SECRETARÍA DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTE

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

UNIDAD UPN 042

PROCEDIMIENTO DIDACTICO PARA LA ENSENANZA DE LAS MATEMATICAS A LOS ALUMNOS DE PRIMER GRADO DE PRIMARIA

TESIS

Que para obtener el título de:

LICENCIADO EN EDUCACION

PRESENTA:

ESMERALDA SANCHEZ DOMINGUEZ

CIUDAD DEL CARMEN, CAMPECHE 2002

INDICE

INTRODUCCIÓN

Las matemáticas propiamente dichas surgen con el ser humano, de una u otra estructura es la manera más antigua del pensamiento humano. De esta forma, ninguna disciplina posee en el grado que tienen las matemáticas, la profundidad de la abstracción, entendida esta como la actividad intelectual que consiste en considerar aisladamente un aspecto de la realidad o un fenómeno en sus estrictas dimensiones y cualidades, aislándola del todo.

Bertrand Russel, consideraba a las matemáticas como un excepcional ejercicio para el desarrollo de la mente y de la capacidad intelectual. "Una gimnasia para el cerebro".

De hecho, cuando se inicia el pensamiento de la humanidad de una manera sistematizada y se origina la filosofía no se concibe un pensador que no conociera las matemáticas. Así, en la Grecia antigua, consideraba como cuna de la civilización, las matemáticas, abordadas por los filósofos alcanzan gran esplendor. No hay filosofo que no sepa matemáticas.

Más adelante, cuando la civilización griega entra en decadencia y emerge el barbarismo romano con todas sus consecuencias, entre ellas, el inicio de la era cristiana y la supresión de las bellas artes, como la arquitectura y la medicina, las matemáticas, como una ciencia pura, como una manera de razonamiento profundo, sobrevive al dogmatismo de la escolástica y sigue creciendo.

De hecho las matemáticas (afirmaba Galileo) son el lenguaje con el que Dios escribió al mundo. Hasta ahora no existe ser alguno sobre la faz de la tierra que en su estructura no tenga que ver con las matemáticas.

Las matemáticas se encuentran en la música, en la belleza humana, en la naturaleza, en nuestra vida cotidiana, en todo.

Entonces si las matemáticas son tan bellas e importantes ¿por qué existen tan pocos estudiosos de estos temas?

Un ejercicio que a los docentes nos preocupa es cuando estamos dialogando en el salón de clases y le preguntamos a los niños les gustan las matemáticas ¿Si es así? levanten las manos. Lamentablemente con preocupación se observa que muy pocas manecitas se levantan.

¿Qué provoca esta situación? ¿Por qué a los niños no les gustan las matemáticas? ¿Las matemáticas en realidad son áreas difíciles ó hace falta una estrategia adecuada del maestro para poder enseñarla?

Este trabajo de investigación surge al plantearse el problema: ¿Cuál es el procedimiento didáctico conveniente para la enseñanza de las matemáticas a los alumnos del primer grado de educación primaria?

Para el estudio se consideró conveniente el primer año de educación primaria porque es allí donde el maestro consolida el cimiento de la formación del niño. Desde el primer año, el maestro puede sembrar el interés o el rechazo de estudio hacia las matemáticas.

Si el maestro se equivoca en la estrategia de enseñanza, el niño ya está afectado por la discalculia y esto incidirá en su desarrollo posterior.

De acuerdo al contexto anterior, como hipótesis de trabajo se partió de lo siguiente:

El procedimiento mas adecuado en la enseñanza de las matemáticas es aquel que reconoce, respeta y aprovecha el conocimiento informal de las matemáticas que los niños adquieren extraescolarmente porque cimenta la enseñanza de la aritmética en un contexto significativo.

Con la inquietud e interés por contestar las interrogantes antes planteadas y poder demostrar nuestro supuesto, se plantearon los objetivos siguientes:

- Analizar como se ha construido el conocimiento matemático.
- Destacar que es el número como se construye y para que sirve
- Proponer un procedimiento didáctico, para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Con los elementos antes señalados se determinó como método de análisis el descriptivo puesto que se limita a explicar desde una postura documental (no se realizó trabajo de campo) como se ha manifestado el desarrollo de las matemáticas y la forma en que se enseña en el primer año de primaria. Por ello, cabe aclarar que no se manipularon las variables, es decir, se centró en presente trabajo documental en la descripción de las situaciones y de los eventos, buscando destacar las características más relevantes.

Por ello, en el Capítulo 1, se aborda los antecedentes de las matemáticas, lo cual nos ha llevado a darnos cuenta de algo muy importante como lo es, que desde la época de las dinastías ya se empleaban documentos matemáticos como el Papiro de Rhind y que los Babilonios resolvían ecuaciones cuadráticas y conocían el Teorema de Pitágoras, mismo que se utiliza en la actualidad para resolución de algunos problemas matemáticos.

Así también, el conocimiento matemático, participa de un universo de formas relacionales, por lo que es un error suponer que un niño adquiere la noción del número y otros conceptos matemáticos a través de la enseñanza.

Cabe mencionar que para que se construya el conocimiento matemático, el niño deberá enfrentarse a problemas o situaciones que "amen su atención y así se acercará a las matemáticas.

En el capítulo 2 se destaca como algo primordial para la enseñanza-aprendizaje, el número, el cual se define como palabra o símbolo utilizado para designar cantidades o entidades y la numeración, como sistema de símbolos o signos utilizados para expresar los números.

En la Antigua Grecia, existieron dos tipos de numeración paralela, la primera basada en las iniciales de los números y la segunda se utilizaban todas las letras del alfabeto griego más otras tres tomadas del alfabeto fenicio, así como también la numeración romana que expresaba los números con solo 7 símbolos y la que se usa hoy en día, la numeración Arábiga.

Al desarrollar el número, el niño construye un significado para el cual elaborará luego un significante; por lo que se aclara que la clasificación y la seriación están íntimamente relacionadas con las operaciones, ya que clasificar, es juntar por semejanzas y separar por diferencias mientras que la seriación, establece relaciones entre elementos que son diferentes en algún aspecto y ordenan esas diferencias.

Para que el niño pueda denominar el número, deberá ser a través de repetidas experiencias de conteo, ya que ellos ahí reflexionan y descubren regularidades importantes de los números en la relación de contar, y se deberá reconocer, respetar y aprovechar el conocimiento informal sobre el número que adquieren los niños extraescolarmente.

En el capítulo 3 se destaca lo mas relevante de la teoría Piagetana que nos permite deducir el desarrollo cognoscitivo del niño hacia el aprendizaje del número, mediante cuatro factores: maduración biológica, actividad, experiencias sociales y equilibrio que interactúan e influyen sobre los cambios del pensamiento, muchas pruebas indican que un marco general de pensamiento se forma gradualmente, a partir de los primeros intentos del niño por sistematizar el mundo que encuentra.

La comprensión del número, es inicialmente funcional y no verbal, de este modo, el niño aprende a conservar el significado del número, pese a la seducción de forma, tamaño o espacio.

Arribar al capítulo 4 no fue empresa sencilla, puesto que los capítulos anteriores son muy vastos que dificultan el poder tratarlos con profundidad, así en este capítulo se destaca el campo de la didáctica del número, en la cual Ferh, señala que existen tres formas para el estudio del proceso de aprendizaje: la fisiológica, la fisiológica-observacional y la introspectiva, para ello debemos tener en consideración que Piaget considera el aprendizaje como un proceso constructivo que requiere de la participación activa del individuo, los niños antes de llegar a tener uso de razón son incapaces de comprender el número y la aritmética, estos aprenden a recitarlos a muy corta edad de forma verbal y sin significado; por lo que empleaba el Modelo Cardinal, el cual consiste en que los niños deberán entender la clasificación antes de comprender el significado del número.

Para arribar a las conclusiones donde de forma sintética se demuestran los alcances de los objetivos planteados y la hipótesis propuesta tomemos como ejemplo claro los trabajos que Piaget ha realizado en busca de lograr una enseñanza-aprendizaje del conocimiento matemático que nos guíe hacia la comprensión del número de forma sencilla y que el niño no tenga una idea confusa del significado del número sino al contrario se familiarice con él.

Además algo muy concreto es que las matemáticas sean de manera demostrativa en relación con la realidad, un juego al que solo algunos aprenden a jugar y cuyo resultado es memorizado.

Para finalizar, cabe mencionar que este trabajo representa un amplio esfuerzo que aunque trata de plasmar lo mejor del esfuerzo realizado es algo inacabado, puesto que las matemáticas están en constante crecimiento, en constante cambio y son temas muy profundos.

CAPITULO 1

1. ANTECEDENTES DE LAS MA TEMATICAS.

Aprender matemáticas es muy difícil, sin embargo muy pocas veces se busca una explicación del porque no se aprende matemáticas, muchas veces 'c los alumnos no aprenden porque no saben relacionar los conocimientos que se le proporcionan en la escuela con los problemas que se le presentan en la vida real ó el aprendizaje no es significativo.

"Se considera que las matemáticas son un arte en el que se crean grandes sinfonías con ideas, así como bellísimas piezas pequeñas. También las matemáticas son un arma poderosa para comprender, planear y cada vez se van infiltrando más y más en todas las disciplinas, enriqueciéndose con ideas nuevas; lo cual implica una tremenda responsabilidad.

T odas las ramas de las matemáticas tuvieron su origen en problemas concretos (no necesariamente útiles) y al principio fueron inconexas, desorganizadas y bastantes triviales, solo con el tiempo demuestran su verdadera fuerza.

La teoría de la probabilidad surgió por una discrepancia entre jugadores ociosos y hoy es un arma insustituible de todas las ciencias sociales. La geometría se originó, según se dice, en un problema del cual dependía toda la economía del antiguo Egipto, se volvió belleza pura con los griegos y aguda herramienta con Descartes y alguna de sus descendientes se cultiva en la actualidad por su belleza propia. Es bien sabido que los hombres han hecho cálculos y estudiado figuras geométricas antes de saber escribir, pues los números aparecen en los primeros escritos y muy poco después se conoce unas matemáticas altamente desarrolladas.

Tres mil años a.C., los babilonios ya sabían resolver ecuaciones cuadráticas y conocían el familiar teorema hoy erróneamente Itamado de Pitágoras. ¿Para que servían estas matemáticas? pues, sencillamente para los cálculos comerciales, para el calculo de impuestos, para medidas topográficas, para la confección de calendarios y otros fines semejantes, desde un principio las matemáticas fueron más allá de los límites" .El juego con números y cifras era un fin en sí mismo.

Con el transcurso del tiempo surgieron nuevas aplicaciones, una de las más importantes fue la astronomía, también desarrollada en babilonia durante el primer milenio a.c. y recogida por los griegos, quienes le dieron una forma que había de permanecer invariable durante más de mil años.

Durante este proceso, la matemática pura fue siempre por delante, tanto en forma como en contenido. Los griegos incrementaron enormemente lo que había heredado de 105 babilonios e incluso añadieron algo nuevo. Transformaron las matemáticas en un sistema lógico, deducciones lógicas, llamadas premisas, hasta llegar a conclusiones.

Las matemáticas ha permanecido en vigor hasta hoy; en el transcurso de su desarrollo las matemáticas ha trascendido no sólo más allá de sus propias fronteras, si no a través de los límites que separan las diferentes partes de las matemáticas.

Antiguamente, era posible distinguir con cierta dificultad, entre la matemática pura y la aplicada, o entre la geometría, el álgebra y el análisis; hoy es imposible decir donde termina la otra.

"Una definición de la matemática por su método es mucho más estable y no ha cambiado desde la antigüedad griega hasta nuestros días"[1].

La matemática desarrolla, a partir de nociones fundamenta1es, teorías que se valen únicamente del razonamiento lógico.

El objeto sobre el cual versa el razonamiento matemático es por sí mismo arbitrario. Basta con que un determinado sujeto de estudio permita el tratamiento matemático, que le

[1] López de Medrano, Santiago, MODELOS MATEMÁTICOS, 1972; pp. 76- 78

interese a un matemático, o aquellos con beneficios de los cuales trabaja, para que nazca un nuevo capítulo de la matemática.

Desde la más remota antigüedad el concepto de Matemáticas se identificó con el de ciencia de los números y de las figuras.

Ninguna otra disciplina posee, como las Matemáticas, en un grado tan profundo y preciso el factor de la abstracción. Esta característica ha permitido el desarrollo de las Matemáticas en dos planos diferenciados; uno como ciencia en sí misma y otro, quizás el más importante, como ciencia auxiliar fundamental de otras disciplinas: la física, la química, biología y otros tantos. Como ciencia en sí misma, las Matemáticas son un excepcional ejercicio para el desarrollo de la mente y de la capacidad intelectual.

La división primordial de las matemáticas pasa como señalo un día G. F. Cantor, por el campo de los números y sus infinitas combinaciones y por el campo de la representación de las figuras, ya sea en el plano o bien en el espacio. Este es, pues, el punto de partida para penetrar en el complejo y sugerente mundo de las Matemáticas.

Existen muchas definiciones de la palabra matemáticas. Una de ellas es ésta: ciencia de la cantidad y de sus propiedades y relaciones. Los griegos la definían como ciencia que se ocupa del estudio de los números y de las figuras. Las matemáticas tienen dos vertientes fundamentales: la aritmética y la geometría. Claramente diferenciadas en la antigüedad, hoy cada una se ha subdividido en multitud de ramas conectadas entre sí.

"El papiro de Rhind, es el más importante documento egipcio desde el punto de vista matemático y geográfico. Pertenece a la época de las dinastías XV y XVI (1750-1650 a. c.) fue descubierto en 1876 por el estudioso Henri Rhind y se encuentra en el British Museum de Londres. Constituye una prueba fehaciente de la antigüedad de las matemáticas"[2].

---

[2] Enciclopedia Temática Estudiantil, OCÉANO, 1998, Pág. 172.

1.1. EL CONOCIMIENTO MATEMATICO.

Participa de un universo de formas relacionales, en donde se sitúa entre las formas puras del pensamiento que corresponden a los objetos lógicos ya los objetos concretos de la experiencia empírica y la matemática de la actualidad se inclina más del lado de los primeros que del lado de los segundos: el formalismo parece prevalecer sobre la intuición.

Es un error suponer que un niño adquiere la noción del número y otros conceptos matemáticos exclusivamente a través de la enseñanza, ya que de una manera espontánea y hasta un grado excepcional los desarrolla independiente él mismo.

Cuando un adulto quiere imponer los conceptos matemáticos a un niño antes del tiempo debido, el aprendizaje es únicamente verbal puesto que el verdadero entendimiento viene únicamente con el desarrollo mental.

En la teoría del desarrollo cognitivo con los trabajos de Piaget, quién manifestaba que cuando los individuos cooperan en el medio, ocurre un conflicto socio-cognitivo que crea un desequilibrio que a su vez estimula el desarrollo cognitivo, para éste las matemáticas constituyen una prolongación directa de la lógica que preside las actividades de la inteligencia puestas en obra en la vida ordinaria y por tanto es difícil concebir que algunos sujetos bien dotados en la elaboración y utilización de las estructuras lógico-matemáticas espontáneas de la inteligencia se vean impedidos en la comprensión de una enseñanza que se refiera exclusivamente a lo que puede obtenerse de tales estructuras.

Hoy, es el número, una conquista de la escuela elemental, toda vez que se limita a enseñar la correspondencia, de término a término entre dos conjuntos y la relación, evitando a toda costa en caer en los mecanismos ciegos de la numeración, los cuales tienen un profundo significado por la aplicación del conjunto de los números en el conjunto de objetos numerados.

1.1.1. LA CONSTRUCCION DEL CONOCIMIENTO MA TEMATICO

Cuando nos enfrentamos a problemas o situaciones que llaman nuestra atención, en ambos casos lo que hacemos para resolver los primeros y para explicarnos las segundas es representarlos mentalmente ya veces por escrito o por medio de dibujos y trabajar con estas representaciones.

Esto es precisamente lo que se necesita para empezar a acercarnos alas matemáticas. En esta forma, toda persona dispuesta a leer cuidadosamente a esforzarse por hacer representaciones y manipular estas representaciones hasta dominarlas, puede aprender matemáticas.

G. Mialaret, señala que la enumeración o numeración contribuye a habituar al niño a poner en orden los objetos que componen 1O8 conjuntos.

"Sleminska y Jean Piaget, demuestran que los experimentos sobre todo uno, el intercambio uno contra uno con numeración, no basta unir la numeración a la puesta en correspondencia para lograr concebir el número cardinal de un conjunto"[3].

El niño de 2 a 5 años, de manera espontánea logra el conocimiento de los cuatro o cinco primeros números, a razón de una unidad por año, se conoce como un conocimiento independiente de toda sistematización: cada número es conocido por sí mismo y es reconocido a través de la captación perceptiva del conjunto.

Mientras van avanzando en conocimiento, también pueden aprender el arte y la habilidad del razonamiento, de la solución de problemas, de adquirir y ordenar la información que tiene sentido para ellos. El docente debe atentarlos concienzudamente a registrar su experiencia, a predecir en toda experimentación, a sacar inferencias, ya formular hipótesis y establecer definiciones operativas.

---

[3] Sleminska, Pedagogía las formas de Cálculo, Pág. 32.

El docente moderno, escucha y observa a los niños para poder adaptar sus recursos a lo que ve y oye, reconoce que niños y niñas pueden tener intereses tanto distintos como coincidentes, toma en cuenta factores de la etapa de desarrollo de los niños, como el grado en que dependen de ejemplos más que de palabras, su capacidad de enfrentarse a símbolos más que a las cosas reales, el vuelo de su fantasía, y la profundidad y los límites de su objetividad al pensar.

"El conocimiento del número no puede construirse indefinidamente por yuxtaposición basada en la simple interacción de la unidad. El número no tiene ningún valor y ningún interés sino como elemento de una estructura que le confiere su poder y que corresponde al sistema, de enumeración al que pertenece"[4].

“El agrupamiento o acción de agrupar que con diez unidades de un orden cualquiera permite construir una del orden inmediatamente superior, basta para ello; es ya bastante difícil concebir "uno puede sustituir a diez" y es preciso estar perfectamente seguro de estos”[5].

"Desde el punto matemático, la medición y la numeración son operaciones idénticas puesto que se trata, cada vez, de la aplicación de un conjunto que define al objeto medido en otro conjunto, que es el de los números.

La intuición, pasar de la numeración a la medición, es pasar de lo discontinuo a lo continuo"[6].

La formalización, sigue a la intuición puesto que las formas son necesarias para precisar la idea primera.

"La construcción intuitiva del número conduce a yuxtaponer los aspectos bajo los cuales se le encuentra y que constituyen sub clases de un conjunto que se construye por encajamientos sucesivos"[7].

---

[4] Antología, "LA MATEMÁTICA EN LA ESCUELA II", UPN, México, 1988, Pág. 31
[5] Ibídem, Pág. 34
[6] OP. CIT. "LA MATEMÁ TICA EN LA ESCUELA II", 1988, Pág. 32
[7] OP. CIT. "LA MATEMÁ TICA EN LA ESCUELA II" , Pág. 36

"El estudio concreto, en la escuela elemental se propone desde el segundo grado, ejercicios de observación y trabajos sobre objetos geométricos"[8].

Se trata esencialmente de organizar los conceptos, primero haciendo más flexible su extensión. Cuando el alumno percibe su extensión. Cuando el alumno percibe un trapecio cuyas bases son verticales juega con reconocerlo; un cuadrado es fácilmente reconocido cuando aparece como elemento de una figura compleja, cuando sus lados son horizontales y verticales, se reconoce menos fácilmente cuando forman un ángulo de 45°, con estas direcciones; las noticias de oblicuidad y de perpendicularidad son difíciles de captar fuera de la pareja horizontal-vertical.

El sujeto construye la figura según la descripción que da el enunciado pero sobre todo, por el análisis que aplica a los datos y por la síntesis en que consiste la demostración.

Los niños no aprenden en paquetes limpiamente separados de preguntas para exámenes, y el contenido de su mente rara vez es comparable al orden de la mente del pedagogo, pueden llegar a saber mucho de un tema, pero es probable que este conocimiento esté organizado de manera dispareja, hasta en los temas específicos que más les interesen.

Su aprendizaje, como el de los adultos, se ve influido por sus gustos y sentimientos, todo aquello en que los niños estén recién interesados se derrama sobre lo que ya 7 8 sabían o sobre lo que desean saber, mezclan la ciencia, las matemáticas, la poesía, lo movimientos corporales y los sentimientos con gran facilidad al examinar los problemas que les interesan.

Los niños están integrados y son de una sola pieza; su aprendizaje procede de manera integrada, asimilan y adaptan a su propio ritmo y tiempo las experiencias que buscan independientemente o las que eligen entre las instrucciones que les dan sus docentes.

---

[8] PROGRAMME, Pág. 32.

CAPITULO 2

2. EL NÚMERO

"Palabra o símbolo utilizado para designar cantidades o entidades, que se comporten como cantidades. Es la expresión de la relación existente entre una cantidad y otra magnitud que sirve de unidad. Se pueden considerar números todos aquellos conceptos matemáticos para los cuales se definen dos operaciones, de adición y multiplicación, cada una de las cuales obedece a las propiedades conmutativas y asociativas.

La numeración, sistema de símbolos o signos utilizados para expresar los números.

Las primeras formas de notación numérica consistían simplemente en líneas rectas, verticales u horizontales; cada una de ellas representa el numero 1. Por lo que este sistema era exactamente engorroso para manejar grandes números y para hacer operaciones. Ya en el año 3400 a. C. En Egipto y Mesopotámia se utilizaba un símbolo específico para representar el número 10.

En la notación cuneiforme de babilonia el símbolo utilizado para el 1, era el mismo para el 60 y sus potencias; el valor del símbolo venía dado por su contexto.

En la antigua Grecia coexistieron dos sistemas de numeración paralelos. El primero de ellos estaba basado en las iniciales de los números, el (delta) el1 000 (PI); el 10 con la letra D número 5 se indicaba con la letra (mu). O(chi) y el 1000 con la letra D (eta); el1 000 con la letra D. En el segundo sistema eran usadas todas las letras del alfabeto griego más otras tres tomadas del alfabeto fenicio como guarismos. La ventaja de este sistema era que con poca cantidad de números se podían expresar grandes cifras; pero había que saberse de memoria un total de 27 símbolos.

La numeración romana, este sistema (tan bien conocido por nosotros) tuvo el mérito de ser capaz de expresar los números del 1 al 1.000.000 con solo siete símbolos: I para el 1, V para el 5, X para el 1 0, L para el 50, C para el 1 00, D para el 500 y M para el1 000. Es importante acotar que una pequeña línea sobre el número multiplica su valor por mil.

En la actualidad los números romanos se usan para la historia y con fines decorativos. La numeración romana tiene el inconveniente de no ser práctica para realizar cálculos escritos con rapidez.

La numeración arábiga, es el sistema corriente de notación numérica que es utilizado hoy y en casi todo el mundo es la numeración arábiga. Este sistema fue desarrollado primero por los hindúes y luego por los árabes que introdujeron la innovación de la notación posicional; en la que los números cambian su valor según su posición. La notación posicional solo es posible si existe un número para el cero. El guarismo O permite distinguir entre 11, 101 y 1001 sin tener que agregar símbolos adicionales. Además todos los números se pueden expresar con sólo diez guarismos, del 1 al 9 más el 0. La notación posicional ha facilitado muchísimo todos los tipos de cálculos numéricos por escrito.

En matemáticas, varios sistemas de notación se han usado o se usan para representar cantidades abstractas denominadas números. Un sistema numérico está definido por la base que utiliza. La base de un sistema numérico es el número de símbolos diferentes o guarismos, necesarios para representar un número cualquiera de los infinitos posibles en el sistema.

A lo largo de la historia se han utilizado multitud de sistemas numéricos diferentes.

Valores posicionales. -La posición de una cifra indica el valor de dicha cifra en función de los valores exponenciales de la base. En el sistema decimal, la cantidad representada por uno de los diez dígitos -O, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9- depende de la posición del número completo.

Para convertir un número n dado en base 10 a un número en base b, se divide (en el sistema decimal) n por b, el cociente se divide de nuevo por b, y así sucesivamente hasta obtener un cociente cero.

Sistema binario.-EI sistema binario desempeña un importante papel en la tecnología de los ordenadores. Los números se pueden representar en el sistema binario como la suma de varias potencias de dos.

Ya que sólo se necesitan dos dígitos; el sistema binario se utiliza en ordenadores y computadoras.

CONJUNTOS NUMERICOS:

Números Naturales. -Dicho en términos muy simples, los números naturales Son los que sirven para contar.

El conjunto de los números naturales tiene las siguientes propiedades:

- Al conjunto de los números naturales pertenecen el 0 y el 1.
- Si se suma a un natural el número 1 el resultado es otro número natural.
- Por lo tanto el conjunto de los naturales es un conjunto infinito.
- Las propiedades enunciadas anteriormente constituyen el Axioma de inducción completa.

Números Enteros.- El conjunto de números enteros, es también infinito.

Son parejas de números naturales (x, y), cuya resta x-y define un número entero.

Por ejemplo: la pareja (7,3) define el entero positivo 4 ya que 7- 3 = 4.

La pareja (2,4) define el entero negativo -2 ya que 2- 4 = -2.

Existe un isomorfismo entre parte del conjunto de los números enteros y el de los números naturales; ya que el conjunto de los naturales es el de los enteros positivos.

Conjunto de los enteros también pertenece el O que está definido por todas aquellas parejas de naturales iguales (1 ,1); (56, 56); etc.

Números Racionales. -El conjunto de números racionales está integrado por parejas de números enteros cuyos elementos se dividen entre sí.

A este conjunto también pertenece el 0, que está definido por todas aquellas fracciones que tienen al 0 por numerador.

Los racionales serán positivos o negativos según sea el signo de cada uno de los integrantes de las parejas que los definen.

Así será que parejas de enteros de igual signo definirán un racional positivo; y parejas de enteros de distinto signo definirán un racional negativo.

No existen racionales cuyo denominador sea O.

Números Reales.- El campo de los números reales es más amplio que el de los racionales; ya que incluye números que no están formados por parejas de enteros. Por ejemplo la relación que existe entre una circunferencia y su diámetro no es un racional: D (número)

Se trata de un conjunto también infinito.

Siempre entre dos números reales hay otro número real; de ahí que se asocie al conjunto de los números reales con una recta. La recta está formada por infinitos puntos y cada punto representaría un número real."[9]

2.1. DESARROLLO DEL NÚMERO.

"Con base en las ideas de Delia Lerner 7 en la vida cotidiana utilizamos con frecuencia los números y en nuestra labor docente nos propondremos que los niños lo hagan"[10] de acuerdo a este comentario; nos haríamos la siguiente pregunta ¿de donde surge

[9] Enciclopedia Temática Estudiantil, OCÉANO, 1998, Pág. 175-176.

[10]

ahora? según varios autores el cual mencionaremos adecuadamente, estos matemáticos han discutido durante mucho tiempo que el concepto de número es el resultado de la síntesis de la operación de clasificación y de la operación de seriación. En estos subtemas plantearemos algunos lineamientos generales para trabajar la matemática elemental con los niños; específicamente hemos definido el concepto de número, ahora sugerimos partir al desarrollo del número el cual los niños a través de actividades colectivas encontraremos la oportunidad de discutir y confrontar diferentes puntos de vista, lo que es fundamental para avanzar en el conocimiento matemático del niño, por lo que a continuación investigaremos nuevas ideas; expandiendo el concepto de número y el desarrollo de ella.

Un número es la clase formada por todos los conjuntos que tienen la misma propiedad numérica y que ocupa un rango en una serie, serie considerada a partir también de la propiedad numérica; ya que a consideración del número distingue los 9 conceptos matemáticos de los símbolos o signos que los representan, así como comprender del significado de estos símbolos y signos, es decir, su relación con los conceptos a los que se refieren; por ejemplo el significado es el concepto o la idea que un sujeto ha elaborado sobre algo y existe en él sin necesidad de que lo exprese gráficamente, mientras que el significante gráfico es una forma a través de la cual el sujeto puede expresar gráficamente dicho significado.

El número 3 por ejemplo, es un significante gráfico cuyo significado es el concepto de número tres tenemos.

Con base en lo que hemos visto podemos decir que en toda representación gráfica el significante gráfico representa un significado.

Habiendo establecido en qué consiste la representación gráfica, reflexionemos ahora sobre su utilidad.

Cuando representamos gráficamente nuestras ideas o sentimientos ¿para qué lo hacemos? Representamos para: recordar algo que necesitamos o queremos tener presente más adelante; comunicarnos a través del tiempo y del espacio, es decir, con personas que no están presentes en el momento o en el lugar en que deseamos transmitir algo pudiendo abarcar un sin número de personas simultáneamente; expresar conceptos o ideas con mayor claridad prescindir de la presencia de objetos de la realidad ya sea por economía o por la imposibilidad de manejarlos. Podríamos seguir mencionando otras utilidades que nos brinda las representaciones gráficas pero no es necesario ya que, debido a nuestra múltiple experiencia cotidiana con las mismas, sabemos de las ventajas del uso de dichas representaciones.

También aquí para que una persona establezca la relación significado-significante requiere conocer la convención que establece que así se representa gráficamente en nuestra comunidad el concepto de número tres.

A partir de los ejemplos anteriores se puede afirmar que para comunicarnos a través de significantes arbitrario es necesario de establecer un acuerdo o convención social, de manera que todo sujeto que participe de dicho código use el mismo significante para expresar ó interpretar determinado significado sin dar lugar a equívocos en la comunicación.

Analizaremos ahora más ampliamente la relación significante-significado en el caso del número 5, ya que es este el tema central que nos ocupa.

Observemos lo siguiente:

/////	Cinco	5	00000

Lo que contiene cada uno de los recuadros ¿es el concepto de número cinco o son diferentes formas de representar gráficamente el mismo? Seguramente coincidimos en que son formas de representación gráfica a las que podríamos agregar muchas otras maneras de hacerlo, pero a pesar de todas las diferencias que hubiera entre ellas, el concepto de número cinco sería la misma situación comparando específicamente numerales que diferentes culturas utilizan o han utilizado:

}	_____	V	5
Chino (cinco)	maya (cinco)	romano (cinco)	arábigo (cinco)

¿Las personas que emplean o han empleado estos numerales tienen o han tenido un concepto diferente del número cinco? Podemos afirmar que no es así dado que el concepto de número cinco no se altera aunque gráficamente se represente de diversas maneras, concluyendo por lo tanto que concepto y significante gráfico son dos cosas diferentes, y la distinción entre ambos nos parece necesaria ya que generalmente utilizamos los significantes gráficos como si fueran los conceptos y no justamente como lo que son: formas de representar gráficamente dichos conceptos. En el caso de las matemáticas se representa frecuentemente esta situación, por .ejemplo, al usar el numeral como si fuera el concepto de número o el signo + como si fuera el concepto de suma, resta, etc.

Después de haber realizado este breve análisis podemos decir, que se justifica abordar la representación gráfica de un concepto sólo cuando el sujeto lo ha construido o lo está construyendo.

“Estas situaciones de aprendizaje que se plantea al niño, los numerales nunca deben ser considerados en forma independiente de su significado. El niño construye un significado para el cual elaborará luego un significante y, para que este significante sea tal, será necesario nunca perder de vistas su relación con el significado que representa". [11]

[11] Lerner, Delia, UNAM, México, pp. 82-94

2.2. CLASIFICACION Y SERIACIÓN

Desde aquí partimos que la clasificación y la seriación se fusionen en el concepto de número y desarrollo del número; están íntimamente relacionado con las operaciones, será necesario para comprenderlo claramente comenzar por analizar en qué consisten esas operaciones.

La clasificación, es una operación lógica fundamental en el desarrollo del pensamiento, cuya importancia no se reduce a su relación con el concepto de número. La clasificación interviene en la construcción de todos los conceptos que constituyen nuestra estructura intelectual.

En términos generales, que clasificar es "juntar" por semejanzas y "separar" por diferencias cuando digo: " estas plantas me gustan" ¿estoy clasificando? Pues claro, estoy " juntando" las plantas que por presentar ciertas cualidades tienen la propiedad común de " que me gustan" y las " separo" de todas las plantas que no reúnen estas cualidades y por lo tanto constituyen las plantas que no me gustan.

Hay que aclarar que cuando decimos "juntar" o "separar", nos referimos a acciones que generalmente no se realizan en forma efectiva o visible, no juntamos ni separamos concretamente esos elementos, lo hacemos pensándolo en forma interiorizada; no tomamos las plantas del mundo y las juntamos, ni lo hacemos con los tipos de plantas de otras países, son acciones no afectivas sobre los objetivos de la realidad.

Un mismo universo puede clasificarse de diferentes maneras, cada una dependerá del criterio de clasificaciones que elijamos; podremos a continuación establecer diversos criterios clasificatorios sobre infinidad de universo de objetos.

Veámoslo a través de un nuevo ejemplo:

Graciela y Roberto han acomodado sus libros de la siguiente manera:

Criterios clasificatorios, Contenido, Nacionalidad de los autores, Época Histórica de los autores.

GRACIELA			
Criterios Clasificatorios	**Contenido**	**Nacionalidad de los autores**	**Época**
Libros	LITERARIOS	Nacionales	Contemporáneo
			No contemporáneo
		Extranjeros	Contemporáneos
			No contemporáneo
	CIENTÍFICOS	Nacionales	Contemporáneo
			No contemporáneo
		Extranjeros	Contemporáneos
			No contemporáneo
	ARTÍSTICOS	Nacionales	Contemporáneo
			No contemporáneo
		Extranjeros	Contemporáneos
			No contemporáneo

Al organizar el libro Graciela se dio cuenta de que no tenía ningún libro científico de autor extranjero no contemporáneo, de allí que resultará que éste fuera un conjunto vació.

Criterios clasificatorios, Público al que se dirige, Tipo de encuadernación, Tamaño.

ROBERTO

Criterios clasificatorios	**Publico al que se dirige**	**Tipo de encuadernación**	Tamaño
Libros	Para adultos	Rústico	Grande
			Pequeño
		De lujo	Grande
			Pequeño
	Para niños	Rústico	Grande
			Pequeño
		De lujo	Grande
			Pequeño

Sucedió que Roberto al buscar los libros para niños con encuadernación de lujo y pequeños, encontró uno solo que reunía estas propiedades y formo con este libro un conjunto de un elemento.

Como vemos un mismo Universo puede ser clasificado con base en diferentes criterios, pensemos cómo acomodamos nuestros libros y en base a qué criterios lo hace.

Todos clasificamos en las actividades cotidianas, otros ejemplos de ello es la clasificación de los libros, otros serían al acomodar la ropa, los víveres, el dinero) etc. En la clasificación se toman en cuenta -además de las semejanzas y diferencias de otros dos tipos de relaciones: la pertenencia y la inclusión.

La pertenencia.- Es la relación que se establece entre cada elemento y la clase de la que forma parte. Esta fundada en la semejanza; es decir que un elemento pertenece a una clase cuando se parece a los otros elementos de esa misma clase, en función del criterio de clasificación que estamos tomando en cuenta.

La inclusión.- Es la relación que se establece entre cada sub clase y la clase de la que forma parte, de tal modo que nos permite determinar que la clase es mayor tiene más elementos que la sub clase.

Una de las características de los ejemplos de clasificación que hemos manejado, es que en todos ellos la clasificación se fundamenta en las cualidades de los objetos, o sea en sus propiedades cualitativas.

En el caso de los niños ser retraídos o ser desenvueltos son cualidades de los mismos, en cambio cuando nos referimos a los números la situación varía.

¿Con base en qué tipo de criterio podemos determinar que un conjunto de elementos pertenece o no a determinada clase de conjuntos? El criterio será, en este caso, un criterio cuantitativo: tener (o no) la misma cantidad de elementos que los otros conjuntos pertenecientes a la clase.

Finalmente la relación de la inclusión característica de la clasificación juega también un importante papel en el concepto del número. Las clases "cuatro", "cinco", etc., que podemos formar estableciendo relaciones de semejanza cuantitativa entre conjunto, no son clases aisladas, si no que constituyen a las que son inferiores y esta incluida en todas las superiores.

Hemos revisado algunos conceptos referidos a la clasificación, pero en un comienzo dijimos que el concepto de número es el resultado de la síntesis de las operaciones de clasificación y seriación y cual es su relación con el número, ya que al igual que la clasificación la seriación es una operación que -además de intervenir en la formación del concepto de número constituye unos de los aspectos fundamentales del pensamiento lógico.

"Seriar.- Es establecer relaciones entre elementos que son diferentes en algún aspecto y ordenar esas diferencias.

¿Cuáles serían los elementos que seriamos?

Por ejemplo:

-Sonidos que son diferentes en cuanto a su timbre, ordenándolos del más agudo al más grave;

-Vehículos cuya fecha de producción es diferente, ordenándolos de1 más antiguo al más moderno;

-Billetes de valor diferente, ordenándolos desde el que vale menos hasta el que vale más.

Finalmente la seriación operativa tiene dos propiedades fundamentales: Transitividad y Reciprocidad.

La transitividad; establece una relación entre un elemento de una serie y el siguiente y de éste con el posterior, podemos deducir cual es la relación que hay entre el primero y el último.

Tomemos como ejemplo vehículos y ordenémoslos con base en la diferencia en la fecha de producción (del más antiguo al más moderno).

La reciprocidad; relaciona dichos objetos del más económico al más caro, ya que no obstante el más antiguo es de mayor valor por su antigüedad, y el más reciente por su renovación moderno no alcanza dicha cantidad que el anterior.

Los conocimientos de las matemáticas se desarrollan paulatinamente a lo largo de la educación básica, que le permitan, entre otras cosas, manejar el contenido de diversas formas y realizar procesos en los que tengan que reorganizar sus estrategias para resolver problemas, así como los conocimientos adquiridos.

Dichas habilidades son:

- Resolución de problemas.
- Flexibilidad del pensamiento.
- Estimación.
- Reversibilidad del pensamiento.
- Generalización.
- Imaginación espacial.

Resolución de problemas: se refiere a la elaboración de estrategias para la resolución de problemas en las que se utilizan diversos recursos como el conteo, el calculo mental, la estimación y las analogías, como maestro debemos evitar un procedimiento único de resolución como el tradicional, en el que se anotan los datos, se realizan las operaciones y se escribe el resultado.

En la tendencia tradicional los problemas se consideran como enunciados en lo que aparece una pregunta y se espera en que el niño con papel y lápiz lleve a cabo, con el algoritmo convencional, una o varias operaciones para encontrar un resultado, generalmente un número. El problema en este enfoque tiene un sentido más amplio, corresponde a situaciones ricas que te permita al niño usar los conocimientos adquiridos y desplegar diversos cursos, de tal manera que se promueva la construcción de una situación problemática no siempre termina con una cantidad.

Flexibilidad del pensamiento.- Implica entre otras cosas, que el niño reconozca que un problema se puede resolver distintas formas, como maestros debemos tener siempre presente que los niños cuando resuelven algún problema o un simple ejercicio ponen en juego estrategias de resolución, las cuales no necesariamente les han sido enseñadas. A partir de esto, los alumnos dan a conocer sus procedimientos, por ejemplo utilizar cálculo mental, algún medio fotográfico o el uso del algoritmo para encontrar la solución. Así, si un problema se resuelve realizando una suma, puede también resolverse por medio de algún otro proceso usando recursos como el ábaco, o simplemente repartiendo concretamente la cantidad que se tiene.

Estimación. -Es una habilidad que permite dar una idea aproximada de la solución de un problema, ya sea en un número, el tamaño de una superficie o el resultado de una serie de operaciones. La estimación se desarrolla proponiendo al niño que dé respuestas aproximadas, es decir que anticipe el resultado antes de realizar mediciones, o bien, de resolver problemas u operaciones, lo que le permite tener una idea de lo razonable del resultado que obtenga.

Reversibilidad del pensamiento.- Esta habilidad consiste en que los alumnos puedan no solo resolver problemas sino también plantearlos a partir de conocer el resultado. Se refiere también a seguir una secuencia en orden progresivo y regresivo al reconstruir procesos mentales en forma directa o inversa, es decir, los niños están en generalización.

El desarrollo de esta habilidad permite que el niño generalice relaciones matemáticas o estrategias de resolución de problemas así el niño podrá reconocer que el triangulo tiene tres lados iguales o algunos diferentes; de esto obtiene los elementos para darse cuenta de que para saber qué número es más grande que otro (sin importar de cuantas cifras estén formados) basta con comparar las "unidades" del mismo orden para saber cuál es el mayor.

Imaginación espacial.- Esta habilidad implica que los alumnos desarrollan procesos que les permitan ubicar objetos en el plano y en el espacio; interpretar figuras tridimensionales en diseños bidimensionales, imaginar los efectos que producen formas geométricas al someterlas a transformaciones; estimar longitudes, áreas y volúmenes; como maestros debemos diseñar actividades enfocadas a la comprensión y asimilación de los conceptos de la matemática, debemos partir de la manipulación del niño, haga de los materiales o recursos didácticos, recordando en todo momento que los materiales son un medio para asimilar un concepto y nunca un fin en sí mismo. Por ejemplo, puede resultar muy entretenido para los niños jugar con un domino numérico, pero la actividad debe dirigir la atención del educando sobre la cantidad de objetos y la asociación con el numeral correspondiente. En este sentido, el juego dirigido es una fuente de actividades interesantes para el niño a través de él se pueden crear situaciones que le permitan al alumno descubrir relaciones o que favorezcan la construcción de conocimientos.

Al iniciar el estudio de cualquier tema es importante representaciones que el niño realice. Posteriormente, ya partir de situaciones en las que haya necesidad de comunicar a otros los resultados, se convencerán de la necesidad de aceptar y usar las representaciones convencionales.

Es conveniente fomentar el trabajo en equipo de manera que permita el intercambio de puntos de vista y la confrontación de ideas. Esto proporcionará actitudes de análisis e investigación que gradualmente se irán reforzando a medida que formal icen los conceptos y los métodos.

Como maestros debemos crear un ambiente de confianza y seguridad, de manera que los alumnos puedan reconocer sus errores o expresar sus ideas sin más limitación que la del respeto mutuo". [12]

2.3. DENOMACION DEL NÚMERO.

"El número es una herramienta conceptual creada por el hombre para registrar y conocer, de forma precisa, aspectos funcionales de la vida. Para llevar la cuenta del tiempo o de sus pertenencias probablemente, nuestros antepasados tuvieron que idear métodos de registro como taller una ranura en una vara por cada día que transcurría o por cada piel que adquirían.

Conforme las sociedades se desarrollaron y las posesiones fueron haciéndose cada vez más abundantes, la necesidad de emplear métodos de numeración y medición más precisos, basados en el conteo, se fue también incrementando.

[12] Moderna Enciclopedia Universal, NAUTA, Pág. 346

Contar y registrar fue el principio de la evolución de los sistemas numéricos y aritméticos, que sigue siendo en la actualidad un recurso esencial para el avance de nuestra civilización. El número y el conteo son aspectos importantes y funcionales en nuestra vida cotidiana, en el ámbito científico, tecnológico e incluso en el artístico.

La importancia y funcionalidad del número en nuestra vida diaria justifica plenamente el énfasis que como profesores enseñamos los conceptos numéricos. Sin embargo, a pesar de todo el tiempo y atención que le dedican, muchas veces como docentes no logramos los resultados que se espera.

Antes de ingresar a la escuela, el niño se ha enfrentado con diversas situaciones numéricas que ha tenido que resolver con sus propios recursos. Por ejemplo, contar sus canicas o sus juguetes para saber si están completos, participar en juegos donde se "pierden" y "ganan" puntos, coleccionar e intercambiar estampitas, bultos, ganado, etc.

Todas estas situaciones numéricas tienen un significado funcional para los niños, y por lo tanto les resultan comprensibles. Una opción viable para lograr que los conocimientos numéricos que adquiere el niño en la escuela le resulten significativos como para llegar a aplicarlos en la vida cotidiana, debería partir de las siguientes consideraciones básicas:

- La comprensión de todo contenido de aprendizaje.

En este caso el número resulta más accesible si se le vincula con situaciones de la vida cotidiana ya la vez significativa para el niño.

- Los niños se valen de los conocimientos numéricos que han adquirido a partir de sus experiencias cotidianas para interpretar las nociones aritméticas elementales que se les enseñan formalmente en la escuela.
- El número es un concepto abstracto cuya comprensión requiere de la conceptualización de ciertas relaciones lógicas.
- Los niños acceden a la comprensión lógica del número a partir de diversas experiencias, vinculadas particularmente con el conteo.

Al hablar de número nos referimos particularmente al número natural.

Los números naturales (o enteros positivos) son aquellos que componen la serie numérica que empleamos comúnmente en nuestra vida diaria: 1, 2, 3, 4, 5, 6... Existen otras conceptualizaciones del número, que el niño conocerá posteriormente, como los números enteros negativos, los racionales, los irracionales y los decimales.

Una buena comprensión y conocimiento del número natural puede sentar bases importantes para satisfacer los requerimientos del aprendizaje de los conceptos básicos de la aritmética e incluso de otras áreas de la matemáticas como el álgebra y la estadística; el número es un elemento de la vida cotidiana presente en casi todo momento, su utilización en la práctica no es indistinta. En ocasiones la serie numérica convencional se emplea simplemente como una repetición verbal, en la cual los números pronunciados no guardan ninguna relación con los objetos. Se trata solamente de una cantinela similar a la que se produce al repetir el abecedario. Los niños pequeños suelen repetir la secuencia numérica para practicarla y memorizarla.

A diferencia de lo anterior; en el contexto del conteo, cada número pronunciado guarda una relación de correspondencia biunívoca con un objeto determinado. De esta manera, física o mental, cada elemento contado se va separando progresivamente del conjunto de los elementos "no contados".

El número se puede emplear para expresar una cantidad particular de objetos o sucesos, es decir 1 para denominar la cardinalidad (conteo cardinal) de un conjunto. Existen algunas palabras que designan la cardinalidad de los conjuntos en situaciones especiales, por ejemplo: par, dúo, trío, cuarteto, gemelos, trillizos, etc.

En algunas ocasiones el número se utiliza para marcar la posición de un elemento dentro de un conjunto ordenado (contexto ordinal). Por ejemplo, en una competencia deportiva, el primer atleta que llega a la meta ocupa el lugar número "uno"; el que llega después el lugar número "dos", y así sucesivamente

El número se emplea en un contexto de medida cuando describe la cantidad de unidades en que se ha dividido una magnitud continua, tales como, la distancia, la superficie, la capacidad y el peso. Esto es una magnitud continua puede ser medida únicamente después que ha sido dividida en unidades.

Las unidades de medidas pueden ser las convencionales como el litro, el gramo, el centímetro, o bien arbitrarias, por ejemplo, para medir un montón de arena podríamos calcular la cantidad de decímetros cúbicos se ocupa su volumen, o bien, emplear un bote de determinado tamaño y calcular cuantas "unidades bote " mide la arena.

En el <u>contexto de código</u> los números se emplean algunas veces, para distinguir diferentes clases de elementos como etiquetas, o símbolos.

En este contexto cada número representa los elementos que pertenecen a una sola clase. Por ejemplo; en una escuela podrían etiquetarse con el código "1", a todos los alumnos que han aprobado el ciclo escolar, y con el código número "2" a los repetidores.

Los números en las camisetas de los jugadores de fútbol o los números telefónicos son otro ejemplo de este contexto.

El número puede encontrarse en cada uno de estos contextos por separados, o bien, combinando dos o más de los significados descritos. Por ejemplo, en un billete de lotería se puede distinguir el número de la serie como parte del código de identificación, pero a la vez, indicando una posición relativa en la ordenación de todas las series de una misma fecha. El niño se enfrenta cotidianamente con todos estos contextos del número sin embargo cada uno de ellos supone un nivel de complejidad diferente que le es accesible o no según su nivel de desarrollo conceptual.

Es explicable, por ejemplo, que los niños empleen el número en el contexto de secuencia más tempranamente que el de cardinalidad o el de medida, ya que estos últimos exigen la comprensión de clases numéricas, o de la equivalencia y no equivalencia entre distintas magnitudes, lo cual no es un requisito indispensable cuando se trata solo de repetir oralmente los nombres de los números.

LOS COMPONENTES LÓGICOS DEL NÚMERO

Todos los números en sí representan "clases numéricas”: la clase del "uno”, la clase del "dos", la clase del "tres" y la clase del "cuatro".

Cuando nosotros evocamos un número, lo que hacemos es identificar a qué "clase" pertenece de acuerdo con su propiedad numérica. Obviamente la clasificación de los conjuntos por su numerosidad, no es una. Acción física sino mental.

No necesariamente tenemos que percibir visualmente los elementos de un conjunto para poder definir a que clase numérica pertenecer; por ejemplo, cuando en un guacal existen veinte tomates podemos saber que el veinte pertenece a una clase numérica determinada, distinta a la de 30, 40, 50 u otra cantidad existen en otros huacales.

Los niños comienzan a desarrollar la noción de clase numérica a partir de la observación de conjuntos físicos. Sin embargo, eso no quiere decir que el número pueda verse en los objetos. Los niños se salen de la apreciación visual para identificar las equivalencias cuantitativas entre distintos conjuntos e ir, paulatinamente, elaborando la idea de clase numérica.

Aunque la apreciación perceptual de conjuntos es un punto de partida necesario para la comprensión del número no es suficiente.

La comprensión de la idea de clase numérica requiere también de la posibilidad lógica de establecer y mantener mentalmente la equivalencia entre dos conjuntos, aún cuando sus elementos no se puedan apreciar visualmente en correspondencia uno a uno. Los niños de cinco, seis y hasta siete años o más basan sus juicios cuantitativos sobre apreciaciones preceptúales.

Para ellos un mismo conjunto de objetos o dos conjuntos equivalentes pueden ser cuantitativamente diferentes según la disposición espacial de sus elementos.

Otra relación lógica importante para la comprensión del concepto y denominación del número es la noción del orden. Cuando contamos sabemos que debemos colocar los objetos en orden, ya sea física o mentalmente a fin de evitar contar dos veces uno mismo o dejar de contar alguno.

Cuando los niños llevan a cabo sus primeras experiencias de conteo; por lo general no sienten ninguna necesidad lógica de poner los objetos en orden. Es común verlos contar de manera similar a la siguiente.

En la figura que se observo la relación de orden entre los objetos no es suficiente para poder cuantificarlo. Es necesario establecer, entre ellos, una relación de inclusión de clases. Entre otras palabras, cuando contamos incluimos mentalmente el uno en el dos, el uno y el dos en el tres, el uno, el dos y el tres en el cuatro y así progresivamente.

En este sentido, la posición de los números dentro de la serie numérica no es arbitraria, depende de las relaciones comparativas mayor que y menor que, entre las diferentes clases numéricas. Un número ocupa una determinada posición en la serie de acuerdo con su magnitud.

El "cinco" por ejemplo, se ubica después del cuatro y antes del seis por que es mayor que el primero pero menor que el segundo.

Generalmente los niños ingresan al primer grado de educación primaria ya poseen un importante acervo de conocimiento numérico que han ido adquiriendo a partir de las diversas experiencias concretas, relacionadas, principalmente en el conteo. Parece que incluso los bebes poseen un cierto sentido numérico básico, ya que se ha observado que son capaces de discriminar conjuntos de dos o tres elementos. Pero esta idea todavía se encuentra en proceso de exploración.

Alrededor de los dos años, y aún antes, los niños comienzan a hacer uso de las palabras o "etiqueta" que designan a los números. Es frecuente escucharlos recitar los números en una especie de juego verbal: “uno, dos, tres”.

“Contar” oralmente en esta etapa es más bien un proceso memorístico, pero es posible identificar algunas relaciones numéricas, rudimentarias que el niño establece a partir de esta producción verbal. Por ejemplo, algunos niños de dos o tres años emplean la palabra "uno" para designar un solo objeto y la palabra "dos" para designar varios objetos, incluso, llegan a emplear los términos “tres” o "cuatro" para referirse a muchos objetos.

Los niños distinguen desde muy temprana edad cuáles son las palabras que sirven para contar y cuáles no. Por lo general, ante una pregunta del tipo “¿cuantos hay?”, responden con un número y no con una palabra cualquiera. Aunque aún están lejos de comprender que los números se emplean, como hemos visto anteriormente, para designar el valor cardinal de un conjunto y para diferenciar entre sí otros conjuntos con distintos valores cardinales.

A través de la repetición memorística de los números los niños comienzan a descubrir algunas de las reglas convencionales que rigen nuestro sistema de numeración verbal.

El aprendizaje de la secuencia numérica, aún cuando en un principio es solo memorístico, ayuda a los niños en sus primeros intentos de cuantificación.

A partir del conteo, los niños pueden llegar a comprender gradualmente las ideas lógicas implicadas en el número.

A través de repetidas experiencias de conteo, los niños reflexionan y descubren regularidades importantes de los número sen la relación de contar. Los descubrimientos que el niño realiza pueden sintetizarse en los siguientes principios: PRINCIPIO DE ORDEN EST ABLE.- Los niños se dan cuenta de que contar requiere repetir los números siempre en el mismo orden, aunque ese orden no sea convencional.

PRINCIPIO DE CORRESPONDENCIA.- Para enumerar un conjunto es necesario etiquetar sus elementos una sola vez. De esta manera, los niños se aseguran de no contar dos veces el mismo elemento ni dejar de contar ninguno.

PRINCIPIO DE UNICIDAD.- Las etiquetas numéricas deben ser irrepetibles y únicas para cada elemento contado. Esto supone ya una idea rudimentaria de que cada número posee un valor cardinal distinto. Ejemplo:

SIN UNIDAD
"dos, tres, cinco, tres"
CON UNIDAD
"tres, cuatro, seis, siete"

PRINCIPIO DE ABSTRACCION.- El niño descubre que las diferencias físicas de los objetos no son una limitación para poderlos contar, porque pueden abstraer dentro de una clase más abarcativa cualquier objeto susceptible de ser contado.

PRINCIPIO DEL VALOR CARDINAL.- A través de repetidas experiencias de conteo los niños llegan a descubrir que el último número pronunciado designa el valor cardinal del conjunto.

PRINCIPIO DE IRRELEVANCIA DEL ORDEN.- Al contar de varias maneras los elementos de un conjunto, los niños pueden llegar a darse cuenta de que la distribución de sus elementos y el orden en que se cuenten no afecta el valor cardinal del conjunto; además de estos descubrimientos, a partir de sus experiencias con el conteo de objeto, los niños pueden llegar a identificar relaciones numéricas más elaboradas como la siguientes:

- Comprensión de la equivalencia y no equivalencia entre los elementos de dos conjuntos.

- Comparaciones entre las distintas magnitudes representadas por los números.

- Ideas básicas sobre la adición y sustracción: añadir produce un incremento y quitar un decremento; la adición y la sustracción, son operaciones inversas"

La comprensión de todas estas relaciones representa un sustento conceptual importante que permitirá al niño interpretar en mayor o menor medida la aritmética formal que se enseña usualmente en el primer grado.

Sin embargo, al ingresar a la escuela, los niños pueden o no haber descubrimiento todas estas relaciones según sus experiencias previas.

Reconocer, respetar y aprovechar el conocimiento informal sobre el número que adquieren los niños extraescolarmente podríamos ayudar a cimentar la enseñanza de la aritmética en un contexto significativo y acorde con las posibilidades conceptuales de sus alumnos.[13]

[13] Matemática 3° -Grupo BOTADÁ- Pág. 117

CAPITULO 3

3. TEORIAS DE LA DIDACTICA DEL NÚMERO. ,

3.1. TEORIA DEL APRENDIZAJE DEL NÚMERO.

"Durante los pasados cincuenta años, el psicólogo suizo Jean Piaget ideó un modelo que describe cómo los humanos dan sentido al mundo, extrayendo y organizando información. De acuerdo con Piaget, cierta manera de pensar que son bastantes sencillas para un adulto no son tan fáciles para un niño. En ocasiones, todo lo que se necesita para enseñar un nuevo concepto es dar a un estudiante algunos hechos básicos como antecedentes. Sin embargo otras veces los hechos de los Antecedentes en el mundo son inútiles. El estudiante simplemente no está preparado para aprender el concepto.

Como se puede deducir, el desarrollo cognoscitivo es mucho más que agregar nuevos hechos e ideas aun almacén de información de acuerdo con Piaget, nuestros procesos de pensamiento cambian de manera radical, aunque con lentitud del nacimiento a la madurez. Piaget identifica cuatro factores que influyen en el desarrollo cognoscitivo, que son: Maduración biológica, actividad, experiencias sociales y equilibrio que interactúan para influir sobre los cambios del pensamiento.

La maduración es uno de los factores más importantes por que desarrollará el desenvolvimiento de los cambios biológicos que están programados a nivel gen ético en cada ser humano desde la concepción.

La actividad es otro de los factores que junto con la maduración física se presenta la creciente capacidad de actuar en el entorno y aprender de éste. Cuando la .coordinación de un niño pequeño está desarrollada de modo razonable con su entorno tiene la posibilidad de alterar el proceso del pensamiento.

Las experiencias sociales que se originan al interactuar con las personas que los rodean, el desarrollo cognoscitivo se ve influido por transmisión social o el aprendizaje de otros. Sin la transmisión social, necesitaríamos volver a inventar todo el conocimiento que nuestra cultura ya nos ofrece. La cantidad de conocimiento que la gente puede aprender por transmisión social varía de acuerdo con su etapa de desarrollo cognoscitivo.

El equilibrio que existe entre la maduración, la actividad y la transmisión social trabajan en conjunto para influir sobre el desarrollo cognoscitivo.

Piaget concluyó que todas las especies heredan dos tendencias básicas o funciones invariables en los seres vivos, después de haber concluido sus primeras investigaciones sobre biología. La primera de esas investigaciones es hacia la organización; combinar J ordenar, volver a combinar y volver a ordenar conductas y pensamientos en sistemas coherentes. La segunda tendencia es hacia la adaptación o el ajuste al entorno.

Organización: de acuerdo con Piaget, las personas nacen con una tendencia a organizar sus procesos de pensamiento en estructuras psicológicas. Estas estructuras psicológicas son nuestros sistemas para comprender e interactuar con el mundo. Las estructuras simples en forma continua se combinan y coordinan para ser más complejas y, como consecuencia, más efectivas.

Piaget asignó un nombre especial a estas estructuras. En su teoría las llamó esquemas. Los esquemas son los elementos de construcción básica del pensamiento. Son sistemas organizados de acciones o pensamientos que nos permiten representar de manera mental los objetos y eventos de nuestro mundo. Los sistemas pueden ser muy reducidos y específicos, por ejemplo, el esquema de sorber por un popote o el de reconocer una rosa. O pueden ser más extensos y generales como el sistema de beber y de categorizar una planta. Conforme los procesos del pensamiento de una persona son más organizados y se desarrollan esquemas nuevos, la conducta también es más avanzada y se adecua más al entorno.

Adaptación: Además de la tendencia a organizar sus estructuras psicológicas, las .personas también heredan la tendencia a adaptarse al entorno. Piaget creía que desde el momento del nacimiento, una persona empieza a buscar maneras de adaptarse de modo más satisfactorio. En este proceso de adaptación participan dos procesos básicos: asimilación y acomodación.

La asimilación tiene lugar cuando las personas utilizan sus esquemas existentes para dar sentido a los eventos del mundo. La asimilación implica tratar de comprender algo nuevo arreglándolo a lo que ya sabernos. A veces, es preciso que distorsionemos la nueva información para hacer que se arregle. Por ejemplo, por primera vez que los niños ven un zorrillo lo llaman “gatito”. Intentan adaptar la nueva experiencia a un esquema existente para identificar animales.

La acomodación sucede cuando una persona cambia esquemas existentes para responder a una nueva situación. Si no se pueden hacer que los datos se ajusten a ningún esquema existente, entonces se deben desarrollar estructuras más apropiadas. Ajustamos nuestro pensamiento para adaptarlo a la información nueva, en lugar de ajustar la información para que se adapte a nuestro pensamiento. Los niños demuestran la acomodación cuando integran el esquema para reconocer zorrillos a otros sistemas para identificar los animales.

Equilibrio: De acuerdo con Piaget, la organización y la acomodación se pueden considerar como una especie de acto complicado de equilibrio. En esta teoría los cambios reales en el pensamiento tienen lugar a través del proceso de equilibrio -el acto de la búsqueda del balance -Piaget suponía que las personas prueban de manera continua la suficiencia de sus procesos de pensamiento a fin de lograr ese balance.

De modo breve, el proceso del equilibrio opera así: si aplicamos un esquema particular aun evento o situación y éste funciona, entonces hay equilibrio. Si el sistema no produce un resultado satisfactorio, entonces hay desequilibrio y nos sentimos incómodos. Esto nos motiva a seguir en busca de una solución mediante la asimilación y la acomodación.

CUATRO ETAPAS DEL DESARROLLO COGNOSCITIVO

Las diferencias reales de los niños conforme crecen de acuerdo con la hipótesis de Piaget para apropiarse del conocimiento son las siguientes cuatro etapas: sensoriomotriz, preoperacional, operacional concreta y operacional formal.

A partir, pues de las experiencias de intercambio del organismo con el medio, cada individuo organiza de una manera peculiar la representación de las mismas estructuras, o conjuntos relacionados de contenidos que sirven de base y orientación de los futuros intercambios.

Profundizando en esta idea Piagetana, Ausbel (1976) desarrolla el concepto de aprendizaje significativo, uno de cuyos requisitos y condiciones necesarios es la significatividad potencial del material. Es decir, los contenidos que se ofrecen al aprendizaje del niño tienen que poderse relacionar sustantivamente con los contenidos que forman la estructura cognitiva actua1 del aprendizaje. Solo de esta manera el proceso de construcción, de asimilación y acomodación puede efectuarse.[14]

3.2. PEDAGOGIA DEL NÚMERO.

"Los estudios de Piaget sobre cómo aprenden los niños apoyan los conceptos del desarrollo en las matemáticas, propuestas para las escuelas primarias. Sin embargo, es necesaria una comprensión más detallada de los descubrimientos de Piaget para evitar el apresuramiento y la presión que algunas personas todavía no pueden eliminar de la educación de los niños, aun cuando en los materiales se encuentren encarnados buenos principios de aprendizaje.

Piaget, biólogo antes de dedicarse a estudiar psicología, descubrió la existencia de un proceso básicamente evolutivo del crecimiento de los niños en su capacidad de pensar. Descubrió que aprendían a comprender conceptos de espacio y tiempo, de realidad, de

[14] E. Woolkfolk Anita, “Psicología Educativa”, Pág. 336-338.

relaciones entre causa y efecto, de moral, de probabilidad, números y medidas, en una serie de etapas. Aunque las buenas maestras de niños pequeños reconocen desde hace tiempo las diferencias entre los modos de pensar del adulto y del niño, fue Piaget quien recabó sistemáticamente los testimonios que apoyaron a los hallazgos de las maestras. Lo que descubrió sobre la progresión del pensamiento infantil demostró estar en perfecta armonía con otros descubrimientos acerca del desarrollo social y emociona1, indicando que todo aprendizaje infantil sigue un orden secuencial, de una conducta de menos a más madura. Las etapas del desarrollo existen en las esferas intelectuales tanto como en el crecimiento físico. Simplemente, ha sido más difícil reconocer la naturaleza evolutiva del crecimiento intelectual, porque los niños empiezan muy temprano a imitar la conducta y el habla de los adultos. Y como pueden sonar como adultos, resulta demasiado fácil suponer que saben lo que están diciendo en términos de adultos.

Las pruebas indican que un marco general de pensamiento se forma gradualmente, a partir de los primeros intentos del niño por sistematizar el mundo que encuentra, para poder enfrentársele mejor. Conforme crece, el marco que ha establecido por sí mismo para dar sentido a lo que ve, oye, toca, huele y gusta se va llenando continuamente con nuevas experiencias en varios ámbitos, lo que conduce a una organización más general y más densa de lo que sabe. El proceso de comprensión empieza con la experiencia directa, física y concreta, y avanza gradual y desigualmente hacia la comprensión de conceptos más remotos y abstractos. Este proceso de captar el significado por etapas secuénciales puede verse con claridad en la comprensión de las matemáticas.

Todos los padres se llenan de orgullo cuando el niño que apenas puede andar dice:

"uno, dos, tres", o cuando su hijo de preescolar cuenta hasta diez o más, con solo algún errorcillo. En realidad la capacidad de contar tiene muy poca relación con el entendimiento matemático. Aprender a repetir números en los años de preescolar es algo así como imitar, cual loro, a los adultos. La capacidad de imitar demuestra inteligencia en tan temprana edad, pero la repetición memorizada de números en el orden debido no tiene nada que ver con la comprensión de las relaciones que haya entre los números, en este último tipo de comprensión el que permite un empleo flexible de los números en las operaciones matemáticas y aunque el aprendizaje memorizado, una vez fijo, fijo se queda, la comprensión conceptual se hace más profunda en un proceso evolutivo de desarrollo ¿cómo afecta este desarrollo la capacidad del niño para valerse de los números?

Los adultos dan por sentado el hecho de que un número existe como abstracción, es decir, si un número -cuatro, seis u once- se utiliza para describir una cantidad de objetos, personas o monedas; si se utiliza para referirse aun lugar como a una calle, una casa o un canal de televisión; si los números que están en los relojes o se dan a días o años, para indicar un momento en el tiempo o el paso del tiempo; si se les utiliza para medir distancia por aire, como el piso de un edificio, si son una regla para indicar longitud, anchura o profundidad, o en una escala para indicar peso, pero que el número mismo no es la casa, ni el canal de televisión, ni el edificio ni nada que sea tangible y real. El número existe en nuestra mente, separado de toda relación particular y temporal con cantidad, distancia, tiempo o espacio. Se vuelve un concepto de medición que podemos aplicar a varias dimensiones totalmente distintas entre sí, así como la longitud es diferente de los años. En sí y por sí mismo, cualquier número sólo existe en la mente y no en forma concreta, como la casa, la calle o el canal de televisión. Con el tiempo los símbolos numéricos llegan a parecer tan reales como algo concreto, pero los símbolos representan una idea, no un objeto.

Los adultos saben esto, pero nunca le dedican un pensamiento. Como cosa natural, suponen que los niños también lo saben. Pero en realidad éstos no comprenden el concepto de medición o de mensurabilidad, y mucho menos el concepto de número en relación con la medición y la mensurabilidad. No lo comprenden, es decir, antes de una cierta etapa de su desarrollo, y esa etapa llega mucho después de que han aprendido a repetir palabras y números que suenan como si ellos sí los entendieran.

Piaget sospechó que podía haber diferencias entre repetir palabras y comprender su significado. Por consiguiente, diseñó tareas para niños entre cuatro y siete años, de naturaleza tal que tuvieran que familiarizarse con la medición y el número de modo que aclararan si habían captado el verdadero significado o simplemente estaban repitiendo palabras. Por ejemplo, con objeto de saber lo que los niños comprenden acerca de la cantidad, les propuso los siguientes tipos de tareas. Mostraba al niño una hilera de frijoles, cuentas o bloques, y le pedía que eligiera la misma cantidad de objetos del mismo tipo, colocados en una pila cercana o le pedía traer un vaso para cada botella de limonada que hubiera en la mesa; o escoger galletas que alcanzaran para dos diferentes ocasiones; siempre el mismo número cada vez. Al investigar su comprensión de la longitud, colocó una regla recta y una ondulante tira de plastilina, paralelas, de modo que los extremos de la vara y los extremos de la plastilina quedaran alineados. Preguntó entonces al niño: ¿Son iguales, o una es más larga que otra?

Se da este tipo de tarea a los niños, dentro de una vasta gama de conceptos matemáticos que incluye número, longitud, espacio, tiempo, volumen y peso, y Piaget siempre hacía las preguntas de distintas maneras, para asegurarse de que los niños comprendieran lo que se esperaba de ellos. Una y otra vez, y en cada área, las respuestas cayeron en tres etapas relacionadas generalmente con la edad. En la primera, los niños fueron inevitablemente atraídos por las características físicas de los objetos que se les pedía medir. Es decir, estaban más conscientes del color, la forma o el tamaño de las cuentas, el vidrio o las plastilina, que de las similitudes numéricas. Su respuesta al color, la forma o el tamaño inevitablemente obstruyó la captación del número abstracto compartido por los objetos, que eran distintos entre si.

En esos experimentos, el porcentaje de niños que no captaron el sentido del concepto numérico fue reduciéndose continuamente con la edad. Por ello, como la mayoría de los niños avanzan de esta manera gradual puede suponerse una progresión del desarrollo en la conceptualización de los hallazgos matemáticos, aunque haya niños que, en lo individual, no caen en ninguna de estas categorías.

La secuencia de desarrollo que Piaget descubrió comienza cuando el niño no tiene ni la menor noción de lo que significa un número (aunque pueda contar), luego progresa a un concepto del número que se confunde con la apariencia, en cuestión de forma, color o tamaño de artículos comparados, y alcanza un punto, dos o tres años después, en que el niño comprende que el número utilizado para medir cantidad, longitud, espacio, volumen, peso o lo que sea, seguirá siendo el mismo por mucho que otras cosas cambien frente a sus ojos. Cuatro son cuatro, seis son seis, y once siguen siendo once, ya sea que se estén midiendo cuentas, litros, minutos o agujeros. El desarrollo de este tipo es indiscutib1emente ayudado a fructificar a través de experiencias apropiadas. Pero no se le puede forzar mediante ejercicios, porque no es posible ejercitarse a comprender. Simplemente se puede entrenar para la repetición de memoria; se puede ayudar a comprender a su propio tiempo y modo tan sólo ofreciendo las experiencias que transmitan la idea.

La comprensión del número es inicialmente funcional y no verbal, que es el punto en que algunos niños de seis y más niños de siete años se encuentran. Esto significa que el niño puede hacer cosas con números en toda una gama de situaciones personales, pero aún no puede explicar claramente en palabras 10 que hizo. Por ejemplo, puede percibir la diferencia de tamaño de dos trozos de una barra de caramelo, pero no explicar el significado de igualdad. Su captación se ve circunscrita, al principio, a experiencias familiares, como el tamaño de las porciones divididas entre los hermanos, la comparación del número de regalos en día de fiesta, el número de juguetes viejos contra el de nuevos, etc. Desarrolla un marco general de conceptos acerca de la distancia (lejos, cerca), longitud (largo, corto), área (grande, pequeño), ritmo en que los cuerpos se mueven (rápido, lento), noción de distancias recorridas (kilómetros), velocidad del tiempo (minutos), sucesión (primero la cena, luego el helado), durabilidad y simultaneidad Al captar la falta de concreción y la permanencia de un concepto tan abstracto como el número, el niño se vuelve cada vez más capaz de manipular los números y de reconocer las relaciones que existen entre las partes y el todo, de una unidad que él reconoce como tal. Es decir, en el proceso mediante el cual comprende que tres es un concepto que alude ala propiedad de todos los conjuntos que contienen tres elementos, sin que importe que se utilice en peso (kilos), altura (centímetros), longitud (metros), volumen (litros), cantidad (objetos), no sólo reconoce que tres es tres no importa a qué se aplique, sino que sigue siendo tres aún si se transforma en uno más uno más uno; a uno más dos, o a dos más uno.

De este modo, el niño aprende a conservar el significado del número, pese ala seducción de forma, tamaño o espacio. Puede manejarlo como una unidad porque lo percibe en armonía con las partes, captando una auténtica relación parte-todo. En este momento, ya puede identificar la relación entre los números. Puede diferenciar entre los cardinales (uno, dos, tres) y los ordinales (primero, segundo, tercero), y comprender las disposiciones seriales lo bastante bien para saber que dos va antes de tres y después de uno. Cada número conserva su propio carácter mientras el niño aprende sus variadas relaciones con otros números. Los niños alcanzan esta habilidad operativa con los números, por lo general entre las edades de seis años y medio y ocho, empezando por los números menores, que pueden captar con más facilidad. Este momento probablemente se sostenga, aun si han aprendido a contar hasta números mayores que seis o siete.

La relación es en sí misma un concepto que debe ser comprendido antes de que pueda ser significativa dentro de una abstracción como la de número. Sin embargo, los niños aprenden acerca de relaciones mucho antes de entrar a la escuela primaria, porque han tenido experiencias con relaciones: de los calcetines con los pies, del alimento con el hambre y del dinero con los juguetes. En la escuela se les puede pedir que formulen representaciones pictóricas de las relaciones vividas que pueden comprender; por ejemplo, una imagen y luego una gráfica de los niños que se quedan al almuerzo y los que no se quedan; una gráfica que muestre cuántos cumpleaños hay en cada mes; un dibujo de todos los juguetes que hay en el dormitorio de un niño y de todos los artículos que hay en la bolsa de la madre; un dibujo de niños en bicicleta, y de niños en trineo. El concepto de relación conduce a un sentido de agrupamiento, que ya ha empezado con el grupo básico que cada niño conoce mejor; su propia familia. Y el sentido de relación y grupo hace posible ordenar los objetos. Por medio de muchos juegos y ejercicios se puede efectuar la formación y ordenación de grupos de artículos con características similares. Todo esto se da en un nivel concreto, es decir, se hace con cosas (o personas) .El ordenamiento se hace más complejo (y un poco menos concreto) cuando se pide a los niños agrupar todos los muñecos que sean niñas y que necesiten su ropa lavada en una pila, y todos los que son niños y necesiten ropa nueva, en otra pila. Poco a poco surge la noción matemática de conjunto -un agrupamiento que comparte ciertas características (concretas o abstractas)-, y los niños pueden concebir un grupo como unidad, pese a que éste puede estar formado por varios objetos o personas.

Las relaciones numéricas de correspondencia continúan con una taza para cada niño, una moneda para cada barra de caramelo, etc. La correspondencia se extiende para incluir más que la correspondencia uno a uno.

Los niños ponen las cosas en orden: todos los bloques largos van en el estante inferior, todos los lápices van en las cajas vacías. Pero el ordenamiento va más allá, para establecer el lugar que ocupan los objetos según su tamaño, para reproducir una línea de formas en el mismo orden y luego en sentido inverso, hasta poner imágenes en secuencia para que narren un cuento. El concepto de grupos y orden conducen al concepto de inclusión: hay siete animales, cuatro de los cuales son caballos y tres son perros; hay veinte niños, pero sólo nueve son varones. Estos conceptos matemáticos, que nos permiten enfrentarnos a nuestro medio, tienen que ser redescubiertos por cada generación de niños. Y, al hacer estos descubrimientos en la etapa en que ya están capacitados para comprender y asimilar su significado, les es posible tratarlos operativamente, es decir, con flexibilidad.

Por alguna razón, la suma se les facilita más a los niños que la resta, tal vez porque ésta incluye un tercer elemento, intruso, en la operación matemática. Así, al sumar uno más tres para formar cuatro, el tres permanece estable. Pero si para llegar a cuatro restamos uno de cinco, entonces el conocimiento de que cinco es mayor que cuatro y que el cuatro está antes que el cinco en orden serial debe comprenderse antes de poder entender que la ecuación de tres más uno es equivalente a cinco menos uno. ¡Todo parece tan sencillo![15]

"La habilidad mecánica para sumar y restar no basta para captar el significado de división, la multiplicación y las fracciones; y el dominio mecánico, como, por ejemplo, el de las tablas de multiplicar, sólo es valioso en la medida en que los auxiliares mecánicos son verdaderos instrumentos para avanzar en la comprensión de los conceptos."[16]

---

[15] Bernard Kolman, Rober1 C. Bis by y Sharon Ross Prentice May, Estructuras de Matemáticas Discretas, pp.214-216

[16] . Woolkfolk, Anita, "Psicología Educativa", pp. 336-338

3.3. MODELO DE ENSENANZA DEL NÚMERO

"Juan Piaget, Profesor, Psicólogo suizo especialista en el desarrollo humano, comenzó a trabajar en los laboratorios de Alfred Binet. Allí se crearon las modernas pruebas de inteligencia; Piaget comenzó a explorar la forma en que los niños crecen y desarrollan sus habilidades de pensamiento. Estaba interesado en la forma en que los niños llegan a conclusiones que en el hecho de sí sus respuestas eran correctas. Interrogaba a los niños para encontrar la lógica detrás de sus respuestas.

Según Piaget la inteligencia tiene dos atributos principales la Organización y la Adaptación.

La organización consiste en las estructuras o etapas de conocimientos los cuales conducen a conductas diferentes en situaciones específicas. Ejemplo:

- El niño en la primera etapa de su desarrollo tiene esquemas elementales de conducta concreta y observable que son de tipo sensomotor (mover). El niño de edad escolar tiene otros esquemas cognoscitivos más abstractos que se denominan operaciones, es decir es la capacidad del niño de realizar mentalmente lo que antes hacia su cuerpo.

La Adaptación según Piaget los niños se adaptan de dos maneras por Asimilación y Acomodación. La asimilación es la adquisición de la nueva información y la acomodación es como se ajusta la nueva información. Ejemplo:

- Los niños ven un perro por primera vez (Asimilación); aprender que son mascotas seguras y otras no (Acomodación).

El desarrollo intelectual es un proceso continuo, para facilitar su descripción y análisis se divide en cuatro etapas que son: Etapa Sensomotriz, Etapa Preoperacional, Etapa concreta y Etapa Lógico-Formal.

ETAPA SENSOMOTORA.

Características Periodo de tiempo (0-2 años).

En esta etapa la conducta del niño es esencialmente motora. No hay representaciones internas de los acontecimientos externos ni piensa mediante conceptos.

a) Reflejos (0-1 mes).

Movimientos incoordinados y espontáneos, de naturaleza refleja, en su mayoría.

Cualquier objeto presente en el medio externo sólo es algo para chupar, tomar o ver.

b) Adaptaciones y reacciones primarias (1-4 meses).

Primeros hábitos simples que son el resultado de acciones no voluntarias, coordinación entre las manos y la boca, los ojos en los objetos en movimiento (coordinación ojos-objetos), mueven la cabeza en la dirección de los sonidos (coordinación entre ojos y oídos).

Aparecen sentimientos como el placer, el dolor, la alegría, la tristeza. Luego la satisfacción y decepción.

c) Reproducción de fenómenos y sucesos interesantes (4-8 meses).

El niño se orienta más y más a los objetos y acontecimientos externos. El niño reproduce sucesos que le resultan interesantes (por ejemplo: tirar repetidamente la cuerda que está unida a una campana u objeto que suene).

Aparecen las primeras manifestaciones de una conducta intencional: el niño comienza a practicar conductas que tienen una finalidad.

El niño sigue siendo egocéntrico; se considera a sí mismo como la causa de toda actividad.

d) Coordinación de Esquemas (8-12 meses).

Aparecen formas de conductas que indican formas de inteligencia. Comienza a cambiar conductas para conseguir ciertos fines.

Comienza a buscar objetos que desaparecen en el lugar donde se encuentra:

a) Las cosas que sirven para alcanzar un objetivo que tiene valor para él.

b) Empieza a reconocer el "éxito" y el fracaso.

c) Empieza a transferir sentimientos a otras personas de afecto y aversión.

d) Invención de nuevos medios (12-18 meses).

El niño desarrolla la coordinación entre los esquemas mentales correspondientes a los sentidos de la vista y el tacto, alcanza la capacidad de crear nuevos esquemas para resolver problemas nuevos: puede experimentar mediante un proceso de ensayo y error. El niño es capaz de hacer desplazamientos secuénciales. Por ejemplo: busca, juguetes en sitios ya establecidos.

Hay un mayor desarrollo de la casualidad: ve con claridad que los objetos son la causa de diversas acciones y efectos.

e) La invención (18-24 meses).

En este periodo el niño pasa de la inteligencia sensomotora a la inteligencia representativa, es decir, es capaz de representarse internamente los objetos y fenómenos y con ello desarrolla la capacidad de resolver problemas cognoscitiva mente. El niño concibe mentalmente la solución a problemas que se le presentan.

Aparece la capacidad de representar objetos ausentes. Aumenta la capacidad de predecir relaciones de causa y efecto.

Se desarrolla los sentimientos de gustos y aversión por otras personas.

ETAPA PREOPERACIONAL.

Según Piaget consideró esta etapa como la del pensamiento. Se desarrolla esta etapa desde los 2 años a los 7 años; así también gradualmente el lenguaje se gradúa la capacidad de pensar en forma simbólica.

Manipula los símbolos u objetos que representan el mundo; no son capaces de resolver operaciones mentales. Combinan palabras formando oraciones corta a los 3 años, manipula objetos a ciega y luego puede identificarlos. Ejemplos: peine, tijeras, etc.

Vemos pues que el desenvolvimiento de esta etapa se representa con: a) La limitación definida (imitación de objetos conducta).

b) El juego simbólico (usa un pedazo de madera como sí fuera una locomotora).

c) El dibujo (trata de representar entre los 8-9 años la realidad de las cosas; antes de esta edad sus dibujos son confusos).

d) Las imágenes mentales (las manifiesta con símbolos de experiencia de percepciones pasadas).

e) El lenguaje hablado (utiliza las palabras como símbolo de objetos (2 años papá-mamá).

Se considera esta etapa preoperacional como buena los juegos mentales, pues ayudan a la agilidad de captación mental ya desarrollar el lenguaje.

ETAPA DE LAS OPERACIONES CONCRETAS.

Se inicia de los 7 a los 11 años. Es una etapa importante para las acciones pedagógicas pues su duración casi coincide con el de la escolarización básica (primaria) por lo que las distintas formas de desarrollo que se dan en ella (operaciones concretas) pueden o no hacer al niño en cuanto a sus conductas de aprendizajes.

En esta etapa aún no han desarrollado los esquemas mentales necesarios para ellos.

Características.

Algunas características que presentan los niños en esta etapa.

a) Los procesos de razonamientos del niño se vuelven lógico. A esta edad desarrolla lo que Piaget llama Operaciones Lógicas.

Piaget afirma que una operación intelectual lógica es un sistema de acciones internalizadas y reversibles. El niño desarrolla procesos de pensamientos lógicos a diferencia de un niño de la etapa preoperativa, estos pensamientos lógicos puede aplicarse a problemas concretos o reales. Ejemplo: Explicar el proceso de la lluvia. El niño a esta etapa no tiene dificultad para resolver problemas de conservación y proporcionar el razonamiento concreto de sus respuestas.

b) Aspecto Social.

En esta etapa el niño es menos egocéntrico y más social en el uso del lenguaje y por primera vez se convierte en un ser verdaderamente social.

c) El Pensamiento.

La calidad del pensamiento operativo concreto supera a la del pensamiento preoperativo.

En esta etapa aparecen los esquemas para las operaciones lógicas de seriación; capacidad de ordenar mentalmente un conjunto de elementos de acuerdo con su mayor o menor tamaño, peso o volumen y clasificación de conceptos de casualidad, espacio, tiempo y velocidad.

El término concreto es significativo en tanto que el niño desarrolla claramente las operaciones lógicas, son útiles en las soluciones de problemas que comprenden objetos y sucesos concretos reales, observables del presente inmediato, todavía no pueden aplicar la lógica a problemas hipotéticos exclusivamente de verbales o abstractos.

En esencia en la etapa operativa concreta constituye una transición entre el pensamiento prelógico (preoperativo) y el pensamiento completamente lógico de los niños mayores.

ETAPA LOGICA FORMAL.

Esta etapa va desde los 12 a los 16 años de edad en el adolescente. Aquí el razonamiento lógico no se limita a los datos de las experiencias concretas reales, sino que tiene una amplitud de operaciones formales que permiten la proyección del pensamiento mediante experiencias vividas anteriormente y que son aplicables en el momento.

En esta etapa el adolescente tiene un pensamiento más avanzado sobre el conocimiento concreto observado. También se emplea el razonamiento lógico inductivo y el deductivo para construir y comprobar teorías.

En otras palabras a través del razonamiento lógico el individuo es capaz de buscar solución a problemas hipotéticos y derivar sus conclusiones.

Principales Desarrollos de la Etapa.

a) Razonamiento Hipotético Deductivo: el niño piensa en hipótesis o en experimentos que no han sido comprobados y trata de buscarle una respuesta lógica global.

b) Razonamiento Científico Inductivo: el niño puede generalizar partiendo de hechos particulares.

c) Abstracción Reflexiva: capacidad de generar nuevos conocimientos basados en los conocimientos ya existentes. Se emplea más bien en la lógica Matemática.

d) Desarrollo de sentimientos idealistas y formación continúa de la personalidad.

e) Mayor desarrollo de los conceptos morales (honradez, amor, respeto, etc.).

f) Egocentrismo del adolescente tenía un carácter especial: cree que el pensamiento lógico formal es omnipotente y que el mundo debe someterse al razonamiento.
g) El egocentrismo en conductas reformadoras: el adolescente critica duramente a la sociedad, son rebeldes e impulsivos. Cuestiona y quieren cambiar el mundo.

Teoría Constructivista según Jean Piaget, el constructivismo termino utilizado por Piaget significa que el sujeto, mediante su actividad (tanto física como mental) va avanzando en el progreso intelectual en el aprendizaje; pues el conocimiento para el autor no está en los objetos ni previamente en nosotros es el resultado de un proceso de construcción en el que participa de forma activa la persona. En esta teoría se hace más importante al proceso interno de razonar que a la manipulación externa en la construcción del conocimiento; aunque se reconoce la mutua influencia que existe entre la experiencia de los sentidos y de la razón. Es decir la niña o el niño van construyendo su propio conocimiento.

Piaget quiso demostrar que el aprendizaje no se produce por acumulación de conocimiento, como pretendían los empiristas sino porque existen mecanismos internos de asimilación y acomodación.

Para la asimilación es establecimiento de relaciones entre los conocimientos previos y los nuevos; para la acomodación es la reestructuración del propio conocimiento. Piaget, establece la diferencia entre el aprendizaje en sentido restringido, cuando se adquiere nuevos conocimientos a partir de la experiencia y el aprendizaje en sentido amplio, en este caso se refiere a la adquisición de técnicas o instrumento de conocimiento.

Podemos resumir el pensamiento de Piaget, en relación con el aprendizaje del siguiente modo:

1. Es un proceso de construcción activa por parte del sujeto, el cual mediante su actividad física y mental determina sus reacciones ante la estimulación ambiental.
2. No depende sólo de la estimulación externa, también está determinado por el nivel de desarrollo del sujeto.

3. Es un proceso de reorganización cognitiva.

4. Las relaciones sociales favorecen el aprendizaje, siempre que produzca contradicciones que obliguen al sujeto a reestructurar sus conocimientos.

5. La experiencia física es una condición necesaria para que se produzca el aprendizaje, pero no es suficiente} se necesita además la actividad mental".[17]

[17] Douglas A. Bemstein y Michael T. Nietzeel, "Introducción a la Psicología", Págs. 124-127.

CAPITULO 4

4. METODOLOGIA PARA UNA DIDACTICA DE LA MATEMÁTICA.

El campo de la didáctica del número, actualmente discurre sobre dos líneas de investigación una que propone afirmar la búsqueda y experimentación de situaciones didácticas para la enseñanza y el aprendizaje de temas específicos de matemáticas y otra línea que propone la recuperación de cada una de las diferentes didácticas aplicadas a una didáctica general que vincule la psicología gen ética, la pedagogía, la teoría constructivista del conocimiento y cuestiones epistemológicas e históricas de los contenidos específicos que se enseñan en la escuela.

Para abordar el problema de cómo se aprenden y cómo se enseñan las matemáticas, una alternativa bastante socorrida es partir del análisis de cómo se realizan el proceso de aprendizaje por el organismo humano. Esta posición, en parte fisiológica y en parte psicológica describe un proceso pedagógico a partir de los procesos de aprendizaje y del desarrollo intelectual de los niños.

"El texto de Haward F. Ferh, presenta en forma sintética los principios y características de algunas teorías del aprendizaje relacionadas con el campo de las matemáticas. En el nivel en que se encuentran los estudiantes de las licenciaturas, éstos han revisado ya algunas corrientes referidas a niveles de desarrollo y aprendizaje del niño (por lo que se les propone remitirse a los cursos en que han revisado dichas teorías particularmente del texto de Ferh es su referencia al campo de las matemáticas.

Ferh señala que existen tres formas en que se estudia el proceso de aprendizaje: la fisiológica, la fisiológica-observacional y la introspectiva. Explica brevemente en que consiste la primera forma y señala las limitaciones, para explicar desde esta perspectiva, cómo se desarrolla el aprendizaje.

Desde un enfoque fisiológico-observacional, el aprendizaje puede definirse como un cambio de comportamiento, alcanzado por medio de una experiencia. Desde esta perspectiva una tarea de la educación sería crear expectativas que capaciten al alumno a reconstruir o cambiar su comportamiento.

El autor del texto considera que, en general, los psicólogos del aprendizaje coinciden en la concepción hasta aquí planteado y que en todo caso las diferencias particulares entre una y otra, permite hacer aplicaciones más útiles de algunas de ellas para diferentes situaciones; esto hace necesario llevar a cabo investigaciones sobre situaciones precisas y la difusión de dichos estudios para ir resolviendo el problema de la reproducibilidad y ofrecer, en consecuencia, elementos para una mayor validación de las teorías y modelos referidos a la didáctica del número.

Hay diversas formas de estudiar el proceso de aprendizaje del organismo humano. Una de estas formas es la fisiológica, esto es, estudiar el aprendizaje como reacciones físicas del cerebro, del sistema nervioso, de las glándulas y de los músculos, tal y como lo estímulos físicos los influyen.

Otro método en parte fisiológico y en parte observacional, es estudiar la manera en que el organismo reacciona en diversas circunstancias ya partir de ahí, abstraer los elementos comunes que se denominan leyes del aprendizaje. Se admite que los cambios físicos se llevan en el organismo, y que algunos de éstos se atribuyen a ciertas acciones y reacciones que tiene el organismo en situaciones particulares. Pero la explicación general de la reacción del cuerpo se da en función de la situación y no en función de los cambios físicos internos del organismo, los fisiólogos siguen este procedimiento.

Un tercer método es ignorar todos los cambios físicos internos y describir el aprendizaje sólo en términos de la introspección de consideraciones lógicas.

Los tres métodos han arrojado, y los siguen haciendo, una luz al comportamiento humano, pero recientemente las investigaciones fisiológicas han ofrecido las mejores promesas de ayuda a la docencia.

Para definir los objetivos de contenido ha sido posible apoyarse en los trabajos han puesto en evidencia la construcción progresiva en el niño de las estructuras lógico matemáticas; en efecto se ha podido explorar la relación en esta construcción psicológica con la evolución histórica de las matemáticas, relación a propósito de la cual Piaget ha escrito:

"Mediante un proceso en apariencia paradójica, pero psicológicamente natural y muy explicable, las estructuras más abstractas y más generales de las matemáticas contemporáneas se acercan mucho más a las estructuras operatorias naturales de la inteligencia y del pensamiento que las estructuras particulares que constituían el armazón de las matemáticas clásicas y de su enseñanza". [18]

La confusión entre el problema de los fundamentos y de la explicación de la génesis lleva a un reduccionismo psicológico que, en el plano de la definición de los objetivos de contenido, ha podido conducir a una identificación entre el campo de los contenidos matemáticos y el campo operativo.

Según Piaget, desde el punto de vista epistemológico los conocimientos matemáticos tienen sus orígenes en las coordinaciones de acciones y en las operaciones del sujeto que las prolongan; se podría así llegar a creer, que una enseñanza sistemática de estas operaciones; tomadas asiladamente (clasificación, seriación, por ejem.), suministraría contenidos de enseñanza garantizando la adquisición por el niño de los conocimientos específicos que constituyen la disciplina matemática.

"Piaget, expresa de otro modo esta continuidad entre estructuras operatorias y matemáticas cuando se sitúa en un punto de vista didáctico". [19]

"Las estructuras operatorias de la inteligencia, aun siendo de naturaleza lógico matemática, no son conscientes, en tanto que estructuras de acción o de operaciones que dirigen, por supuesto, el razonamiento del sujeto, pero no constituyen un objeto de reflexión para él. La enseñanza de las matemáticas, por el contrario7 invita a los sujetos a

[18] Ferh, Howard, "Teorías del Aprendizaje Rel. con el campo de las Matemáticas", 1985, pp. 120-148.
[19] Piaget, Jean, "Teorías del Desarrollo", 1969, Pág. 69

una reflexión sobre las estructuras."[20]

Es conveniente precisar correctamente el desarrollo de estudio de los procedimientos; intentando comprender la organización de las nociones matemáticas propuestas por la escuela a los alumnos, pero no se trata de transformar estos procedimientos en instrumentos de enseñanza. La investigación de las modalidades el cual el alumno se apropia de los conocimientos ha permitido superar la concepción de que los objetivos de contenidos son asimilables por adición progresiva, según una serie de realizaciones de naturaleza idéntica. Se llega así a la necesidad de definir objetivos formativos. Se opera7 un cambio de perspectivas7 de tal manera que los contenidos solo se conciben en relación a la actividad del alumno.

El análisis de esta actividad en relación con las condiciones en las que se produce se convierte en la cuestión teórica importante si se quiere responder a este problema de los objetivos formativos en otro; términos que no sean generales, a lo que a menudo nos vemos forzados actualmente. Por ejemplo, favorecer la actividad, la manipulación de objetos, la investigación espontánea, la cooperación, etc., es ya una evolución importante en la concepción de los métodos; pero no es necesario abordar el análisis de la actividad en situación escolar para poder precisar lo que es formativo.

Después de analizar los fundamentos teóricos de la didáctica de la matemática en este capítulo se propone que el docente analice algunos lineamientos metodológicos para la enseñanza y el aprendizaje de contenidos matemáticos. Los lineamientos propuestos se apoyan en una concepción de cómo el niño construye conceptos matemáticos, así como el reconocimiento de las relaciones que se establece entre el maestro y el alumno.

Piaget caracteriza la construcción de conceptos matemáticos específicos, que el niño ha de aprender en el nivel de educación básica. El empleo de estrategias cada vez más elaboradas nos da una idea de1 avance conceptual del niño, que el acerque hacia una mayor posibilidad de comprensión de los conceptos de adición y sustracción.

[20] OP. CIT. Piaget, Jean,"Teorías del Desarrollo", 1969, Pág. 70

El conocer y propiciar estos procedimientos informales de resolución de problemas puede constituir un sustento muy útil para la enseñanza de los conceptos formales de la aritmética.

Como sugerencias de las actividades a realizar hemos puesto énfasis en la necesidad de proporcionar a los niños un aprendizaje de los conceptos de adición y sustracción menos mecánico y más comprensivo; un aprendizaje significativo de estos conceptos supone, por una parte, contextualizar la situación a partir de experiencias concretas y vivénciales, y por otra, basarse en las posibilidades conceptuales de los niños y en los conocimientos informales que adquieren a partir de sus experiencias extraescolares. Se pretende que el docente ofrezca algunas recomendaciones e ideas de actividades que pueden ayudarle a orientar su trabajo en este sentido.

Para ello habrá que partir de una consideración importante: el aprendizaje es un proceso constructivo que requiere de la participación activa del individuo. En otras palabras, actuar, en este caso, no significa solamente ejecutar acciones físicas, sino más bien acciones mentales a partir del análisis de diversas situaciones y de la confrontación de las ideas propias con los hechos de la realidad.

En estos términos, es muy importante un ambiente escolar en donde los niños puedan tener variadas oportunidades de enfrentarse con situaciones que los hagan pensar, experimentar, cometer errores, llegar a darse cuenta de ellos, ya partir de este modificar y enriquecer sus ideas. En síntesis, un ambiente en donde puedan participar con iniciativa y no se les limite sólo a ejecutar las indicaciones del docente. Realmente queremos promover un aprendizaje significativo, indispensable para crear un ambiente escolar de esa naturaleza.

Muchas de las actividades que se exponen requieren de una organización en la cual los niños puedan participar más a nivel individual o de pequeños grupos y donde pueda existir una interacción más directa entre el maestro y sus alumnos y entre los mismos niños. Según Piaget el error de suponer que un niño adquiere la noción del número y otros conceptos matemáticos exclusivamente a través de la enseñanza, ya que de una manera espontánea y hasta un grado excepcional los desarrolla independientemente el mismo. Cuando un adulto quiere imponer los conceptos matemáticos a un niño antes del tiempo debido, el aprendizaje es únicamente verbal puesto que el verdadero entendimiento viene únicamente con el desarrollo mental".[21]

4.1. COMO FORMAN LOS N INOS CONCEPTOS MA TEMA TICOS.

"Lo anterior puede ser demostrado con un sencillo experimento: a un niño de 5 o 6 años sus padres lo han enseñado a decir los números del uno al diez. Si se le ponen diez piedras en línea el niño las puede contar o las cuenta equivocadamente, puesto que aunque el niño sabe el nombre de los números no ha captado la idea esencial del número o sea que no ha captado el concepto de que el número de objetos queda igual, no importando de que manera se acomoden.

En cambio un niño de seis y medio o siete, muestra que se le ha enseñado a contar. Se le dan ocho fichas azules y ocho rojas, encontrando el niño una correspondencia uno a uno (en donde el número de fichas rojas es igual al número de fichas azules), no importando la manera que estas sean arregladas. El experimento de correspondencia uno a uno es sumamente útil para investigar el desarrollo del concepto del número en el niño. En una mesa vamos a poner una fila de ocho fichas azules con un espacio entre ellas de uno tres centímetros, en una caja ponemos fichas de color rojo y dándole la caja al niño, le pedimos que saque el mismo número de fichas rojas que las azules que están en la mesa. Sus reacciones dependerán de su edad y podemos distinguir tres etapas de desarrollo.

Un niño de cinco o seis años en promedio, pondrá una línea de fichas rojas igual a la línea de fichas azules, pero pondrá la línea de fichas rojas juntas, en vez de dejar los tres centímetros de espacio entre ellos; el cree que el número de fichas es igual si el largo de la línea es igual. A los seis años los niños llegan a una segunda etapa puesto que pondrán una ficha roja puesta a una ficha azul, obteniendo de esta manera un número igual de fichas,

[21] UPN, "La Matemática en la Escuela II", 1985, pp. 100-104

pero no necesariamente han adquirido el concepto del número en sí, puesto que si aumentamos el espacio entre las fichas azules pensarán que al ser más larga la fila, esta tiene más fichas aunque el número no ha sido variado. A la edad de seis años y medio o siete de promedio, el niño llega a la tercera etapa, donde ellos saben que aunque se abra o cierre el espacio entre las fichas, el número de éstas no variará".[22]

Los matemáticos Henri Poincare y L.E.J. Brouver han mantenido la tesis de que el "concepto del número es un producto de la intuición primitiva antes que nociones lógicas" .Los experimentos que se acaban de describir niegan dicha tesis en nuestra opinión.

"Al principio los niños no hacen ninguna distinción entre los números cardinales y los ordinales, además el concepto de número cardinal en sí, presupone una relación de orden, ; por ejemplo un niño puede construir una correspondencia de uno a uno solamente sino se le olvidan ninguno de los elementos ni los usa dos veces.

La única manera de distinguir una unidad de otras es considerarla antes o después de la otra en un tiempo o en un espacio; o sea el orden de numeración.

El estudio del descubrimiento del niño de relaciones espaciales, que se puede "amar geometría espontánea de niño, es tan rico como el estudio del concepto del número. Un niño empieza con e' último, sus primeros descubrimientos geométricos en el número son topológicos; a los 3 años de edad distingue entre figuras abiertas y cerradas; si le pides que copie un cuadrado o un triángulo, el dibuja un circulo cerrado y dibuja también una cruz; con dos líneas separadas.

Es curioso que este orden psicológico sea más cercano al orden de la construcción deductiva axiomática de la geometría moderna que el orden histórico del descubrimiento. Eso ofrece otro ejemplo de la relación entre construcción psicológica y la construcción lógica de ciencia en sí.

Los experimentos sobre el descubrimiento del niño de la conservación de distancia son especialmente ilustrativos.

---

[22] OP. CIT. "La Matemática en la Escuela II", 1985, pp. 108-112

De cualquier manera que se le examine, se encuentra la misma verdad: los niños no aprecian el principio de conservación de longitud o superficie hasta cerca de la edad de siete años, descubren fa reversibilidad que muestra que la cantidad ha permanecido constante; entonces el descubrimiento de relaciones lógicas es un prerrequisito a la construcción de conceptos geométricos, como lo es en la formación del concepto de números.

Esto se aplica a la medición en sí, lo que es solamente un concepto derivado, es interesante estudiar como los niños aprenden a medir espontáneamente.

Cuando los profesores hacen cosas, que al analizarlas nos parecen tontas, carentes de sentido, contra producentes para el aprendizaje, interviene mucho tiempo y energía en hacerlas.

El hecho de que mucha gente dedique mucho tiempo a algo basta para hacernos sospechar que deben hacer razones poderosas para que lo hagan (no es gratuito, ni azaroso).

La nación de un contrato didáctico (conjunto de normas implícitas que regulan la interacción maestro-alumno) nos abre una puerta de entrada al análisis de esta problemática. El estudio de las reglas de interacción nos ha permitido diferenciar una serie de efectos, interesantes en la medida en que constituyen fenómenos estables, presentes en las situaciones didácticas. "Es una sofisticación del efecto R. Revos. Este efecto describe el hecho de "quitar al profesor la responsabilidad de que los niños aprendan algo" dándole una preventiva ley natural que generaliza que los niños aprenderán por sí solos. El profesor queda descargado de la necesidad de negociar el contrato didáctico.

El alumno ahora va aprender solo. Basta con presentarles ejemplos de las nociones que se quiere que aprenda.

El contrato didáctico transforma las heurísticas. La analogía se convierte en un instrumento privilegiado para el maestro.

En estos casos lo que acaba sucediendo es que el alumno manipula el material y es el profesor quien descubre la actividad metafórica.

La ideología estructuralista, ofreció una justificación epistemológica a este efecto. Por ejemplo:

Explicación de que un palito tiene dos extremos, si lo parto en dos, cada extremo tendrá a su vez dos extremos, etc. Ante un interlocutor que no entiende, para explicarle dice: una varita tiene dos extremos, si la parto en dos, cada extremo tendrá a su vez dos extremos, etc.

Es decir, repite la misma frase, igual de complicadas cambiando un aspecto no pertinente para la comprensión de su significado.

La analogía es útil como regla de conocimiento, pero no como método de enseñanza. Cuando se da una nueva oportunidad para el aprendizaje no debe ser la misma cosa que no se pudo aprender antes.

Con frecuencia lo que se hace para "enseñar" algo, es un camuflaje didáctico. Variar algo no pertinente para dar otra oportunidad, manteniendo la complejidad del problema. Por ejemplo, se presentan muchos problemas todos iguales, y el primero lo resuelve el maestro.

Los alumnos llegan a reconocer el objeto de aprendizaje, repitiendo en el procedimiento seguido por el maestro.

En educación se suelen encubrir lo que se le quiere decir a los alumnos bajo la forma de analogías.

El contrato didáctico determina el funcionamiento del conocimiento. Es necesario saber como lo hace, para no trasladar ingenuamente el que hacer matemático ala escuela".[23]

[23] Brooseau, Guy, "Efectos y Paradojas del Contrato Didáctico, pp.187 -188

"Los psicólogos ofrecen dos explicaciones distintas de la comprensión del significado de los nombres de los números y del acto de contar.

Desde uno de estos puntos, los niños, antes de llegar a tener "uso de razón" (hacia los siete años de edad), son incapaces de comprender el número y la aritmética (por ejemplo Piaget -1965)7 afirmaba que los niños aprenden a recitar la serie numérica y datos aritméticos a muy corta edad y que se trata de actos completamente verbales y sin significado. Ni siquiera la numeración garantiza una comprensión del número.

Desde este punto de vista7 el desarrollo de un concepto del número y de una manera significativa de contar depende de la evolución del pensamiento lógico.

El MODELO CARDINAL.-Según uno de estos modelos que establece la lógica como requisito previo7 los niños deben entender la clasificación antes de poder comprender el significado esencial del número.

Esto implica aprender a definir un conjunto, es decir, a clasificar objetos para poder asignar cada uno de ellos a un conjunto correcto. Por ejemplo, un conjunto de formas curvas pueden incluir c, C, u, U, s, S y O, pero no L, v, V, F, g, #.

Comprender la lógica de clases también requiere comprender la clasificación jerárquica o inclusión de clases: una clase es la suma de sus partes (sub clases) y, por lo tanto es mayor que cualquier sub clase. Por ejemplo; si un niño se le presenta tres rosas y cinco violetas y se le pregunta ¿Hay más violetas o hay más flores? Debería responder que la clase (flores) es más que la sub clase (violetas). Sin embargo los niños pequeños tienen dificultades con estos problemas de inclusión de clases (por ejemplo, Piaget 1965). Estos resultados se han considerado evidencias de que los niños pequeños no captan la lógica de clases y que, es consecuencia, son incapaces de comprender verdaderamente el número.

Al principio, los niños se limitan a recitar nombres de número. En estos momentos, contar no parece ser nada más que un sonsonete carente de sentido. Por ejemplo, Arianne a los 22 meses canturrea "dos cinco dos, cinco" mientras baja saltando cuatro escalones. Ha oído a sus hermanos gemelos de 3 años de edad recitar nombres de números mientras bajan las escaleras o juegan a algo. Al parecer,

Arianne ha aprendido que ciertas actividades pueden verse acompañadas por la recitación de nombres de números. Imita el procedimiento (y solo una parte de la serie numérica correcta) seguido por sus hermanos, los nombres de los números son palabras y, como ocurre con otras palabras, los niños pueden aprender a decirlas mucho antes de formar (imágenes mentales), por no hablar ya de conceptos abstractos que asociar a las mismas. Al principio, los niños pueden hacer enumeraciones sin interior numerar conjuntos. Por ejemplo Arianne parece disfrutar a sus dos años de edad, etiquetando objetos mientras busca entre sus juguetes, no hace ningún intento de emplear una etiqueta para cada elemento o de resumir la cuenta. Cuando se le hacen preguntas del tipo "¿ cuántos hay?", sabe que el procedimiento correcto implica responder con un número, pero todavía no parece apreciar que los números se emplean para designar el valor cardinal de un conjunto y para diferenciar un conjunto de otros conjuntos con distinto valores cardinales. Parece que dos es la respuesta comodín para Arianne a la hora de responder a preguntas del tipo ¿cuántos hay? En estos momentos, contar es un acto enteramente verbal y sin significado. Obsérvese, no obstante, que ya trata los números como una clase especial de palabras. Sólo emplea números cuando se le pregunta cuántos hay o cuando se le pide que cuente. Los niños parecen distinguir muy pronto entre las palabras que son para contar y las que no.

Principio del orden estable, con el tiempo, a medida que los niños usan técnicas para contar y reflexionan sobre ellas, aprenden a descubrir regularidades importantes en sus acciones de contar y en los números. Los niños parecen aprender los primeros términos de la serie numérica de memoria. Al principio, puede que no empleen los mismos términos o el mismo orden cuando recitan números o cuentan objetos. Por ejemplo, cuando Alexi tenía tres años de edad no siempre empezaba desde el uno para contar conjuntos. Tarde o temprano, los niños se dan cuenta implícitamente, o hasta explícitamente, de que contar requiere repetir los nombres de los números en el mismo orden cada vez. El principio del orden estable estipula que para contar es indispensable el establecimiento de una secuencia coherente los niños cuyas acciones están guiadas por este principio pueden utilizar la secuencia numérica convencional o una secuencia propia (no convencional) pero siempre de manera coherente. Por ejemplo, Beth siempre usa la secuencia correcta del uno al diez en tanto que Carol usa siempre su propia versión (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 18) para contar diez objetos.

Principio de correspondencia, como resultado de la imitación, al principio los niños pueden recitar números -como Arianne- mientras señalan objetos y hasta pueden llegar a desarrollar una cierta eficacia en la enumeración de conjuntos pequeños. Más adelante, pueden darse cuenta de la necesidad de etiquetar cada elemento de un conjunto una vez y sólo una. El principio de correspondencias subyace a cualquier intento genuino de enumerar conjuntos y guía los esfuerzos de construir estrategias de control de los elementos contados y por contar, como separar los unos de los otros. A una edad tan corta como los tres años, los niños parecen emplear un principio como éste para detectar errores de enumeración como contar dos veces un mismo objeto o saltarse alguno.

El principio de unicidad, es una función de contar es asignar valores cardinales a conjuntos para diferenciarlos o compararlos, es importante que los niños no sólo generen una secuencia estable y asignen una etiqueta) y sólo una, a cada elementos de un conjunto, sino también que empleen una secuencia de etiquetas distintas o únicas. Por ejemplo, un niño puede usar la secuencia 1, 2, 3, 3 de manera sistemática y emplear estas etiquetas en una correspondencia biunívoca, pero como no todos sus elementos están diferenciados, etiquetará de la manera conjuntos de tres y cuatro elementos (con la designación cardinal 3), incluso cuando un niño tiene que recurrir al empleo de términos no convencionales, la apreciación del principio de unicidad (comprender la función diferenciadora de contar) le impediría escoger términos empleados previamente. Por ejemplo, el empleo sistemático de la secuencia no convencional 1, 2, 3, diecionce etiquetaría erróneamente conjuntos de cuatro elementos pero al menos los diferenciaría de conjuntos con menos elementos. Por tanto, además de los principios de orden estable y de correspondencia, es importante que los niños sigan el principio de unicidad.

El principio de abstracción, los niños también deben aprender como definir un conjunto para poder contarlo. El principio de abstracción se refiere a la cuestión de lo que puede agruparse para formar un conjunto, a la hora de contar, un conjunto puede estar formado por objetos similares (por ejemplo, bolas: °°° o distintos (por ejemplo, bolas, estrellas y palos: o* -). Para incluir elementos distintos en un conjunto, el niño debe pasar por alto las diferencias físicas de los elementos y clasificarlos como cosas (por ejemplo, una bola, una estrella y un bloque se pueden considerar como una, dos y tres cosa). En el fondo, cuando creamos un conjunto de elementos distintos encontramos (abstraemos) algo común a todos los elementos.

El principio del valor cardinal, mediante la imitación, los niños pueden aprender fácilmente la técnica de contar denominada regla del valor cardinal, es decir, basarse en el último número contado en respuesta a una pregunta sobre una cantidad. Sin embargo, el empleo de la regla del valor cardinal no garantiza una apreciación adecuada del valor cardinal en sí. Es decir, no significa necesariamente que el niño se dé cuenta de que el último término designa la cantidad del conjunto y que un conjunto tendría la misma cantidad si se vuelve a contar después de modificar la distribución espacial de sus elementos. Por ejemplo, un niño deficiente empleaba correctamente la correspondencia biunívoca para enumerar quince objetos, pero empleaba la siguiente secuencia numérica: 1, 5, 19, 14, 12, 10, 9, 20, 49, 1, 2, 3, cuando se le preguntó la cantidad de elementos respondió satisfecho: ¡Tres! Al parecer, ¡la noción de tres no excluía conjuntos cinco veces más grandes! Los niños pueden construir el principio del valor cardinal reflexionando sobre sus actividades de contar. Cuando, por ejemplo, un niño cuenta una colección de tres juguetes, los desparrama y los vuelve a contar, puede descubrir que una colección conserva la misma designación (cardinal) a pesar de su aspecto (tres).

El principio de la irrelevancia del orden, al reflexionar sobre la actividad de contar también se descubre el principio de la irrelevancia del orden (El orden en que se enumeran los elementos de un conjunto no afecta a su designación cardinal, considérese el caso descrito por Piaget, un niño de cuatro años o cinco años con taba una hilera de diez fichas. Como no se daba cuenta de que el resultado sería el mismo, volvió a contar las fichas en dirección contraría y volvió a encontrar que eran diez. Interesado por este resultado, el niño colocó las fichas en círculo, las volvió a contar y volvió a encontrarse COn diez. Finalmente, contó el círculo de fichas en dirección opuesta para acabar obteniendo el mismo resultado. Al contar los elementos de varias maneras, este niño descubrió una interesante propiedad de las acciones de contar, la distribución de los elementos y el orden de su enumeración no tenían importancia a la hora de determinar la designación cardinal del conjunto.

Cuando tienen la edad de entrar en la escuela, los niños son muy expertos en contar, prácticamente todos parecen dar por sentados los diversos principios que subyacen a contar o que lo rigen los principios de orden estable, de correspondencia, de unicidad y de abstracción. La mayoría hasta parece apreciar el principio relativamente sofisticado de la irrelevancia del orden. Esto no ocurre con los niños muy pequeños o deficientes. Estos niños, por ejemplo, pueden no decir los números siguiendo un orden coherente. Un error mucho más común es decir los primeros números en el orden correcto y luego soltar otros términos sin orden no concierto. Por ejemplo, un niño podría empezar sistemáticamente con 11 2, 3 y luego, seguir con 6, 8, 12, 9 una vez y con 12, 3, 6, 6, la siguiente. Nótese que en el segundo caso aparecen términos repetidos. Tres ya se había empleado en la primera parte correcta, y seis se emplea dos veces seguidas para terminar la cuenta. Esta manera de contar no sólo viola claramente el principio de orden estable, sino también el principio de unicidad. (Aunque decir términos sin sentido y repetir otros no cumple los principios de orden estable y de unicidad, estos errores no siempre indican necesariamente que estos principios no se conozcan. Por ejemplo, los niños pueden conocer estos principios, pero olvidarse de que ya han usado un término previamente). Si los niños no han tenido la oportunidad de descubrir estos principios, se les deben brindar abundantes experiencias de contar, sobre todo en el contexto de juegos o actividades de interés. En realidad, puede ser útil presentar estos principios explícitamente (por ejemplo. Cuando contamos cosas, debemos comprobar que decimos los números de la misma manera cada vez o cuando contamos cosas, debemos comprobar que usamos un número nuevo para cada cosa que señalamos). También podría ser útil discutir historias como las del ejemplo o las que aparecen regularmente en los programas infantiles de televisión como barrio, sésamo.

En resumen la experiencia de contar es esencial para que los niños desarrollen paulatinamente la comprensión del número y lleguen a dominar aplicaciones numéricas. Salvo en el caso de corregir el aprendizaje de nociones básicas como más, no hay ninguna razón para aplazar la enseñanza de contar y del número. A partir de experiencias concretas de contar y de reconocimiento de pautas, los niños aprenden que los cambios de aspecto y del orden de contar no afectan al valor cardinal, y que añadir o quitar elementos sí que lo hace. La experiencia de contar es importante para ampliar las nociones intuitivas de equivalencia, no equivalencia y orden. La enseñanza del número basada en contar es inicialmente más significativa para los niños."[24]

[24] Ávila, Alicia y José Luis Cortinas, "Las Matemáticas", México, 1986, Pág. 98

CONCLUSIÓN

Entres las numerosas materias que se enseñan en la escuela, las matemáticas son, sin duda una de las consideradas más importantes, quizá la más valorada, a la vez la más temida por los escolares.

En nuestra sociedad actual se valoriza por encima de todo el pensamiento lógico y deductivo, encuentra en las matemáticas el más alto grado de expresión de este pensamiento.

De esta forma, haciendo gala de una gran ignorancia histórica, olvidando que también los procedimientos didácticos han partido la mayoría de las veces de evidencias intuitivas y atravesando innumerables obstáculos hasta llegar a la claridad lógica con que se nos presenta; se atribuye a las matemáticas la función de enseñar a pensar, entendiendo por pensar el ejercicio de ese método deductivo "que desarrolla la claridad del espíritu y el rigor del juicio" .Una práctica pedagógica consiste en hacer de las matemáticas una cadena de demostraciones en relación con la realidad, un juego al que solo algunos aprenden a jugar y cuyo resultado memorizan mayormente, a los que se esfuerzan a ocupar su tiempo en aprender formulas sin sentido en vez de, realmente desarrollar su capacidad de pensamiento y juicio critico. Tal es el caso de la experiencia de contar, es esencial para que los niños desarrollen paulatinamente la comprensión del número y lleguen a dominar aplicaciones numéricas, salvo en el caso de corregir el aprendizaje de nociones básicas, como " más", no hay ninguna razón para aplazar la enseñanza de contar y del número.

A partir de las experiencias concretas de contar y de reconocimiento de pautas, los niños aprenden que los cambios de aspectos y del orden de contar no afectan el valor cardinal, y que añadir y quitar elementos si que lo hacen.

La experiencia de contar es importante para ampliar las nociones intuitivas de equivalencia, no equivalencia y orden.

La enseñanza formal y lógica de las teorías de conjunto es útil por derecho propio; pero la enseñanza del número basada en contar es inicialmente más significativa para los niños.

También es importante considerar que el juego desempeña un papel muy importante dentro de la enseñanza de las matemáticas; por que es la manera más común por lo que el niño absorbe el conocimiento, se familiariza con el, aunque esta deba pasar por diversas estructuras; el juego se utiliza como medio de comunicación y de expresión al nivel en el que se encuentra el niño para su conocimiento matemático y desarrollo intelectual que adquiera en él y para todos los demás que se relacionan con otro.

Por lo tanto la intención de este trabajo responde aun propósito, de que el alumno analice y desarrolle su propia practica de enseñanza y tome conciencia de las limitaciones y posibilidades que se presentan para realizar modificaciones, sugeridas por el profesor en la organización del trabajo escolar.

Así mismo, en la elaboración de este documento pedagógico, nos permite considerar esta actividad en forma realista, sin caer en falsas expectativas pero sin cerrar la posibilidad con que cuenta el maestro para proponer y llevar a cabo cambios importantes en su practica docente; como es en el caso del desarrollo cognoscitivo, el estudiante permite agregar nuevos hechos e ideas; esto hace que Piaget identifique cuatro factores que influyen en el desarrollo cognoscitivo, que son:

Maduración biológica, experiencia social y equilibrio que interactúan ara influir sobre los cambios del pensamiento ya que la madurez es uno de los factores más importantes por que desarrolla el desenvolvimiento de los cambios biológicos que están programados a nivel gen ético en cada ser humano desde la concepción.

Piaget concluyo que todas las especies heredan dos tendencias básicas o funciones invariables en los seres vivos, después de haber concluido sus primeras investigaciones sobre biología.

La primera de esas investigaciones es hacia la organización; combinar, ordenar, volver a cambiar y volver a ordenar conductas y pensamientos en sistemas coherentes. La segunda tendencia es hacia la adaptación o el ajuste al entorno.

Las diferencias reales de los niños conforme crecen de acuerdo con la "hipótesis" de Piaget para apropiarse del conocimiento son ras siguientes cuatro etapas: Sensoriomotriz, preoperacional, operacional concreta y operación formal.

De acuerdo a estas etapas los estudios de Piaget, sobre como aprenden los niños, apoyan los conceptos del desarrollo en las matemáticas, propuesta para las escuelas primarias. Sin embargo, es necesaria una comprensión más detallada de los descubrimientos de Piaget para evitar el apresuramiento y la presión que algunas personas todavía no pueden eliminar de la educación de los niños aún cuando en los materiales se encuentren encarnados en los buenos principios de aprendizaje.

Podemos resumir que el aprendizaje se puede dar de la siguiente manera:

1) Un proceso de construcción activa por parte del sujeto, el cual mediante su actividad física y mental determina sus reacciones ante la estimulación ambiental.
2) No depende Solo de la estimulación extrema, también esta determinado por el nivel de desarrollo del sujeto.
3) Es un proceso de reorganización cognitiva.
4) Las relaciones sociales favorecen el aprendizaje, siempre que produzca contradicciones que obliguen al sujeto a reestructurar sus conocimientos.
5) La experiencia física en una condición necesaria para que se produzca el aprendizaje, pero no es suficiente, se necesita además la actividad mental.

A lo largo de este trabajo documental podemos apreciar las opiniones de algunos autores, los cuales nos dan alguna pauta para poder interferir en el plan de trabajo, hacia una experiencia de ideas y forma de extraer algunas anotaciones interesantes para poder realizar nuevas expectativas a la enseñanza.

También no hay que olvidar otro factor muy importante que pueda repercutir en la enseñanza del alumno, es uno de los mecanismos de la selectividad del sistema educativo es, sin lugar a duda, el fracaso escolar, franco preludio de la deserción, principalmente en las familias de escasos recursos económicos; puesto que el atributo "escolar" solo alude al lugar donde se fracasa, la escuela, sin especificar si el sujeto que fracasa es el alumno, que no logra aprender, la institución, que no consigue enseñanza sin el material necesario o por el costo del material.

Sin embargo, somos herederos de una larga tradición que atribuye al alumno la propiedad de fracasar, dispensando de toda responsabilidad a la escuela y, en particular, al profesor.

Es arbitrario mencionar este aspecto en el tema; pero es muy importante porque afecta al alumno emocionalmente en su enseñanza y más en nuestra época en la que vivimos; sería factible analizar este tema; ya que interviene en la enseñanza del niño y repercute literalmente tanto en el aspecto social como el moral.

Un procedimiento didáctico no es nada más comprar el material y llevar a cabo la clase; sino tener la estrategia creativa para poder exponer una clase de matemáticas de primer grado, dado es el caso de algunos maestros que comenten el error profesional de explotar al alumno y no obtener la capacidad de explorar diversas maneras de una clase creativa, llevadera, sociable e intelecto para los niños; que de una manera u otra incitan al alumno ser interesante la clase y familiarizarse con las matemáticas.

Para finalizar exhortaría a los docentes a que tomemos conciencia de enseñar las matemáticas de una manera sencilla e interesante, con materiales adecuados al medio en el que el niño tenga participación creativa y provechosa. Todo esto lo lograríamos con fe de enseñanza y profesionalismo.

BIBLIOGRAFÍA

Almaguer Salazar, Teresa E., El desarrollo del alumno, Características y estilos de aprendizaje. Ed. ITESM 1998. Pág. 236

Antología, LAS MATEMÁTICÁS, UPN, México, 1988, Pág. 167

Ávila, Alicia y José Luis Cortinas, 'LAS MATEMÁTICÁS EN LA ESCUELA", México, 1986, Pág. 98

Briones, Guillermo,"Preparación y evaluación de proyectos 1" Editado por el convenio Andrés Bello. 1995, Pág. 334

Brooseau, Guy, Efectos y paradojas del Contrato Didáctico, Pág. 231

De Mello e Souza, Julio César, El hombre que calculaba, México, 1975, Pág. 188

De Zubiría, Miguel/Julián, Biografía del pensamiento, México, 1981, Pág. 131

Douglas A. Bernstein y Michael T. Nietzeel, "Introducción a la Psicología", Pág. 126

E. Woolkfolk Anita, "Psicología Educativa", Pág. 156

Enciclopedia Encarta 99- -MICROSOFT: Pág. 198

Enciclopedia Temática Estudiantil --OCÉANO -1998- ESPAÑA, Pág. 432

Ferh, Howard, 'Teorías del Aprendizaje Rel. con el campo de las Matemáticas", 1985, Pág. 175

Lerner, Delia, UNAM, México, Pág. 212

López de Medrano, Santiago, MODELOS MATEMÁTICOS, 1972, Pág. 325

Matemática 3°- Grupo BOTADA- Pág. 247

Moderna Enciclopedia Universal -NAUT A-Pág. 356

Piaget, Jean. "Seis estudios de Psicología", México, 1968, Pág. 525

Piaget, Jean, "Teorías del Desarrollo", 1969, Pág. 133

PROGRAME, Pág. 78

Rodríguez P. Benjamín, et al, "Matemáticas con Tecnología Aplicada". Ed Prentice Hall, pág. 219.

Sleminska, "Pedagogía las formas de Cálculo", Pág. 176

UPN, "La Matemática en la Escuela II", 1985, Pág. 279

Wadsworth, Barry J. "Teoría de Piaget del Desarrollo Cognoscitivo Afectivo" Editado por Editorial Diana. México, 1991, Pág. 368.