language. Cambridge, Mass. MIT Press.

Waldgrave (1998)

Wertheimer, M. (1959). Productive thinking (edición aumentada). Nueva Cork: Harper y Row. /Originalmente publicado en 1945). (Traducido al castellano: El pensamiento productivo, Barcelona, Paidós. 1991).

Yerushalmy, M. (1997). Emergence of new schemes for solving algebra Word problems: the impact of technology and the function approach. Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 1, 165-78.