UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

UNIDAD AJUSCO

EXPERIMENTACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS DE UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA EL APRENDIZAJE DE PRODUCTOS NOTABLES Y DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRA EN DESARROLLO EDUCATIVO

PRESENTA

ROCÍO VILLEGAS ROMERO

DIRECTORA DE TESIS

DRA. VERÓNICA HOYOS AGUILAR

MÉXICO D.F., OCTUBRE 20005

AGRADECIMIENTO ESPECIAL:

Agradezco a CONACYT el apoyo recibido a través del financiamiento del proyecto No. de Referencia. 38432-S.

AGRADECIMIENTOS

A la directora de tesis Dra. Verónica Hoyos Aguilar, por sus valiosos comentarios, orientaciones y en general por su labor de asesoría.

A la Universidad Pedagógica Nacional, donde mis inquietudes hallaron cause.

A los profesores Dr. Tenoch Cedillo Ávalos, Dr. Rodrigo Cambray Núñez, Dr. Ernesto Sánchez Sánchez, Dra. Mariana Sáiz Roldán, M. en C. Antonio Chalini, Dra. Alicia Carvajal, y Dra. Alicia Ávila, sinodales y profesores de la línea, cuyas observaciones redondearon el trabajo.

A la Lic. Claudia Revuelta Zúñiga por su apoyo tanto en la implementación de la propuesta como en la elaboración de esta tesis.

Finalmente a mi esposo, a mis padres y hermanos, por su comprensión y apoyo.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

En este trabajo de tesis se ha querido conocer cuáles son los significados que los estudiantes de bachillerato le asignan a las expresiones algebraicas (productos notables y factorización[1]) a partir de una propuesta didáctica de materialización concreta de objetos geométricos, manipulables, para llegar a la simbolización algebraica.

Para dar cuenta de las interrogantes que guiaron la investigación se diseñó y aplico un cuestionario antes y después de la experimentación de la propuesta didáctica,los cuales se denominan pretest y postest respectivamente. El pretest y postest se aplicaron tanto al grupo control como al experimental. Al término de algunas sesiones de la propuesta en el grupo experimental se llevaron a cabo entrevistas que permitieron constituir 3 estudios de caso. Para el análisis de estos datos también se utilizo el trabajo escrito de los alumnos a lo largo de la propuesta, y el registro de videograbaciones y notas de las observaciones de cada sesión

El método de análisis cualitativo en este trabajo se combinó con un método cuantitativo como propone José, P. Mestre (2000). Éste consiste en producir tanto datos cuantitativos como cualitativos, es decir se establece no únicamente si ciertos problemas son resueltos correcta o incorrectamente, sino también los detalles acerca del razonamiento usado para la resolución de tales problemas.

Las categorías de análisis que se tuvieron en cuenta fueron la verbal, la aritmética, la geométrica y la simbólica algebraica, de acuerdo a diferentes representaciones simbólicas que denotan un tránsito hacia lo algebraico, según Hoyos (1998) y Herscovics (1980)[i]. También se consideraron las categorías elaboradas por Kucheman (1978 y 1981. Citado por Kieran, 2004). Estas categorías dan cuenta de los distintos usos que los estudiantes les dan a las letras.

Los principales resultados que se obtuvieron al estudiar detalladamente los datos, es que el grupo experimental logró alcanzar o quedar clasificado en la categoría simbólica algebraica, es decir asimiló mejor las nociones y operaciones que se trabajaron con la propuesta a diferencia de los resultados que se obtuvieron en el grupo control.

Esta tesis está estructurada en seis capítulos. En el primer capítulo se especifica el tema de esta tesis, en particular las interrogantes y los propósitos que guiaron este trabajo. En el segundo capítulo se presenta la revisión de la literatura de investigación relacionada con nuestro tema. En particular la literatura que se dirige

[1] Descomposición en factores

al estudio de las relaciones entre la historia de la matemática y los estadios de Jean Piaget, lo cual permitió elaborar la propuesta e instrumentar secuencias para su desarrollo. Contiene además los referentes teóricos que sustentan el análisis de los datos que se recabaron en esta tesis.

En el capítulo tres se describe el contenido de la propuesta didáctica y sus fases.

En el capítulo cuatro se da cuenta de los lineamientos metodológicos que orientaron el desarrollo de esta tesis. Este capítulo contiene el panorama de los métodos de recopilación y análisis de datos. Específicamente se habla de un estudio previo al estudio principal llamado estudio piloto, el cual cosistió en llevar acabo una parte del estudio principal, con el propósito de poner a prueba las actividades para programar y modificar la estructura del estudio principal. Por último se habla de las diferentes técnicas que permitieron construir los tres casos en estudio.

El capítulo cinco presenta datos obtenidos en el trabajo de campo y los resultados del análisis. En esta sección se describe con detalle el trabajo realizado por cada alumno tanto del grupo experimental integrado por 26 alumnos, como del grupo control integrado por 27 alumnos. En particular se enfocó a las nociones y estrategias que desarrollaron los estudiantes cuando el ambiente de aprendizaje de productos notables y factorización se basó en el uso de piezas de material con diseño o con forma geométrica. Los datos se discuten con base en los referentes teóricos de esta tesis. En particular se clasifica a los estudiantes según ciertas categorías de ejecución en cuanto a las formas de representación utilizadas y a los diferentes tipos de utilización de las literales.

El capítulo seis presenta las conclusiones que se derivan de los resultados reportados en el capítulo cinco. En particular es de resaltar que las ejecuciones del grupo experimental permitieron ubicarlo en la categoría simbólica algebraica. Además, la mayoría consideró a las letras como números generalizados.

Finalmente se incluyen cuatro anexos al final del trabajo. En el Anexo 1 se presenta el pretest y postest; el Anexo 2 contiene el guión de preguntas realizadas en las entrevistas. En los anexos 3 y 4 se presentan la tabla de resultados del pretest y postest del grupo experimental y control, respectivamente.

Capitulo 1

Construcción del objeto de estudio

1.1 Planteamiento del problema

Para Kilpatrick (1995) históricamente, las matemáticas han sido un tema importante dentro del currículo escolar y, tal vez por esta razón, se han utilizado como filtro para la educación superior. Con el desarrollo de los sistemas de educación universal, los países se enfrentan al reto de modificar el currículo de matemáticas de tal forma que se ofrezcan oportunidades para todos los estudiantes. Según Pellery (1991, citado por Kilpatrick) los objetivos y los métodos de la enseñanza de las matemáticas se han adaptado a las nuevas demandas de la sociedad y se han acomodado a una población estudiantil cada vez mayor.

Muchos alumnos que cursan el bachillerato presentan serios problemas de aprendizaje, como afirma Booth (1984) citado por Grupo Arzaquiel (1993), sólo una pequeña proporción de estudiantes logran una experiencia exitosa respecto a la materia de matemáticas. Esto se debe, según Auzmendi (1992) a que el alumno no tiene el interés de estudiar la materia y mucho menos encuentra su aplicación.

Recientemente, muchos programas de matemáticas en el mundo han mostrado una tendencia a darle una mayor atención a las matemáticas aplicadas, enfatizando la construcción de modelos matemáticos para el análisis de problemas de la vida real (Kilpatrick, 1995). Sin embargo, en la práctica docente de un Cetis[2] lugar en donde se sabe los programas anteriores no se han consolidado, pues el alto índice de reprobación en matemáticas continúa.

Hernández (2000) señala que de acuerdo con Hermann (1999) captar el interés del estudiante ha sido uno de los problemas centrales en la enseñanza de las matemáticas. Ese escaso interés hacia el estudio de esta disciplina propicia un alto índice de reprobación, justificándose en que "las matemáticas son muy difíciles".

Según CoSNET (Consejo del Sistema Nacional de Educación Tecnológica, 2002) para el estudiante que ingresa a la educación media superior tecnológica en México

---

[2]Centro de Estudios Tecnológico Industrial y de Servicios (Educación Media Superior)

resulta complicado entender el contenido de la asignatura de algebra ya que ésta maneja un lenguaje algebraico compuesto por símbolos, leyes y axiomas en su totalidad abstractos, y el alumno no tiene dicha capacidad de abstracción.
De acuerdo con los autores Jean Piaget y Barbel Inhelder (1985), el razonamiento formal se desarrolla en el adolescente desde 11-12 a 15-16 años, periodo en el cual el sujeto se desprende de lo concreto y aprende a situar lo real en todas las transformaciones posibles. En el periodo de las operaciones formales el sujeto es capaz de razonar correctamente sobre proposiciones o hipótesis, aprende a obtener las consecuencias necesarias a partir de verdades posibles.

A la edad en que ingresan los estudiantes en México a la Educación Media Superior Tecnológica (15 y 16 años), se espera sean capaces de "aprender", trabajando sobre hipótesis y proposiciones, sin requerir la presencia de los objetos para descubrir sus propiedades (SEIT, (Subsecretaría de Educación e Investigación Tecnológicas) 2002)[3].

Un estudio realizado por CoSNET en el año 2002 concluye que un porcentaje alto de los alumnos que ingresan al bachillerato tecnológico se encuentran en la etapa de operaciones concretas, esto es que el estudiante requiere de la presencia y manipulación de los objetos para poder aprender.

El razonamiento formal es un tipo de pensamiento esencial en la vida escolar, pues el fracaso de algunos estudiantes en matemáticas pudiera deberse, entre otras causas, a que aún no han estructurado su razonamiento formal y no encuentran en las experiencias escolares referentes concretos que les permitan aprender los contenidos académicos.

Estas observaciones nos llevan a pensar que la razón de que los sujetos no aprendan matemáticas, hay que buscarla no sólo en el mito de la dificultad de la disciplina, sino también en la forma de cómo esta se ha venido enseñando en la escuela.

Según Hernández (2000) se ha privilegiado una enseñanza de las matemáticas descontextualizadas del uso del sujeto y ajena a la actividad social, lo que ha provocado que los aprendices vean a las matemáticas como algo inútil y totalmente ajeno a la vida cotidiana. El profesor enseña álgebra desde su punto más abstracto y genérico posible, ésta forma de enseñanza hace suponer que influye en que un porcentaje alto que cursa reprueben álgebra.

La manipulación de representaciones matemáticas por parte de los estudiantes les proporciona los medios para construir imágenes mentales de un objeto matemático, y la riqueza de la imagen del objeto construido dependerá de las representaciones

[3]Actualmente Subsecretaria de Educación Media Superior

que el sujeto haya utilizado (Socas, 2000).

El desarrollo histórico de las ideas algebraicas, está basado en exploraciones de tipo geométrico-aritmético que permite al alumno descubrir nuevos métodos pre-algebraicos (Radford, 1995).

Vieta (1983) expone los principios fundamentales del álgebra, no sólo considerando el método analítico en el sentido antiguo y sus etapas, sino estableciendo el uso sistemático de letras. “las cuestiones algebraicas están vinculadas con la geometría”.

Para evitar en lo posible el fracaso en el aprendizaje del álgebra y en especial en los temas de productos notables y factorización hay que promover una enseñanza alejada de las prácticas formalistas y abstractas, de forma concreta de tal suerte que los alumnos se interesen por la materia.

En este trabajo se presenta una propuesta para abordar los temas de productos notables y factorización de álgebra basada en la utilización de figuras geométricas, una materialización del reconocimiento de sus propiedades en relación con el cálculo de su perímetro y área.

1.2. Justificación

El estudio realizado por CoSNET (2002) está enfocado, fundamentalmente, a realizar un diagnóstico de los aspirantes que ingresan a la Educación Media Superior Tecnológica, en cuanto al nivel de razonamiento formal que poseen los alumnos por medio de una evaluación.

La evaluación del ingreso a la educación media superior tecnológica mide específicamente los ocho esquemas asociados a las operaciones formales, de los cuales se desprenden los niveles de desarrollo del razonamiento. Estos esquemas, "consisten en nociones u operaciones matemáticas y no exclusivamente lógicas que el sujeto logra elaborar de modo espontáneo", mediante las cuales puede experimentar para dar solución a algunos problemas.

Los ocho esquemas asociados a las operaciones formales son:

1. Compensaciones multiplicativas (volumen): corresponde al concepto en el cual se fundamenta la comprensión de que cuando existen dos o más dimensiones son compensadas por ganancias o pérdidas en las otras dimensiones.
2. Pensamiento correlacional: corresponde al concepto que implica la capacidad del estudiante para concluir si existe o no una relación causal entre dos variables.

3. Pensamiento probabilístico: corresponde al concepto que implica la capacidad para establecer una relación entre lo confirmable y lo posible.
4. Pensamiento combinacional: Involucra al concepto que genera todas las posibles combinaciones de un número dado de variables, posibilidades, eventos y escenarios, cuando así lo requiere la solución a un determinado problema.
5. Pensamiento proporcional: se define como el concepto matemático que implica la capacidad para descubrir la igualdad entre dos razones.
6. Formas de conservación sin verificación directa: Implica la capacidad para deducir y verificar las propiedades de ciertos sistemas por observación de sus efectos.
7. Equilibrio mecánico: Se refiere a la capacidad para realizar, simultáneamente, la distinción y la coordinación de dos formas complementarias.
8. Coordinación de dos o más sistemas de referencia: Es la capacidad para coordinar dos sistemas (variable dependiente).

A partir de los resultados obtenidos por los aspirantes, se podrá conocer el nivel de formación de cada uno de los ocho esquemas de pensamiento y así determinar el nivel general de razonamiento alcanzado[4].

1.3 Propósitos

1.3.1 Propósito general de la investigación

Conocer cuáles son los significados que los estudiantes de bachillerato le asignan a las expresiones algebraicas (productos notables y factorización) a partir de una propuesta didáctica de materialización concreta de objetos geométricos, manipulables, para llegar a la simbolización algebraica.

1.3.2 Propósitos específicos

---

[4] Dichos niveles del razonamiento formal según Inhelder y Piaget (1985) son:

1. El nivel concreto, representa aquella ejecución que no muestra evidencias de un razonamiento abstracto.
2. El nivel concreto alto, se refiere a aquella ejecución que muestra cierta evidencia de una aproximación sistemática a los problemas.
3. El nivel concreto transicional, representa un desempeño que muestra evidencia de una aproximación sistemática a problemas con cierto uso de abstracciones.
4. El nivel formal bajo, representa un desempeño que muestra clara evidencia de que tres a cinco de los ocho esquemas formales existen en su pensamiento.
5. El nivel formal alto, muestra clara evidencia de que la mayoría de los ocho esquemas formales se presentan en el pensamiento.

Conocer las estrategias que emplean los alumnos de primer semestre de bachillerato en la resolución de problemas de productos notables y factorización, antes de estudiar el tema en la escuela.

Diseñar y someter a experimentación pedagógica una propuesta didáctica constituida por tres etapas: la concreta, *la geométrica* y la simbólica en el proceso enseñanza aprendizaje de productos notables y factorización.

Reportar los cambios que se observen en los estudiantes que se les aplique la propuesta didáctica.

1.4 Interrogantes que guiarán la investigación

- ¿Cuáles son las estrategias que emplean los alumnos de primer semestre de bachillerato en la resolución de problemas de productos notables y factorización, antes de cursar el tema en la escuela?

- ¿Cuáles son las estrategias cognitivas elementales de los estudiantes de bachillerato cuando resuelven problemas concretos (asociados al cálculo de áreas y perímetros) de productos notables y factorización?

- ¿Es posible construir un puente de vinculación usando material concreto entre la geometría y la manipulación sintáctica del álgebra?

1.5 Ubicación del estudio

Casi todas las matemáticas del nivel medio superior y superior requieren del lenguaje del álgebra especialmente de los temas de productos notables y factorización, para modelar situaciones y resolver problemas, así como para expresar conceptos y operar con ellos en niveles cada vez más abstractos.

El aprendizaje del álgebra es importante para todos los alumnos y no sólo para aquellos que van a continuar sus estudios en una carrera universitaria. En nuestros días ha quedado atrás la vieja idea de que aprender a leer y escribir, y un mínimo de conocimientos aritméticos y geométricos, junto con un adiestramiento para realizar determinadas tareas permite desempeñar un trabajo o ejercer un oficio.

La mayoría de los empleos que se crean actualmente requieren de individuos con mayor preparación, capaces de asimilar nueva información y utilizarla para resolver problemas, así como de acceder al uso de nuevos instrumentos y técnicas. Aun actividades que se han vuelto tan cotidianas y necesarias para el trabajo, como leer un instructivo o manual de operación, necesitan que las personas conozcan y estén familiarizados con los modos de expresión simbólica y pensamiento abstracto que se desarrollan por medio del estudio del álgebra, como son poder extraer información de cuadros, tablas y gráficas, comprender fórmulas y saber utilizarlas.

Esta opinión parece obvia, sin embargo, en los cursos de matemáticas de un Cetis se sabe que se deja de lado y se transmiten conocimientos acabados.

Los productos notables y la factorización son un punto importante en el estudio de álgebra, tema que ha sido difícil para un gran número de alumnos. Y sin embargo en los cursos posteriores de matemáticas es fundamental su conocimiento, en un gran número de ocasiones el problema radica en el adecuado desarrollo de un producto o la factorización de una expresión algebraica. A continuación se muestran algunos ejemplos:

Geometría Analítica[5]

[5] Garza, B. (2002). *Matemáticas III, Geometría Analítica*. México: DF. Editado por la DGETI (Dirección General de Educación Tecnológica Industrial).

Geometría Analítica[6]

Calculo Diferencial[7]

[6] Guzmán, H. (2003). *Cien problemas de Geometría Analítica*. México. Publicaciones Cultural.
[7] Orduño, H. (2004). *Matemáticas IV, Calculo Diferencial*. México. Fondo de Cultura Económica.

Calculo Integral[8]

1.6 Contenido matemático de interés: Los productos notables y la factorización

El núcleo matemático de la propuesta son los productos notables y la factorización en el marco de operaciones con polinomios. Sin embargo, hay que delimitarlo:

1. Primeramente hay que señalar que se tratará con situaciones inductivas.
2. Se trabajará con enunciados condicionales en donde esté claramente definido el antecedente y el consecuente, o bien se puedan expresar conscientemente de esta forma.
3. Respecto a la idea de los productos notables y la factorización es necesario comentar que estos conceptos en la teoría de Piaget se asocia al razonamiento formal, que se desarrolla en el adolescente desde 11-12 a 15-16 años, periodo en el cual el sujeto se desprende de lo concreto y aprende a situar lo real en todas las transformaciones posibles.

En el periodo de las operaciones formales el sujeto es capaz de razonar correctamente sobre proposiciones o hipótesis, aprende a obtener las consecuencias necesarias a partir de verdades posibles y en la edad en que ingresan los estudiantes a la Educación Media Superior Tecnológica (15 y 16 años), se espera sean capaces de "aprender", trabajando sobre hipótesis y proposiciones, sin requerir la presencia de los objetos para descubrir sus propiedades (SEIT, 2002). Sin embargo, como ya

[8] Bosh, C. (2002). *Cálculo Diferencial e Integral*. México. Publicaciones Cultural.

se señaló, un estudio realizado en el 2002 por CoSNET concluye que un porcentaje alto de los alumnos que ingresan al bachillerato tecnológico se encuentran en la etapa de operaciones concretas, esto es que el estudiante requiere de la presencia y manipulación de los objetos para poder aprender.

Por otro lado, la teoría de Piaget también indica que a medida que el niño entra en el período de las operaciones formales el pensamiento operativo concreto continúa en varias áreas, para poco a poco, llegar a ser integrado en un sistema más compresible de operaciones formales. El razonamiento operativo formal no siempre con toda su capacidad, y en determinadas circunstancias baja a un nivel inferior de pensamiento. Adultos y adolescentes, a menudo, regresan al pensamiento de operaciones concretas y aun al pensamiento preoperacional cuando se les expone a nuevas áreas de aprendizaje, beneficiándose con experiencias concretas en estas áreas antes de avanzar a niveles abstractos de pensamiento.

4. En cuanto a los conceptos de productos notables y factorización se consideraren:

- Libro de texto 2002 de un Cetis para matemáticas I:

Productos Notables (Garza, 2002): Son ciertos productos que se efectúan directamente, basándose en reglas notables que al memorizar su aplicación, nos permiten llegar al resultado sin necesidad de realizar la multiplicación.
Factorización (Idem): Es un proceso contrario a la multiplicación. es decir, el producto se descompone en factores.

- Libro de texto 2004 de un Cetis para matemáticas I:

Productos Notables (Sada, 2004): Es el resultado de una multiplicación, notable porque destaca entre los demás.
Factorización (Idem): Es un proceso contrario a la multiplicación y su objetivo es simplificar las expresiones algebraicas.

LOS ANTECEDENTES

En términos del conocimiento matemático los antecedentes necesarios para el desarrollo del tema que se estudia en la propuesta son:

- Perímetro y Área
- Término algebraico y sus elementos(coeficiente, signo, base, exponente)

- Monomio
- Polinomio
- Término semejante
- Sumas y restas con polinomios
- Productos y cocientes de polinomios

CONTENIDO MATEMÁTICO DEL TEMA

En términos del contenido matemático es necesario obtener productos de expresiones de la forma:

- $(a \pm b)^2$
- $(a+b)(a-b)$
- $(x+a)(x+b)$
- $(ax+b)(cx+d)$;

y obtener los factores de expresiones identificando los siguientes casos:

- Factor común
- Trinomio cuadrado perfecto
- Diferencia de cuadrados
- Trinomios cuadráticos de la forma x^2+bx+c
- Trinomios cuadráticos de la forma ax^2+bx+c

Capitulo 2

Marco Teórico

2.1 PRINCIPIOS QUE GUIARON EL DESARROLLO DE LA PROPUESTA

2.1.1. Historia del álgebra

La historia de las matemáticas ha sido utilizada por la didáctica de las matemáticas bajo distintos puntos de vista: desde informaciones históricas que sirven para motivar un tema nuevo, hasta la construcción de secuencias didácticas inspiradas en la progresión histórica seguida en el desarrollo de algunas teorías. En cualquier caso, la historia ofrece diferentes ideas para la actividad didáctica e incluso puede ser utilizada por el profesor como referencia para anticipar dificultades o errores posibles en el aprendizaje de los alumnos.

En los párrafos siguientes se presentan los conceptos básicos del álgebra dentro de su marco histórico, lo cual permite satisfacer diversas necesidades, tales como lo sugiere Socas (1996):

- Representar las matemáticas como parte de la cultura humana que evoluciona con ella, preparando así el terreno para llegar a la organización que los conceptos matemáticos tienen actualmente.
- Reconocer la importancia del lenguaje simbólico, de las técnicas, de las insuficiencias y ambigüedades de cada formalismo.
- Construir o profundizar los conceptos matemáticos que se han elegido por medio de la diversidad con la cual cada época los presenta.

Se puede crear secuencias didácticas, por ejemplo, reflexionando sobre el simbolismo de cada época, viendo las posibilidades y los límites de cada uno en particular, insistiendo en los niños en la idea de que las matemáticas evolucionan y que no es una ciencia hecha y fija.

No obstante, este planteamiento presenta algunos problemas para llevarlo a cabo. Entre ellos se destaca la imposibilidad de presentar a los niños los temas con una exactitud histórica, ya que determinados formalismos o demostraciones exceden su nivel de conocimiento. En estos casos es preciso hacer una adaptación a las diferentes edades, sin por ello deformar la realidad histórica.

2.1.1.1 Inicio del álgebra y su clasificación

El álgebra se caracteriza por sus métodos, que conllevan el uso de letras y expresiones literales sobre las que se realizan operaciones. Está presente en todas las matemáticas, pues cualquier problema termina convirtiéndose en un cálculo más o menos algebraico. Para dar una idea de los inicios del álgebra es necesario remontarse al concepto de número. Los números eran percibidos en la antigüedad como una propiedad inseparable de una colección de objetos. Más adelante, aparecen las operaciones con números como reflejo de las relaciones entre los objetos concretos, y los hombres fueron descubriendo las relaciones entre los números. Finalmente, a medida que la vida social se hizo más intensa y complicada fueron apareciendo problemas más complejos que impulsaron a perfeccionar los nombres y "símbolos" de los números.

No pocos historiadores de las matemáticas hacen remontar los orígenes del álgebra a diversos pueblos de la antigüedad: asirios, babilonios, egipcios. Otros ponen el punto de partida en la escuela de Alejandría. Diophanto es la figura aceptada generalmente como formulador de los problemas de la aritmética en términos simbólicos, como quien introdujo los valores indeterminados, representados no por números sino por letras.

Según Pastor (1997) en su libro *Historia de la matemática*, la palabra "álgebra" proviene del título de un libro Al-jabr wál-muqabalah, escrito en Bagdad, alrededor del año 825 por el matemático y astrónomo Mohammed ibn-Musa al-Khwarizmi. El título *Al-jabr wál-muqabalah* significa "ciencia de la restauración y oposición" o "transposición y eliminación". Para Pastor el álgebra comienza en realidad cuando los astrónomos empiezan a interesarse por las operaciones que se pueden hacer con cualquier número, más que por los mismos números; es en esencia, la doctrina de las operaciones matemáticas considerada formalmente desde un punto de vista general con abstracciones de los números concretos.

Las dificultades que encontraron los griegos en la solución de numerosos problemas geométricos, sólo se explica por la carencia de un álgebra que les permitiera formularlos.

Para estudiar la historia del álgebra Pastor la divide en tres fases:

La primera fase, comprende el período de 1700 a. de C. a 1600 d. de C. Dentro de esta etapa se considera el trabajo geométrico desarrollado por los griegos (300 a. de C.). Llamado bajo un concepto moderno de “álgebra geométrica” el libro segundo de los Elementos de Euclides, pues es un trabajo rico en métodos geométricos que permite en la actualidad resolver ecuaciones algebraicas. Es importante señalar que aunque es cierto que los enunciados de esas proposiciones pueden traducirse con facilidad a enunciados algebraicos, desde ningún otro punto de vista puede calificarse esa parte del trabajo euclídeo de algebraico.

La segunda fase comprende la introducción de la notación simbólica asociada a Vieta (1540-1603). Piaget y García (1982) señalan que la "nueva" álgebra para Vieta fue a la vez geométrica y aritmética. Pues su vuelta a los griegos le permitió retomar la ciencia de Diophanto y, simplemente perfeccionarla. En esta fase Descartes (1596-1650) contribuye de forma importante al desarrollo de dicha notación. En este momento, el álgebra se convierte en la ciencia de los cálculos simbólicos y de las ecuaciones. Posteriormente Euler (1710-1783) la define como la teoría de los "cálculos con cantidades de distintas clases" (cálculos con números racionales enteros, fracciones ordinarias, raíces cuadradas y cúbicas, progresiones y todo tipo de ecuaciones). Cabe señalar en este período los trabajos de Goerge Peacock (1791-1858), tendientes a fundamentar y justificar las operaciones con expresiones literales. A él se debe el "principio de permanencia" que decía: *"Todos los resultados del álgebra aritmética que se deducen por aplicación de sus reglas, y que son generales en su forma, aunque particulares en su valor, son igualmente resultados del álgebra simbólica, donde son generales tanto en su valor como en su forma"*

La tercera fase comprende la segunda mitad del siglo XIX, tiempo en que el álgebra presentó un notable impulso debido a grandes matemáticos, entre los cuales destacan las ideas de Galois (1801-1832) sobre la teoría de ecuaciones algebraicas. Todo esto favoreció el nacimiento del álgebra abstracta contemporánea llamada algunas veces álgebra moderna.

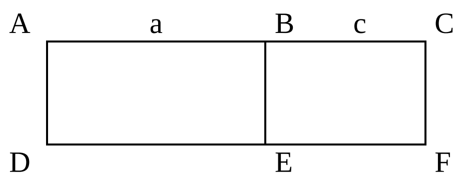
La notación algebraica presenta también tres períodos claramente diferenciados. Según Puig (1998) se periodiza habitualmente mediante los términos "álgebra retórica", "álgebra sincopada" y "álgebra simbólica".

- El período retórico o verbal, en el cual las operaciones se describían con palabras. Este periodo se extiende desde los babilonios (1700 a. de C.) hasta Diophanto (250 d. de C).
- El período sincopado abreviado, cuando empiezan a utilizarse algunas abreviaciones para simplificar la resolución de los problemas. Este período comienza con Diophanto y dura hasta comienzos del siglo XVI.
- El período simbólico aparece en el siglo XVI y utiliza ya diferentes símbolos y signos matemáticos. Esta notación que fue más o menos estable en tiempos de Isaac Newton (1642-1727), se mantiene actualmente sin uniformidad total. Este período coincide con la 2da fase anteriormente indicada que, como se ha señalado, está asociada al nombre de Vieta, el cual comenzó a denotar por letras no sólo las incógnitas, sino números dados previamente.

2.1.1.2 El álgebra geométrica

En el desarrollo histórico del álgebra parece fundamental fijarse en el trabajo geométrico de los griegos, que permite descubrir estrechas relaciones con el álgebra. Los griegos desarrollaron métodos geométricos para resolverlas y comprobar diversas propiedades. Socas (1996) menciona que en el libro II de los *Elementos*[9], de Euclides (300 a. de C.) hay 14 proposiciones las cuales permiten resolver problemas algebraicos, que actualmente, el álgebra simbólica los resolvería rápidamente, pero el valor didáctico del álgebra geométrica es importante. A continuación se describen algunas de las citadas por Socas (1996).

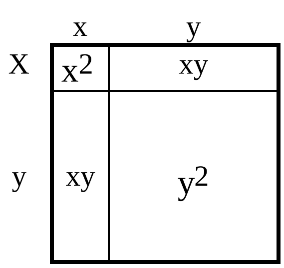
La proposición 1 dice: *"si tenemos dos líneas rectas y cortamos una de ellas en un número cualquiera de segmentos, entonces el rectángulo contenido por las dos líneas rectas es igual a los rectángulos contenidos por la línea recta que no fue cortada y cada uno de los segmentos anteriores"*.



AD*AC=AD*AB + AD*BC

Se puede ver que, es la propiedad distributiva del producto respecto de la suma. De forma análoga se demuestran las propiedades asociativa y conmutativa del producto.

La proposición 4 dice: *"Si una línea recta se corta de una manera arbitraria, entonces el cuadrado construido sobre el total es igual a los cuadrados sobre los dos segmentos y dos veces el rectángulo contenido por ambos segmentos"*



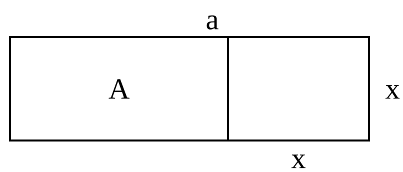
[9] Según Puig, Zeuthen tuvo la idea afortunada, en 1886, de calificar de "álgebra geométrica" el libro segundo de los *Elementos* de Euclides.

$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$

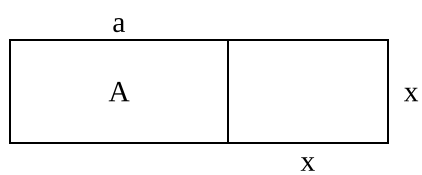
Con la misma habilidad eran capaces de resolver ecuaciones cuadráticas de los tipos

$ax-x^2=b^2$ y $ax+x^2=b^2$

Estas representaciones algebraicas geométricamente se dan por la construcción sobre un segmento a, de un rectángulo cuya altura desconocida x debe ser tal que el área del rectángulo considerado exceda del área dada en el cuadrado de lado x, en el primer caso, $ax-x^2=b^2$, con los segmentos a y b verificando la relación $a>2b$



y en el segundo $ax+x^2=b^2$, que se quede corto respecto del área A.



De esta forma, el trabajo de los griegos permitió resolver las ecuaciones cuadráticas por medio de los procedimientos conocidos como de "aplicación de áreas".

2.1.2 El álgebra y los estadios del desarrollo

La posibilidad de reconocer los estadios generales del desarrollo intelectual, representado cada uno de ellos por un modo característico de razonamiento y por unas tareas específicas de matemáticas que los alumnos son capaces de hacer, constituye una información valiosa para los profesores a la hora de diseñar el material de aprendizaje y permite conocer el nivel de realizaciones y respuestas a cuestiones esperadas de los alumnos.

Dentro del marco de la psicología cognitiva, los trabajos de Piaget señalan pautas de este desarrollo general del conocimiento de los alumnos relacionado con sus actuaciones en matemáticas, en general, y álgebra en particular.

2.1.2.1 Los estadios del desarrollo en Piaget

Según Piaget (1956) citado por Arancibia (1999), la inteligencia consistiría en la capacidad de mantener una constante adaptación de los esquemas del sujeto al mundo que en que se desenvuelve. Es decir Piaget señala que el desarrollo de la inteligencia de los niños es una adaptación del individuo al ambiente o al mundo que lo rodea. Aborda el problema del desarrollo de la inteligencia a través del proceso de maduración biológica. En este enfoque, la palabra aprendizaje tiene un doble sentido. El primero, más amplio, se refiere al propio desarrollo de la inteligencia como proceso espontáneo y continuo que incluye maduración, experiencia, transmisión social y desarrollo del equilibrio. El segundo se limita a la adquisición de nuevas respuestas para situaciones específicas o de nuevas estructuras para determinadas operaciones mentales.

El proceso de desarrollo de la inteligencia, tal como lo ve Piaget, se desarrolla en cada niño a través de determinado estadio que son parte de un proceso continuo, en el cual una característica del pensamiento infantil se cambia gradualmente en un tiempo determinado y se integra en formas mejores de pensamiento. El niño puede estar en más de un estadio al mismo tiempo. Piaget distingue tres estadios de desarrollo cognitivo, cualitativamente diferentes entre si que se subdividen en subestadios.

- Estadio sensoriomotor, abarca desde el nacimiento hasta los dos primeros años de vida. Período sensorial y de coordinación de acciones físicas.

- II. Estadio de operaciones concretas, abarca desde los dos a los once o doce años de edad. Consiste en la preparación y realización de las operaciones concretas de clases, relaciones y números. Ese segundo estadio se subdivide en:

  a) Período preoperacional (dos a siete años). Período de pensamiento representativo y prelógico.
  b) Período operacional concreto (siete a once años). Período de pensamiento lógico concreto.

- III. Estadio de operaciones formales, se inicia alrededor de los once a doce años y alcanza su pleno desarrollo tres años más tarde. Período del pensamiento lógico ilimitado.

El orden por el que pasan los niños las etapas de desarrollo no cambia, es decir, deben pasar por las operaciones concretas para llegar al estadio de las operaciones formales; pero la rapidez con que pasan los niños por estos estadios cambia de persona en persona. En los niños no se producen cambios fijos que aparezcan de la noche a la mañana. Hay periodos de desarrollo continuo que se sobreponen; de hecho, cuando un niño entra en la etapa preoperacional, su desarrollo sensoriomotor continúa, a pesar de que la nueva capacidad de pensamiento representacional sea el rasgo dominante del período. Igualmente, un niño que sustenta un pensamiento operativo concreto en una labor de permanencia puede estar en la etapa preoperacional con relación a trabajos más complicados de permanencia.

Análogamente, a medida que el niño entra en el período de las operaciones formales el pensamiento operativo concreto continúa en varias áreas, para poco a poco, llegar a ser integrado en un sistema más comprensible de operaciones formales. El razonamiento operativo formal no siempre con toda su capacidad, y en determinadas circunstancias baja a un nivel inferior de pensamiento. *Adultos y adolescentes, a menudo, regresan al pensamiento de operaciones concretas y aun al pensamiento preoperacional cuando se les expone a nuevas áreas de aprendizaje*, beneficiándose con experiencias concretas en estas áreas antes de avanzar a niveles abstractos de pensamiento. En la Tabla 1 se puede ver estos estadios y sus principales características.

2.1.2.2 Los estadios de desarrollo y las matemáticas

En el cuadro anterior se ha incluido un breve acercamiento a los niveles de pensamiento (estadios de desarrollo) de Piaget. Ahora se presentan estos aspectos relacionados con la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, describiendo cada uno de ellos por su manera característica de razonamiento y por los tipos de tarea que los alumnos pueden hacer.

<u>Estadios del desarrollo cognitivo según Piaget</u>

Estadios	Características
I. Sensoriomotor	Al nacer, el mundo del niño se reduce a sus acciones. El niño no es capaz de representaciones internas de sus acciones (lo que usualmente consideramos como pensamiento). Ausencia operacional de símbolos. Estadio prelingüstico. Los objetos adquieren permanencia, aun cuando éstos (cero a dos años) están fuera de su propia percepción. Desarrollo de los esquemas sensoriomotores. Finaliza con la iniciación de la conducta dirigida a un objetivo y a la invención de nuevas soluciones, es decir, con el descubrimiento y las combinaciones internas de esquemas.

II. Operaciones concretas II.a) Preoperacional (dos a siete años)	El pensamiento infantil ya no está sujeto a acciones externas y se interioriza. Inicio de las funciones simbólicas. Representación significativa (lenguaje, imágenes mentales, juegos simbólicos, invenciones imaginativas, etc.). A pesar de los grandes adelantos en el funcionamiento simbólico, la habilidad infantil para pensar lógicamente está bastante limitada: Ausencia de reversibilidad: incapacidad para invertir mentalmente una acción física para volver a su estado original. Ausencia de concentración: incapacidad para retener mentalmente cambios en dos dimensiones al mismo tiempo. Lenguaje y pensamiento egocéntrico: incapacitada para tomar en cuenta otros puntos de vista.
II. Operaciones concretas II.b) Operacional concreto (siete a once o doce años)	El niño mejora su capacidad de pensamiento lógico ante los objetos físicos, es capaz de pensar en objetos físicamente ausentes que forman parte de experiencias pasadas, pero no con hipótesis verbales. El pensamiento infantil está limitado a cosas concretas en lugar de ideas. Adquiere la reversibilidad que le permite inventar mentalmente una acción que antes sólo había llevado a cabo físicamente, la inclusión lógica, la clasificación y ordenamiento de objetos, la habilidad para conservar ciertas propiedades, la capacidad de retener mentalmente dos o más variables cuando estudia los objetos. Se vuelve más sociocéntrico, cada vez es más consciente de la opinión de los otros. Las operaciones matemáticas básicas surgen en este período.
III. Operaciones formales (once o doce a catorce o quince)	Habilidad para pensar más allá de la referencia a experiencias concretas. Capacidad de usar, a nivel lógico, enunciados verbales y proposiciones en vez de objetos concretos únicamente. Habilidad para pensar teóricamente sobre las consecuencias de los cambios de objetos y sucesos. Habilidad para razonar acerca de las combinaciones de las variables en un problema. Capacidad para comprender reglas generales de ejemplos particulares. Capacidad para deducir de proposiciones generales conclusiones particulares.

Tabla 1. Estadios del desarrollo cognitivo según Piaget y sus principales características

Los trabajos iniciales de Piaget, señalan un camino en el desarrollo en los niños del estadio operacional concreto al estadio operacional formal, en el contexto particular de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. En resumen, los estadios del desarrollo cognitivo, tal como podrían derivarse de los trabajos de Piaget y propuestos por Collis (1980) citado por Socas (1996), serían los cinco estadios siguientes:

1. Preoperatorio (4-6 años)
2. Temprano de operaciones concretas (7-9 años)

3. Final de operaciones concretas (10-12 años)
4. De generalización concreta (formal temprano) (13-15 años)
5. De operaciones formales (16 años en adelante)

Las edades cronológicas correspondientes a los estadios son solamente orientativas, varían mucho de una a otra persona. Es el orden de los estadios lo que permanece invariante.

A continuación se describen según Socas (1996), los cuatro últimos estadios del desarrollo cognitivo en el aprendizaje de las matemáticas, respecto a los trabajos de Collis (1975a,1975b y 1980) quien ha estudiado algunos conceptos matemáticos respecto al tipo de ítems que pueden usar los alumnos en los distintos estadios, relacionándolos con los diferentes ítems científicos estudiados por Inhelder y Piaget (1958).

Así entonces, el estadio temprano de operaciones concretas se manifiesta por la capacidad de los alumnos para trabajar significativamente con operaciones simples sobre elementos concretos. Ambos, elementos y operaciones, deben estar relacionados con objetos físicos y con operaciones realizables experimentalmente. El niño puede calcular 6+3=9, imaginando un conjunto de seis y tres elementos colocados juntos y contados. Una expresión como 5+8+7 no tiene sentido para el niño, puesto que no puede concebir 5+8 como representante de un número hasta que no tenga realizada la operación y obtenido el resultado, que es en la terminología de Collis, hasta que no haya efectuado la clausura de la operación. En este sentido, los niños de este nivel no tienen ninguna base para decidir sobre la equivalencia de proposiciones tales como 5+7 y 4+8, excepto clausurando cada una de ellas por separado.

En conclusión hablando de sistemas de numeración en este nivel, las cuatro operaciones de la aritmética elemental son significativas cuando se les utiliza por separado con números pequeños dentro de la experiencia del niño.
En cuanto al estadio final de operaciones concretas y continuando con el ejemplo del sistema de numeración, el estadio se caracteriza por la capacidad del niño para trabajar con cierto número de operaciones en secuencia si los números se mantienen pequeños, y con números grandes si forman parte de operaciones simples. Así los alumnos reconocen la unicidad del resultado de una operación simple con números pequeños y de este modo pueden realizar tareas de comparación de expresiones como 5+8+7, con 5+8+3, o 525x218 con 535x218. En el caso de números pequeños sin recurrir a la clausura y en el caso de números grandes que se escapan a la visualización física, el niño se auxilia de la clausura, es decir, cierra cada parte por separado y compara.

En el estadio de generalización concreta los niños pueden usar cierto número de operaciones, no realizables físicamente en la medida en que tienen una garantía de que los elementos y sus combinaciones pueden clausurarse en cualquier momento y proporcionan un resultado único que puede ser aplicado a la realidad física. Aún necesitan la garantía de la clausura, pero esto no significa que necesiten cerrar secuencialmente operación por operación. Pueden determinar si el siguiente par de expresiones

$$\frac{325 \times 417}{417} \quad \text{y} \quad \frac{325 \times 405}{325}$$

son o no equivalentes, sin clausura. Los alumnos de este nivel utilizan elementos generalizados (cifras grandes y letras en sustitución de números). Están dispuestos a entender y usar con significado la generalización.

$$\frac{m*a}{m} = \frac{n*a}{n}$$

y a trabajar con fórmulas como V=a*b*c, siempre que se les capacite para tener en cuenta que cada letra representa a un único número y que cada operación puede clausurarse en cualquier momento.

El estadio de operaciones formales. El alumno no tiene necesidad de relacionar elementos, operaciones o la combinación de ellos con modelos análogos físicos y puede tomar como realidad un sistema abstracto bien determinado con sus definiciones, relaciones y reglas, no abordando la clausura hasta que ha agotado todas las posibilidades. Este nivel de clausura no necesita de la tranquilidad que le proporcionan los números y las operaciones familiares. La clausura es ahora una propiedad de las matemáticas que puede o no existir en un conjunto dado. El chico no relaciona necesariamente la clausura con su propia realidad física, sino que puede aplicarla a elementos abstractos y operaciones definidas.

El alumno puede resolver problemas en los que las letras representan números o variables que emplean una operación bien determinada. Se enfrenta con variables porque puede evitar sacar la conclusión final hasta haber considerado las diversas posibilidades, estrategia esencial para obtener una relación distinta de la de obtener un resultado único

En resumen, el pensamiento operacional concreto es, como se ha visto, el tipo de pensamiento de la mayoría de los niños menores de diez años, aunque en muchos casos se extiende más allá de esa edad. Caracterizado por la necesidad de considerar y manipular materiales físicos, implica, solamente, operaciones que presenten clausura, es decir, una expresión matemática será significativa para el niño si es posible concluir en un único número.

En cuanto al desarrollo del pensamiento en el niño, en términos de la necesidad que éste tiene de la clausura, Socas (1996) describe finalmente, otros ejemplos de operaciones que implican las diferentes formas de clausura: a) inmediata, b) clausura no inmediata y c) clausura imposible.

a) Determinar si las expresiones 3+7 y 4+5 ó 3x6 y 2x9 son equivalentes. Estas son operaciones de dos números que dan una clausura inmediata.
b) Se pide igualmente al niño que decida en cada caso si las expresiones: 225+387 y 227+385 ó 146x131 y 131x146 son equivalentes. Estos ejemplos no requieren un cálculo de estas sumas o productos y, por tanto, la clausura no es inmediata, aunque sí es posible. Esta situación se entiende como clausura no inmediata
c) Decidir si las expresiones siguientes:
(a-b) y (a+1)+(1-b) ó (a-1) x (b+1) y (a+1) x(b-1) son equivalentes o calcular 3x+2y, son expresiones que no tienen clausura. No existe un camino sencillo que basado en la experiencia, garantice la unicidad de las equivalencias anteriores o la adición en el último ejemplo. La continua necesidad de los alumnos del pensamiento de clausura es, al menos en parte, responsable de resultados tales como 3x+2y =5xy.

Parece que el pensamiento en el niño sigue un desarrollo desde un estadio en que debe existir una garantía de clausura hasta el estadio final, en que se ve a la clausura simplemente como una propiedad matemática y donde el alumno puede operar con variables en las relaciones matemáticas.

Por último, el período formal se caracteriza, como se ha visto, por la habilidad de los niños para pensar más allá de la realidad concreta. Razonamiento deductivo e inductivo, abstracciones reflexivas, pensamiento proporcional, esquemas operacionales que implican combinaciones de operaciones o combinaciones de variables, etc., son aspectos de este desarrollo.

El niño de la etapa anterior desarrolló un número de relaciones con el soporte de materiales concretos; ahora puede pensar acerca de la relación de relaciones y, en general, de otras ideas abstractas. Es capaz de entender plenamente y apreciar, por ejemplo las abstracciones simbólicas del álgebra. En general, los cálculos aritméticos conducidos por el uso de materiales físicos: ábacos, bloques aritméticos multibase, tableros de contar, etc, implican operaciones completas. El cálculo con algoritmos formalizados es la frontera entre las operaciones concretas y formales.

2.1.2.3 Los Estadios de Desarrollo y el Álgebra

Según Socas (1996) bajo el término "álgebra" consideramos el álgebra de los números y de las "estructuras", entendiendo por ello todo lo concerniente al desarrollo de las habilidades y manipulación de las letras y otros símbolos que pueden representarse por objetos, incógnitas, números generalizados o variables, y también a los estadios de las operaciones, expresiones o entidades abstractas construidas por relaciones bien definidas. Es útil reconocer qué tipos de interpretación y de operaciones tienen dificultades en las tareas algebraicas. Comprender los caminos en los que los alumnos interpretan o mal interpretan los símbolos en los diferentes estadios del desarrollo.

A continuación se describe la revisión que Socas (1996) realizó sobre la teoría de Piaget del desarrollo cognitivo con el aprendizaje del álgebra. Se inicia analizando los trabajos de Collis (1975a,b y 1980) seleccionando para su presentación: sustitución de letras por números, resolución de ecuaciones y álgebra abstracta. Y se acaba con los trabajos de Kuchemann (1981) y el C.S.M.S. (Hart, 1981) que constituye una presentación más acabada del álgebra, usando como fundamento los trabajos ya citados de Collis. Él identifica varios caminos en lo que el alumno puede interpretar las letras en aritmética generalizada, refiriéndose a los términos variables e incógnitas y desarrollando una explicación precisa de estas interpretaciones.

En la sustitución de letras por números, Collis (1975b) descubrió que la capacidad para trabajar con letras dependía en gran parte, de lo que ellos eran capaces de considerar como real. El siguiente ítem, tomando como ejemplo, proporciona una imagen clara de cada nivel de desarrollo:

"Debes decir si las afirmaciones siguientes son verdaderas siempre, algunas veces o nunca. Haz un círculo alrededor de la respuesta correcta. Si haces un círculo alrededor de algunas veces explica en qué casos es cierta la afirmación. Todas las letras representan números naturales o el cero (por ejemplo, 0,1,2,3, etc.).

1. a+b=b+a	Siempre Nunca Algunas veces, esto es, cuando...
2. m+n+q=m+p+q	Siempre Nunca Algunas veces, esto es, cuando...
3. a+2b+2c=a+2b+4c	Siempre Nunca Algunas veces, esto es, cuando..."

En el estadio (2) los alumnos tienden a considerar cada letra como representante de un número y sólo de uno. Su manera de resolver el problema consistía en sustituir directamente la letra por un número específico. Si este único intento no lograba un resultado satisfactorio abandonaban esta tarea. En este ejemplo, en el ítem 1 responde habitualmente "siempre sobre la base de ensayar un número para a y otro para b. Los dos ítems siguientes fueron imposibles de resolver por los alumnos que utilizaban la estrategia de sustituir cada letra por número.

En el estadio (3) los alumnos que operan en este nivel intentaban un par de números y si satisfacían la relación sacaban su conclusión sobre esta base. Estos alumnos podían resolver el ítem porque confiaban en que cierta cantidad de números específicos reemplazara a las letras, pero eran incapaces de usar los ítems 2 y 3.

En el estadio (4) los alumnos parecían tener un concepto de número "generalizado", en el que un símbolo *a* podía ser considerado como una entidad propia, pero con las mismas propiedades que cualquier número con el que tuviera experiencia previa. No había desarrollado aún el concepto de letra como variable, sino que en lugar de ello pensaban aún en las letras como representantes de todos los números en los que uno quisiera pensar.

Aun cuando poseía el concepto de número generalizado, los alumnos de este nivel eran incapaces de afrontar adecuadamente el problema de llevar a cabo la deducción necesaria en el paso final de los ítems 2 y 3. Así, cuando consideraban $n=p$ o $2c=4c$ no eran capaces de realizar la deducción final a partir de estas informaciones. En el primer caso decidían p=n como si al variar n y p de forma amplia la posibilidad de encontrase fuera remota y seleccionaba la respuesta "nunca", en la segunda situación no eran capaces de concebir un caso en que 2x (un número) fuera igual a 4x (un mismo número).

En el estadio (5) el alumno puede contemplar la letra como una variable y es capaz de realizar la deducción final en los ítems 2 y 3. En la resolución de ecuaciones analizamos el concepto que el alumno tiene de la operación inversa en los distintos niveles de desarrollo, utilizando como ejemplo el problema de resolver una ecuación simple como x+5=7.

En el estadio (2) el problema se contempla como una tarea de contar. Para hallar x el alumno cuenta desde 5 hasta 7, y se registra el número de unidades empleado. No posee el concepto de operación inversa. En este estadio, también la saturación tiene significado, pero solamente en términos físicos, que es como puede ser asumido.

En el estadio (3) ve ambas partes de la ecuación como representación de un número único y la ecuación puede ser resuelta fácilmente. Sin embargo a pesar de que puede reconocer la respuesta como obtenida por sustracción de 5 a 7, no reconoce en general que la sustracción puede siempre usarse como anulación de la adición.

En los estadios (4) y (5), la noción de inversa es general, conoce que una expresión equivalente a x+5 puede ser reducida a x por sustracción de 5.

Estas ideas de Collis son utilizadas para la construcción de la propuesta didáctica de este trabajo.

Por otro lado, profundizando en la distinción de los usos que los estudiantes dan a las letras en álgebra, Kucheman (1978, 1981) citado por Kieran (2004) encontró seis niveles de interpretación:

A) Letra evaluada: a la letra le es asignado un valor numérico desde el principio.
B) Letra no considerada: La letra es ignorada o su existencia es conocida sin darle significado.
C) Letra considerada como un objeto concreto: La letra tomada como taquigrafía para un objeto concreto o como un objeto concreto en su propio derecho.
D) Letra considerada como una incógnita específica: La letra es tomada como un número específico pero desconocido.
E) Letra considerada como un número generalizado: La letra es vista como representante, o por lo menos con la posibilidad de serlo, de varios valores y no sólo de uno.
F) Letra considerada como una variable: La letra es vista como representante de un rango de valores inespecíficos y una relación sistemática es vista para existir entre dos juegos de valores.

Kucheman siguiendo principios piagetanos, asoció esos roles de las literales a diferentes estadios del desarrollo intelectual de los estudiantes, y propone que la noción de variable sólo puede ser comprendida cuando los estudiantes alcanzan el estadio de las operaciones formales. De acuerdo con esto, las nociones para las letras como objetos y cómo números generalizados deben preceder la noción de variable.

2.2 DIFICULTADES EN LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA

En la enseñanza-aprendizaje del álgebra, como en la de todas las matemáticas, se encuentra una gran variedad de dificultades como las que señala grupo Azarquiel (1993):

1. Dificultades debidas a la naturaleza del tema algebraico dentro del contexto de las matemáticas.
2. Dificultades que surgen de los proceso del desarrollo cognitivo de los alumnos y de la estructura y organización de sus experiencias.
3. Dificultades atribuibles a la naturaleza del currículo, a la organización de las lecciones y a los métodos de enseñanza usados.

En este subtema se indican sugerencias en forma de principios generales y de estrategias, para prevenir y solucionar las posibles dificultades en la enseñanza-aprendizaje del álgebra. Es importante corregir los errores, aunque no como una simple corrección de errores, sino más bien como un conocimiento de los mismos que se incorpore a la mejora de la enseñanza del álgebra.

2.2.1 Errores en álgebra

Un conocimiento de los errores básicos en álgebra es importante para el profesor, esta información le sugiere formas de ayudar a los alumnos a corregir dichos errores y, al mismo tiempo, le señala las posibles causas de las dificultades de los chicos para aprender álgebra. Socas (1996) describe un interesante proyecto de investigación que trató de identificar los tipos de errores que cometen más comúnmente los estudios y de explicar las razones de estos errores, fue realizado por el grupo de álgebra del proyecto Strategies and Errors in secondary Mathematics (SESM) llevado a cabo en el Reino Unido entre 1980 y 1983. Los estudiantes oscilaban entre los 16 y 23 años, y a pesar de las diferencias de edad y de haber estudiado diferentes cursos de álgebra, cometían similares errores en todos los niveles.

El término álgebra era considerado en el sentido de "aritmética generalizada", lo que implicaba el uso de letras para números y la escritura de expresiones generales que representan reglas aritméticas y expresiones dadas.

El proyecto se centró más en el interés en analizar la naturaleza de los errores cometidos por los alumnos que en el tipo de cuestiones que los alumnos resuelven correctamente y, especialmente, en el caso en que tales errores sean cometidos por un amplio número de estudiantes. Del análisis de estos errores, se observa que muchos podían ser atribuidos a aspectos como:

1. La naturaleza y significado de los símbolos y las letras
2. El objetivo de la actividad y la naturaleza de las respuestas en álgebra
3. La comprensión de la aritmética por parte de los estudiantes, y
4. El uso inapropiado de "fórmulas" o "reglas de procedimientos"

Los tres primeros aspectos generan errores que se originan en la transición conceptual de la aritmética al álgebra, mientras que el cuarto se debe fundamentalmente a falsas generalizaciones sobre operadores o números.

2.2.1.1 El uso inapropiado de "fórmulas" o "reglas de procedimientos"

Algunos errores se deben a que los alumnos usan inadecuadamente una fórmula o regla conocida que han extraído de un prototipo o libro de texto y que usan tal cual la conocen o la adaptan incorrectamente a una situación nueva.

Tienden así un puente para cubrir el vacío entre reglas conocidas y problemas no familiares. La mayoría de estos errores se originan como falsas generalizaciones sobre operadores o sobre números. Socas (1996) señala, se debe a la falta de linealidad de estos operadores. La linealidad describe una manera de trabajar con un objeto que puede descomponerse tratando cada una de sus partes independientemente. Un operador es empleado linealmente cuando el resultado final de aplicarlo a un objeto se consigue aplicando el operador en cada subparte y luego se combinan los resultados parciales. Para Socas la linealidad es bastante natural en muchos alumnos, por tal situación se analizan los siguientes cinco grupos de errores:

- Errores relativos al mal uso de la propiedad distributiva

Una aplicación incorrecta de la misma $a*(b+c)=a*b+c$
con mucha frecuencia encontramos $(a+b)^2=a^2+b^2$

Por esto es muy importante el resaltar cuándo y con respecto a quien se verifica la propiedad distributiva; por ejemplo, cómo la raíz cuadrada es distribuible con respecto ha la multiplicación y no con la suma.

- Errores relativos al mal uso de los recíprocos

Al sumar fracciones algebraicas, dan como resultado cualquiera de las siguientes expresiones:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}.$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{a+b}.$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a*b}.$$

- Errores de cancelación

$$\frac{Ax+By}{x+y}=A+B$$

que probablemente derivan de la regla $\frac{Ax}{x}=A$

Este tipo de errores parece indicar que los alumnos generalizan procedimientos que se verifican en determinadas condiciones.

Tanto los errores de cancelación como los recíprocos se podrían haber evitado si el alumno hubiese modificado la situación para que encajase con la regla, en vez de extender la regla para abarcar la nueva situación.

- Errores debidos a falsas generalizaciones sobre números

La necesidad de generalizar sobre números en álgebra surge con muchísima frecuencia, pues permite formular una regla general a partir de un problema-ejemplo con unos números esenciales.

2.2.2 Corrección de errores

La superación de los errores por parte de los alumnos constituye un tema básico en el aprendizaje que genera grandes dificultades. Según Socas (1996) las investigaciones actuales señalan que los errores están profundamente interiorizados por los alumnos y que no son de fácil eliminación. Incluso en muchos casos, parece ser que los estudiantes han superado un error y luego lo vemos, con desilusión, resurgir al poco tiempo. Por ello, plantear a los estudiantes que su comprensión conceptual de una parte del álgebra es incorrecta y darles entonces una explicación, es a menudo, insuficiente para eliminar el error. El estudiante debe participar activamente en el proceso de superar sus propios errores, para ello, el profesor debe provocar conflicto en su mente.

2.2.3 El hábito y la operación

Si bien la actividad del alumno es invisible cuando la enseñanza tradicional presenta nuevas nociones y operaciones, se torna evidente en el momento de pasar a la ejercitación, a la memorización y al recitado de, reglas, leyes y definiciones.

Para Aebli es posible hacer con frecuencia dos observaciones: En primer lugar se advierte que aun habiendo memorizado una fórmula o automatizado el procedimiento de solución de un problema, los alumnos no comprenden lo que dicen o hacen; repiten mecánicamente un fórmula verbal o aplican automáticamente un procedimiento estereotipado. A este respecto se advierte que si el alumno no comprende el significado real, el maestro se ve obligado a hacerle adquirir un hábito rígido que asegure el desarrollo de la reacción buscada mediante un mecanismo exterior e invariante. En segundo lugar se advierte que gran parte de los niños son capaces de utilizar esos automatismos sólo en situaciones iguales a aquellas en las que los adquirieron.

En base a los párrafos anteriores respecto al hábito y la operación a continuación se presenta un ejemplo concreto en el proceso enseñanza-aprendizaje frecuente en ciertos alumnos de un Cetis, se indica la carencia de comprensión de las fórmulas memorizadas y de los procedimientos de solución mecanizados. Un alumno puede, por ejemplo repetir correctamente, sin haber comprendido el sentido de la regla para desarrollar un binomio cuadrado.

Un alumno dice:

Elevar al cuadrado un binomio (m+n) equivale a multiplicarlo por sí mismo, resultando $m^2+2mn+n^2$. De lo anterior, concluye en la siguiente regla, "Al desarrollar el cuadrado de un binomio, se obtiene como resultado un "Trinomio", cuyos términos se determinan de acuerdo a los siguientes pasos (Garza, 2002):

1. El cuadrado el primer término del binomio
2. El doble producto del primer término por el segundo término
3. El cuadrado del segundo término del binomio
A este resultado se le denomina Trinomio Cuadrado Perfecto.

Si el alumno no halla sentido alguno a las palabras que recita, el enunciado verbal de la regla es en tal caso un fenómeno puramente *sensoriomotor* que implica exclusivamente la motricidad de los órganos vocales y la percepción auditiva, a tal reacción de desarrollo estereotipado en psicología Aebli (1958) le llama *Hábito*. Cuando el sujeto no sabe asignarle significado, enunciar una proposición como la citada regla constituye un hábito sensoriomotor.

Hemos partido del caso ficticio extremo en que el alumno repetiría una regla sin comprenderla en absoluto, lo que nos ha permitido distinguir entre signo y significado (los primeros son sensoriomotores, los segundos racionales) donde la coordinación de unos con otros permite al hombre expresarse y comprender la expresión del pensamiento ajeno. Pero si tal carencia total de comprensión no se produce nunca o casi nunca, el fenómeno que sigue es por lo contrario frecuentísimo. Como en el caso precedente, el alumno aprende de memoria una regla, la del desarrollo de un binomio cuadrado, por ejemplo. La sucesión de los signos verbales ha sido bien adquirida, pero aunque no haya sido total la comprensión de estos signos, el significado que el sujeto les asigna no abarcan a la operación total expresada por la regla. Lo que podría denominarse "comprensión parcial" se manifestaría, en el ejemplo citado, del modo siguiente: sin haber comprendido exactamente lo que es un binomio cuadrado, y sin ser capaz de deducir la regla $m^2+2mn+n^2$, del trinomio, el sujeto seria capaz de obtener el resultado correcto de un problema en que se le dijera: primero que se trataría de un binomio cuadrado; segundo que al ser desarrollado da un trinomio cuadrado perfecto y no simplemente, desarrolla el binomio; hallar el límite indefinido o determinar la integral; tercero que el segundo término es el doble producto; es decir el alumno necesita una *señal* que le diga qué debe expresar. ¿Cuáles son, pues, los actos "significados" que el sujeto vincula a la regla, y en que es parcial la comprensión? El alumno comprende sin duda lo que hace al realizar las operaciones aritméticas de multiplicación para resolver el problema. Si reflexiona sabrá, probablemente, explicar que dos cuadrados de diferente tamaño y dos rectángulos iguales forman un cuadrado perfecto (es decir que el cuadrado de un término nos determina área).

Otro tipo de adquisición deficiente con frecuencia no es pedir al alumno la memorización verbal sino que se le hace aprender mecánicamente determinado procedimiento, que produce resultados correctos, pero en realidad, estas reacciones no contienen sino "islotes de comprensión". Para Aebli "los hábitos relativos al manejo de los símbolos constituyen conductas estereotipadas y rígidas. Donde su desarrollo correcto depende de circunstancias accidentales, de manera que no puede aplicarse sino a un reducido número de situaciones escolares”.

En sus investigaciones sobre psicología genética, Piaget halló que el niño elabora en el curso de su desarrollo reacciones mucho más sutiles que los hábitos. Las denomina "operaciones", cuyo campo de aplicación es más extenso que el hábito. La operación no necesita *señal* para producirse y no está unida a una expresión simbólica (verbal, algebraica, numérica) fija. Por componerse de operaciones parciales coordinadas de manera continua entre sí que forman con otras operaciones sistemas de conjunto coherente y móvil, puede aplicarse a todo dato que lo permita objetivamente.

Otra particularidad de la operación cuya aplicación a la didáctica nos parece importante es "La composición de las operaciones es *asociativa*", es decir, que el pensamiento queda siempre libre para realizar rodeos y que un resultado obtenido con dos procedimientos diferentes es el mismo en ambos casos.

El hábito relativo al manejo de símbolos ¿permite tal variación de itinerarios para llegar al mismo resultado? Ciertamente no, puesto que su definición implica un mecanismo rígido, no susceptible de variantes asociativas. Cuando el alumno reconoce procedimientos que dan el mismo resultado, no sabe frecuentemente decir por qué es así. Porque 7x6=(5x6)+(2x6). Para comprender no basta saber realizar mecánicamente los dos cálculos, sino que se debe haber comprendido la asociatividad de ambas operaciones.

En oposición las operaciones agrupadas, los hábitos son conductas relativamente aisladas entre sí. Un ejemplo extraído de la práctica escolar esclarece esta diferencia: la tabla de multiplicar puede aprenderse como colección de hábitos o como un grupo de operaciones.

En esta diferencia entre el hábito y la operación permite comprender fácilmente por qué los hábitos intelectuales se olvidan con tanta frecuencia en tiempo sorprendentemente breve. La tabla de multiplicar aprendida de manera mecánica, necesita repasos periódicos pues de lo contrario el alumno la olvidará.

2.2.3.1 Revisitando la construcción de significado en torno de las ecuaciones lineales con dos incógnitas

La investigación en torno de la significación de las ecuaciones lineales con dos incógnitas ha sido abordada por diversos autores, entre los que destaca Herscovics (1980). Donde uno de los objetivos de su trabajo fue elaborar una guía pedagógica para la enseñanza de la recta y de su ecuación, basándose en una investigación sobre la construcción de significado para las ecuaciones lineales, apoyándose sobre concepciones intuitivas y operacionales de las nociones geométricas.

Según Hoyos (1998) tal vez Herscovics está entre los primeros investigadores que introducen el lenguaje representacional para referirse a los problemas de aprendizaje del álgebra, pues la concibe (al álgebra) como una representación, nueva, para las ideas aritméticas o geométricas; debiendo ésta tener una significación construida sobre conocimientos aritméticos y geométricos.

Para Herscovics, un nuevo concepto puede ser introducido conectándolo a uno simple o a un concepto equivalente conocido por el estudiante.

Según Herscovics el álgebra es una representación de ideas aritméticas y geométricas, por lo que Hoyos señala que el álgebra proporciona nuevos signos (regidos por un código también nuevo) para hablarnos, tal vez entre otras cosas, de hechos aritméticos y geométricos de manera diferente. Es decir, que el lenguaje algebraico resaltaría otros aspectos u otras propiedades de los hechos aritméticos o geométricos que tal vez, bajo otra forma, no serian considerados.

En los resultados de investigación de Hoyos (1998) sobre la interrelación entre las representaciones de la variación de un punto a lo largo de una trayectoria rectilínea (representación grafica y algebraica), con el estado de desarrollo de la sintaxis algebraica, se trabajó con tres estudios de caso, uno de estrato bajo (LN) y dos de estrato alto (EP y PB). Cabe mencionar que el trabajo con la estudiante de estrato bajo, toma una vía centrada en el reconocimiento de las operaciones a realizar indicadas por la ecuación lineal dada. Por otro lado, de entrada los dos casos de estrato alto, pasan la ecuación dada a una forma normal. Sin embargo, en el caso de EP, éste no efectúa correctamente el despeje necesario para ello, y, no obstante, pasa inmediatamente a tabular utilizando la forma “normal” por él obtenida, demostrando con ello no tener una forma de control en torno de sus ejecuciones.

Hoyos señala que en el caso PB, este también despeja de entrada la ecuación dada, obteniendo correctamente el despeje. Sin embargo, dicha acción no parece serle significativa, pues no sabe cómo continuar hasta que reconoce que la ecuación original dada está denotando posibles operaciones a realizar con números específicos.

Para Hoyos en el camino de la significación convencional de las ecuaciones lineales con dos incógnitas, se destaca entonces la prevalencia de la significación conferida a los procedimientos algebraicos básicos por sobre un rol puramente sintáctico. Es decir señala que entre los resultados más importantes de la observación empírica realizada se encuentra el de que los estudiantes le dan a las ecuaciones de tipo $ax+by=c$, con a,b y c distintos de cero, un sentido meramente procedimental.

2.2.4 La operación y la cooperación de los alumnos

Ciertos pedagogos han mostrado que la educación puede resultar favorecida por el trabajo de los alumnos en equipo y por la discusión entre ellos. Piaget pone en evidencia las condiciones intelectuales que tornan a un niño capaz de cooperar y explica el efecto de la cooperación en la formación de su mente. El valor y la dificultad del intercambio intelectual en un grupo, se basan, en efecto, en que ponen al individuo ante puntos de vista diferentes del suyo. Para que la discusión sea entonces posible, es preciso que cada participante comprenda el punto de vista ajeno. El punto es ¿Cómo hacer posible tal correspondencia entre las diferentes ideas individuales? Bien es posible cuando los conceptos de cada participante no son rígidos ni los domina su propio punto de vista limitado. Cuando se trata de resolver un problema matemático, la posibilidad de encarar operaciones asociativas (que conducen por vías diferentes al mismo resultado) asegura la recíproca comprensión entre alumnos que proponen diferentes métodos de solución. Piaget denomina a esta capacidad indefinida de cambio mutuo entre los miembros de un grupo, la "reciprocidad" de su pensamiento.

Para Aebli desde los primeros años en la escuela los niños deberán ser estimulados y guiados hacia el trabajo de conjunto y hacia la discusión en común de los problemas sencillos que estén a su alcance. Es decir, los alumnos deben ser obligados constantemente a tener en cuenta otros puntos de vista además de los suyos, pues hacer corresponder sus pensamientos con los de sus compañeros, nunca podrán adquirir hábitos intelectuales rígidos y estereotipados. Y si, no obstante, hubiera algún alumno con tendencia a adquirirlos, fácil es imaginar cómo los planteamientos rígidos quedarían rotos al chocar con las ideas de sus compañeros.

2.3 PRINCIPIOS GENERALES PARA LA EXPERIMENTACIÓN DE LA PROPUESTA

El álgebra, entendida como el desarrollo de habilidades para manipular letras y otros símbolos que pueden significar cosas diferentes, y también como construcción de operaciones, expresiones o entidades abstractas a través de relaciones bien definidas, ha sido considerada en los diversos currículos de formas distintas. Por lo general, se insiste en la relación del álgebra con la resolución de problemas y con los procesos de generalización, algunos con la ayuda de la visualización geométrica y otros con el uso de "modelos".

El tratamiento del álgebra que se propone en este trabajo no olvida este conjunto de apreciaciones, para intentar minimizar las dificultades de la enseñanza-aprendizaje del álgebra en la escuela a continuación se señalan ciertos principios generales según Socas (1996):

- Un determinado grado de automatización en las operaciones básicas en un estadio es un prerrequisito para el desarrollo en el estadio siguiente. Es decir, el avance hacia el razonamiento en aritmética generalizada estará subordinado a que los niños hayan automatizado las operaciones básicas de la aritmética elemental; o el progreso hacia el razonamiento de las operaciones formales, dependerá de que los alumnos hayan automatizado las operaciones básicas del último estadio concreto.

- No introducir nuevas ideas o técnicas algebraicas demasiado rápido. Este debería ser uno de los principios fundamentales de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas; ignorarlo supone, sin lugar a dudas, crear dificultades en el aprendizaje.

- No introducir ideas o técnicas algebraicas demasiado específicas que no sirvan para el desarrollo algebraico futuro. Un caso concreto podría ser la factorización de polinomios, a veces los "trucos" usados para factorizar polinomios de segundo grado dificultan la comprensión del proceso general; esto se pone de manifiesto al intentar factorizar polinomios de mayor grado.

- Asegurar que los aspectos diferentes de una idea, técnica o símbolo algebraico estén claramente distinguidos.

- No introducir o establecer la notación formal antes de que una idea o técnica algebraica haya sido asimilada por los alumnos.

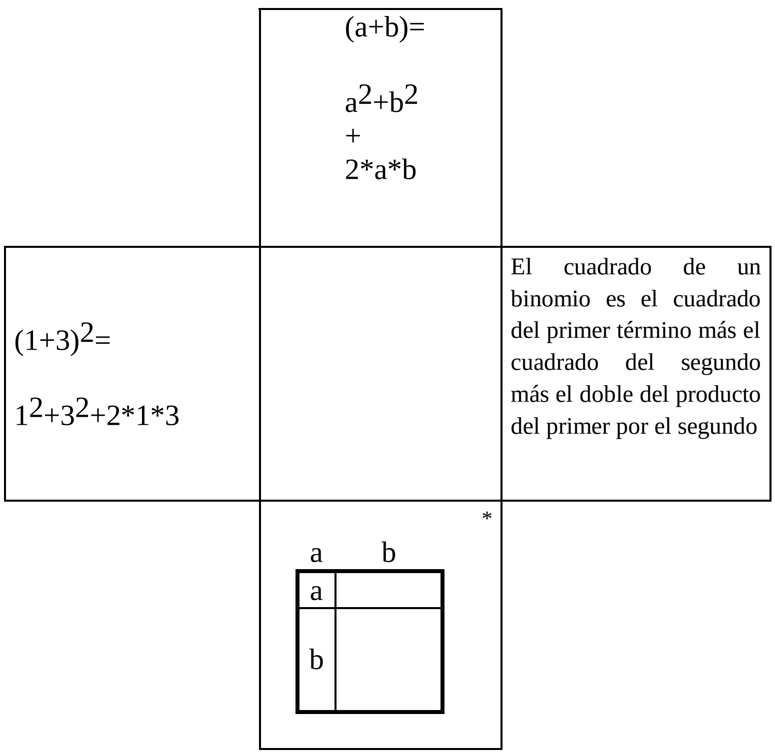
- Evitar la complejidad notacional innecesaria

- Favorecer la comprensión algebraica en términos de traducción de lenguajes. El uso de más de un lenguaje para representar un concepto favorece la abstracción del concepto, ya que tenemos más puntos de referencia y permiten establecer así más relaciones. En este sentido la traducción considera los cuatro lenguajes básicos, aritméticos, habituales, geométricos y algebraicos.

En el Esquema 1 se presenta un ejemplo de traducción de lenguajes para el cuadrado de la suma de un binomio.

Retrasar las técnicas formales por procedimientos más informales hasta que los procesos sean identificables en varios contextos, es posible que permita avanzar hacia la abstracción y simbolización.

En la introducción de métodos formales se debe tener claro, antes que nada la necesidad de tales procedimientos. Por lo que se requiere que el profesor, de una parte, reconozca que los estudiantes puedan tener un método informal para una determinada clase de problemas y que el valor de este método informal para solucionar problemas sencillos sea reconocida y discutida, y de otra que las limitaciones del método sean consideradas por el procedimiento de intentar usarlo para resolver un problema del mismo tipo, pero más difícil. De esta manera se sugiere a los alumnos la necesidad de un procedimiento más general, esto es, más formal.



Esquema 1. Traducción de lenguajes para el cuadrado de un binomio.

[*] Grupo Azarquiel (1993) cita el testimonio de una autoridad como el filósofo suizo francés Rousseau, que también experimentó dificultades con el álgebra. En sus Conferencias cuenta lo difícil que le resultaba comprender la igualdad $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$ hasta que cierto día , y a la vista del dibujo se dio cuenta de que, efectivamente, el cuadrado grande, de superficie $(a+b)^2$, es la suma de los cuadrados de superficie a^2 y b^2 y los dos rectángulos de superficie ab, sumadas las de ambos, 2ab.

2.3.1 Visualización y enseñanza de las matemáticas

La educación visual en matemáticas aumenta la intuición y proporciona al sujeto una mayor capacidad de entendimiento (Cuningham, 1991) citado por Castro y Castro (2000). Castro y Castro señalan, la visualización cobra especial importancia en procesos de razonamiento inductivo...; así por ejemplo, formar una conjetura a partir de un patrón y generalizarla es una componente propia del razonamiento inductivo. La expresión visual actúa como catalizador para comprender una regla y producir razonamiento inductivo. Sin embargo también es un hecho comprobado que existe rechazo por parte de muchos enseñantes de matemáticas a usar recursos visuales en el desarrollo de su labor. No consideran que los patrones tanto numéricos como geométricos puedan ayudar a los alumnos en la construcción de nociones del álgebra.

2.3.1.1 Simbología visual y verbal

Skemp (1980) señala en su libro Psicología del aprendizaje de las Matemáticas, que la imaginación mental de las personas puede clasificarse en dos tipos: visual y verbal, de manera que en la representación de los conceptos matemáticos se plantean dos sistemas de símbolos a utilizar denominados visuales y verbales. Para él, los símbolos verbales son la representación de la palabra oral y escrita, y los visuales están constituidos por diagramas de distintas clases.

El lenguaje algebraico tiene mucho más en común con la simbolización verbal que con la visual, aunque hay que tener en cuenta la importancia que el componente gráfico posee sobre todo tipo de razonamiento lógico-matemático que se realice. De esta manera, habrá que tener en cuenta que en matemáticas se utiliza con mucha frecuencia la combinación de ambos tipos de simbología, que puede quedar patente en la combinación realizada por Descartes con la invención de su Geometría.

Como características fundamentales de estos sistemas de simbología se tiene (Skemp, 1980, p.117)

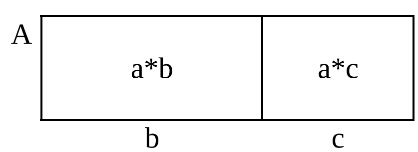
VISUAL	VERBAL-ALGEBRAICO
• Abstrae propiedades espaciales, tales como forma, posición	• Abstrae propiedades que son independientes de la configuración espacial, tales como número
• Más difícil de comunicar	• Más fácil de comunicar
• Puede representar pensamiento más individual	• Puede representar pensamiento más socializado
• Integrador, muestra estructura	• Analítico, muestra detalles
• Simultáneo	• Secuencial
• Intuitivo	• Lógico

Para Skemp el aspecto algebraico que poseen las matemáticas de la escuela indican que permanece en la clasificación anterior dentro de la simbología verbal-algebraica, pero la experiencia y la historia dan la importancia de la visualización como una "herramienta" fundamental para la comprensión de muchos argumentos y fórmulas algebraicas.

Por otro lado, M. Otee (1986) citado por Socas (1996) considera que las fórmulas algebraicas poseen un aspecto lógico-lineal y otro visual-ideográfico, aspectos que se relacionan, respectivamente, con el verbal numérico y geométrico gráfico intrínsecos del concepto de variable surgido en los siglos XVI y XVII. Se considera con todo esto, la importancia de combinar estos tipos de representaciones de fórmulas algebraicas apoyándonos en los planteamientos geométricos griegos, para quienes como ya se aclaro anteriormente no existía el álgebra, sino que todo se traducía al aspecto visual-ideográfico.

No obstante, existen profesores que prefieren comprobar las propiedades para algunos ejemplos numéricos, antes que utilizar argumentos geométricos rigurosos. Así, para justificar la propiedad distributiva del producto respecto de la suma lo hacen mediante argumentos "aritméticos" o "numéricos" .

Por ejemplo 4 y 5 son números naturales que cumplen que 4x(4+5)=4x4+4x5, pudiendo utilizar el argumento visual de los Elementos, de Euclides.



$a(b+c)= a*b + a*c$

Demostrando "aritméticamente" un argumento como el anterior, la generalización de una propiedad pierde su significado real, ya que se trata de pequeñas y simples comprobaciones que limitan la extensión real del descubrimiento y que inciden poco a poco en la concepción que el alumno puede alcanzar de lo que es una demostración matemática. Aunque claramente el argumento geométrico tiene sus limitaciones (en este caso, $a>0$ y $b>0$), ayuda a comprender la justificación de la propiedad, pues abarca un número de casos infinito que posteriormente podrá ser generalizado para cualquier número real.

El lenguaje visual puede ser utilizado como recurso didáctico de apoyo tanto al lenguaje aritmético como al algebraico. Como consecuencia de esto, las actividades planteadas en la propuesta se construyen dada una expresión algebraica o numérica, el paso previo a su transformación vendrá apoyado por la traducción al lenguaje visual en un primer momento, para terminar el proceso con la transformación algebraica.

2.3.2 Los materiales concretos en el aula

Para Szendrei (1996) los materiales concretos tienen una larga historia en las clases de matemáticas, aunque no siempre han sido aceptados de buena gana o usados apropiadamente. Se cree que los materiales concretos desaparecieron cuando surgieron los métodos de cálculo escritos y se le asignó poco valor a la comprensión de los algoritmos que estaban siendo enseñados.

Montessori y otros proveen nuevos materiales concretos en el siglo pasado y nuevas razones para su uso; actualmente se encuentra cientos de "manipulativos" disponibles. Sin embargo, la pregunta sigue siendo si las herramientas comunes de la vida diaria pudieran ser mejores que los materiales educativos especialmente construidos y si, de hecho, tales materiales pudieran ser más dañinos que buenos.

A continuación se presenta un extracto del trabajo “Concrete Materials in The Classroom” de Szendrei (1996), donde comienza diciendo que los materiales educativos no son drogas milagrosas pues su uso productivo requiere planeación y prevención.

En el trabajo de Szendrei se considera que las matemáticas para la vida real llegaron a ser más accesibles con la propagación del sistema numérico hindú y los números arábigos. Pues este sistema simplifico no solamente la escritura de los números sino también las operaciones aritméticas. Anteriormente, las operaciones con números fueron llevadas a cabo mentalmente o usando manos, piedras, etcétera. El ábaco ayudó en el proceso de representación de números. La conexión entre la escritura de números y las operaciones fue posible por el ábaco de Gerbert Gerbert (930-1003) el cual contiene unos discos con un número cada uno. Esta fue una herramienta para realizar operaciones fácilmente, sin embargo la eliminación del ábaco llegó a ser posible después de la introducción del número cero y por los números arábigos. En el moderno sistema de cálculo, la notación para los números llegó a ser un sistema abstracto, independiente de su origen geométrico. A principio, los algoritmos que usaban esta notación no fueron siempre bienvenidos o fácilmente adoptados. Varios estados y autoridades trataron de prohibir el uso de los números arábigos. Por ejemplo, la ciudad de Florencia en 1299, prohibió su uso. El argumento fue que era demasiado fácil falsear las cuentas insertando un cero y la cantidad sería 10 veces más grande, mientras que esto no era posible usando números romanos (Toth Szab, 1988). En el trabajo de Szendrei se incluye un figura que conmemora la lucha entre "los abaquistas" (representados por Pitágoras) y "los algoritmistas" (representados por Boethius). En ella Lady Aritmética tiene que escoger entre "algoritmos" y "cálculos con ábaco".

2.4 DIDÁCTICAS ESPECÍFICAS PARA EL APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA

Desde los inicios de la década de los años 90, la enseñanza que se impartía en las escuelas en México, fue revisada y modificada, la llamada Consulta Nacional movilizó amplios sectores interesados en participar, así los profesores se encuentran ante proposiciones nuevas que pretenden desarrollar una más eficiente y mejor enseñanza de las matemáticas.

Las diferencias de los alumnos, es decir la diversidad en el aula supone un reto al profesor que aborda el tratamiento didáctico del álgebra. Actualmente encontramos material educativo diseñado para facilitar el aprendizaje de las matemáticas. A continuación se describen diferentes materiales didácticos para el aprendizaje de temas específicos del álgebra.

2.4.1 Desarrollo conceptual del álgebra

Los conceptos y los métodos desarrollados en el marco del álgebra son insuficientes para resolver las ecuaciones de segundo grado, de manera que el alumno es llamado a construir nuevos métodos de solución. Desafortunadamente, las estrategias didácticas que proponen generalmente los textos de matemáticas se limita a la fórmula general, y completando el cuadrado. Las estrategias usuales no dan cabida a una interpretación geométrica de las ideas al tratamiento simbólico.

Según Radford (1995) hasta hace algunos años se pensaba que los procedimientos de resolución de muchos problemas matemáticos contenidos en las tabletas sobrevivientes que provenían de Mesopotamia, habían sido el fruto de un pensamiento algebraico sin símbolos. Hoyrup (1985, 1994) citado por Radford ha propuesto a través de un reanálisis lingüístico de términos una nueva interpretación en la que muchos de esos antiguos problemas y sus métodos de resolución son de naturaleza geométrica. Un tipo de problema clásico, que habría formado parte de los problemas estudiados en las *Casas de Escribas*, y que se encuentra más tarde bajo una formulación numérica en la Aritmética de Diophanto, (ca. 250) es el siguiente: "Encontrar los lados de un rectángulo cuya área es 96 y la suma de su base y su altura es 20" (Libro I, 27).

De acuerdo a Hoyrup, la resolución que los escribas de Mesopotamia habrían desarrollado consiste en un desplazamiento de figuras geométricas. Asumiendo que la base es igual a la altura y por lo tanto que la solución es un cuadrado de lado igual a 10; se obtendría que el área es 100 (fig. 1), y no 96 como lo estipulado. Se debe, por consiguiente, quitar el excedente al cuadrado (fig. 2, en donde el excedente aparece en negro). La figura resultante verifica la condición de área pero no la de ser un rectángulo. Al desplazar hacia el costado derecho la parte rectangular superior adyacente al cuadro negro (fig.3), se obtiene el rectángulo deseado, es decir el rectángulo de base 12 y altura 8 (fig.4).

Fig.1 Fig.2 Fig.3 Fig.4

Es dentro de esta tradición matemática desarrollada inicialmente por lo antiguos escribas y medidores que tiene cabida la "Geometría de Cortes y Desplazamientos (GCD)".

Para Radford lo anterior sugiere una aproximación didáctica a la resolución de ecuaciones de segundo grado, aclarando que no afirma que el alumno deba seguir, en la construcción de su saber matemático, la misma trayectoria que la construcción histórica de las matemáticas. En su trabajo "Ecuaciones de segundo grado una propuesta de enseñanza basada en su desarrollo histórico-conceptual" empieza con ciertos problemas sencillos a través de los cuales el alumno es introducido a la GCD. El profesor muestra la resolución del rectángulo que se mostró en las figuras 1 a 4. En seguida viene la etapa de exploración geométrica-numérica: los alumnos deben resolver por si mismos utilizando los procedimientos de la GCD problemas con datos numéricos diferentes. La diferencia entre estos problemas es que el último incluye un manejo de radicales es decir cuadrados no perfectos; como el objetivo es llegar a una fórmula de resolución de ecuación de segundo grado, es preferible que el alumno no exprese los radicales a través de aproximaciones decimales. Luego puede pasarse a la etapa simbólica, en la que los números son remplazados por letras; puede escogerse la letra *b* para designar la suma de la base y la altura del rectángulo, y la letra *c* para designar el área, de manera que el problema en cuestión los lados grande y pequeño del rectángulo son: $b/2+((b/2)^2)^{1/2}-c$ y $b/2-((b/2)^2)^{1/2}-c$ respectivamente. En la segunda etapa la idea es explorar problemas de la forma $x^2+bx=c$, siempre partiendo de un contexto geométrico.

2.4.2 Actividades y materiales concretos para el aprendizaje del álgebra

2.4.2.1 El puzzle algebraico

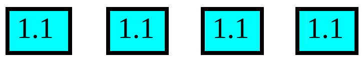
El Puzzle algebraico es uno de los tres materiales concretos: "Tablas de contar, sumar y multiplicar", "Tablero Matemático" y "Puzzle Algebraico", elaborados como registros de representación autosuficientes, para abordar con sentido de continuidad, el Pensamiento Numérico y Algebraico en Primaria y Secundaria (Socas, 2000).

Está formado por 132 fichas que se distribuyen en 13 piezas de diferentes colores (azul claro y azul oscuro), dimensiones y signos. Está organizado en torno a cinco tipos de actividades: cantidades numéricas positivas y negativas, expresiones algebraicas elementales, ecuaciones lineales, ecuaciones de segundo grado y otras.

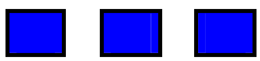
El objetivo en la actividad de representar cantidades numéricas positivas y negativas, es conocer y hacer representaciones utilizando la ficha unidad del puzzle algebraico.

Por ejemplo:

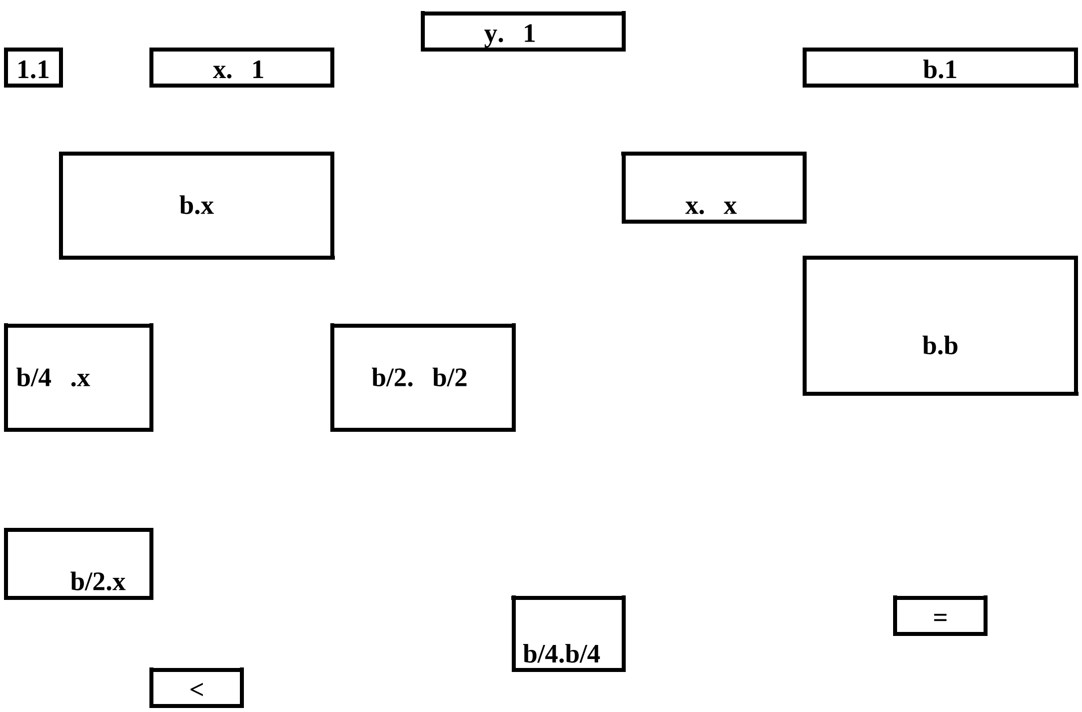
Representar: +4 unidades.



Representar: -3 unidades



Las trece piezas del Puzzle Algebraico son:



Mediante la estrategia de formar cuadrados, la solución general de la ecuación de segundo grado $x^2+bx=c$, el objetivo es comprender el significado de una ecuación de segundo grado con una incógnita y descubrir reglas de transformación para resolver la ecuación. La idea se basa en el valor numérico de una expresión algebraica y se pretende encontrar la medida del lado desconocido de un cuadrado de área conocida.

Para construir gráficamente, la resolución de la ecuación: $x^2+bx=c$, por el método HINDÚ de completar cuadrados son necesarias, las fichas del puzzle: x.x, b.x, b/2.x y b/2.b/2,. La ecuación general $x^2+bx=c$, donde el coeficiente de x^2 se considera 1, la solución es determinar los valores de x que hacen que el valor numérico de la expresión x^2+bx, sea c. El procedimiento es buscar el lado desconocido de un cuadrado cuya área podemos conocer y que tenemos que construir, a partir del cuadrado del lado x, desconocido, y del rectángulo de lados b (conocido) y x (desconocido). Se usa las fichas x.x y b.x, y representamos la ecuación, posteriormente se transforma el primer miembro de la igualdad de un cuadrado de área conocida, respetando las reglas de simplificación y equilibrio y multiplicación por cantidades negativas. Es decir se sustituye el rectángulo b.x, por dos piezas equivalentes b/2.x y b/2.x . Ahora se puede formar el cuadrado añadiendo la ficha b/2.b/2, a ambos lados de la igualdad, obtenemos un cuadrado de lado (x+b/2), y su área es $c + (b/2)^2$. Es decir: $(x+b/2)^2=c+(b/2)^2$; $x+b/2=+-(c+(b/2)^2)^{1/2}$, de donde: $x=-b/2+-(c+(b/2)^2)^{1/2}$, que es la solución de la ecuación.

2.4.2.2 Otras propuestas para avanzar hacia el álgebra

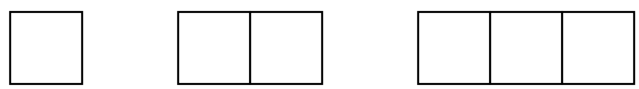
Para Thornton (2001) se ha dado un énfasis creciente a desarrollar un entendimiento de variables, expresiones y ecuaciones, y a presentar métodos informales para la resolución de ecuaciones. El énfasis en manipulación de símbolos y en la práctica en la resolución de ecuaciones ha disminuido (NCTM, 1989) citado por Thornton.

Así Thornton se pregunta ¿El efecto de estos cambios ha sido exclusivamente reemplazar un tipo de conocimiento práctico con otro? Este artículo ve tres avances en álgebra: (1) un avance en procedimientos, en el cual a los estudiantes se les pide generalizar una relación; (2) un avance simbólico, en el cual los estudiantes aprenden a manipular expresiones algebraicas; y (3) un avance en funciones, el cual enfatiza la generación e interpretación de gráficas. Este artículo examina la naturaleza del pensamiento inherente a cada avance y pregunta si alguno o todos estos avances son, por ellos mismos, suficiente para generar un poderoso razonamiento algebraico.

2.4.2.2.1 El Avance de Procedimientos, o “Álgebra de Fósforos”

Los avances de procedimientos para el álgebra en la educación se ejemplifican con el método de fósforos mostrado en la figura 5. Al enfrentarse con estos problemas, los estudiantes casi invariablemente describen la regla como “sumar 3”. La mayoría de los estudiantes miran la tabla de valores horizontalmente, observando que cada vez que se agrega un cuadro, el número de fósforos necesitados aumenta en tres. Los maestros bien intencionados con frecuencia ayudan a los estudiantes a encontrar una regla general de esta observación, diciendo, por ejemplo, que si uno agrega 3 cada vez, la regla es de la forma c =3f + k, y sugiriendo que los estudiantes intenten algunos números para determinar el valor de la constante.

Examina la siguiente ruta, completa la tabla, y encuentra la regla que muestre cómo el número de fósforos (f) depende del número de cuadros (c).



f	1	2	3	4	5	100
c	4	7	10			

Regla: f = _________

Fig. 5 Método de Fósforos

Los estudiantes consideran este avance como una buena enseñanza ya que les ayuda a obtener la respuesta correcta. El maestro es reforzado similarmente en la creencia de que está actuando en beneficio de los intereses del estudiante, porque ellos son capaces de encontrar la regla para esta ruta y, además, aun una regla general para otros casos lineales. La habilidad para encontrar estas reglas es, quizá, una aptitud útil, pero ¿los estudiantes entienden algo más acerca de la naturaleza del álgebra que si el sujeto ha sido introducido en una forma simbólica y formal? Los estudiantes que usan esta heurística para encontrar la constante y así la regla general han, en realidad, observado lo específico en vez de lo general. Ellos no necesariamente han adquirido una bien desarrollada noción de la naturaleza general de este procedimiento sino solo han aprendido un procedimiento para desarrollar una expresión simbólica correcta. La esencia algebraica del problema está ausente.

El problema del método de fósforos no está cerca de encontrar una regla general. La respuesta al problema que es, la regla en sí, no es importante. El problema es realmente acerca de las representaciones alternativas. Es un ejercicio de visualización en el que diferentes formas de ver al procedimiento produce diferentes expresiones. Visualizar el procedimiento en diferentes formas y escribir las relaciones algebraicas correspondientes ayuda a los estudiantes a entender la naturaleza de una variable y se hace familiar con la estructura de expresiones algebraicas. Este procedimiento particular puede ser visualizado en por lo menos cuatro formas diferentes (ver figura 6. Cuatro formas diferentes de visualizar el método de Fósforos).

Escribir el número de procedimiento en una tabla, una actividad comúnmente encontrada en libros de textos y en hojas de trabajo, no ayuda a los estudiantes a visualizar la inherente generalidad en las construcciones de l método de fósforos. Un avance mucho más constructivo es pedir a los estudiantes que construyan un elemento del método físicamente y explican cómo se colocó junto, no en términos de números sino en términos de su estructura física. Las diferentes estructuras algebraicas entonces tienen significados físicos directos.

El procedimiento construido de un fósforo más tres de cada cuadrado, o $m = 3c + 1$

El procedimiento construido de cuatro fósforos para el primer cuadrado más tres por cada cuadrado subsiguiente, o $m = 4 + 3(c-1)$

El procedimiento construido de dos líneas horizontales unidad por conexiones verticales, o $m = 2c + (c + 1)$.

El procedimiento construido de cuatro fósforos para cada cuadrado, quitando el fósforo sobrepuesto de todos los cuadrados excepto uno, o $m = 4c – (c-1)$

Figura 6.

Numerosos avances visuales en álgebra son posibles (Nelsen, 1993) citado por Thornton. Por ejemplo, puede pedírseles a los estudiantes visualizar el método mostrado en figura 7 en diferentes formas así como generar una relación entre el número de cuadros sombreados (b) y lo ancho del lado del cuadrado blanco (n).

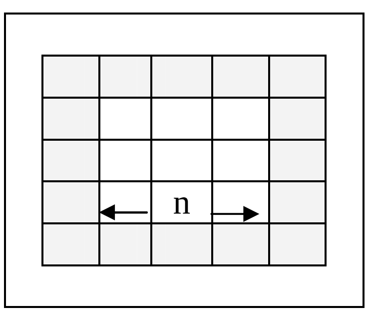


Fig. 7

Otra vez, por lo menos cuatro representaciones diferentes son posibles (ver figura 8). El punto del ejercicio no es obtener la respuesta b = 4n + 4 o alguna de sus variantes, sino mejor entender cómo el método puede ser visualizado y cómo estas diferentes visualizaciones pueden ser descritas simbólicamente.

Si estamos para promover un poderoso pensamiento algebraico en nuestros estudiantes, debemos motivar una variedad de generalizaciones bien justificadas del procedimiento. Más que ser un fin en sí mismo, el propósito de generar reglas es desarrollar una idea de métodos y relaciones. Como Gardner (1973) citado por Thornton escribe, “No hay ayuda más efectiva en entender ciertas identidades algebraicas que un buen diagrama.

Figura 8.

Uno podría, por supuesto, conocer cómo manipular símbolos algebraicos para obtener pruebas, pero en muchos casos una prueba monótona puede ser suplida por una análoga geométrica tan simple y hermosa que la verdad de un teorema es casi vista al primer vistazo”.

2.4.2.2.2 El avance simbólico, o “Álgebra de ensalada de fruta”

El avance formal y simbólico de álgebra, en el cual las variables están definidas como letras que toman números, ha sido criticado como sin sentido (Chalouh y Herscovis, 1988) citado por Thornton (2001) y ha sido identificada como la fuente de muchas dificultades enfrentadas por estudiantes principiantes de álgebra. Según

Thornton, Olivier (1984) utilizó el término “álgebra de ensalada de fruta” para describir un avance en álgebra en el cual los estudiantes eligen variables como objetos o etiquetas más que como números. Este avance de ensalada de fruta se ilustra por preguntas como las siguientes[10]:
Tres personas tiene dos manzanas (a) y un plátano (b) cada una y dos personas tienen una manzana y tres plátanos cada una.

1) ¿Cuántas manzanas y plátanos tienen en total?
2) Expande y simplifica 3(2a + b) + 2(a + 3b)
3) ¿Qué notaste de los incisos 1) y 2)?

Para (Mac-Gregor 1986) según Thornton este avance brinda modelos concretos para símbolos, los cuales pueden guiar a los estudiantes a un éxito a corto plazo, pero la confusión de variables con objetos puede también guiar a esparcir el mal entendimiento. Para ayudar a aliviar esta confusión, algunos modelos mucho más efectivos y poderosos, como azulejos algebraicos, han sido desarrollados para dar un significado concreto a la manipulación simbólica.

En su artículo Thornton indica que no importa qué tan efectivo sea el modelo o el contexto, un potencial peligro es que el significado y propósito fundamental de la manipulación simbólica se puede perder. La esencia de la manipulación simbólica no radica en obtener una respuesta para una observación específica, sino en ayudar a dar sentido a una observación. Cada representación diferente producida a través de una manipulación simbólica puede revelar una aproximación diferente dentro de la situación considerada.

La manipulación simbólica tiene un propósito. La exploración de modelos concretos en álgebra no debería cubrir el propósito fundamental de la manipulación simbólica como idea comunicativa dentro de la generalidad permitiendo a una expresión ser escrita en diferentes formas. Cada forma diferente de una expresión revelaría una cualidad diferente, permitiendo el descubrimiento, comunicación y prueba de resultados generales.

2.4.2.2.3 El avance de funciones, o “Álgebra de Taxi”

El avance de funciones y gráficas en álgebra se caracteriza por el problema mostrado a continuación. Este avance enfatiza una aplicación realista de gráficas y motiva a los estudiantes a representar situaciones en palabras, símbolos, gráficas y tablas de valores. Aunque no muy frecuentemente, los maestros o libros de texto piden a los estudiantes discutir las diferentes ganancias de cada una de estas representaciones.

---

[10] Veer a New Approaches to algebra de Stephen J.Thornton.

Un cierto encargado de una compañía de taxis tiene un pago de $1.80 por recogida inicial, después $1.20 por milla. Completa la tabla de abajo, representando el total del cargo gráficamente, y escribe abajo una expresión algebraica para el total del cargo en términos del número de millas recorridas.

Distancia (millas)	5	10	15	20
Costo ($)				

Las cuatro representaciones conducen a doce posibles transiciones entre representaciones, como se muestra en la Figura 9. Definitivamente, la ruta más común sobre este diagrama es con el sentido contrario a las manecillas del reloj, moviéndose de palabras a números a gráficas y a símbolos.

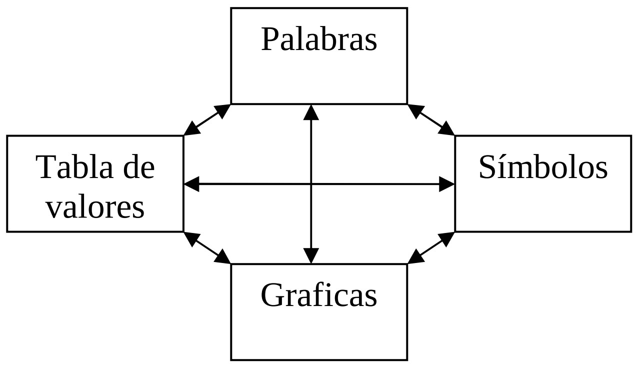


Fig. 9 Transición entre representaciones de situaciones algebraicas

Difícilmente esperamos que los estudiantes se muevan directamente de palabras a símbolos o de tablas a palabras. Sin embargo todas, de las posibles transiciones, brindan al entendimiento de la naturaleza de las funciones y relaciones de los estudiantes. Por ejemplo, la habilidad de reconocer que la relación en el Problema de Taxi puede ser escrita como c = 180–12k, sin tener que dibujar una gráfica o una tabla de valores, muestra una revelación dentro de la relación entre costo y distancia. Entender por qué esta representación simbólica es útil porque hace el problema más fácil de resolver utilizando tabla o una calculadora programable o trabajar la pregunta anterior muestra un aún mayor grado de revelación dentro de la situación por sí misma y dentro del poder de pensamiento algebraico. La habilidad de representar una relación gráficamente, en una tabla, como una función y en palabras, y el pensamiento requerido para convertir directamente de una representación a otra en cada permutación posible es promover el desarrollo de diferentes revelaciones dentro de la situación que se está estudiando.

Por último Thornton menciona que la curricula escolar en matemáticas ha intentado desenfatizar la aproximación simbólica y formal del álgebra y enfatizar rutas y funciones como temas centrales de matemáticas en escuelas de nivel medio. Claramente, los tres avances procedimientos, símbolos y función son de central importancia, sin embargo, una aceptación incuestionable de estos avances en álgebra, aún los resaltados en documentos de curricula actual, pueden aún fallar en el desarrollo de un poderoso pensamiento algebraico en nuestros estudiantes. Thornton propone examinar la naturaleza fundamental de álgebra antes de que podamos ayudar a nuestros estudiantes a usar álgebra para un propósito.

2.4.3 Origami (doblado de papel)

Según Higginson y Colagan (2001), el origami (doblado de papel) tiene un potencial impresionante para atraer una amplia gama de ideas matemáticas, que en el salón brindan a los estudiantes oportunidades de ver las matemáticas como un todo integrado y de hacer conexiones de pensamientos entre conceptos y aplicaciones relacionadas con otros dominios. En su artículo Higginson y Colagan ilustran las ideas sugeridas por los estudiantes en los grupos con los que trabajaron, aunque los diálogos fueron reconstruidos, la lección se enfoca en la Sra. V., quien motiva vigorosamente la conversación del salón en el sentido de los nuevos Principios y Estándares para la Enseñanza de las Matemáticas (NCTM 2000).

En la primera lección, los estudiantes investigan las matemáticas en los pasos para doblar una caja de origami. Son guiados a través de las instrucciones que se muestran en un modelo físico, después intentan analizar tanto el producto como el proceso, buscando similitudes y diferencias entre las cajas y las generalizaciones de desarrollo. Aplican las cajas a problemas relacionados utilizando argumentos concretos, numéricos, de formulación y algebraicos. Para soportar sus soluciones en la base de datos físicos.

Los estudiantes comparan sus hojas dobladas con las de sus compañeros. La clase entabla una discusión, y muchos estudiantes ayudan a otros. Al completar los estudiantes sus modelos, comentan, "¡Sorprendente!" "Wow", y "Hey, la tuya se ve como ésta" En este punto, la Sra. V. indica a sus estudiantes "¡Gran inicio! Repitan la secuencia de los pasos con un compañero, pero esta vez, comiencen rotando el papel 90 grados a la derecha, ¿qué creen que pasará?" La mayoría de los estudiantes dice "Obtendrás una caja con una forma diferente" La señora V. dice "¡Averigüémoslo! cuando todo el mundo tenga sus cajas, continuaremos". Los estudiantes verifican sus dobleces uno con otro mientras la Sra. V. circula por el salón para conversar con los que trabajan solos y con las parejas, induciendo y haciendo preguntas a aquellos que requieren ayuda.

Los estudiantes nombraron a las dos cajas como "la caja larga y flaca" y "la caja cuadrada", aunque la caja más chica no es un cubo.

Sra. V.- ¡Felicidades! Cada uno tiene dos cajas abiertas. Las utilizaremos en las siguientes lecciones para revelar algunos principios importantes de matemáticas y ciencia. ¿Alguno tiene observaciones?

P.- Ambas cajas son prismas rectangulares, excepto porque carecen de una cara.

R.- Tienen diferentes volúmenes.

T.- No, tienen el mismo volumen. Ambas cajas fueron hechass de piezas de papel exactamente iguales. Tienen que ser iguales.

Sra. V.- Interesante, T. Utilizamos los mismos materiales y seguimos las mismas secuencias de doblado, pero parece que tenemos dos cajas diferentes. ¿Como podemos determinar si los volúmenes son iguales?

B.- Hay que llenar cada caja con arroz, después vaciar el arroz en cilindros graduados para medirlo.

J.- Utilizando una regla para medir el largo, ancho y alto, y sustituir los números obtenidos en la fórmula del volumen.

Sra. V. Tenemos dos métodos. ¿Ambos son correctos?

L.- Medir y usar la fórmula es probablemente más confiable, pero la respuesta sería casi la obtenido utilizando arroz.

Sra. V.- Pueden encontrar arroz en el contenedor en un lado del salón y cilindros graduados en la repisa de atrás. Todos tienen regla. Tienen las herramientas. Ahora averigüemos si las cajas tienen la misma capacidad.

La clase se apresuró con la actividad. La mayoría de los estudiantes utilizaron arroz para medir la capacidad de las cajas de origami mientras otros usaban reglas para medir las dimensiones de cada caja, después aplicaron la fórmula V=l x a x h. La Sra. V. colocó dos tablas en el retroproyector y pidió a H y K, quienes usaron diferentes estrategias, que las llenaran.

Muchos planos de cajas de origami están disponibles. El utilizado en este ejercicio es algunas veces referido como un modelo tradicional, pero otros atribuyen el plano a un doblador italiano, Guiseppe Baggi (Gray y Kasahara 1985) citado por Higginson y Colagan. El Origami tiene un potencial impresionante para traer un amplio rango de ideas matemáticas a la vida diaria. Casi todos los aprendices parecen ganar un sentido de realización cuando logran seguir las instrucciones, o algoritmos, para un modelo dado. Este artefacto construido puede con frecuencia servir como un “objeto para pensar” (Papert 1980) citado por Higginson y Colagan. Quienes se preguntan si el doblado de papel tiene mucho que dar como un vehículo para introducir y explorar el álgebra.

Por último es importante señalar que en general se consideró en general lo descrito en el capítulo para diseñar, experimentar o analizar los resultados de la propuesta didáctica. Sin embargo a continuación se presentan ejemplos de ciertos temas tomados en cuenta en la propuesta.

Se consideró los estadios de desarrollo y el álgebra, pues la posibilidad de reconocer los estadios generales del desarrollo intelectual, representado cada uno de ellos por un modo característico de razonamiento y por unas tareas específicas de matemáticas que los alumnos son capaces de hacer, constituyó una información valiosa para diseñar la propuesta de aprendizaje y permitió conocer el nivel de respuestas de los alumnos.

La distinción de los usos que los estudiantes dan a las letras en álgebra, descubiertos por Kucheman (1978, 1981) citado por Kieran (2004) permitió ubicar a los alumnos en ciertos niveles de interpretación según sus respuestas a las actividades planteadas. Pues Kucheman siguiendo principios piagetanos, asoció esos roles de las literales a diferentes estadios del desarrollo intelectual de los estudiantes, y propuso que la noción de variable sólo puede ser comprendida cuando los estudiantes alcanzan el estadio de las operaciones formales. De acuerdo con esto, las nociones para las letras como objetos y cómo números generalizados deben preceder la noción de variable.

El uso inapropiado de "fórmulas" o "reglas de procedimientos" se tomaron en cuenta ya que algunos errores se deben a que los alumnos usan inadecuadamente una fórmula o regla conocida que han extraído de un prototipo o libro de texto y que usan tal cual la conocen o la adaptan incorrectamente a una situación nueva.

La mayoría de estos errores se originan como falsas generalizaciones sobre operadores o sobre números. Para Socas (1996) la linealidad es bastante natural en muchos alumnos, por tal situación se analizaron ciertos errores con el fin de que la propuesta no los propicie, por ejemplo:

- Errores relativos al mal uso de la propiedad distributiva

Una aplicación incorrecta de la misma	$a*(b+c)=a*b+c$
con mucha frecuencia encontramos	$(a+b)^2=a^2+b^2$

Por lo anterior es muy importante resaltar en la propuesta cuándo y con respecto a quien se verifica la propiedad distributiva.

Respecto al tema del hábito y la operación se considera que si el alumno no halla sentido alguno a las palabras que recita, el enunciado verbal de una regla es en tal caso un fenómeno puramente *sensoriomotor* que implica exclusivamente la motricidad de los órganos vocales y la percepción auditiva, tal situación es considerada en el diseño de la propuesta didáctica.

La propuesta no pide al alumno la memorización verbal ni que aprenda mecánicamente determinado procedimiento, pues para Aebli "los hábitos relativos al manejo de los símbolos constituyen conductas estereotipadas y rígidas. Donde su desarrollo correcto depende de circunstancias accidentales, de manera que no puede aplicarse sino a un reducido número de situaciones escolares”.

En cuanto al tema de principios generales para la experimentación de la propuesta se considera en primer instancia el álgebra, entendida como el desarrollo de habilidades para manipular letras y otros símbolos que pueden significar cosas diferentes, y también como construcción de operaciones, expresiones o entidades abstractas a través de relaciones bien definidas. La propuesta no olvida este conjunto de apreciaciones, para intentar minimizar las dificultades de la enseñanza-aprendizaje del álgebra en la escuela a continuación se señalan ciertos principios tomados en cuenta:

- Un determinado grado de automatización en las operaciones básicas en un estadio es un prerrequisito para el desarrollo en el estadio siguiente. Es decir, el progreso hacia el razonamiento de las operaciones formales, dependerá de que los alumnos hayan automatizado las operaciones básicas del último estadio concreto.
- No introducir nuevas ideas o técnicas algebraicas demasiado rápido. Este debería ser uno de los principios fundamentales de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas; ignorarlo supone, sin lugar a dudas, crear dificultades en el aprendizaje.
- Evitar la complejidad notacional innecesaria
- Favorecer la comprensión algebraica en términos de traducción de lenguajes. El uso de más de un lenguaje para representar un concepto favorece la abstracción del concepto, ya que tenemos más puntos de referencia y permiten establecer así más relaciones. En este sentido la traducción considera los cuatro lenguajes básicos, aritméticos, habituales, geométricos y algebraicos.

En pocas palabras se considera que el retrasar las técnicas formales por procedimientos más informales hasta que los procesos sean identificables en varios contextos, es posible que permita avanzar hacia la abstracción y simbolización. Sin embargo en la introducción de métodos formales se debe tener claro, antes que nada la necesidad de tales procedimientos. Por lo que se requiere que el profesor, de una parte, reconozca que los estudiantes puedan tener un método informal para una determinada clase de problemas y que el valor de este método informal para solucionar problemas sencillos sea reconocida y discutida, y de otra que las limitaciones del método sean consideradas por el procedimiento de intentar usarlo para resolver un problema del mismo tipo, pero más difícil. De esta manera se sugiere a los alumnos la necesidad de un procedimiento más general, esto es, más formal.

Capitulo 3

Experimentación de la propuesta

En mi experiencia como profesora de matemáticas me he dado cuenta que en muchas ocasiones les pedimos a los estudiantes que se aprendan unas reglas, pero no le damos la oportunidad de crearlas. Regularmente lo que se hace es dar muchas definiciones y una serie de pasos específicos y luego discutir ejemplos. Esto lo que hace es que no se le permita hacer matemáticas, sino mecanizar los procesos sin aprender los conceptos matemáticos. Cuando el alumno crea sus reglas de forma inductiva, son suyas para siempre, no se olvidan porque siempre puede reconstruirlas.

El propósito de esta propuesta es que el alumno cree sus propias reglas de productos notables y factorización y que las pueda validar para que las haga suyas. La propuesta contiene 12 sesiones para llevarse a cabo con figuras geométricas. La propuesta pretende apoyar el aprendizaje de los productos notables y la factorización, se elaboró teniendo como principal marco teórico de referencia el desarrollo histórico del álgebra, parece fundamental fijarnos en el trabajo de los griegos, que nos permite descubrir estrechas relaciones con el álgebra. Los griegos, desarrollaron métodos geométricos para resolverlas y comprobar diversas propiedades.

En el libro II de los *Elementos*, de Euclides (300 a. de C.), hay 14 proposiciones que permiten resolver problemas algebraicos, Socas (1996). Actualmente, nuestra álgebra simbólica los resolvería rápidamente, pero el valor didáctico de la geometría es importante. Complementan el referente teórico, Radford, Jean Piaget, Hans Aebli y otros.

La propuesta es teórica, sin embargo, en ella se recupera gran parte de la experiencia docente de quien ha elaborado y aplicado la propuesta.

3.1 Descripción del contenido de la propuesta didáctica y sus diferentes fases

3.1.1 Primera sesión: Concepto de perímetro y área

Espacio didáctico en donde facilitador (a)[11] y alumno conversan en torno al contenido y los objetivos del estudio, tiene además el propósito de que la facilitadora se de cuenta de los conocimientos previos que tienen los alumnos. Los estudiantes realizan en esta sesión actividades relacionadas con el tema.

En correspondencia con lo anterior, el alumno participa en actividades que permitan la facilitadora sondear sobre los conocimientos de los alumnos y a éstos obtener conocimiento acerca del significado y la finalidad del estudio del nuevo tema: productos notables y factorización.

Esta sesión se diseñó para ser desarrollada en una clase de 60 minutos, en la cual se plantea la realización de un sondeo relativo a los conocimientos que poseen los alumnos de los antecedentes necesarios para el tema.

En términos del conocimiento matemático los antecedentes necesarios para el desarrollo del tema que se estudia en la propuesta son las siguientes definiciones:

- Perímetro
- Área
- Circunferencia
- Círculo
- Unidades de medición del perímetro
- Unidades de medición del área

La primera actividad deberá ser conducida por la facilitadora en términos un tanto informales, como diálogo, durante el cual les pregunté a los alumnos en lo individual, cuestionando sus respuestas, articulándolas con las de otros, buscando que las profundicen. Es un ejercicio de actualización de conocimientos previos durante el cual y trabajando grupalmente, los conocimientos se confrontan y se complementan. La actividad no tiene que ser exhaustiva ya que en la segunda

[11] Colocar al profesor o maestro como facilitador(a) del aprendizaje implica asignarle un papel mucho más complejo del que lo concibe como transmisor de conocimientos.
Según el Modelo de la Educación Media Superior Tecnológica (2004), por ello los profesores deben:

- Poseer una formación académica, docente, tecnológica y cultural acorde con la función educativa que desempeña.
- Tener disposición para el trabajo colaborativo e interdisciplinario, y ser abiertos a la critica
- Apreciar su trabajo docente y proyectar actitudes positivas en sus alumnos
- Despertar en los estudiantes el interés, la motivación y el gusto por aprender, y estimular la curiosidad, la creatividad y el pensamiento complejo, etc.

actividad se realiza un ejercicio similar pero con mayor formalismo. La segunda actividad de la clase tiene el propósito de ilustrar ante el grupo un ejemplo en los términos definidos en la actividad anterior.

El material requerido por los alumnos es una copia del problema y una regla graduada. La proposición que se utiliza para el ejercicio es:

¿Que cantidad es necesaria?

1. Para fabricar un papalote diseñado sobre un plano como se muestra en la figura se requiere saber:
La cantidad de carrizo necesaria para la estructura.
La cantidad de hilo para los contornos sin considerar los amarrones.
La cantidad de papel para la cara plana del papalote.

La siguiente secuencia ilustra una posibilidad para el desarrollo del ejercicio:

1. La facilitadora plantea el problema dentro de un contexto motivador, tratando de captar la atención y el interés:
¿Que cantidad es necesaria?
2. La facilitadora hace la siguiente indicación al grupo: "Mediante su regla graduada, indiquen la cantidad de carrizo necesario".
3. La facilitadora indica al grupo, después de algún tiempo de espera: "Ahora indiquen la cantidad de hilo.
4. Después de un cierto lapso la facilitadora indica al grupo "indique el área de la cara plana del papalote".
5. Dialoga la facilitadora con el grupo orientando la atención: Hacia cómo calcular la cantidad de área.
6. Al grupo la facilitadora le indica que: "Entonces, para resolver el problema bastaría saber cuánto mide de área de cada uno de los triángulos.
7. Pregunta al grupo: "Cuánto mide".
8. Si hay una respuesta correcta, se cuestiona ésta para establecer en el diálogo la propiedad y entonces concluir el problema. Se da por terminada la actividad.
9. Si no se produce ninguna respuesta correcta, entonces la facilitadora pregunta: “¿Cómo cálculo el área de un triángulo? ¿Cómo creen ustedes que son los triángulos? ¿Cual es la medida del área de cada triángulo?.
10. Antes de terminar la actividad, se concluye con la definición y unidades de medición del perímetro y área.

Estas líneas dan una idea de cómo proceder.

Nota: En algún momento del desarrollo de la actividad, cuando la facilitadora lo considere pertinente, el alumno deberá ser informado acerca del objetivo de estudiar el tema, el propósito es que éste sepa cuál es el sentido del estudio que inicia. El grupo se divide en equipos de trabajo (se sugiere de cuatro). Es importante que se formen un día antes de iniciar la estrategia a fin de no consumir mayor tiempo. Aunque trabajar en equipo es un recurso valioso en la clase de matemáticas, esto no significa que deban excluirse las actividades individuales o el trabajo colectivo dirigido por el profesor, como sucede en esta primera sesión.

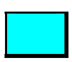
Sesión 1 (1 h)

PROPUESTA DIDÁCTICA PARA EL APRENDIZAJE
DE PRODUCTOS NOTABLES Y DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES
(ALUMNOS DE PRIMER SEMESTRE DE EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR)

Al alumno:

Hoy tendrás la oportunidad de trabajar con piezas geométricas, un manipulativo que te ayudará a descubrir las reglas de productos notables y factorización y entender el porqué de ellas y de esta manera no se te olvidarán. Primero tenemos que aprender a representar números enteros.

Observa que las piezas geométricas tienen dos colores. Por un lado es de color azul claro y si lo volteas es de color azul oscuro. Designaremos a las piezas cuyo lado es azul claro la representación de unidad positiva y al voltearlo, el color azul oscuro representará lo opuesto de la expresión, unidad negativa, es decir por ejemplo:

 1 unidad positiva

 1 unidad negativa

CONCEPTO DE PERÍMETRO Y ÁREA

De forma individual escribe las respuestas a las siguientes preguntas.
¿Qué es "perímetro"? ____
____
¿Qué es "área"? ____
____

Preguntas de reflexión[12] **14:05**
¿Puedes explicar con tus propias palabras lo que escribiste anteriormente?
¿Hay diferencia entre perímetro y área?
¿Qué te ayuda a dar la diferencia?
¿Cómo puedes determinar si tu respuesta es correcta?

En el momento de la reflexión muestra el ejemplo en el pizarrón para que los alumnos comenten tomando en cuenta las preguntas.

Ejemplo[13]: Calcular el perímetro y área de un cuadrado si uno de sus lados mide 4 cm.

P=16
A=16

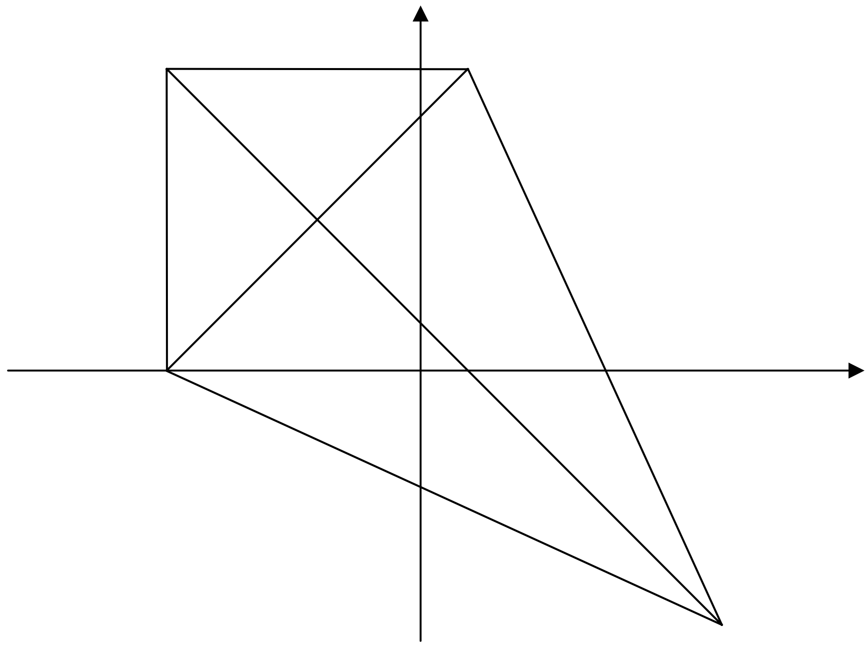
14:10

Dibuja un círculo y una circunferencia[14]

14:30

Problema [15]
¿Que cantidad es necesaria?
1. Para fabricar un papalote diseñado sobre un plano cartesiano como se muestra en la figura se requiere saber:
La cantidad de carrizo necesaria para la estructura. ________________________
La cantidad de hilo para los contornos sin considerar los amarres. __________
La cantidad de papel para la cara plana del papalote. _______________________

[12]En trabajo colectivo dirigido por el facilitador, hace preguntas al grupo para que cada alumno reflexione, comunique y escuche opiniones sobre lo que escribió, no toma el papel de juez (no indica *estás bien* o *estás mal*) trata que el estudiante se dé cuenta de su acierto o error.
[13] Este puede ser un momento idóneo para comunicar el propósito central de la sesión: El alumno identificará la diferencia entre perímetro y área, y sus unidades de medición respectivamente (unidades de longitud y unidades de superficie).
[14]Para un alto porcentaje de alumnos que ingresan a un Cetis y recuerdan, Circunferencia: es el contorno de un círculo, Circulo: es la superficie comprendida dentro de una circunferencia.
[15]El alumno contará con varias figuras triangulares, las cuales ha de manipular y posteriormente construir un papalote con ellas, ha de calcular el perímetro y área de dicha papalote.



<u>Posteriormente:</u> **14:40**

Define con tus propias palabras "perímetro" ___________________________
____
Indica sus unidades de medición______________________________________

Define con tus propias palabras "área"________________________________
____
Indica sus unidades de medición______________________________________

<u>En conclusión</u> **14:50**
Perímetro es ____
y sus unidades de medición son ____________________________________
Área es____
y sus unidades de medición son ____________________________________

3.1.2 Segunda sesión: Multiplicación de polinomios

En ella el estudiante realiza actividades que involucran relaciones del conocimiento que se está formando (producto). Estas actividades se efectúan sobre materiales que la facilitadora estructura cuidadosamente, material diseñado para obtener respuestas específicas y de esta manera los alumnos penetran gradualmente el tema de estudio.

Esta sesión se desarrolla sobre las bases de un conjunto de actividades diseñadas para conducir al alumno de forma inductiva (partiendo de ejemplos) de algunos hechos algebraicos. En este primer acercamiento al estudio del tema, y en congruencia con el enfoque teórico, la idea no es llegar hasta la creación de reglas, sino tan sólo se pretende que estos razonamientos queden comprendidos en lo general por los estudiantes y puedan referirse a ellos en términos meramente verbales.

La sesión está organizada para ser desarrollada en una sesión de 60 minutos, para la cual se han diseñado cuatro actividades como apoyo a los estudiantes, estas actividades definen el sentido y orientación de la sesión.

Las actividades se pueden agrupar en dos tipos:

- Formada por la actividad *A* y corresponde al establecimiento y actualización de la representación geométrica del producto de monomio por monomio.
- Formado por las actividades *B*, *C*, y *D*, y corresponde al establecimiento y actualización de la propiedad distributiva y simplificación de términos semejantes, son ejercicios de dificultad media por los requerimientos que solicita de los alumnos.

Sesión 2 (1 h)

MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS

14:00

De forma individual escribe las respuestas a las siguientes preguntas.
¿Qué representa geométricamente el producto de un monomio por un monomio?
____
¿Qué representa geométricamente el producto de un monomio por un binomio?
____

¿Puedes explicar con tus propias palabras lo anterior?
¿Lo que has escrito es correcto?
¿Cómo puedes determinar si tu respuesta es correcta?

Problema[16]

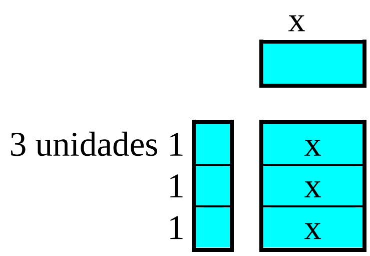
¿Cómo se representa el producto de monomio por polinomio y binomio por polinomio mediante una figura geométrica?

14:05

Parte A. Monomio por monomio

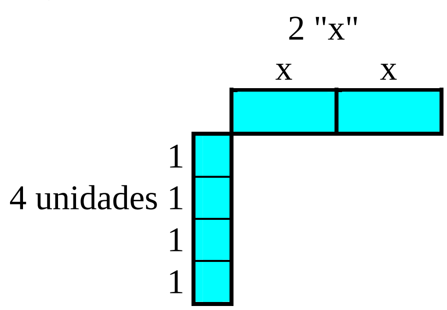
Ejemplo 1: Multipliquemos 3(x)

La forma de verlo es formando un rectángulo cuyas dimensiones sean 3 y x. Veamos la ilustración a continuación.

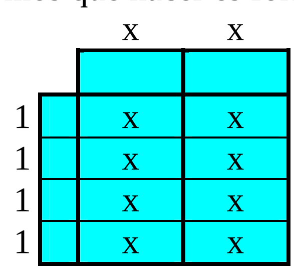


El rectángulo que se forma es 3x. De igual formas podemos hacer otros ejercicios similares.

Ejemplo 2: 4(2x). Recuerda que vas a formar un rectángulo donde sus dimensiones son 4y 2x.



Ahora lo que tenemos que hacer es formar el rectángulo en la parte interior.



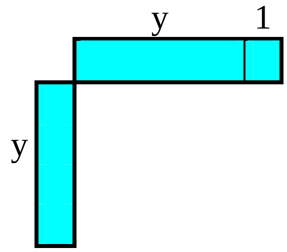
Por lo tanto 4(2x)=8x **14:15**

---

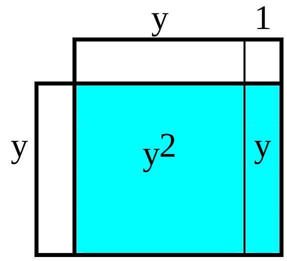
[16] Propósito central de la sesión: El alumno identificará la representación geométrica del producto de un monomio por un polinomio y binomio por polinomio. El alumno creará la regla para multiplicar un monomio por un polinomio y binomio por polinomio.

Parte B. Monomio por binomio

Ejemplo 3: y(y+1) Primero formamos los lados del rectángulo.



Ahora formemos el rectángulo en la parte interior. Finalmente tenemos lo siguiente:



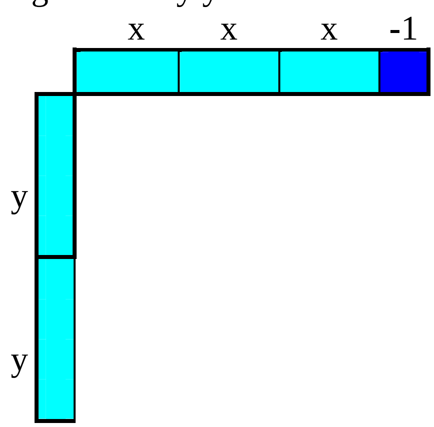
Así que $y(y+1)=y^2+y$

¿Qué propiedad se ilustra en el ejercicio anterior? ____________________

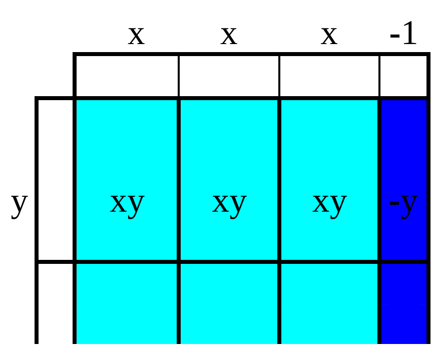
14:20

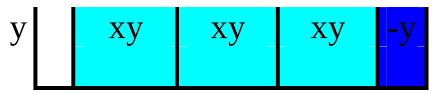
Ejemplo 4: 2y(3x-1)

Los lados del rectángulo son 2y y 3x-1



Ahora debemos formar un rectángulo en la parte interior. Así que tenemos lo siguiente:



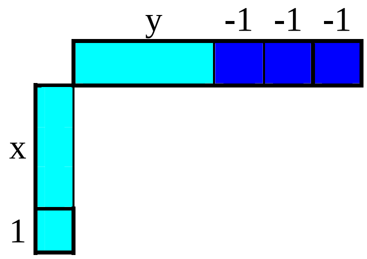


Finalmente, 2y(3x-1)= 6xy-2y

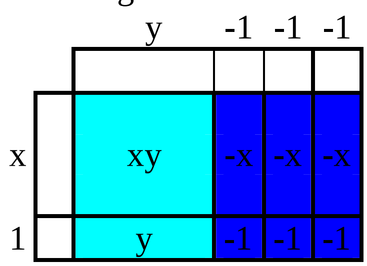
¿Qué propiedad se ilustra en el ejercicio anterior? ___________________ **14:25**

Parte C: Binomio por binomio

Ejemplo 5: Obtén el producto (x+1)(y-3). Recuerda que vamos a crear los lados de un rectángulo.



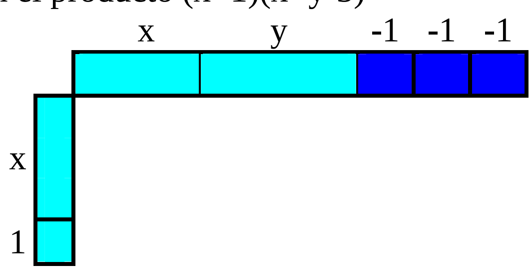
Luego formamos el rectángulo.



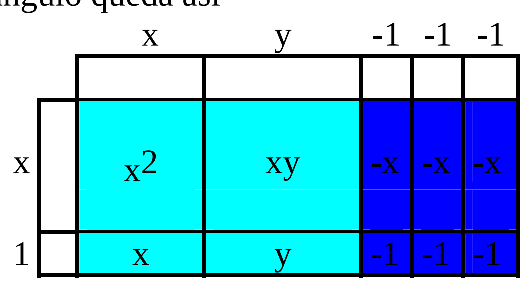
Al formar el rectángulo tenemos xy-3x+y-3 **14:30**

Parte D. Binomio por trinomio

Ejemplo 6: Obtén el producto (x+1)(x+y-3)



Al formar el rectángulo queda así



Por lo tanto $(x+1)(x+y-3)=x^2+xy-3x+x+y-3$
¿Qué propiedad se ilustra en el ejercicio anterior? ________________________
¿Cuál es el resultado final? ____
Comparte tu respuesta con tus compañeros.

14:35

Ejercicio 1: Obtén el producto $(2x-5)(3y-3)$
Dibuja la representación gráfica en este espacio
¿Cuál es el producto final?

Ejercicio 2: Obtén el producto $(2x+3)(z+2)$
Dibuja la representación gráfica en este espacio
¿Cuál es el producto final?

14:45

<u>En conclusión</u>
¿Qué representa geométricamente el producto de un monomio por un polinomio?
____
¿Qué representa geométricamente el producto de un binomio por un polinomio?
____
¿Cómo llevarías a cabo la multiplicación de un monomio por un polinomio sin necesidad de las piezas geométricas? _________________________________
____
¿Cómo llevarías a cabo la multiplicación de un y binomio por polinomio sin la necesidad de las piezas geométricas? _________________________________
____

Miscelánea:
A. Utiliza las piezas geométricas para obtener el producto de:
1. $5x(3y-2)$
2. $2x(3x-2y+5)$
3. $(x+5)(y-2)$
3. $(2x+2)(2x+y+4)$

B. Sin utilizar las piezas obtén el producto:
1. $3a(2a+3b+4c+5d)$
2 $(x+3)(y-4)$
3. $(x-3)(x+y-5)$

3.1.3 Tercera a séptima sesión: Productos de la forma *(x+a)(x+b), (ax+b)(cx+d), (a+b)(a-b), (x+a)(x+a)* y concepto del TCP.

En éstas el estudiante llega a ser consciente de las relaciones involucradas en el tema de estudio (producto notable), en la que expresa con sus propias palabras y aprende el lenguaje técnico propio del objeto de estudio. La letra es vista como representante o por lo menos con la posibilidad de serlo, de varios valores y no sólo de uno (Kucheman, 1978,1981) citado por Kieran (2004); éstas son sesiones en las cuales el estudiante expresa e intercambia sus ideas sobre las estructuras y procedimientos que han sido observados.

En estas sesiones el estudiante avanza en su aprendizaje realizando tareas más complejas. El progreso hacia el razonamiento de las operaciones formales, dependerá de que los alumnos hayan automatizado las operaciones básicas del último estadio concreto (Socas, 1996). El alumno aprenderá a encontrar su propio camino, adquiriendo experiencia al dar solución a sus tareas.

Sesión 3(1 h)
14:00

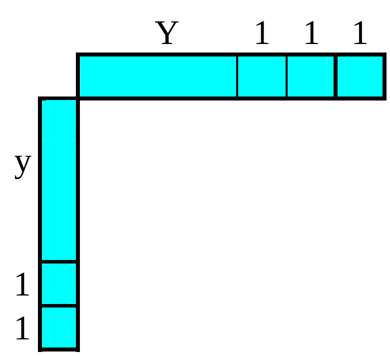
***PRODUCTOS DE LA FORMA* (x+a)(x+b)**

Propósito central de la sesión: El alumno identificará y creará la regla para el producto de la forma **(x+a)(x+b)** .

En la lección anterior el alumno aprendió cómo multiplicar polinomios. En ésta observará que el producto de **(x+a)(x+b)** se puede obtener de una forma más sencilla, ya que el proceso para resolverlo responde a un mecanismo en particular. Analizando algunos ejemplos.

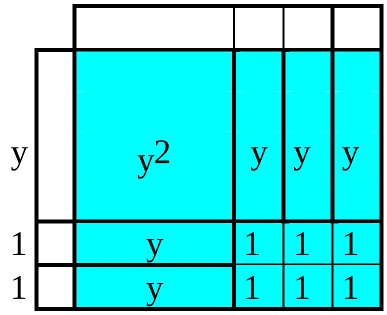
14:05

Ejemplo 1: Obtén el producto (y+2)(y+3). Recuerda que vamos a crear los lados de un rectángulo.



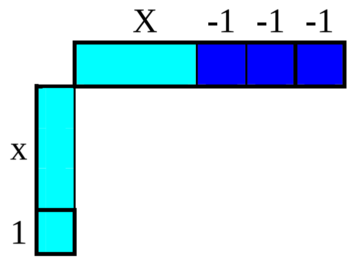
Luego formamos el rectángulo.

y 1 1 1

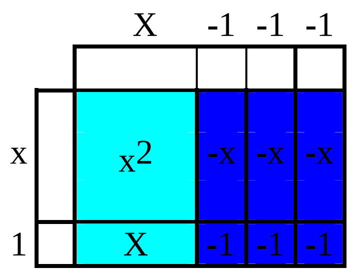


Al formar el rectángulo tenemos $y^2+3y+2y+6$
¿Cuál es el producto final? ________________________________
Comparte tu respuesta con tus compañeros

Ejemplo 2: Obtén el producto (x+1)(x-3). Recuerda que vamos a crear los lados de un rectángulo.



Luego formamos el rectángulo.



Al formar el rectángulo tenemos $x^2-3x+x-3$
¿Cuál es el producto final? ________________________________
Comparte tu respuesta con tus compañeros

14:15

Ejemplo 3: Obtén el producto (x+2)(x+5) ¿puedes multiplicar sin necesidad de las piezas geométricas? Inténtalo
¿Cuál es el producto final? ________________________________
Ejemplo 4: Obtén el producto (z+2)(z-4) sin utilizar las piezas.
¿Cuál es el producto final? ________________________________

14:30

Observa los ejemplos anteriores que trabajaste y determina cómo obtener los siguientes productos sin utilizar las piezas.

$(x+1)(x+2)$
$(y+4)(y-2)$
$(z+1)(z-5)$

14:45

<u>Conclusión</u>

Enumera los pasos que seguiste al determinar el producto de binomios de la forma $(x+a)(x+b)$

____
____
____

Sesión 4 (1 h)

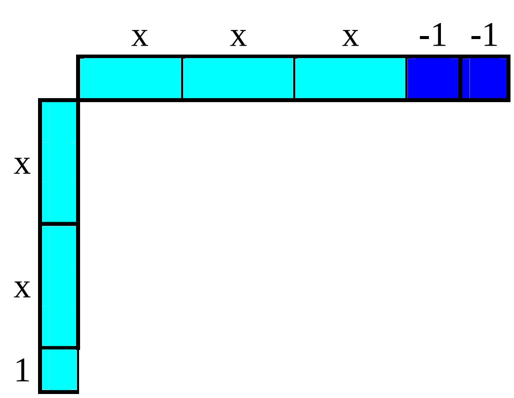
PRODUCTOS DE LA FORMA
(ax+b)(cx+d)

Propósito central de la sesión: El alumno identificará y creará la regla para el producto de **(ax+b)(cx+d)**.

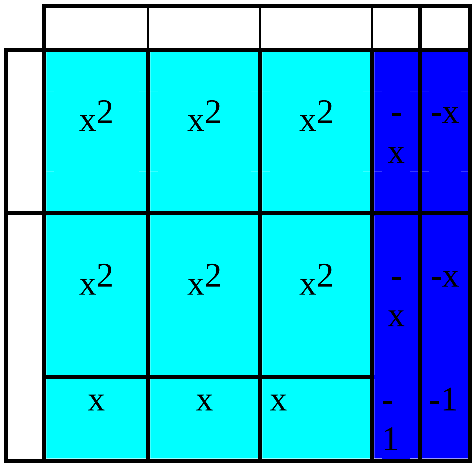
En ésta sesión observaras que el producto de la forma **(ax+b)(cx+d)** se puede llevar a cabo de una forma más sencilla, ya que el proceso para resolverlo responde a un mecanismo en particular. Analizando algunos ejemplos.

14:05

.**Ejemplo 1:** Hagamos otro ejemplo de binomio por binomio $(2x+1)(3x-2)$. Formemos los lados del rectángulo.

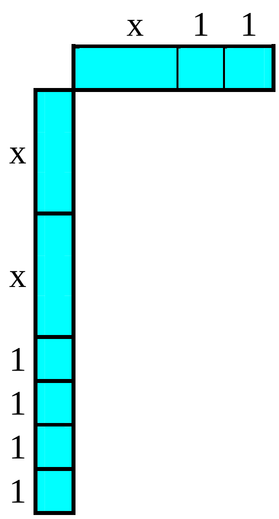


El resultado final se ve así

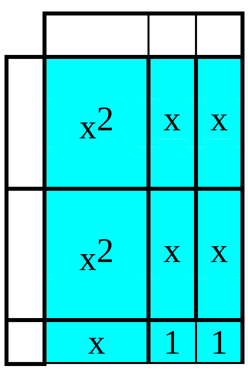


Algebraicamente: $6x^2-4x+3x-2$
¿Cuál es el producto final? _______________

Ejemplo 2: Obtén el producto (2x+4)(x+2). Formemos los lados del rectángulo.



El resultado final se ve así



	x	1	1
	x	1	1
	x	1	1

Algebraicamente: $2x^2+4x+4x+8$
¿Cuál es el producto final? _______________

14:15

Ejercicio 1: Obtén el producto (2y-5)(3y-3)
Dibuja la representación gráfica en este espacio
¿Cuál es el producto final?
Ejercicio 2: Obtén el producto (2x+3)(x+2)
Dibuja la representación gráfica en este espacio
¿Cuál es el producto final?
Ejercicio 3: Obtén el producto (3x+2)(x+1)
Dibuja la representación gráfica en este espacio
¿Cuál es el producto final?

14:30

Observa los ejemplos anteriores que trabajaste y determina cómo obtener los siguientes productos sin utilizar las piezas.

(2x+1)(4x+2)
(y+4)(2y-2)
(2z+1)(z-5)

14:45

Conclusión

Enumera los pasos que seguiste al determinar el producto de binomios de la forma (ax+b)(cx+d).

____
_
____
_
____
_

Sesión 5 (1 h)

PRODUCTOS DE LA FORMA
(a+b)(a-b)

¿Qué nombre recibe un producto de la forma (a+b)(a-b)?

____
_

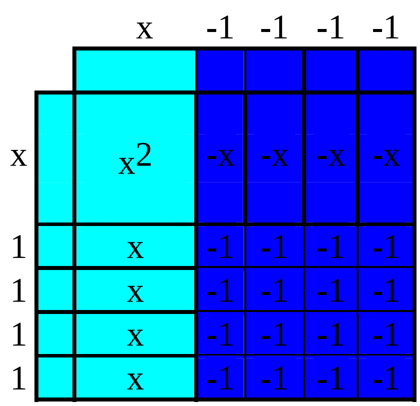
¿Qué representa geométricamente un producto de la forma (a+b)(a-b)?

____
_

Propósito central de la sesión: El alumno identificará y creará la regla para el producto de la forma **(a+b)(a-b)**.

14:10

Ejemplo 1: Halla el producto (x+4)(x-4)
Recuerda que lo primero que debemos hacer es un rectángulo cuyas dimensiones sean (x+4) y (x-4), es decir:

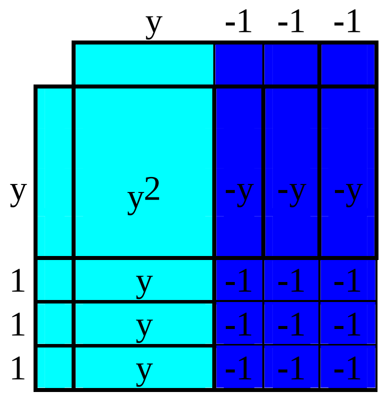


Observa que se neutralizan las expresiones 4x y -4x, por lo tanto lo que nos queda es:
x^2-16
Para llevar acabo la multiplicación sin utilizar las piezas, recuerda que multiplicamos cada término del primer binomio por los del segundo, es decir:

$$(x+4)(x-4)=x^2+4x-4x-16$$

Al simplificar, observa que los términos del medio se anulan y por lo tanto, el resultado es: x^2-16

Ejemplo 2: Halla el producto de (y+3)(y-3)
Represéntalo utilizando las piezas.
Debiste haber obtenido lo siguiente:



Simplifica la expresión.

Observa que tenemos la expresión $y^2+3y-3y-9$, los términos 3y y -3y se anulan, por lo tanto el resultado que obtienes es: y^2-9.

14:25

Ejercicios: Efectúa la multiplicación con las piezas y luego haz el proceso algebraico.

$(2x+1)(2x-1)=$

$(y+5)(y-5)=$

$(3x+2)(3x-2)=$

14:40

<u>Conclusión</u>

Enumera los pasos que seguiste al determinar el producto de la suma de dos términos por la diferencia de los mismos (binomios conjugados).

____

____

____

¿Que nombre recibe el producto de dos binomios conjugados? _________________

____

Sesión 6(1h)

CONCEPTO DEL TRINOMIO CUADRADO PERFECTO "PERIMETRO Y ÁREA"

¿Qué es un Trinomio Cuadrado Perfecto (TCP)? ________________________

____

¿Qué representa geométricamente un TCP[17]? ___________________________

____

¿Puedes explicar con tus propias palabras cada definición?
¿Qué materiales te ayudan para dichas definiciones?
¿Lo que has escrito es correcto?
¿Cómo puedes determinar si tu respuesta es correcta?

14:05

Propósito central de la sesión: El alumno identificará la representación geométrica de un TCP. El alumno creará la regla de multiplicación de un binomio al cuadrado.

Antes de empezar cabe recordar la "*Diferencia entre suma y producto*", analizaremos algunos ejemplos, utilizando el concepto de multiplicación y su diferencia respecto a la suma.

Suma:

1 metro + 1 metro = 2 metros
_____ _____ = 2 metros

Coeficiente: uno **más** uno igual a dos
Literales: metros **más** metros igual a metros
Los coeficientes se **suman** y la literal queda igual.

Multiplicación:
1 metro * 1 metro = 1 metro cuadrado

$\boxed{1\ m^2}$

Área

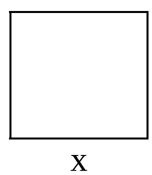
***Coeficiente*:** uno **por** uno igual a uno
Literales: metro **por** metro igual a metros cuadrados
Los coeficientes **se multiplican** y los exponentes de las literales se suman.

[17] Grupo Azarquiel. (1993)

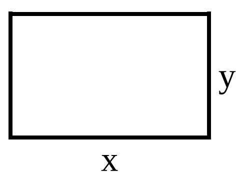
Problema .
¿Que representa un binomio al cuadrado? y ¿por que al ser desarrollado se le llama Trinomio Cuadrado Perfecto?

Se considera, en primera instancia, que la forma de un cuadrado como lugar geométrico tiene su representación simbólica (formal) además de su representación concreta.

Instrucciones: Observa bien cada figura e indica lo que se pide respectivamente



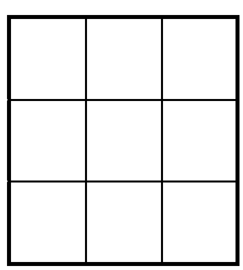
¿Cuánto mide cada lado del cuadrado? _________________
¿Cuánto mide su perímetro?__________________________
¿Cuánto mide su área?_______________________________



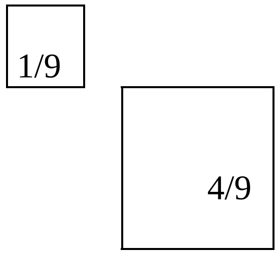
¿Cuánto mide cada lado del rectángulo? __________________
¿Cuánto mide su perímetro? ___________________________
¿Cuánto mide su área?_________________________________

Instrucciones: A partir de una hoja de papel bond tamaño carta realiza lo siguiente:

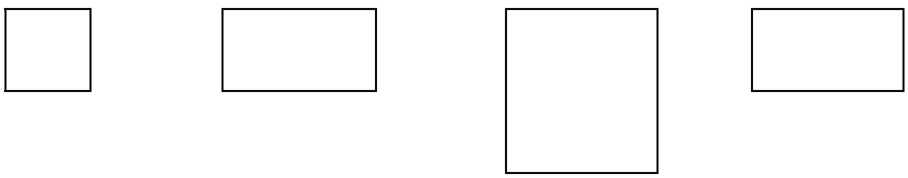
1. Construye un cuadrado
2. Dobla en tres partes formando tres rectángulos iguales
3. Vuelve a doblar en tres partes formando tres cuadrados iguales
4. Desdobla



5. Recorta dos cuadrados de diferente tamaño uno de 1/9 y otro de 4/9 de dicho cuadrado, como se indica en la figura.



Instrucciones: Con las cuatro piezas construye varias figuras geométricas



¿Podrías calcular el perímetro de cada figura construida? ______________________
¿Por qué? ____

¿Podrías calcular el área de cada figura construida? ____________________________
¿Por qué? ____
Instrucciones: Al reconstruir el cuadrado original contesta lo siguiente
¿Cuánto mide cada lado del cuadrado? __________________
¿Cuánto mide su perímetro? ___________________________
¿Cuánto mide su área?________________________________

<u>Conclusión</u>
Suma algebraicamente las áreas del cuadrado y simplifica a su mínima expresión. ____
_
¿Cómo se llama la expresión algebraica que se obtuvo? _________________________

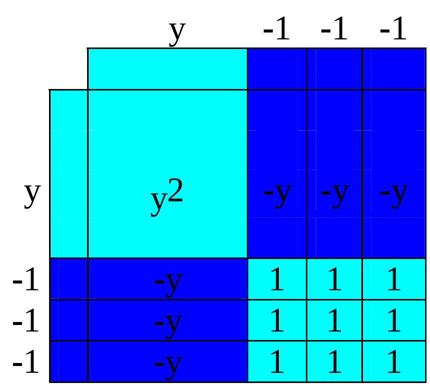
Miscelánea
1. Diseña de forma análoga un material concreto pero ahora para el binomio cúbico

Sesión 7(1h)

PRODUCTOS DE LA FORMA
$(x \pm a)(x \pm a)$

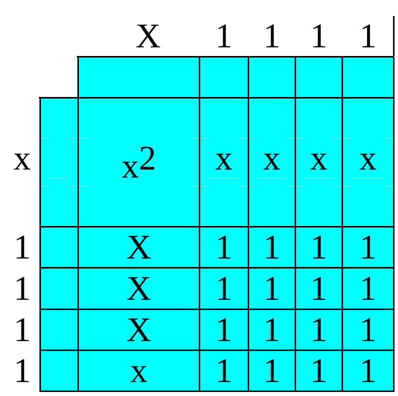
Propósito central de la sesión: El alumno identificará y creará la regla para el producto de **$(x \pm a)(x \pm a)$**

Ejemplo 1: Desarrolla $(y-3)^2$
Recuerda que $(y-3)^2=(y-3)(y-3)$
Utilizando las piezas, la representación es:



Por lo tanto el resultado es y^2-6y+9.
Repite el proceso sin utilizar los bloques. Observarás que tienes:
$y^2-3y-3y+9= y^2-6y+9$.

Ejemplo 2: Desarrolla $(x+4)^2$
Recuerda que $(x+4)^2=(x+4)(x+4)$
Utilizando las piezas, la representación es:



Por lo tanto el resultado es $x^2+4x+4x+16$.

Repite el proceso sin utilizar las piezas. Observarás que tienes:
$x^2+4x+4x+16= x^2+8x+16$

Ejemplo 3: Halla el producto (x+5)(x+5) ¿puedes hallar el producto sin necesidad de las piezas geométricas? inténtalo
¿Cuál es el producto final? ______________________

Ejemplo 4: Halla el producto (z-2)(z-2) sin utilizar las piezas.
¿Cuál es el producto final? ______________________

14:30

¿Cómo llevarías a cabo el producto de dos binomios sin necesidad de efectuar todos los pasos? ____

Observa los ejemplos anteriores que trabajaste y determina cómo obtener los siguientes productos sin utilizar las piezas.

(x+1)(x+1)=
(y-2)(y-2)=
(z+3)(z+3)=

14:45

Conclusión

Enumera los pasos que seguiste al determinar el producto de dos binomios de la forma $(a\pm b)\ (a\pm b)$.

____
_
____
_

3.1.4 Octava sesión: Factorización

En la octava sesión el estudiante resume lo que ha aprendido sobre el objeto de estudio, realiza la revisión del nuevo conocimiento (productos notables) de que ahora dispone para acceder a otro conocimiento **(factorización)**.

No introducir o establecer la notación formal antes de que una idea o técnica algebraica haya sido asimilada por los alumnos es un principio que minimiza las dificultades de la enseñanza-aprendizaje del álgebra (Socas, 1996). Es decir que los alumnos al asimilar el tema de productos notables, las dificultades de aprendizaje para el tema de factorización son mínimas.

El alumno participa en un ejercicio de articulación de los conocimientos adquiridos, y continúa el proceso de desarrollo de las capacidades que el conocimiento del tema propicia. Las estrategias didácticas para resolver ecuaciones de segundo grado que proponen generalmente los textos de matemáticas se limita a la fórmula general, no dan cabida a una interpretación geométrica (Radford, 1995). En esta sesión y en otras subsiguientes se tratará el proceso inverso al producto notable, el cual se le conoce como factorización.

La sesión está organizada para ser desarrollada en una sesión de 60 minutos, para la cual se han diseñado dos actividades como apoyo a los estudiantes, estas actividades definen el sentido y orientación de la sesión.

Las actividades se pueden agrupar en dos tipos:

- Formada por la actividad 1 y corresponde al establecimiento y actualización de la representación geométrica de la factorización.
- Formada por la actividad 2, y corresponde al establecimiento de la irreversibilidad del producto y de la propiedad distributiva.

En la primera actividad el alumno involucra relaciones del conocimiento que se está formando. Esta actividad se efectúa sobre materiales que la facilitadora estructura para obtener respuestas específicas y de esta manera el alumno penetra al tema de estudio.

La segunda actividad se desarrolla sobre las bases de un conjunto de actividades diseñadas para conducir al alumno de forma inductiva. En este acercamiento del tema, la idea es llegar hasta la creación de la regla de factorización, es decir, se pretende que estos razonamientos queden comprendidos.

Sesión 8 (1 h)

FACTORIZACIÓN

¿Qué es factorización? ____
____
_

¿Qué representa geométricamente la factorización? _______________________
____
_

¿Puedes explicar con tus propias palabras cada definición?
¿Hay diferencia entre perímetro y área?

Propósito central de la sesión: El alumno identificará la representación geométrica de la factorización[18]

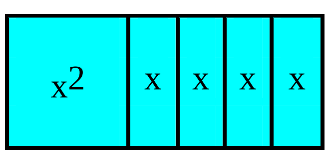
Problema
¿La factorización presenta el carácter reversible del producto notable?

Existen diversos procesos para factorizar polinomios. En esta lección trabajaremos con uno de ellos:

14:10

FACTOR COMÚN

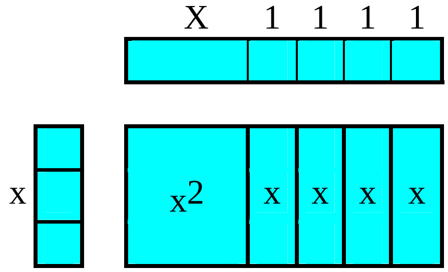
Ejemplo 1: Factoriza el polinomio x^2+4x
Construye un rectángulo utilizando x^2 y 4 piezas de x.
La representación con las piezas es de la siguiente forma:



La tarea básica en este tipo de ejercicio es determinar las dimensiones del rectángulo que formaste. En este caso observa que las mismas son:

[18] En lecciones anteriores el alumno aprendió a multiplicar polinomios, es decir, expresó el producto como una suma o resta. En esta lección y en otras subsiguientes que tratan sobre este tema, llevará el proceso inverso, esto es, expresará una suma o resta como multiplicación. A este proceso se le conoce como factorización.

x y x+4, esto es:

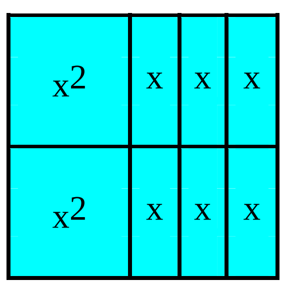


Por lo tanto, $x^2+4x= x(x+4)$
Sin utilizar las piezas, tu tarea será determinar qué factor en común tiene los sumandos, en este caso x^2 y 4x. Observa que el factor es la x, por lo tanto, la factorización del polinomio x^2+4x es $x(x+4)$.

¿Cómo puedes verificar que una factorización hecha es correcta? _______________
____

Ejemplo 2: Factoriza el polinomio $2x^2+6x$.
Construye un rectángulo con dos piezas de x^2 y seis piezas de x.

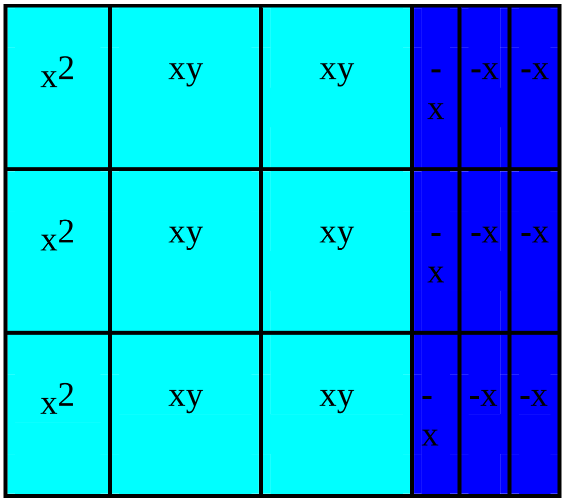
Tu representación debió ser



Las dimensiones del rectángulo son los factores del polinomio, estos son: 2x y x+3. Sin utilizar las piezas, investiga qué factor en común tiene $2x^2$ y 6x. Observa que este factor es 2x, por lo tanto, lo expresas:
$2x^2+6x=2x(x+3)$
Verifica esta respuesta.

Ejemplo 3: Factoriza el polinomio $3x^2+6xy-9x$
¿Qué piezas utilizarías para construir el rectángulo? ____________________________
____

Construyelo.
Tu representación debió ser:



Las dimensiones del rectángulo son: 3x y 2y-3. Sin utilizar las piezas: ¿Qué factor en común tienen ambos sumandos? ____

Observa que es 3x. Por lo tanto, obtienes lo siguiente $3x^2+6xy-9x= 3x(2y-3)$.
Verifica tu respuesta.

14:30

Ejercicio 1: Factoriza sacando un factor en común $7x^2+49x$.
Dibuja la representación gráfica en este espacio.
¿Cuáles son los factores a final?

Ejercicio 2: Factoriza $2y^2-4y+8$.

Ejercicio 3: Factoriza $3x^2+9x+12$.
Dibuja la representación gráfica en este espacio.
¿Cuál es el factor común?

14:40

Observa los ejemplos anteriores que trabajaste y determina cómo multiplicar los siguientes ejercicios sin utilizar las piezas.

$2x^2+10x=$

$4y^2+4y-12y=$

$12z^2-2z=$

4:50

Conclusión
Enumera los pasos que seguiste al determinar el factor común de los polinomios.

____

____

____

3.1.5 Novena a onceava sesión: Factorización de polinomios de la forma x^2+bx+c, ax^2+bx+c, $x^2+2xy+y^2$ y x^2-y^2

En estas sesiones el estudiante llega a ser consciente de las relaciones involucradas en el tema de estudio, al inicio expresa con sus propias palabras y concluye con un lenguaje propio del objeto de estudio. El uso de más de un lenguaje para representar un concepto favorece la abstracción del concepto, ya que tenemos más puntos de referencia y permiten establecer así más relaciones (Socas, 1996).

En las siguientes sesiones el estudiante expresa e intercambia sus ideas sobre las estructuras y procedimientos que han sido observados.

El estudiante avanza en su aprendizaje realizando tareas más complejas, sigue su propio camino, adquiriendo experiencia al dar solución a sus tareas. Retrasar las técnicas formales por procedimientos más informales hasta que los procesos sean identificables en varios contextos, es posible que permitan avanzar hacia la abstracción y simbolización.

La experiencia y la historia dan la importancia de la visualización como “herramienta” fundamental para la comprensión de muchos argumentos y fórmulas algebraicas (Skemp, 1980). No obstante, existen profesores que prefieren comprobar las propiedades para algunos ejemplos, antes que utilizar argumentos geométricos. Como consecuencia de lo anterior, las actividades planteadas a continuación se construyen apoyándose en el lenguaje visual.

El lenguaje visual puede ser utilizado como recurso didáctico de apoyo tanto al lenguaje aritmético como algebraico.

Sesión 9 (1 h)

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS DE LA FORMA x^2+bx+c

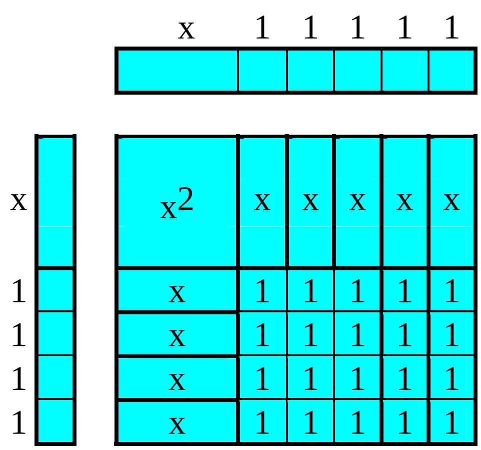
Propósito central de la sesión: El alumno identificará y creará la regla para factorizar polinomios de la forma **x^2+bx+c.**

En la lección anterior el alumno factorizó polinomios por el método del factor común. No obstante, no todos los polinomios se pueden factorizar utilizando este mecanismo. Tomemos como ejemplo el siguiente: $x^2+9x+20$.

14:05

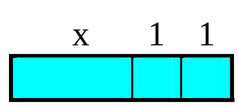
Ejemplo 1: Factoriza el polinomio $x^2+9x+20$.
La forma de factorizar este polinomio es la misma que utilizaste en la lección anterior, esto es, construirás un rectángulo con una pieza x^2, con nueve piezas de x y con veinte unidades. Construye el rectángulo.

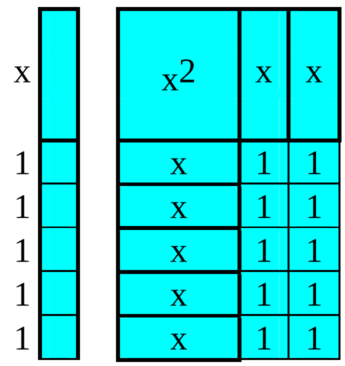
Tu representación debió ser



Si nos fijamos en las dimensiones del rectángulo vemos que los factores de:
$x^2+9x+20$ son (x+4) y (x+5).

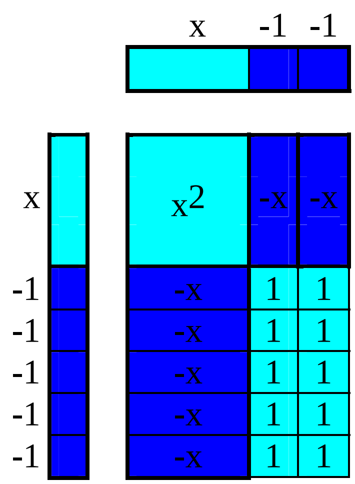
Ejemplo 2: Factoriza el polinomio x^2 +7x+10
Construye el rectángulo con una pieza de x^2, siete piezas de x y 10 unidades. La representación gráfica es:





Observa que las dimensiones del rectángulo son (x+5) y (x+2), por lo tanto, la factorización del polinomio x^2 +7x+10 es (x+5)(x+2).

Ejemplo 3: Factoriza x^2 -7x+10.
Construye el rectángulo con una pieza de x^2, 7 piezas de x negativas y 10 unidades positivas. Debiste construir un rectángulo como el que aparece a continuación:



¿Cuáles son los factores? ______________________

Ejercicio 1: Factoriza x^2-5x+6.
Dibuja la representación gráfica en este espacio.
¿Cuáles son los factores al final?
Ejercicio 2: Factoriza y^2-14y+48.
Dibuja la representación gráfica en este espacio.
¿Cuáles son los factores?
Ejercicio 3: Factoriza x^2-2x-35.
Dibuja la representación gráfica en este espacio únicamente si la necesitas.
¿Cuáles son los factores?

14:40

Observa los ejemplos anteriores que trabajaste y determina cómo factorizar los siguientes polinomios sin utilizar las piezas.

x^2-5x-24=

y^2+6y-7=

z^2+4z-12=

p^2-10p+25=

14:50

Conclusión

Enumera los pasos que seguiste para determinar los factores de los polinomios de la forma x^2+bx+c.

____
_

____
_

____
_

Sesión 10 A (30 min.)

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS DE LA FORMA ax^2+bx+c

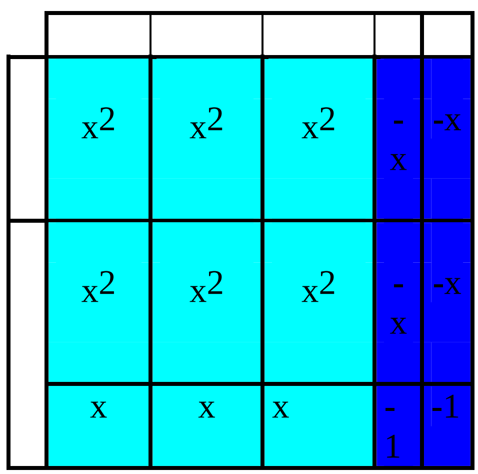
Propósito central de la sesión: El alumno identificará y creará la regla para factorizar polinomios de la forma ax^2**+bx+c.**

En la lección anterior el alumno factorizó polinomios de la forma x^2+bx+c, y estableció la regla. No obstante, hay polinomios donde la variable al cuadrado se acompaña de una constante. Tomemos como ejemplo el siguiente: $6x^2-x-2$, de la sesión 4.

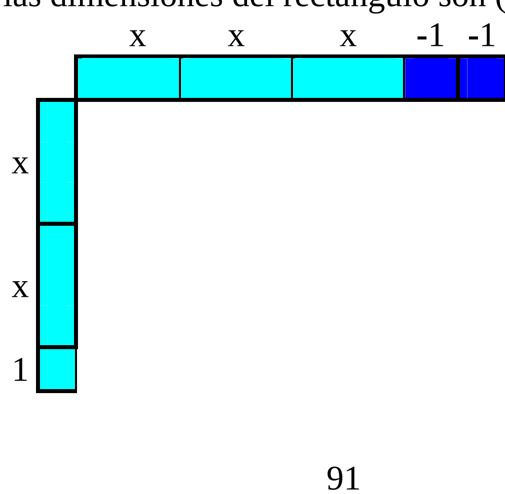
14:05

Ejemplo 1: Factoriza el polinomio $6x^2-x-2$.
La forma de factorizar este polinomio es la misma que utilizaste en la lección anterior, esto es, construirás un rectángulo con una pieza $6x^2$, con una pieza negativa de x y con dos unidades negativas. Construye el rectángulo.

Tu representación debió ser



Si nos fijamos en las dimensiones del rectángulo son (2x+1) y (3x-2).



Por lo tanto el resultado final es $6x^2-x-2= (2x+1)(3x-2)$.

Ejemplo 2: Factoriza el polinomio $2x^2+4x+4x+8$.

Antes de construir el rectángulo, observa el ejemplo 2 de la sesión 4.

Ejercicio 1: Factoriza $6y^2-21y+15$.

Dibuja la representación gráfica en este espacio.

¿Cuáles son los factores a final?

Ejercicio 2: Factoriza $3x^2+5x+2$.

Dibuja la representación gráfica en este espacio.

¿Cuáles son los factores?

14:20

Observa los ejemplos anteriores que trabajaste y determina cómo factorizar el trinomio de la forma ax^2+bx+c sin utilizar las piezas.

14:25

Conclusión

Enumera los pasos que seguiste para determinar los factores de los polinomios de la forma ax^2+bx+c.

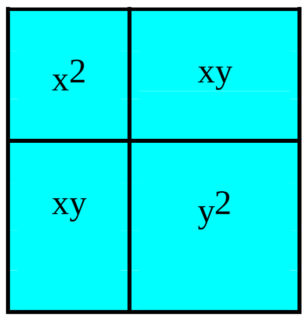
____
____
____

Sesión 10 B (30 min)

FACTORIZACIÓN DEL TCP $x^2+2xy+y^2$

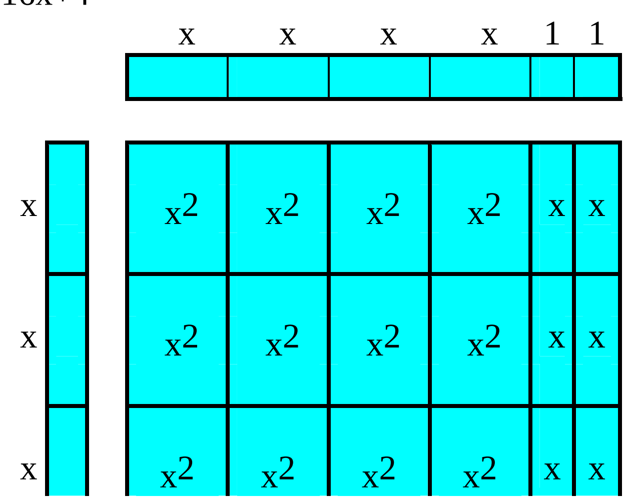
Propósito central de la sesión: El alumno identificará y creará la regla para factorizar Trinomios Cuadrados Perfectos, es decir, de la forma $\mathbf{x^2+2xy+y^2}$.

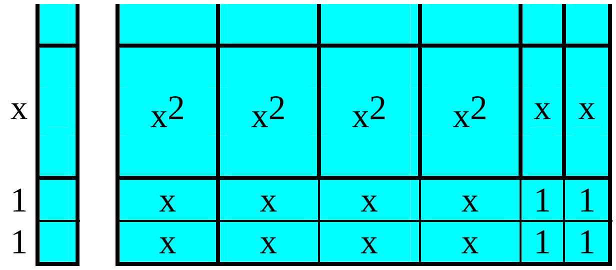
Ejemplo 1: Factoriza el polinomio $x^2+2xy+y^2$. Como hicimos en ejemplos anteriores debemos formar el rectángulo, esto es: Una pieza x^2, dos piezas de xy y una y^2.
Observa las dimensiones. ¿Cuáles son los factores? ______________________
Escribe otra forma de expresar esos factores.
Recuerda que un TCP geométricamente representa un cuadrado.
Tu representación debió ser:



Las dimensiones del cuadrado son los factores del polinomio, esto es: $(x+y)$ y $(x+y)$.
Por lo tanto, la factorización de $x^2+2xy+y^2$, es $(x+y)(x+y)$.
Recuerda que $(x+y)(x+y)=(x+y)^2$.

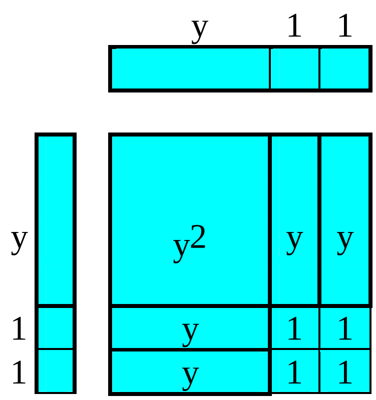
Ejemplo 2: $16x^2+16x+4$





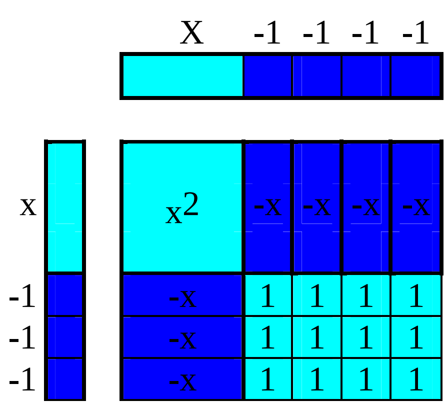
Si nos fijamos en las dimensiones del cuadrado vemos que los factores de $16x^2$+16x+2 son (4x+2) y (4x+2).

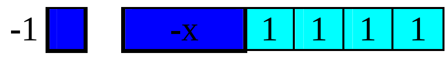
Ejemplo 3: Factoriza el polinomio y^2 +4y+4.
Construye el cuadrado con una pieza de y^2, cuatro piezas de y y 4 unidades. Debiste construir un cuadrado como el que aparece a continuación:



Observa que las dimensiones del cuadrado son (y+2) y (y+2), por lo tanto, la factorización del polinomio y^2 +4y+4 es $(y+2)^2$.

Ejemplo 4: Factoriza x^2 -8x+16.
Construye el rectángulo con una pieza de x^2, siete piezas de x negativas y diez unidades positivas.
Debiste construir un rectángulo como el que aparece a continuación:





¿Cuáles son los factores? ________________________________

Ejercicio 1: Factoriza $4x^2$-12x+9.
Dibuja la representación gráfica en este espacio.
¿Cuáles son los factores al final?

Ejercicio 2: Factoriza $x^2+8xy+16y^2$.
Dibuja la representación gráfica en este espacio.
¿Cuáles son los factores al final?

Ejercicio 3: Factoriza $x^2-14x+49$.
Dibuja la representación gráfica en este espacio únicamente si la necesitas.
¿Cuáles son los factores?

14:50

Observa los ejemplos anteriores que trabajaste y determina cómo factorizar los TCP siguientes sin utilizar las piezas.

$x^2-12x+36=$

$y^2+6y+9=$

$4z^2-12z+9=$

$p^2-18p+81=$

14:55

<u>Conclusión</u>

Enumera los pasos que seguiste para determinar los factores de los Trinomios Cuadrados Perfectos, es decir, de la forma $\mathbf{x^2+2xy+y^2}$.

____

____

____

Sesión 11 (1 h)

FACTORIZACIÓN DE DIFERENCIA DE CUADRADOS
x^2-y^2

Propósito central de la sesión: El alumno identificará y creará la regla para factorizar una diferencia de cuadrados **x^2-y^2**

En la sesión 5 demostramos que al multiplicar la suma de dos términos por su diferencia (binomios conjugados) obtenemos como resultado una diferencia de cuadrados. Ahora investigaremos este proceso; es decir, si tenemos una diferencia de cuadrados, cómo obtener el producto de una suma por su diferencia.

Esto quiere decir que encontraremos el par de factores que originaron la diferencia de cuadrados.

14:05

Ejemplo 1: Factoriza x^2-16.

Recordando el ejemplo 1 de la sesión 5, notamos que al factorizar esta diferencia de cuadrados obtendremos (x+4)(x-4) (binomios conjugados).

Ejemplo 2: Factoriza y^2-9.

Recordando el ejemplo 2 de la sesión 5, notamos que al factorizar esta diferencia de cuadrados obtendremos (y+3)(y-3) (binomios conjugados).

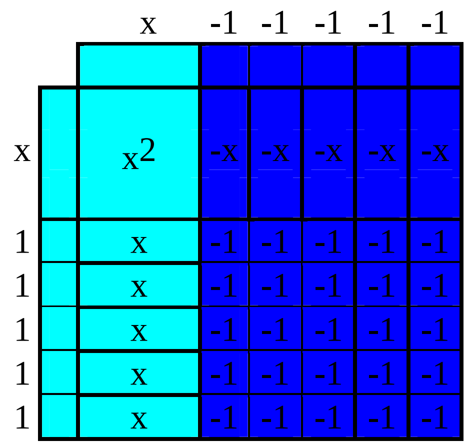
Ejemplo 3: Factoriza y^2-25.

Primero debemos identificar que sea una diferencia de cuadrados.
¿Cómo?
____

Observa con detalle la figura (ejemplo 1, sesión 5) y determina los pasos a seguir para encontrar el binomio conjugado.

____
_
____
_
____
_

Tu representación debió ser

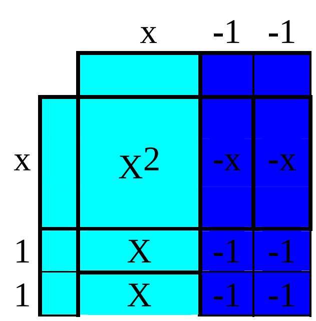


Si nos fijamos en las dimensiones del rectángulo vemos que los factores de x^2-25 son (x+5) y (x-5).

Ejemplo 4: Factoriza x^2 -4.

¿Es una diferencia de cuadrados? ____________________________________
¿Cómo lo sabes?
____
Comparte tu respuesta con tus compañeros.

Tu representación debió ser



Si nos fijamos en las dimensiones del rectángulo vemos que los factores de x^2-4 son (x+2) y (x-2).

Ejercicio 1: Factoriza p^2-36.

Dibuja la representación gráfica en este espacio de ser necesario.
¿Cuáles son los factores?

Ejercicio 2: Factoriza $9x^2-4y^2$.

Dibuja la representación gráfica en este espacio de ser necesario.
¿Cuáles son los factores?

Ejercicio 3: Factoriza $25-9y^2$.

Dibuja la representación gráfica en este espacio únicamente si la necesitas.
¿Cuáles son los factores?

14:40

Observa los ejemplos anteriores que trabajaste y determina cómo factorizar lo siguientes sin utilizar las piezas.

$x^2-24=$

$y^2-81=$

$z^2-36=$

$p^6-100=$

14:50

<u>Conclusión</u>

Enumera los pasos que seguiste al determinar los factores de una diferencia de cuadrados.

____

_

____

_

____

_

3.1.6 Doceava sesión: Solución de un problema por medio de productos notables y factorización

En la sesión el estudiante realiza la revisión del nuevo conocimiento (productos notables y factorización) de que ahora dispone para acceder a otro conocimiento (solución de un problema).

Mediante un ejercicio de articulación de los conocimientos adquiridos el alumno continúa el proceso de desarrollo de las capacidades que el conocimiento del tema propicia. Es muy importante resaltar que errores relativos al mal uso de la propiedad distributiva[19], los cuales en esta sesión se espera no encontrar, es decir que las actividades anteriores hayan subsanado esos posibles errores.

La sesión está organizada para ser desarrollada en una sesión de 60 minutos, para la cual se han diseñado dos actividades como apoyo a los estudiantes, estas actividades definen el sentido y orientación de la sesión.

Las actividades se pueden agrupar en dos tipos:

- Formada por la actividad 1 y corresponde al establecimiento y actualización del concepto de volumen y como se obtiene el volumen de una caja.
- Formada por la actividad 2 y corresponde al planteamiento y solución por medio del tema de un problema.

En la primera actividad, facilitadora y alumno conversan en torno al concepto de volumen y la capacidad de una caja (cálculo del volumen de una caja).

La segunda actividad se desarrolla sobre un material que la facilitadora estructura para obtener respuestas específicas y de esta manera el alumno penetra a la aplicación del tema de estudio.

Sesión 12 (1 h)

SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA POR MEDIO DE PRODUCTO NOTABLE Y FACTORIZACIÓN

¿Qué es volumen? ____

____

¿Como se obtiene el volumen de una caja? _________________________________

____

¿Puedes explicar con tus propias palabras lo anterior?
¿Hay diferencia entre volumen y área de una caja?
¿Qué te ayuda a dar la diferencia?
¿Cómo puedes determinar si tu respuesta es correcta?

[19] Una aplicación incorrecta de la misma es $a*(b+c)=a*b+c$ y $(a+b)^2=a^2+b^2$, las cuales con mucha frecuencia se encuentran (Socas, 1996).

Propósito central de la sesión: El alumno dará solución a un problema típico en el salón de clase por medio de productos notables y factorización.

Problema
Un fabricante de cajas de cartón recibe el pedido de construir cajas abiertas por arriba con capacidad de 80 cm^3. de volumen. Deberá construirlas con una hoja cuadrada de cartón, a la cual cortará cuadrados de 5 cm. en cada una de las esquinas doblando las pestañas hacia arriba, como se ilustra en la figura, ¿Cuál es la longitud de la hoja de cartón?

Planteamiento: llamando x a la longitud de la hoja cuadrada de cartón y considerando los cuadrados de 5cm. a cortar en cada esquina de la hoja, obtenemos el primer elemento de la figura.
Cortando los cuadrados, la hoja de cartón tiene las dimensiones indicadas, La longitud x de un lado de la caja se disminuye en 10 cm. al cortar los dos cuadrados de las esquinas, doblando hacia arriba las pestañas a lo largo de la línea punteada se forma la caja abierta, como se muestra en la figura de anterior.

El volumen de la caja de cartón así formada está definido por la expresión:

Volumen= lado * lado * altura

$V=(x-10)*(x-10)*5$
$V=5(x-10)^2$ Como el volumen debe ser igual a 80 cm^3.

$80=5(x-10)^2$ $80=5(x^2-20x+100)$
$80=5x^2-100x+500$

Hemos obtenido, como resultado del planteamiento, la ecuación cuadrática:

$5x^2-100x+420=0$ dividiendo entre 5 tenemos $x^2-20x+84=0$

Factorizando	Igualando a cero	
$(x-14)(x-6)=0$	$x-14=0$	$x-6=0$
	$x=14$	$x=6$

Obtenemos dos longitudes para los lados de la hoja de cartón; sin embargo, si analizamos las respuestas veremos que sólo una de ellas satisface las condiciones que establece el problema.

Si x=14 tendría las siguientes dimensiones

V=4*4*5=80

Pero si x=6 la caja no podía formarse al cortar cuadrados de 5 cm. en las esquinas, en virtud de que la longitud de los lados de la hoja es de 6 cm. y deberíamos cortar 10 cm.

Con el problema anterior se da por concluida la propuesta didáctica, el problema de la caja permite verificar de forma concreta la solución abstracta, que los alumnos realizan al final de la propuesta, pues a partir de un pedazo de cartón construyen una caja, cortando cuadritos en las esquinas y luego doblando las pestañas hacia arriba, comprobando así su conocimiento de productos notables y factorización.

En el capítulo siguiente se aborda los aspectos metodológicos que orientaron la realización de este trabajo, en él se detalla la información que da cuenta del proceso, los temas abordados, las actividades experimentales utilizadas y la forma en que se incorporó las piezas geométricas, como herramientas para la enseñanza de productos notables y factorización.

Capitulo 4

Metodología

4.1 Panorama de los métodos de recopilación y análisis de datos

La presente investigación consistió en aplicar dos métodos diferentes de aprendizaje el primero característico de la didáctica tradicional[20] y el segundo en propiciar en un grupo de alumnos una mejora en sus procesos de aprendizaje a través de una propuesta didáctica[21].

Para dar cuenta a las preguntas de la investigación:

- ¿Cuáles son las estrategias cognitivas elementales de los estudiantes de bachillerato cuando resuelven problemas concretos (asociados al cálculo de áreas y perímetros) de productos notables y factorización?

- ¿Es posible construir un puente de vinculación usando material concreto entre la geometría y la manipulación sintáctica del álgebra?

Se diseñó y aplico un cuestionario antes y después de la experimentación de la propuesta didáctica, a quienes se denominan pretest y postest respectivamente. El pretest y postest se aplico tanto al grupo control como al experimental. Al término de algunas sesiones de la propuesta en el grupo experimental se llevaron a cabo entrevistas que permitieron constituir 3 estudios de caso. Para el análisis de estos datos también se utilizo el trabajo escrito de los alumnos a lo largo de la propuesta, registro de videograbaciones y notas de las observaciones en cada sesión.

El método de análisis cualitativo en este trabajo se combina con un método cuantitativo como propone José, P. Mestre (2000). El método cualitativo es el que desarrollaron Miles y Huberman, (citado por Cedillo, 1996). Estos autores destacan tres fases esenciales: el proceso de reducción de datos, la representación de datos y el establecimiento de conclusiones. Los autores puntualizan que estas fases de análisis, junto con la recopilación de datos forman un proceso interactivo y cíclico.

---

[20]Al grupo que sigue una didáctica tradicional se denomina “grupo control”, es decir su aprendizaje se da mediante la copia y memorización de reglas y definiciones. El profesor expone al grupo, los alumnos copian y luego memorizan.

[21] Al grupo que sigue el proceso de aprendizaje mediante la propuesta didáctica se denomina “grupo experimental”.

Las necesidades del proceso de investigación, los procesos de reducción de datos, estructuración y análisis de los mismos, y la formulación de conclusiones, se interrelacionan, e influyen unos a otros. El análisis cualitativo es un sistema activo, los datos así obtenidos son fuente de información y de procesos altamente interconectados que dan sentido al proceso indagatorio.

En la reducción de datos Miles y Huberman recomiendan una actividad anticipadora que permita perfeccionar las actividades que tendrá el estudio principal. Al respecto, en este trabajo se realizó un estudio piloto que permitió rediseñar algunas actividades del estudio principal.

El trabajo se apoya también en la técnica de estudio de casos para investigar sobre estrategias de generalización que los alumnos desarrollan con el uso de manipulables en el aprendizaje de productos notables y factorización. El estudio de casos analiza las formas personales de pensar y las estrategias a las que el alumno recurre para dar respuesta a una situación acorde a su realidad en determinado contexto, reflejando actitudes, dudas y habilidades. A través del estudio de casos es posible conocer las representaciones de cada individuo, recuperando en parte el sentido y la lógica de las actitudes.

4.2 Estudio piloto

En el estudio piloto se aplicó parte del estudio principal. El propósito fue poner a prueba las actividades para programar y modificar la estructura del estudio principal. El estudio previo permitió además adquirir cierta experiencia para abordar con facilidad el estudio principal.

4.3 Estudio principal

4.3.1 Escenario

La investigación se llevó acabo en un Centro de Estudios Tecnológicos Industrial y de Servicios, ubicado en la zona urbana del Distrito Federal. La condición socioeconómica de los alumnos es "media baja"; son hijos de obreros, empleados y trabajadores por su cuenta, una gran parte de ellos cuenta con servicios públicos como agua potable, drenaje, luz, teléfono, biblioteca y áreas verdes. La institución cuenta con taller de matemáticas, biblioteca, laboratorios de cómputo, etc., y departamento de orientación vocacional. El aula cuenta con butacas de paleta plana en donde los alumnos pueden colocar su material sin ningún problema.

4.3.2 Sujetos

El grupo experimental fue conformado por 26 alumnos que cursaron el primer semestre de bachillerato en el turno vespertino, sus edades varían entre los 15 y 16 años, 12 de ellos se seleccionaron de acuerdo a su desempeño (alto, medio y bajo) en el primer periodo parcial de evaluación de la clase de matemáticas para el estudio de casos. El proceso de experimentación se realizó de septiembre a octubre del 2004.

El grupo control fue conformado por 27 alumnos que cursaron el primer semestre de bachillerato en el turno vespertino, sus edades varían entre los 15 y 16 años.
.

4.3.3 Materiales e instrumentos

Las diferentes fases de la investigación y el orden de implementación de los instrumentos aparecen en la tabla siguiente.

Actividades de detección, observación y análisis.	**Período**
Fase 1. Aplicación del pretest	9 de septiembre 2004
Fase 2. Aplicación de la propuesta	10 al 30 de septiembre 2004
Fase 3. Primer análisis de resultados	
Análisis de las respuestas al pretest	10 al 14 de septiembre 2004
Análisis de las videograbaciones y notas de cada sesión	10 al 30 de septiembre
Fase 4. Aplicación de las entrevistas	
Primera entrevista	15 de septiembre 2004
Segunda entrevista	24 y 29 de septiembre 2004
Tercera entrevista	8 de octubre 2004
Fase 5. Aplicación del postest	6 de octubre 2004
Fase 6. Aplicación del examen	7 de octubre 2004
Fase 7. Segundo análisis de resultados	
Análisis de las entrevistas	8 de octubre 5 de noviembre
Análisis de las respuestas al postest	10 de noviembre al 23 de diciembre

Las diferentes fases de la exploración.

4.3.3.1 El pretest y el postest

Para indagar el proceso que sigue el alumno de la representación concreta a la representación simbólica se requiere de una reconstrucción cognitiva, de tal forma que los aspectos evaluados como son la comprensión del problema, el planteamiento y la solución con interpretación, se diseñó y aplicó un cuestionario (pretest y postest) para observar las diferentes etapas del proceso utilizado en la resolución de los problemas.

El pretest y el postest (ver anexo 1) tienen la finalidad de evaluar las siguientes estrategias y contenidos por medio de los problemas planteados.

Estrategias	Contenidos
Observación de comportamientos de patrones numéricos	Teoría elemental de números
	Área y perímetro
Anticipación	Prueba y error
Representación simbólica	Geometría
Autocorrección	Inducción
Planteamiento de un problema	Multiplicación y factorización de polinomios
Comprensión de un problema	Exponentes y aplicación de ley distributiva

4.3.3.2 La propuesta

La propuesta fue empleada como fuente de datos, es decir, fue un instrumento que permitió registrar todas las respuestas e intentos que desarrollaron los alumnos para obtener la solución a las actividades planteadas.

La propuesta contiene 12 sesiones para llevarse acabo en 1 hora cada una, como ya se dijo anteriormente la investigadora fue la encargada de diseñar la propuesta ahora es tiempo de mencionar que la investigadora y la facilitadora son la misma persona, es decir la investigadora es quien aplico la propuesta. En la primera sesión fue el espacio didáctico en donde facilitadora y alumno conversaron en torno al contenido y los objetivos del estudio, la sesión 1 tuvo además el propósito de que la facilitadora se diera cuenta de los conocimientos previos con que cuentan los alumnos. La primera actividad fue conducida por la facilitadora en términos un tanto informales, como diálogo, durante el cual les pregunto a los alumnos en lo individual, cuestionando sus respuestas, articulándolas con las de otros, buscando que las profundicen. Fue un ejercicio de recordación y actualización de conocimientos.

En la segunda sesión el estudiante realizó actividades que involucran relaciones del conocimiento que se estaba formando es decir producto algebraico. Estas actividades se efectuaron sobre materiales estructurados cuidadosamente, material diseñado para obtener respuestas específicas. Esta sesión se desarrolló sobre las bases de un conjunto de actividades diseñadas para conducir al alumno de forma inductiva. En este primer acercamiento al estudio del tema, y en congruencia con el enfoque teórico, la idea no fue llegar hasta la creación de reglas, sino tan sólo se pretendió que estos razonamientos quedaran comprendidos en lo general por los estudiantes y puedan referirse a ellos en términos meramente verbales.

De la tercera a la séptima sesión el estudiante llega a ser consciente de las relaciones involucradas en el tema de estudio (producto notable), en las que expresa con sus propias palabras y aprende el lenguaje técnico propio del objeto de estudio; estas son sesiones en las cuales el estudiante expresa e intercambia sus ideas sobre las estructuras y procedimientos que han sido observados.

En la octava sesión el estudiante resume lo que ha aprendido sobre el objeto de estudio y así realiza la revisión del nuevo conocimiento (productos notables) de que ahora dispone para acceder a otro conocimiento (factorización).

De la novena a onceava sesión el estudiante llega a ser consciente de las relaciones involucradas en el tema de estudio, al inicio expresa con sus propias palabras y concluye con un propio lenguaje del objeto de estudio; en estas sesiones el estudiante expresa e intercambia sus ideas sobre las estructuras y procedimientos que han sido observados. Por último en la doceava sesión el estudiante resume lo que ha aprendido sobre el objeto de estudio y así realiza la revisión del nuevo conocimiento (productos notables y factorización) de que ahora dispone para acceder a otro conocimiento (solución de un problema escolar). Mediante un ejercicio de articulación de los conocimientos adquiridos, el alumno continuó el proceso de desarrollo de las capacidades que el conocimiento del tema propicia. En esta sesión llevará el proceso de aplicación del conocimiento a la resolución de un problema.

Al inicio de la propuesta se dio una breve explicación de cómo trabajar las actividades con las piezas geométricas, con la intención de aclarar lo que se proponía con la propuesta. A cada equipo se le proporcionó en préstamo su material para desarrollar las actividades. De acuerdo con las observaciones realizadas y las respuestas de los alumnos en las actividades, se tiende a pensar que entre los factores que influyen en el buen desempeño de los alumnos, podemos encontrar: la disposición e interés, la iniciativa y la perseverancia, situación que no se presenta en los estudiantes que mostraron menos dominio en el manejo del material. En términos muy generales se observó que los estudiantes al inicio de las actividades se auxiliaban de los materiales para resolver las actividades propuestas, y a medida que avanzaba la propuesta dejaban de utilizarlo argumentando que ya habían entendido y que no era necesario utilizar el material.

4.3.3.3 Entrevistas

Con el objeto de obtener información a profundidad sobre aspectos específicos que no pueden ser observados a partir del trabajo escrito de los alumnos ni el registro de observaciones en clase, se realizaron tres entrevistas en total al inicio, durante y al final, las cuales se grabaron y trascribieron para su análisis.

La investigadora desempeñó el papel de facilitadora y se encargó de orientar, aplicar, observar, registrar la información y reportar los detalles que resultaron del actuar de los alumnos en las diferentes actividades.

Después del pretest (ver anexo 1) es decir al inicio de la propuesta se realizó la primera entrevista, durante el interrogatorio la entrevistadora se dejó conducir por el entrevistado en sus representaciones sobre "x" problema, tratando de no sugerirle nada y tratando de obtener al mismo tiempo la información deseada. Es decir al abordar las situaciones la entrevistadora no realizó el interrogatorio a partir de una serie de preguntas preparadas anteriormente, sino en base a la actuación o respuesta se generó la nueva pregunta o cuestionamiento. El registro de las entrevistas se hizo en cinta magnética.

Durante el desarrollo de la propuesta (ver anexo 4) se realizó la segunda entrevista, la cual al igual que en la primera durante el interrogatorio al entrevistadora se dejó conducir por el entrevistado en sus representaciones sobre "x" problema, tratando de no sugerirle nada y tratando de obtener al mismo tiempo la información deseada.

Al final de la propuesta es decir después del postest se realizó una tercera entrevista durante la ejecución de una tarea, el alumno resolvió los problemas planteados en el pizarrón. El registro de las entrevistas y la ejecución de la tarea se hicieron de forma manual.

4.3.3.4 Video grabaciones y notas de las observaciones en cada sesión

La observación en el aula se realizó con el fin de identificar aspectos trascendentes, útiles en el desarrollo de la propuesta y la aplicación de las entrevistas. El registro de las observaciones se hizo por medio de una videograbadora. Las video grabaciones fueron apoyadas por notas escritas que indicaban posibles aspectos importantes a considerar en las entrevistas o bien en las sesiones posteriores de la propuesta. Por ejemplo un aspecto fundamental a considerar de las videograbaciones fue la inmediatez[22], es decir si un alumno muestra desinterés en la sesión, las videograbaciones permitieron a la facilitadora saber de quien se trata e indagar a que se debe esa falta de interés.

---

[22] Jackson, (1990). "Opiniones de los Profesores". *La vida en las aulas*, Madrid, Morata. Señala la inmediatez de los acontecimientos en el aula es algo que nunca podrá olvidar cualquiera que haya estado a cargo de una clase llena de estudiantes. El entusiasmo y la participación del estudiante parecen mucho más importantes que su rendimiento en las pruebas, además el resultado de éstas se reciben demasiado tarde para ser de alguna utilidad. La inmediatez son expresiones espontáneas que el profesor toma como indicadores del aprendizaje del alumno.

4.4 Datos derivados de la experimentación de la propuesta

En esta investigación, se trabajó bajo la perspectiva donde el alumno aprende primero con la ayuda de la facilitadora, hasta que internaliza las estrategias y actúa sin la presencia de ella. En cada sesión, se abordaron tres etapas en la solución de los problemas para llegar a la apropiación del conocimiento matemático: la etapa concreta, la geométrica y la simbólica.

En la etapa concreta se abordó la resolución de los problemas manipulando estrictamente las piezas geométricas. Ello implicó conocer las propiedades de las piezas geométricas, color, forma, etc., y su equivalencia. Los alumnos identificaron el nombre de las figuras geométricas, compararon y operaron sobre ellas. El lenguaje en este caso constituye un medio de comunicación.

En la etapa geométrica, fue el momento de vinculación entre objetos, áreas y perímetros, los cuales son manipulados simultáneamente. La función de esta etapa es asegurar que los estudiantes hagan la conexión entre, lo hecho con las piezas geométricas y el trazo de líneas, perímetros y áreas. Una base sólida para arribar a esta etapa es establecer la equivalencia entre la etapa concreta y la gráfica. El momento geométrico es un puente entre la etapa concreta y la simbólica. En esta etapa el alumno analizó las figuras en términos de sus atributos, relaciones y encontró propiedades a través de la observación.

En la etapa simbólica abandonaron las piezas geométricas. El objetivo en cada clase fue que los estudiantes arribaran a la etapa simbólica, punto en el cual los alumnos pueden operar con actividades que muestren la conexión entre la geometría y el álgebra. Las sesiones se diseñaron para permitir a los estudiantes discutir y fomentar el vínculo natural que existe entre la geometría y el álgebra.

En este momento simbólico la realización de la acción mental se llevó a efecto de manera independiente por el alumno, el lenguaje fue, un medio para reflexionar.

Los estudiantes realizaron una serie de problemas que fueran inicialmente resueltos observando qué sucede con la manipulación de los objetos concretos. Pues a medida que la acción concreta es asimilada, el alumno restableció posteriormente la acción empleando el modelo geométrico para representar los objetos. Más tarde, el alumno es quien replanteó las acciones que lo llevaron al significado simbólico.

La revisión de las resoluciones de los estudiantes a los problemas que se les plantearon fue determinan para avanzar en el conocimiento de las estrategias que ellos superaban motivados por las manipulaciones efectuadas.

La etapa introductoria de cada sesión: Cada sesión presentó, en la parte inicial, una serie de interrogantes para trabajar en grupo, seguido por diversas preguntas que guían al grupo a realizar inferencias. Cuando se le asignó al alumno el material geométrico manipulable y el tema algebraico a tratar, se señaló el propósito central de cada sesión seguido por preguntas que guiaron al grupo a delimitar el tema del día.

La acción de la facilitadora: En cada sesión la facilitadora tuvo básicamente cuatro funciones importantes a desarrollar:

1. Guiar: para que la información sea compartida asegurando que cada integrante del equipo esté participando.
2. Preguntar: comparte la información con todos los alumnos, lo cual los lleva a formularse nuevas preguntas.
3. Sintetizar: Se realiza una síntesis de la información de los conocimientos apropiados y ayuda para que el grupo identifique la solución.
4. Anotar: Se hace contar cuál es la información importante y la solución.

4.5 Categorías de análisis[ii]

Las categorías de análisis que se emplearon en este trabajo son: 1. La expresión verbal de una generalización, 2. La expresión aritmética de una generalización y 3. La expresión geométrica de una generalización y 4. La expresión simbólica algebraica de una generalización.

La primera categoría se refiere a alumnos que recurren al lenguaje común para describir la forma en que razonan al desarrollar su actividad. Cuando los alumnos emplean expresiones como: “va de dos en dos”, “aumenta de dos en dos”, “se incrementa de dos en dos”, “va a dar lo mismo”, entre otras.

La segunda categoría se refiere a alumnos que usan el lenguaje común pero asociado a códigos aritméticos para explicar el comportamiento de una secuencia numérica, empleando expresiones como: “es la tabla del dos”, “se va sumando dos al número anterior”, “se suma dos”, entre otras.

La tercera categoría se refiere a los alumnos que emplean el lenguaje geométrico para describir la generalización, usan las piezas geométricas como cuadrados, rectángulos y les dan significado, por ejemplo “x^2 es un cuadrado de lado *x*”, “son seis rectángulos de base *x* y altura *y*”, etc.

La cuarta categoría se refiere a los alumnos que emplean el lenguaje algebraico para describir la generalización, usan letras y les dan significado, por ejemplo "n+2, n representa el número anterior", "x, la letra representa cualquier número", etc.

4.5.1 Categorías de Kucheman

Otras categorías de análisis que se emplearon en este trabajo son las de Kucheman (1978, 1981) citado por Kieran (2004) quien encontró seis niveles de interpretación de los usos que los estudiantes dan a las letras en álgebra:

G) Letra evaluada: a la letra le es asignado un valor numérico desde el principio.
H) Letra no considerada: La letra es ignorada o su existencia es conocida sin darle significado.
I) Letra considerada como un objeto concreto: La letra tomada como taquigrafía para un objeto concreto o como un objeto concreto en su propio derecho.
J) Letra considerada como una incógnita específica: La letra es tomada como un número específico pero desconocido.
K) Letra considerada como un número generalizado: La letra es vista como representante, o por lo menos con la posibilidad de serlo, de varios valores y no sólo de uno.
L) Letra considerada como una variable: La letra es vista como representante de un rango de valores inespecíficos y una relación sistemática es vista para existir entre dos juegos de valores.

Kucheman siguiendo principios piagetanos, asoció esos roles de las literales a diferentes estadios del desarrollo intelectual de los estudiantes, y propone que la noción de variable sólo puede ser comprendida cuando los estudiantes alcanzan el estadio de las operaciones formales. De acuerdo con esto, las nociones para las letras como objetos y cómo números generalizados deben preceder a la noción de variable.

Capitulo 5

Análisis de resultados

En el presente capítulo se describen y analizan los datos obtenidos mediante: 1. La aplicación del pretest; 2. El trabajo escrito de los alumnos durante la aplicación de la propuesta junto con observaciones derivadas de las video grabaciones y notas obtenidas en cada sesión; 3. La realización de tres entrevistas de los estudiantes que participaron en el estudio de casos, las cuales se grabaron y trascribieron para su análisis; 4. La aplicación del postest; 5. La comparación del postest entre el grupo experimental y el grupo control.
Antes de analizar los resultados cabe mencionar que el uso de cálculo de áreas se relaciona con temas de álgebra tal como se muestra a continuación:

	Representación de monomios y polinomios
	Términos semejantes
Cálculo de áreas →	Multiplicación de polinomios
	Factorización de polinomios
	Solución de ecuaciones de segundo grado
	Solución de ecuaciones lineales

5.1 Análisis de las respuestas dadas al pretest por el grupo experimental

5.1.1 Análisis cuantitativo

El pretest fue aplicado a 26 estudiantes de primer ingreso a bachillerato, que son los que integraron el grupo experimental, se aplicó un día antes de iniciar la propuesta y fue resuelto en una hora máximo, teniendo como herramientas lápiz y papel. Los datos globales de pretest (calificación global, aciertos por pregunta y errores por pregunta) fueron poco satisfactorios. La distribución de calificaciones fue normal con un sesgo que indica abundancia de calificaciones en la parte baja de la distribución. La media de las calificaciones globales del pretest fue de 4.43. En la Tabla 1 se muestran los porcentajes de aciertos para cada una de las preguntas.

Porcentaje de aciertos[23]

	p1	p2	p3	p4	p5	p6
Dio solución exitosa al problema	4%	4%	27%	27%	4%	4%

Tabla 1

[23] Ver anexo 4

El análisis global de las respuestas de los estudiantes muestra dos primeros resultados sorprendentes. Ninguno de ellos contestó todas las preguntas correctamente y ninguna de las respuestas fue respondida correctamente por todos los alumnos. Las calificaciones globales son menores de lo que podría esperarse para estudiantes de primer ingreso al bachillerato que han cursado al menos tres años en secundaria. Sólo dos estudiantes lograron dar respuesta correcta a tres preguntas distintas (ver anexo 4). Esta perspectiva global pone en evidencia que la generalización aritmética como algebraica y el cálculo de perímetro y área no son conceptos sólidos entre ciertos estudiantes que inician sus estudios de bachillerato. Lo aprendido en secundaria por algunos estudiantes parece que no les permite hacer generalizaciones algebraicas de patrones numéricos y expresiones algebraicas para calcular perímetro y área de cuadrados y rectángulos.

5.1.2 Análisis cualitativo

5.1.2.1 Acerca de las preguntas del pretest

El pretest (ver anexo 1), contiene seis problemas en dos partes relacionadas con el concepto de generalización, la primera parte se conforma por los tres primeros problemas en donde a partir de sucesiones de números que presentan algún patrón de comportamiento, los alumnos podrán encontrar algunos de los términos que dan continuidad a la sucesión, lo cual los prepara para percibir patrones y regularidades y posteriormente expresar su generalidad por medio del lenguaje algebraico. En la segunda los problemas se presentan a partir del cálculo de perímetro y área de figuras geométricas sencillas en las cuales no se dan datos aritméticos, con el propósito de que el alumno generalice algebraicamente. El problema 1 se refiere a la identificación de comportamientos de patrones numéricos exclusivamente. En el problema 2 se requiere que el alumno reconozca además del comportamiento numérico la generalización algebraica de tal comportamiento. El problema 3 presenta la generalización mediante una tabla, se pide al alumno completar la tabla y se va guiando mediante preguntas para que al final indique qué sucede con los valores de y cuando crecen los valores de x, se espera que sea capaz de generalizar algebraicamente su respuesta sin que se le pida explícitamente. Los problemas cuatro, cinco y seis pedían indicar el perímetro y área de las figuras cuando estás no poseen datos numéricos para el valor de sus lados. Es decir se trata de que el alumno generalice algebraicamente.

5.1.2.2 Acerca de las respuestas del pretest

Con el fin de obtener una visión más amplia de la noción de generalización algebraica y cálculo de perímetro y área que tienen los estudiantes, se realizó un análisis cualitativo de las respuestas dadas al pretest. Estas se organizaron agrupándolas en tres categorías: entendió el problema, planteó el problema y dio solución exitosa al problema. En un segundo momento se procedía a analizar para cada pregunta todas las respuestas incorrectas. La Tabla 2 presenta una selección de preguntas que requieren el uso de la generalización algebraica y el cálculo de perímetro y área (problema 2a, 4, 5 y 6). Las respuestas que los estudiantes dieron a las preguntas que demandan una generalización algebraica, indican que ellos tienen dificultades para representar generalizaciones algebraicas; y para diferenciar el cálculo de perímetro y área (ver problemas 2a, 4, 5 y 6 en la Tabla 2), lo que sugiere una pobre conceptualización de esos aspectos.

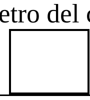
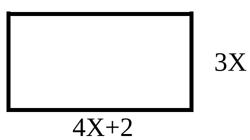
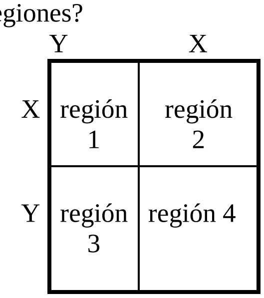
	Entendió el problema	Planteó el problema	Solución exitosa al problema	Ejemplos de soluciones no exitosas al problema
p2a. ¿Cuál es la expresión algebraica que permite conocer el número faltante de esta sucesión? 1, 4, 9, 16, _ ,36	46%	4%	4%	La suma ya que al ir sacando las cantidades por las que cada número se lleva se le suma a la cantidad anterior y te da el resultado
p4. Escribe una o más expresiones para el perímetro del cuadrado 	54%	38%	27%	El perímetro del cuadrado es la suma de sus cuatro lados[24] l+l+l+l l^4
p5. Indica mediante un polinomio el área del siguiente rectángulo: 	65%	35%	4%	Area= $\frac{bxh}{2}$ $\frac{4x+2 \text{ X } 3x}{2}$ 3x + 4x = 7x+2 7x+2= $\frac{9x}{2}$ = 4.5x
p6. Según la figura contesta las siguientes preguntas • ¿Cuál es el área de cada región? • ¿Cuál es el área total de las cuatro regiones?  .	54%	23%	4%	Región 1 Área lxl (x)(x)=2x Región 2 Area=bxh (x)(y)=xy Región 3 Área bxh (x)(x)=2x Región 4 Área=lxl (y)(y)=2y 4 Regiones Área= lxl (xy)(xy)= 2xy

Tabla 2. Tipo de respuestas dadas a preguntas que involucran expresiones algebraicas.

[24] Durante la aplicación del pretest constantemente los alumnos solicitaban ayuda al facilitador para confirmar que lo que decían era correcto "el perímetro es el contorno y el área lo de adentro de la figura" "entonces el perímetro es la suma de los cuatro lados".

En general se detectó una tendencia a buscar en las expresiones verbales la solución a los problemas, durante la aplicación del pretest los alumnos solicitan ayuda al facilitador para validar sus definiciones de perímetro y área ("el perímetro es el contorno y el área lo de adentro de la figura" "entonces el perímetro es la suma de los cuatro lados"). Al tener la certeza de la definición buscan la solución del problema en la expresión verbal. Lo anterior se pone en evidencia, por ejemplo, en las respuestas dadas a la pregunta 2a, 4, 5 y 6 (Tabla 2).

5.2 Análisis de las respuestas dadas al pretest por el grupo control

5.2.1 Análisis cuantitativo

El pretest fue aplicado a 27 estudiantes de primer ingreso a bachillerato, que son los que integran el grupo control, se aplicó un día antes de iniciar el tema de productos y factorización mediante una didáctica tradicional y fue resuelto en una hora maximo, teniendo como herramientas lápiz y papel.

Los datos globales de pretest (calificación global, aciertos por pregunta y errores por pregunta) fueron poco satisfactorios. La distribución de calificaciones fue normal con un sesgo que indica abundancia de calificaciones en la parte baja de la distribución. La media de las calificaciones globales del pretest fue de 4.82. En la Tabla 3 que se presenta a continuación se muestra los porcentajes de aciertos encontrados para cada una de las preguntas del pretest.

Porcentaje de aciertos[25]

	p1	P2	p3	p4	p5	p6
Dio solución exitosa al problema	41%	0%	19%	30%	0%	4%

Tabla 3.

El análisis global de las respuestas de los estudiantes muestra que ninguno de ellos contestó todas las preguntas correctamente y ninguna de las respuestas fue respondida correctamente por todos los alumnos. Las calificaciones globales son menores de lo que podría esperarse para estudiantes de primer ingreso al bachillerato que han cursado al menos tres años en secundaria.
Sólo un estudiante logró dar respuesta correcta a tres preguntas y plantear las otras tres (ver anexo 5). Esta perspectiva global pone en evidencia que la generalización aritmética como algebraica y el cálculo de perímetro y área no son conceptos sólidos entre ciertos estudiantes que inician sus estudios de bachillerato. Lo aprendido en secundaria parece que no les permite hacer generalizaciones algebraicas de patrones

[25] Ver anexo 5

numéricos y expresiones algebraicas para calcular perímetro y área de cuadrados y rectángulos.

5.2.2 Análisis cualitativo

5.2.2.1 Acerca de las preguntas del pretest

El pretest es el mismo para ambos grupos.

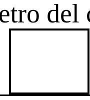
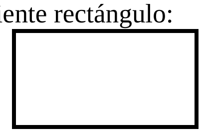
5.2.2.2 Acerca de las respuestas del pretest

Con el fin de obtener una visión más amplia de la noción de generalización algebraica y cálculo de perímetro y área que tienen los estudiantes, se realizó un análisis cualitativo de las respuestas dadas al pretest.

La Tabla 4 presenta una selección de preguntas que requieren el uso de la generalización algebraica y el cálculo de perímetro y área (problema 2a, 4, 5 y 6).

Las respuestas que los estudiantes dieron a las preguntas que demandan una generalización algebraica, indican que ellos tienen dificultades para representar generalización algebraicas; y para diferenciar el cálculo de perímetro y área (ver problemas 2a, 4, 5 y 6 en la Tabla 4), lo que sugiere una pobre conceptualización de esos aspectos.

En general se detectó una tendencia a buscar en las expresiones verbales la solución a los problemas, lo anterior se pone en evidencia, por ejemplo, en las respuestas dadas a las preguntas 2a, 4, 5 y 6 (Tabla 4).

	Entendió el problema	Planteó el problema	Solución exitosa al problema	Ejemplos de soluciones no exitosas al problema
p2a. ¿Cuál es la expresión algebraica que permite conocer el número faltante de esta sucesión? 1, 4, 9, 16, _ ,36	11%	48%	41%	x +? Sumando números impares
p4. Escribe una o más expresiones para el perímetro del cuadrado 	19%	30%	30%	El perímetro del cuadrado es la suma de sus lados p=l+l+l+l $p=l^2+l^2$
p5. Indica mediante un polinomio el área del siguiente rectángulo:  3X 4X+2	11%	67%	0%	Area=bxh A=(4x+2) (3x) A=12x + 6x $A=18x^2$
p6. Según la figura contesta las siguientes preguntas	37%	26%	4%	x*x, y*x

<table>
<tr>
<td>• ¿Cuál es el área de cada región?
• ¿Cuál es el área total de las cuatro regiones?
<table>
<tr><td></td><td>Y</td><td>X</td></tr>
<tr><td>X</td><td>región 1</td><td>región 2</td></tr>
<tr><td>Y</td><td>región 3</td><td>región 4</td></tr>
</table>
</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</table>

Tabla 4. Tipo de respuestas dadas a preguntas que involucran expresiones algebraicas

5.3 Análisis de las respuestas obtenidas en el trabajo escrito de los alumnos, y las observaciones de las videograbaciones y notas de cada sesión al grupo experimental

5.3.1 Análisis cualitativo

¿Es posible que el cálculo de área y perímetro favorezca el aprendizaje de productos notables y factorización? Seguramente la respuesta es afirmativa, pero ésta, como la pregunta, son tan generales que no son útiles para la práctica docente. El propósito de las siguientes líneas es proporcionar un ejemplo concreto con el cual se muestra que el cálculo de áreas y perímetros pueden resultar útiles para mejorar el aprendizaje de productos notables y factorización.

El análisis se centró en las observaciones sobre lo que escriben los alumnos a lo largo de las actividades que se desarrollan durante la sesión, sin olvidar la revisión que se hace del registro de video grabaciones y también de notas tomadas en cada sesión.

De las doce sesiones que se llevaron a cabo, los resultados más relevantes se obtuvieron en las sesiones uno, dos y siete. En seguida se muestran los ejemplos más significativos de lo realizado por los alumnos en estas sesiones.

En la sesión 1, el estudiante A (EA) muestra que confunde el concepto de circunferencia y círculo:

Estudiante A (EA)

En la sesión 1, el estudiante L (EL) muestra que además de confundir el concepto de circunferencia y círculo, no indica las unidades de medida de cada uno de ellos:

Estudiante L (EL)

En las preguntas individuales se observa que el estudiante A y el estudiante L saben qué es perímetro y área respectivamente, en las preguntas de reflexión ambos indican que podrían explicar lo que escribieron con sus propias palabras, además manifiestan que hay diferencia entre ambos conceptos. Sin embargo el estudiante EA al dibujar una circunferencia y un circulo confunde ambos conceptos[26], al igual que el estudiante EL, pero además EL no hace la diferencia entre unidades cuando calcula el perímetro y área del cuadrado de lado 4 cm. Nótese que no asocian el perímetro y área a los lugares geométricos que señalan en su expresión verbal, ni la diferencia de unidades.

Al parecer el problema es que los estudiantes adquirieron el conocimiento de una forma memorística. Aebli (1958) advierte que aun habiendo memorizado una fórmula, los alumnos no comprenden lo que dicen o hacen; repiten mecánicamente una fórmula verbal o aplican mecánicamente un proceso estereotipado. Para Hoyos (1998) el estudiante da un sentido meramente procedimental, es decir por ejemplo un alumno al trabajar con dos ecuaciones lineales simultaneas lleva acabo el procedimiento sin embargo al despejar una variable de una ecuación es incorrecto, pero el alumno continua creyendo que su resultado es correcto, simplemente por haber seguido el procedimiento, lo cual no es cierto.

En la sesión 2, el estudiante A (EA) muestra el uso de la representación geométrica para productos de polinomios:

[26] En la videograbación de la sesión dos se observa que EA dice a su equipo “la circunferencia es el contorno y el círculo es lo de adentro”.

Estudiante A (EA)

Al finalizar el trabajo con las piezas geométricas en la sesión 2, en el que realizaron actividades como las que se describen en la propuesta (ver capitulo 4), se pidió a los estudiantes realizar los ejercicios 1 y 2. Con la finalidad de obtener información sobre el significado geométrico que le asignan a la multiplicación de polinomios. Representar gráficamente e indicar cuál es el producto final resulta ser del dominio de la población estudiada, pues las respuestas son correctas en un porcentaje alto.

La mayoría de las respuestas están basadas en el uso de la representación geométrica y parece un método muy práctico según se observa en el trabajo escrito de los estudiantes, como es el caso de EA.

En la sesión 2, ejercicios 1 y 2, el estudiante B (EB) muestra su habilidad en la aplicación de la representación geométrica para productos con polinomios:

Estudiante B (EB)

Se observa que EB, al producto le asigna una expresión geométrica, el manejo de las piezas geométricas no causa problemas al estudiante, de tal forma que ayuda al aprendizaje de productos notables y factorización.

En la sesión 2, ejercicios 1 y 2, el estudiante L (EL) muestra que no fue capaz de representar geométricamente los productos.

Estudiante L (EL)

En la sesión 2, ejemplo 6, el estudiante L (EL) muestra la aplicación de la representación geométrica al producto (x+1)(x+y-3):

Estudiante L (EL)

EL no realiza los ejercicios, la preguntas es ¿logró dar un significado geométrico a los productos? Sí, en el ejemplo 6 de la sesión 2 encontramos evidencia. Por otro lado en las video grabaciones se observa que el trabajo de EL es lento comparado con su grupo, al terminar sus compañero de manipular las piezas EL aún continua trabajando con ellas. Se observa en el trabajo escrito que en los ejemplos además de realizarlos con las piezas los representaba gráficamente con lápiz y papel. Es probable que EL requiera más tiempo para dar solución a la actividad.

En general, el manejo del las piezas geométricas no causó problemas a los estudiantes, de tal forma que ayudaron a mejorar el aprendizaje de productos notables y factorización.

Las tareas (miscelánea) estuvieron divididas en dos partes, una para ser resuelta con las piezas geométricas y la otra parte mediante lápiz y papel. Es decir a pesar de que en principio se les sugirió una estrategia para atacar los problemas (la geométrica) las actividades se diseñaron de tal forma que los estudiantes tuvieran la posibilidad de construir un puente de vinculación usando material concreto entre la geometría y la manipulación sintáctica del álgebra.

Los resultados al final de cada sesión muestran que los estudiantes no tienen problemas para efectuar los pasos que siguieron para determinar productos o factorizaciones; pero en un buen porcentaje los alumnos establecen su respuesta mediante la generalización verbal, los resultados revelan también la existencia de una particular tendencia hacia lo algebraico posterior a la expresión verbal, a pensar en las matemáticas por medio de fórmulas[27], como es el caso de EM.

En la conclusión de la sesión siete EM además de enumerar los pasos para determinar el producto de forma verbal indica una generalización algebraica.

Estudiante M (EM)

Resultados como los anteriores revelan que un porcentaje de alumnos completaron el proceso de transición al razonamiento formal. Pues para Piaget el orden por el que pasan los niños las etapas de desarrollo no cambia, es decir, deben pasar por las operaciones concretas para llegar al estadio de las operaciones formales; pero la rapidez con que pasan los niños por estos estadios cambia de persona en persona.

[27] EM hace saber al facilitador “la fórmula para realizar este tipo de productos es”

5.4 Análisis de las respuestas dadas a las tres entrevistas por los estudiantes que participaron en el estudio de casos, las cuales se grabaron y trascribieron para su análisis

5.4.1 Análisis cualitativo

Se refieren a:

- Las estrategias cognitivas elementales que desarrollaron los estudiantes de bachillerato cuando resuelven problemas de productos notables y factorización, por ejemplo la utilización de diferentes formas para concebir a las variables que intervienen en los problemas a partir de la medición.

- La posibilidad de construir un puente de vinculación usando material concreto entre la geometría y la manipulación sintáctica del álgebra, como lo sugieren Radford (1995), Socas (2000) y otros autores.

Los resultados se presentan en el siguiente orden:

Aprovechamiento alto: Armando
Aprovechamiento medio: Maricruz
Aprovechamiento bajo: Laura

A continuación se describe cómo evolucionó cada alumno en base al análisis de sus respuestas en cada una de las tres entrevistas. Las categorías de análisis utilizadas son:

- La expresión verbal de una generalización
- La expresión aritmética de una generalización
- La expresión geométrica de una generalización y
- La expresión simbólica algebraica de una generalización.

La primera categoría se refiere a alumnos que recurren al lenguaje común para describir la forma en que razonan al desarrollar su actividad. Cuando los alumnos emplean expresiones como: “va de dos en dos”, “aumenta de dos en dos”, “se incrementa de dos en dos”, “va a dar lo mismo”, entre otras.

La segunda categoría se refiere a alumnos que usan el lenguaje común pero asociado a códigos aritméticos para explicar el comportamiento de una secuencia numérica, empleando expresiones como: “es la tabla del dos”, “se va sumando dos al número anterior”, “se suma dos”, entre otras.

La tercera categoría se refiere a los alumnos que emplean el lenguaje geométrico para describir la generalización, usan las piezas geométricas como cuadrados, rectángulos y les dan significado, por ejemplo "x^2 es un cuadrado de lado *x*", "son seis rectángulos de base *x* y altura *y*", etc.

La cuarta categoría se refiere a los alumnos que emplean el lenguaje algebraico para describir la generalización, usan letras y les dan significado, por ejemplo "n+2, n representa el número anterior", "x, la letra representa cualquier número", etc.

Otras categorías de análisis que se emplearon en este trabajo son las de Kucheman (1978, 1981, citado por Kieran, 2004) y son:

- Letra evaluada: A la letra le es asignado un valor numérico desde el principio.
- Letra no considerada: La letra es ignorada o su existencia es conocida sin darle significado.
- Letra considerada como un objeto concreto: La letra tomada como taquigrafía para un objeto concreto o como un objeto concreto en su propio derecho.
- Letra considerada como una incógnita específica: La letra es tomada como un número específico pero desconocido.
- Letra considerada como un número generalizado: La letra es vista como representante, o por lo menos con la posibilidad de serlo, de varios valores y no sólo de uno.
- Letra considerada como una variable: La letra es vista como representante de un rango de valores inespecíficos y una relación sistemática es vista para existir entre dos juegos de valores.

Kucheman siguiendo principios piagetanos, asoció esos roles de las literales a diferentes estadios del desarrollo intelectual de los estudiantes, y propone que la noción de variable sólo puede ser comprendida cuando los estudiantes alcanzan el estadio de las operaciones formales. De acuerdo con esto, las nociones para las letras como objetos y cómo números generalizados deben preceder a la noción de variable.

El Caso de Armando

Propósito de la primera entrevista
La primera entrevista se diseñó para estudiar con mayor profundidad las nociones y estrategias que desarrollaron los estudiantes para expresar generalizaciones en el contexto de actividades que consisten en reconocer un patrón de comportamiento en una secuencia de números y fórmulas de figuras geométricas para calcular el perímetro y el área (ver anexo 1).

Antecedentes

Armando es un alumno de 15 años de edad que cursa el primer semestre del bachillerato, su desempeño escolar es alto de acuerdo al primer parcial de matemáticas. En los registros de observación de cada sesión se indican que en la actividad previa (pretest), no requirió del apoyo del facilitador. Sin embargo las estrategias que utilizó en la solución de las actividades que se le propusieron no fueron del todo exitosas.

Primera entrevista

Se encuentra evidencia de que fue capaz de expresar generalizaciones empleando el lenguaje algebraico pero reconoce que su conocimiento aritmético falló por exceso de confianza, lo que probablemente provocó que la expresión algebraica del problema 2a, no fuera correcta.

Fue posible observar en las sesiones numéricas del pretest un dominio en la primera y segunda categoría (generalizaciones empleando el lenguaje verbal, generalizaciones empleando el lenguaje aritmético). A continuación se transcriben las respuestas de la entrevista después del pretest donde se observa lo anterior.

P: Entrevistadora. ¿Cuál es el comportamiento de la sucesión numérica 1a)?
A: Armando. Son los números pares.
P: ¿Cómo sabes que lo que dices es correcto?
A: Porque van de dos en dos, al dos le sumo dos da cuatro, le sumo dos da seis, le sumo dos me da ocho, al ocho le sumo dos y entonces tengo el diez, (escribe en el pizarrón 2+2=4, 4+2=6, 6+2=8 y 8+2=10) “son los números pares maestra”.
P: ¿Cuál es el comportamiento de la sucesión numérica 1b)?
A: Son los números primos.
P: ¿Cómo les explicarías a tus compañeros lo que dices?
A: La secuencia de números es dos, luego tres, cinco, siete, falta el once, lo pongo y entonces va el 13, entonces falta el 17 “son los primos”.
P: ¿Por qué los números primos?
A: Porque los primos son los números que se dividen nada más entre ellos mismos y el uno, igual que los de la lista.
P: ¿Cuál es la expresión que te permite conocer el perímetro del problema cuatro?
A: P=l+l+l+l
P: ¿Puedes obtener la solución de otra forma?
A: Sí, P=l*4, el perímetro del cuadrado es P y l es lo que mide su lado.
P: ¿Tu solución responde a la pregunta planteada en el problema?
A: Sí, el perímetro es la suma de los cuatro lados del cuadrado.

Análisis

Las respuestas de Armando al problema 1a) y 1b), muestran un dominio en la primera y segunda categoría, ya que logra ver claramente el patrón de la numeración dada: “el comportamiento es de los números pares”, y “el comportamiento es de los números primos”. En las respuestas de Armando, referente al problema 4, se encuentra evidencia de que fue capaz de expresar generalizaciones empleando el lenguaje algebraico.

Propósito de la segunda entrevista

La segunda entrevista se diseñó para estudiar con mayor profundidad las nociones y estrategias que desarrollan los estudiantes para crear sus propias reglas de productos notables y factorización, teniendo como principal marco teórico de referencia el álgebra geométrica de los griegos; lo que nos permitió descubrir estrechas relaciones con la geometría, para que las pueda validar y así las haga suyas.

Segunda entrevista

En esta entrevista Armando muestra que tiene un nivel de conocimiento en las unidades de medición del perímetro y el área de la sesión 1 de la propuesta. Lo anterior se puede observar en los párrafos siguientes.

P: ¿Cuál es la cantidad de carrizo necesaria para la estructura del papalote?
A: Vertical 14 centímetros y horizontal 18 centímetros.
P: ¿Cómo sabes que lo que has hecho es correcto?
A: Porque medí la cruz que se forma en el papalote.
P: ¿Cuál es la cantidad necesaria de papel para construir el papalote?
A: Cincuenta y seis centímetros cuadrados
P: ¿Tu solución responde a las preguntas planteadas en el problema?
A: ¿Sí?
P: ¿Cuál es la diferencia entre cm. y cm^2?
A: Diferentes tipos de operación.
P: ¿Cómo sabes que lo que has hecho es correcto?
A: Porque el perímetro de un cuadrado de lado 4cm es, 4cm+4cm+4cm+4cm=16cm y el área es (4cm)(4cm)=16cm^2.
P: ¿Hubieras podido resolver la actividad si no contaras con las figuras geométricas?
A: Sí
P: ¿Cómo le explicarías a un compañero el por qué cm^2?
A: Porque es la superficie de una figura.
P: ¿Qué representa para ti cm^2?
A: Bueno, unidades de área.
P: ¿Qué significa unidades de área?
A: En área del cuadrado que se multiplican sus lados y en el perímetro se suman sus lados.

En la respuestas de la sesión 3 y 5 se observa que Armando logró construir generalizaciones empleando el lenguaje común que describe el comportamiento de un producto de binomios de la forma $(x\pm a)(x\pm b)$ y (a+b)(a-b) empleando sus propias reglas. Pero también hace evidente que no logró construir un significado geométrico sobre las letras.

P: Desarrolla (z+2)(z-4).
A: ¿Con las piezas? ¡La verdad no le entendí muy bien!, "pero se hacerlo más fácil"
P: Está bien sin las piezas (se observa que no quiere trabajar con las piezas, probablemente porque no lo cree necesario).
A: $=z^2-4z+2z-8$
P: ¿Cuál es el producto final?
A: z^2-4z-8
P: ¿Lo anterior qué representa geométricamente? (duda antes de dar la respuesta, ante la insistencia observa detenidamente la expresión y se da cuenta del error aritmético).
A: ¿Creo que es rectángulo? Y no es -4z es -2z, sumé mal.
P: Observa los ejercicios anteriores que trabajaste y determina, ¿cómo multiplicarlos sin utilizar las piezas?
A:

(x+1)(x+2)=	$x^2+2x+x+2$
(y+4)(y-2)=	$y^2-2y+4y-8$
(z+1)(z-5)=	$z^2-5z+z-5$

P: ¿Es el producto final? (inmediatamente procede a sumar algebraicamente, pero en el último producto comete otro error aritmético).
A: No, me falta.
$= x^2+3x+2$
$= y^2+2y-8$
$= z^2-3z-5$ (error aritmético).
P: ¿Cuales son los pasos que seguiste al determinar el producto de los binomios?
A:

1. El primer término del primer binomio por el primer término del segundo binomio
2. El primer término del primer binomio por el segundo término del segundo binomio
3. El segundo término del primer binomio por primer término del segundo binomio
4. El segundo término del primer binomio por segundo término del segundo binomio

P: ¿Qué nombre recibe un producto de la forma (a+b)(a-b)?
A: Binomios conjugados.
P: ¿Qué representa geométricamente un producto de la forma (a+b)(a-b)?

A: Un cuadrado o un rectángulo.

Análisis

Las respuestas de Armando referentes a las diferentes sesiones, muestran cierto conocimiento de producto algebraico ya que logra ver claramente que el producto de (z+2)(z-4) se lleva acabo mediante la ley distributiva. Sin embargo no logra dar significado geométrico a dicho producto.

Las estrategias que desarrolló para el reconocimiento y representación algebraica de la representación geométrica se puede caracterizar cómo “inexistente”, usó la solución de los ejemplos de la propuesta para validar o refutar las reglas que él construía. Armando hace notar su inconformidad de usar las piezas para desarrollar los productos, menciona que hay una forma sencilla de realizar productos.

Armando fue capaz de identificar las operaciones que debía realizar para producir el producto indicado sin acudir a las piezas geométricas, mostrando así una de las fases en el desarrollo de sus habilidades para expresar generalizaciones, a esta fase se le puede definir mediante la categoría “generalización empleando el lenguaje verbal”. Es claro que el trabajo con las piezas geométricas no fue un apoyo cuando se le pidió construir una regla para producir un producto determinado, pues en realidad manifiesta no haberlo intentado.

Propósito de la tercera entrevista.

La tercera entrevista se diseñó para recabar nueva videncia empírica sobre:

Los significados que asignaron los alumnos a las letras cuando las usan para construir expresiones de generalización acerca del comportamiento de un producto o una factorización, tal vez, significados de tipo geométrico. También interesaba ver el tipo de estrategias que generan para abordar situaciones problema dentro del aula que se pueden resolver con productos notables y/o factorización.

A cerca de los significados

En esta entrevista Armando mostró un cierto dominio en el manejo de las literales, lo cual sugiere un avance en sus estrategias de generalización. Esta afirmación se sustenta en el tipo de respuestas que él produjo. A continuación se proporciona la evidencia de lo anterior.

P: ¿Cuál es la expresión algebraica que permite conocer el número faltante de la sucesión del problema 2 del postest?

A: x=y+p, donde y=valor anterior de la sucesión, p=numero impar consecutivo y y=resultado

P: ¿Esté problema es igual a otros que ya has resuelto?

A: Sí

P: ¿En qué forma es lo mismo?

A: Se trata de buscar el patrón, buscar el comportamiento de los números.

P: ¿Cuál es el área total de las cuatro regiones en el problema 6 del postest?
A: Un cuadrado.
P: ¿Cuál es la representación geométrica de "6xy" en la expresión "$3x^2+6xy-9x$" del ejemplo 3 de la sesión 8?
A: Seis rectángulos de base "x" y altura "y".
P: Y $3x^2$.
A: Tres x^2.
P: ¿Qué es x^2?
A: Un cuadrado de lado "x"
P: ¿Que es factorización?
A: Proceso inverso de la multiplicación.
P: ¿Cómo sabes que es correcto?
A: Porque lo se.
P: ¿Qué representa geométricamente la factorización?
A: Los lados del rectángulo o cuadrado.
P: ¿Cómo sabes que lo que dices es correcto?
A: Porque si al multiplicar los lados encontramos el área, al descomponer la multiplicación encontramos los lados del cuadrado o rectángulo.
P. ¿Puedes construir la figura que represente la expresión "$3x^2+6xy-9x$" y dar sus dimensiones?
A: Sí, son "3x" y "x+2y-3"

Análisis
En la tercera entrevista de Armando sus respuestas hacen evidente que ha comprendido que las reglas que construyó son expresiones generales que resumen el comportamiento del producto o la factorización. Las respuestas las podemos ubicar en la categoría expresión algebraica de una generalización.

Es importante destacar que en la primera entrevista Armando asignó un significado a las letras como fórmulas que representan cualquier concepto. Letra considerada como un número generalizado: La letra es vista como representante, o por lo menos con la posibilidad de serlo, de varios valores y no sólo de uno (Kucheman, 1978, 1981, citado por Kieran, 2004). El trabajo con las piezas geométricas no le daban señales para obtener la regla del producto o factorización tal vez por que él tenía conocimiento previo del producto y recordaba cierto proceso aunque no le significara algo preciso, las señales no le interesaban pues él recordaba un proceso meramente mecánico para desarrollar productos, pero cómo lo señala Aebli (1958), aún habiendo memorizado una fórmula, los alumnos no comprenden lo que dicen o hacen; repiten mecánicamente. Entonces el facilitador se da a la tarea de motivar al alumno y logra que trabaje con las piezas geométricas, al final Armando logra aceptar o refutar sus conclusiones mediante las piezas y asignar un significado geométrico a los enunciados que empleaba al construir la regla.

Resumen del caso de Armando

Desde la etapa inicial de la propuesta Armando mostró haber asignado un significado a las letras como fórmulas que sirven para representar cierto concepto. Para Kucheman (1978, 1981) citado por Kieran (2004). La letra considerada como un número generalizado, es vista como representante, o por lo menos con la posibilidad de serlo, de varios valores y no sólo de uno. En la primera entrevista que presentamos ofrece evidencia a favor de esta afirmación. Cuando se le preguntó acerca del significado que tiene la expresión P=l+l+l+l es el perímetro del cuadrado o sea la suma de la medida de su lados.

Aparentemente Armando no tuvo dificultades al manejar expresiones algebraicas debido a que logró dar un significado al uso de letras; para él, las piezas geométricas son herramientas que si bien no le fueron indispensables le ayudaron a dar un nuevo significado, simplificar su trabajo y a comprobar sus conclusiones. Para Socas (1996), el uso de más de un lenguaje para representar un concepto favorece la abstracción del concepto, ya que tenemos más puntos de referencia y permiten establecer así más relaciones.

El tipo de estrategia que desarrolló Armando para construir reglas de generalización acerca del comportamiento de productos o factorizaciones se basó en la comprensión y planteamiento de los resultados de la propuesta y su conocimiento previo para aceptar o refutar sus respuestas.

Cabe señalar que a pesar de que las piezas geométricas no fueron indispensables para Armando, al final del estudio reconoció que los materiales le facilitaron organizar sus ideas y además fueron un referente visual que le sirvió como punto de partida en la búsqueda de sus respuestas

El Caso de Maricruz

Los propósitos de la primera, segunda y tercera entrevista son los mismos para los tres casos.

Antecedentes

Maricruz es una alumna de 15 años de edad que cursa el primer semestre del bachillerato, su desempeño escolar es medio de acuerdo al primer parcial de matemáticas. En los registros de la observación de cada clase indican que en la actividad previa (pretest), frecuentemente requirió del apoyo del facilitador, en sus respuestas mostró estrategias propias que utilizó en la solución de las actividades que se le propusieron.

Primer entrevista
En la entrevista se observó que ella se desempeña de manera dependiente para resolver la primera actividad que se le propuso. Se encuentra evidencia de que no fue capaz de expresar generalizaciones empleando el lenguaje algebraico. Además fue posible observar sólo un dominio en la primera categoría, es decir en generalizar a través de un lenguaje verbal.

P: Entrevistadora. ¿Cuál es el comportamiento de la sucesión numérica 1a)?
A: Maricruz. Va de dos en dos, dos, cuatro, seis, ocho y diez
P: Explica, ¿cómo sabes que lo que has hecho es lo correcto?
A: Dos más dos cuatro; cuatro más dos seis; seis más dos ocho; ocho más dos da diez.
P: ¿Cuál es el comportamiento de la sucesión numérica 1c)?
A: Disminuyen de tres en tres.
P: ¿Como sabes que eso es cierto?
A: A veintidós se le resta tres y da diecinueve, diecinueve menos tres da dieciséis, dieciséis menos tres da trece menos tres da diez.
P: ¿Puedes obtener la solución de otra forma?
A: No, no se me ocurre otra forma.
P: En el problema 2 ¿Qué numero aparece en el quinto lugar de la sucesión?
A: El 25
P: ¿Cómo sabes que es el 25?
A: Porque 16 menos 9 da 7 mas 2 nueve, 9 más 16 da 25.
P: ¿Cuál es la expresión algebraica que te permite conocer el número faltante de esta sucesión?
A: Pues, la verdad no le entendí muy bien, yo creo que era una ecuación, ¿no?
P: Sí, adelante.
A: Pues se tendría que restar y sumar.
P: ¿Por qué no multiplicar o dividir?
A: No sabría decirle.
P: Puedo observar que borraste la solución, ¿qué habías escrito?
A: n=Z-Z1+2.
P: Si no le entendiste, ¿cómo estuvo eso?
A: Es que me dijo un compañero que lo hiciera así.
P: A lo largo de la propuesta vamos a ver la razón de lo que hiciste.
A: Sí maestra.
P: ¿Te han planteado problemas? ¿Cómo este?
A: No me acuerdo.
P: ¿Hay un problema más simples que éste?
A: Sí, el inciso anterior.

P: ¿Qué hace a este problema difícil?
A: La expresión algebraica.
P: Maricruz, ¿entiendes el problema?
A: Sí, creo que tengo que encontrar la ecuación que me permita encontrar el número
P: Tomate tú tiempo y trata de obtener esa ecuación (Después de cierto tiempo que Maricruz lo intento parece que lo logró)
A: número=Z2-Z1+2
P: ¿Por qué sumar 2?, ¿Quién es Z2 y Z1?
A: Por ejemplo cuatro menos uno da tres más dos cinco.
P: ¿Y luego?
A: Cinco más cuatro es nueve.
P: ¿En dónde se indica que a cinco se le sumas cuatro?
A: Esta mal
P: ¿Por que crees que está mal?, ¿qué haces cuando no estás seguro del resultado?
A: Falta que sume el cuatro, creo.
P: ¿Cuál es la expresión algebraica que te permite conocer el perímetro del problema cuatro?
A: P=l+l+l+l.
P: ¿Quien es P y l?
A: El perímetro y el lado del cuadrado.
P: ¿Cuál es la expresión algebraica que te permite conocer el área del rectángulo del problema 5?
A: La fórmula es base por altura entre dos (escribe).

$$A=\frac{Bxh}{2}$$

P: Indica mediante un polinomio el área del rectángulo del problema 5 del retes
A: 4x+2(3x)=12x+6x
=18x
=9x
P: ¿Por qué 9x?
A: Porque se divide entre dos.

Análisis
Las respuestas de Maricruz a los problema 1, 2, 4 y 5, muestran un dominio en su nivel de generalización verbal, logra expresar claramente el patrón de la sucesión de números “va de dos en dos” “disminuye de tres en tres”. Por otro lado en las respuestas también se encuentra evidencia de que a pesar de sus intentos no fue capaz de expresar generalizaciones empleando el lenguaje algebraico.

Segunda entrevista
En esta entrevista Maricruz muestra que alcanzó un nivel de comprensión en las unidades de medición del perímetro y el área de la sesión 1.

P: ¿Cuál es la cantidad necesaria para la estructura del papalote?
A: Veintiuno punto siete centímetros.
P: ¿Cuál es la cantidad necesaria de papel para construir el papalote?
A: Cincuenta y cinco centímetros cuadrados.
P: ¿Hay diferencia entre centímetros y centímetros cuadrados?
A: Sí maestra
P: ¿Cuál es la diferencia?
A: El perímetro es la suma de los lados de una figura, si sumamos centímetros el total es centímetros, pero el área es todo lo que se encuentra dentro del perímetro.
P: ¿Por qué centímetros cuadrados en el área?
A: Para obtener el área se multiplica la base y la altura o sea centímetros por centímetros nos da centímetros cuadrados y se divide entre dos.
P: ¿Si no contaras con las figuras geométricas hubieras podido resolver la actividad?
A. No.
P. ¿Cómo te ayudó el material?
A. Me ayudo a darme cuenta de que no es lo mismo medir perímetro que área.
P. ¿Qué significa ahora para ti cm^2?
A. Unidades de medida de área a diferencia de centímetros que son unidades de distancia.

En las respuestas acerca de la sesión 5 se observa que Maricruz logró construir expresiones de generalización que describen el comportamiento de un producto de la suma de dos términos y la diferencia de los mismos (binomios conjugados) empleando sus propias reglas, hace evidente el significado geométrico que logró construir sobre las letras.

P: ¿Qué nombre recibe en lenguaje común un producto de la forma (a+b)(a-b)?
A: Producto de binomios conjugados.
P: ¿Qué representa geométricamente un producto de la forma (a+b)(a-b)?
A: Binomios conjugados representan dos cuadrados.
P: ¿Cuáles son los pasos que seguiste al determinar el producto?
A:
El cuadrado del primer término
Menos el cuadrado del segundo término
$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
P: ¿Qué nombre recibe el producto de binomios conjugados?
A: Diferencia de cuadrados.
P: ¿Por qué?
A: Al multiplicar por sí mismo un binomio pero con diferente signo encontramos un cuadrado positivo y uno negativo ya que se cancelan las piezas iguales pero de diferente signo, entonces los cuadrados se restan y se pueden llamar diferencia de cuadrados.

P: ¿Cuál es el producto final de $(x+5)(x+5)$?
A: Es $(x+5)^2$, un cuadrado de lado $x+5$.
P: ¿Al desarrollarlo qué obtienes? (construye rápidamente un cuadrado).
A: Las piezas del producto final son $x^2+10x+25$.
P: ¿Cuáles son los pasos que seguiste para determinar el producto sin utilizar las piezas?
A:
1. El primer término lo elevo al cuadrado.
2. Sumo la constante por sí misma (el doble del primer término por el segundo término).
3. Elevo la constante al cuadrado (el segundo término lo elevo al cuadrado)

$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

Análisis

Las respuestas de Maricruz referente a las diferentes sesiones, muestran cierto dominio en su nivel de generalización algebraica ya que logra ver claramente que el producto de y por y representa y^2 (un cuadrado de lado y), en el ejemplo 3 de la sesión 7, indica que el producto de $(x+5)(x+5)$ es $(x+5)^2$, es decir un cuadrado de lado $x+5$, toma las piezas geométricas y construye rápidamente un cuadrado, señalando que las piezas del producto final son $x^2+10x+25$.

Las estrategias que desarrolló para el reconocimiento y representación algebraica de la representación geométrica se puede caracterizar cómo “el puente de lo concreto a lo abstracto”, usó esa estrategia para validar las reglas que construía. Maricruz fue capaz de identificar las operaciones algebraicas que debía realizar para producir el producto indicado sin acudir a las piezas geométricas, mostrando así su habilidad para expresar generalizaciones. Es claro que el trabajo con las piezas geométricas fue un apoyo importante cuando se le pidió construir una regla para producir un producto determinado. Para crear la regla ella debía expresar la secuencia de operaciones algebraicas que tenía en mente en un nivel de generalización que le exige emplear el lenguaje algebraico.

Tercera entrevista.

En esta entrevista Maricruz mostró un dominio en el manejo de las literales, lo cual sugiere un total avance en sus estrategias de generalización. Esta afirmación se sustenta en el tipo de respuestas que ella produjo. A continuación se proporciona evidencia de lo anterior.

P: ¿Cuál es la expresión algebraica que permite conocer el número faltante de la sucesión del problema 2 del postest?
A: “X+Y=Z”
X=número anterior de la sucesión, Y=número impar consecutivo y Z= número faltante

P: En tú postest logró ver otra expresión
A: Está mal.
P: ¿Qué haces cuando no estás seguro del resultado?
A: Lo trato de comprobar.
P: ¿Por qué crees que estás mal? al 3 no le sumas dos para encontrar el 5.
A: Sí pero se le estaba sumando a "X" que es el número anterior.
P: ¿La expresión quedaba X+2+X=No faltante?
A: Sí, pero está mal
P: ¿Qué le puedes modificar para que sea correcta la expresión?
A: Si una de las X fuera la diferencia entre el número anterior y el faltante
Por ejemplo 9-4=5
9+2+5=16
P: ¿Puedo cambiar a la expresión anterior por ésta?
A: Sí
P: ¿Cómo quedaría la expresión?
A: X+2+Y=Z donde "Y" es la diferencia entre el numero anterior y el faltante
P: ¿Con la nueva expresión podrías encontrar el número faltante?
A: Sí
P: ¿Cómo?
A: *16+2+7=25* ó 16 *+9=25,* Si vemos dos más siete es nueve, las expresiones son las mismas.
P: Indica mediante un polinomio cuál es el del área del rectángulo del problema 5 del retes.
A: $A= 4x+2(3x)= 12x^2+6x$
P: ¿Cuál es el área total de las cuatro regiones en el problema 6 del retes?
A: Un cuadrado de lado (x+y),
$(x+y)(x+y)=x^2+2xy+y^2$
P: ¿Qué es factorización?
A: Es el proceso inverso de la (no contesta más)
P: ¿Qué representa geométricamente la factorización?
A: El perímetro de una figura (los lados de un cuadrado o un rectángulo)
P: Factoriza el polinomio $3x^2+6xy-9x$.
A: ¿Con las piezas?
P: Cómo gustes
A: Puede ser x(3x+6y-9) ó 3x(x+2y-3).
P: ¿Qué representa la expresión?
A: Un rectángulo
P: ¿Cuáles son sus dimensiones? (procede a construir la figura)
P: ¿Qué piezas utilizarías para construir el cuadrado o rectángulo?
A: Tres cuadrados de lado "x", seis rectángulos de base "x" y una altura "y" y nueve piezas negativas de "x".

Análisis

En la tercera entrevista de Maricruz sus respuestas hacen evidente que ha comprendido que las reglas que construyó son expresiones generales que resumen el comportamiento del producto o la factorización. Las respuestas las podemos ubicar en la categoría expresión algebraica de una generalización.

Es importante destacar que en la primera entrevista Maricruz no logró asignar con éxito un significado a las letras ni aun como fórmulas que representan algún concepto. Kucheman (1978, 1981) citado por Kieran (2004) en sus niveles de interpretación indica que la letra es ignorada o su existencia es conocida sin darle significado El trabajo con las piezas geométricas definitivamente le dieron señales para obtener la regla del producto o factorización, las señales le permitieron aceptar sus conclusiones y asignar un significado geométrico a las letras que empleaba al construir la regla.

Resumen del caso de Maricruz

En la etapa inicial de la propuesta Maricruz mostró no haber asignado un significado correcto a las letras como fórmulas que sirven para representar cualquier concepto. Para Kucheman la letra es ignorada o su existencia es conocida sin darle significado. En la primera entrevista que presentamos se ofrece evidencia a favor de esta afirmación. Cuando se le pidió indicar mediante un polinomio el área del rectángulo cuya base es 4x+2 y altura 3x no logró darla con éxito. Maricruz tuvo dificultades al manejar dichas expresiones algebraicas debido a que no tenía un significado geométrico al uso de letras; para ella, las piezas geométricas resultaron ser herramientas que le ayudaron a dar significado a su trabajo y a comprobar sus conclusiones.

Podemos situar el caso de Maricruz en este tipo de alumnos, porque para ella fue necesario el paso por estadio de operaciones concretas para acceder al estadio de operaciones formales. Ella después de pasar por el trabajo concreto inmediatamente comenzó a trabajar empleando literales, al parecer esto se debió al tipo de actividades que se propusieron, la representación de la figura del cuadrado y el rectángulo donde se emplea la noción geométrica.

El tipo de estrategia que desarrolló Maricruz para construir reglas de generalización acerca del comportamiento de productos o factorizaciones se basó en la construcción, estudio y análisis de las piezas geométricas. Empleó estrategias de “comprensión del problema”, “representación simbólica” y “auto corrección” para aceptar o refutar sus respuestas. Es importante señalar que Maricruz al inicio de la propuesta, cuando se dio cuenta que el producto de $(x)(x)=x^2$ geométricamente representaba un cuadrado de lado x, mostró un interés especial por la propuesta didáctica, recurría frecuentemente al facilitador pero no como al inicio para resolver sus dudas y dar solución a sus actividades.

El Caso de Aline

Los propósitos de la primera, segunda y tercera entrevista son los mismos para los tres casos.

Antecedentes

Aline es una alumna de 16 años de edad que cursa el primer semestre del bachillerato, su desempeño escolar es bajo de acuerdo a los resultados de su primer examen parcial de matemáticas. En los registros de la observación de cada clase se indica que en la actividad previa (pretest), no requirió del apoyo del facilitador, en sus respuestas no mostró una estrategia exitosa en la solución de las actividades que se le propusieron.

Primera entrevista

En la entrevista se observó que ella se desempeña de manera independiente para resolver la primera actividad que se le propuso. Se encuentra evidencia de que no fue capaz de expresar generalizaciones empleando el lenguaje algebraico. Además fue posible observar que no hubo al menos un dominio en la primera categoría de generalizar a través de un lenguaje verbal.

P: Entrevistadora. ¿Cuál es el comportamiento de la sucesión numérica 1a)?
A: Aline. Dos, cuatro, seis, ocho, diez y doce.
P: ¿Cómo sabes que es correcto?
A: Está mal.
P: No he dicho que está mal.
A: Entonces está bien
P: ¿Tú que crees? (se insiste porque en la actividad el facilitador se percata de que sus compañeros le dan las respuestas)
A: No sé maestra.
P: ¿Cuál es el comportamiento de la sucesión numérica 1c)?
A: Disminuye tres cada número.
P: ¿Cómo?
A: Al veintidós se le resta tres, al diecinueve le restamos tres, al dieciséis le restamos tres.
P: ¿Cómo sabes qué lo que dices es cierto?
A: Eso creo yo.
P: En el problema 2 ¿qué número aparece en el quinto lugar de la sucesión?
A: El veinte.
P: ¿Cómo sabes que es el veinte?
A: Porque si le sumamos siete al dieciséis da veinte.
P: Aline suma 16+7
A: No, estoy mal.
P: ¿Qué es una expresión algebraica?

A: No sé.
P: Ok, la expresión 16+7= ¿qué significa?
A: No se.
P: Los términos que utilizan, ¿son términos numéricos o términos algebraicos?
A: No sé maestra, no sé qué es un término algebraico
P: ¿Sabes qué es un término numérico?
A: Tampoco
P: Ok, Aline, observa la tabla del problema 3 (se le presenta en el pizarrón y se le pide no recurrir a sus respuestas en el pretest)
P: ¿Cuál crees que sea su comportamiento?
A: Los valores aumentan.
P: ¿Cuánto aumenta x?
A: Uno.
P: ¿Cuánto aumenta y?
A: Cuatro.
P: Completa la tabla
A:

x	Y
2	8
3	12
4	16
5	**20**
6	**24**

P: Bien Aline, si x fuera 12 ¿cuál sería el valor de *y*? (pide prestada una calculadora)
A: Cuarenta y ocho.
P: ¿Segura?
A: Sí, porque si multiplico 12 por 4 es 48.
P: ¿Para qué valor de *x*, la *y* vale 84?
A: 21x4=84 por lo tanto x=21, y=84.
P: ¿Qué sucede con los valores de *y* cuando crecen los valores de *x*?
A: Crecen.
P: ¿Qué tanto crecen?
A: Son valores mucho mayores.
P: ¿Qué tan mayores? (Aline se pone nerviosa con la pregunta por lo que se continua con otra pregunta).
P: ¿Cuál es la expresión algebraica que te permite conocer el perímetro del problema 4?
A: x+x+x+x =4x.
P: ¿Quién es x?
A: El lado del cuadrado.
P: Indica mediante un polinomio el área del rectángulo del problema 5 del postest.
A: 4x+2(3x)=
$(6x)(3x)=18x^2$

P: ¿Por qué $18x^2$?
A: Porque se multiplica.

Análisis
Las respuestas de Aline a los problemas 1, 2, 4 y 5, no muestran dominio en su nivel de generalización verbal, logra observar el patrón de la sucesión de números pero no logra expresarlo adecuadamente “dos, cuatro, seis, ocho, diez y doce” “al veintidós se le resta tres, al diecinueve le restamos tres, al dieciséis le restamos tres” “Son valores mucho mayores”. En las respuestas también se encuentra evidencia de que tiene problemas con la aritmética “16+7=20”.

Segunda entrevista
En esta entrevista Aline muestra un conocimiento sobre los conceptos de perímetro, área y las unidades de medición de ambos conceptos de la sesión 1. A continuación se proporciona evidencia de lo anterior.

P: ¿Cuál es la cantidad de carrizo necesaria para la estructura del papalote?
A: Veintiuno punto seis centímetros.
P: ¿Cuál es la cantidad necesaria de papel para construir el papalote?
A: Cincuenta y dos punto dos centímetros cuadrados.
P: ¿Porque centímetros y centímetros cuadrados?
A: Porque no es lo mismo medir distancia que área.
P: ¿Hay diferencia entre perímetro y área?
A: Sí, la formula.
P: ¿Cuál es la diferencia?
A: El perímetro, el resultado te da en forma lineal y en el área te da el resultado en cuadrados.
P: ¿Para ti qué significa “el perímetro y área”?
A: Es la suma de los lados o distancia de una figura y el área en el cuadrado es la multiplicación de dos de sus lados.
P: ¿Cómo encontraste la cantidad de carrizo necesaria para la estructura del papalote?
A: Medí y sume las distancias.
P: ¿Cómo obtuviste la cantidad de papel del papalote?
A: Para el área multipliqué la base por la altura de los triángulos y sumé las áreas.
P: Indica otras unidades en que se mide el área.
A: Metros cuadrados, milímetros cuadrados
P: ¿En qué otras unidades se miden el perímetro?
A: En unidades lineales como el centímetro, metro, milímetro.
P: ¿Las piezas geométricas te ayudaron a encontrar la solución?
A: Sí me ayudaron al principio no sabía como obtener el área del papalote, pero me di cuenta que estaba formado por triángulos, así que busque el área de los triángulos, y me di cuenta que no es lo mismo medir los lados que multiplicarlos.

P. ¿Por qué no es lo mismo?
A. No estoy muy segura pero el perímetro como es el contorno de la figura, se mide y listo, en cambio el área es lo de adentro de una figura no medimos lados.
P: ¿Por qué no estás segura?
A: Bueno sí estoy segura, por ejemplo en el rectángulo mido la base y la altura dos veces para tener el perímetro pero para el área mido la base y la altura pero no se suman se multiplican y si multiplico por ejemplo 3 cm por 2 cm es 6 cm^2.

P: ¿Cual es el producto final de (x+5)(x+5)?
A: Es $(x+5)^2$, un cuadrado de lado x+5.
P: ¿Al desarrollarlo qué obtienes? (rápidamente construye un cuadrado)
A: Las piezas del producto final son $x^2+10x+25$.
P: ¿Cuáles son los pasos que seguiste para determinar el producto sin utilizar las piezas?
A: Cuadrado del término + el doble producto del primer término por el segundo término + el cuadrado del segundo término
P: ¿Cómo expresarías lo anterior de forma generalizada?
A: ¿Con una expresión algebraica?
P: Sí
A: No sé maestra eso todavía me cuesta mucho, pero así se puede obtener el producto del cuadrado de un binomio sin utilizar las piezas y se entiende mejor que con letras.

Análisis
Las respuestas de Aline referente a las diferentes sesiones, muestran que fue capaz de lograr un dominio en su nivel de generalización geométrica pero su generalización algebraica aunque no logra ser del todo acertada, ya que logra ver claramente que el producto de (x+5)(x+5) es $(x+5)^2$, es decir un cuadrado incluso al trabajar con las piezas geométricas construye un cuadrado, señalando que las piezas del producto final son $x^2+10x+25$, sin embargo se le pide enumerar los pasos únicamente logra hacerlo verbalmente y no algebraicamente como algunos de sus compañeros.

Ha logrado desarrollar exitosamente el reconocimiento y representación algebraica de la representación geométrica. Ha logrado identificar las operaciones algebraicas que debía realizar para checar el producto indicado sin acudir a las piezas geométricas. El trabajo con las piezas geométricas definitivamente le dio a Aline señales para obtener la regla del producto o factorización, las señales le permitieron aceptar sus conclusiones.

Tercera entrevista

En esta entrevista Aline mostró un manejo de las literales, lo cual sugiere que hubo un avance en sus estrategias de generalización. Esta afirmación se sustenta en el tipo de respuestas que ella produjo. A continuación se proporciona evidencia de lo anterior.

P: ¿Cuál es la expresión algebraica que permite conocer el número faltante de la sucesión del problema 2 del postest?
A: A principio puse una expresión numérica y después no me dio tiempo de pasarla a algebraica, porque llegué tarde al salón.
A: Pero espéreme tantito, se puede expresar también con $x*x=x^2$.
P: ¿Quién es x?
A: El número consecutivo de 1 al que sea.
P: ¿Por qué?
A: $(1)^2=1$
$(2)^2=4$
$(3)^2=9= 3*3$
P: ¿Cómo se calcula el perímetro del cuadrado del problema 4?
A: P=l+l+l+l o también P=4x si el lado no mide l sino x, o P=20 si el lado mide 5
P: ¿Si no tienen una medida indicada?
A: Puede medir un valor desconocido “x, l,” el que sea
P: Bien Aline y ¿Cómo obtienes el área del cuadrado?
A: Multiplicando lado por lado.
P: ¿Cómo representar lo anterior algebraicamente?
A: Si mide l es $A=l*l=l^2$.
P: Indica mediante un polinomio cuál es el del área del rectángulo del problema 5 del postest.
A:
3x(x+2)=12x2+6x
$a=12x^2+6x$
P: ¿Por que $12x^2+6x$?
A: Porque se multiplica aplicando la propiedad distributiva.
P: ¿Qué es factorización?
A: Proceso inverso de la multiplicación.
P: ¿Qué representa geométricamente la factorización?
A: El perímetro, más bien sólo dos de los lados del cuadrado o rectángulo.
P: Factoriza el polinomio $3x^2+6xy-9x$ del ejemplo 3 de la sesión 8.
A:
=3x(x+2y-3)
P: ¿Qué piezas utilizarías para construir la figura de la expresión?
A: Las que indica el polinomio, tres de “x^2”, seis “xy” y nueve de “-x”
P: ¿Cuales serías los lados de la figura?

A: Son 3x y x+2y-3 los lados del rectángulo.

Análisis

En la tercera entrevista de Aline sus respuestas hacen evidente que no logró construir expresiones generales a través del lenguaje algebraico que resumen el comportamiento del producto o la factorización. Kucheman (1978, 1981) citado por Kieran (2004) encontró en sus niveles de interpretación a la letra considerada como una incógnita específica: La letra es tomada como un número específico pero desconocido.

Sin embargo las respuestas las podemos ubicar en la tercera categoría de una generalización, lo cual indica que está en el proceso de transición para acceder a la cuarta categoría.

Resumen del caso de Aline

En la etapa inicial de la propuesta Aline mostró no haber asignado un correcto significado a las letras como fórmulas que sirven para representar cualquier concepto. Kucheman considera que la letra es tomada como un número específico pero desconocido.

En la primera entrevista que presentamos ofrece evidencia a favor de esta afirmación. Cuando se le pidió indicar mediante un polinomio el área del rectángulo cuya base es 4x+2 y altura 3x no logró darla con éxito.

Aline tuvo dificultades al manejar dichas expresiones algebraicas debido a que no tenía un significado geométrico al uso de letras; para ella, las piezas geométricas resultaron ser herramientas que le ayudaran a dar significado a su trabajo, como lo propone Socas.

Ella después de pasar por el trabajo concreto logró trabajar empleando literales, al parecer esto se debió a la actitud que tomó para resolver las actividades que se propusieron, al principio se aislaba y no recurría al facilitador se observó que tenía dudas pero no las manifestaba, al darse cuenta de esto en la primera entrevista el facilitador se le acercó para darle confianza al preguntar.

El tipo de estrategia que desarrolló Aline fue el de consultar sus dudas con el facilitador para dar solución a las actividades de la propuesta, logrando con el tiempo cierta independencia para crear las reglas de generalización acerca del comportamiento de productos o factorizaciones.

Es importante señalar que Aline al inicio de la propuesta no mostró interés, sin embargo cuando el facilitador se acercó a ella, surge ese interés que logró motivarla.

5.5 Análisis de las respuestas dadas al postest por el grupo experimental

5.5.1 Análisis cuantitativo

El postest fue aplicado a 26 estudiantes del primer ingreso a bachillerato, que son los que integran el grupo experimental al, se aplico un día después de terminar la propuesta didáctica y fue resuelto en una hora máximo, teniendo como herramientas lápiz y papel. Los datos globales de postest (calificación global, aciertos por pregunta y errores por pregunta) fueron satisfactorios. La distribución de calificaciones fue normal con un sesgo que indica abundancia de calificaciones en la parte alta de la distribución. La media de las calificaciones globales del postest fue de 7.74.
En la Tabla 5 que se presenta a continuación se muestra los porcentajes de aciertos encontrados para cada una de las preguntas del postest.

Porcentaje de aciertos[28]

	p1	p2	p3	p4	p5	p6
Dio solución exitosa al problema	42%	23%	46%	54%	73%	65%

Tabla 5

En el análisis global de las respuestas de los estudiantes muestra que más de 50% de ellos contestó las preguntas correctamente obteniendo un aprovechamiento mayor a 80% y sólo 12 % obtuvo un aprovechamiento menor a 60%. Las calificaciones globales son normales de lo que podría esperarse para estudiantes de primer ingreso al bachillerato que han estudiado el tema de productos notables y factorización.

Sólo tres estudiantes no lograron un aprovechamiento suficiente. Esta perspectiva global pone en evidencia que la generalización aritmética como algebraica y el cálculo de perímetro y área son conceptos sólidos entre los estudiantes que han cursado el tema de productos notables y factorización. Lo aprendido en la propuesta parece que les permite hacer generalizaciones algebraicas de patrones numéricos y expresiones algebraicas para calcular perímetro y área de cuadrados y rectángulos.

[28] Ver anexo 4

5.5.2 Análisis cualitativo

5.5.2.1 Acerca de las respuestas del postest

Con el fin de obtener una visión más amplia de la noción de generalización algebraica y cálculo de perímetro y área que tienen los estudiantes, se realizó un análisis cualitativo de las respuestas dadas al postest. Las respuestas se organizaron agrupándolas en tres categorías: entendió el problema, planteó el problema y dio solución exitosa al problema. En un segundo momento se procedió a analizar para cada pregunta todas las respuestas correctas.

La Tabla 6 presenta una selección de preguntas que requieren el uso de la generalización algebraica y el cálculo de perímetro y área (problema 2a, 4, 5 y 6).

Las respuestas que los estudiantes dieron a las preguntas que demandan una generalización algebraica, indican que no tienen dificultades para representar generalización algebraicas; y para diferenciar el cálculo de perímetro y área (ver problemas 2a, 4, 5 y 6 en la Tabla 6), lo que sugiere una conceptualización correcta de esos aspectos.

En general se detectó una tendencia a buscar en las expresiones geométricas la solución a los problemas, durante la aplicación del postest los alumnos recurrían a sus conocimientos previos (productos notables y factorización) para validar sus respuestas de perímetro y área. Al tener la certeza de la respuesta buscan otra expresión algebraica.

Lo anterior se pone en evidencia, por ejemplo, en las respuestas dadas a la pregunta 2a, 4, 5 y 6 (Tabla 6).

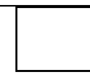
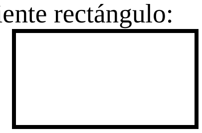
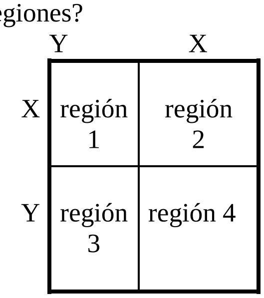
	Entendió el problema	Planteó el problema	Solución exitosa al problema	Ejemplos de soluciones exitosas al problema
p2a. ¿Cuál es la expresión algebraica que permite conocer el número faltante de esta sucesión? 1, 4, 9, 16, _ ,36	96%	65%	42%	$X_2-X_1+2+X_2=X_3$ X_2 segundo número X_1 primer número X_3 tercer número
p4. Escribe una o más expresiones para el perímetro del cuadrado  .	54%	38%	27%	 l P= l+l+l+l P=l(4)
p5. Indica mediante un polinomio el área del siguiente rectángulo:  3X 4X+2	65%	35%	4%	$3x(4X+2)= 12x^2+6x$
p6. Según la figura contesta las siguientes preguntas • ¿Cuál es el área de cada región? • ¿Cuál es el área total de las cuatro regiones?  .	54%	23%	4%	Región 1 $(x)(x)=x^2$ Región 2 $(x)(y)=xy$ Región 3 $(x)(x)=2x$ Región 4 $(y)(y)=y^2$ 4 Regiones Área= lxl $(x+y)(x+y)=(x+y)^2$ $x^2+2xy+y^2$

Tabla 6. Tipo de respuestas dadas a preguntas que involucran expresiones algebraicas

5.6 Comparación de las respuestas dadas al postest entre el grupo experimental y el grupo control

En este trabajo se planteó la pregunta de si la propuesta didáctica podría ayudar a mejorar el aprendizaje de los estudiantes en temas concretos (productos notables y factorización) de álgebra. Los resultados obtenidos del postest muestran que hubo progresos significativos en los dos temas tratados. Con respecto al tema de productos notables se logró que los estudiantes fueran conscientes de la existencia de relaciones entre los conceptos de producto de polinomios y el área de un lugar geométrico (cuadrado y rectángulo). En el tema de factorización se logró que los estudiantes fueran conscientes de la existencia de relaciones entre los conceptos de factorización de un polinomio y los lados de un lugar geométrico (cuadrado y rectángulo).

A continuación se observa que el porcentaje de aciertos en el grupo experimental es alto respecto al grupo control. En especial en los problemas 5 y 6 donde se presentan los dos temas.

Porcentaje de aciertos del grupo experimental[29]

	p1	p2	p3	p4	p5	p6
Dio solución exitosa al problema	42%	23%	46%	54%	73%	65%

Porcentaje de aciertos del grupo control[30]

	p1	p2	p3	p4	p5	p6
Dio solución exitosa al problema	56%	15%	30%	33%	33%	19%

Ahora bien, hay motivos para atribuir dicho progreso al uso de las piezas geométricas durante la propuesta didáctica. El argumento principal consiste en que el uso de las piezas geométricas permitió trabajar con una expresión concreta (área y perímetro). Así mismo, las piezas geométricas ayudaron a superar el obstáculo que representa la carencia de significado, de manera que se pudo hablar en general del proceso de producto y factorización algebraica. Entonces, las piezas geométricas juegan un papel importante en la medida en que permitieron establecer las relaciones entre temas de álgebra, sin que fueran necesarias técnicas operatorias complicadas (abstractas).

Por último, se debe comentar que un factor a favor de la introducción de las piezas geométricas en las clases de álgebra es el entusiasmo que genera entre los estudiantes la novedad de hacer matemáticas con estas herramientas. Los estudiantes estuvieron permanentemente interesados, no así al terminar la propuesta es decir en sus clases diarias de matemáticas. Algunos de ellos no se limitaban a las actividades propuestas si no que por propia iniciativa se planteaban problemas que no estaban ligados con los temas específicos de la propuesta (por ejemplo, cómo se divide, cómo se resuelven otros problemas de área y volumen, etc.).

[29] Ver anexo 4
[30] Ver anexo 5

5.7 Análisis de respuestas dadas al pretest en donde los alumnos dan significado a las letras.

Ejemplo 1.

P: **Entrevistadora** ¿Cuál es la expresión que te permite conocer el perímetro del problema cuatro?
A: **Jaime** $P=l+l+l+l$ o bien $P=l*4$, donde el perímetro del cuadrado es P y l es la medida de su lado.
P: ¿Puedes obtener la solución de otra forma?
A: Si.
P: ¿Cuál?
A: Cuando tiene un valor exacto, como dos centímetro o dos metros.
P: ¿Cómo puedes verificar tu resultado?
A: Porque el perímetro es la suma de los lados de una figura, en el cuadrado se suman los cuatro lados.

Análisis
Las respuestas de Jaime muestran que fue capaz de producir expresiones algebraicas, a esta respuesta se le puede definir mediante la categoría "simbólica algebraica". Sin embargo también se puede considerar a la respuesta en las categorías de Kucheman como "letra considerada como una incógnita específica" es decir Jaime toma a la letra como un número específico pero desconocido.

A continuación se presenta el trabajo escrito del estudiante Jaime en el problema cuatro del pretest.

Ejemplo 2.

P: Entrevistadora ¿Cuál es el área del rectángulo?
A: Carlos Base por altura, en este caso la base es un binomio y la altura un monomio (lo escribe).
P: ¿Cuál es el área total de las 4 regiones del problema 6?
A: Nada más se suman.
P: ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?

A: x mas y, (escribe xy pero se queda pensando borra y escribe x+y).
P: xy o x+y.
A: x+y.
P: x+y ¿es lo mismo que xy?
A: No, no es lo mismo aquí se efectúa un producto y aquí se suma, además si se multiplica estaríamos hablando de área no de perímetro.
P: ¿Qué valor toma x?
A: Cualquier número.
P: ¿Qué valor toma y?
A: Cualquier número.
A: El área total de la figura es $x^2+xy+xy+y^2$.
P: ¿Puedes expresar de otra forma el área total?
A: Sí, se puede expresar (x+y)(x+y) porque el lado mide una cantidad x más una cantidad y.

Análisis

Las respuestas de Carlos muestran un mayor dominio en el manejo de las letras comparado con las respuestas de Jaime, pues Carlos fue capaz de producir dos expresiones algebraicas para el área total del problema 6, esta respuesta se le puede definir mediante la categoría "simbólica algebraica". Sus respuestas hacen evidente que ha comprendido que las reglas o fórmulas que construyó son expresiones generales. Por otro lado también se puede considerar a la respuesta en las categorías de Kucheman como "letra considerada como un número generalizado", es decir Carlos ve a la letra como representante de varios valores y no solo de uno.

A continuación se presenta el trabajo escrito del estudiante Carlos en el problema seis del pretest

Ejemplo 3.

P: Entrevistadora ¿Cuál es la expresión algebraica que te permite conocer el perímetro del problema cuatro?
A: Cristina No se.
P: ¿Qué es el perímetro?
A: El perímetro es el contorno de una figura.
P: ¿Cuál es el contorno del la figura del problema 4?
A: Toda la orilla.
P: ¿Cuanto mide?
A: La suma de sus lados, pero no se sabe cuanto mide el lado
P: ¿Cuál sería la expresión si el lado mide l?
A: lado + lado + lado + lado, no se sabe cuanto mide el lado.

Análisis
Las respuestas de Cristina muestran que no fue capaz de producir expresiones algebraicas, a esta respuesta se le puede definir mediante la categoría “verbal”. Se puede además considerar a la respuesta en las categorías de Kucheman como “letra no considerada” es decir la letra es ignorada o su existencia es conocida sin darle significado.

A continuación se presenta el trabajo escrito del estudiante Cristina en el problema cuatro del pretest.

Ejemplo 4.

P: Entrevistadora ¿Cuál es el área del rectángulo del problema cinco?
A: Efraín: 18.
P: ¿Cuál es la expresión algebraica que te permite conocer el área del rectángulo?
A: $a= (4x+2)(3x)$
a=base x altura
P: Bien, ¿qué pasa con el área?
A: Vale 18.
P: ¿Porque 18?
A: Porque la x vale 1, entonces los lados miden 6 y 3.
A: 6 x 3=18 de área.

Análisis

Las respuestas de Efraín muestran que no fue capaz de producir expresiones algebraicas, a esta respuesta se le puede definir mediante la categoría “aritmética”. O bien considerar a la respuesta en las categorías de Kucheman como “letra evaluada” es decir a la letra le es asignado un valor numérico desde el principio. Efraín asigna inmediatamente a las letras un valor numérico, ya que en todos los problemas donde se localiza una letra supone un valor para la letra.

A continuación se presenta el trabajo escrito del estudiante Efraín en el problema cinco y seis del pretest.

Capitulo 6

Conclusiones

Antes de concluir, cabe recordar que en el trabajo de tesis se ha querido conocer cuáles son los significados que los estudiantes de bachillerato le asignan a las expresiones algebraicas (productos notables y factorización) a partir de una propuesta didáctica de materialización concreta de objetos geométricos, manipulables, para llegar a la simbolización algebraica.

Para lo anterior se diseñó y sometió a experimentación pedagógica una propuesta didáctica constituida por tres etapas: la concreta, *la geométrica* y la simbólica en el proceso de enseñanza-aprendizaje de productos notables y factorización. La propuesta se aplico a un grupo denominado grupo experimental; para reportar los cambios que se observaron en el grupo bajo la propuesta, se comparó con otro grupo denominado grupo control, para el cuál su proceso de enseñanza-aprendizaje no fue bajo la propuesta didáctica, sino de una forma cotidiana, tradicional.

En cuanto a conocer las estrategias que emplean los alumnos de primer semestre de bachillerato en la resolución de problemas de productos notables y factorización; antes de estudiar el tema en la escuela se diseñó y aplico un cuestionario (antes de la experimentación de la propuesta), al cuestionario se le denominó pretest.

Al término de algunas sesiones de la propuesta se llevaron a cabo entrevistas al grupo experimental que permitieron constituir 3 estudios de caso. Para el análisis de estos casos también se utilizó el trabajo escrito de los alumnos a lo largo de la propuesta, y el registro de videograbaciones y notas de las observaciones de cada sesión. Al final de la propuesta se aplicó el cuestionario anterior, denominado ahora postest.

Al estudiar detalladamente los resultados del postest, es posible decir que los alumnos del grupo experimental confundieron los procedimientos algebraicos con menos frecuencia que sus compañeros del grupo control, por consiguiente, alcanzaron mayor aptitud para quedar clasificados en la categoría simbólica algebraica. Este resultado permite concluir que es probable que los métodos activos en que se basó la propuesta hayan sido más aptos para desarrollar las capacidades que se buscaban.

De acuerdo con las diferentes ejecuciones de los estudiantes del grupo experimental se obtuvieron evidencias de alumnos que consideran a las letras como números generalizados es decir la letra es vista como representante, de varios valores y no sólo de uno, como es el caso de Armando (ver página 115). Otros estudiantes consideran a las letras como una incógnita específica es decir la letra es tomada como un número específico pero desconocido, como es el caso de Aline y de Jaime (ver páginas 131 y 137).

Por otro lado, la finalidad de la propuesta fue que los alumnos construyeran un puente de vinculación usando material concreto entre la geometría y la manipulación sintáctica del álgebra, y entre otras posibilidades, expresaran o llegaran a expresar las nociones de perímetro y de área del cuadrado y del rectángulo en términos algebraicos.

Al inicio de la propuesta se advirtió que el problema principal para los alumnos fue la operación destinada a hallar el área de las figuras. Al principio de la prueba, algunos revelaron su tendencia a considerar el perímetro como una característica de la dimensión de las figuras. Espontáneamente propusieron hallar el perímetro sumando los lados de las figuras. En sus investigaciones de psicología genética, Piaget y sus colaboradores encontraron numerosos ejemplos de este fenómeno: es ley fundamental del desarrollo intelectual del niño que piense inicialmente en términos de cantidades unidimensionales y que sólo más adelante construya las cantidades unidimensionales y que sólo más adelante construya las cantidades bi y multidimensionales.

A continuación se plantean los resultados de este trabajo en relación a los significados que les asignaron los estudiantes que participaron en el desarrollo de la propuesta, a las experiencias algebraicas que denotan a los productos notables y a la descomposición en factores.

6.1 SIGNIFICADOS DE LOS ESTUDIANTES A LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Los datos y resultados discutidos en el capítulo anterior muestran que los alumnos fueron capaces de formular generalizaciones una vez que trabajan con la propuesta didáctica. A continuación se discute la forma en que influyó en el aprendizaje de los alumnos la propuesta didáctica constituida por tres etapas: la concreta, *la geométrica* y la simbólica. Las actividades que realizaron los alumnos al emplear el material concreto involucran el comportamiento general de relaciones numéricas. De acuerdo con los datos obtenidos durante el trabajo de campo los estudiantes emplearon las piezas geométricas para explorar posibles soluciones a los problemas planteados en la propuesta didáctica, por ejemplo, cuando se les pidió encontrar una regla para factorizar, recordaron lo que realizaron con las piezas geométricas, recurrían a las expresiones aritméticas (adición, sustracción, multiplicación), posteriormente se daba cuenta de que con una fórmula se podía llegar más rápido a la respuesta y decidían emplear letras. Para ellos las letras son cómo símbolos que sirven para representar cualquier número que se suma, resta o multiplica por algo. Kucheman (citado por Kieran, 2004) en sus niveles de interpretación encuentra a la letra considerada como un número generalizado es decir la letra es vista como representante, o por lo menos con la posibilidad de serlo, de varios valores y no sólo de uno.

Kucheman siguiendo principios piagetanos, asoció esos roles de las literales a diferentes estadios del desarrollo intelectual de los estudiantes, y propone que la noción de variable sólo puede ser comprendida cuando los estudiantes alcanzan el estadio de las operaciones formales. De acuerdo con esto, las nociones para las letras como objetos y como números generalizados deben preceder la noción de variable.

Evidencia de lo anterior es lo que realiza **Maricruz** cuando se le pregunta sobre el significado de la expresión x^2+bx+c que ella formuló para dar respuesta a una actividad propuesta en la entrevista. Ella contestó que "cualquier producto de binomios que tenga una letra más un número por la misma letra más otro número pueden ser representado por la expresión".

Alejandro logró identificar la diferencia que se suma con cierto patrón numérico en el postest, esto es expresado por él "veo que primero aumenta 1, luego 2, 2, luego va 3, 3, 3 y luego 4", "va aumentando" esto sugiere que está alcanzando una generalización verbal (lenguaje cotidiano). Cuando se le pidió expresar con una expresión algebraica eso que "va aumentando", Alejandro recurre a la suma de la diferencia con un patrón numérico, por ejemplo, 2-3=1, 3-5=2, 5-7=2, 7-10=3, 10-13=3, la diferencia 1, 2, 2, y 3, 3, son la diferencia que se suman con el patrón numérico un 1,; dos 2; tres 3. La respuesta de este alumno se sitúa en la generalización mediante aritmética, ya que acude a recursos aritméticos.

Ricardo se apoyó en la multiplicación para encontrar la respuesta a la actividad, su argumento es el siguiente "2, 4, <u>6</u>, <u>8</u>, 10, <u>12</u> …cada número va aumentando de dos en dos y puedo utilizar la multiplicación 1*2=2, 2*2=4, 3*2=6, 4*2=8, 5*2=10, 6*2=12,", "o la tabla del 2 es decir x*2para más fácil". Primeramente Ricardo se apoyó en la expresión verbal de una generalización, ya que dice que los números de la sucesión numérica van aumentando de 2 en 2; posteriormente, al ver lo que pasaba en la actividad, se dio cuenta que podía emplear una operación básica que es la multiplicación 2*5=10, y generalizarla con la fórmula x*2.

Estas respuestas son ejemplo de los logros de los estudiantes, ellos alcanzaron un nivel de generalización de expresión verbal, aritmética y algebraica, apoyándose en el material concreto, observándolo y manipulándolo.

En particular debemos destacar en este punto que el uso de las letras como instrumento de generalizaciones tal vez se indujo de manera sutil en la redacción de las actividades propuestas (ver pretest, pregunta 4 y 5)

Es probable que el uso de las letras en el sentido algebraico que se empleó en la propuesta, haya conducido a los alumnos a emplear literales en la construcción de fórmulas como las que hemos mencionado en los párrafos anteriores.

El material concreto fue un elemento que influyó para que los alumnos desarrollaran estrategias diferentes que los llevaron a dar respuesta a las actividades propuestas. Estos descubrimientos en el trabajo de los alumnos se relacionan con lo reportado por Szendrei (1996) quien considera que los materiales concretos en las matemáticas han sido importantes desde tiempos antiguos.

Además, con respecto al uso de las piezas geométricas, se encontró que en algunas ocasiones se emplearon como un recurso para comprobar o autocorregir.

Laura utilizó las piezas para comprender, plantear productos y al mismo tiempo para verificar o autocorregir sus respuestas. Ella al principio utilizaba sólo la expresión verbal (regla), pero al darse cuenta que podía usar las piezas geométricas para representar cualquier producto de dos o tres dimensiones, comprendió que podía usar las piezas y simplificar su trabajo al manejar la expresión algebraica de una generalización. Para Socas (1996), el uso de más de un lenguaje para representar un concepto favorece la abstracción del concepto, ya que tenemos más puntos de referencia y permiten establecer así más relaciones.

Debe observarse que Laura desde el uso de las piezas fue capaz de proponer o anticipar una figura como un recurso que le permitía “ir más rápido” cuando trataba de dar una generalización (producto). También se observó que cuando trabajó con las piezas afinó sus estrategias, confirmó lo que había empleado de forma memorística, esto se sustenta con lo sugerido por Piaget quien halló que el niño elabora en el curso de su desarrollo reacciones mucho más sutiles que los hábitos. Las denomina "operaciones", cuyo campo de aplicación es más extenso que el hábito. La operación no necesita *señal* para producirse y no está unida a una expresión simbólica (verbal, algebraica, numérica) fija. Por componerse de operaciones parciales coordinadas de manera continua entre sí que forman con otras operaciones sistemas de conjunto coherente y móvil, puede aplicarse a todo dato que lo permita objetivamente.

Para Socas (1996), los materiales fomentan descubrimientos, ya que puede introducir al alumno en un proceso de conjetura, dejando atrás el pensamiento tradicional. Para resolver un problema se sugiere comenzar por los manipulativos para que se pueda examinar el proceso, el acto de construir una figura puede ser de gran beneficio ya que se comprende el proceso.

Los datos obtenidos en el desarrollo del trabajo de los estudiantes concuerdan con los descubrimientos encontrados por Hernández (2000) donde menciona que el uso de las piezas geométricas lleva a los estudiantes a concentrarse en los procesos de solución, propicia que los estudiantes desarrollen sus propias reglas para operar y además verificar la validez de sus conjeturas.

En el presente trabajo, los alumnos también asignaron significados a las letras que empleaban para construir una figura. Ellos se dieron cuenta que las letras se usan para representar conceptos y no sólo números y que no importa qué letra se emplee para crear una figura, de todos modos la representa, esto se sustenta con lo sugerido por Kucheman (citado por Kieran, 2004): la letra es vista como representante, o por lo menos con la posibilidad de serlo, de varios valores y no sólo de uno.

Las piezas geométricas permiten al alumno usar estrategias no convencionales resultado de su razonamiento; los alumnos plantearon conjeturas y las evaluaban por ellos mismos al trabajar con las piezas geométricas.

En todas las actividades que se propusieron estuvo involucrado el reconocimiento de patrones, el hecho de que los alumnos hayan realizado un trabajo donde probaban sus ideas con el auxilio de material manipulable, les permitió diferenciar entre una serie de sucesos las invariantes de la situación. En la propuesta didáctica que se empleó, los alumnos no llegaron únicamente al nivel de reconocer las invariantes sino reconocerlas en el contexto matemático, en particular lo que ésta detrás es la idea de perímetro y área, donde hay una suma o producto de variables. Puede observarse que en las actividades propuestas de los productos y las factorizaciones pueden representarse por áreas y perímetros de cuadrados o rectángulos.

El material manipulable influyó de manera decisiva en los alumnos de los tres niveles (bajo, medio y alto promedio). Sin embargo, el desempeño alcanzado fue diferente, las producciones de los alumnos de alto nivel fueron en su mayor parte exitosas y originales. Cuando se les preguntó si los materiales les fueron útiles para resolver las actividades, las respuestas afirmativas fueron sustentadas en producciones exitosas, ellos respondieron mediante acciones en las que mostraron ejemplos de cómo usaban el material, los alumnos de este nivel pasaron más rápido del modo de representación geométrica al modo simbólico; un ejemplo de esto se puede ver en el análisis y descripción de resultados con los alumnos Armando y Alejandro

Los alcances de los alumnos de nivel medio también fueron exitosos. Sin embargo requirieron más apoyo del facilitador para dar respuestas acertadas a las actividades propuestas.

Las respuestas de los alumnos con nivel bajo fueron más limitadas, sólo con el apoyo del facilitador pudieron encontrar alguna respuesta a las actividades. En ellos se notó que las ideas generadas a partir del empleo de las piezas geométricas no fueron suficientes, sino que requerían del apoyo más directo del facilitador, sin embargo a medida que la didáctica se llevo acabo los alumnos tuvieron alcances similares a los alumnos de nivel medio, es decir dejaron de requerir el apoyó directo del facilitador.

En los casos de Ricardo (nivel alto) y Aline (nivel bajo), en los que el uso del material no pareció necesario, los resultados alcanzados fueron muy diferentes, mientras que Ricardo fue capaz de generar respuestas en el nivel algebraico, Aline generó respuestas sólo a los niveles verbal y aritmético apoyada por el facilitador.

En estos alumnos se puede observar que el bagaje de conocimientos previos les permitió desenvolverse aceptablemente, pero esto depende del nivel de consolidación que se tenga de esos conocimientos. Sin duda ese bagaje es el que los dispuso a asignarle significado a los objetos y relaciones entre ellos.

Tal vez, si se continuara con este tipo de propuesta didáctica sería muy factible que los alumnos llegaran a tener desempeños de nivel más alto que los que se obtienen simplemente a partir de una clase dictada por el profesor, en donde los estudiantes están obligados a seguir las líneas de razonamiento del profesor y tienen pocas oportunidades, o ninguna, de iniciar la búsqueda de una solución a partir de sus propias estrategias y conocimientos.

El tipo de trabajo que se propuso en esta investigación le da a los alumnos la oportunidad de expresar generalizaciones, incluso llegar al nivel de generalización algebraica siguiendo sus propias formas de razonamiento y empleando sus propias estrategias. En parte, el camino de significación que los alumnos siguieron sería como el señalado por Hoyos (1998), en donde fueron importantes las significaciones derivadas de la aritmética (en operaciones y procedimientos); y también, de manera complementaria, por Herscovics (1980), quién subrayó la importancia de la significación basándose en la geometría (formas y figuras).

En síntesis, entre los resultados más importantes que se observaron, a partir de la aplicación del tipo de actividad que se describió (ver página 54 a 89), es que se ayudó a los estudiantes a generar significados para avanzar hacia el simbolismo algebraico a través de ciertos usos que se les dieron a las letras, en particular el uso de letras y de fórmulas algebraicas para denotar perímetros y áreas de ciertas figuras geométricas.

La influencia de las piezas de material con figuras geométricas en los alumnos de nivel medio fue un agente de motivación, las piezas representaron un medio que promovió el uso del lenguaje algebraico (ver el caso de **Maricruz**).

En general cuando se les pidió encontrar una expresión algebraica, las piezas geométricas fueron un factor importante, ya que exploraban sus ideas. Para encontrar una expresión (factorización) que les permitiera generar dado un producto, se apoyaron en las piezas geométricas como medio que les auxiliaban para comprobar sus conjeturas.

Por otro lado en cuanto a la cuestión ¿qué estrategias desarrollan los alumnos trabajando con la propuesta didáctica constituida por tres etapas: la concreta, la geométrica y la simbólica en el aprendizaje de productos notables y factorización? Se puede mencionare que los datos escritos en párrafos anteriores y en el capitulo 5 nos muestran cómo los alumnos desarrollan diferentes estrategias: Prueba y error, Observar comportamientos de patrones numéricos, Comprensión de un problema, Planteamiento de un problema, Anticipación, Autocorrección y Representación simbólica, para llegar a proponer respuestas a las preguntas planteadas en la propuesta y las entrevistas. Aunque en esta tesis no se profundizó en esta caracterización, ello hace pensar en un posible desarrollo futuro del tema.

Lo reportado sugiere que las piezas geométricas son una herramienta que hace que el alumno vaya más allá de una simple memorización, ya que proporcionan mejores formas de manipular símbolos; por lo tanto, en una situación problemática, similar a las que aquí se instrumentaron el desafío para el estudiante es determinar si la respuesta que obtuvo tiene sentido a diferencia del inicio de la propuesta donde el alumno utilizó exclusivamente la estrategia de “prueba y error”.

Las piezas geométricas permiten la introducción del álgebra, estableciendo firmemente al uso de las expresiones simbólicas generales; iniciando el álgebra manipulando símbolos para denotar perímetros y áreas, para que el alumno vea el álgebra como una herramienta matemática que permita representar relaciones generales que ellos mismos producen. Son un recurso que puede favorecer de manera determinante la introducción al estudio del álgebra. Cuando se preguntó a los estudiantes acerca de la utilidad que representaba tanto las piezas geométricas como la propuesta, dieron respuestas como las siguientes: “en ocasiones son útiles ya que usando el material me di cuanta de lo que pasaba con las expresiones”, “el material te ayuda a resolver las actividades ya que luego no me salía bien lo que quería hacer y utilizando el material encontraba la solución”, “la piezas te ayudan porque se me hace más corta la clase y resuelvo bien los problemas”, “las piezas ayudan a encontrar respuestas más fácil” “me gusta la clase porque trabajamos con las piezas geométricas en equipo”.

Por otro lado como indica Auzmendi (1992) favorecer el desarrollo de actitudes positivas hacia las matemáticas ha de convertirse en uno de los objetivos fundamentales del profesor pues no basta con intervenir para que el alumno saque buenas notas. Es importante mencionar que las actividades motivaron a los estudiantes a trabajar, cambió la actitud de los alumnos hacia las matemáticas, en las sesiones los alumnos comentaban entre ellos “ya me gustan las matemáticas, porque sí le entiendo”, “¡Nooo¡ a poco ¿Ya se término la clase?, “se multiplica el primer término pos sí mismo o se eleva al cuadrado es igual”, “los que no terminamos lo hacemos en casa”, “¿por que en secundaria no nos dan las clases de matemáticas así?”, “otro ratito, el maestro de Ingles llega tarde”, “¿me prestará las piezas para enseñarle a mi hermana?”.

6.2 VENTAJAS DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA

Una propuesta didáctica para el aprendizaje de los productos notables y la factorización, donde se combinó las piezas geométricas y hojas de trabajo, son un escenario que propicia en el estudiante un mayor interés en la clase de matemáticas. De acuerdo con las observaciones realizadas durante el desarrollo de las sesiones, los alumnos que manifestaron poco agrado hacia las matemáticas en la entrevista inicial, probablemente debido al ambiente de aprendizaje memorístico que se empleó, manifestaron durante la propuesta un interés creciente, lo cual sugiere que este medio didáctico resultó muy alentador para los alumnos.

Las piezas geométricas son elementos que motivan al alumno a aceptar sin mayor cuestionamiento el uso de un nuevo lenguaje, el algebraico. El medio de aprendizaje que se empleó en este trabajo sugiere que los materiales concretos, son recursos que pueden favorecer de manera determinante la introducción del estudio de los productos notables y factorización en el bachillerato.

Socas (1996), sugiere que para enseñar matemáticas como un sistema de conceptos interrelacionados se debe dar un cambio en el énfasis: de un currículo dominado por la memorización de hechos aislados y de procedimientos, a un currículo que privilegie la comprensión de conceptos, las representaciones múltiples, las conexiones de modelación matemática y la resolución de problemas. Sugiere además que se confirmen las respuestas a través de varias formas de representación, enriqueciendo el proceso de razonamiento en el estudiante. Los materiales manipulables pueden ayudar a que los estudiantes descubran el proceso que conduce a una respuesta. Finalmente es necesario mencionar las implicaciones que se derivan de la aplicación de un enfoque didáctico como el que se empleó en este trabajo en la tarea del facilitador y en los aprendizajes de los alumnos.

La propuesta didáctica empleada permite al facilitador organizar la clase de manera que pueda llevar un seguimiento de cada alumno en cuanto a sus producciones. Durante el desarrollo de la clase el facilitador no se centra en transmitir el conocimiento de una manera lineal, ya que deja de desempeñar el rol habitual donde es él quien sabe todo y es él que tiene que ser el principal portador de ideas para que el alumno aprenda, sino que toma el papel de guiar, auxiliar, orientar, en el proceso que generan los estudiantes para resolver las situaciones planteadas. Es decir, no impone reglas a seguir, permite la plena libertad de que el alumno exponga y exprese sus ideas, haciendo más atractiva la clase de matemáticas, viendo las actividades como retos o juegos sin la necesidad de memorizar fórmulas.

El hecho de que los alumnos registren sus ideas en las hojas de trabajo permite al facilitador analizar más profundamente las producciones de éstos y conocer las deficiencias donde requieren mayor apoyo. Esta revisión conduce al facilitador a crear un plan, donde decida el tipo de actividades que va a pedir para que cada alumno logre el aprendizaje del tema.

Además esta propuesta invita al facilitador a emplear formas de enseñanza distintas para lograr que el estudiante se interese en el estudio del álgebra; el facilitador tiene que estar preparado para analizar producciones originales que antes no había conocido. Por otro lado, el facilitador dispone de: La detección oportuna para apoyar directamente al alumno que manifiesta apatía o poco entendimiento de la situación propuesta. De una serie de actividades que previamente se diseñaron que se pueden emplear para tratar de brindar los elementos al alumno, para que pueda acceder a los conocimientos que le permitan abordar las situaciones que se le planteen más adelante.

Los resultados de este trabajo muestran que este tipo de propuesta didáctica propicia que el alumno tenga una actitud favorable hacia el trabajo, evidencia de esto se observó durante el trabajo de campo, ya que ellos mismos manifestaron su desacuerdo cuando se les pedía que dejaran de trabajar porque el tiempo había terminado. Sin embargo hubo algunos que mostraron apatía, creemos que esto se debió a que desde un principio no se esforzaron en tratar de entender lo que se les planteaba y conforme se avanzaba en las actividades para ellos resultaba de poco interés lo que se proponía ya que no entendían la actividad.

En el medio de aprendizaje que se emplea el alumno se siente más atendido por el facilitador ya que éste revisa su trabajo y le brinda la posibilidad de que se hagan nuevas preguntas y se reflexione sobre lo ya producido. El desempeño del alumno empleando estos recursos didácticos es más real, ya que puede trasmitir sus ideas y conclusiones comprobando lo que piensa desarrollando un aprendizaje significativo.

6.3 LIMITACIONES DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA

Las piezas geométricas como otros materiales concretos no pueden ser usadas sin una adecuada preparación del facilitador, se requiere aprender cómo usarlas y no dejarlas a la improvisación así como destacar que los productos se limitan a la tercera dimensión, es decir que productos en que resulte un término de más de tres dimensiones no tiene interpretación geométrica.

El alumno puede alcanzar un nivel alto de manipulación de las piezas geométricas sin embargo no significa que entienda bien los conceptos algebraicos; es fundamental no olvidar que las piezas sólo son una herramienta para llegar a la etapa de generalización simbólica, pero no necesariamente sucederá que el alumno transfiera cualquier representación geométrica a una representación simbólica.

Las piezas geométricas deben ser un complemento, no un sustituto de otras representaciones, pues algunas veces en nuestro fervor por usar las piezas podría perderse de vista el hecho de que son medios para un fin no un fin en ellas mismas.

Observé en los alumnos que hay un punto en el cual ya las piezas geométricas le estorban; la pregunta entonces es ¿en qué momento debemos quitar las piezas y empezar a trabajar solamente con simbología?

Las piezas geométricas tienen carácter exploratorio, con lo cual no tiene sentido que el facilitador use las piezas en una sola línea; "hazlo como yo digo". Es más efectivo usar las piezas geométricas como un marco para la discusión, la comunicación y la reflexión.

Los facilitadotes deben tener cuidado en diversificar hacia el uso de otros tipos de materiales pues existe el peligro de que el alumno no transfiera la competencia alcanzada a otro tipo de situación. .

Además cabe mencionar que otra de las limitaciones de la propuesta es talvez la falta de tiempo del facilitador para apoyar directamente al alumno que manifiesta apatía o poco entendimiento de la situación propuesta.

Por último debe señalarse la limitación del estudio en cuanto a las aplicaciones de la historia del álgebra; la idea afortunada de Zeuthen en 1886 de calificar de "álgebra geométrica" el libro segundo de los elementos de Euclides, no parece tan afortunada para otros. Es probable que si el facilitador de inicio no considera pertinente trabajar con la propuesta didáctica, tal propuesta no de resultados favorables.

6.4 SUGERENCIAS DESPUES DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA

Los alumnos tienen un límite en el cual las piezas geométricas ya no son necesarias, por lo que es importante conocer en qué momento debemos quitar las piezas y trabajar exclusivamente con símbolos.

La propuesta didáctica si bien no es garantía de éxito, al menos da lugar a un planteamiento que permite introducir el uso de las expresiones algebraicas, conociendolas como productos notables y descomposición de factores.

Por último tal vez sea posible complementar ésta propuesta didáctica utilizando un enfoque gráfico, puesto que la factorización de un polinomio permite obtener sus raíces, raíces que coinciden con las abscisas de las intersecciones de la gráfica del polinomio con el eje x, pues estas conexiones raras veces aparecen en los contenidos educativos de los programas de álgebra de bachillerato y difícilmente se considera su enseñanza. En el trabajo de Sánchez (1998) son significativos comentarios, como por ejemplo “ahora sí sabemos lo que estábamos haciendo cuando factorizamos o encontramos una raíz, y así no es tan difícil”.

BIBLIOGRAFÍA

Aebli, H. (1958). *Una Didáctica Fundada en la Psicología de Jean Piaget*. Buenos Aires: Editorial Kapelusz.

Auzmendi, Escribano E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática-estadística en las enseñanzas media y universitaria: Características y Medición.* Bilbao: Ediciones Mensajero.

Arancibia, Herrera y Strasser. (1999). *Psicología de la Educación*. México: Alfaomega grupo editor.

Artigue, Michéle. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Bertely, M., (2002). *Conociendo nuestras escuelas. Un acercamiento etnográfico a la cultura escolar*. México: Editorial Paidos

Becerril, Díaz V. y Cortes, Reyes F. (2000). *Estudio correlacional entre el bajo y alto rendimiento en matemáticas y el tipo de estrategias de estudio y el apoyo familiar con alumnos de primer año de bachillerato.* Tesis. México: UPN.

Bosh, C. (2002). *Cálculo Diferencial e Integral*. México. Publicaciones Cultural

Castro y Castro. (2000). *Representaciones y Modelaciones.* México:

Cedillo, T. (1996). *Exploring Álgebra as a Lenguaje in use: A study eith 11-12 year old using graphic calculador* (Tesis Doctoral). Institto of Education, University of London Uk.

Cedillo, T. (1999). *Desarrollo de habilidades Algebraicas. Vol. 3. La calculadora en el salón de clase*. México: Grupo Editoral Iberoamérica

Collis, K. F. (1975). *A study of concrete and formal operations in school mathematics*: *A Piagetian Viewpoint*. Australia: Australian Council for Educational Research.

Consejo del Sistema Nacional de Educación Tecnológica. (2002). *Informe: Evaluación del Ingreso a la Ecuación Media Superior Tecnológica Ciclo Escolar 2002-2003*.

Garza, B. (2002). *Matemáticas I. Aritmética y Álgebra*. México: Editado por la DGETI

Garza, B. (2002). *Matemáticas III, Geometría Analítica*. México: Editado por la DGETI

Guzmán, H (2003). *Cien problemas de Geometría Analítica*. México. Publicaciones Cultural.

Grupo Azarquiel. (1993). *Ideas y Actividades para Enseñar Álgebra*. España: Editorial Sintesis

Hernandez, V. (2000). *La geometría y la heurística como elementos para la enseñanza del álgebra, un programa de intervención*. Tesis. México: UPN

Hoyos, V. (1998). Revisitando la construcción de significado en torno de las ecuaciones lineales con dos incógnitas. Observaciones empíricas con estudiantes de 16-18 años de edad. *Investigaciones en Matemática Educativa II*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Inhelder, B y Piaget, J. (1985). *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*. España: Ediciones Paidos.

Kieran, C. (2004[iii]) The learning and Teaching of School Álgebra. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*.Virginia USA: NCTM

Kilpatrick, J., Rico L. y Gómez, P. (1995). *Educación Matemática*. Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.

Losada, Susana M. (1992). *Aritmética enseñada con placer y alegría*. Cuadernos de Orientación Educativa. Colección Lineamientos.

Mestre, J. P. (2000) Progress in Research: The Interplay Amog Tehory, Research Questions, and Measurement Techniques. *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*. London: Edition Anthony E. Kelly & Richard LEA.

Orduño, H. (2004). *Matemáticas IV, Calculo Diferencial*. México. Fondo de Cultura Económica

Pastor, R. Babini, J. (1997). *Historia de la matemática*. Volumen II. España: Editorial edisa

Piaget, J. (1973). *Psicología y Pedagogía*. Editorial Ariel

Piaget J y García. (1982). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*. México: Editorial Siglo Veintiuno

Peralta, J. (1995). *Principios didácticos e históricos pata la enseñanza de la Matemática*. España: Editorial Huerga-Fiero

Puig, L. (1998). Componentes de una historia del álgebra. El texto de al-Khwarizmi restaurado. Revisitando. *Investigaciones en Matemática Educativa II*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Radford, L y Furinghetti F. (2002). Historical Conceptual Developments and the Teaching of Mathematics: from Phylogenesis and Ontogenesis Theory to Classroom Practice. *Handbook of International Research in Mathematics Education*. New Jersey: LEA, Publishers

Radford, L. (1995) Ecuación de segundo grado: Una propuesta de enseñanza basada en su desarrollo histórico-conceptual. *Novena reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática*. La Habana Cuba: Universidad de la Habana.

Sada M.T. (2004). *Matemáticas I. Aritmética y Álgebra*. México: Fondo de Cultura Economía

Sánchez, E. (1998). La función de graficación de la calculadora para mejorar la comprensión en tareas de factorización, *Investigaciones en Matemática Educativa II*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Skemp, R. (1980). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Ed. Morata

Socas, M.M. (1996). *Iniciación al Álgebra. Matemáticas: Cultura y Aprendizaje*. España: Ed. Sintesisis

Socas, M.M. (2000). Álgebra para todos. Análisis de un Material didáctico: Puzzle Algebraico. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática II.* España: Universidad de la Laguna.

Secretaria de Educación Pública. (2003). *A mitad de la Jornada. Avances en la educación 2001-2003.*México

Subsecretaría de Educación e Investigación Tecnológicas (SEIT), 2002. *Guía de estudio para la Evaluación del Ingreso a la Ecuación Media Superior Tecnológica*. México: Editado por CoSNET.

Subsecretaría de Educación e Investigación Tecnológicas. (2004). *Modelo de la Educación Media superior Tecnológica*. México: Consejo del Sistema Nacional de Ecuación Tecnológica (CoSNET).

Szendrei, J. (1996). Concrete Materials in the Classroom. *International Handbook of Mathematics Education*., part one. Bishop Alan et al .(eds). Dordrecht (Netherlands): Kluwer Academic Publishers.

Vieta F. *The Analytic Art*. Traducido por Witmer, R. (1983). Kent, Ohio, USA: The Kent State University Press.

Thrnton, S. (2001). New Approaches to álgebra: Have We Missed the Point?. *Mathematics Teaching in the Middle School.* National Council of Mathematics. Vol. 6. No.7. March 2001

Anexos

Anexo 1. Pretest y postest

p
u n

Nombre del alumno(a)____

Problema 1. Continúa las siguientes listas de números.

a) 2, 4, ___, ___, 10, ___, ...

b) 2, 3, 5, 7, ___,13, ___, ...

c) 22,19, 16, ___, ___, ...

d) 11, 18, 27, 38, ___, ...

Problema 2. ¿Qué número aparece en el quinto lugar de la sucesión?

1, 4, 9, 16, ___, 36, ...

a) ¿Cuál es la expresión algebraica que permite conocer el número faltante de esta sucesión?

Problema 3. Completa la tabla.

x	y
2	8
3	12
4	16

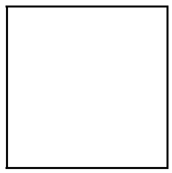
a) Si *x* fuera 12, ¿cuál sería el valor de *y*?

b) ¿Para qué valor de *x* la *y* vale 84?

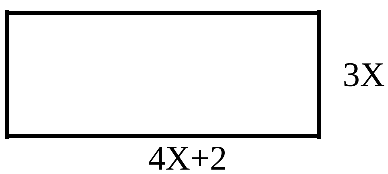
c) ¿Cómo calculaste el valor de *y* si conoces el valor de *x*?

d) ¿Qué sucede con los valores de *y* cuando crecen los valores de *x*?

Problema 4. Escribe una o más expresión para el perímetro del cuadrado.

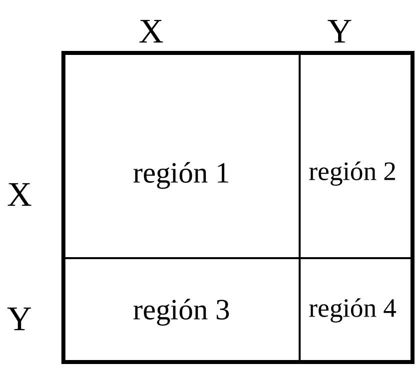


Problema 5. Indica mediante un polinomio el área del siguiente rectángulo.



Problema 6. Según la figura contesta las siguientes preguntas.

- ¿Cuál es el área de cada región?
- ¿Cuál es el área total de las cuatro regiones?



Anexo 2. Guión de preguntas realizadas en las entrevistas

Durante las entrevistas para explorar el proceso de solución de los problemas, las preguntas que se realizaron se agruparon de acuerdo a lo que se pretendía indagar.

Entendimiento del problema:

¿Puedes explicar el problema en tus propias palabras?
¿Hay algo que no entiendas?
¿Qué se supone que vas a hacer?

Formulando el plan:

¿Cómo organizaste la información?
¿Cuáles materiales te ayudan para resolver el problema?
¿Qué has hecho hasta ahora?
¿Cuáles estrategias te ayudan en la solución del problema?

Solución del problema:

¿Puedes obtener la solución de otra forma?
¿Hay un problema más simple relacionado con el qué tú intentas resolver?
¿Tú solución responde a las preguntas planteadas en el problema?

Visión retrospectiva:

¿Cómo vas a verificar tu resultado?
¿Cómo sabes que lo que has hecho es lo correcto?
¿Qué haces cuando no estás seguro del resultado?
¿Es ésta la clase de problema fácil o difícil para ti?
¿Qué hace a este problema fácil?
¿Qué hace a este problema difícil?

Comunicando la solución:

¿Cómo le explicarías a tus compañeros lo que estas haciendo?
¿Es este problema igual a otros que ya haz resuelto?
¿En qué forma es lo mismo?
¿En qué forma es diferente?
¿Cómo resumes la solución?

Anexo 3. Tabla de resultados del pretest y del postest del grupo experimental

Anexo 4. Tabla de resultados del pretest y del postest del grupo control

[i] Herscovics, N. (1980). Constructing meaning for linear equations: a problem of representation, in Recherches en Didactique des Mathematiques, Vol. I No.3, pp.351-385. France. Citado por Hoyos (1998).

[ii] Se construyeron para clarificar el nivel de generalización que alcanzaban los estudiantes al final de las sesiones. Se puede decir que para la construcción de las categorías nos basamos en el tipo de las diferentes representaciones simbólicas en tránsito hacia lo algebraico que describe Hoyos en su trabajo de 1998.

Para el análisis además se consideraron las categorías de Kucheman que describe Kieran en su trabajo de 1992 reeditado en 2004: pag. 396.

[iii] Primera edición 1992.