UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

LICENCIATURA EN PEDAGOGÍA

CAMPO DE DOCENCIA
ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

LA HISTORIA DEL ÁLGEBRA COMO RECURSO DIDÁCTICO

T E S I N A

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
LICENCIADA EN PEDAGOGÍA
P R E S E N T A:

ADRIANA ESTHER JUÁREZ VARGAS

México **2005**

AGRADECIMIENTOS:

A mis padres

por su cariño y apoyo incondicional.

A mis profesores

por su tiempo y su apoyo.

Prof. Enrique Vega Ramírez

Director de la tesina

Y en especial al

Prof. Arturo Bazán Zurita

Asesor

INDICE

Páginas.

1. INTRODUCCIÓN. 3

2. CAPÍTULO 1. 8

   a. Planteamiento del problema.
   b. Delimitación del problema.
   c. Objetivos.
   d. Metodología

3. CAPÍTULO 2. 16

   HISTORIA DEL ÁLGEBRA

   a. Babilonia.
   b. Egipto.
   c. Grecia.
   d. China.
   e. India.
   f. Arabia
   g. Lista de problemas.

4. CAPÍTULO 3. 64

   IMPORTANCIA DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS.

5. CAPÍTULO 4. 74

ANÁLISIS DE LOS PROGRAMAS Y LIBROS DE TEXTO.

a. Programas de estudio de matemáticas nivel secundaria.
b. Libro para el maestro editado por la SEP.
c. Libros de matemáticas de tercero de secundaria.
d. Tablas de análisis de los libros de texto.
e. Clasificación de problemas.
f. Comentarios.

6. CAPÍTULO 5. 150

UTILIZACIÓN DE ELEMENTOS HISTÓRICOS
EN LA ENSEÑANZA DE ECUACIONES CUADRATICAS

a. Elementos de la historia del álgebra que pueden ser retomados para el tratamiento del tema de ecuaciones cuadráticas.
b. Sugerencias para abordar el tema en el salón de clases.

7. BIBLIOGRAFÍA. 174

INTRODUCCIÓN

"*Un estudio sobre la evolución histórica de la pedagogía de las matemáticas muestra que la historia de las matemáticas puede ser una fuente, casi inagotable, de la que el profesor beberá a placer para garantizar una enseñanza mejor"* (COLLETTE, 1986, pp. 9). Los testimonios del desarrollo evolutivo de las matemáticas, nos hace concientes del trabajo por el que la humanidad ha pasado para llegar a las matemáticas que conocemos en la actualidad. La misma historia nos muestra que el desarrollo de esta disciplina no ha sido solo la creación de una mente brillante de uno o varios matemáticos, sino que, los conceptos matemáticos, desde la antigüedad hasta nuestros días son el resultado de un largo proceso histórico. La humanidad siempre se ha visto en la necesidad de resolver los problemas a los que se ha enfrentado, el desarrollo de las matemáticas siempre ha estado vinculado a la resolución de los problemas.

Hay investigadores que se han dedicado al estudio de la historia de las matemáticas con fines didácticos, consideran que es importante que los profesores conozcan el desarrollo histórico de estas para contribuir a que tengan elementos que les permitan mejorar sus prácticas docentes.

Después de revisar y analizar, el libro para el maestro editado por la SEP (1993), los programas de matemáticas del nivel secundaria oficial (1993) y 7 libros de matemáticas que se usan como libros de texto en este nivel se presenta un contraste entre el tratamiento que dan estos libros al tema y la propuesta pedagógica del libro para el maestro.

Es necesario buscar formas de trabajo y elaborar materiales adecuados que permitan a los alumnos el desarrollar sus habilidades para resolver problemas de enunciado. En particular, se considera de utilidad el desarrollo histórico del álgebra al retomar el planteamiento y la resolución de los problemas que

enfrentaron a lo largo del desarrollo histórico con el fin de adaptarlos a las condiciones actuales, para que loas alumnos los enfrenten y puedan desarrollar dichas habilidades matemáticas.

En la mayoría de las civilizaciones antiguas el planteamiento y resolución de problemas era una actividad necesaria, los obligaba a buscar y generar diferentes procesos de solución, viéndose orillados a desarrollar diversos razonamientos y a utilizar diferentes estrategias.

De igual manera me interesa proponer algunas sugerencias para el tratamiento de los contenidos referente al tema de las ecuaciones cuadráticas, retomando aspectos históricos que puedan ser utilizados de manera didáctica en el salón de clases.

Para la realización del siguiente trabajo fue necesario, estudiar la siguiente literatura referente a:

- La historia del álgebra.
    - Retomé documentos traducidos de los escritos originales como las tablas cuneiformes (Babilonia), los papiros (Egipto), el libro de Diofanto (Grecia), “los nueve capítulos del arte de las matemáticas” (China), textos hindúes y el libro “álgebra” de Al-Khuwarizmi (Arabia), por mencionar algunos.
- La importancia de considerar el desarrollo histórico de las matemáticas.
    - Me centré en artículos escritos por FAUVEL, sobre como utilizar la historia de las matemáticas en la enseñanza de temas de matemáticas.

- Al tratamiento de las ecuaciones cuadráticas según se propone en México

    - Los programas de matemáticas de secundaria de 1993.
    - El libro para el maestro
    - 7 libros de texto de tercero de secundaria actuales.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera:

El trabajo incluye 5 capítulos el contenido en cada uno de ellos es el siguiente:

- Capítulo 1.

    - Planteamiento del problema.
    - Delimitación del problema.
    - Objetivos.
    - Metodología.

- Capítulo 2.

    - Breve descripción del trabajo matemático de cada civilización antigua (Babilonia, Grecia, Egipto, China, India y Arabia) especialmente el algebraico (ecuaciones cuadráticas) desarrollado por cada una de ellas.

- Lista de problemas a los que se enfrentaron los matemáticos de civilizaciones anteriores y que se pueden resolver haciendo uso de ecuaciones cuadráticas.

- Capítulo 3.

  - Como la historia de las matemáticas puede apoyar didácticamente la enseñanza de las matemáticas.

- Capítulo 4.

  - Descripción del enfoque y los temas propuestos por los Programas de secundaria (1993) de matemáticas respecto al tema del álgebra, de la propuesta pedagógica presentada en el Libro para el Maestro acerca del tratamiento de las ecuaciones cuadráticas, descripción del tratamiento que cada uno de los 7 libros da al tema de las ecuaciones cuadráticas.

  - Tablas referentes al análisis de los libros de texto de tercero de secundaria, contraste entre el tratamiento que dan al tema de las ecuaciones cuadráticas y la propuesta pedagógica presentada en el libro para el maestro.

  - Clasificación de problemas que se revisan en los libros de secundaria revisados.

  - Comentarios.

- Capítulo 5.

    - Elementos de la historia del álgebra que pueden ser retomados en el salón de clases.

    - Solución de un problema por diversos métodos.

    - Sugerencias para el tratamiento del tema de ecuaciones cuadráticas.

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El tema del presente trabajo se ubica en educación básica, en el nivel secundaria, el álgebra es uno de los contenidos relevantes en este, quizá es uno de los temas de mayor dificultad para la comprensión de los alumnos, ya que el tránsito de la aritmética al álgebra no es sencillo, los alumnos tienen conocimientos aritméticos y el proceso de abstracción y generalización que se requiere para incursionar en el álgebra hace necesario recuperar el manejo y las relaciones entre números y de ahí desprender el estudio de las relaciones y expresiones algebraicas.

Un buen dominio del álgebra sobre todo en temas relacionados con el cálculo y la geometría analítica permitirá una mejor comprensión en niveles escolares posteriores.

Actualmente en la secundaria la enseñanza del álgebra se centra en el aspecto operativo y para los alumnos resulta poco significativo, pues los métodos que se utilizan se presentan de manera sintetizada, impidiendo al alumno conocer de donde surgen y el porque funcionan.

Por lo anterior, considero que se debe prestar especial atención a la enseñanza del álgebra en secundaria.

El análisis de los siguientes temas relacionados con la enseñanza de las matemáticas serán la base para estudiar y comprender las dificultades que tienen los alumnos para comprender y entender el álgebra.

- La dificultad que las matemáticas tienen en sí mismas, para su comprensión. Se requiere que el alumno sea capaz de realizar un proceso de abstracción mayor que el requerido para la aritmética.

- Tratamiento que dan los profesores a los contenidos algebraicos a nivel secundaria en el salón de clases.

- Desarrollo histórico de las matemáticas

- Planteamientos de propuestas didácticas y presentación que autores de libros de texto, hacen del tema.

Los elementos antes mencionados nos permiten hacer un análisis global, con el fin de estar en condiciones de presentar algunas propuestas pedagógicas de trabajo que puedan apoyar la enseñanza del álgebra en secundaria, solo me centraré en los dos últimos acercamientos.

El álgebra que se estudia en la secundaria es un tema que ha venido evolucionado a lo largo de los siglos, desde las civilizaciones antiguas hasta nuestros días.

Al igual que otras ramas de las matemáticas, el álgebra ha estado vinculada a los problemas a los que la sociedad se ha enfrentado. En sus inicios los problemas que las distintas civilizaciones antiguas abordaron permitieron generar distintas soluciones y fueron la base para darle una estructura formal a las expresiones algebraicas.

Las interrogantes que surgen de esto son las siguientes:

¿ Algunos de los problemas que se abordaron en las antiguas civilizaciones los podrán ser considerados como problemas sociales vigentes ?

¿ Es recuperable el material histórico (problemas, diversidad de métodos de resolución, anécdotas, etc.) que pueda ser recuperado de manera didáctica para que contribuyan a apoyar el proceso de enseñanza-aprendizaje, en el aula ?

DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA

El álgebra, a lo largo de los tres años de secundaria es un tema recurrente, en el primer grado se trabaja el tránsito de la aritmética al álgebra, en el siguiente grado, se aborda la manipulación de expresiones algebraicas, las propiedades y las ecuaciones lineales y finalmente en el tercer ciclo se estudian las ecuaciones cuadráticas.

De los anteriores temas, parece que uno de los que ofrece mayores dificultades a los alumnos es el de las ecuaciones cuadráticas, pues se requiere el manejo de conceptos como raíz cuadrada, números negativos, las raíces o soluciones de una ecuación de este tipo, cuando una ecuación tiene una solución, 2 soluciones distintas, cuando son reales, que es el determinante de una ecuación, como se representa gráficamente este tipo de ecuaciones, etc. que no son sencillos además los alumnos consideran que las ecuaciones cuadráticas no “útiles para la vida cotidiana” porque las ven descontextualizadas de su realidad.

Este trabajo está centrado en las ecuaciones cuadráticas que de acuerdo con el programa oficial (1993) se estudian en el último grado de secundaria, es el tema del que recuperaré su desarrollo histórico.

Mi interés se centra en recuperar el material histórico relacionado con este tema y desprender algunas sugerencias didácticas de tratamiento del tema.

Con respecto a los materiales que se usan en el salón de clases, es necesario conocer la propuesta didáctica del Libro para el Maestro, así como el programa oficial de tercero de secundaria de matemáticas.

Revisé, tanto las propuestas pedagógicas plasmadas en cada uno de los libros de texto la forma en que abordan el tema y estudié la relación entre la propuesta pedagógica presentadas por el Libro para el Maestro y cada uno de los libros de texto.

Con respecto a las distintas civilizaciones, revisé aquellas que según la literatura se han destacado por su trabajo relacionado con este tema como son las de Babilonia, Grecia, Egipto, India y Arabia, centrándome en el planteamiento de los problemas, sus métodos de resolución y su vínculo con las expresiones algebraicas actuales.

OBJETIVOS

El objetivo del trabajo consiste en:

- General

  - Recuperar los problemas matemáticos relacionados con las ecuaciones cuadráticas, los planteamientos y procesos de solución encontrados en las distintas civilizaciones que a lo largo de la historia se han desarrollado para poder proponer algunas sugerencias para apoyar de manera didáctica en trabajo en el salón de clases.

- Particulares

  - Conocer el tratamiento que dan al tema de ecuaciones cuadráticas de algunos de los libros de texto que actualmente se usan en secundaria.

  - Conocer la relación entre la propuesta pedagógica del libro para el maestro a nivel y los programas de estudio secundaria publicados por la SEP (1993) y la manera en que algunos libros de texto desarrollan el tema.

  - Conocer la manera en que los autores de libros de texto tratan el tema de las ecuaciones cuadráticas.

METODOLOGÍA

La metodología seguida para llevar a cabo el trabajo el cual está basado en una investigación bibliográfica que contempla los siguientes cinco puntos:

I. Conocer el desarrollo histórico del álgebra, específicamente en lo referente al desarrollo de las ecuaciones cuadráticas de las civilizaciones: babilónica, griega, egipcia, china, hindú y árabe. Conocer además los métodos de resolución de estas ecuaciones y los problemas que se planteaban.

II. Revisar trabajos de investigadores que han aportado elementos sobre la importancia de tomar en cuenta el proceso histórico de las matemáticas dentro de la educación, tal es el caso de BYERS, FÜHRER, y en especial FAUVEL.

III. Revisión de los programas de matemáticas de nivel secundaria y del libro para el maestro publicado por la SEP, poniendo especial atención en:

   a. Programas de matemáticas nivel secundaria (1993), tomando en cuenta lo siguiente:

      i. El objetivo de la enseñanza de las matemáticas tienen en este nivel.
      ii. Importancia de la enseñanza del álgebra en el nivel secundaria.
      iii. Presentación del programa tomando en cuenta los tres años.

   b. Libro para el maestro:

      i. Importancia de las matemáticas en general y del álgebra en concreto a nivel secundaria.

ii. Descripción de la propuesta didáctica.
iii. Descripción de la propuesta didáctica referente al trabajo del tema de las ecuaciones cuadráticas.

IV. Revisión de 7 libros de texto de tercero de secundaria, tomando en cuenta lo siguiente:

a. Descripción del tratamiento que cada uno de los autores le da al tema de las ecuaciones cuadráticas. La forma en como se introducen los temas ya sea planteando un problema, dando definiciones o proponiendo ejercicios, la secuencia en los temas, los ejemplos que se dan en cada caso y el tipo y número de ejercicios y problemas que se plantean a los estudiantes en cada caso.

b. Contrastar los libros y el programa oficial a fin de saber si cumplen con los temas obligatorios.

c. Contrastar los libros y el libro para el maestro a fin de conocer la relación entre la propuesta didáctica planteada por el libro para el maestro y la forma en que los libros de texto desarrollan el tema.

d. Elaboración de las tablas donde se describan los puntos b y c.

e. Clasificación de los problemas que se trabajan en los textos.

V. Sugerencias didácticas para el tratamiento del tema de ecuaciones cuadráticas.

a. Resolución de problemas antiguos con métodos actuales.

b. Propuestas de problemas para ser resueltos por los alumnos.

c. Diversidad en métodos para resolver ecuaciones cuadráticas.

CAPÍTULO 2

HISTORIA DEL ÁLGEBRA

Las matemáticas que conocemos en la actualidad, son el producto de un proceso evolutivo, debido, principalmente, a las necesidades sociales que se han presentado en cada época. El desarrollo del álgebra, en particular, ha tenido diferentes momentos importantes a lo largo de la historia como. En civilizaciones antiguas encontramos los cimientos de los que actualmente conocemos. Hoy día identificamos a una parte del álgebra, con una teoría para resolver ecuaciones, las cuales, a lo largo de la historia se han resuelto recurriendo a diferentes tipos de notación, como: notación retórica, notación sincopada y notación simbólica, como veremos a lo largo de este trabajo.

Para el presente trabajo, me centraré sólo en aquellos elementos relacionados con el álgebra, y particularmente en las ecuaciones cuadráticas, principalmente los desarrollados por las civilizaciones siguientes: babilónica, griega, egipcia, china, hindú y árabe. . Los elementos centrales que describo son los siguientes:

- Los métodos de resolución de las ecuaciones de segundo grado.
- Problemas de enunciado planteados en cada civilización.

BABILÓNIA

El desarrollo matemático de los Babilonios, fue importante en áreas como la aritmética, el álgebra y la geometría, el cual se debió a su notación sexagesimal (heredada de los Sumerios) y a la manipulación que ellos tenían de las cuatro operaciones aritméticas fundamentales.

Hasta hoy no se conoce una razón de porqué los Babilonios eligieron la base 60 para su sistema de numeración, lo que si es un hecho es que este tipo de numeración les permitió un desarrollo matemático importante.

Los Babilonios, escribieron gran cantidad de tablillas cuneiformes, se han rescatado alrededor de 300 tablillas relacionadas con las matemáticas, algunas de las cuales son tablas de multiplicar, recíprocos, cuadrados, cubos, etc.

Las tablas de multiplicar no sólo eran útiles para la multiplicación ordinaria de la forma $a \cdot b$, también para realizar divisiones, se calculaba el recíproco de *b* y se multiplicaba por *a*, de la siguiente manera $a \cdot b^{-1}$. Tanto las tablas de multiplicar como las de recíprocos, servían para realizar multiplicaciones de números enteros como para representar fracciones comunes o fracciones sexagesimales.

ÁLGEBRA

Con respecto al álgebra, los babilonios resolvían problemas de longitudes y de áreas de rectángulos y cuadrados, por ejemplo, planteaban ecuaciones en las que se tenían que calcular el largo y el ancho de algún rectángulo.

En las tablillas, los babilonios, mostraban los problemas matemáticos de enunciado a los que se enfrentaban y la manera de abordarlos, clasificando

dichos problemas de acuerdo con su tipo de solución, tal parece que los babilonios de acuerdo con los problemas a los que se enfrentaron, no tuvieron la necesidad de hacer generalizaciones.

De acuerdo con GANDZ (1938, pp. 405), los tipos de ecuaciones cuadráticas trabajadas por los Babilonios fueron 3.

NEUGEBAUER, interpretó las tablillas cuneiformes, y ésta es la manera en que los Babilonios clasificaron los problemas y su solución, pero la presentación que se les ha dado, no es la original, puesto que los babilonios no desarrollaron ningún lenguaje algebraico, esta tabla esta escrita con la simbología que se maneja en el álgebra actualmente.

ECUACIONES	**SOLUCIONES**
1. $x^2 + ax = b$	$x = -\frac{a}{b} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}$
2. $x^2 - ax = b.$	$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$
3. $x^2 + b = x$	$x = \frac{a}{b} \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + b}$

Los babilonios, resolvían sus problemas retóricamente, es decir, presentaban la solución de manera verbal describiendo el procedimiento a seguir. Por lo que, la clasificación que hacían de los problemas de enunciado y su solución no estaba representada como la tabla anterior, esta es una representación con simbología actual.

Como podemos ver, los babilonios, trabajaban con tres tipos de ecuaciones de segundo grado y ninguna de las anteriores está igualada a cero, no hacían

generalizaciones y tampoco demostraciones, sólo pretendían dar solución a los problemas que se les presentaban, sin dar ningún tipo de explicaciones.

En las matemáticas Babilónicas solo se trabajaban los números positivos.

Los problemas que los Babilonios se plantearon se encuentran también en las tablillas, más adelante veremos éstos problemas así como los métodos de resolución desarrollados por esta civilización.

MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Los métodos que los babilonios utilizaban en la resolución de ecuaciones de segundo grado se expresaban de manera retórica, no utilizaban ningún simbolismo algebraico, a continuación presento dos problemas y la manera en que fueron resueltos. (DEDRON, 1959, pp. 323).

1. Adicioné la superficie y el lado de un cuadrado lo cuál dio un resultado igual a ¾. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?

Solución retórica:

> *"Se toma la unidad 1, al dividirla a la mitad nos da ½ . se multiplica ½ por ½ lo cual nos da ¼, sumamos ¼ a ¾ lo cual nos da la unidad 1 al cuadrado, al restar ½ de 1 tenemos ½, la medida del lado del cuadrado buscado."*

Esto, de acuerdo a tablas babilónicas traducidas por NEUGEBAUER y presentadas en simbología algebraica actual, no es más que las resolución de la ecuación:

$$x^2 + x = \frac{3}{4}$$

La cual corresponde a la del tipo 1 ($x^2 + ax = b$) que de acuerdo con las tablas se resuelve haciendo uso de la siguiente fórmula:

$$x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} - \frac{a}{2},$$

sustituyendo valores tenemos

$$x = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

2. En un cuadrado, sustraje de la superficie el lado, lo cual me dio como resultado 2 ¿Cuánto mide de lado dicho cuadrado?

Solución retórica:

"Se toma la unidad 1, se divide en dos ½ , se eleva ½ al cuadrado ¼ , a lo cual se le suma 2, dando como resultado 9/4, el cuadrado de 3/2, a lo cual le sumamos ½ , y nos da 2."

Esto, de acuerdo a tablas babilónicas traducidas presentadas en simbología algebraica actual, no es más que las resolución de la ecuación:

$$x^2 + 2 = x$$

La cual corresponde a la del tipo 3 ($x^2 + b = x$) que de acuerdo con las tablas se resuelve haciendo uso de la siguiente fórmula:

$$x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} + \frac{a}{2}$$

sustituyendo valores tenemos

$$x = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2} + \frac{1}{2} = 2$$

Los babilonios resolvieron este tipo de problemas con los conocimientos matemáticos que poseían, al hacerlo, encontraron relaciones entre números, clasificaron los problemas de acuerdo al tipo de solución que requerían lo cuál está en las tablas cuneiformes y cada vez que se enfrentaban con un problema de este estilo (hablando del tema de las ecuaciones de segundo grado) buscaban en las tabillas los pasos a seguir para resolverlos.

Lo que rescatamos de los babilonios es:

- Los problemas que se plantearon eran con datos concretos, relacionados con cuestiones geométricas.

- No generalizaban.

- Problemas que en la actualidad pueden resolverse con álgebra, ellos los resolvieron con aritmética.

EGIPTO

Los papiros, son documentos con los que contamos para conocer la civilización egipcia, particularmente su desarrollo matemático. La numeración egipcia se funda en la base decimal y tiene símbolos específicos para indicar la unidad, el 10 y las potencias de 10 hasta el millón, el sistema de numeración era de carácter aditivo, no posicional. Trabajaron las cuatro operaciones aritméticas fundamentales, la suma, la resta, la multiplicación y la división, según FIGUERAS-CRISTÓBAL (1988, pp. 63). De acuerdo con CAMPLIGLIO (1990, pp.89) los egipcios representaban las cantidades fraccionarias con una o más fracciones cuyo numerador sea igual a 1, por ejemplo:

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$$

La geometría de los egipcios se desarrollo debido a su necesidad de medir constantemente terrenos, a causa de las inundaciones continuas provocadas por el Nilo se borraban los límites de éstos, CAMPIGLIO (1990, pp. 90) comenta que los encargados de este trabajo (medición de terrenos) se les llamaba tendedores de cuerdas, cuya base técnica era el “teorema de Pitágoras”, y los números 3-4-5 forman una de las llamadas ternas pitagóricas, que aplicadas a las cuerdas, dan siempre un triángulo rectángulo, para los agrimensores egipcios es necesario determinar ángulos rectos, de modo que los campos de forma irregular se podían dividir en triángulos rectángulos o en trapecios rectángulos, de superficies fácilmente calculables.

Los papiros interesantes desde el punto de vista matemático son pocos, los más importantes son:

- El papiro Rhind.
- El papiro de Moscú.
- El papiro real de Turín.
- El papiro de Berlín.

ÁLGEBRA

CAMPLIGIO (1990, pp. 88) menciona que: *"la principal fuente para estudiar las matemáticas egipcias es el papiro Rhind, fue redactado por el escriba AHMES, en ése papiro se proponen numerosos problemas ligados a situaciones concretas, y las correspondientes soluciones además de ecuaciones o bien simples adivinanzas matemáticas"*,

Es importante aclarar que los egipcios, no desarrollaron un álgebra simbólica, de modo que no podemos decir, que se plantearon y resolvieron ecuaciones como los conocemos actualmente.

Algunos de los problemas contenidos en el papiro se refieren a la división de ciertas cantidades de panes en raciones iguales (entre 10 hombres), en donde se trata por un lado la adición de fracciones y por otro la sustracción, la solución

aritmética se realizaba por ensayos y división de panes en proporciones iguales, según FIGUERAS-CRISTOBAL (1988, pp. 57).

Actualmente este tipo de problemas se pueden trabajar utilizando álgebra y pueden ser expresados por medio de una ecuación.

Con respecto al álgebra desarrollada por los egipcios podemos encontrar los denominados cálculos *"aha"* asociados a la resolución de problemas que en la actualidad se plantean por medio de ecuaciones lineales con una incógnita, el método más conocido es:

- El método de la *"falsa suposición"* o de la *"falsa posición"*, el cual puede traducirse de la siguiente manera:

    - Se elige un número conveniente de acuerdo con el problema a resolver.

    - Se verifica que ese número cumpla con lo requerido.

    - En caso de no verificar, se ajusta hasta encontrar el número correcto.

El tipo de problemas que trabajaron los egipcios así como sus técnicas de resolución para ecuaciones aritméticas nos da una idea de que no tuvieron un importante desarrollo algebraico, FIGUERAS-CRISTOBAL (1988, pp. 84) explican que los cálculos *"Aha"* "constituyen el climax de la aritmética egipcia, pues al parecer, los egipcios no pudieron ir más allá de lo que hoy se conoce como ecuaciones lineales y las ecuaciones cuadráticas con una incógnita, con sus técnicas de cálculo aritmético".

METODOS DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

El método que utilizaban los egipcios para resolver las ecuaciones de segundo grado, se encuentra descrito en el Papiro de Berlín, Schack-Schackenburg (citado por GILLINGS, 1997, pp. 161) presenta 2 problemas, los cuales, en la actualidad se resolverían por medio de sistemas de ecuaciones no homogéneas, es decir, los sistemas está formado por una ecuación cuadrática de dos incógnitas y una ecuación lineal de dos incógnitas. Los problemas son semejantes, de modo que sólo presentaré uno para ilustrar el método de solución:

Problema:

- El área de un cuadrado es 100 cubits cuadrados es igual a la suma de las área de dos cuadrados pequeños, el lado de uno de estos es $\frac{3}{4}$ partes del lado del otro. ¿Cuánto miden de lado los cuadrados pequeños?

  Solución:

  Se toma el lado de uno de los cuadrado igual a ½ y el lado del otro de ¼ . Falta encontrar los lados de los otros dos cuadrados desconocidos. Siempre se toma un cuadrado de lado 1. Después el lado del otro es ¾, lo cual se multiplica por ¾, lo que nos da $^{9}/_{16}$, el área del cuadrado pequeño. De modo que los dos cuadrados tendrán un área igual a $1^{9}/_{16.}$ Se toma la raíz cuadrada de $1^{9}/_{16}$, lo cual nos da $^{5}/_{4}$. Se toma la raíz cuadrada de 100, la cual es 10. Se divide 10 entre $^{5}/_{4}$, lo cual nos da 8, el lado de uno de los cuadrados pequeños. Se toma ¾ del 8. Lo cual da 6, el lado del otro cuadrado.

La manera en que los egipcios resolvían sus problemas nos hace pensar en la descripción de los pasos a seguir de una modificación de la fórmula general para resolver las ecuaciones de segundo grado, al igual que los babilonios, los egipcios también se planteaban y resolvían problemas concretos, y no llegaron a la generalización.

GRECIA

“Mientras que las matemáticas de las civilizaciones anteriores a las griegas eran una actividad empírica cuyo objetivo estaba centrado en aplicaciones prácticas, con reglas obtenidas vía la experimentación, la observación y la analogía, las matemáticas griegas fueron una ciencia teórica. Su objetivo principal consistía en la búsqueda de la verdad. El razonamiento lógico-deductivo desplazó el razonamiento empírico” (FILLOY y ROJANO, 1984, pp. 55).

De los matemáticos griegos que trabajaron ecuaciones de segundo grado, mencionaré a PITÁGORAS, EUCLIDES y DIOFANTO.

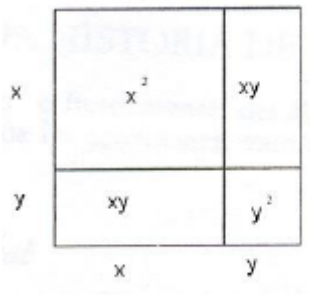
PITÁGORAS (582-500 a.C.)

Es llamado el padre de las matemáticas. En Grecia fundó su famosa escuela pitagórica lo que hoy conocemos como Cretona. En aquel centro de estudios se discutía filosofía, matemáticas y ciencias naturales. Muchos términos matemáticos se remontan a los pitagóricos. Además de la distinción entre números impares y números pares, identificaron números primos, triangulares, cuadrados, pentagonales, etc. Se basaban en una concepción geométrica de los números. Las enseñanzas de los pitagóricos se transmitían por vía oral. La escuela era una hermandad con ritos y ceremonias secretas de los cuales se sabe muy poco (PERERO, 1990, pp. 5).

Se atribuye a PITÁGORAS el teorema que lleva su nombre: en un triángulo rectángulo, el cuadrado construido sobre la hipotenusa es equivalente a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos. Pero sabemos que ya era conocido por los babilonios y por los egipcios. También lo que actualmente conocemos como álgebra se expresaba en términos geométricos por parte de los

pitagóricos. Por ejemplo, la identidad $(x+y)^2$ se demuestra construyendo un cuadrado cuyo lado resulta de la suma de $x+y$.

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$



representación geométrica de la identidad $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

EUCLIDES (vivió alrededor del 300 a.C.)

Su obra más importante es sin duda la titulada *Elementos*. Esta obra está formado por 13 libros, los *Elementos* no son la "suma" de las ciencias matemáticas del tiempo en que fueron redactados (300 a.C.) y tampoco una historia de las matemáticas. Es una introducción sistemática, a la geometría y a la aritmética.

EUCLIDES es uno de los personajes que más ha influido en el desarrollo de las matemáticas a lo largo de la historia.

A continuación presento una de los teoremas planteados por EUCLIDES en su libro número II "los elementos de geometría" (versión de ALVAREZ, 1992, pp.125) la cual representa de manera geométrica.

Teorema 4 del libro II: "*si se corta al albitrio una línea recta, el cuadrado de la línea entera es igual a los cuadrados de las partes más el duplo del rectángulo comprendido por las partes".*

“Que la recta AB sea cortada en el punto C, se dice que el cuadrado ABDE es igual a los cuadrados CBKG y HGFD y a 2 veces el rectángulo contenido bajo AC, DE, pues dentro del cuadrado CBKG tenemos que CGF es paralela a las rectas AD y a BE, además HK es paralela a las rectas AB y DE.

EUCLIDES muestra que CBKG es un cuadrado así como HDFG, con lo cual la proposición resulta válida”.

Lo anterior equivale algebraicamente a la siguiente identidad:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

Como podemos ver, estas dos identidades (la de PITÁGORAS y la de EUCLIDES) son la misma, la diferencia, es que PITÁGORAS establece la afirmación , mientras que EUCLIDES no solo la enuncia sino que la demuestra.

A continuación, presento la manera geométrica en que EUCLIDES resuelve una ecuación cuadrática, apoyándose en el teorema 11 del libro II (versión de ÁLVAREZ, 1992, pp. 155).

Teorema 11 del libro II: *“dividir una recta de modo que el rectángulo comprendido por la recta entera y por una de sus partes sea igual al cuadrado de la parte restante”*

Geométricamente: sea AB la recta dada, hay que dividir AB, de manera que el lado comprendido por la recta entera y por una de sus partes sea igual al cuadrado de sus partes, es decir,

El cuadrado AFGH es igual al área del rectángulo HKDB y BD = AB, si damos los valores de 1 a AB y de x a AH, tenemos lo siguiente:

$$x^2 = (1 - x)(1)$$

Ecuación:

$$x^2 + x = 1$$

Solución:

Para solucionar la ecuación, tenemos que encontrar el valor de x, de la figura tenemos:

AH = FA = x por ser AFGH un cuadrado.

Por lo tanto, tenemos que encontrar el valor de FA.

Como FE = EB y FE = FA + AE, por la construcción de la figura , tenemos que:

FA + AE = EB de donde FA = EB – AE .....(1)

Por construcción de la figura, AE = $\frac{AB}{2} = \frac{1}{2}$ .....(2)

Como el triángulo AEB es rectángulo, por el teorema de Pitágoras tenemos que:

$$EB^2 = AE^2 + AB^2$$

Sustituyendo tenemos:

$$EB^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

EUCLIDES no toma en cuenta el signo negativo de la raíz cuadrada, solo el positivo, de nodo que

$$EB = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{.....(3)}$$

Sustituyendo 2 y 3 en 1 tenemos:

$$x = FA = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$$

Siendo $x = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$, solución de la ecuación.

Este método se utilizó para resolver una ecuación particular, pero se puede buscar generalizarlo.

DIOFANTO (vivió alrededor del 180 d.C.)

Escribe la *Aritmética*, un tratado en 13 libros donde por aritmética se entiende *"teoría de los números"*. Se trata de una colección de problemas que en la actualidad se resuelven con álgebra. En segundo lugar, se ocupa sólo de problemas con soluciones enteras, ignorando los casos cuya solución puede calcularse solamente con aproximación. En tercer lugar, hace un amplio uso de las abreviaturas y símbolos para indicar potencias, incógnitas, relaciones, operaciones, etc. (CAMPIGLIO, 1990, pp. 119).

Por lo que el álgebra desarrollada por DIOFANTO se puede decir que se encontraba en un punto de transición entre el álgebra retórica y el álgebra simbólica, es decir, álgebra sincopada, ya que, por un lado los problemas presentados en su libro están escritos en lenguaje retórico, mientras que por otro utilizaba símbolos como:

Definición	**Símbolo de Diofanto**	**Símbolo actual**
Cuadrado	Δ^{Y}	x^2
Cubo	K^{Y}	x^3
Cuadrado-cuadrado	$\Delta^{Y}\ \Delta$	x^4
Cuadrado-cubo	$\Delta\ K^{Y}$	x^5
Cubo-cubo	$K^{Y}\ K$	x^6

La manera en la que DIOFANTO resolvía las ecuaciones cuadráticas utilizando simbología actual es la siguiente:

Para empezar, no generalizaba, es decir, sólo resolvía casos concretos, por ejemplo la siguiente ecuación utilizando simbología algebraica actual:

$$6x^2 + 3x = 7$$

Solución:

- Se eleva al cuadrado la mitad de 1 (coeficiente del término lineal)

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

- a lo cual se le añade el producto de 1 (coeficiente del término cuadrático) por 6(término independiente), lo cual nos da el cuadrado de $\frac{5}{2}$

$$\frac{1}{4} + 6 = \frac{25}{4} = \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

- A $\frac{5}{2}$ le restamos $\frac{1}{2}$, lo cual nos da 2
- Finalmente obtenemos el cociente de 2 entre1 (coeficiente del término cuadrático), lo cual nos da 2.

Como podemos ver, los pasos a seguir son los de una variación de la fórmula general, de modo que generalizando las ecuaciones cuadráticas resueltas por DIOFANTO (THOMAS, 1999, pp. 64), encontramos 3 casos, el primero de ellos corresponde al ejemplo anterior, de igual manera se obtuvieron los otros dos casos presentados a continuación:

- Caso 1

  Ecuación: $mx^2 + px = q$

  Raíz: $x = \dfrac{-\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{p^2}{4} + mq}}{m}$

- Caso 2

  Ecuación: $mx^2 = px + q$

Raíz: $x = \dfrac{\dfrac{p}{2} + \sqrt{\dfrac{p^2}{4} + mq}}{m}$

- Caso 3

  Ecuación: $mx^2 + q = px$

  Raíz: $x = \dfrac{\dfrac{p}{2} + \sqrt{\dfrac{p^2}{4} - mq}}{m}$

Los problemas que DIOFANTO resolvía utilizando las ecuaciones de segundo grado son del siguiente tipo:

- Encontrar 2 números tales que su suma y producto sean números dados.

  Solución:

  La suma es igual a 20 y el producto a 96.

  Los números a encontrar son: $10 + x$, $10 + x$.

  Así que $100 - x^2 = 96$,

  De donde $x^2 = 4$, así que $x = 2$, y los números buscados son 12 y 8.

- Encontrar 2 números tales que su suma y la diferencia de sus cuadrados son números dados.

  Solución:

  La suma es igual a 20 y la diferencia de cuadrados igual a 80.

  Diferencia $2x$,

  Los números buscados son $10 + x$, $10 - x$,

  Tenemos que $(10 + x)^2 - (10 - x)^2 = 80$ *ó* $40x = 80$ y por lo tanto $x = 2$.

  Los números buscados son 8 y 12.

La manera en la que DIOFANTO resuelve los problemas, se explica de manera detallada en el capítulo 5, los elementos que interesan para el desarrollo del trabajo son los siguientes:

- Plantea problemas no homogéneos, es decir, sumar o restar longitudes con áreas, áreas con volúmenes, etc.

- Sus métodos de resolución de ecuaciones cuadráticas no están anclados a la geometría.

- En el planteamiento y resolución de ecuaciones cuadráticas hace uso de propiedades de números.

- No generaliza, resuelve casos concretos.

CHINA

En un principio, los Chinos utilizaron dos sistemas de notación para la numeración, uno de tipo multiplicativo por grupos y el otro parecido a un sistema posicional. Según COLLETTE (1986, pp. 173) en el sistema multiplicativo de base 10, se utilizaban símbolos distintos para las potencias de 10, y en su forma escrita los símbolos numéricos en posiciones impares (de izquierda a derecha o de abajo a arriba) se multiplicaban por el siguiente.

El sistema de base 10 permitió a los chinos utilizar el equivalente del ábaco en cuanto instrumento de cálculo rápido, como atestiguan los administradores que transportaban barras numéricas hechas de bambú, marfil o hierro, también utilizaban para este fin un conjunto de barras pintadas de rojo y otro de negro, para distinguir los números positivos de los negativos. Como veremos más adelante, los chinos utilizaron números negativos pero no aceptaron el concepto de número negativo como posible solución de una ecuación, para ellos los números negativos representaban pérdidas y los positivos ganancias.

ÁLGEBRA

Para los chinos (siglo XII) de acuerdo con MARTZLOFF (1988, pp. 242) el álgebra era el *tianyuan shu*, es decir, el arte de la incógnita, los chinos se interesaron en resolver ecuaciones, y, como en el caso de otras civilizaciones el álgebra china tiene características particulares cómo:

- Es un álgebra instrumental. Debido al uso tan importante de las tablas de cálculo para la resolución de ecuaciones algebraicas.

- Sus métodos son semejantes a los de la aritmética ordinaria. No desarrollaron un lenguaje especial para el álgebra.

- No utiliza símbolos específicos, por lo que se trata de un tipo de álgebra retórica, los textos chinos más antiguos contenían dibujos de figuras geométricas, y tablas con números.

Respecto al álgebra desarrollado por los chinos, tenemos el libro de "*los nueve capítulos del arte de las matemáticas" DIU ZHANG-SHUANSHU*, es uno de los primeros textos de la China antigua, los temas que en él se tratan son de carácter práctico, destinados a funcionarios de diferentes departamentos, agrimensores, ingenieros, astrónomos, recaudadores de impuestos, etc.

En éste libro, se describe la regla general para resolver ecuaciones simultáneas de hasta ecuaciones con 5 incógnitas, pero no se presentan deducciones de las reglas, explicaciones, definiciones o demostraciones, se trabajaron 18 problemas resueltos, aunque ninguna de estas soluciones resulta negativa.

El método utilizado por los chinos para las resolución de sistemas de ecuaciones es el *fang cheng* , LUI HUI (263 AD) (citado por FILLOY y ROJANO, 1984, pp. 49). En el texto describe el término *fang cheng* como un arreglo que consiste en distribuir en columnas una colección de símbolos numéricos que facilitan realizar las operaciones con fluidez. El número de columnas lo determina el problema. El arreglo se ordena de derecha a izquierda y de arriba abajo. Las columnas presentan dos secciones, la superior expresada con los números a_{ij}, $i,j = 1, 2, ...n$ representan cosas, mientras que la inferior, llamada el *shi*, expresada con los números b_i, representan costos. El arreglo final sobre el tablero de cálculo es rectangular, de aquí la palabra *fang*, que significa cuadro o rectángulo.

El proceso de resolución del *fang cheng*, consiste en la eliminación sucesiva de números por medio de sustracciones entre los elementos de las columnas. Éste

método permitió a los chinos pasar del lenguaje retórico a la notación simbólica así como resolver problemas prácticos por medio de sistemas de ecuaciones lineales.

Como podemos ver, el método desarrollado por los chinos para resolver ecuaciones simultáneas es el antecedente del método actual que consiste en transformar un sistema equivalente expresado por una matriz triangular. Así como las posiciones de los coeficientes y términos independientes sobre el tablero de cálculo propició generalizar a sistemas de *n* ecuaciones con *n* incógnitas.

MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

La base práctica del último libro de *"La matemática en nueve libros"* la constituyen los problemas de la determinación de distancias y alturas así como las propiedades de los triángulos. De los elementos centrales de las matemáticas que contiene este libro, esta el de la formulación general de las reglas. Aparte de los métodos elementales de aplicación del teorema de Pitágoras en ella se encuentra el método de búsqueda de las ternas pitagóricas, esto es, la solución en números enteros de la ecuación

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Soluciones de la ecuación:

- $x = ab$
- $y = \dfrac{a^2 - b^2}{2}$
- $z = \dfrac{a^2 + b^2}{2}$

De los problemas que abordan los chinos y que conducen a una ecuación cuadrática completa, la forma en que los resolvían equivale a las fórmulas que actualmente usan.

De lo anterior, RIBNIKOV (1987, pp. 37) da el siguiente ejemplo, *"el problema 11 de "la matemática en 9 libros" sobre las dimensiones de una puerta conocida la diagonal y la diferencia entre la longitud y el ancho se reduce a dos ecuaciones":*

$$x^2 + y^2 = c^2 \ ; \ y - x = k$$

o una ecuación cuadrática completa : $2x^2 + 2kx + k^2 - c^2 = 0$, la regla formulada en el texto, se escribe utilizando la simbología actual de la siguiente manera:

$$x_{1,2} = \sqrt{\frac{c^2 - 2\frac{k^2}{2}}{2}} \pm \frac{k}{2}$$

En el libro, no aparecen deducciones o demostraciones, de modo que BEREZKINA (citado por RIBNIKOV, 1987, pp. 37) supone que las reglas fueron obtenidas mediante el siguiente método elemental:

Sea:

$$x_{1,2} = z \pm \frac{k}{2}$$

Entonces

$$x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} = 2z^2 + 2\left(\frac{k}{2}\right)^2 = c$$

De donde

$$z = \sqrt{\frac{c^2 - 2\left(\frac{k}{2}\right)^2}{2}}$$

Los chinos trabajaban algunos símbolos algebraicos, y como si manejaban los números negativos, podemos ver que la fórmula utilizada por ellos, para calcular las raíces de una ecuación de segundo grado, permite calcular las dos, positivas o negativas, lo cual no ocurría con los hindúes por ejemplo.

Esta fórmula es la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado que se enseña en tercero de secundaria y nos permite calcular el valor de las dos raíces de una ecuación de segundo grado.

La notación con la que los chinos resolvieron las que hoy conocemos como ecuaciones cuadráticas era sincopada, es decir el paso de transición entre la retórica y la simbólica.

INDIA

El período más brillante de las matemáticas de la India fue entre los años 400 y 1400 de nuestra era, en el último año fue creado el sistema de numeración de base 10, el cero, los números positivos y negativos (que se interpretan como pertenencias y deudas), y también el álgebra (PERERO, 1990, pp. 143).

ÁLGEBRA

Los hindúes a diferencia de los griegos no se interesaron por las demostraciones, sólo enunciaban reglas a seguir, “Los hindúes sin un amplio sistema numérico estaban imposibilitados para crear algo que perteneciera a un álgebra científica. Así ***MAHAVIRA***, en el siglo IX, descarta como inexistentes los números imaginarios con los que se tropezaba sin tratar de explicar su aparición” (BELL, 1995, pp. 105).

Además de las reglas y problemas de la aritmética, en la matemática hindú fueron introducidas también las soluciones de una serie de problemas relacionados con el álgebra. Las reglas les servían para resolver sistemas de ecuaciones lineales y ecuaciones cuadráticas.

Entre los matemáticos hindúes más reconocidos que desarrollaron cuestiones relacionada con el álgebra se encuentran ARYABHATTA, BRAHMAGUPTA y BHASKARA, a continuación se describe brevemente el trabajo de cada uno:

- ***ARYABHATTA*** (en el siglo VI) trabajó con progresiones aritméticas, resolvió ecuaciones de segundo grado determinadas con una y dos incógnitas, y usó las fracciones continuas.

- ***BRAHMAGUPTA*** *(principios del siglo VII)***.** Enunció las usuales reglas algebraicas de los negativos, obtuvo una raíz de las ecuaciones de segundo grado, dio la solución a la ecuación $ax \pm by = c$, en donde a, b y c, son constantes enteras. También discutió la ecuación indeterminada $ax^2 + 1 = y^2$. Escribió el álgebra en forma sincopada; tanto las operaciones elementales como los términos *"incógnita"*, *"entero", "segunda incógnita"*, etc. , se expresa mediante abreviaturas obtenidas generalmente a partir de las primeras sílabas de ciertas palabras como producto, irracional, número absoluto, etc. (COLLETTE, 1986, pp. 188).

- ***BHASKARA*** *(siglo XII)*. Escribió dos libros Lláwati (la hermosa) y Víjaganitas (aritmética). Percibió que las ecuaciones de segundo grado tienen 2 raíces, pero rechazo las negativas, su álgebra era retórica, y en algunos casos, recurrió a la sincópada. En sus dos obras se encuentran los temas preferidos por los hindúes: las ecuaciones lineales y cuadráticas, determinadas o indeterminadas, las medidas, las progresiones aritméticas y geométricas; los números irracionales; las triadas pitagóricas y numerosos problemas de naturaleza geométrica y algebraica. Halló soluciones particulares de la ecuación $x^2 = 1 + py^2$. (COLLETTE, 1986, pp. 190).

Las matemáticas desarrolladas por los hindúes utilizaban un lenguaje metafórico y poético, en verso, PERERO (1990, pp. 145) menciona que el matemático *aryabhatiya* enunció en uno de sus libros la regla de tres (un método desarrollado por los hindúes y que aún se utiliza) de la siguiente manera:

- *a es la "medida",*
- b es el "fruto",
- c es el "deseo",

- x es el “fruto del deseo.

“*En la regla de tres, multiplicar el fruto por el deseo y dividir por la medida; el resultado es el fruto del deseo”.*

Pero, esto no fue todo lo desarrollado por los hindúes, pues, dieron un gran paso hacia el desarrollo del álgebra simbólica, BELL (1995, pp. 106) considera que el álgebra hindú dio un paso, aunque no muy firme hacia el simbolismo operatorio lo cual se aprecia a continuación:

- ARYABHATTA (siglo VI) sugirió el uso de letras para representar incógnitas.

- BRAHMAGUPTA (siglo VII) usó abreviaturas para cada una de las varias incógnitas que se presentan en problemas particulares y también para los cuadrados y para las raíces cuadradas. Distinguía a los números negativos con un punto.

- BHASKARA (siglo XII) escribía las fracciones en la notación actual pero sin raya, escribía un miembro de la ecuación bajo el otro y solo usó la notación sincopada (debido a que no había signo de igualdad).

“... los hindúes poseían la facultad del simbolismo algebraico como técnica operatoria, procediendo de acuerdo con reglas fijas y con procedimientos uniformes: la técnica para resolver problemas de ciertos tipos se indicaba en la misma escritura de los problemas. Todas las complicadas instrucciones verbales para dar los pasos sucesivos hacia la solución, se explican como una garantía para tener éxito, ya que aún en sus mejores aspectos, el álgebra hindú era todavía, a pesar del uso liberal de las abreviaturas, fundamentalmente RETÓRICA

por no estar plenamente simbolizadas las instrucciones para operar” (BELL, 1995, pp. 171).

MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

La regla de acuerdo con SCOTT (1969, pp. 71) de los hindúes para resolver ecuaciones de segundo grado tomando en cuenta la simbología actual es la siguiente, para una ecuación del tipo $ax^2 + bx = c$, el valor de x se obtiene de la siguiente manera:

> *“Tomar el valor absoluto del término independiente de la ecuación multiplicado por 4 veces el coeficiente del término cuadrático se le añade el cuadrado del coeficiente del término lineal, a lo cuál se le extrae la raíz cuadrada, se le resta el coeficiente del término lineal y se divide todo por el doble del coeficiente del término cuadrático, la fórmula resultante, es la siguiente”:*

$$x = \frac{\sqrt{4ac + b^2} - b}{2a}$$

Los hindúes enunciaron esta fórmula de la siguiente manera:

- Se multiplica ambos lados de la ecuación por un número igual a cuatro veces el coeficiente del término cuadrático, se les añade un número igual al cuadrado del coeficiente del término lineal de la ecuación,
    - Siguiendo los pasos anteriores tenemos:

$$ax^2 + bx = c$$

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = 4ac + b^2$$

- Se extrae raíz cuadrada a ambos términos

$$2ax + b = \sqrt{\left(4ac + b^2\right)}$$

- Se resta *b* a ambos lados, y nos queda

$$2ax = \sqrt{\left(4ac + b^2\right)} - b$$

- Finalmente llegamos a la siguiente fórmula

$$x = \frac{\sqrt{4ac + b^2} - b}{2a}$$

La forma en la que los hindúes aplicaron la fórmula anterior, la veremos en el ejemplo.

Problema formulado por ARYABHATA:

"*Un capital de 100 (designado por p) se da a interés. El incremento de un (=x) se da de nuevo a interés durante 6(=t) meses. El incremento total es de 16(=q). ¿Cuál es el incremento mensual?*

Solución:

> "*La regla dada por ARYABHATA para resolver problemas como el anterior da la siguiente prescripción: multiplica la suma del incremento y del incremento del incremento (o sea q) por el tiempo (t) y el capital (p), añade el cuadrado de la mitad del capital* $\frac{p^2}{4}$*, extrae las raíz cuadrada, luego resta la mitad del capital y divide la diferencia por el tiempo."* (RIBNIKOV, 1987. pp. 47).

Si utilizamos la simbología actual, la ecuación que resuelve el problema es:

$$tx^2 + px + qp = 0$$

La fórmula que la resuelve de acuerdo con la solución antes descrita es:

$$x = \frac{\sqrt{qpt + \frac{p^2}{4}} - \frac{p}{2}}{t}$$

Como podemos ver, la anterior fórmula, es muy parecida a la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado que se utiliza en la actualidad. Con la diferencia que solo podemos obtener una de las raíces, pues únicamente se valor el valor positivo de la raíz.

De lo anterior, nos damos cuenta de que en la India, hubo matemáticos BRAHMAGUPTA que utilizaron la notación sincopada y matemáticos posteriores a este que utilizaron la notación retórica, lo cual nos habla de que la historia no es lineal.

ARABIA

BOYER (citado por CAMPIGLIO, 1990, pp. 172) divide la matemática árabe en:

- Aritmética, quizás heredada de los hindúes, basada en el principio de posición.

- Álgebra, que da una forma nueva y sistemática a las elaboraciones babilonias, griegas e indias.

- Trigonometría, de origen griego, revisada según los métodos hindúes y con desarrollos árabes.

- Geometría, de origen griego, con importantes desarrollos debidos a los árabes.

Con frecuencia, en la aritmética de los autores árabes, se encuentran ciertos procedimientos como “la regla del nueve”, la “regla de la falsa posición”, la “regla de la doble falsa posición” y la “regla de tres” desarrollada esta última por los matemáticos hindúes.

ÁLGEBRA

Del nombre de *AL-KHUWARIZMI* (siglo IX) las matemáticas han derivado el término *“algoritmo”*, mientras que del titulo de una obra suya nos viene un vocablo sumamente importante álgebra. Por invitación del Califa, escribe un tratado de

álgebra (825) , desarrollando los aspectos que sirven para resolver los casos normales de la vida: “herencias, donaciones, destrucciones, sentencias y comercios o cuando se requiera efectuar mediciones de terrenos, excavaciones de canales, cálculos geométricos” (CAMPIGLIO, 1990, pp. 173).

Otro término presentado por este matemático es *Muqqabala* que quiere decir “*ciencia de la transposición y la reducción”* y se refiere a la reducción de ecuaciones, es decir, la anulación de términos semejantes en los miembros de la ecuación.

COLLETTE (1990, pp. 198-199), menciona los trabajos importantes realizados por *AL-KHUWARIZMI* en su libro *ÁLGEBRA,* la traducción del Álgebra empieza por una breve introducción sobre el principio del valor de los números, después resuelve seis tipos de ecuaciones:

- $ax^2 = bx$
- $ax^2 = c$
- $bx = c$
- $ax^2 + bx = c$
- $ax^2 + c = bx$
- $ax^2 = bx + c$

Dicho libro consta de seis capítulos, los cuales (a excepción del dos), presento a continuación desglosados de manera sintética:

CAPÍTULO I.

Se ocupa de los cuadrados iguales a raíces, lo que corresponde en notación moderna, a la ecuación $x^2 = 16$. En todos los casos tratados, la raíz nula, es decir, $x = 0$ es descartada.

CAPÍTULO III.

De las ecuaciones que engloban igualdades de raíces y números, el caso $bx = c$, cada capítulo consta de tres partes correspondientes a los casos en que los coeficientes del término variable es mayor, menor o igual a uno.

CAPITULO IV.

Encontramos los tres ejemplos siguientes:

$$x^2 + 10x = 39$$
$$2x^2 + 10x = 48$$
$$\frac{x^2}{2} + x = 28$$

CAPÍTULO V.

Aparece el siguiente ejemplo: $x^2 + 21 = 10x$, puesto, además de dar las dos raíces positivas 3 y 7, obtenidas mediante la fórmula $x = 5 \pm \sqrt{25 - 21}$, el autor llama la atención sobre la cantidad que se encuentra bajo el radical (lo que en la actualidad se denomina discriminante), debe ser positiva.

CAPITULO VI.

El ejemplo que utiliza en este capitulo, $3x - 4 = x^2$ se soluciona meticulosamente completando el cuadrado, con el fin de obtener la solución $x = 3 + \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4}$.

Como podemos ver en los trabajos realizados por *AL-KHUWARIZMI*, se abordaron las ecuaciones lineales y de segundo grado, pero sólo en lo referente a las raíces positivas, aunque admite la existencia de dos raíces. Utiliza un álgebra retórica, hace uso de la geometría para demostrar la veracidad de los problemas algebraicos antes resueltos con números, más adelante se presenta a manera de ejemplo la resolución de una ecuación cuadrática por medio del uso de la geometría, para completar cuadrados.

Otro matemático árabe importante que trabajó cuestiones algebraicas fue:

KHAYYAM (vivió a principios del siglo XII) según BELL (1995, pp. 111) alcanzó un nivel matemático considerablemente superior al de todos sus predecesores, no se contentó con una colección de reglas, clasificó las ecuaciones cúbicas, e ideó un método para resolver geométricamente las ecuaciones numéricas de tercer grado. Éste matemático, se negó a aceptar las raíces negativas, también sus hipérbolas carecían de la rama negativa.

MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

AL- *KHUWARIZMI* examinó los diversos tipos de ecuaciones de segundo grado, cuidando que los coeficientes de cada miembro sean positivos. De acuerdo con DEDRON et ITARD (1959, pp. 325), Al considera los casos siguientes:

1. $x^2 + px = q$

y

$ax^2 + bx = c$, la cual se reduce a la anterior si se divide por a.

(p, q, a, b ,c, positivos para éste y los demás tipos de ecuaciones)

2. $x^2 + q = px$

y

$ax^2 + c = bx$

La solución es:

$$\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{, ó,} \quad \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Para AL- *KHUWARIZMI* éste problemas se vuelve “imposible” si $q > \frac{P^2}{4}$.

Y si $\frac{p^2}{4} = q$, la respuesta es $\frac{p}{2}$.

3. $px + q = x^2$, ó, $bx + c = ax^2$

La solución es:

$$x = \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} + \frac{p}{2}.$$

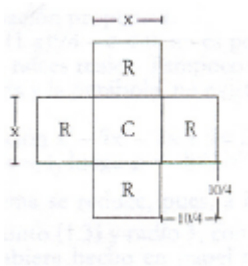
Las soluciones anteriores son presentadas por medio de simbología algebraica actual, pero, *AL-KHUWARIZMI* las obtuvo haciendo uso de métodos geométricos, para explicar este método, presento la resolución de una ecuación correspondiente al primer caso, resuelta geométricamente:

Resolución de la ecuación

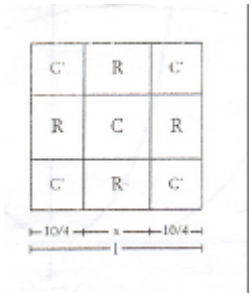
$$x^2 + 10x = 39$$

Solución:

Trazar un cuadrado de lado x y completar con 4 rectángulos de dimensiones $2\frac{1}{2}$ y x y 4 cuadrados de área igual a $6\frac{1}{4}$.



La medida $2\frac{1}{2}$ de los 4 cuadrados corresponde a $\frac{1}{4}$ del coeficiente de x. Sumando el área de los 4 rectángulos R (25) y el área de los 4 rectángulos con el área del cuadrado central (39) se obtiene 25 + 39 = 64. Por tanto, el lado del cuadrado grande es $\sqrt{64}$ = 8, donde 8 - $\left(2\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}\right)=3$. Entonces $x=3$.



Los árabes, podían calcular las 2 raíces de las ecuaciones de segundo grado, cuándo se trataba de números reales, pero ya no existía solución, si aparecía la raíz de un número negativo.

LISTA DE PROBLEMAS

QUE SE RESUELVEN CON ECUACIONES DE 2° GRADO

Estas civilizaciones, que he estado abordando, se enfrentaron, a diferentes problemas de acuerdo con el desarrollo social y cultural de cada una de ellas, he seleccionado algunos de éstos problemas los cuales fueron resueltos por medio de métodos muy específicos desarrollados por cada una de éstas civilizaciones, en esa época, las áreas de las matemáticas no se estudiaban de manera separada como ahora, es decir, no había problemas de álgebra, de geometría, de aritmética, de trigonometría, etc. tan sólo eran problemas de matemáticas.

Como todas las demás ciencias las matemáticas han nacido de las necesidades de los hombres: de la medición de tierras y capacidades de los recipientes, etc. "*Pero como en todos los ámbitos del pensamiento , al llegar a cierto nivel de evolución se separan del mundo real de las leyes atraídas del mismo, se le contraponen como algo independiente, como leyes que le llegan desde fuera y según las cuales tiene que disponerse el mundo"*(ALEKSANDROV, 1994, pp. 76).

Los problemas que presento a continuación fueron seleccionados, por estar relacionados con temas actuales de matemáticas además de estar vinculados al álgebra. A pesar de que pensé encontrar problemas en contexto, no fue así, los problemas son matemáticos y no se encuentran directamente vinculados a situaciones sociales, asocio esto a que los libros consultados son traducciones e interpretaciones de las fuentes originales, y la manera en la que se presentan los problemas depende en gran parte de los traductores.

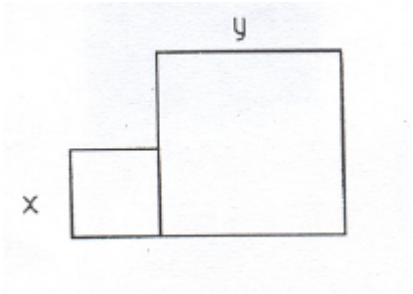
PROBLEMAS DE BABILÓNICOS.

Los retomé del libro de PERERO (1990, pp. 125-129), fueron tomados de las tablillas cuneiformes elaboradas por los Babilonios alrededor del año 2100 a.C. hasta el año 300 a.C., de acuerdo con PERERO "*... estos problemas ilustran el carácter algebraico de la geometría de los babilonios, quienes utilizaban para resolverlos un método parecido al que utilizamos hoy en día"* (1990, pp. 126), algunos de estos problemas se refieren a la relación del largo y el ancho de rectángulos.

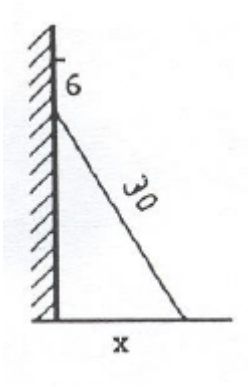
- Determinar los lados y el área de un rectángulo conociendo la suma de los lados (27 unidades) y sabiendo que si al valor del área se le suma el exceso del lado mayor sobre el menor, se obtienen 183 unidades.

- El área de un rectángulo es 375, el lado menor es igual a 30 veces la longitud de una caña, mientras que el lado mayor tiene 5 unidades menos que el doble del otro lado.

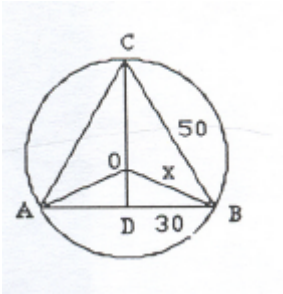
- Un área está formada por dos cuadrados cuya suma es 1000 unidades. El lado de uno de los cuadrados tiene 10 unidades menos que 2/3 del lado del otro cuadrado. ¿Cuáles son los lados de los cuadrados?



- Una viga de 30 unidades de largo se apoya verticalmente contra un muro; si la extremidad superior de la viga se coloca 6 unidades más abajo, ¿en cuántas unidades más se desplazará el otro extremo de la viga?



- Encontrar el radio x del círculo circunscrito al triángulo isósceles ABC, sabiendo que AB = 60 y que CA = CB = 50.



Los siguientes problemas son retomados de DREDON (1959, pp. 323), los cuales están relacionado con cuestiones de medición.

- Adicioné la superficie y el lado de un cuadrado lo cuál dio un resultado igual a ¾. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?

- En un cuadrado, sustraje de la superficie el lado, lo cual me dio como resultado 2 ¿Cuánto mide de lado dicho cuadrado?

PROBLEMAS EGIPCIOS

Los siguientes problemas (que esencialmente son el mismo) los retomé del libro de GILLINGS (1997, pp. 161 – 163), según el autor se encuentran en el Papiro de Berlín, y actualmente se plantean y resuelven por medio de ecuaciones de segundo grado.

- El área de un cuadrado es 100 cubits cuadrados (unidades cuadradas), es igual a la suma de las áreas de dos cuadrados pequeños. El lado de uno de ellos es ¾ el lado del otro. ¿Cuánto miden de lado los cuadrados pequeños?

- El área de un cuadrado es 400 cubits cuadrados, es igual a la suma de las áreas de dos cuadrados pequeños. El lado de uno de ellos es ¾ el lado del otro. ¿Cuánto miden de lado los cuadrados pequeños?

PROBLEMAS GRIEGOS

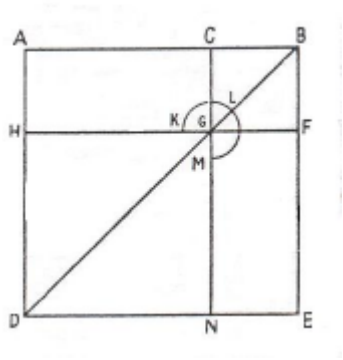
De los problemas griegos, considere los planteados por EUCLIDES y DIOFANTO, con respecto a los problemas planteados por DIOFANTO (HEATH, 1964, pp. 141) incluyo los que tienen que ver con relaciones entre números (los 2 primeros problemas). Los problemas planteados y resueltos por EUCLIDES en su libro II "los elementos de geometría" (versión de ALVAREZ, 1992, 127 - 159) están vinculados a relaciones geométricas.

- Encontrar 2 números cuya suma y la diferencia de sus cuadrados sean números dados.

- Encontrar 2 dos números cuya diferencia y producto sean números dados.

- Teorema 7 del libro II de EUCLIDES. Si se corta al albitrio una línea recta, el cuadrado de la línea entera más el cuadrado de una de las partes, tomados de vez, son igual al duplo del rectángulo comprendido por la línea entera y la parte dicha más el cuadrado de la otra parte.

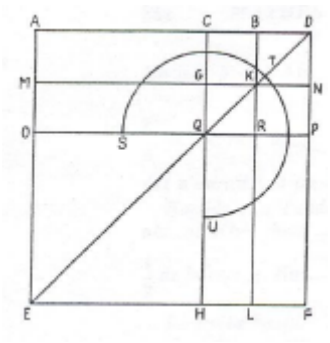
  Geométricamente: se corta arbitrariamente AB por el punto C, se dice que los cuadrados de las rectas AB y BC son iguales al doble del rectángulo comprendido por las rectas AB, BC más el cuadrado CA.



Algebraicamente: $(b+c)^2 + c^2 = 2(b+c)c + b^2$

- Teorema 8 del libro II de EUCLIDES. Si se corta al albitrio una línea recta, el cuadruplo del rectángulo comprendido por la línea entera y por una de las partes más el cuadrado de la otra parte es igual al cuadrado descrito por la línea entera más la parte dicha tomadas como un solo lado.

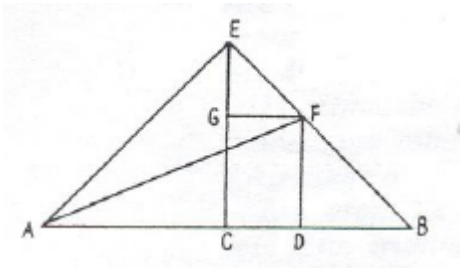
  Geométricamente: Se corta la recta AB arbitrariamente en el punto C, el cuadruplo del rectángulo comprendido por las rectas AB, BC más el cuadrado de la recta AC es igual al cuadrado descrito por las rectas AB, BC tomadas como una sola recta.



Algebraicamente: $4(b+c)c + b^2 = (b+2c)^2$

- Teorema 9 del libro II de EUCLIDES. Si se divide una línea recta en partes iguales y desiguales, los cuadrados de las partes desiguales de la línea total son el doble del cuadrado de la mitad de la línea entera más el cuadrado de la mitad de la diferencia entre las dos clases de cortes.

  Geométricamente: Se divide la recta AB en 2 partes iguales por el punto C y en partes desiguales por el punto D, se dice que los cuadrados de los lados AD, DB son el doble de los cuadrados de las rectas AC, CD.



Algebraicamente: $b^2 + c^2 = 2\left(\frac{b+c}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{b-c}{2}\right)^2$

- Teorema 10 del libro II de EUCLIDES. Si se divide una línea recta en dos y se le añade en recta otra recta, el cuadrado de la línea entera más la añadida, junto con el de la añadida, tomadas de vez, son el doble que el cuadrado descrito por la línea mitad más el cuadrado de la compuesta por la mitad y por la añadida, tomadas como una sola.

  Geométricamente: Divídase la recta AB en dos partes por el punto C y añádase la recta BD. Digo que los cuadrados de las rectas AD, BD son el doble de los cuadrados de las rectas AC, CD.

Algebraicamente: $(b+c)^2 + c^2 = 2\left(\frac{b}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{b}{2}+c\right)^2$

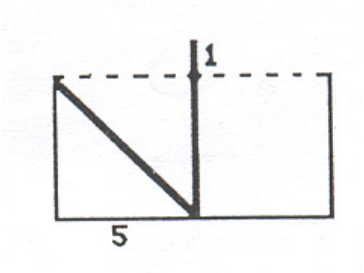
- Teorema 11 del libro II de EUCLIDES: *"dividir una recta de modo que el rectángulo comprendido por la recta entera y por una de sus partes sea igual al cuadrado de la parte restante"* (ÁLVAREZ, 1992, 155).

Geométricamente: sea AB la recta dada, hay que dividir AB, de manera que el lado comprendido por la recta entera y por una de sus partes sea igual al cuadrado de sus partes.

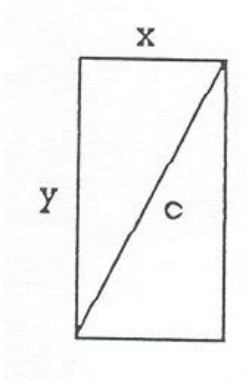
PROBLEMAS CHINOS

De acuerdo con PERERO (1990, pp 133 – 135), algunos problemas chinos son los siguientes:

- Un acuario tiene una base cuadrada de lado 10 "chi". Una caña nace en el centro del acuario y crece perpendicularmente a la base hasta salir 1 "chi" sobre la superficie del agua. Si se inclina la caña hacia un lado, su tope tocará el borde del acuario exactamente al nivel del agua. ¿Cuál es la profundidad del agua y cuál es la longitud de la caña?



- Calcular las dimensiones de una puerta conociendo la diagonal y la diferencia entre el largo y el ancho.



Del libro de MARTZLOFF (1988, pp. 244) es el siguiente problema.

- Si el área de un triángulo rectángulo es de 30 unidades, y si la suma de la base y de la perpendicular es de 17 unidades, ¿cuánto será la suma de la base y de la hipotenusa?

PROBLEMAS HINDÚES

Algunos de los problemas hindúes, fueron planteados y resueltos por BHASKARA, del libro de SCOTT (1969, pp. 75), seleccioné los siguientes:

- La quinta parte de un grupo de personas menos tres, elevado a la segunda potencia, fueron a una cueva, otro más fue visto subiendo a la rama de un árbol. ¿Cuánta gente había en ese grupo?

- La sombra de un gnomon de 12 unidades de largo, disminuida en una tercera parte de la hipotenusa llega a 14 unidades de largo. ¿Cuánto mide la sombra?

PROBLEMAS ARABES

Los siguientes problemas son tomados del libro de DEDRON (1959, pp 325 – 327), fueron resueltos por AL-KHUAWARIZMI, como vimos anteriormente, los resolvió haciendo uso de la geometría.

- Una tira tiene x unidades de ancho y 10 de largo, tiene 10x unidades cuadradas de área, ésta área es igual a la suma de un área cuadrada de x^2 y otra igual a 21 unidades cuadradas. ¿Cuántas unidades tiene de ancho dicha tira?

- El área de un cuadrado es x^2, está formada por un rectángulo de área igual a 4 y otro de área igual a 3x. ¿Cuánto vale el lado de dicho cuadrado?

De esta lista, tengo las siguientes observaciones:

- La gran parte de los problemas no está relacionadas con situaciones cotidianas, reales, por el contrario, son problemas totalmente matemáticos.

- Algunos de estos problemas son parecidos a los que encontramos en los libros de texto de tercero de secundaria, referentes al tema de las ecuaciones cuadráticas.

- Algunos otros, como los de EUCLIDES tienen un alto grado de dificultad, pues requieren un manejo geométrico importante.

CAPÍTULO 3

IMPORTANCIA DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS EN EL PROCESO ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

Mucho se han hablado y escrito a cerca de la necesidad de integrar en enseñanza de las matemáticas, actividades y materiales relacionados con el desarrollo histórico de las matemáticas. OFIR (1992, pp. 21) menciona *"los esfuerzos que se han hecho en esta dirección han sido la propuesta de materiales y creación de materiales acerca de la historia de las matemáticas, directamente relacionadas con el curriculum como apoyo para la enseñanza de las matemáticas",* sin embargo para muchos autores es difícil estar de acuerdo acerca de cómo utilizar ésta historia en la enseñanza de las matemáticas, hay quienes piensan que sólo los profesores universitarios son quienes se sabe, deben incluir en sus clases la historia de las matemáticas al enseñar alguna de las áreas de las mismas, y hay quienes creen que no sólo lo profesores de nivel superior deben usarlas en su labor docente, sino también los profesores de matemáticas de cualquier nivel escolar pues "*el ordenamiento del material instruccional y la enseñanza efectiva de un tema de matemáticas puede requerir de un estudio de la historia de las ideas matemáticas"* (BYERS, 1987, pp. 126), en algunas ocasiones, para poder entender un concepto hay que conocer sus orígenes.

BYERS, menciona que GRATAN-GUINNESS enfatiza que la presentación heurística es relevante para la metodología educacional; agrega que para tener éxito total con toda seguridad se debe de imitar lo histórico más que lo epistemológico (1987, pp. 127), en la actualidad, en la enseñanza de las matemáticas, especialmente, en la educación básica (secundaria es el nivel en el que se enfoca este trabajo), se parte de lo simple a lo complicado lo cual podemos ver al revisar los Planes y Programas de estudio vigentes, la historia nos ha enseñado que en muchas ocasiones esto no siempre se da así, pues los matemáticos de épocas pasadas se enfrentaron tanto a problemas simples como complejos, a los cuales debían de dar solución, y fue gracias a esta necesidad de resolver problemas y a las soluciones que se propusieron que se fueron conformando las matemáticas que ahora conocemos.

En ese sentido, lo que se quiere con la historia de las matemáticas es verlas cómo parte de la humanidad, pues fueron las necesidades sociales las que dieron origen al planteamiento de problemas matemáticos, y desde luego la resolución de estos. Las soluciones a los problemas estaba en función del desarrollo social de las matemáticas de cada una de las épocas en cuestión, por ejemplo soluciones aritméticas, o geométricas, o algebraicas.

Hacer uso de la historia de las, matemáticas en el salón de clases ha sido materia de varios estudios. Es un tema que está muy ligado a la didáctica, pues, FÜHRER (1992, pp. 24) asegura que existen 3 obstáculos para la aceptación del acercamiento histórico en las clases ordinarias de matemáticas, estos son:

- El contraste metodológico entre las matemáticas y la historia.

- El bajo nivel en el conocimiento histórico de los maestros de matemáticas aunado a la incertidumbre que se tiene de las verdades históricas.

- Tener la idea de que la historia es entendida como una búsqueda aburrida del origen, por años obscuros y que nada tienen que ver con la vida actual.

Lo anterior tiene que ver en gran medida a problemas en la didáctica, es importante tener en cuenta que dar clases de matemáticas no solo es enseñar a los alumnos algoritmos y presentar a las matemáticas como verdades absolutas, sino saber de donde surgieron, y como los humanos las fueron construyendo a lo largo de la historia, además de presentar a los alumnos los problemas que representen un reto plausible a su desarrollo y presentar la parte humana de las matemáticas, conocer estos aspectos de las mismas nos ayudará a conocerlas y por lo tanto a entenderlas.

De acuerdo con FAUVEL (1992, pp. 4) algunas de las razones para retomar la historia de las matemáticas en la educación son:

- Incrementar la motivación por aprender.

- Mostrar el lado humano de las matemáticas.

- Conocer su desarrollo histórico permitirá un mejor orden en la presentación de los temas en el currículo.

- Cambiar la percepción que los alumnos tienen de las matemáticas.

- Ayudar a explicar el papel que tienen las matemáticas dentro de la sociedad.

- Presentar a las matemáticas menos rígidas.

JONES (en BYERS, 1987, pp. 127) enlista tres maneras en las cuales los antecedentes históricos pueden ayudar a enseñar matemáticas:

- Reconocimiento de las dificultades inherentes de ciertos conceptos matemáticos.

- Proporcionar motivación.

- Reconocer las relaciones entre las matemáticas y el resto del conocimiento humano.

Después de haber presentado argumentos de porque la historia de las matemáticas es una interesante alternativa didáctica para la enseñanza de las matemáticas, hay que abordar el tema de cómo debe ser usada esta historia en el salón de clases.

FAUVEL (1992, pp. 5) menciona algunos caminos para el uso de la historia de las matemáticas dentro del salón de clases:

- Mencionar anécdotas de algunos matemáticos.

- Suministrar introducciones históricas a conceptos que sean nuevos para los alumnos.

- Alentar a los alumnos a que conozcan los problemas que los matemáticos resolvieron o trataron de resolver cuando se enfrentaron a conceptos matemáticos como los que estudian.

- Trabajar ejercicios dentro del salón de clases usando textos matemáticos antiguos (materiales accesibles).

- Creación por parte de los alumnos de proyectos de algún tema histórico.
- Utilizar ejemplos que puedan ilustrar métodos o técnicas utilizadas en el pasado.

- Revisar y tratar de examinar “falsos conceptos” o “errores” cometidos en el pasado, que nos pueden ayudar a entender y resolver dificultades de los estudiantes en las matemáticas actuales.

- Planear el orden y la estructura de temas en los Planes y Programas de estudio de acuerdo con información histórica para la enseñanza de conceptos matemáticos básicos.

Los puntos anteriores son algunas recomendaciones interesantes, por ejemplo, hay conceptos que son difíciles de entender para los alumnos, y si revisamos la historia, nos encontraremos con que ese problema no es actual, al contrario se trata de una situación que la humanidad ha enfrentado durante muchos años, por ejemplo, los números negativos, no son fáciles de entender para los alumnos (en especial los de secundaria), en la historia podemos ver que los números negativos siempre han tenida un alto grado de dificultad en cuanto a su manejo, pues para muchas civilizaciones ni siquiera eran considerados como números, al no tener relación directa con la realidad según los matemáticos de esas épocas. De lo cual, nos damos cuenta de que algunos conceptos matemáticos no fueron inmediatos, sino que se requirió de un largo proceso histórico de muchísimos años para poder llegar a la comprensión y aceptación de estos.

En los planes y programas, actualmente en vigor, específicamente en la materia de matemáticas, la formas en que los temas están ordenados y estructurados, en los diferentes grados escolares, observamos que en algunos de vellos hay una

fractura, sería interesante ver como se desarrollaron estos temas a lo largo de la historia, para contrastar el orden establecido en el programa de matemáticas de secundaria oficial (1993), con el desarrollo histórico.

Otro punto que me interesa comentar es el siguiente: recuperar los métodos de resolución de ecuaciones cuadráticas utilizados por las civilizaciones mencionadas en el capítulo anterior, ya que nos pueden dar una visión más amplia de la resolución de ecuaciones. Considerar que un problema se puede resolver de distintas maneras nos permite recuperar el trabajo que se desarrolle en el salón de clases además de abrir la posibilidad de encontrar procedimientos que permitan entender mejor los métodos actualmente establecidos.

Hay que tener en cuenta que, el uso de la historia de las matemáticas no es trivial, para que la historia de las matemáticas sea útil para apoyar el trabajo docente en clase es necesario que conocer los antecedentes históricos del tema a tratar. Por ejemplo, para comprender el desarrollo histórico de las ecuaciones de segundo grado, se requiere manejo de conceptos de aritmética, álgebra y de la geometría, por mencionar algunos.

Finalmente, cuándo se pretenda usar la historia de las matemáticas como recurso didáctico para la enseñanza de las matemáticas, hay que tener muy claros los siguientes aspectos mencionados por HEPPEL en 1893 (citado por FAUVEL, 1992, pp. 6):

- La historia de las matemáticas debe ser vista estrictamente como auxiliar en la enseñanza de las matemáticas.

- No debe ser tomada en cuenta como parte de la evaluación de los alumnos.

- Esta parte solo debe ser tratadas con ayuda para la enseñanza.

Tomar en cuenta las recomendaciones anteriores nos permitirá hacer buen uso de la historia de las matemáticas como apoyo en la enseñanza de las matemáticas.

La manera en como se pueden incluir estas cuestiones históricas tanto en el salón de clases ,con actividades propuestas a los alumnos, como en la elaboración de material didáctico pertinente, FAUVEL (1992, pp. 209) la caracteriza de la siguiente manera:

1. Aprender historia por medio de información histórica directa.

    a. Información objetiva, tanto de nombres, fechas, eventos y trabajos famosos, biografías, problemas y cuestionamientos celebres, etc.

    b. Suficientes libros y cursos de la historia de las matemáticas, lo cual puede ser una simple explicación de datos históricos, o una historia de desarrollos conceptuales.

2. Aprender temas matemáticos por medio de una propuesta de enseñanza y aprendizaje inspirada en la historia. Un punto de vista histórico ofrece interesantes posibilidades para el entendimiento global de un tema de acuerdo con lo siguiente:

    a. Hasta el profesor que no es un historiador puede adquirir conocimientos básicos de la evolución histórica del tema.

    b. Con estas bases, el paso crucial de la evolución histórica es identificado, como ideas clave, cuestiones y problemas que abren una nueva perspectiva de investigación.

    c. Este paso crucial al ser reconstruido, podrá ser didácticamente utilizado en el salón de clases.

d. Esta reconstrucción está dada como una secuencia de problemas motivados históricamente con un aumento en el nivel de dificultad, los cuales probablemente pueden ser abordados como parte de un proyecto particular que podrá ser realizado por grupos de estudiantes.

3. Desarrollar el conocimiento matemático de las mismas y de los contextos sociales y culturales dentro de los cuales se han desarrollado.

   a. Conocimiento de la naturaleza intrínseca de la actividad matemática. La historia de las matemáticas proporciona oportunidades de desarrollo, análisis y énfasis en aspectos importantes al hacer matemáticas.

      i. El rol de la estructura conceptual general, de las motivaciones asociadas a cuestiones y problemas, ha llevado a desarrollos del dominio matemático.

      ii. La natural evolución de las matemáticas, en contenido y en forma, notación terminológica, métodos computacionales, modos expresión y representaciones así como las notaciones matemáticas ofrecen evidencias en comparación con las matemáticas actuales.

      iii. El rol de las paradojas, las contradicciones intuiciones y dificultades producen nuevas matemáticas en el contexto de cuestiones y problemas específicos y de motivaciones para generalizar, abstraer y formalizar en tal contexto.

b. Conocimiento de la naturaleza extrínseca de la actividad matemática. Las matemáticas por lo general son vistas como una disciplina a menudo desconectada de influencias sociales y culturales. Pero por medio del estudio de la historias de las matemáticas podemos darnos cuenta de que aspectos matemáticos pueden encontrarse relacionados con cuestionamientos y problemáticas filosóficos, de arte, música e incluso con ciencias humanísticas. Como podemos ver, las matemáticas son parte integral de la cultura y de prácticas de diferentes civilizaciones, grupos étnicos, etc, de modo que la historia de las matemáticas refleja tendencias culturales y sociales.

Lo anterior muestra en que consistiría poder tener un soporte histórico dentro del salón de clases para la enseñanza de las matemáticas, lo importante para lograrlo es contar con el adecuado apoyo didáctico.

FAUVEL (1992, pp. 212), propone un camino en el cual tanto la historia como la educación matemática se integran por medio del uso de recursos y material relacionados con este asunto, dicho material clasifica en tres categorías:

1. Material de consulta primario. Extractos de documentos matemáticos originales.

2. Material de consulta secundario. Libros de texto con narrativas históricas, interpretaciones, reconstrucciones, etc.

3. Material de consulta didáctica. Literatura destilada por los documentos primarios y secundarios inspirados en la historia.

No sólo trabajar alguna anécdota o hablar de algún matemático importante es estar utilizando la historia de las matemáticas como recurso didáctico en la

enseñanza de contenido matemático, es mucho más que eso, es trabajar algunos documentos, conocer e interpretar métodos y trabajar los problemas de cada época, conocer y reconocer los obstáculos de los filósofos y matemáticos así como estar concientes del proceso de evolución de conceptos matemáticos, y lo principal para lograr esto es trabajar con los materiales adecuados.

A continuación, voy a presentar de manera concreta cuales de estos argumentos he tomado como base, para este trabajo, el cual está centrado en el tema de las ecuaciones cuadráticas en tercer año de secundaria, pues como vimos anteriormente, hay comentarios a favor y en contra de incorporar la historia de las matemáticas didácticamente, en la enseñanza de estas, consideraré los que están a favor y me concentraré en 3 puntos, los cuales son apoyados por FAUVEL:

- Los problemas que se plantearon a lo largo de la historia, esto nos permitirá reconocer que fueron estos los que dieron pie al desarrollo de las matemáticas, pues, estaban vinculados a necesidades sociales, a problemáticas de las comunidades, el considerarlos nos ayudará a enriquecer las formas de plantear las situaciones problemáticas o de enunciar los ejercicios.

- Recuperar las diversas metodologías utilizadas en cada época, con el fin de abordar el tema de las ecuaciones cuadráticas desde una o varias metodologías que sean más acordes con las formas de pensamiento de los alumnos, y no desde metodologías formales y acabadas.

- Cambiar la concepción de las matemáticas, que no sea rígida, sino más humana, los alumnos no deben de verla como el conjunto de conocimientos elaborados de una vez y para siempre, sino más dinámica, donde ellos puedan incorporar sus propios métodos, sus estrategias, etc.

De acuerdo con los tres puntos anteriores, llevaré a cabo un acercamiento a los libros de texto de tercero de secundaria, al programa oficial y al libro para el maestro.

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS DE LOS PROGRAMAS Y LIBROS DE TEXTO

En este capítulo está conformado por cuatro apartados a saber:

I. Descripción de los programas, libro para el maestro y 7 libros de texto de matemáticas del nivel secundario.

II. Clasificación de los problemas presentados en los libros de texto.

III. Contraste entre la propuesta didáctica del libro para el maestro y el tratamiento didáctico que presentan los autores de los libros de texto analizados.

IV. Comentarios.

PROGRAMAS DE ESTUDIOS DE MATEMÁTICAS NIVEL SECUNDARIA DE 1993

En esta primera parte de este apartado presento la descripción de los programas de estudio de matemáticas de cada uno de los tres años del nivel secundaria, poniendo énfasis en lo relativo al álgebra.

El propósito central de los programas, en secundaria, es que el alumno aprenda a utilizar las matemáticas para resolver problemas, no solamente con los procedimientos y técnicas convencionales, sino también con procedimientos propios, producto de su trabajo e imaginación.

La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria tiene como propósito general el desarrollo de las habilidades operatorias, comunicativas y de descubrimiento de los alumnos, para lo cual, se propone a los estudiantes que trabajen en:

- Adquirir seguridad y destreza en el empleo de técnicas y procedimientos básicos a través de la solución de problemas.

- Reconocer y analizar los distintos aspectos que componen un problema.

- Elaborar conjeturas, comunicarlas y validarlas.

- Reconocer situaciones análogas.

- Escoger o adaptar las estrategias adecuadas paras la resolución de un problema.

- Comunicar estrategias, procedimientos y resultados de manera clara y concisa.

- Predecir y generalizar resultados.

- Desarrollar gradualmente el razonamiento deductivo.

Uno de los temas del programa que se estudia en los tres años del nivel secundaria es el álgebra, considerado como uno de los temas centrales en este nivel educativo. En los programas se busca que los alumnos tengan una aproximación paulatina, recuperando sus conocimientos de aritmética, desde el primer grado se proponen, actividades de preálgebra con el propósito de aprovechar las oportunidades que ofrecen la aritmética y la geometría para que los estudiantes se inicien gradualmente en el uso de literales y otros temas que preparan el acceso al álgebra.

Para enriquecer el significado de las expresiones con literales es importante acompañarlas con actividades que propicien la construcción de tablas de valores, haciendo uso del plano cartesiano para su presentación en forma gráfica.

En el segundo grado, el álgebra se inicia con una breve revisión de las principales reglas de escritura algebraica y con el tratamiento de las ecuaciones lineales. Se continúa con algunos temas relacionados con monomios y polinomios además de la introducción del plano cartesiano y la iniciación al estudio de sistemas de ecuaciones lineales. Estos temas representan el primer contacto de los alumnos con las nociones y procedimientos fundamentales del álgebra.

Se inicia operando con expresiones de una variable, de primero a tercer grado, sin avanzar de manera prematura hacia expresiones más complicadas, que serán el objeto de un estudio más intensivo en el tercer grado.

En tercer grado se inicia con el plano cartesiano y se revisan los temas de: sistemas de ecuaciones lineales, productos notables y factorización finalmente las ecuaciones cuadráticas.

Los programas están concebidos de manera que los alumnos tengan la oportunidad de revisar y utilizar constantemente las nociones y procedimientos básicos del álgebra, también se resalta la importancia que tiene para el aprendizaje de las matemáticas que los alumnos aprendan a resolver problemas utilizando el lenguaje y los procedimientos relacionados con el álgebra.

A continuación describo la manera en la que se propone abordar el álgebra en los tres grados de educación secundaria, según el programa vigente:

- **Primer grado**.

  PREÁLGEBRA

  - Jerarquía de operaciones y uso de paréntesis en la aritmética.
  - Iniciación al uso de literales:
    - Fórmulas de geometría; problemas que conducen a la escritura de expresiones algebraicas sencillas.
    - Primeras reglas de escritura algebraica (por ejemplo: $2a$ en lugar de $a+a$ ó $2\times a$)
    - Construcción de tablas de valores a partir de fórmulas o expresiones algebraicas.
  - Operaciones asociadas: suma y resta; multiplicación y división. Ecuaciones del tipo: 45 x □ = 325.5

- **Segundo grado**

  INICIACIÓN AL LENGUAJE ALGEBRAICO

- Introducción y uso de la incógnita en la traducción al lenguaje algebraico de problemas que conducen a ecuaciones sencillas.
- Primeras reglas para simplificar la escritura y operar con expresiones algebraicas.
- Ejemplos para introducir y practicar el uso de paréntesis en el álgebra.

ECUACIONES LINEALES O DE PRIMER GRADO

- Métodos de solución de ecuaciones de las formas $a + x = b, ax = b, ax + b = c$ y de otras ecuaciones que pueden llevarse a esta forma; en particular ecuaciones de las formas $ax + b = cx + d, ax + bx + c = dx + ex + f$ y casos sencillos de ecuaciones con paréntesis.

EL PLANO CARTESIANO

- Coordenadas de un punto: ejercicios de localización de puntos y otras actividades en el plano cartesiano.
- Representación en el plano cartesiano de regiones y conjunto de puntos que satisfacen condiciones algebraicas sencillas, por ejemplo:

  Semiplanos.
  Franjas.
  Rectas.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

- Problemas que conducen a sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y su solución por el método de sustitución.

OPERACIONES CON MONOMIOS Y POLINOMIOS

- Ejemplos para ilustrar los diferentes tipos de expresiones algebraicas. Familiarización con los términos y el lenguaje utilizado en la descripción de monomios y polinomios.
- Evaluación de polinomios de una variable

  - Uso de la calculadora para construir tablas de valores de polinomios sencillos.
  - Ejemplos de gráficas de polinomios lineales y cuadráticos.

- Propiedades de las operaciones y su aplicación al simplificar u operar con expresiones algebraicas.

  - Reducción de factores con una base común en un monomio.
  - Simplificación de términos semejantes en un polinomio.

- Operaciones con monomios y polinomios: suma, resta, multiplicación y casos sencillos de división de polinomios.

- **Tercer grado**

PLANO CARTESIANO Y FUNCIONES

- Ejemplos para revisar la noción de función:

  - Funciones dadas por fórmulas, por tablas, por gráficas.
  - Funciones extraídas de la geometría, la física, etc.

- Ejercicios de graficación de funciones, estudio en casos sencillos del comportamiento local de una función.
- Estudio de familias de gráficas de la forma $y = mx + b$.
- Representación en el plano cartesiano de conjunto de puntos y regiones que satisfacen ecuaciones y desigualdades lineales en 2 variables.

OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS

- Monomios y polinomios
  - Ley de los exponentes y su verificación en algunos casos particulares.
  - Revisión de la suma, resta y multiplicación de polinomios.
- Fracciones algebraicas
  - Revisión y expresión simbólica de las operaciones con fracciones comunes.
  - Operación con fracciones algebraicas: simplificación, multiplicación y división, suma y resta.
- Ejercicios de despeje y de sustitución algebraica (por ejemplo si $u = x + 5$ y $v = 2u - 3$, expresar v en términos de x).

ECUACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

- Profundización en el estudio de las ecuaciones lineales:
  - Ecuaciones con paréntesis.
  - Ecuaciones con coeficientes fraccionarios.

- Ecuaciones que se reducen a otras lineales previas transformaciones algebraicas.

- Métodos de solución de sistemas 2×2 de ecuaciones lineales.

  - Sustitución, igualación, suma y resta.
  - Método gráfico y número de soluciones de un sistema 2×2.

- Ejemplos de sistemas de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas (sistemas 3 x 3) y solución por el método de eliminaciones sucesivas.

PRODUCTOS NOTABLES

- Extracción de un factor común
- Los productos notables:
  - $(x+a)^2 = x^2 + 2xa + a^2$
  - $(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$
  - $(x+a)(x-a) = x^2 - a^2$
  - $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

  y sus aplicaciones al cálculo numérico y a la factorización de polinomios de segundo grado.

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO O CUADRATICAS

- Solución de ecuaciones incompletas ($ax^2 + c = 0, ax^2 + bx = 0$); de ecuaciones completas por factorización y completando cuadrados.
- Fórmula general, discriminante y número de soluciones de una ecuación cuadrática.

LIBRO PARA EL MAESTRO
EDITADO POR LA SEP

En esta parte presento la descripción de la propuesta pedagógica del libro para el maestro acerca de la enseñanza de las matemáticas en general a nivel secundaria, del estudio del álgebra en los tres años de este nivel y de las ecuaciones cuadráticas en el tercer año.

ENFOQUE

La propuesta que se presenta en el libro para el maestro referente a la enseñanza de las matemáticas a nivel secundaria se refiere a:

"un aprendizaje significativo de las matemáticas no puede reducirse a la memorización de los hechos, definiciones y teoremas, ni tampoco a la aplicación mecánica de ciertas técnicas y procedimientos" (Alarcón Et. Al., 2000, pp. 12).

Para lograr lo anterior, la enseñanza de las matemáticas debe estar basada en el planteamiento y resolución de problemas, es importante tener en cuentas que los problemas no solo deben ser vistos como aplicación de procedimientos aprendidos con anterioridad, por el contrario deben de ser trabajados a lo largo de todo el proceso enseñanza-aprendizaje, pues es importante para los estudiantes estar concientes de la utilidad práctica de los contenidos que están aprendiendo, logrando un conocimiento significativo.

"Un problema debe dar a los alumnos la oportunidad de explorar las relaciones entre nociones conocidas y utilizarlas para descubrir o asimilar nuevos problemas. Ésta es, esencialmente, la naturaleza de la actividad matemática" (Alarcón Et. Al., 2000, pp13).

En lo referente a las actividades a realizar en clase se debe tomar en cuenta que el aprendizaje de las matemáticas se da de manera gradual, que las actividades deben estar en función de los intereses de los alumnos y la participación de éstos debe ser activa, además de propiciar un ambiente que los lleve a investigar, a discutir tanto con sus compañeros como con el maestro.

Con el aprendizaje del álgebra se espera que un alumno de secundaria esté familiarizado con los modos de expresión simbólica y pensamiento abstracto, capacitado para extraer información de cuadros, tablas y gráficas, comprender fórmulas y saberlas utilizar.

ÁLGEBRA

La organización de los contenidos algebraicos se propone de la siguiente manera:

- Nociones y procedimientos básicos: forman la base del conocimiento algebraico. Se procurara que los alumnos utilicen las nociones y procedimientos básicos del álgebra en problemas en situaciones muy diversas y variadas.

- Técnicas de uso frecuente. Se trata de procedimientos que el alumno deberá saber emplear de manera correcta, sin caer en su utilización mecánica o irreflexiva. El esfuerzo pedagógico estará encaminado a que los alumnos conozcan diversas formas de enfrentar y resolver una misma situación o problema, tomen conciencia de su utilidad y aprendan a reconocer las circunstancias de empleo.

- Ejercicios y problemas. Las actividades en clase no deberán consistir en ejercicios para que se practiquen los procedimientos vistos en el pizarrón, sino que debe haber un número suficiente de ejemplos de aplicaciones, de problemas. Las aplicaciones servirán para que los alumnos reconozcan la

utilidad del álgebra en la solución de problemas del mundo real de la aritmética, la geometría y las otras partes de las matemáticas, ciencias, así como las diversas técnicas.

- Experiencias necesarias. Las experiencias necesarias comprenden las situaciones que el alumno debe vivir para que las nociones matemáticas tengan sentido para él. Deberán tratarse a través de ejemplos y actividades, sin que el profesor tema rebasar los objetivos de su curso y se sienta comprometido a exponer completamente las teorías de ejemplos o a evaluarlos por escrito.

- Precisión de nociones. Se trata por un lado, de recoger y darle forma a los conocimientos matemáticos adquirido por los alumnos a través de las actividades en clase y, por otro lado, de proporcionarles los medios de expresión que les permitan resumir una experiencia tan diversa. La precisión de nociones requiere que los alumnos estén familiarizados con un número suficiente de ejemplos ilustrativos y de uso frecuente.

ECUACIONES CUADRÁTICAS.

Con respecto al tema de las ecuaciones cuadráticas, el libro para el maestro, lo estructura de la siguiente manera:

Se habla de la importancia de trabajar problemas cuya solución está relacionada con ecuaciones cuadráticas desde el principio y no sólo al final del tema, se puede introducir el tema de las ecuaciones de segundo grado por medio de problemas interesantes.

No vale la pena intentar reducir la solución de ecuaciones cuadráticas a la pura aplicación de fórmulas, pues si bien el aprendizaje de la fórmula general es

importante, la experiencia muestra que sin los antecedentes necesarios, los alumnos ni la recuerdan, ni saben aplicarla con propiedad.

La estrategia tradicional para enseñar a resolver ecuaciones cuadráticas consiste en distinguir y tratar por separado las llamadas ecuaciones incompletas de la ecuación completa. El inconveniente de esta estrategia es que con frecuencia conduce a empobrecer los problemas y situaciones que se proponen en clase. Es importante, en particular, que los alumnos:

- Resuelvan ecuaciones puestas en la forma $(ax+b)^2 = d$ y practiquen el procedimiento de completar cuadrados para llevar una ecuación cuadrática a esta forma y resolverla.

- Resuelvan ecuaciones por el método de factorización, sin limitarse a las ecuaciones incompletas que puedan llevarse a la forma $x(ax+b)=0$.

Una vez que los alumnos hayan resuelto suficientes ejercicios y problemas con la técnica de completar cuadrados, el maestro podrá deducir junto con ellos la fórmula general y diseñar actividades y ejercicios para que la practiquen. Deberán observarse que dependiendo del signo del discriminante $b^2 - 4ac$, una ecuación cuadrática puede tener: 2 soluciones reales, sólo una o ninguna solución real. En este último caso la solución de la ecuación son dos números imaginarios o complejos que se estudiarán más adelante, en niveles escolares posteriores.

El método gráfico es cómodo de emplear, porque para aplicarse a cualquier ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, sólo se requiere transformar esta ecuación en el sistema:

$$y = x^2$$

$$y = -\left(\frac{b}{a}\right)x - \frac{c}{a}$$

y de:

- Un dibujo preciso sobre papel milimétrico o cuadriculado de la gráfica de la parábola $y = x^2$.
- Trazar una recta que pase por los puntos de coordenada $\left(0, \frac{-c}{a}\right)$ y $\left(-\frac{c}{b}, 0\right)$, y los puntos donde esta recta corte a la parábola son las soluciones de la ecuación.

Así como para examinar los diferentes casos que pueden presentarse al resolver una ecuación cuadrática:

- Que la recta corte a la parábola en 2 puntos y, entonces, la ecuación tiene dos soluciones reales.

- Que la recta sea tangente a la parábola, en cuyo caso la ecuación sólo tiene una solución, o como también se dice, las dos raíces de la ecuación son iguales.

- Que la recta no corte, ni toque a la parábola, lo que quiere decir que la ecuación no tiene raíces reales (esto es, las dos raíces son imaginarias).

Me parece buena la propuesta pedagógica presentada en el Libro para el Maestro, los aspectos que destaco son los siguientes:

- Lo principal en las matemáticas a nivel secundaria es que el alumno aprenda a plantear y resolver problemas, para lograr un aprendizaje significativo en este.

- Que el alumno vea congruencia entre los temas a estudiar y que no se presenten de manera desligada.

- Que el alumno pueda integrar sus conocimientos previos con los nuevos, a partir de la resolución de problemas teniendo en cuenta contenidos matemáticos previos involucrados en el programa.

- Que en el salón de clases se promueva la participación activa de los alumnos.

- Promover en los alumnos un ambiente de investigación y discusión entre iguales y con el maestro.

- No reducir el trabajo matemático a aplicación de técnicas y procedimientos.

LIBROS DE MATEMÁTICAS
DE TERCERO DE SECUNDARIA

En esta sección presento el resultado de la revisión de 7 libros de texto, de los cuales hago una breve descripción del tratamiento de los temas concernientes a las ecuaciones cuadrática, el número y tipo de ejercicios de ecuaciones y de problemas de enunciado que se proponen al alumno, estos libros son:

- **ARREGUÍN José,** Matemáticas 3, Editorial LAROUSSE, México, 200, pp. 67 – 74.

- **BRISEÑO Luis,** Matemáticas 3, editorial SANTILLANA, México, 1997, pp. 84 – 96.

- **CABALLERO Arquímedes,** Matemáticas 3, editorial ESFINGE, México, 1999, pp. 91 –122.

- **CURIEL, TAVERA** y **VILLAR**, Matemáticas 3, Publicaciones culturales, México, 1997, pp. 70 – 84.

- **GALICIA María Luisa** y **AQUINO Martha** Matemáticas tercer curso, editorial G E Iberoamérica, México, 1994, pp. 121 – 140.

- **GARCÍA Marco, RIVERA Mario** y **DURÁN Rafael,** Matemáticas 3 Estrategias, Editorial ESFINGE, México, 1997, pp. 182 – 202.

- **LICEAGA Jesús,** Ejercicios de matemáticas 3, editorial ESFINGE, México 1994, México. pp. 144 – 156.

Iniciaré con la descripción de los libros antes mencionados, respecto a la manera en que abordan el tema de ecuaciones cuadráticas.

1. **Libro de ARREGUÍN**. Matemáticas 3.

El autor sin hacer ninguna introducción, desarrolla el tema de la siguiente manera:

- Definición de ecuación cuadrática general.
- Ecuaciones incompletas

  - Explicación del procedimiento a seguir para la resolución de las ecuaciones cuadráticas del tipo: $ax^2 + bx = 0$, tomando el factor común e igualando los dos factores a cero para obtener el valor de x_1 y x_2, por ejemplo:

    Resolver la siguiente ecuación: $x^2 - 3x = 0$
    Se factoriza: $x(x-3) = 0$
    Se igualan los dos factores a cero: $x = 0, \quad x - 3 = 0$

    El autor no explica de que propiedad se vale para igualar cada factor a cero

    Soluciones de la ecuación: $x_1 = 0, x_2 = 3$

    - Incluye un listado de 12 ejercicios, cada uno de ellos consiste en una ecuación particular del tipo $ax^2 + bx = 0$, que el alumno debe resolver siguiendo el método antes explicado.
  - Explicación del procedimiento a seguir para la resolución de las ecuaciones cuadráticas del tipo: $ax^2 + c = 0$, se despeja la variable x y se extrae la raíz cuadrada para obtener las soluciones, se ilustra

el proceso anterior, resolviendo una ecuación particular del mismo tipo.

- Incluye una lista de 12 ecuaciones cuadráticas del tipo $ax^2 + c = 0$ que el alumno debe resolver despejando la variable x.

- <u>Ecuaciones completas</u>

  - Explicación del procedimiento a seguir para la resolución de las ecuaciones cuadráticas del tipo: $ax^2 + bx + c = 0$ por factorización. Se factoriza el trinomio de segundo grado, se igualan los dos factores a cero para encontrar las soluciones de la ecuación.
    - Como ejercicios el alumno debe resolver 9 ecuaciones cuadráticas completas, factorizando.
  - Explicación del procedimiento a seguir para la resolución de las ecuaciones cuadráticas del tipo: $ax^2 + bx + c = 0$ completando el trinomio cuadrado perfecto.
    - Como ejercicios el alumno debe resolver 8 ecuaciones completas de segundo grado completando cuadrados.

- <u>Fórmula general</u>

  - Toma la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ y completando cuadrados, el autor llega a la formula general.
  - Explicación de cómo sustituir los coeficientes de una ecuación de segundo grado en la fórmula general.
    - Ejercicios: el alumno debe resolver 8 ecuaciones, de las cuales no todas son completas, utilizando la fórmula general.

- Análisis del discriminante para determinar el tipo de soluciones que una ecuación de segundo grado puede tener dependiendo de su valor.
    - 11 ejercicios en los cuales el alumno debe calcular el valor del discriminante y determinar el número y tipo de soluciones que pueden tener.
- Incluye 4 problemas que el alumno debe resolver planteando y resolviendo ecuaciones de segundo grado, 2 de ellos son los siguientes:
    - Un terreno mide 6 metros más de largo que de ancho. Si la superficie del terreno es de 520 m^2, ¿cuánto mide de largo?, ¿cuánto mide de ancho?
    - Luis ayudo a su equipo de béisbol a ganar un partido anotando varias carreras. Si el triple del cuadrado del número de carreras que anotó Luis es igual a 12, ¿cuántas carreras anotó Luis?

  Los otros dos son del mismo tipo.

2.- Libro de BRISEÑO. Matemáticas 3.

El autor no presenta introducción, desarrolla el tema de la siguiente manera:

- <u>Ecuaciones incompletas</u>

    - Definición de ecuación de segundo grado incompleta y completa.
    - Resolución de 2 ecuaciones de la forma $ax^2 + c = 0$ como ejemplos, despejando la x^2 y sacando raíz cuadrada. Se ilustra en un esquema en donde se describen los pasos a seguir, por ejemplo:

      Encontrar la solución de:

      $$2x^2 + 3 = 21$$

Se despeja x^2 :

$$2x^2 + 3 = 21 \rightarrow 2x^2 = 21 - 3 \rightarrow 2x^2 = 18 \rightarrow x^2 = \frac{18}{2} = 9$$

Entonces, $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

Hay que aclarar, que al autor no explica porque antepone el signo $\pm$ a la raíz cuadrada.

- Ecuaciones incompletas de la forma $ax^2 + bx = 0$, se explica en un esquema y se ilustra con un ejemplo, el proceso a seguir es:
  - Se factoriza la x, quedando dos factores que multiplicados dan cero.
  - Se iguala a cero cada factor, y se obtienen las dos raíces.

  Por ejemplo:

  Resolver la ecuación

  $$3x^2 - 5x = 0$$

  Se saca x como factor común: $x(3x - 5) = 0$

  Se iguala cada factor a cero:

  $$x = 0,$$
  $$3x - 5 = 0$$

  No explica porque se igualan a cero los factores.

  Se despeja x:

  $$3x - 5 = 0 \rightarrow 3x = 5 \rightarrow x = \frac{5}{3}$$

  Las soluciones de la ecuación son:

$x = 0$

y

$x = \frac{5}{3}$

- Ejercicios:
  - De 6 ecuaciones, los alumnos deben indicar cuales son las de segundo grado.
  - Resolver 18 ecuaciones del tipo $ax^2 + c = 0$
  - Resolver 24 ecuaciones del tipo $ax^2 + bx = 0$, 10 con coeficientes fraccionarios (en los ejemplos resueltos no se resuelve ninguna ecuación con coeficientes fraccionarios).

- <u>Solución por factorización</u>

  - Explicación de cómo se resuelve unas ecuación completa de segundo grado factorizando:
    - Binomios cuadrados.
    - Binomios conjugados

    Dando 2 ejemplos en cada caso:

    $x^2 - 12x + 36$ = 0

    $x^2 - 3x + 2 = 0$
  - Ejercicios:
    - Resolver 20 ecuaciones por medio de factorización.
    - Factorizar cada una de estas 22 ecuaciones como un binomio cuadrado y encontrar las soluciones.
    - Se dan18 pares de números y el alumno debe construir 18 ecuaciones una ecuación para cada par de soluciones.
    - Simplificar 18 ecuaciones, factorizándolas como el producto de binomios conjugados.

- <u>Completando cuadrados</u>

  - Explicación del método de completar cuadrados, resolviendo 2 ecuaciones.
  - Ejercicios:
    - Completar 16 expresiones del tipo:
      - (□+ □)^2 = $x^2 + 2x + 1$
    - Convertir 10 expresiones del tipo $ax^2 + bx$ en trinomios cuadrados perfectos.
    - Resolver 14 ecuaciones completando cuadrados (los coeficientes de los términos cuadráticos son iguales a 1).

- <u>Solución por medio de la fórmula general</u>

  - Obtención de la fórmula general resolviendo la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, por el método de completar cuadrados, y se explica con 3 ejemplos concretos la manera en que se sustituyen los coeficientes en dicha fórmula.
  - Ejercicios:
    - Resolver 20 ecuaciones de segundo grado utilizando la fórmula general (las ecuaciones son escritas en su forma general).
    - Transformar 6 ecuaciones a la forma general: $ax^2 + bx + c = 0$, y resolverlas.
    - Resolver 6 problemas utilizando ecuaciones de segundo grado, el tipo de problemas a trabajar son:
      - La suma de 2 números es 29 y su producto 204. ¿Cuáles son los números?
      - Calcula las dimensiones del rectángulo cuya área es 30 y su perímetro 22.

En el libro no se resuelven problemas equivalentes al anterior, sólo se incluye como ejercicios para los alumnos.

- <u>Discriminante y número de soluciones</u>

    - Se establece el discriminante $\left(b^2 - 4ac\right)$ de una ecuación de segundo grado, para determinar el tipo de soluciones que posee, se explica por medio de:
        - Representación gráfica (solo muestra los tres tipos de parábolas de acuerdo con el valor del discriminante), aunque en el libro, el autor no trabaja la resolución de ecuaciones utilizando el método gráfico.
        - Ejemplificando con ecuaciones.
    - Ejercicios:
        - Calcular el discriminante de 20 ecuaciones de segundo grado.
        - Determinar si las parábolas correspondientes a 10 ecuaciones dadas intersecan al eje X.
        - De 3 parábolas dadas determinar los discriminantes de las ecuaciones correspondientes.

3.- Libro de CABALLERO. Matemáticas 3.

Antes de empezar con el tema de las ecuaciones cuadráticas, el autor revisa los temas siguientes a manera de introducción:

- Potencias pares e impares de números negativos
    - Definición de potencia.
    - Potencias de números positivos y de números negativos.
- Doble signo de la raíz cuadrada.
    - Definición de raíz cuadrada.

    - Ejemplos.
- Números irracionales.
    - Definición de número racional.
    - Ejemplos.
- Números reales.
    - El conjunto de los números reales.
- Expresiones racionales e irracionales.
    - Diferencia entre números racionales e irracionales.
    - Diferencia entre expresiones racionales e irracionales.
- Funciones cuadráticas.
    - Definición de función cuadrática
    - Ejemplos
    - Tabulación de funciones cuadráticas y ejemplos.

La manera en que el autor desarrolla las ecuaciones cuadráticas es la siguiente:

- <u>Ecuaciones de segundo grado</u>

    - Definición de las ecuaciones de segundo grado.
    - Ejemplos de ecuaciones de segundo grado: $x^2 - 7 = 0, \quad 3x^2 + x = 18$
    - En 10 ecuaciones, el alumno debe indicar cuales son de segundo grado y cuales no.

- <u>Ecuación completa de segundo grado</u>

    - Definición de ecuación completa de segundo grado, y su forma general ($ax^2 + bx + c = 0$).
    - 6 ejemplos de ecuaciones de segundo grado completas.
    - Se incluye un listado de 10 ejercicios de ecuaciones de segundo grado, el alumno debe convertir la ecuación a su forma general. Uno de los ejercicios es el siguiente:

La ecuación $(x-3)^2 = 17$, hay que transformarla para escribirla de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$

- <u>Ecuaciones incompletas de segundo grado</u>

  - Definición de ecuaciones incompletas de segundo grado.
  - Ejemplos de este tipo de ecuaciones.
  - Se incluye un listado de 10 ecuaciones cuadráticas, que el alumno debe clasificarlas en completas o incompletas.

- <u>Explicación de lo que son las soluciones o raíces.</u>

- <u>Resolución de la ecuación incompleta de segundo grado de la forma</u> $ax^2 + c = 0$

  - El autor explica, usando la ecuación particular: $x^2 - 36 = 0$ de manera detallada, paso a paso, la manera en como se resuelven este tipo de ecuaciones. En otras dos ecuaciones concretas, procede de la misma manera.
  - En un recuadro presenta el método a seguir para la resolución de ecuaciones del tipo $ax^2 + c = 0$: *"la ecuación incompleta de segundo grado de la forma general* $ax^2 + c = 0$*, tiene siempre dos soluciones que son dos valores simétricos. Estos se encuentran extrayendo la raíz cuadrada del cociente que resulta de dividir el término independiente, con signo contrario, entre el coeficiente de* x^2*, teniendo en cuenta el signo* $\pm$ *de la raíz cuadrada".*
  - Ejemplos de este tipo de ecuaciones: 3 de la forma: $x^2 + c = 0$ y 2 de la forma $ax^2 + c = 0$, resueltas de acuerdo con el método antes mencionado.

- Se incluyen 10 ejercicios de ecuaciones del tipo $ax^2 + c = 0$, para que el alumno las resuelva siguiendo el método anterior.

- <u>Resolución de la ecuación incompleta de segundo grado de la forma $ax^2 + bx = 0$</u>

  - El autor explica, en un caso particular, $2x^2 - 6x = 0$, la forma en que este tipo de ecuaciones se resuelven, y de manera detallada describe cada uno de los pasos a seguir. Resuelve otras dos ecuaciones con el mismo procedimiento.
  - En un recuadro presenta el método a seguir para la resolución de ecuaciones de este tipo: "*la ecuación incompleta de segundo grado de la forma $ax^2 + bx = 0$, tiene dos soluciones. Una es siempre cero. La otra se obtiene dividiendo el coeficiente del término de primer grado, con signo contrario entre el coeficiente del término de segundo grado.*
  - Se incluyen 4 ecuaciones de este tipo, resueltas de acuerdo al método antes mencionado.
  - Se incluye un listado de 10 ecuaciones del tipo $ax^2 + bx = 0$, para que sean resueltas usando el método anterior.

- <u>Resolución de la ecuación completa de segundo grado</u>

  - Método de factorización.
    - El autor explica la forma en como se resuelven este tipo de ecuaciones, desarrollando, de manera detallada los pasos a seguir en la ecuación siguiente: $x^2 - 3x + 2 = 0$. Resuelve dos ecuaciones más con el procedimiento descrito anteriormente.
    - En un recuadro presenta el método a seguir para la resolución de este tipo de ecuaciones:

- *“se factoriza el trinomio de segundo grado que constituye el primer miembro de la ecuación”.*
- *“se sustituye dicho trinomio por el producto de los dos factores binómicos que lo forman”.*
- *“se iguala a cero cada uno de los factores binómicos, obteniéndose así dos ecuaciones de primer grado”.*
- *“se resuelven estas dos ecuaciones de primer grado, cuyas soluciones son las raíces de la ecuación de segundo grado”.*
- *“se comprueban las raíces”.*

▪ Ejemplos: 3 ecuaciones completas, resueltas de acuerdo con el método antes mencionado:

Resolver por factorización la siguiente ecuación:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$
$$(x-2)(x-3) = 0$$
$$x - 2 = 0, x = 2$$
$$x - 3 = 0, x = 3$$

No explica porque iguala a cero cada factor.

Las raíces son: $x_1 = 2$
$x_2 = 3$

Comprobación:

Para $x_1 = 2$

$$(2)^2 - 5(2) + 6 = 0$$
$$4 - 10 + 6 = 0$$
$$10 - 10 = 0$$

Para $x_2 = 3$

$$(3)^2 - 5(3) + 6 = 0$$
$$9 - 15 + 6 = 0$$
$$15 - 15 = 0$$

▪ Se incluye un listado de 10 ejercicios de ecuaciones cuadráticas completas.

- Método de completar cuadrados.
  - El autor explica la forma en como se resuelven este tipo de ecuaciones, desarrollando, de manera detallada los pasos a seguir en la ecuación siguiente: $2x^2 - 4x - 6 = 0$.
  - Resuelve dos ecuaciones más con el procedimiento descrito anteriormente.
  - En un recuadro describe el método a seguir para la resolución de ecuaciones de este tipo:
    - *"se pasa el término independiente al segundo miembro".*
    - *"si el coeficiente de x^2 es distinto de la unidad, se dividen los dos miembros entre dicho coeficiente".*
    - *"se agregan a los dos miembros el cuadrado de la mitad del coeficiente de x, obteniéndose así, en el primer miembro, un trinomio cuadrado perfecto".*
    - *"se expresa el primer miembro como el cuadrado de un binomio".*
    - *"se extrae la raíz cuadrada de ambos miembros".*
    - *"se despeja el valor de x obteniéndose las dos raíces de la ecuación".*
    - *"se comprueban las raíces".*
  - Incluye 5 ecuaciones cuadráticas completas resueltas de acuerdo con el método antes mencionado.

    La manera de proceder es la siguiente:

$$2x^2 - 7x + 3 = 0$$
$$2x^2 - 7x = -3$$
$$x^2 - \frac{7}{2}x = -\frac{3}{2}$$
$$x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{49}{16} = -\frac{3}{2} + \frac{49}{16}$$
$$x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{49}{16} = \frac{25}{16}$$
$$\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$$
$$x - \frac{7}{4} = \pm\frac{5}{4}$$
$$x = \frac{7}{4} \pm \frac{5}{4}$$

Las raíces son:

$$x_1 = \frac{7}{4} + \frac{5}{4} = 3$$
$$x_2 = \frac{7}{4} - \frac{5}{4} = \frac{1}{2}$$

Comprobación:

Para $x_1 = 3$

$$2(3)^2 - 7(3) + 3 = 0$$
$$18 - 21 + 3 = 0$$
$$21 - 21 = 0$$

Para $x_2 = \frac{1}{2}$

$$2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 7\left(\frac{1}{2}\right) + 3 = 0$$
$$2\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{7} + 3 = 0$$
$$\frac{2}{4} - \frac{14}{4} + 3 = 0$$
$$-\frac{12}{4} + 3 = 0$$
$$-3 + 3 = 0$$

- Se incluye un listado de 10 ejercicios de ecuaciones cuadráticas completas.

o Fórmula general.

Partiendo de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ y usando el método de completar cuadrados se obtiene la fórmula general.

- Método:
  - *"las raíces de una ecuación de segundo grado se obtienen mediante una fracción cuyo denominador es igual al coeficiente de x con signo contrario, más-menos la raíz cuadrada de la diferencia entre el cuadrado de dicho coeficiente y el cuádruplo del producto del coeficiente de x^2 por el término independiente, y cuyo denominador es el doble del coeficiente de x^2.*
- Resuelve 3 ecuaciones cuadráticas completas de acuerdo con el método antes mencionado.
- Se incluye un listado de 20 ecuaciones cuadráticas completas.

- <u>Problemas</u>

o Se resuelven los siguientes 5 problemas:

- Hallar un número distinto de cero, tal que el triple de su cuadrado sea igual a 6 veces el mismo número.
- Un número es igual al cuadrado de otro, la suma de ambos es 42 ¿Cuáles son estos números?
- Pedro tiene un hermano más pequeño, llamado Juan. La suma de las edades de ambos es 30 años y su producto es 221 ¿Qué edad tienen Pedro y Juan?
- La base de un triángulo mide 6m más que la altura y el área es $20m^2$. Calcular la base y la altura.
- Hallar dos números consecutivos, cuyo producto sea igual a 224.

Los problemas anteriores, los resuelve tomando en cuenta los siguientes aspectos:

- Datos
- Incógnitas
- Representación algebraica
- Ecuación
- Resolución
- Solución
- Comprobación

Para ser resueltos de la misma manera, el autor presenta un listado de 18 problemas equivalentes a los anteriores.

- <u>Tabular expresiones de la forma</u> $ax^2 + bx + c = y$

  - El autor explica como se tabulan algunas ecuaciones particulares, lo hace tomando las siguientes ecuaciones: una completa, dos incompletas, una sin término independiente y otra sin término lineal.

- <u>Representación y resolución gráfica de ecuaciones de segundo grado</u>

  - Se les explica a los alumnos que después de tabular la ecuación, procedan a graficar esos puntos (x, y) en el plano cartesiano para obtener la parábola, y los puntos de intersección de la parábola con el eje de las X son las soluciones de la ecuación.
  - Resuelve 5 ecuaciones con el método gráfico, tres con dos soluciones reales, una con una solución real y otra sin soluciones reales.
  - Se incluye un listado de 20 ejercicios de ecuaciones para ser resueltas por el método anterior.

4.- Libro de CURIEL / TALAVERA / VILLAR. Matemáticas 3.

Empieza con una breve reseña histórica para introducir el tema de las ecuaciones de segundo grado, el tema lo dividen en los siguientes apartados:

- <u>Las ecuaciones de segundo grado y su clasificación.</u>

  - Definición de ecuación de segundo grado con una incógnita, distinguiendo entre ecuaciones completas e incompletas.
  - 3 ejemplos, donde se presentan ecuaciones cuadráticas y se dice si son completas o incompletas identificando los coeficientes y la incógnita.
  - 9 ejercicios, en cada uno se da una ecuación y un número y el alumno debe sustituir el número en la ecuación y comprobar si se cumple la igualdad.
  - Uno de los ejercicios es siguiente:
    - $x^2 - 64 = 0$

      8 sí es solución porqué $(8)^2 - 64 = 0$ es una igualdad verdadera.

- <u>Ecuaciones equivalentes.</u>

  - Definición de ecuaciones equivalentes.
  - 2 ejemplos donde se explica a los alumnos, como obtener ecuaciones equivalentes a partir de una dada, por medio del despeje, uno de ellos es el siguiente:

    - Las siguientes ecuaciones son equivalentes. Su conjunto de soluciones es 6 y –6.

      $4x^2 - 144 = 0$

      sumamos 144 a ambos miembros de la ecuación anterior

      $4x^2 = 144$

      Multiplicamos por $\frac{1}{4}$ los dos miembros de la ecuación anterior y obtenemos:

      $x^2 = 36$

  - 6 ejercicios donde el alumno tiene que encontrar ecuaciones equivalentes a la anotada en cada inciso, y debe comprobar sus respuestas (verificando si las ecuaciones equivalentes tienen el mismo conjunto solución).

- <u>Resolución de ecuaciones de la forma</u> $ax^2 + c = 0$

  - Explicación de cómo se resuelve este tipo de ecuaciones:
    - Construir ecuaciones equivalentes hasta llegar a la forma:

      $x^2 = r$

    - Sacar raíz cuadrada.
  - 1 ejemplo de cómo se resuelve este tipo de ecuaciones, la ecuación es $3x^2 - 48 = 0$.

- Se presentan 15 ecuaciones de la forma antes mencionada y se proponen como ejercicios para que el aluno encuentre las raíces, despejando (“*construyendo ecuaciones equivalentes”)* y sacando raíz cuadrada.

- <u>Resolución de ecuaciones de la forma:</u> $ax^2 + bx = 0$

  - Explicación de cómo se resuelve este tipo de ecuaciones:
    - Se construye una ecuación equivalente factorizando la expresión algebraica original.
    - Después, aplicar la siguiente propiedad “*si un producto es cero, entonces por lo menos uno de sus dos factores debe se igual a cero”.*

  - 2 ejemplos de cómo se resuelven, factorizando una ecuación incompleta y una ecuación completa, explicando cada paso.
  - 17 ejercicios que se resuelven factorizando.

- <u>Resolución de ecuaciones completas de segundo grado</u>

  - Explicación de cómo se resuelven las ecuaciones de segundo grado completas por medio de completar cuadrados, resolviendo 2 ejemplos (uno con el coeficiente del término cuadrático igual a uno y el otro con el coeficiente igual a 4).
  - Como ejercicios, los autores propone 11 ecuaciones completas de segundo grado, que deben ser resueltas completando cuadrados.

- <u>Fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado.</u>

  - Presentación de “las fórmulas generales” para resolver ecuaciones de segundo grado:

- $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

- $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Explicación del valor del discriminante, para determinar el tipo de solución de una ecuación cuadrática.

- Explicación de la obtención de dichas "fórmulas" resolviendo la ecuación $ax^2+bx+c=0$ completando cuadrados.
- Ejercicios:
  - Resolución de ecuaciones completas e incompletas usando las "fórmulas generales", 16 en total.
  - Resolución de 10 ecuaciones para ser resueltas por algún método que el alumno elija.
  - 17 ecuaciones a las cuales se debe determinar el valor del discriminante y encontrar las raíces utilizando las "fórmulas generales".

- <u>Resolución de problemas</u>

  - Ejemplificación de cómo se "resuelve" un problema:
    - Enunciado: *"El área de un rectángulo es 90 cm^2. Si su altura mide 13 cm. más que su base, ¿cuáles son sus dimensiones?*
    - Planteamiento:

      "llamemos x a la medida de la base. En tal caso, la medida de la altura es $x+13$. El área, 90 cms^2, es el producto de dichas dimensiones, esto es":

      $$x(x+13)=90$$

      o bien

      $$x^2+13x-90=0$$

- Resolución de la ecuación cuadrática obtenida:

$$x_1 = \frac{-13 + \sqrt{(13)^2 - 4(1)(-90)}}{2(1)} = \frac{-13 + \sqrt{529}}{2} = 5$$

$$x_2 = \frac{-13 - \sqrt{(13)^2 - 4(1)(-90)}}{2(1)} = \frac{-13 - \sqrt{529}}{2} = -18$$

- Comprobación de las soluciones de la ecuación:

  $(5)(5+13) = 5(18) = 90$

  $(-18)(-18+13) = (-18)(-5) = 90$

- Respuesta al problema:

  "La base del triángulo mide 5 cm. y la altura mide 18 cm.

  En este caso la solución negativa no se emplea para dar respuesta al problema, porque las dimensiones de un rectángulo no pueden ser negativas".

o Ejercicios, presenta 14 problemas, el tipo de problemas presentados son los siguientes:

- El perímetro de un rectángulo mide 32 cm. Si el área es de 63 cm^2. ¿Cuáles son sus dimensiones?
- Dos números suman 9 y sus cuadrados 53. ¿Cuáles son esos dos números?
- Un grupo de 1800 deportistas se forman en columnas para desfilar. Si el número de deportistas en cada columna es 8 más que el número de columnas, ¿cuántas columnas hay y cuántos hombres tiene cada columna?
- Un vehículo ha recorrido 200 Km. en cierto tiempo. Si se hubiera tardado una hora menos en efectuar ese recorrido, su

velocidad habría sido mayor 10 Km./h. ¿Cuál fue su velocidad?

Los cuales deben ser resueltos siguiendo los pasos anteriores.

5.- Libro de GALICIA / AQUINO. Matemáticas tercer curso.

Las autoras, empiezan con la definición general de ecuaciones cuadráticas sin dar ningún tipo de introducción, desarrollan el tema de la siguiente manera:

- Ecuaciones de segundo grado o cuadráticas

  - Definición de una ecuación cuadrática, e identificación de los 3 términos que forman una ecuación completa de este tipo (cuadrático, lineal e independiente).
  - Se escriben 3 ecuaciones cuadráticas, para clasificarlas como completas o incompletas, siguiendo el criterio anterior.
  - Se incluyen 4 ejercicios de ecuaciones cuadráticas en donde el alumno debe clasificarlas como completas e incompletas, en las ecuaciones incompletas identificar el término que falta.

- Resolución de ecuaciones incompletas de segundo grado sin el término lineal

  - Explicación de cómo se resuelven estas ecuaciones cuadráticas despejando la incógnita y sacando raíz cuadrada para encontrar las 2 soluciones, finalmente se comprueban los resultados (se explica el proceso resolviendo una ecuación).
  - Resolución de una ecuación del tipo $ax^2 = c$, de acuerdo con lo anterior.

- Se incluye una lista de ejercicios de 12 ecuaciones del tipo $ax^2 + c = 0$, que el alumno debe resolver como se le explicó anteriormente.

- <u>Solución de ecuaciones incompletas de segundo grado faltando termino independiente</u>

  - Explicación de la forma de resolución: se factoriza, y se iguala a cero cada factor para obtener las dos soluciones de la ecuación, se explica, en un caso particular, resolviendo una ecuación de este tipo ($ax^2 + bx = 0$) y comprobando las soluciones.
  - Se incluye un ejemplo más, de cómo resolver este tipo de ecuaciones, además de comprobar los resultados.
  - Se incluye un listado de 12 ejercicios de ecuaciones del tipo $ax^2 + bx = 0$, para que el alumno las resuelva con la técnica previamente explicada.

- <u>Resolución de ecuaciones completas de segundo grado por el método de factorización</u>

  - Explicación de la forma de resolver ecuaciones del tipo $x^2 + bx + c = 0$*: se factoriza la ecuación y se iguala a cero cada factor para encontrar los dos valores de la incógnita y posteriormente comprobar las soluciones.
  - Se usa un ejemplo más, para explicar la manera en como resolver las ecuaciones completas, por este método.

* Las autoras recomiendan a los alumnos que antes de resolver una ecuación cuadrática la deben igualar a cero y ponerla en la forma general (primero el término cuadrático, después el término lineal y finalmente el término independiente).

- Se incluye un listado de 16 ejercicios de ecuaciones cuadráticas completas. El alumno debe resolverlas usando el procedimiento antes descrito.

- <u>Resolución de ecuaciones de segundo grado completando cuadrados</u>

  - Explicación del método de completar cuadrados, resolviendo una ecuación del tipo $x^2 + bx + c = 0$ para obtener los valores de la incógnita y comprobarlos.
  - Se da un ejemplo más a los alumnos.
  - Se incluye un listado de 14 ejercicios de ecuaciones del tipo $x^2 + bx + c = 0$, que el alumno debe resolver completando cuadrados.

- <u>Resolución de ecuaciones de segundo grado por medio de la fórmula general</u>

  - Explicación de cómo llegar a la fórmula general a partir de resolver la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ completando cuadrados.
  - Como ejemplos, se resuelven 2 ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ utilizando la fórmula general y comprobando resultados.
  - Se incluye una lista de 6 ejercicios de ecuaciones cuadráticas completas, se pide al alumno resolverlas usando la fórmula general.

- <u>Uso del discriminante para determinar el número de soluciones de las ecuaciones de segundo grado</u>

  - Explicación del tipo de soluciones que una ecuación cuadrática puede tener dependiendo del valor del discriminante.

- Como ejemplo de lo anterior se muestran 2 ecuaciones cuadráticas en donde se explica como determinar el valor del discriminante para poder decir si tienen o no solución real.

Se incluyen 12 ejercicios de ecuaciones cuadráticas y se pide determinar si tienen o no solución de acuerdo con el valor del discriminante.

6.- Libro de GARCÍA / RIVERA / DURÁN. Matemáticas 3 estrategias.

Los autores empiezan resolviendo un problema de física, para plantear y resolver una ecuación cuadrática, para posteriormente dar la definición de esta, la manera en la que desarrollan el tema es la siguiente:

- <u>Problemas que relacionados con ecuaciones cuadráticas</u>
  - Introducción al tema: por medio del siguiente problema: *"una persona quiere cruzar nadando un río de 45 metros de ancho. Si su velocidad es de 30 metros por minuto en aguas tranquilas y la corriente lo arrastra a razón de 20 metros por minuto:*
    - *¿En cuanto tiempo atravesará el río?*
    - *¿Cuál será la velocidad resultante?*
    - *¿Cuál será la distancia que recorrerá al nadador para cruzar el río?*
  - ¿Cómo usar vectores ortogonales para resolver problemas? Se explica al alumno la forma en que pueden resolver el problema haciendo uso del teorema de Pitágoras.
  - Ejercicios:
    - Resolver el siguiente problema: *"de acuerdo con las condiciones del problema anterior, ¿a qué velocidad cruzará*

el río una persona que en aguas tranquilas nada a 40 metros por minuto?

- 3 ejercicios en los que el alumno debe encontrar la magnitud de vectores.

- Como desafío, el alumno tiene que encontrar la magnitud de 3 vectores, los cuales forman un triángulo rectángulo: x (cateto), $x+2$ (cateto) y $x+4$ (hipotenusa).
- Como proyecto para casa, el alumno debe de investigar como se resuelven las siguientes ecuaciones de segundo grado :

  - $ax^2 + c = 0$
  - $ax^2 + bx = 0$
  - $ax^2 + bx + c = 0$

- <u>Resolución de ecuaciones cuadráticas por factorización</u>

  - La introducción al tema se hace planteando siguiente problema: *"un ciclista conduce a 35 Km/h (v_o) cuando cruza el kilómetro 20 (x_o) de un recorrido total de 100 kilómetros. Si a partir de ese punto acelera a razón de 5 Km/h, cada hora (a = 5 Km/h^2)*
    - *¿En qué kilómetro irá dentro de 1 hora?*
    - *¿A qué velocidad irá dentro de 2 horas?*
    - *¿Cuánto tiempo tardará en llegar a la meta?"*
  - ¿Cómo usar ecuaciones de segundo grado para resolver problemas? Para responder a la pregunta, se resuelve el problema anterior de la siguiente manera:
    - establecer la ecuación de segundo grado a partir de la fórmula de movimiento uniformemente acelerado.
    - Se simplifica la ecuación hasta su forma general $ax^2 + bx + c = 0$.

- Se factoriza e igualan sus productos a cero para encontrar las soluciones de la ecuación.
- Se "*verifica"* la respuesta al problema.

o ¿Cómo resolver ecuaciones incompletas de segundo grado de la forma $ax^2 + c = 0$? (se explica resolviendo un ejemplo)

- Se despeja x^2.
- Se obtienen las raíces cuadradas en ambos miembros.
- Se obtienen las dos soluciones.

o Se plantean como ejercicios 2 ecuaciones de la forma $ax^2 + c = 0$ que el alumno debe resolver de acuerdo con el ejemplo antes mencionado.

o ¿Cómo resolver ecuaciones incompletas de segundo grado de la forma $ax^2 + bx = 0$? (se explica resolviendo un ejemplo)

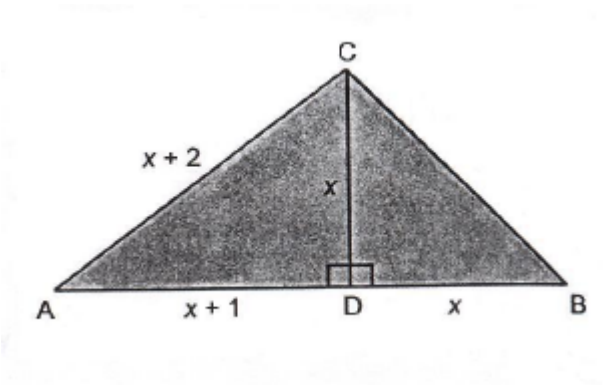
- Se pasa la ecuación a la forma general.
- Se factoriza.
- Se iguala cada factor con cero y se resuelven las ecuaciones resultantes para obtener las soluciones.

o Ejercicios:

- 2 ejercicios relacionados con la ecuación $ax^2 + bx = 0$ que el alumno debe resolver de acuerdo con el procedimiento descrito en el ejemplo.
- 3 ejercicios relacionados con la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ que el alumno debe resolver de acuerdo con el procedimiento descrito en el ejemplo.
- Desafío: *"en una prueba de persecución individual, un ciclista va a una velocidad de m/s. En cierto momento empieza a acelerar a razón de 4 m/s^2. Si faltan 176 m para terminar la competencia (pista: x_o=0, v_o=6m/s y a= 4m/s$^{2)}$:*
- *¿En cuánto tiempo cruzará la meta?*
- *¿A qué velocidad cruzará la meta?*

- *¿A qué velocidad irá después de 5 segundos?”*

- <u>Aplicación de teorema de Pitágoras en ecuaciones de segundo grado</u>
  -
  - Introducción al tema: se presenta la siguiente figura:



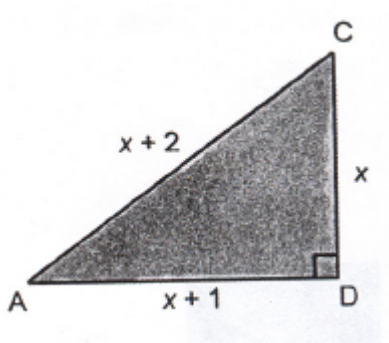
Para que el alumno conteste:

¿Cuántas unidades mide la altura?

¿Cuántas unidades mide la base AB?

¿Cuál es el área del triángulo ABC?

- ¿Cómo plantear problemas por medio de ecuaciones de segundo grado? Resolviendo el siguiente problema: ¿Cuánto mide la altura del triángulo ADC?

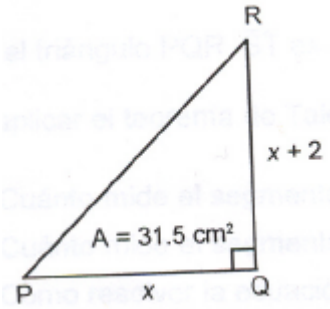


  - Identificar la relación cuadrática (teorema de Pitágoras).
  - Resolverla factorizando.

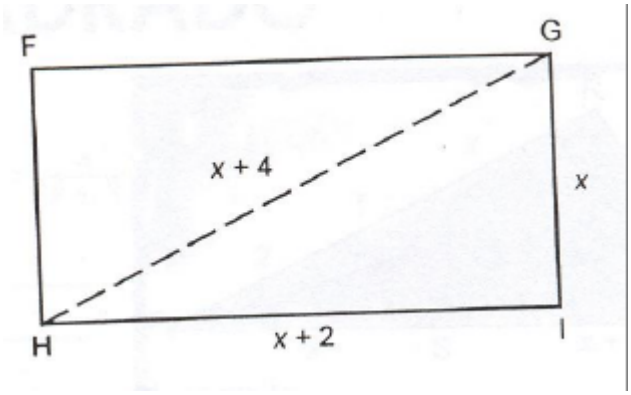
- Interpretar la solución.

o Ejercicios:

- Resolver los siguientes problemas usando ecuaciones de segundo grado:
  - ¿Cuánto mide la base y la altura del triángulo PQR, si su área es de 31.5 cm^2?



  - ¿Cuál es el área del rectángulo $FGIH$?



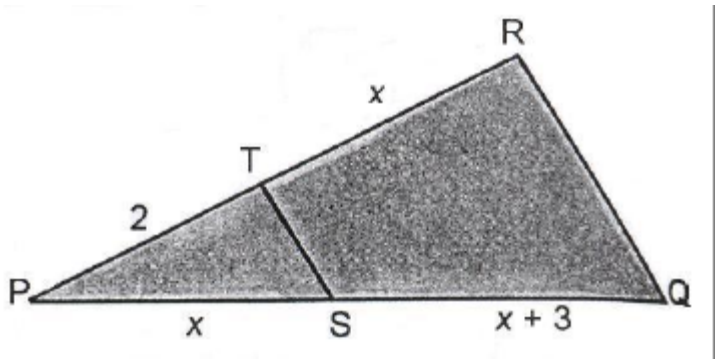
- Resolver por factorización 2 ecuaciones completas de segundo grado.

o Desafío: el alumno debe resolver el siguiente problema, *"un camión de carga y un automóvil salen simultáneamente de la ciudad de México rumbo a Morelia, que se encuentra a 300 Km. La velocidad*

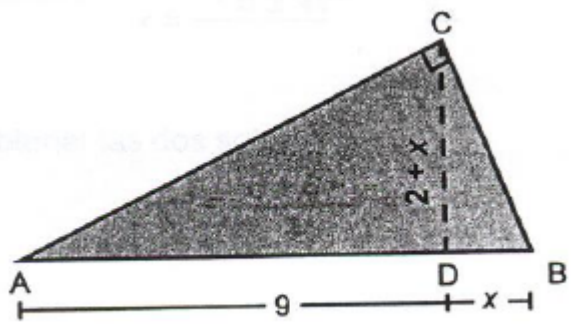
del auto es mayor que la del camión por 40Km/h, por lo que llega a su destino dos horas antes que el camión.

- *¿A qué velocidad viajó cada vehículo?*
- *¿Cuánto tiempo tardó cada uno en llegar a Morelia?*

- <u>Resolución de ecuaciones cuadráticas completando el trinomio cuadrado perfecto.</u>

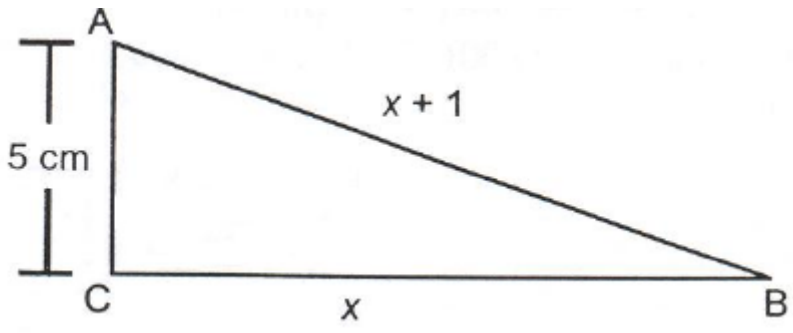
  - Introducción al tema: En el triángulo PQR, el segmento ST es paralelo al segmento RQ. De acuerdo con el teorema de Tales, resolver:
    - ¿Cuánto mide el segmento PR?
    - ¿Cuánto mide el segmento PQ?
    - ¿Cómo resolver la ecuación $x^2 - 2x - 6 = 0$?
    - El perímetro del rectángulo PQR es 24. ¿Cuánto mide aproximadamente el segmento RQ?
    - 

  - ¿Cómo resolver una ecuación de segundo grado cuando la factorización no es evidente? Se explica resolviendo la ecuación del problema anterior.
  - Como ejercicios, el alumno tiene que resolver 4 ecuaciones completas cuadráticas completando cuadrados.
  - Desafío: el alumno tiene que encontrar el valor de la base y la altura del triángulo ABC.



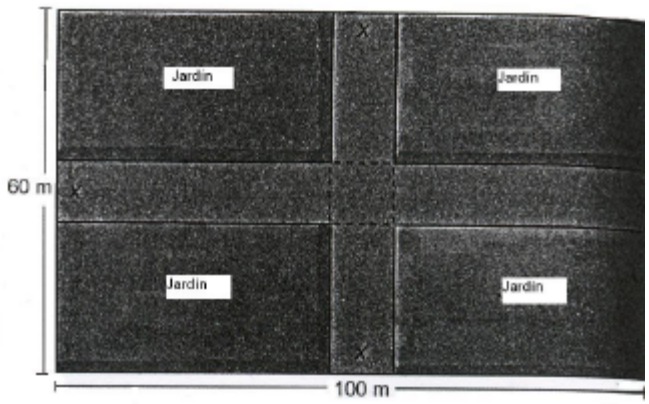
- <u>Deducción y aplicación de la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado</u>

  - Introducción al tema: Se presenta la formula general y se resuelva un ejemplo, se habla del número de soluciones de una ecuación cuadrática dependiendo del valor del discriminante.
  - ¿Cómo resolver una ecuación de segundo grado usando la fórmula general? Se explica paso a paso como se resolvió la ecuación del ejemplo anterior.
  - Como ejercicios el alumno tiene que relacionar dos columnas, en una hay 5 ecuaciones cuadráticas completas, en la otra columna se encuentran las soluciones.
  - ¿Cómo se obtiene la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado? Se resuelve la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ completando cuadrados.
  - Desafío: calcula el perímetro y el área del triángulo ABC.



- <u>Resolución de problemas por medio de ecuaciones de segundo grado</u>

  - Introducción al tema por medio del siguiente problema:
    - *"¿Cuál debe ser el ancho de los andadores para que su área sea la tercera parte del área de los jardines?*
    - *¿Cuál es el área que le corresponde a cada andador?*
    - *¿Cuál es el área que le corresponde a cada jardín?*

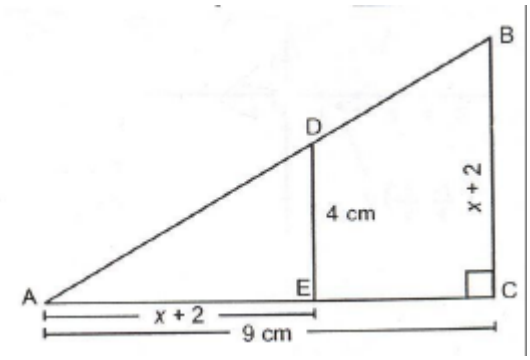


  - ¿Cómo resolver problemas usando ecuaciones cuadráticas? Se resuelve el problema anterior teniendo en cuenta:
    - Identificar las relaciones matemáticas involucradas en el problema.
    - Formular la ecuación de segundo grado correspondiente a la relación.
    - Resolver la ecuación por el procedimiento que se considere más adecuado.
    - Interpretar las soluciones de la ecuación, de acuerdo con las condiciones del problema.
    - Verificar las soluciones del problema.
  - Como ejercicios, el alumno debe resolver 4 problemas de la misma manera como se trabajó en el ejemplo:

- El área de un terreno rectangular es de 205 m^2 y su perímetro es de 61 m. ¿Cuáles son sus dimensiones?
- Si un número aumenta en 1 y el cuadrado también aumenta 1, ¿cuál es ese número?
- Encuentra 3 números impares consecutivos cuya suma de sus cuadrados sea 251.
- Si una maestra de primaria reparte 288 dulces entre los alumnos que aprobaron un examen de matemáticas, les toca un dulce más que si los reparte entre todo el grupo
  - ¿Cuántos alumnos tiene el grupo?
  - ¿Cuántos alumnos aprobaron el examen?

o Desafío: resolver el siguiente problema: *"considera* que *DE*II*BC, para encontrar las medidas que se piden"*

- *La longitud de los segmentos* DE, BC, AE, EC, AD, AB .
- *El área de los triángulos* ACB *y* AED.



- <u>Resolución gráfica de ecuaciones</u>

o Introducción al tema: se explica con un ejemplo la solución gráfica de una ecuación.

o ¿Cómo resolver gráficamente una ecuación de segundo grado? Se explica mediante un ejemplo siguiendo estos pasos:

- Tomar la función correspondiente a la ecuación (la expresión algebraica se iguala a y).

        - Completar el trinomio cuadrado perfecto sin alterar la función, para encontrar el vértice de la gráfica.
        - Trazar la gráfica, similar a la de $y = x^2$, pero con el vértice determinado.
        - Identificar las soluciones en la gráfica (no explica como se encuentran, sólo identifica los puntos de la parábola correspondientes al vértice y a las soluciones).
    - Ejercicios:
        - Resolver gráficamente 4 ecuaciones cuadráticas.
    - Desafío: de acuerdo con una gráfica dada (parábola) contestar:
        - ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación?
        - ¿Cuál es la ecuación?

- <u>Resolución gráfica de ecuaciones de segundo grado por ecuaciones simultáneas</u>

    - Introducción a los tema, parábola y recta: otra forma de resolver gráficamente ecuaciones cuadráticas, consiste en separar el término cuadrático y el lineal y graficar ambos miembros por separado (la parábola y la recta).
    - ¿Cómo resolver gráficamente ecuaciones de segundo grado?

      Se procede de la siguiente manera:
        - Separar el término de segundo grado y el lineal.
        - Graficar la parábola y la recta resultantes.
        - Identificar los puntos de intersección de las 2 gráficas.
        - Obtener las soluciones.
        - Verificar las soluciones.

Enseguida presento un ejemplo de lo anterior:

- Se da un ejemplo de una ecuación cuadrática resuelta gráficamente para que el alumno de la misma manera resuelva 3 ecuaciones, como ejercicio.
- En un recuadro se presenta el tipo de soluciones que una ecuación de segundo grado puede tener de acuerdo con la intersección de las 2 gráficas:
    - Cuando la recta es secante a la parábola, tiene 2 soluciones reales diferentes.
    - Cuando la recta es tangente tiene una solución.
    - Cuando no se cortan no hay soluciones reales.
- Desafío: de acuerdo con 2 gráficas dadas (unas parábola y una recta que se intersectan en 2 puntos), el alumno debe contestar:
    - ¿Cuáles son los puntos de intersección de las dos gráficas?
    - ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación?
    - ¿De que ecuación se trata?

7.- Libro de LICEAGA. Ejercicios de matemáticas 3.

El autor empieza con la definición de ecuación cuadrática, sin ningún tipo de introducción. El formato, de los temas relacionados con las ecuaciones de segundo grado, es el siguiente:

- En un recuadro se trabajan definiciones y ejemplos para una mejor explicación de los contenidos, además se recuerdan temas como: factorización, productos notables, etc.
- Piensa y analiza: son cuestionamientos que se presentan al alumno, con el fin de que reflexione acerca del contenido matemático que se esté revisando.
- Ejercicios.

- <u>Ecuaciones de segundo grado (cuadráticas)</u>

    - Definición y forma general.
    - Piensa y analiza: preguntas para el alumno, en este caso se pide al alumno que identifique el valor de los coeficientes, de cada uno de los términos que conforman determinada ecuación.
    - Incluye, como ejercicios 10 ecuaciones cuadráticas tanto completas como incompletas, con el fin de identificar los valores de *a, b, y c* de acuerdo con la forma general de las ecuaciones cuadráticas.

- <u>Soluciones de ecuaciones de la forma</u> $ax^2 + c = 0$

    - Explicación de cómo se resuelve este tipo de ecuaciones, por medio de la descripción de los pasos a seguir, ejemplo:

      Resolver: $x^2 - 81 = 0$

        - Se suma 81 a ambos miembros de la ecuación:

          $x^2 - 81 + 81 = 0 + 81$

- Reducir términos semejantes:

  $x^2 = 81$

- Extraer la raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación:

  $\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{81}$

- Conjunto solución: $\{9, -9\}$

o Piensa y analiza:

"a partir de la ecuación $ax^2 + c = 0$*, el alumno debe contestar cual es la literal que vale cero (de acuerdo con la forma general) y cuantas soluciones tiene esa ecuación".*

o Incluye 10 ejercicios relacionados con la ecuación de la forma $ax^2 + c = 0$, y se pide al alumno encontrar la solución, de acuerdo con lo explicado.

- <u>Solución de ecuaciones de la forma</u> $ax^2 + bx = 0$.

o Explicación de cómo se resuelve este tipo de ecuaciones, buscando *"el máximo factor común"* e igualando cada uno de los factores a cero, para obtener los dos valores de x. Lo anterior se explica resolviendo dos ecuaciones y comprobando los resultados.

o Piensa y analiza: a partir de la ecuación $ax^2 + bx = 0$ el alumno debe contestar cual es la literal que vale cero (de acuerdo con la forma general) y cuantas soluciones tiene esta ecuación.

o Incluye 5 ejercicios relacionados con la ecuación $ax^2 + bx = 0$. Se pide a los estudiantes encontrar la solución con el método antes explicado.

- Solución de ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, por factorización.

  - Explicación del método: se factoriza la ecuación como producto de binomios conjugados y se igualan a cero los factores para encontrar las soluciones de la ecuación.
  - Incluye 10 ejercicios relacionados con la ecuación cuadrática completa y se pide al alumno encontrar la solución de acuerdo al método explicado anteriormente.

- Solución de ecuaciones cuadráticas, completando el trinomio cuadrado

  - Explicación del método de completar cuadrados para resolver ecuaciones de segundo grado, se explica paso a paso resolviendo 2 ecuaciones y comprobando resultados.
  - Ejercicios:
    - 10 expresiones del tipo $x^2 + bx$ con fin de que el alumno "*complete el trinomio cuadrado perfecto y factorice para encontrar el cuadrado del binomio".*
    - 10 ecuaciones completas de segundo grado que el alumno debe resolver completando cuadrados.

- Fórmula general de la ecuación de segundo grado

  - Explicación de cómo se obtiene la fórmula general a partir de resolver la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ completando cuadrados.
  - Piensa y analiza: de una ecuación cuadrática completa dada se le pide al alumno:
    - Identificar el valor de los coeficientes
    - Sustituirlos en la fórmula general para encontrar las soluciones.

- Comprobar las soluciones sustituyéndolas en la ecuación original.

o Incluye 10 ejercicios relacionados ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, y se pide al alumno que encuentre la solución usando la fórmula general y contestando a la pregunta ¿cuántas soluciones hay para cada ecuación?,

Ejemplo:

$6x^2 - 6x + 5 = 0$ $x_1 =$ $x_2 =$ ¿Cuántas soluciones?_____

TABLAS DEL ANÁLISIS DE LOS LIBROS DE TEXTOS

En la siguientes tablas, se presenta un análisis a cerca del la manera en la que cada autor de los libros de tercero de secundaria descritos al inicio de este capítulo, de acuerdo a como manejan y muestran a los alumnos las ecuaciones cuadráticas, tomando como base lo propuesto en el programa de matemáticas de secundaria (1993) y en el libro para el maestro. En dicha tabla se puede observar lo siguiente:

- En la primer columna el apellido de los autores del libro en cuestión.

- En la tercer columna, se enlistas cada uno de los temas que el autor trabaja en lo referente a las ecuaciones cuadráticas.

- En la segunda columna, aparece el tratamiento que cada autor da al tema de las ecuaciones cuadráticas.

- En la cuarta columna, describo de que manera cada autor utiliza los problemas de enunciado durante el desarrollo del tema.

- En la quinta columna, el análisis consiste en identificar si cada libro cumple por una parte con los temas exigidos en el programa y por otra si es tomado en cuenta el enfoque de dicho programa.

- En la sexta columna, el análisis está en función del libro para el maestro, y consiste en mencionar si cada libro cumple con los temas propuestos por éste y si además toma en cuenta su propuesta pedagógica en cuanto al trabajo con los temas.

ANALIZAR		
PROBLEMAS	PROGRAMA	LIBRO para el MAESTRO
La resolución de problemas, es trabajada por el autor, como un tema al final de la unidad, no resuelve ningún problema, solo plantea una lista de 4 problemas de enunciado para que el alumno los resuelva. Los problemas son de tipo geométrico, de relaciones entre números y de otro tipo de contexto, 3 de ellos se resuelven de manera indirecta.	Con respecto a los temas del programa. • Cumple con todos los temas exigidos en el programa de matemáticas (1993) referente al tema de ecuaciones cuadráticas. Con respecto al enfoque del programa. • El tema de las ecuaciones cuadráticas no se trabaja por medio de la resolución de problemas.	Con respecto a los temas, el autor no trabaja: • El discriminante (número de soluciones). • El método gráfico para resolver ecuaciones de segundo grado. Con respecto a la propuesta: • El autor no trabaja problemas a lo largo del desarrollo del tema de ecuaciones cuadráticas como lo propone el libro para el maestro, los trabaja al final de la unidad. • No se explicita la existencia de alguna relación entre los diferentes tipos de ecuaciones cuadráticas.

ANALIZAR		
PROBLEMAS	PROGRAMA	LIBRO para el MAESTRO
La resolución de problemas de enunciado es presentada por el autor, después de haber expuesto todos los tipos de ecuaciones cuadráticas y ha llegado a la fórmula general. Los problemas planteados son de tipo geométrico y numérico , además no todos se resuelven de manera directa. El autor no resuelve ningún problema, sólo los expone al alumno, para que este trate de resolverlos.	Con respecto a los temas del programa. • Cumple con todos los temas exigidos en el programa de matemáticas (1993) referente al tema de ecuaciones cuadráticas. Con respecto al enfoque del programa. • El tema de las ecuaciones cuadráticas no se trabaja por medio de la resolución de problemas.	Con respecto a los temas, el autor no trabaja: • El método gráfico para resolver ecuaciones de segundo grado. Con respecto a la propuesta: • No trabaja problemas a lo largo del desarrollo del tema de ecuaciones cuadráticas como lo propone el libro para el maestro, los trabaja como ejercicios para el alumno. • No se explicita la existencia de alguna relación entre los diferentes tipos de ecuaciones cuadráticas.

ANALIZAR		
PROBLEMAS	PROGRAMA	LIBRO para el MAESTRO
La resolución de problemas de enunciado, es trabajada como uno de los últimos temas de la unidad, el autor, resuelve 5 problemas de diferente tipo geométrico, de relaciones numéricas y de otro tipo de contexto explicando el planteamiento de la ecuación, justificando cada paso, pues la ecuación no en todos lo casos sale directa, resuelve detalladamente la ecuación y comprueba los resultados. A continuación da una lista de 18 problemas de enunciado para que el alumno la resuelva, los problemas son de tipo geométrico, numérico y de otro tipo de contexto, además no conduce directamente al planteamiento de una ecuación de segundo grado.	Con respecto a los temas del programa. • Cumple con todos los temas exigidos en el programa de matemáticas (1993) referente al tema de ecuaciones cuadráticas. Con respecto al enfoque del programa. • El tema de las ecuaciones cuadráticas no se trabaja por medio de la resolución de problemas.	Con respecto a los temas, el autor no trabaja: • El discriminante (número de soluciones) • Método gráfico.. Con respecto a la propuesta: • No trabaja problemas a lo largo del desarrollo del tema de ecuaciones cuadráticas como lo propone el libro para el maestro, los trabaja al final de la unidad. • No se explicita la existencia de alguna relación entre los diferentes tipos de ecuaciones cuadráticas.

ANALIZAR		
PROBLEMAS	PROGRAMA	LIBRO para el MAESTRO
La resolución de problemas de enunciado, es trabajada como el último tema de la unidad, el autor, resuelve un problema geométrico, explicando el planteamiento de la ecuación, justificando cada paso, pues la ecuación no sale directa, resuelve detalladamente la ecuación y comprueba los resultados. A continuación da una lista de 15 problemas de enunciado para que el alumno la resuelva, los problemas son de tipo geométrico, numérico y de otro tipo de contexto, además no conducen al planteamiento directo dela ecuación de segundo grado.	Con respecto a los temas del programa. • Cumple con todos los temas exigidos en el programa de matemáticas (1993) referente al tema de ecuaciones cuadráticas. Con respecto al enfoque del programa. • El tema de las ecuaciones cuadráticas no se trabaja por medio de la resolución de problemas.	Con respecto a los temas, el autor no trabaja: • El discriminante (número de soluciones). • El método gráfico para resolver ecuaciones de segundo grado. Con respecto a la propuesta: • No trabaja problemas a lo largo del desarrollo del tema de ecuaciones cuadráticas como lo propone el libro para el maestro, los trabaja al final de la unidad. • No se explicita la existencia de alguna relación entre los diferentes tipos de ecuaciones cuadráticas.

ANALIZAR		
PROBLEMAS	PROGRAMA	LIBRO para el MAESTRO
El autor, no trabaja la resolución de problemas, ni como ejercicio para los alumnos. Solo trabaja la resolución de ecuaciones resolviendo ecuaciones sin contexto, con un grado de dificultad levemente mayor al de las ecuaciones resueltas por el autor (ejemplos).	Con respecto a los temas del programa. • Cumple con todos los temas exigidos en el programa de matemáticas (1993) referente al tema de ecuaciones cuadráticas. Con respecto al enfoque del programa. • El tema de las ecuaciones cuadráticas no se trabaja por medio de la resolución de problemas.	Con respecto a los temas, el autor no trabaja: • El método gráfico para resolver ecuaciones de segundo grado. Con respecto a la propuesta: • No trabaja la resolución de problemas. • No se explicita la existencia de alguna relación entre los diferentes tipos de ecuaciones cuadráticas.

ANALIZAR		
PROBLEMAS	PROGRAMA	LIBRO para el MAESTRO
La resolución de problemas de enunciado es trabajada por el autor durante el desarrollo del tema de ecuaciones cuadráticas, pues los problemas son utilizados para introducir algunos de los temas, Resuelve problemas y propone otros para ser resueltos por los alumnos. Los problemas que el autor plantea como introductorios de tema son problemas de física o que involucran el teorema de Pitágoras (tema visto con anterioridad por el autor). El autor los muestra, presenta la ecuación, sustituye valores y explica detalladamente la resolución de la ecuación. Los problemas presentados a los alumnos son de tipo numérico, geométrico y de otro tipo de contexto y no todos se resuelven de manera directa.	Con respecto a los temas del programa. • Cumple con todos los temas exigidos en el programa de matemáticas (1993) referente al tema de ecuaciones cuadráticas. Con respecto al enfoque del programa. • El autor propone trabajar tema de las ecuaciones cuadráticas por medio de la resolución de problemas.	Con respecto a los temas, en este libro se trabajan todos los temas propuestos por el libro para el maestro. Con respecto a la propuesta: • El autor, trabaja la resolución de problemas a lo largo del tema, aunque, el autor, al resolver dichos problemas no explica como plantear la ecuación, solo la presenta y explica la solución de la ecuación a detalle. • No se explicita la existencia de alguna relación entre los diferentes tipos de ecuaciones cuadráticas.

ANALIZAR		
PROBLEMAS	PROGRAMA	LIBRO para el MAESTRO
Este autor no trabaja la resolución de problemas, solo la resolución de ecuaciones resolviendo ecuaciones sin contexto, solo propone ejercicios de ecuaciones a los alumnos similares en grado de dificultad a los resueltos por el autor (ejemplos)	Con respecto a los temas del programa. • Cumple con todos los temas exigidos en el programa de matemáticas (1993) referente al tema de ecuaciones cuadráticas. Con respecto al enfoque del programa. • El tema de las ecuaciones cuadráticas no se trabaja por medio de la resolución de problemas.	Con respecto a los temas, el autor no trabaja: • El discriminante, número de soluciones. • El método gráfico para resolver ecuaciones de segundo grado. Con respecto a la propuesta: • No trabaja la resolución de problemas, como lo propone el libro para el maestro. • No se explicita la existencia de alguna relación entre los diferentes tipos de ecuaciones cuadráticas.

CLASIFICACIÓN DE PROBLEMAS

Los problemas contenidos en los libros de secundaria juegan diferentes papeles en el tema de ecuaciones cuadráticas, los usos más comunes son:

- Problemas motivadores.
- Problemas para ejemplificar.
- Problemas para ser resueltos por los alumnos.

Los problemas incluidos en los libros de texto, que se resuelven mediante ecuaciones de segundo grado, independientemente de los autores, los he clasificado de la manera siguiente:

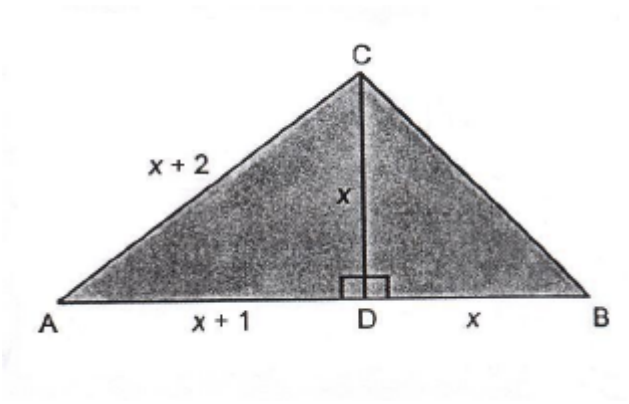
1. Problemas que involucran contextos geométricos:

    a. Problemas relacionados directamente con la ecuación cuadrática:

        i. La base de un triángulo es 8m menor que la altura y el área es $120m^2$. Hallar sus dimensiones.
        ii. La base de un rectángulo es el triple que la altura y su área es $108m^2$. Hallar la base y la altura.
        iii. La base de un rectángulo es 9m mayor que la altura. Si cada dimensión se aumenta en 4, el área será $322m^2$. Calcular sus dimensiones.
        iv. El áreas de un triángulo es $54m^2$ y su altura es el triple de la base. Hallar sus dimensiones.
        v. En un terreno rectangular, el largo excede al ancho en 8m. Si cada dimensión se aumenta en 8m, entonces el área será el doble. Encontrar las dimensiones del terreno.

vi. Una loseta de mármol tiene forma cuadrada y su área es de 1600 cm^2. ¿Cuánto mide por lado?

vii. De acuerdo con la siguiente figura:



1. ¿Cuántas unidades mide la altura?
2. ¿Cuántas unidades mide la base AB?
3. ¿Cuál es el área del triángulo ABC?

b. Problemas que no están directamente relacionados a la ecuación cuadrática:

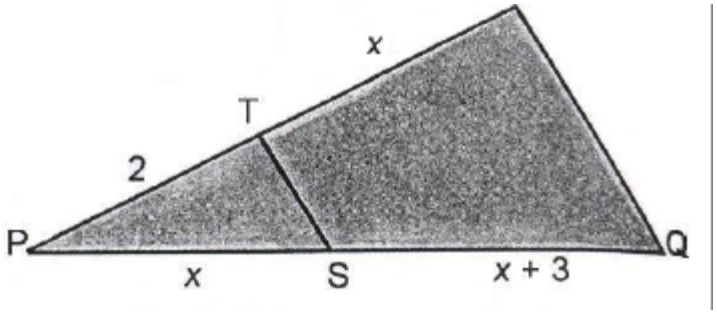
i. El perímetro de un rectángulo mide 32cm. Si su área es de 63cm^2, ¿cuáles son sus dimensiones?

ii. Las medidas de los catetos de un triángulo rectángulo suman 25cm y su área es de 75cm^2, ¿cuánto mide cada cateto?

iii. La altura y la base de un triángulo isósceles suman 34m. Si su área es de 140m^2, ¿cuánto mide su base y su altura?

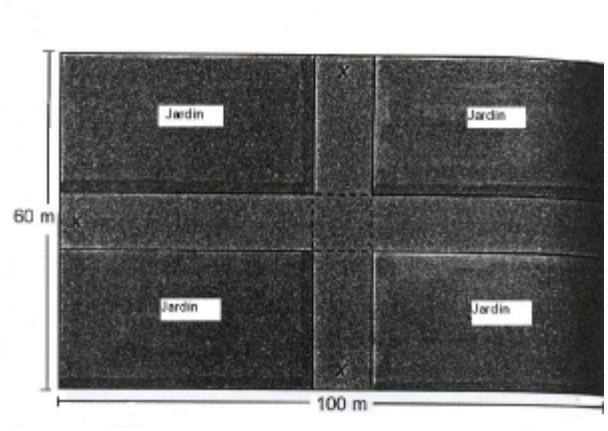
iv. La diagonal menor de un rombo mide 5cm menos que la mitad de la diagonal mayor y su área es de 150cm^2. ¿Cuánto miden sus dos diagonales?

v. En el triángulo PQR, el segmento ST es paralelo al segmento RQ. De acuerdo con el teorema de Tales, resolver:



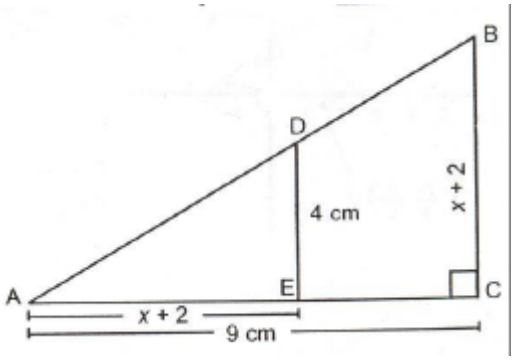
1. ¿Cuánto mide el segmento PR?
2. ¿Cuánto mide el segmento PQ?
3. ¿Cómo resolver la ecuación x^2-2x-6=0?
4. El perímetro del rectángulo PQR es 24. ¿Cuánto mide aproximadamente el segmento RQ?

vi. De la siguiente figura:



1. ¿Cuál debe ser el ancho de los andadores para que su área sea la tercera parte del área de los jardines?
2. ¿Cuál es el área que le corresponde a cada andador?
3. ¿Cuál es el área que le corresponde a cada jardín?

vii. Considera que DE//BC, para encontrar las medidas que se piden



1. Longitud de los segmentos DC, AE, EC, AD y AB.
2. Área de los triángulos ACB y AED.

2. Problemas que involucran relaciones entre números:

   a. Problemas que están directamente relacionados a la ecuación cuadrática:

      i. Hallar un número distinto de cero, tal que el duplo de su cuadrado sea igual a 14 veces dicho número.
      ii. Hallar un número, cuyo cuádruplo de su cuadrado más 30 es igual a 26 veces el mismo número.
      iii. Hallar un número, cuyo triple de su cuadrado, disminuido en 36, es igual a 12 veces el mismo número.
      iv. Hallar un número tal que la tercera parte de su cuadrado, aumentado en 18, sea igual a 5 veces el mismo número.
      v. Hallar un número, cuyo triple de su cuadrado, disminuido en el cuádruplo del mismo número, es igual a 160.
      vi. Encuentra un número positivo tal que su cuadrado menos su quíntuplo sea 36.
      vii. Hallar 2 números consecutivos, cuyo producto es 306.
      viii. Hallar 2 números impares consecutivos, cuyo producto sea 483.

b. Problemas que no están directamente relacionados a la ecuación cuadrática:

   i. Un número es igual al cuadrado de otro y la suma de ambos es 132. Encontrar estos números.
   ii. El triple de un número es igual al cuadrado de otro y la suma de ambos es 18. Hallar estos números.
   iii. La suma de 2 números es 10 y la suma de sus cuadrados es 52. Hallar estos números.
   iv. El producto de 2 números es 180 y su cociente es 5/4. ¿Cuáles son esos números?
   v. La suma de dos números es 29 y su producto, 204. ¿Cuáles son los números?
   vi. El producto de 2 números consecutivos es 600. ¿Cuáles son los números?
   vii. Dos números suman 9 y sus cuadrados 53. ¿Cuáles son esos números?
   viii. Dos números son consecutivos y el cuadrado del mayor excede en 57 al triple del menor. ¿Cuáles son esos dos números?

3. Problemas que involucran otro tipo de contextos:

   a. Problemas que están directamente relacionados a la ecuación cuadrática:

      i. Se han vendido cierto número de plumas en $225.00. Si el precio al que se vendió cada una es igual al número de plumas. ¿Cuántas plumas se vendieron?

ii. Eduardo tiene 4 años más que Antonio y la suma de los cuadrados de sus edades es 136. Hallar la edad de Eduardo y la de Antonio.

iii. Un vehículo ha recorrido 200km en cierto tiempo. Si se hubiera tardado una hora menos en efectuar ese recorrido, su velocidad habría sido mayor 10km/h. ¿Cuál fue su velocidad?

iv. Un ciclista conduce a 35 km/h cuando cruza el kilómetro 20 de un recorrido total de 100 Km. Si a partir de ese punto acelera a razón de 5 km/h, cada hora $(a = 5Km/h^2)$ (a = aceleración).

1. ¿En qué kilómetro irá dentro de una hora?
2. ¿A que velocidad irá dentro de 2 horas?
3. ¿Cuánto tiempo tardará en llegar a la meta?

v. En una prueba de persecución individual, un ciclista va a una velocidad de 6m/s. En cierto momento empieza a acelerar a razón de $4m/s^2$. Si faltan 176m para terminar la competencia:

1. ¿En cuánto tiempo cruzará la meta?
2. ¿A qué velocidad cruzará la meta?
3. ¿A qué velocidad irá después de 5 segundos?

vi. Un camión de carga y un automóvil salen simultáneamente de la ciudad de México rumbo a Morelia, que se encuentra a 300 Km. La velocidad del auto es mayor que la del camión por 40 km/h, por lo que llega a su destino 2 horas antes que el camión:

1. ¿A qué velocidad viajó cada vehículo?
2. ¿Cuánto tiempo tardó cada uno en llegar a Morelia?

b. Problemas que no están directamente relacionados a la ecuación cuadrática:

i. Los gastos de una excursión son $120.00. Si dejasen de ir 6 personas, cada una de las restantes tendría que pagar $10.00 más. ¿Cuántas personas van en la excursión y cuánto paga cada una?
ii. Un grupo de 180 deportistas se forma en columnas para desfilar. Si el número de deportistas en cada columna es 8 más que el número de columnas, ¿cuántas columnas hay y cuantos hombres hay en cada columna?
iii. Si una maestra de una primaria reparte 288 dulces entre los alumnos que aprobaron un examen de matemáticas, les tocó un dulce más que si los reparte entre todo el grupo (4 alumnos reprobaron el examen).
    1. ¿Cuántos alumnos tiene el grado?
    2. ¿Cuántos alumnos aprobaron el examen?

COMENTARIOS

En este último apartado presenta los siguientes comentarios:

A partir de las tablas anteriores y el análisis realizado a los libros y al contrastar estos con lo propuesto en el libro para el maestro y el programa de matemáticas de tercero de secundaria se observó lo siguiente:

CONTENIDOS

- Con respecto a los contenidos a tratar según el programa de tercero de secundaria los 7 textos revisados se apegan a éstos, en la mayoría de los casos se sigue la secuencia de temas propuesta por el programa.

SECUENCIA

- Con respecto a la presentación que los autores hacen del tema, la línea que siguen por lo general es la siguiente:

  De los 7 libros revisados, todos presentan como antecedentes a las ecuaciones cuadráticas, productos notables y factorización en la parte algebraica, y en la parte aritmética se presenta la raíz cuadrada resuelta por el método babilónico, el método geométrico, por el método de Newton, el método de aproximación y el algoritmo de la raíz cuadrada.

  - La mayoría de los autores dan una definición general de la ecuación de segundo grado y se da una clasificación de esta. Posteriormente se incluye una breve explicación de cada método de resolución de los diferentes tipos de ecuaciones, de manera detallada se resuelve una o dos ecuaciones de segundo grado de cada tipo, poniendo énfasis en el procedimiento para encontrar la solución.

- Se presenta como ejercicio a los alumnos una lista entre 10 y 15 ecuaciones para que las resuelva de acuerdo con cada método explicado previamente.

- Referente a los problemas, no son considerados un asunto central, la forma general en la que los autores tratan este asunto es:

  - Explican la manera en que se resuelven los problemas por medio de uno o hasta 4 ejemplos, de la siguiente manera:

    - Se enuncia el problema, se presenta a continuación la ecuación que según el autor lo resuelve, sin ningún tipo de explicación ni justificación alguna del porqué de ese planteamiento, lo cual nos lleva a pensar en que la concepción que tiene el autor acerca de la manera en que los alumnos aprenden a resolver problemas se basa en la imitación de la lógica descrita por él.

    - Se explica la resolución de ésta ecuación justificando cada paso de manera verbal y/o algebraicamente, lo cual hace pensar en que el alumno siga “el mismo camino” para resolver los problemas.

    - La mayoría de los autores proponen una lista de problemas de enunciado para ser resuelta por el alumno.

A continuación, presento la resolución de problemas propuesta por 2 libros, a manera de ejemplificar lo antes mencionado.

1. Libro de CURIEL / TALAVERA / VILLAR.

Problema:

El área de un rectángulo es 90 cm^2. Si la altura mide 13 *cm* más que su base, ¿cuáles son sus dimensiones?

Planteamiento:

No se incluye figura.

Llamemos x a la medida de la base. En tal caso, la medida de las altura es $x+13$. El área, 90 cm^2, es el producto de dichas dimensiones, esto es:

$$x(x+13)=90$$

o bien

$$x^2+13x-90=0$$

Resolución de la ecuación cuadrática obtenida:

$$x_1=\frac{-13+\sqrt{(13)^2-(4)(1)(-90)}}{2(1)}=\frac{-13+\sqrt{169+360}}{2}=\frac{-13+\sqrt{529}}{2}=\frac{-13+23}{2}=5$$

$$x_2=\frac{-13-\sqrt{529}}{2}=\frac{-13-23}{2}=\frac{36}{2}=-18$$

Comprobación de las soluciones de la ecuación:

$$(5)(5+13) = 5(18) = 90$$
$$(-18)(-18+13) = (-18)(-5) = 90$$

Respuesta al problema:

La base del rectángulo mide 5 cm y de altura 18 cm.

El autor indica que, en este caso la solución $x_2 = -18$ no se emplea para dar respuesta al problema, porque las dimensiones de un rectángulo no pueden ser negativas.

2. GARCÍA / RIVERA / DURÁN

Problema:

Una persona quiere cruzar nadando un río de 45 metros de ancho. Si su velocidad es de 30 metros por minuto en aguas tranquilas y la corriente lo arrastra a razón de 20 metros por minuto.

¿En cuanto tiempo atraviesa el río?_____
¿Cuál será la velocidad resultante?_____
¿Cuál será la distancia que recorrerá el nadador para cruzar el río?_____
Los vectores que representan las velocidades anteriores son ortogonales, porque forman un ángulo de 90°.

¿Cómo usar vectores ortogonales para resolver problemas?

Aplicar el teorema de Pitágoras para plantear una ecuación cuadrática.

$$x^2 = 30^2 + 20^2$$

Resolver la ecuación.

$$x^2 = 900 + 400$$
$$x^2 = 1300$$
$$x = \pm\sqrt{1300}$$
$$x_1 = 36$$
$$x_2 = -36$$

Este último valor queda descartado por ser negativo.

Interpretar el resultado de la ecuación.

La velocidad resultante es de aproximadamente 36 metros por minuto en dirección SE.

Los autores solo da solución a la segunda pregunta.

ENFOQUE

La mayoría de los libros revisados no consideran lo recomendado en el enfoque del programa y en las sugerencias del libro para el maestro, específicamente en lo referente a los problemas, que se sugieren se vean a lo largo del tema en todo el proceso de enseñanza y no solo como aplicación, además no se establece de manera explícita algún tipo de relación o vínculo entre los temas tratados como los diferentes tipos de ecuaciones cuadráticas, como lo establece el libro para el maestro, *"Un problema debe dar a los alumnos la oportunidad de explorar las relaciones entre nociones conocidas y utilizarlas para descubrir o asimilar nuevos problemas. Ésta es, esencialmente, la naturaleza de la actividad matemática"* (Alarcón Et. Al., 2000, pp13).

La propuesta mostrada en los libros de texto revisados nos hace pensar que muchas veces los alumnos entienden los métodos de solución de una ecuación de segundo grado, y los aplican de manera adecuada, pues de acuerdo con los libros antes mencionados, eso es lo que están pretendiendo, pero eso no implica que el alumno pueda resolver sin dificultades problemas que involucre ecuaciones de segundo grado, pasar del enunciado al simbolismo algebraico no es trivial ni inmediato y los textos lo dejan implícito.

Se puede advertir que el tema de ecuaciones cuadráticas en la mayoría de los libros, se trabaja de manera descontextualizada, pues, la resolución de ecuaciones es el tema dominante, lo cual se puede notar, además de lo ya mencionado en que el número de ecuaciones es mucho mayor al número de problemas de enunciado presentados en los diferentes libros, como ejemplo de esto, el libro de CABALLERO (1999, pp. 99 – 116) tiene 96 ejercicios de ecuaciones cuadráticas y 23 problemas de enunciado, y en la mayoría de los libros los problemas de enunciado se encuentran al final de la unidad, la proporción, en la mayoría de los libros es por cada cuatro ecuaciones hay un problema de enunciado.

No obstante que los propósitos de las matemáticas en nivel secundaria hacen hincapié en:

- Adquirir seguridad y destreza en el empleo de técnicas y procedimientos básicos a través de la solución de problemas.

- Reconocer y analizar los distintos aspectos que componen un problema.

- Escoger o adaptar las estrategias adecuadas para la resolución de un problema.

- Comunicar estrategias, procedimientos y resultados de manera clara y concisa.

En los libros de texto analizados no se percibe preocupación por estos al omitir actividades que de manera explícita los consideran.

En los libros no se muestra ni se enseña como hacer la traducción del lenguaje verbal al lenguaje algebraico, es decir, como establecer la ecuación que permite resolver el problema, el énfasis si se hace en las técnicas de resolución de ecuaciones cuadráticas.

CASIFICACION DE LOS PROBLEMAS

Muchos de estos problemas nos conducen al planteamiento directo de una ecuación cuadrática, sin embargo, existen algunos problemas que requieren establecer otro tipo de relaciones para finalmente arribar a la ecuación cuadrática. Este último tipo de problemas resulta de mayor dificultad para los alumnos dado que los ejemplos presentes en los textos corresponden al primer tipo de problemas.

Estos problemas pretenden que el alumno cumpla con lo propuesto en el programa de estudios oficial (1993) *"un problema es algo más que una situación para ejercitar los procedimientos aprendidos. O que una situación interesante, pero sin relación precisa con los propósitos de la enseñanza. Un problema debe dar a los alumnos la oportunidad de explorar las relaciones entre nociones conocidas y utilizarlas para descubrir o asimilar nuevos conocimientos, los cuales a su vez servirán para resolver nuevos problemas. Ésta es, esencialmente la naturaleza de la actividad matemática"*. Lo que se espera es que los alumnos los trabajen, sin embargo, en los libros, no se presentan estrategias para traducir el enunciado del problema al lenguaje algebraico.

La ubicación en la mayoría de los libros se presentan al final del tema, lo ideal sería que los diferentes conceptos que se tratan deben de estar relacionados en la solución de problemas de enunciado, por ejemplo: que la solución de un problema ligado al enunciado de un problema y que cobre sentido y sea significativo, es decir, que no esté desvinculado de los apartados revisados.

CAPÍTULO 5

UTILIZACIÓN DE ELEMENTOS HISTÓRICOS EN LA ENSEÑANZA DE ECUACIONES CUADRATICAS

El trabajo que desarrollo en este capítulo consta de dos apartados:

- Elementos de la historia del álgebra que pueden ser retomados para el tratamiento del tema de ecuaciones cuadráticas.
- Sugerencias para abordar el tema en el salón de clases.

Para contribuir a subsanar algunas de las situaciones presentadas en el capítulo anterior, se puede recurrir al desarrollo evolutivo de las matemáticas. En particular, en cuanto a las ecuaciones cuadráticas, los aportes que de la historia podemos mencionar son:

- El tipo de **problemas de la historia** que se plantearon las sociedades de civilizaciones antiguas, los cuales pueden ser retomados con el fin de que los alumnos reconozcan en ellos su utilidad social.
- La **resolución de problemas** desarrollada por DIOFANTO, que puede ser presentado a los alumnos con el fin de que sepan que no existe una única forma de plantear la ecuación que resuelve un problema matemático de enunciado
- Finalmente, recupero algunos **métodos de resolución de ecuaciones**, como: el método retórico y el geométrico.

Con relación a los **problemas de la historia**, tome algunos de los que se presentaron en la lista del capítulo 2 , por su diversidad, esto nos permite ampliar nuestro conocimiento acerca de los matemáticos de civilizaciones orientales, a quienes muchas veces no conocemos ni los problemas que se planteaban, ni la manera resolverlos, y en este listado hay problemas de chinos, árabes, babilónicos, egipcios, etc. Muchos de estos problemas fueron resueltos aún sin tener el desarrollo matemático que ahora tenemos, lo cual al buscar nuevas formas y métodos para resolverlos, permitió la evolución de las matemáticas .

Algunos de estos problemas no sólo son de carácter algebraicos, sino también tienen que ver con cuestiones geométricas muy interesantes. Esto nos permite hablar de que no sólo podemos trabajar problemas del ámbito matemático, sino incorporar los de otras disciplinas como: la física, la química, la biología, economía, etc. ya que esta interacción entre las ciencias es notable en nuestra historia.

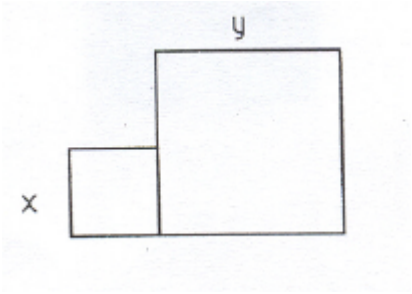
El listado de problemas es el siguiente:

- Determinar los lados y el área de un rectángulo conociendo la suma de los lados (27 unidades) y sabiendo que si al valor del área se le

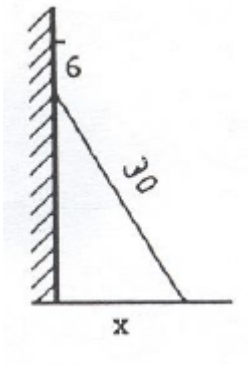
suma el exceso del lado mayor sobre el menor, se obtienen 183 unidades. (PERERO, 1990, pp125).

- El área de un rectángulo es 375, el lado menor es igual a 30 veces la longitud de una caña, mientras que el lado mayor tiene 5 unidades menos que el doble del otro lado. (PERERO, 1990, pp125).

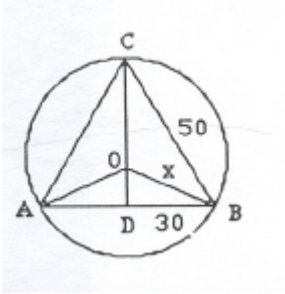
- Un área está formada por dos cuadrados cuya suma es 1000 unidades. El lado de uno de los cuadrados tiene 10 unidades menos que 2/3 del lado del otro cuadrado. ¿Cuáles son los lados de los cuadrados? (PERERO, 1990, pp126).



- Una viga de 30 unidades de largo se apoya verticalmente contra un muro; si la extremidad superior de la viga se coloca 6 unidades más abajo, ¿ en cuántas unidades más se desplazará el otro extremo de la viga? (PERERO, 1990, pp126).



- Encontrar el radio x del círculo circunscrito al triángulo isósceles ABC, sabiendo que AB = 60 y que CA = CB = 50. (PERERO, 1990, pp127).



- Adicioné la superficie y el lado de un cuadrado lo cuál dio un resultado igual a ¾. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado? (DREDON, 1959, pp. 323).

- En un cuadrado, sustraje de la superficie el lado, lo cual me dio como resultado 2.0. ¿Cuánto mide de lado dicho cuadrado? (DREDON, 1959, pp. 323).

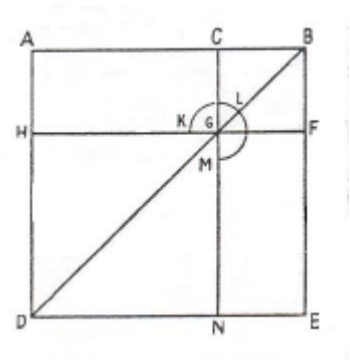
- Encontrar 2 números cuya suma y la diferencia de sus cuadrados sean números dados. (HEATH, 1964, pp. 141).

- Encontrar 2 dos números cuya diferencia y producto sean números dados. (HEATH, 1964, pp. 141).

- Teorema 7 del libro II de EUCLIDES. Si se corta al albitrio una línea recta, el cuadrado de la línea entera más el cuadrado de una de las partes, tomados de vez, son igual al duplo del rectángulo

comprendido por la línea entera y la parte dicha más el cuadrado de la otra parte. (ALVAREZ, 1992, pp. 137).

Geométricamente: se corta arbitrariamente AB por el punto C, se dice que los cuadrados de las rectas AB y BC son iguales al doble del rectángulo comprendido por las rectas AB, BC más el cuadrado CA.

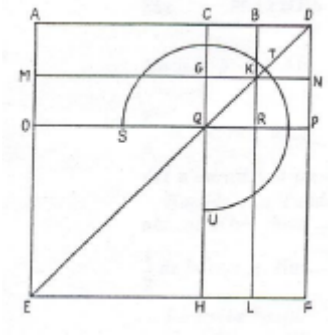


Algebraicamente:

$$(b+c)^2 + c^2 = 2(b+c)c + b^2$$

- Teorema 8 del libro II de EUCLIDES. Si se corta al albitrio una línea recta, el cuadruplo del rectángulo comprendido por la línea entera y por una de las partes más el cuadrado de la otra parte es igual al cuadrado descrito por la línea entera más la parte dicha tomadas como un solo lado (ALVAREZ, 1992, pp. 141).

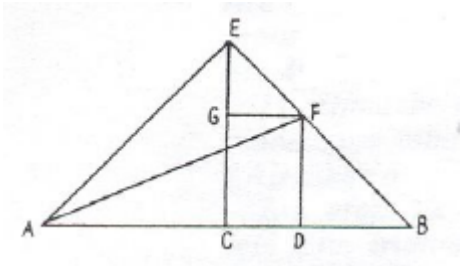
Geométricamente: Se corta la recta AB arbitrariamente en el punto C, el cuádruplo del rectángulo comprendido por las rectas AB, BC más el cuadrado de la recta AC es igual al cuadrado descrito por las rectas AB, BC tomadas como una sola recta.



Algebraicamente: $4(b+c)c+b^2=(b+2c)^2$

- Teorema 9 del libro II de EUCLIDES. Si se divide una línea recta en partes iguales y desiguales, los cuadrados de las partes desiguales de la línea total son el doble del cuadrado de la mitad de la línea entera más el cuadrado de la mitad de la diferencia entre las dos clases de cortes (ALVAREZ, 1992, pp. 147).

  Geométricamente: Se divide la recta AB en 2 partes iguales por el punto C y en partes desiguales por el punto D, se dice que los cuadrados de los lados AD, DB son el doble de los cuadrados de las rectas AC, CD.



Algebraicamente: $b^2+c^2=2\left(\frac{b+c}{2}\right)^2+2\left(\frac{b-c}{2}\right)^2$

- Teorema 10 del libro II de EUCLIDES. Si se divide una línea recta en dos y se le añade en recta otra recta, el cuadrado de la línea entera más la añadida, junto con el de la añadida, tomadas de vez, son el doble que el cuadrado descrito por la línea mitad más el

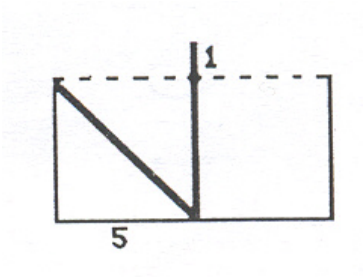
cuadrado de la compuesta por la mitad y por la añadida, tomadas como una sola (ALVAREZ, 1992, pp. 149).

Geométricamente: Divídase la recta AB en dos partes por el punto C y añádase la recta BD. Digo que los cuadrados de las rectas AD, BD son el doble de los cuadrados de las rectas AC, CD.

Algebraicamente: $(b+c)^2 + c^2 = 2\left(\frac{b}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{b}{2}+c\right)^2$

- El área de un cuadrado es 400 cubits cuadrados, es igual a la suma de las áreas de dos cuadrados pequeños. El lado de uno de ellos es ¾ el lado del otro. ¿Cuánto miden de lado los cuadrados? (GILLINGS, 1997, pp. 162).

- Un acuario tiene una base cuadrada de lado 10 “chi”. Una caña nace en el centro del acuario y crece perpendicularmente a la base hasta salir 1 “chi” sobre la superficie del agua. Si se inclina la caña hacia un lado, su tope tocará el borde del acuario exactamente al nivel del agua. ¿Cuál es la profundidad del agua y cuál es la longitud de la caña? (PERERO, 1990, pp134).



- La sombra de un gnomon de 12 unidades de largo, disminuida en una tercera parte de la hipotenusa llega a 14 unidades de largo. ¿Cuánto mide la sombra? (SCOTT, 1969, pp 75).

- Una tira tiene x unidades de ancho y 10 de largo, tiene 10x unidades cuadradas de área, ésta área es igual a la suma de un área cuadrada de x^2 y otra igual a 21 unidades cuadradas. ¿Cuántas unidades tiene de ancho dicha tira? (DEDRON, 1959, pp 326).

Los anteriores problemas se reducen a áreas y perímetros, por ejemplo, los babilonios, trabajaban sin ninguna dificultad áreas y perímetros en un mismo problema, mientras que los egipcios no lo hacían así. También nos podemos encontrar con problemas artificiales como es el caso de los problemas hindúes.

El orden que se pueden rescatar en el salón de clases dependerá, del maestro y las condiciones, gustos, preferencias y la formación que los alumnos tengan para poderlos trabajar, por ejemplo, la secuencia histórica empieza con los babilonios con métodos retóricos por ejemplo, o se puede empezar con métodos geométricos, etc.

Métodos de resolución de problemas: De acuerdo con la historia podemos rescatar métodos que se han ido perdiendo y que pueden ser más claros para los alumnos o que por lo menos pueden mostrarles que no hay un solo camino único

para el planteamiento de un problema de enunciado, y su solución lo cual puede apoyar el trabajo de los alumnos para que traten de proponer y diseñar algunas soluciones. En la historia, podemos ver que, los problemas que en la actualidad se pueden resolver con ecuaciones de segundo grado, los resolvían haciendo uso de métodos retóricos como en el caso de los babilonios, pues ellos no contaban con simbología algebraica, es más, ellos ni siquiera demostraban matemáticamente la veracidad de sus métodos, simplemente querían dar respuesta a los problemas que se les presentaban, y mientras sus métodos funcionaran para ellos era correcto, los egipcios también utilizaron métodos retóricos, además para ambas civilizaciones, el trabajar áreas con longitudes (problemas no homogéneos) no representaba ningún obstáculo . Por otro lado, los griegos usaban métodos geométricos, y nunca trabajaban áreas y longitudes en un mismo problema (homogéneos). Conviene destacar el trabajo de DIOFANTO dado que:

- Plantea problemas no homogéneos.
- Sus métodos de resolución de ecuaciones cuadráticas no están anclados a la geometría.
- En el planteamiento y resolución de ecuaciones cuadráticas hace uso de propiedades de números.

En primer lugar comentaré a cerca de los problemas que resuelve DIOFANTO, son problemas cuyo enunciado establece relaciones generales, por ejemplo: Encontrar 2 números tales que su suma y producto sean números dados, para dar respuesta DIOFANTO los resolvía, encontrando soluciones a casos particulares, el caso particular al problema anterior es:

- La suma es igual a 20 y el producto a 96.
  Los números a encontrar son: $10 + x$, $10 – x$.
  Así que $100 – x^2 = 96$,
  De donde $x=2$, y los números buscados son 12 y 8.

De lo anterior, podemos ver que DIOFANTO, resuelve cada caso particular de una manera inusual a lo que actualmente estamos acostumbrados, pues lo que buscaba era plantear el problema por medio de una ecuación sencilla, pues nos queda una diferencia de cuadrados la cual resuelve el problema en el caso anterior.

La manera en la que DIOFANTO plantea el problema, la explicaré a continuación:

- En primer lugar lo que quería era construir una ecuación cuadrática simple de tal manera que fuera fácil de resolver.

- De acuerdo con el problema, hay que encontrar dos números que sumen 20, así que los números propuestos son:

  $$10 - x \quad , \quad 10 + x$$

  Si los sumamos, veremos que las x se eliminan dando como resultado 20.

- Una vez que, DIOFANTO construyó los "números" de esa manera, la otra condición establece que
  "el producto de ambos números sea 96",
  así tenemos que: $(10 + x)(10 - x) = 96$
  desarrollando el binomio conjugado tenemos que:
  $100 - x^2 = 96$, de modo que $x^2 = 4$, $x = 2$. Sustituyendo en los binomios, tenemos que un número es 12 y el otro es 8.

Podemos ver que del lado izquierdo de la igualdad aparece $100 - x^2$ lo que significa que x^2 debe ser 4, para que nos de 100 - 4 = 96.

Las observaciones que se pueden hacer referente a este tipo de planteamiento de problemas son:

DIOFANTO plantea este tipo de problemas usando una incógnita, y por lo general los alumnos tienden a plantearlos usando dos incógnitas, pero la mayoría de las veces a los alumnos se les dificulta trabajar así, lo anterior representa una alternativa de diferentes planteamientos para un solo problema, que hay más de una ecuación cuadrática que representa al mismo. Por ejemplo, en la actualidad, el problema anterior , se plantearía de dos maneras diferentes, por mencionar algunas, más el planteamiento de DIOFANTO.

- $(x)(20-x)=96$.
- $x+y=20$, $xy=96$.

Lo importante es que el alumno desarrolle su flexibilidad al ver que en matemáticas hay muchas maneras de resolver problemas y principalmente que no es una disciplina acabada y que su desarrollo sigue en proceso de evolución, un ejemplo más de esto es la generalización, pues la historia nos ha mostrado que durante mucho tiempo no fue “necesario” para algunas civilizaciones el generalizar el trabajo matemático y por lo tanto no se realizó, fue un largo proceso el que permitió a la humanidad poder llegar a esta generalización.

Lo anterior, sugiere promover en trabajo inductivo el los alumnos, que desarrollen habilidades que les permitan partir de casos particulares y llegar a la generalización, y por otra parte que el alumno busque caminos con sus propios conocimientos matemáticos previos, para plantear soluciones a los problemas de enunciado a los que se enfrenten. Pues solo así podrán comprender las matemáticas actuales y tendrá más sentido para ellos las expresiones algebraicas relacionadas con la ecuación cuadráticas y sus métodos de solución, pues las verán como métodos seguros y económicos en el sentido que le permitirá ahorrar pasos y trabajo, en lugar de verla como un método impuesto, verá sus ventajas de aplicación.

Es importante reconocer los diferentes roles que puede tener un problema en el proceso de enseñanza-aprendizaje, en este caso lo que interesa es que el alumno trate de plantear su propia solución y que esto le permita llegar a construir una ecuación de segundo grado.

Métodos de resolución de ecuaciones cuadráticas: como vimos se presentan en los libros de tercero de secundaria, algunos métodos de resolución de ecuaciones cuadráticas como factorización, fórmula general, completar cuadrados, etc. Sin embargo, a lo largo de la historia de las matemáticas, se han desarrollado diversos métodos matemáticos particularmente para resolver ecuaciones de segundo grado que no son conocidos pues se han quedado en el olvido, en el camino hacia la evolución matemática, la importancia de estos métodos radica en que nos pueden ofrecer además de diversidad metodológica, apoyo en la comprensión y claridad en cuanto al trabajo con este tipo de ecuaciones y sólo revisando la historia de las matemáticas los podemos conocer y recuperar, a continuación, presento algunos de estos métodos:

- Método retórico: la falta de un simbolismo no fue obstáculo para que matemáticos como los babilónicos o los egipcios se plantearan ecuaciones de segundo grado y trataran de resolverlas de forma verbal, como ejemplo tenemos una ecuación resuelta por los babilónicos, haciendo uso del método retórico.

A continuación presento a manera de ilustración el siguiente problema que fue resuelto por los babilonios usando el método retórico.

Adicioné la superficie y el lado de un cuadrado lo cuál dio un resultado igual a ¾. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado? (DEDRON, 1959, pp 323).

Solución (método retórico):

Se toma la unidad 1, al dividirla a la mitad nos da ½ . se multiplica ½ por ½ lo cual nos da ¼, sumamos ¼ a ¾ lo cual nos da la unidad 1 al cuadrado, al restar ½ de 1 tenemos ½, la medida del lado del cuadrado buscado.

Esto, de acuerdo a tablas babilónicas traducidas por NEUGEBAUER y presentadas en simbología algebraica actual, no es más que las resolución de la ecuación:

$$x^2 + x = \frac{3}{4}$$

La cual corresponde a la del tipo 1 que de acuerdo con las tablas se resuelve haciendo uso de la siguiente fórmula:

$x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} - \frac{a}{2}$, sustituyendo valores tenemos que el valor de x es igual a ½.

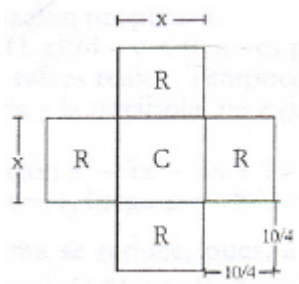
Este método, describe paso a paso las operaciones aritméticas para la resolución del problema, a partir del trabajo de NEUGEBAUER traduciendo las tablas babilónicas, lo que observamos es que dichos pasos corresponden a la aplicación de una fórmula anterior, la cual es muy parecida a la Fórmula General para resolver ecuaciones cuadráticas que actualmente conocemos. Como ya vimos, los babilonios, clasificaban los problemas matemáticos de enunciado y cada uno tenía su solución particular.

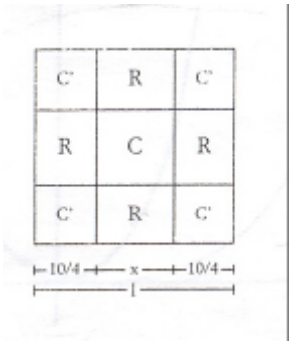
El método retórico, no solo debe ser visto como un recurso empleado por los babilonios o egipcios, sino que esta manera de resolver una ecuación cuadrática de manera verbal, puede ser más cercana al conocimiento de los alumnos más familiar que les permita apropiarse de ella, en relación con un método más formal como la fórmula general.

- Método geométrico: la geometría tuvo un papel importante en el desarrollo de las ecuaciones cuadráticas, pues los griegos como EUCLIDES trataron de demostrar el trabajo de los babilónicos el cual carecía de explicaciones matemáticas, también los árabes trabajaron resolución de ecuaciones haciendo uso de la geometría, como la siguiente ecuación que fue resuelta completando cuadrados.

Representación geométrica de AL-KHUWARIZMI de la ecuación $x^2 + 10x = 39$**,** así como su solución, completando cuadrados:

Trazar un cuadrado de lado x y completar con 4 rectángulos de dimensiones $2\frac{1}{2}$ y x y 4 cuadrados de área igual a $6\frac{1}{4}$.





La medida $2\frac{1}{2}$ de los 4 cuadrados corresponde a $\frac{1}{4}$ del coeficiente de x. Sumando el área de los 4 cuadrados rayados (25) y el área de los 4 rectángulos con el área del cuadrado central (39) se obtiene 25 + 39 = 64. Por tanto el lado, del cuadrado grande es $\sqrt{64}$ = 8, donde $8 - \left(2\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}\right) = 3$. Entonces $x = 3$.

Este método, es muy ilustrativo al completar el trinomio cuadrado perfecto, pues podemos ver geométricamente la construcción de el “cuadrado”, realizando las

transformaciones algebraicas necesarias a la par de la construcción de dicho cuadrado, da la posibilidad a los alumnos entender mejor que es completar el trinomio cuadrado perfecto en álgebra.

Estos diferentes métodos, pueden ser retomados en clase, para que los alumnos se den cuenta de que el álgebra en particular no fue desde el principio el álgebra simbólica con la que se trabaja en la actualidad, sino que el álgebra al igual que las matemáticas en general han pasado a lo largo de los años por procesos de evolución.

Además de permitir a los alumnos tener mayores recursos al resolver unas ecuación cuadrática, al apropiarse de una expresión verbal (método retórico) o de un modelo geométrico (método geométrico).

Para ilustrar la aplicación de diferentes métodos a un mismo problema, resuelvo el siguiente problema en 4 métodos diferentes: método babilónico, método de DIOFANTO (Grecia), método egipcio, método árabe y método actual (álgebra simbólica).

PROBLEMA:

Un número es igual al cuadrado de otro, y las suma de ambos es 42. ¿Cuáles son estos números?

1. **Método babilónico.**

Solución:

Se toma la unidad 1. Al dividir 1 entre 2 tenemos ½ , el cual elevado al cuadrado nos da ¼ , Sumamos ¼ a 42, lo cual nos da 42 ¼ , el cuadrado de 6 ½ . Al restar ½ de 6 ½ , nos da 6, uno de los números buscados, de modo que el otro número es 36 pues es el cuadrado del primero.

Con este método, solo encontramos una solución de las dos que corresponden a una ecuación cuadrática, pues para los babilonios, los que ahora conocemos como números negativos para ellos no eran números y por eso solo les interesaban las soluciones positivas.

2. **Método de DIOFANTO (Grecia).**

Solución:
Vamos a buscar dos números que sumados nos den 42, estos son:

$$49 - x \qquad \text{y} \qquad x - 7$$

De acuerdo con el problema, uno de los números es el cuadrado del otro así que:

$$49 - x = (x-7)^2 = x^2 - 14x + 49$$

Lo cual nos da la siguiente ecuación:

$$x^2 = 13x$$

La solución de esta ecuación es muy sencilla, pues una solución es el cero y la otra es el 13.

De tal modo que si x = 0, los números buscados son –7 y 49.

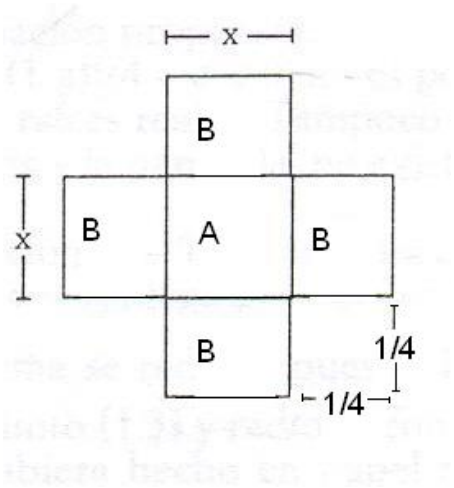
Y si x = 13, los números buscados son 6 y 36.

Como anteriormente vimos, este método consiste en plantear una ecuación que sea fácil de resolver, lo cual nos lleva a que un mismo problema puede ser representado por ecuaciones cuadráticas diferentes.

3. **Método árabe.**

Solución:

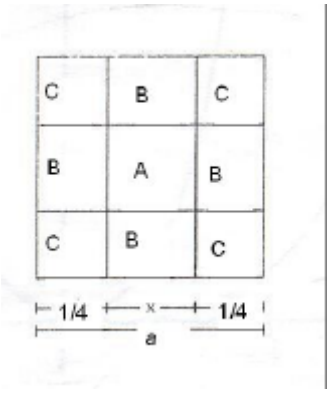
Se considera que x^2 es el área de un cuadrado A de lado x, y el área de un rectángulo de lados x y 1, o bien 4 veces el área de un rectángulo B de dimensiones x y ¼ . El primer miembro de la ecuación será entonces la suma de las áreas del cuadrado A y de los cuatro rectángulos B.



Si trazamos cuatro rectángulos C en las esquinas de la figura anterior, hasta conseguir un cuadrado grande de lado u, que tiene por medida ¼ + x + ¼ unidades, así tenemos que:

$$a = \tfrac{1}{4} + x + \tfrac{1}{4} \qquad (1)$$

como se muestra en la siguiente figura:



Descomponiendo el área del cuadrado anterior, sumando las áreas de las figuras más pequeñas que lo forman:

$$a^2 = x^2 + 4\left((x)\left(\frac{1}{4}\right)\right) + 4\left(\frac{1}{4}\right)^2 = x^2 + x + \frac{1}{4}$$

De acuerdo con (1) tenemos que:

$$a^2 = x^2 + x + \frac{1}{4} = 42 + \frac{1}{4} = \frac{169}{4} \qquad a = \frac{13}{2}$$

$$\frac{13}{2} = a = x + 2\left(\frac{1}{4}\right) = x + \frac{1}{2} \qquad x = 6$$

De tal modo que, 6 es uno de los números buscados y el otro número como debe de ser el cuadrado del primero es el número 36.

Este método, como es geométrico, nos lleva a una sola solución, pues no toma el cuenta, el signo negativo de la raíz cuadrada, pues, en el caso de este método, la

raíz cuadrada que se saca es del área de un cuadrado, para obtener el lado del mismo, de tal manera que un valor negativo para el lado de un cuadrado no tiene sentido.

4. **Método actual (álgebra simbólica)**

Este problema se encuentra resuelto en el libro de CABALLERO (1999, pp. 112) de la siguiente manera:

Planteamiento

Incógnitas:
Número menor,
Número mayor

La representación algebraica:

Número menor: x
Número mayor: x^2

Ecuación:

$x^2 + x = 42$ $\qquad$ $x^2 + x - 42 = 0$

Resolución:

Utilizando la fórmula general tenemos para los dos valores de la x:

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{1-4(-42)}}{2} = 6$$
$$x_2 = \frac{-1-\sqrt{1-(4)(-42)}}{2} = -7$$

Solución 1:

Número menor = 6

Número mayor = 36

Solución 2:

Número menor = -7

Número mayor = 49

Este autor, menciona a los alumnos que se debe de encontrar un número mayor y un número menor, sin hacer ninguna reflexión del porque de esta aseveración.

Con los ejemplos anteriores, se puede mostrar que esta diversidad de métodos permite que el tratamiento de las ecuaciones cuadráticas se aborde recuperando conceptos de geometría de aritmética, retomando conocimientos previos relacionados con otros temas.

Anteriormente vimos que en los libros de texto, las maneras de resolver las ecuaciones cuadráticas se presentan de manera desvinculada y no es claro para los alumnos la relación que existe entre la factorización, completar el trinomio cuadrado, etc. y en la historia podemos encontrar ese vínculo, pues lo que se quiere es convertir una ecuación que es difícil de resolver en una más sencilla de resolver. Tal vez el alumno no alcance a comprender esto, pero si debe ser claro para el maestro la importancia de este acercamiento histórico.

En relación al segundo apartado el cual se refiere a las sugerencias para abordar el tema de las ecuaciones cuadráticas en el salón de clases, propongo lo siguiente:

De acuerdo con el análisis hecho a las tablas presentadas al inicio de este capítulo, y con lo que la historia nos enseña acerca del desarrollo de las matemáticas en cuanto a las ecuaciones de segundo grado, presento la siguiente propuesta, para el tratamiento del tema de ecuaciones cuadráticas en tercer año de secundaria.

- En lugar de empezar con definiciones formales, se deberían de proponer al alumno situaciones problema, planteamientos de diferentes problemas y buscar maneras diversas de resolverlos. Pues hay que tomar en cuenta que cuestiones como las operaciones con números negativos o trabajar con el cero no son fáciles para los alumnos, además los problemas de ecuaciones cuadráticas que a los alumnos se les solicitan que resuelvan se pide a los alumnos que igualen a cero, lo cual es una situación sumamente artificial, pues como hemos visto ninguno de los problemas de enunciado al plantearlo en ecuación cuadrática nos lleva a una ecuación igualada a cero.

    - Se debe hacer un análisis de preferencias, de conocimientos y de modos más familiares para el alumno y después se elegirán los métodos de solución que se han mostrado en las diferentes civilizaciones y no restringirse a aquellas que resultan más accesibles a los alumnos, sino buscar la manera de abordar el mayor número de métodos de resolución hasta llegar a los formales (fórmula general).

    - En cuanto a la forma de trabajar la resolución de problemas, una opción es la siguiente forma:

- Proponer situaciones problema, derivar de esta diversos enunciados, de manera que estén bien redactados y que contengan los datos necesarios para su resolución, lo cual propongo se haga a nivel grupal.
- Se debe de reflexionar y discutir en equipo con el fin de elegir la forma de resolver el problema, y que identifique las ventajas de un método para abordarlo.
- Resolver un problema matemático de enunciado en equipo.
- Después de resolver el problema plantear problemas similares.
- Finalmente generalizar.

- Una vez que el alumno ha resuelto un número considerable de problemas, debe establecer una clasificación, (como se puede ver en los babilonios, las clasificaciones que se pueden hacer son más que las que se hacen en la actualidad) con ello los alumnos podrán clasificar de una manera más ricas y significativa para ellos y posteriormente llegar a las completas e incompletas.

- Después de trabajar casos particulares, los alumnos se encontrarán en mejores condiciones de generalizar para deducir junto con el maestro la fórmula general y que el alumno pueda hacer uso de sus ventajas.

- Para llegar finalmente a la formalización y a las definiciones y resolver problemas más generales. Una vez que el alumno empieza a deducir la fórmula y esta más familiarizado con el trabajo de las ecuaciones cuadráticas, puede hacer reflexiones sobre cuestiones más teóricas como: características que el alumno puede detectar en cuanto a los coeficientes y

signos de las ecuaciones cuadráticas para poder saber cuando encontraran raíces positivas, negativas o una positiva y otra negativa, conocer el discriminante y su importancia para saber el tipo de soluciones que una ecuación de segundo grado tiene.

Con lo anterior, quiero hacer notar que es conveniente considerar la historia de las matemáticas, con el fin de enriquecer el tratamiento de temas matemáticos en el salón de clases, pues al reconocer el camino por al cual las matemáticas actuales han pasado nos nutre mucho en cuestiones didácticas, para reconocer dificultades en determinados contenidos, en la organización de estos, hacer más interesantes y amenas las clases, etc.

También hay que estar concientes de que hay métodos matemáticos usados en otras épocas que han sido complicados, y que el desarrollo de las matemáticas como el simbolismo algebraico nos hace más sencillo el trabajo, lo cual solo conociendo esta parte histórica podemos ser concientes de esto.

Las cuestiones que se pueden recuperar de la historia matemática en el salón de clases relacionadas con la ecuación cuadrática, son:

- Anécdotas.
- Problemas.
- Métodos de trabajo.
- Trabajo de diferentes civilizaciones, no todas occidentales.
- Contenidos que presentaron mayor grado de dificultad a la humanidad.

- Fracasos de algunos matemáticos o cuestiones, o cuestiones erróneas en las que cayeron algunos de ellos.

Todo esto para que las matemáticas se reconozcan más humanas, flexibles y mostrar que no surgieron de repente, sino que son producto de un largo proceso, que hubo fracasos, que hay contenidos que no son tan sencillos de entender como por ejemplo los números negativos, además las matemáticas surgieron y se han desarrollado en un primer momento para responder a problemas de carácter social , es decir , a necesidades humanas, y su evolución ha transitado de los problemas particulares a la teoría y viceversa, a la resolución de problemas. De tal manera que debemos de estar concientes de que las matemáticas no están acabadas que se encuentran en evolución.

BIBLIOGRAFÍA

ALARCÓN Et. Al. Libro para el maestro educación secundaria. Matemáticas. Editado por la Secretaría de Educación Pública. México D. F. 2000. 408 páginas.

ALEKSANDROV. Visión general de la matemática. Ciencia por una educación popular comité de lucha CEU ciencias.1994.110 páginas.

ALVAREZ Laso. Elementos de geometría de EUCLIDES. Libro II. Editado por la UNAM. México, 1992. 178 páginas.

ARREGUÍN José. Matemáticas 3. Editorial LAROUSSE. México, 2000.152 páginas.

BELL E. T. Historia de las matemáticas. Fondo de cultura económica. México 1995. 655 páginas.

BOURBAKI Nicolas . Elementos de historia de las matemáticas. La evolución del álgebra. Editorial Alianza. España 1976. 444 páginas.

BRISEÑO Luis. Matemáticas 3. Editorial Santillana. México 1997. 225 páginas.

BYERS Victor. ¿Porqué estudiar historia de la matemática? Proyecto estratégica No. 1. Especialización en educación matemática. Seminario de educación matemática (UPN). Antología, volumen 1, México 1987. 154 páginas.

CABALLERO Arquímedes. Matemáticas 3. Editorial ESFINGE México, 1999. 264 páginas.

CAJORI Florian. A History of Mathematics. Chelsea Publishing Company. New York N. Y. 1980. 209 páginas.

CAMPIGLIO. De los dedos a la calculadora. La evolución del sistema de cálculo. Ediciones Paidos. España 1990. 267 páginas.

COLLETTE Juan-Paul. Historia de las matemáticas. Tomo I y Tomo II. Editorial Siglo veintiuno. México 1986. 607 páginas.

CURIEL / TALAVERA / VILLAR. Matemáticas 3.Publicaciones culturales. México 1997.147 páginas.

DEDRON et TIRAD. Mathématiques et Mathématiciens. Le second degree. Éditions Magnard. Paris 1959. 389 páginas.

DIEUDONNE Jean . La enseñanza de las matemáticas. Capítulo III. La abstracción en matemáticas y la evolución del álgebra. Editorial Aguilar . España 1965. 195 páginas.

EVES Howard. An introduction to the history on Mathematics. Holt, Rinehart and Winston. New York N. Y. 1976.128 páginas.

FAUVEL John. “Using history in mathematics education”. For the learning of mathematics. Canada 1992, Volumen 11 Número 2. (Junio 1992)

FIGUERAS - CRISTÓBAL. Historia del álgebra. Parte I Babilonia y Egipto. Lecturas en Educación Matemática. Maestría en educación matemática. México 1988.107 páginas.

FILLOY y ROJANO. Memorias del IV simposio internacional sobre investigación en educación matemática. Didáctica del álgebra.
Celebrado en la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez. Agosto 1984.

FÜHRER Lutz. “Historical stories in the mathematics classroom”. For the learning of mathematics. Canada, Volumen 11 Número 2. (Junio 1992). PP. 324-32.

GALICIA / AQUINO. Matemáticas tercer curso. Editorial G E Iberoamérica. México, 1994.196 páginas.

GANDZ. “The origin and development of the cuadratic equations in Babylonia, Grek and early Arabic algebra”. Osiris, 3, 1938, pp. 406 – 548

GARCÍA / RIVERA / DURÁN. Matemáticas 3 estratégias. Editorial ESFINGE. México 1997. 238 páginas.

GILLINGS Richard. Mathematics in the Time of the Pharaohs. Equations of the first and second degree. Dover Publications, Inc. New York 1997.228 páginas.

HOFMANN. Historia de la matemática. Limusa Noriega Editores. México 2003.175 páginas.

KARLSON. La magia de los números. El arte de la razón inmaculada: el álgebra. Editorial Labor. España 1960. 376 páginas.

KLINE Morris. Matemáticas la pérdida de la certidumbre. La génesis de las verdades matemáticas. Siglo XXI. España 1985. 404 páginas.

LICEAGA Jesús. Ejercicios de matemáticas 3.Editorial ESFINGE. México 1994.169 páginas.

MARTZLOFF J. C. Histoire des Mathématiques chinoise. L'algébre chinoise du 13e siécle: le tianyuan shu. MASSON.Paris 1988. 413 páginas.

NEUGEBAUER and SACHS. Mathematical cuneiform texts. Publicado por American Oriental Society. 1945. 148 páginas.

NUÑEZ José. Los recursos históricos en la educación matemática. Educación matemática. México, Volumen 10 Número 2. (Agosto 1998). 265 páginas.

PASTOR / BABINI. Historia de la matemática. Volumen II. Del renacimiento a la actualidad. Los progresos del álgebra. Editorial Gedisa. España 1997. 230 páginas.

PERALTA Javier. Principio didácticos e históricos de para la enseñanza de las matemáticas. Huerga y Fierro editores. España 1995. 229 páginas.

PERERO Mariano. Historia e historias de matemáticas. Madrid 1999. 359 páginas.

RÍBNIKOV K. Historia de las Matemáticas. Editorial MIR Moscú. Moscú 1987. 94 páginas.

ROJANO Teresa. Diáctica 35 aniversario CINVESTAV-IPN. Departamento de matemáticas educativas. Investigaciones en matemáticas educativas. Grupo Editorial Iberoamérica. México 1998. 430 páginas.

SCOTT J. F. A History of Mathematics. Mathematics in the orient. Taylor and Francis LTD. London 1969. 138 páginas.

SEP. Plan y programas de estudio 1993. Sección matemáticas. Educación básica. México, 1993. 177 páginas.

Sir HEATH Thomas. Diophantus of Alexandria. Dover publications, INC. New York 1964. 374 páginas.

STILLWELL John. Mathematics and Its History. Quadratic Equations. Springer-Verlag. New York 1994. 247 páginas.

WERTSCH James. Voces de la mente. Distrubuciones visor. Madrid 1993. 274 páginas.