



**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
LICENCIATURA EN PEDAGOGÍA**

**DIFICULTADES QUE SE PRESENTAN EN EL APRENDIZAJE
DE LA MULTIPLICACIÓN EN EL CUARTO GRADO DE
EDUCACIÓN PRIMARIA**

**T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
LICENCIADO EN PEDAGOGÍA
P R E S E N T A:
NORMA HERNÁNDEZ CRUZ**

ASESOR: MTRO. ARTURO BAZAN ZURITA

MÉXICO

2004

INDICE

	PÁG
INTRODUCCIÓN.....	4
CAPITULO I	
1. Caracterización del problema.....	6
1.1 Planteamiento y justificación del problema... ..	6
1.1 Delimitación teórica.....	11
1.2 Objetivos.....	15
CAPITULO II	
2. Marcos teórico y de referencia.....	16
2.1 Conceptualización de la estructura multiplicativa de números enteros no negativos.....	16
2.2 El niño y el conocimiento.....	30
2.3 Manejo del error.....	44
2.4 Análisis del paquete curricular.....	54
CAPITULO III	
3. Metodología.....	69
3.1 Sujetos.....	69
3.2 Instrumentos	70
3.3 Procedimientos de aplicación.....	81
3.4 Codificación de las respuestas.....	83

	PÁG
CAPITULO IV	
4. Organización y Análisis de los Resultados.....	91
4.1 Resolución de problemas de estructura multiplicativa.....	91
4.1.2 Análisis global de los resultados obtenidos por los alumnos en problemas de estructura multiplicativa.....	102
4.2 Ejecución del algoritmo de la multiplicación.....	106
4.2.1 Análisis global de los resultados obtenidos en la ejecución del algoritmo de la multiplicación.....	112
CAPITULO V	
5. Conclusiones y sugerencias didácticas	117
BIBLIOGRAFÍA.....	128
ANEXOS.....	131

INTRODUCCIÓN

En la currícula de matemáticas de nivel básico se le concede gran importancia al eje de los números, sus relaciones y sus operaciones pues se considera que las operaciones son instrumentos que permiten resolver problemas, y debido a que la multiplicación es un concepto que interviene en este eje y el cual suele presentar grandes problemas al alumno en la resolución de problemas de estructura multiplicativa, o en la ejecución del algoritmo convencional de la multiplicación, he decidido indagar sobre las dificultades y los errores que suelen cometerse en su aprendizaje.

Los capítulos que conforman esta tesis se presentan de la siguiente manera.

En el primer capítulo planteo el problema de investigación, así como los motivos que me condujeron a su estudio, asimismo se presenta el producto de una reflexión sobre la enseñanza de la matemática.

En el segundo capítulo desarrollo el marco teórico del trabajo empleando tres líneas de análisis:

- a) Significados que se derivan de trabajar la estructura multiplicativa;
- b) Construcción de los conceptos matemáticos por el niño, según la teoría psicogenética de J. Piaget
- c) Estatus que adquiere el error dentro de un contexto social y la función que suele cumplir en un contexto escolar, asimismo se presenta un breve panorama de la forma en que este puede ser utilizado para comprender el proceso de aprendizaje del alumno.

También presento un marco de referencia en el que analizo el paquete curricular de cuarto grado de educación primaria con el propósito de identificar que significados son abordados al trabajar la multiplicación, las actividades que se sugieren para introducir a los alumnos al tema y los materiales que se proponen para conseguir el propósito deseado.

En el capítulo tercero, describo la metodología de la investigación en la que se da cuenta de la muestra empleada, así como del mecanismo bajo el cual fue delimitada; también describo y presento los instrumentos utilizados para recolectar los datos, el procedimiento de aplicación, y la forma en como se proceso la información.

En el capítulo cuarto llevo a cabo el análisis y organización de la información y finalmente en él quinto capítulo presento una serie de conclusiones y sugerencias didácticas.

CAPITULO I

I. CARACTERIZACIÓN DEL PROBLEMA

En este capítulo se define el problema de investigación, así como los motivos que me condujeron a su estudio, asimismo se presenta un breve panorama de los autores que han aportado un análisis sobre el tema de la estructura multiplicativa y del algoritmo de la multiplicación, por último se exponen los objetivos que se persiguen en la realización de este estudio.

1.1 PLANTEAMIENTO Y JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA

El área de matemáticas es parte fundamental del currículo escolar de educación primaria, por ello para abordarla en el salón de clase se le asigna una cuarta parte del tiempo de trabajo escolar a lo largo de los seis grados y se procura, además, que las formas de pensamiento y representación propios de esta disciplina sean aplicadas siempre que sea pertinente en el aprendizaje de otras asignaturas. La distribución del tiempo de trabajo asignado a matemáticas a partir del tercer grado ocupa un porcentaje elevado “el segundo lugar después del español, 200 horas anuales, 5 semanales” del tiempo que se dispone en la escuela¹

De cumplirse lo anterior, habría de esperarse que los alumnos obtuvieran un rendimiento aceptable en lo que a esta área se refiere, que manifestaran habilidad e interés por la misma y expresaran disposición al trabajarla. Sin embargo tal situación no siempre se presenta, tal es el caso del tema de la multiplicación pues a partir de mi experiencia personal me he podido percatar que a los alumnos no les queda totalmente claro él porque han de seguir ciertas reglas al operar el algoritmo convencional de la multiplicación, ni como enfrentar problemas de estructura multiplicativa.

¹ SEP. Plan y programas de estudio 1993. Educación Primaria. pp.14-15

Los alumnos suelen presentar gran dificultad en este tema, ante lo cual me pregunto ¿Cuál es el origen de estas dificultades?. ¿Es acaso que el tema se enseña por exposición y los alumnos tienen escasa oportunidad de aprender a través del descubrimiento? o, como cita Orton ¿Acaso las matemáticas son en sí mismas difíciles de comprender?²

Al respecto en el terreno de la Aritmética, se ha señalado que los niños presentan mayores problemas en la estructura multiplicativa y que es más difícil para su construcción que la estructura aditiva. (Maza 1991)

Dentro de la escuela primaria, se observa que los alumnos aprenden a multiplicar a partir del modelo de adición repetida. Pero este modelo no cubre los distintos significados de la multiplicación y las más de las veces los alumnos encuentran dificultades al aplicar la operación. Las limitaciones de este modelo (adición repetida) son evidentes cuando se consideran los diversos significados de la multiplicación denominados por Vergnaud (1991)³ como isomorfismo de medidas (también llamados de proporcionalidad simple), y los del tipo producto de medidas.

Asimismo se ha señalado que la multiplicación requiere un grado más alto de procesamiento del pensamiento, que el niño va desarrollando a partir del trabajo con las operaciones aritméticas de suma y resta, para construir posteriormente con otras experiencias más el concepto de multiplicación.

El alumno ha de enfrentarse con algunos aspectos esenciales de estructuras multiplicativas, teniendo que lidiar con diferentes tipos de representaciones en los cuales están implicadas actividades de proporción, razón, áreas, y otras formas de

² ORTON Anthony. Didáctica de las matemáticas. Cuestiones, teoría y práctica en el aula. Ediciones Morata. Madrid. 1998. p.48

³ VERGNAUD, Gerard. El niño, las matemáticas y la realidad. Problemas de enseñanza de las matemáticas. Editorial Trillas. México 1998, pp.197-211

representación que tienen que ver con la estructura multiplicativa y formas en que se resuelve la operación. De cualquier modo, habrá niños que inicialmente sólo puedan dominar una pequeña parte del campo conceptual, ante lo cual, habría que analizar el proceso que sigue el alumno en la construcción de este concepto.

Aunado a esta situación, se observa que tanto la comprensión conceptual de la estructura multiplicativa, como la parte operativa de la multiplicación, presentan al alumno grandes dificultades, pues su aprendizaje suele circunscribirse a la memorización de reglas, técnicas, y en sí, a una enseñanza del procedimiento tradicional para llegar al producto correcto, sin considerar la red de significados conceptuales en la que se inscriben esta parte del procedimiento.

Por ejemplo el algoritmo convencional se puede aprender mecánicamente, pero no comprender completamente las razones de cada paso, el aprendizaje estará lleno de rigidez, de una excesiva automatización y carente de significados.

Respecto a las caracterizaciones de conocimiento conceptual y conocimiento procedimental, se ha llegado a afirmar que: “por el alto énfasis en el conocimiento de tipo procedimental, dado en los programas escolares, los estudiantes no siempre construyen el conocimiento conceptual y sus interrelaciones con el conocimiento procedimental. El tipo de enseñanza que los profesores realizan: ...{atiende exacerbadamente el tema}...preocupación porque los resultados de los ejercicios sean correctos, porque se conozcan las tablas de multiplicar, porque se aprenda los «pasos» de cada algoritmo, porque se apliquen las fórmulas correctas en un ejercicio determinado, etc. lo cual ha propiciado esta situación”.⁴

Aunque se señala que los algoritmos utilizados en el contexto escolar no son las únicas herramientas que tenemos para abordar operaciones aritméticas (suma, resta, multiplicación y división) no las descartamos; pero, debemos contemplar

⁴ BONILLA E, Martha. Sánchez H Neila. Vidal A, Martha. Como enseñamos la aritmética. Universidad Distrital. Colombia 1999. pp 35-36

que hay otras formas de operatividad por ejemplo el cálculo mental, y con calculadora. Respecto al calculo estimativo, consiste básicamente, en dar una aproximación útil para la respuesta a un problema o situación.

En la enseñanza primaria la estimación puede utilizarse, entre otros propósitos, para predecir la sensatez de los resultados, y para facilitar la comprensión de los sistemas de numeración. Por ejemplo, para la interpretación de tablas a partir de que el alumno observe y estime la relación que existe entre las variables, sin tener que contar la información con exactitud, para establecer las relaciones entre las operaciones, etc. La práctica con este procedimiento ayudará a adquirir agilidad e intuición para resolver procesos cada vez más complejos y progresar con seguridad por terrenos cognitivos.

Con base a lo anterior, considero que es importante analizar cual es el desarrollo que sigue el alumno en la resolución de problemas de estructura multiplicativa así como del algoritmo convencional de la multiplicación, asimismo considero que resulta imprescindible que los docentes conozcan las dificultades a las que se enfrentan los alumnos cuando construyen conocimientos respecto de este concepto, el nivel de abstracción por el que tiene que pasar el alumno, así como la naturaleza de los errores que pueden producirse en su aprendizaje.

Por lo antes expuesto, analice los distintos significados que involucra la multiplicación retomando autores como Castro(1995), Greer (1992), Vergnaud (1998); puesto que, estos autores exponen los distintos significados de la multiplicación los cuales son o deberían ser trabajados desde los primeros años escolares.

Asimismo, considero importante hacer un análisis del paquete curricular vigente, con el fin de indagar cuáles significados son trabajados dentro de la escuela primaria desde el programa oficial y las actividades que se presentan en el libro de cuarto grado del alumno.

Cabe señalar que en el presente trabajo de tesis se selecciono el cuarto grado de educación primaria ya que en este grado se abordan los distintos significados de la multiplicación expuestos por Gerard Vergnaud, además de que se trabaja el algoritmo convencional de la multiplicación lo cual permite tener un mayor campo de estudio y análisis de las dificultades a las que se enfrentan los alumnos en su aprendizaje.

Por otra parte, analizaré los errores que se presentan cuando el niño aborda el tema de la multiplicación con objeto de analizar la naturaleza de sus dificultades. Cabe señalar que el error será considerado aquí desde un enfoque constructivista. En esta perspectiva, el error adquiere el estatus de indicador de la forma en que el proceso se desarrolla en situaciones que se presentan cuando el alumno esta resolviendo un problema y de las dificultades con que se enfrenta el pensamiento del alumno.

En el desarrollo de esta tesis, se abordará el fundamento teórico del error como apoyo para el aprendizaje, así como dar testimonio de las dificultades con las que se van encontrando los alumnos al trabajar con la estructura multiplicativa; pasando así a considerar el error, no en una concepción negativa donde el error conduce al castigo, sino como indicador que ayude a comprender mejor el proceso de aprendizaje, y como parte integrante de la adquisición del conocimiento pues, en el momento en que el alumno comete un error puede dar prueba de que se está generando un proceso de aprendizaje, y las partes en que tal proceso requiere de refuerzo.

1.2 DELIMITACIÓN TEÓRICA

En tiempos recientes ha habido un gran interés por parte de los investigadores en educación matemática por realizar un análisis teórico de la estructura multiplicativa, entre los autores que han aportado un análisis sobre el tema están Gerard Vergnaud(1991), Brian Greer(1992) y Encarnación Castro (1995) que para los fines de este estudio son los que aportan planteamientos más específicos a la investigación.

Es importante abordar a Vergnaud por sus investigaciones que son de las más relevantes a lo que se refiere a las estructuras aritméticas. En cuanto a estructura multiplicativa define tres categorías semánticas denominadas: isomorfismo de medidas, producto de medidas y proporción múltiple⁵. Para los fines del trabajo presente sólo haré referencia a las dos primeras categorías, puesto que son las que corresponden al programa oficial vigente en la escuela primaria.

Un rasgo característico de este autor es el hecho de que atribuye al niño y a su actividad sobre la realidad un papel decisivo en el proceso educativo, por lo que considera necesario que los conocimientos que adquieren los niños sean contruidos por ellos mismos, en relación directa con las acciones que son capaces de hacer sobre la realidad, con las relaciones que pueden captar, componer y transformar; con los conceptos que construirán progresivamente.

Como señalara Vergnaud (1991), no sólo es importante que los estudiantes sean enfrentados en una variedad de situaciones para afirmar la pertinencia y restringir el alcance de validez y aplicabilidad de sus esquemas, para desarrollar nuevos procedimientos, y también para ser ayudados por medios externos, como los significantes lingüísticos, reconociendo las diferentes estructuras de los problemas y por lo tanto la posibilidad de utilizar los mismos esquemas u otros similares⁶.

⁵ Op Cit. VERGNAUD, Gerard. Pp.197-211

⁶ Vergnaud, Gerard. P 9.

Por lo tanto, resulta importante dirigir la atención al análisis conceptual de las situaciones por las cuales los estudiantes desarrollan sus esquemas, en la escuela o en la vida diaria.

Como lo cita Vergnaud: Los conceptos matemáticos se dotan de significado a partir de una variedad de situaciones; cada situación no puede ser analizada usualmente con la ayuda de un solo concepto sino que precisa varios de ellos.

Esta es la razón que ha llevado a Vergnaud (1990) al estudio de la enseñanza y aprendizaje de campos conceptuales, esto es, grandes conjuntos de situaciones y de representaciones simbólicas que están conectadas unas con otras.

Como ejemplos de tales campos conceptuales pueden citarse las estructuras aditivas, estructuras multiplicativas, la lógica de clases y el álgebra elemental.

Por otra parte, para entender como va evolucionando la mente del niño y la manera en como se apropia del conocimiento, se trabajara la teoría constructivista de Jean Piaget.

Uno de los aportes de esta teoría es el hecho de que considera al sujeto como constructor del conocimiento a medida que interactúa con la realidad. Esta construcción se realiza mediante varios procesos entre los que destacan el proceso de asimilación y acomodación, en el primer caso el individuo incorpora la nueva información haciéndola parte de su conocimiento, aunque esto no quiere decir necesariamente que la integre con la información que ya posee. En cuanto a la acomodación, se considera que mediante este proceso la persona transforma la información que ya posee en función de la nueva. El resultado de la interacción entre los dos procesos (proceso de acomodación, y asimilación) dará por resultado un proceso de equilibración la cual se produce cuando se ha alcanzado un equilibrio entre las divergencias o contradicciones que surgen entre la información nueva que el alumno ha asimilado y la información que ya tenía y la que ha acomodado.

El desarrollo cognitivo en ultima instancia desde el punto de vista Piaget no es más que una sucesión de interacciones entre procesos de asimilación y acomodación en pos de equilibrios cada vez más estables y duraderos.

Para Piaget la evolución de los esquemas en el transcurso del desarrollo está relacionada con los desequilibrios que producen las interacciones del niño con la experiencia y con el medio y, sobre todo, con los reequilibrios que se obtienen como consecuencia.

En su obra la equilibración de las estructuras cognitivas, explica como una de las fuentes del progreso en el desarrollo de los conocimientos debe buscarse en los desequilibrios como tales, los únicos que obligan a un sujeto a superar su estado actual. Añade: “si los desequilibrios constituyen un factor esencial y en primer lugar motivacional es con la condición de dar lugar a superaciones, es decir, si son superados y llegan a dar lugar a reequilibrios específicos. Son estos desequilibrios los motores de la investigación, pues sin ellos el conocimiento permanecería estático.”⁷

En esta teoría se observa que el aprendizaje es entendido como un proceso de construcción por parte del alumno, donde no basta con presentar la información al niño para que la aprenda, sino que es condición necesaria que el niño construya el conocimiento mediante su propia experiencia.

El alumno es él último responsable de su propio proceso de aprendizaje, él es quien construye el conocimiento y nadie puede sustituirle en esta tarea.

Mientras que desde una perspectiva tradicional se concibe la enseñanza como la Transmisión de conocimientos del profesor hacia el alumno donde el profesor es quien deposita la información en la mente del alumno.

En una concepción constructivista resulta importante que el profesor preste atención a las concepciones del alumno, tanto a las que poseen antes de que comience el proceso de aprendizaje como a las que se irán generando durante el

⁷ Antología UPN. E, Anita. Woolfolk y Nicolich. Una teoría global sobre el pensamiento. México pp 204-209

proceso, y que especialmente se atiendan las falsas concepciones que puedan surgir durante el proceso de aprendizaje.

El fundamento teórico para sustentar el tratamiento del error, partirá de un modelo constructivista, en este marco, los errores de los alumnos pueden interpretarse como la forma en la que a distintas edades se organizan los esquemas de los alumnos. En este sentido puede entenderse que las respuestas que parecen una aberración para el adulto, son producciones intelectuales que dan cuenta de las estrategias cognitivas que ponen en juego los alumnos al resolver un problema.

Asimismo, el error es considerado como la expresión de un esquema del conocimiento, como señala Brousseau: “El error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, de la casualidad, sino que es el resultado de un conocimiento anterior, que ha tenido su interés, su éxito, pero que ahora se revela falso o simplemente inadecuado. Tanto para el maestro como para el alumno, el error es constitutivo del conocimiento adquirido”.⁸

⁸ QUEVEDO, Blanca. En: Funcionamiento del error en el aprendizaje de las matemáticas. Universidad de Zulia. Maracaibo 1999. pp2-24

1.3 OBJETIVOS

OBJETIVO GENERAL

- Describir las dificultades a las que se enfrentan los alumnos de cuarto grado al abordar problemas de estructura multiplicativa y el algoritmo convencional de la multiplicación.

OBJETIVOS ESPECIFICOS

- Exponer las distintas conceptualizaciones de la estructura multiplicativa.
- Examinar la ubicación de este tema en el paquete curricular del cuarto grado de educación primaria
- Describir los errores que cometen los alumnos de cuarto grado de educación primaria en los aprendizajes de la estructura multiplicativa y el algoritmo de la multiplicación.
- Sugerir algunas recomendaciones didácticas en la enseñanza de la multiplicación

CAPITULO II

2. MARCOS TEORICO Y DE REFERENCIA

Cuando el niño entra a la escuela primaria ya trae consigo una serie de ideas o conocimientos matemáticos. Al cursar el jardín de niños hace más formales esos conocimientos pues es durante este ciclo cuando el niño realiza actividades de seriación y clasificación que le permitirán acercarse a la construcción del concepto de número.

El niño llega así con conocimientos básicos a la educación primaria para recorrer el largo camino que lo llevará a solucionar problemas aritméticos utilizando las operaciones elementales: suma, resta, multiplicación, y división.

Así durante los primeros años el niño estudia la adición simultáneamente a la adquisición del concepto de número, para continuar posteriormente en el estudio de las operaciones aritméticas de resta, multiplicación y división.

2.1 CONCEPTUALIZACIÓN DE LA ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA DE NÚMEROS ENTEROS NO NEGATIVOS.

Este trabajo está dirigido a abordar la estructura multiplicativa, por lo que a continuación se expone la definición de multiplicación que ha sido expresada en numerosos libros de texto correspondientes a los cursos del nivel primario; para dar así inicio al estudio de los distintos significados de la multiplicación, por ejemplo:

“La multiplicación es una suma reiterada”⁹

⁹ MAZA, Gómez Carlos. Enseñanza de la multiplicación y división. Editorial Síntesis. Madrid.1991 p17.

Analizando este concepto podría entenderse que es un caso particular de la suma, pero no es así, ya que en cada operación (adición y multiplicación) se realizan acciones diferentes.

En el caso de la adición las acciones son de agregar o reunir cosas que casi siempre pertenecen a una misma clase o subclase.

En la multiplicación ocurre una acción de correspondencia, donde a cada elemento del conjunto inicial le corresponde uno o un conjunto de elementos en el estado final. Aquí los objetos generalmente no pertenecen a una misma clase.

Mientras que la suma se refiere a un solo universo donde se indica la cardinalidad de los objetos, ya sea de animales, frutas, etc., la multiplicación en cambio transita a través de dos universos distintos. Por ejemplo, si se tienen dos veces cinco canicas, existe un nivel operativo correspondiente a las cinco canicas que representa el cardinal de un conjunto. Mientras que el número dos, no designa un conjunto de canicas sino el conjunto de los conjuntos de canicas.

Al respecto, se observa un nivel mayor de abstracción, puesto que involucra dos aspectos diferentes; uno de ellos es un elemento «pasivo» mejor conocido con el nombre de multiplicando donde su función es designar la cantidad que se repite un número. El otro factor es un agente «activo» que opera sobre el anterior y se conoce como multiplicador, el cual nos dice las veces que se repite la cantidad inicial, por ejemplo: «Compre 7 manzanas cada día durante 5 días. ¿Cuántas manzanas tengo en total?». En este caso el número 7 juega la función de multiplicando, mientras que el operador 5 representa al multiplicador, por lo tanto, para obtener el número total de manzanas sólo se reitera 5 veces las 7 manzanas, lo cual queda expresado de la siguiente manera $7+7+7+7+7=35$.

Si bien el modelo más utilizado para la enseñanza de la multiplicación es el modelo de suma reiterada, habría que señalar que solo es aplicable a situaciones simples, y que este modelo es solo un paso para desarrollar en los alumnos la estructura multiplicativa.

Por lo antes citado, me parece importante señalar los principales significados que se derivan de la estructura multiplicativa con el fin de dar a conocer algunas conceptualizaciones que tanto el alumno como el maestro deben tener presentes al abordar el tema de la multiplicación, para lo cual retoma cada una de las conceptualizaciones establecidas por Vergnaud (1991), Greer (1992) y Castro(1995)

El primer autor es importante abordarlo por sus investigaciones que son de lo más innovadoras en lo que se refiere a la estructura multiplicativa. Respecto al estudio elaborado por Greer, resulta importante retomarlo puesto que este autor se encarga de explicar cada uno de los significados de la multiplicación desde los primeros años escolares. El estudio de Castro nos proporciona un panorama general de los modelos posibles para estudiar la multiplicación.

Las categorías de Gérard Vergnaud

Uno de los conceptos más importantes construidos por Vergnaud (1991), es el de estructura multiplicativa, donde engloba las operaciones de multiplicación y división.

Vergnaud, clasificó los problemas de multiplicación en dos grandes categorías:

- Categoría de Isomorfismo de Medidas.

- Categoría de Producto de Medidas.

Isomorfismo de Medidas

Esta categoría consiste en una relación cuaternaria entre cuatro cantidades; dos cantidades son medidas de un cierto tipo, (por ejemplo paquetes de caramelos) y el resto son medidas de otro tipo cantidad de pesos.

Laura va a comprar 6 paquetes de caramelos. Cada paquete cuesta 20 pesos.
¿Cuánto tendrá que pagar en total?

En esta forma de relación multiplicativa se habla de una relación cuaternaria, puesto que son cuatro las cantidades puestas en relación donde x designa la cantidad buscada.

Ejemplo.

M1	M2
paquetes	Pesos
1	20
6	X

En el esquema se muestra una tabla de correspondencia entre dos espacios de medida (M_1 , paquetes de caramelos, y M_2 precio pagado), del cual se aíslan cuatro cantidades particulares.

Asimismo, se muestra una relación de proporcionalidad directa simple entre los tres valores (paquetes de caramelos, cantidad de pesos, un paquete que cuesta 20 pesos) y la incógnita.

Es importante señalar que inicialmente la multiplicación puede concebirse, de dos maneras.

Es una operación binaria, una aplicación definida entre los conjuntos $M_1 \times M_2 \rightarrow M_2$, donde se consideran ambos conjuntos de tal manera que al par ordenado (6 paquetes, 20 pesos) le corresponda el elemento 6×20 .

Responde a un modelo binario de la operación dado que dispone de dos cantidades iniciales, ambas al mismo nivel en el cual deben considerarse las dos cantidades simultáneamente, para resolver el problema.

La concepción binaria de la multiplicación se hace más evidente en problemas de producto de medidas.

Ó bien, puede entenderse como una operación unitaria que puede adoptar a su vez dos formas diferentes:

a) La aplicación: $M_2 \rightarrow M_2$, en la cual solo se considera la función del multiplicando, es decir, que al precio del paquete de caramelos (20 pesos) le haga corresponder la operación 6×20 .

b) La aplicación $M_1 \rightarrow M_2$, donde se contempla la función del multiplicador de tal forma que al 6 le haga corresponder la operación 20×6 .

De lo antes citado, pueden comprenderse dos aspectos importantes:

1.- El hecho de que inicialmente el niño conciba la multiplicación como una operación unitaria correspondiente a un operador escalar donde se dispone de una cantidad inicial que va cambiando a medida que se repite sucesivamente un número de veces.

2.- Que para abordar el tema de multiplicación durante los primeros años escolares se trabaje con magnitudes discretas, ya que, permite que los ejercicios sean entendidos con mayor facilidad, pues es evidente que la introducción de la multiplicación como adición reiterada (seis paquetes de caramelos de 20 pesos cada uno, son $20+20+20+20+20+20$) resulta más accesible con magnitudes discretas y números enteros, que el manejo de magnitudes continuas y números decimales.

Entendiéndose por **cantidades discretas** ó discontinuas aquéllas que se caracterizan por tener una unidad mínima, la cual no puede ser dividida en unidades más pequeñas, por ejemplo: el número de estudiantes de una escuela "X". , A este número se le llama: cantidad discreta, por lo tanto el valor numeral (un número natural) de una cantidad discreta se determina claramente.

Producto de Medidas

El producto de medidas consiste en una relación ternaria entre tres cantidades (M_1 , M_2 y M_3), de las cuales M_3 , es el producto cartesiano de las otras dos, ($M_1 \times M_2 \rightarrow M_3$.)

Para ilustrar esta categoría, a continuación se hace referencia a uno de los ejemplos expuestos por el propio autor.

"3 muchachos y 4 muchachas quieren bailar. Cada muchacho quiere bailar con cada muchacha y cada muchacha con cada muchacho. ¿Cuántas parejas posibles hay?"

Haciendo un análisis del problema, se observa que contamos con tres espacios de medidas diferentes donde $H = \{\text{Carlos, Oscar, Hugo}\}$, representa al conjunto de muchachos, $M = \{\text{Ana, Lilia, Sandra, Nancy}\}$ representa al conjunto de

muchachas, y C representa al conjunto de parejas posibles, de tal manera que existe una aplicación entre $H \times M \rightarrow C$, como se muestra en el siguiente cuadro cartesiano:

	A	L	S	N
C	(C,A)	(C,L)	(C,S)	(C,N)
O	(O,A)	(O,L)	(O,S)	(O,N)
H	(H,A)	(H,L)	(H,S)	(H,N)

Al respecto se observa un nivel mayor de abstracción ya que resulta complicado visualizar el número de parejas posibles que se pueden formar, pues para obtener el conjunto total de parejas hay que asociar un elemento del primer conjunto a un elemento del segundo conjunto, en este caso, el número de parejas es igual al producto del número de muchachos por el número de muchachas.

Otro significado que encontramos en esta categoría es el área rectangular. En estos problemas se debe hallar la medida producto, conocidas las medidas que lo forman, por ejemplo:

¿Cuál es el área de una habitación rectangular que mide 5 metros de largo por 3 metros de ancho?

En este caso, el rectángulo puede ser dividido en cuadrados de un m de lado, para encontrar el área mediante el conteo de cada uno de los cuadrados que lo conforman, lo cual representa 15 m².

Asimismo, se muestra que la medida del área es el producto de la medida de dos longitudes, tanto en el plano numérico (donde $x = 3 \times 4$), como dimensional (metros cuadrados = metros x metros).

La noción de un metro cuadrado tiene, pues, dos sentidos, el de cuadrado de un metro de lado y el de producto de medidas de longitud (un metro x un metro) Esta relación, es la que da sentido a la escritura de las unidades de área (m^2 , cm^2 , etc.)

Como puede observarse en esta categoría se describen todos aquellos problemas relativos a áreas, volúmenes, y productos cartesianos. Su forma general es una relación ternaria entre tres cantidades una de las cuales está definida como un par ordenado cuyos componentes son las otras dos cantidades. Por ello la forma más natural de representar esta relación ternaria es mediante una representación cartesiana.

Significados de la multiplicación propuestos por Brian Greer.

Greer señala cuatro significados importantes que comprenden la multiplicación de números enteros positivos los cuales presentan cierta similitud con las categorías establecidas por Vergnaud, como son: "*Grupos iguales, Comparación multiplicativa, Producto cartesiano y Arreglo rectangular*"¹⁰

A continuación se describen cada uno de estos significados.

Grupos iguales

Respecto a grupos iguales, corresponden los problemas multiplicativos en los cuales aparecen dos expresiones una referida a cada grupo y otra expresión que se refiere al número de grupos.

Este grupo constituye normalmente el encuentro más temprano del niño con la operación de multiplicar, por ejemplo:

¹⁰ En BONILLA E, Martha. Como enseñamos la aritmética. Universidad Distrital. Colombia. 1999. pp42-43

3 niños tienen 4 galletas cada uno ¿Cuántas galletas tienen en total?

De esta conceptualización, los dos números juegan un rol diferente donde el número de niños es el multiplicador que opera sobre un número de galletas, el multiplicando, para producir el resultado.

La situación de grupos iguales puede ser presentada de distintas formas, en el caso anterior podría ser redactado de la siguiente manera:

Si hay 4 galletas por niño ¿Cuántas galletas tienen 3 niños?

En general, el cardinal de un conjunto (en este caso las cuatro galletas) es multiplicado por el cardinal de un conjunto de conjuntos (tres niños) para encontrar el número total. En esta conceptualización esta implícita una relación invariante que enlaza el número de niños con el número de galletas.

Con base a lo anterior encontramos que a pesar de la propiedad conmutativa de la multiplicación (3×4 igual que 4×3), en un primer momento, será necesario situar tanto el multiplicando como el multiplicador, ya que esto es necesario cuando se pierde el sentido del problema, es decir cuando el alumno abstrae los elementos en juego (galletas, niños) y solo deja como referente los números.

Comparación Multiplicativa

Otro significado descrito por Greer es el de comparación multiplicativa, en él, está presente la expresión: “Tantas veces como” la cual involucra un factor multiplicativo es decir, un número que indica cuantas veces se repite el factor.

Juan tiene siete canicas. Pedro tiene 5 veces más canicas que Juan. ¿Cuántas canicas tiene Pedro?

En este caso, es posible ver el problema en términos de correspondencia de acuerdo con el ejemplo anterior se presentan 5 canicas de Pedro por cada canica de Juan, lo cual hace que en este caso el número 5 cumpla la función de multiplicador.



Producto Cartesiano

El siguiente significado es el producto cartesiano el cual involucra aquellos problemas donde la combinatoria es el modelo de interpretación del problema.

Una niña tiene 4 blusas y 3 faldas.

B=Blusas { azul, rosa, blanca, verde }

F=Faldas { amarilla, roja, negra }

¿De cuántas formas distintas puede vestirse esa niña?

A este tipo de problemas le corresponde la relación de Blusas por Faldas, en términos del número distinto de pares ordenados que pueden ser formados a partir de establecer una correspondencia entre el conjunto de elementos de B y el conjunto de elementos de F.

Una característica importante de este tipo de problema multiplicativo es el hecho de que, al no ser resoluble mediante la suma reiterada no se otorga distinto papel a los dos factores en juego, por lo que en este caso la multiplicación resulta ser simétrica.

En el producto de medidas, (por ejemplo, en los problemas de áreas) las dos cantidades elementales (el largo y el ancho) juegan el mismo papel y pueden ser intercambiadas. En este caso se considera que el producto puede ser denominado simétrico. En problemas de producto cartesiano se presenta la misma situación de simetría por ejemplo en el caso antes citado, no hay una diferencia esencial entre los cuatro pares de blusas y que se pregunte ¿cuántas faldas hay? Ó ¿cuántas variedades de blusa hay?, Sino cuántas combinaciones se pueden realizar de los conjuntos de blusas y faldas. Mientras que en la clasificación de isomorfismo de medidas las dos cantidades que aparecen en los datos del problema desempeñan papeles distintos. Por ejemplo si se tienen 2 cajas y cada uno contiene 4 refrescos, la estructura consiste en repetir 2 veces un conjunto de 4 objetos; y según lo señala Bell¹¹ no tiene sentido expresar esta estructura como 4 lotes de 2 elementos, por lo que en este caso el modelo de multiplicación resulta ser asimétrica.

Arreglo rectangular

Por último, se encuentra el significado de arreglo rectangular, dentro de esta categoría se encuentran los problemas relacionados con hallar áreas o hallar las longitudes de un rectángulo.

MODELOS DE ENCARNACION CASTRO

Encarnación Castro establece diversos modelos para el estudio de la multiplicación dentro de los cuales se enfatiza un contexto particular del número, entre ellos destacan los siguientes modelos: “Modelo lineal, Modelo cardinal, Modelo con medida, Modelo numérico, Modelo de razón aritmética y Modelo funcional.”¹²

¹¹ MAZA, Carlos. Multiplicar y dividir a través de la resolución de problemas. Aprendizaje Visor. Madrid 1991.p 20

¹² CASTRO E, Rico L. Estructuras aritméticas elementales y su modelización. Grupo Editorial Iberoamérica. Bogotá 1995.

p 46-50

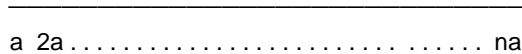
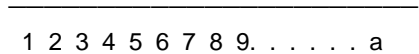
Modelo lineal

A esta categoría le corresponden los modelos de recuento en el cual se utiliza como forma de representación la línea numérica. Si la línea numérica presenta un soporte gráfico, el producto $n \times a$ (n veces a) se modela reiterando el intervalo n tantas veces como el factor a (multiplicador) lo determine.

Cuando la recta no presenta un soporte material se cuenta sobre la sucesión numérica de a en a , hasta hacer n veces el recuento.

a) Se localiza el multiplicando

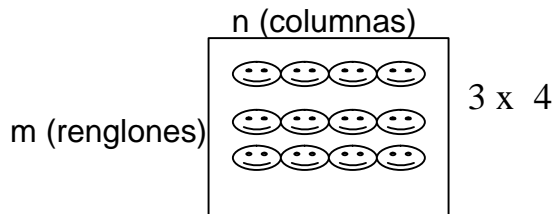
b) Se reitera n veces



Modelo cardinal

Esta segunda familia de modelo utiliza como forma de representación un contexto cardinal para representar uno o los factores. Entre las representaciones más utilizadas encontramos:

La distribución de objetos mediante un esquema rectangular, en el cual se elabora una fila con tantos objetos como se disponga o nos indique el multiplicando y formar tantas filas como indique el multiplicador. ($m \times n$)

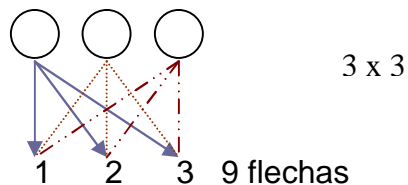


Otra forma de representación más formal es la representación mediante un modelo cartesiano de dos conjuntos siendo así que para el producto 3×4 se represente mediante el conjunto de 3 blusas y 4 faldas para formar con ello todos los pares ordenados de blusas/ faldas, normalmente mediante un cuadro de doble entrada el cual nos da el resultado del producto 3×4 .

falda	a	b	r	n
blusa				
n	(n,a)	(n,b)	(n,r)	(n,n)
r	(r,a)	(r,b)	(r,r)	(r,n)
a	(a,a)	(a,b)	(r,n)	(a,n)

blusas	faldas
negra(n)	azul (a)
roja (r)	blanca (b)
azul (a)	rosa (r)
	negra (n)

Otra forma convencional de representar un producto utilizando conjuntos es mediante un diagrama de flechas en el cual se enlacen tantas flechas de un conjunto a otro como lo indique el multiplicando y multiplicador.



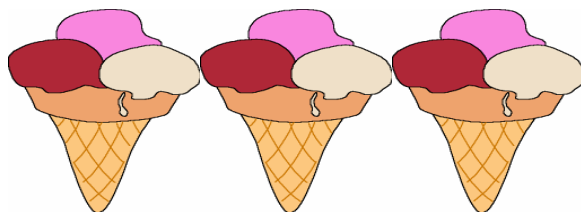
Modelo numérico

Este modelo se representa dentro de un contexto simbólico, donde los números aparecen únicamente simbolizados. En este caso el producto se obtiene mediante una suma reiterada; por ejemplo para el producto 2×3 solo hay que reiterar el número 2 tantas veces como lo indique el multiplicador, en este caso tres veces.

$$\begin{array}{r} 2 \\ + 2 \\ \hline 2 \end{array}$$

Modelo de razón aritmética

En ese tipo de problemas hay que realizar la comparación de conjuntos o cantidades en términos de cuantas veces más. Una técnica que suele emplearse en la resolución de problemas de este tipo es establecer una correspondencia de varios a uno que nos da el factor de conversión o comparación.



1 : 3 , 3 : 9

Modelo funcional

En este modelo el producto aparece con carácter de función u operador. En esta clase de problemas se considera cada operación como una maquina-operador que transforma números-estados en números-estados: Así:

$$\begin{array}{ccccc} 3 & \text{_____} & \times 5 & \text{_____} & \rightarrow 15 \\ \text{estado inicial} & & \text{operador} & & \text{estado final} \end{array}$$

ó bien:

$$\begin{array}{ccccc} 15 & \text{_____} & : 5 & \text{_____} & \rightarrow 3 \\ \text{estado inicial} & & \text{operador} & & \text{estado final} \end{array}$$

Como se pudo observar en este capítulo, el concepto de multiplicación no solo se reduce a un modelo de suma reiterada, sino que hay una gran variedad de significados que se desprenden de los problemas de multiplicación, como las categorías de isomorfismo de medidas y producto de medidas de Vergnaud o, problemas de comparación multiplicativa de Green. Asimismo, se mostró que existe una gran variedad de situaciones, representaciones graficas, así como una gran riqueza de interpretaciones a que da lugar la estructura multiplicativa.

2.2 EL NIÑO Y EL CONOCIMIENTO

En el desarrollo de esta investigación se consideró necesario conocer los procesos de desarrollo por los que atraviesa el niño en la construcción del conocimiento, y de manera particular en la construcción de conceptos matemáticos.

Para entender este proceso de desarrollo, en este apartado me apoyo en algunos aspectos de la obra de Jean Piaget, así como de autores que lo interpretan, dado que en la actualidad su teoría sigue ofreciendo una de las perspectivas más completas del desarrollo cognitivo por la gran cantidad de aspectos que aborda acerca del desarrollo cognitivo del individuo desde el nacimiento hasta la adolescencia, así como por sus aportes realizados en el campo de la matemática.

Las investigaciones y trabajos realizados por Piaget representan una gran diferencia en relación con otros investigadores, ya que cuando la mayoría dedicaba su tiempo a la explicación de lo que era el conocimiento, Piaget dedicaba sus esfuerzos no a saber lo que era, sino la manera en como se construye el conocimiento en los niños. Mediante la observación continua y constante Piaget descubre que los niños tienen una manera especial de averiguar las cosas de organizar sus ideas o recordar una representación visual.

El trabajo de Piaget señala con precisión que el conocimiento no es una copia de la realidad, no es algo que se pueda ver, copiar en la mente y realizar una imagen de lo visto. El conocimiento es el resultado de una relación dialéctica entre un determinado objeto y el sujeto.

El actuar sobre un objeto le permite al sujeto conocerlo, él poder entender o tratar de entender cómo está constituido, le permite transformarlo, modificarlo, etc.

Actuar sobre él es en realidad la facultad que tiene el sujeto para poder operar sobre un objeto.

Es necesario tener presente, que el desarrollo del conocimiento es visto por Piaget como un proceso espontáneo vinculado a todo el proceso de la embriogénesis, el cual está relacionado con la totalidad de las estructuras del conocimiento.

Para poder entender el desarrollo del conocimiento desde este enfoque, es necesario comprender la idea de esquema, así como tener idea de los principales factores (*Maduración, Experiencia Física, Transmisión social, Equilibración o autorregulación*) que intervienen en este proceso.

“El esquema es la esencia del conocimiento es una acción interiorizada que modifica al objeto de conocimiento. Conocer un objeto es actuar sobre él, es modificarlo para entender cómo está constituido. Es un conjunto de acciones que modifican al objeto y capacitan al sujeto que conoce para llegar a las estructuras de transformación”¹³

Un esquema nunca está aislado, siempre se encuentra relacionado con otros esquemas. El desarrollo de esquemas se puede representar mediante un espiral, en donde cada círculo o esquema es más amplio que el anterior. En cada uno de los niveles se produce un estado de equilibrio; los nuevos esquemas descansan sobre los antiguos, así un esquema es una parte de la estructura total. Las estructuras operacionales son las que constituyen la base del conocimiento, y el conocimiento es un proceso de progresiva construcción.

¹³ ED LABINOWICZ, *Introducción a Piaget*. Pensamiento, Aprendizaje y Enseñanza. Fondo Educativo Interamericano. Por Addison Wesley Longman de México. 1998p.36

A medida que se organiza la conducta para tornarse más compleja y más adecuada al entorno, los procesos mentales de una persona se vuelven también más organizados y se desarrollan nuevos esquemas. En este desarrollo desempeñan un importante papel cuatro factores, los cuales se estudian a continuación.

Maduración

La teoría de Piaget señala que los cambios en los procesos mentales son determinados por la intervención de cuatro diferentes factores de los cuales el factor básico del desarrollo del proceso mental en la persona es la maduración, este factor se caracteriza por la aparición de los cambios biológicos que se hallan genéticamente programados en la concepción de cada ser humano.

Se puede decir que el proceso de maduración, es el sustento biológico del desarrollo intelectual, y el principal encargado de proporcionar una base biológica para que se produzcan los otros cambios.

Experiencia Física

El segundo factor que contribuye al cambio del proceso mental es la experiencia física, el cual se caracteriza por la adquisición del conocimiento físico (identificación de las propiedades de los objetos que manipula) y el conocimiento lógico (descubre la capacidad que tiene para actuar sobre los objetos)

Al respecto, cabe señalar que los niños derivan la construcción del conocimiento lógico no de los objetos mismos, sino de su manipulación y de la estructuración interna de sus acciones por ejemplo, el niño llegará a entender que la suma de un conjunto de objetos no depende de la forma en que estos se coloquen, el niño llegará a descubrir una propiedad a partir de las acciones por él realizado y no una propiedad en el conjunto de objetos utilizados.

Interacción Social.

El tercer factor que afecta al desarrollo del pensamiento es la transmisión social o aprendizaje de otras personas.

En este proceso, es importante que el niño, conforme crezca, tenga la oportunidad de compartir experiencias tanto con individuos de su edad como con mayores. Ya que este contacto lo estimulará a aproximarse a una mayor objetividad a partir de tomar en cuenta diferentes puntos de vista, ayudándole además a estructurar ó en su caso modificar su propia opinión.

Estos tres factores, maduración, experiencia física, transmisión social son causas básicas de cambio, aunque, como lo señala el autor, el verdadero cambio tiene lugar a través de un cuarto factor el cual denomina:

Proceso de Equilibramiento.

El proceso de equilibramiento ocupa un papel importante en la coordinación de estas interacciones.

La equilibración es el factor principal que influye en el desarrollo intelectual del niño el cual es necesario para coordinar estos factores, es igualmente el mecanismo por cuyo efecto un niño pasa de una etapa del desarrollo a la siguiente.

Este proceso consiste básicamente en un cambio dinámico que el niño efectúa en respuesta a situaciones o estímulos que desconfirman los esquemas internos existentes (por ejemplo conceptos.) La desconfirmación, deja al niño en estado de desequilibrio y le proporciona el motivo para reestructurar sus esquemas. Los nuevos esquemas pueden aportar nuevas aptitudes intelectuales cualitativamente distintas de las anteriores. El avance de una etapa del desarrollo a la siguiente es definido por los nuevos esquemas adquiridos en esa forma, es decir como resultado de una desequilibración y del proceso de equilibración. Para entender cómo se produce el desequilibrio, es necesario comprender otros dos términos: asimilación y acomodación.

La asimilación consiste en el proceso por el cual el individuo incorpora la nueva información haciéndola parte de su conocimiento. La acomodación, es el proceso mediante el cual la persona transforma la información que ya tenía en función de la nueva, el resultado final de la interacción entre estos dos procesos da por resultado un proceso de equilibramiento, el cual se produce cuando se ha alcanzado un equilibrio entre las contradicciones que surgen de la información nueva que el individuo a asimilado y de la información previa, y la que ahora a acomodado.

El proceso de equilibramiento involucra básicamente, una interacción continua entre la mente del niño y la realidad. “El niño no sólo asimila experiencias en su marco de trabajo existente, sino que también acomoda las estructuras de su marco de referencia en respuesta a su experiencia. Este ciclo de interacciones repetidas con el medio hace del niño el resorte principal de su propio desarrollo. La actividad del niño no sólo le descubre nuevos problemas, iniciando con ello el desequilibrio, sino que también actúa como solución, logrando un nivel superior de equilibrio”.¹⁴

Partiremos ahora de una idea central para entender el desarrollo del conocimiento, la idea de operación: Piaget señala que el conocimiento no es una copia de la realidad, conocer un objeto no es simplemente verlo, y hacer una copia mental de él; conocer un objeto es actuar sobre él, conocer es modificar, transformar el objeto y entender la forma en como el objeto está construido, de esto se desprende que:

Una operación es una acción interiorizada. Pero además, es una acción reversible, esto es, puede tener lugar en ambas direcciones, por ejemplo sumando o restando, uniendo o separando. Así se trata de un tipo particular de acción que da lugar a estructuras lógicas.

¹⁴ Op Cit. ED LABINOWICZ. p. 46

Una operación es la esencia del conocimiento además de ser una acción interiorizada es una acción reversible que no se encuentra aislada ya que está vinculada a otras operaciones y, como resultado, es siempre parte de la estructura total.

Observemos que las estructuras operacionales constituyen la base del conocimiento y en sus términos se debe entender el desarrollo del conocimiento, el problema central del desarrollo será entender la formación, elaboración, organización y funcionamiento de estas estructuras.

Las etapas de desarrollo de estas estructuras se dividen en cuatro períodos principales que son.

- a) *Período Sensoriomotor* c) *Período de las Operaciones Concretas*
 b) *Período Preoperatorio* d) *Período de las Operaciones Formales*

PERÍODOS DEL DESARROLLO COGNITIVO		
	Período	Características
Períodos Preparatorios Prelógicos	Sensoriomotor (0-2 años)	Inteligencia práctica: permanencia del objeto y adquisición del esquema medios-fines. Aplicación de este esquema a la solución de problemas prácticos
	Preoperatorio (2-7 años)	Habilidad para representar la acción mediante el pensamiento y el lenguaje, manejo de símbolos. Dificultad para resolver tareas lógicas y matemáticas.
Períodos Avanzados Pensamiento Lógico	Operaciones Concretas (7-11 años)	Pensamiento lógico pero limitado a la realidad física. Así como un progresivo dominio de las tareas operacionales concretas (seriación, clasificación, etc.
	Operaciones Formales (11-15 años)	Pensamiento lógico, abstracto e ilimitado. ⁱ

Período Sensoriomotor

Este período tiene lugar desde el nacimiento hasta el final de los dos años de vida aproximadamente. En este período se desarrolla el conocimiento práctico que constituye la subestructura del conocimiento representacional posterior. Para un infante en esta etapa, un objeto no tiene permanencia, al avanzar en esta etapa el niño trata de encontrar el objeto y lo localiza espacialmente. Consecuentemente junto con la construcción del objeto permanente se da la construcción del espacio práctico. Todas estas estructuras son indispensables para las posteriores estructuras del pensamiento representacional.

Período Preoperatorio

Este período se caracteriza por la descomposición del pensamiento en función de imágenes, símbolos y conceptos. Durante este período el niño puede pensar en acciones o verlas y anticipar lo que ocurriría si sus acciones fuesen anuladas. En este período las acciones del niño avanzan del ejercicio no intencional de reflejos al aprendizaje por discriminación y el aprendizaje por ensayo y error, y de allí a la comprensión de la causalidad.

Período de las Operaciones Concretas

En esta etapa el niño se hace más capaz de mostrar el pensamiento lógico ante los objetos físicos. Una facultad recién adquirida de reversibilidad le permite invertir mentalmente una acción que antes sólo había llevado a cabo físicamente.

En cuanto a los aspectos estructurales del pensamiento se puede decir que los niños antes de los siete años, no poseen la capacidad de realizar operaciones mentales. En términos del autor, dichas operaciones se definen como acciones interiorizadas y reversibles, integradas en un sistema de conjunto. Serán estas

operaciones mentales las que le proporcionarán al niño, entre los siete y los doce años, la capacidad de entender nociones de conservación. Por ejemplo, que la cantidad de agua contenida en un recipiente con una capacidad determinada es la misma que hay en otro recipiente con la misma capacidad aunque el recipiente tenga formas distintas. Es decir, que modificar la apariencia de algo no modifica sus restantes propiedades (conservación)

Para entender este proceso, el niño tiene que representar o interiorizar la transformación al pasar el líquido de un recipiente a otro, y al revés, lo cual implica una reversibilidad.

Cabe señalar que, aunque el niño durante este período puede resolver correctamente problemas de conservación, su pensamiento, se califica como concreto porque todavía necesita la experiencia sensorial directa para resolver esta clase de problemas. Así, si se le pidiese al niño identificar la razón por la cual la cantidad del líquido sigue siendo la misma después de la transformación, el niño sería incapaz de abstraer el principio general o dar una explicación razonada ante este problema. Esta capacidad aparecerá hasta la etapa final del desarrollo lógico, o período de operaciones formales.

Como se podrá observar, algunos conceptos se presentan de una manera más estructurada. Se advierte una evolución paulatina que hace que los niños vayan pasando por diferentes representaciones de complejidad más creciente para entender ciertos conceptos.

Avanzado este período se advertirá en los niños una capacidad mayor para pensar en objetos físicamente ausentes que se apoyan en imágenes vivas de experiencias pasadas. Aunque, el pensamiento del niño durante este período está limitado a cosas concretas en lugar de ideas.

A continuación se esboza un breve panorama con relación al proceso que sigue el niño en la construcción del concepto del número para finalmente analizar los procesos por los que atraviesa el niño en la construcción de las estructuras multiplicativas.

A través de sus investigaciones, Jean Piaget¹⁵ se pudo percatar que la mayoría de los niños de seis o siete años saben contar hasta un número avanzado e incluso realizar pequeñas sumas. Sin embargo, observó que si se le presentaba una fila con doce fichas que al estar agrupadas ocupan veinte centímetros, comparada con otra fila con el mismo número de fichas pero distribuidas en un menor espacio físico, creerían que esta última tiene menos fichas. Percibió que los niños de esta edad experimentan problemas al hacer establecer una correspondencia uno-a-uno cuando se le presentan dos conjuntos de objetos, ó establecer una relación entre los nombres de los números y un conjunto de objetos. Y señaló, que los niños de esta edad no entenderían correctamente que usar el número seis implica incluir las cifras anteriores, destacó que es entre los siete y los doce años donde se puede advertir una evolución paulatina en los esquemas del niño ya que en esta etapa serán capaces no sólo de conservar el número, sino también de proporcionar una justificación convincente a sus respuestas.

Enfatizó que en este período (7-12 años) se desarrolla la base lógica de la matemática bajo forma de una serie de esquemas lógicos discretos. Antes de que el niño haya desarrollado los conceptos fundamentales del número puede memorizar $1+1=2$, por medio de mecanismos de asociación de memoria.

Se considera que este tipo de aprendizaje está al margen de las estructuras mentales, o esquemas. Una vez elaborado el concepto de número, el aprendizaje de $1+1=2$ se integra a los esquemas matemáticos y sobreviene el aprendizaje con

¹⁵ Op Cit. ED LABINOWICZ. p.101

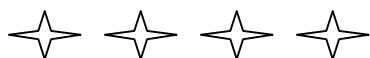
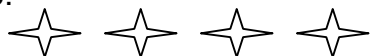
comprensión, además de que el niño mostrará tanto mayor habilidad como flexibilidad para resolver problemas, por ejemplo ante un problema de adición como $5+3$, el niño de cinco años hará un recuento de todos los números para obtener el resultado, no así el niño de 7 años, el cual contará a partir del conjunto de cinco y llegar así a una solución más rápida.

Desde el punto de vista del autor, el conocimiento lógico matemático requiere una coordinación de actividades físicas y mentales. La construcción del concepto de número, por el niño requerirá en un primer momento realizar acciones físicas como juntar, ordenar, colocar en correspondencia uno-a-uno.

Asimismo, señala que el concepto de número incluye la fusión de ideas como orden, seriación, inclusión de clases y la correspondencia uno a uno. Su concepto de número implica además las nociones de adición y multiplicación como consecuencia de la inclusión de clases y la correspondencia uno a uno.

Piaget menciona que la correspondencia uno a uno también da las bases para entender la multiplicación como una correspondencia entre varios conjuntos.

Ejemplo:



Dos conjuntos de cuatro elementos

Otro aspecto que enfatizó fue el hecho de que en el transcurso de este período, los niños desarrollan una agilidad en el pensamiento que les permite invertir las operaciones físicas. Esta reversibilidad les da acceso a la sustracción como la inversa de la adición y a la división como la inversa de la multiplicación, pues señala que no hay operación numérica que exista por sí sola. “Toda

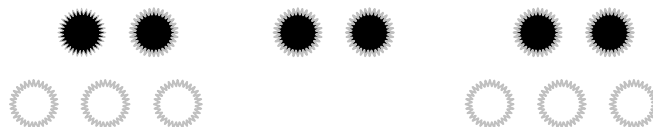
operación se relaciona con un sistema de operaciones y de ideas lógicas. Que en síntesis es lo que Piaget identifica como un concepto de número”¹⁶

Construcción del concepto de multiplicación.

Para entender como construye el niño el concepto de multiplicación Piaget llevó a cabo una serie de investigaciones a partir de las cuales estudió los motivos psicológicos por los que pasa el niño en la construcción de la adición a la multiplicación.

Maza¹⁷ cita en uno de sus estudios que Piaget planteó a varios niños entre los 4 y los 10 años, la siguiente prueba:

Se consideran fichas de dos colores con objeto de que el niño construya dos montones de fichas numéricamente iguales. La restricción que se les impone consiste en que las de un color sean tomadas de dos en dos, mientras que las de otro color sean tomadas de tres en tres. La solución más obvia consiste en sacar tres grupos del primer color y dos grupos del segundo.



Las respuestas que encontró fueron divididas por Piaget en tres estadios progresivamente más complejos. El primero estadio correspondía a niños de entre los 4 y 7 años de edad respectivamente, ya que en este período observaba las siguientes acciones: Los niños añadían unos grupos a otros sin formar un plan preestablecido que les permitía solucionar el problema. Insiste Piaget en este punto en que la acción del niño consistía en una sucesión de adiciones antes que una adición de adiciones. Es una labor mecánica que se mueve en el nivel más

¹⁶ Ídem p 110.

¹⁷ Maza, Gómez C. Multiplicar y dividir a través de la resolución de problemas. Aprendizaje Visor. España. p. 29

bajo desde el punto de vista operativo. En caso de llegar a encontrar la respuesta manifiestan su imposibilidad de volver a repetir el proceso.

El segundo estadio correspondía a niños de entre 7 y 9 años, en este estadio observó que los niños eran capaces de anticipar las igualdades con resultados alcanzables a los que llega por tanteos sucesivos. Ahora era capaz de tomar conciencia del número de veces que se repiten los grupos de fichas e intuir que un grupo de pequeño tamaño debe repetirse más veces para poder compensar el mayor tamaño de los grupos de fichas del otro color. Percibe la necesidad de una comprensión entre los dos números en juego: el tamaño numérico de un grupo y el número de grupos. En este estadio el niño opera sobre las fichas realizando una adición de adiciones, es decir agregados sucesivos de grupos de fichas, alcanzando la solución al problema por medios aditivos antes que multiplicativos.

El tercer estadio manifiesta una diferencia cualitativa respecto de los anteriores, en el sentido de que el niño ya no se centraba en los resultados de sus acciones, sino que ahora era capaz de considerar como objetos de conocimiento sus propias acciones en sí y su mecanismo. De esta manera, lo que hace no es agregar montones de fichas, sino repetir una misma acción sobre un grupo de fichas. No agrega dos y dos y dos fichas, sino que repite tres veces dos fichas.

La diferencia, para Piaget, es sustancial desde el punto de vista de la abstracción empleada: Cuando las acciones se transforman en el objeto de conocimiento, se ha pasado de una abstracción meramente empírica a otra, de naturaleza diferente, a la que denomina abstracción reflexionante o lógico-matemática.

Esquemáticamente esta situación se puede representar así:¹⁸

Primeros dos estadios	Tercer estadio
<ul style="list-style-type: none"> ➤ El resultado aditivo de sus colocaciones ➤ La enumeración de fichas 	<ul style="list-style-type: none"> ➤ El número de colocaciones ➤ La enumeración de acciones ➤ El mecanismo de sus acciones

¹⁸ Maza, Gómez C. Multiplicar y dividir a través de la resolución de problemas. Aprendizaje Visor. España. p. 30

<p>➤ Los resultados finales de sus acciones</p>	
---	--

Del esquema anterior se desprende que, en la resolución de problemas multiplicativos los niños (7-12) recurrirán a estrategias como el *recuento transaccional*, recuperación de hechos multiplicativos entre otras (Anghileri, 1989; Kouba, 1989.) Respecto de la primera estrategia se observa un reconocimiento progresivo por parte del niño en el momento que percibe la importancia de tomar en cuenta el número de grupos que se cuenta a la hora de prever el resultado final. En esta estrategia se presenta un dominio de cada recuento de grupos hasta el punto de que se aplican rutinas aditivas para calcular el resultado final a partir de sumar cada grupo de recuentos. Tal es el caso de la siguiente respuesta, (aplicada a la prueba antes citada): 2, 2 y 2 son 4 y 2 son 6.

En cuanto a la recuperación de hechos multiplicativos, en esta estrategia deviene el almacenamiento y recuperación de los hechos multiplicativos básicos, siendo estos las multiplicaciones elementales de dos números El problema presentado, se resuelve aplicando la multiplicación de 3×2 .

Como se puede observar el pensamiento multiplicativo que se debe formar en los alumnos, es el completar pasos cada vez más organizados y llegar a extender el alcance de la validez de su conocimiento intuitivo para construir razones y proporciones y para operar con números decimales. Además de extender su conocimiento de las estructuras multiplicativas a otros dominios de mayor dificultad tales como medición geométrica, y la probabilidad entre otros.

Período de las Operaciones Formales

La etapa final del desarrollo lógico corresponde al período de las operaciones formales, o capacidad para utilizar operaciones abstractas. Esta aptitud aparece

en los niños de entre 11 y 15 años de edad respectivamente. En esta fase interviene el proceso de descentración, hasta el punto de que el pensamiento y la resolución de problemas pueden presentarse dentro de un marco de referencias puramente abstracto. El alumno es capaz de plantear todas las posibilidades que puedan darse entre los diferentes elementos de un problema, en vez de partir de aspectos físicos.

El adolescente ya no sólo razona sobre hechos u objetos físicos, sino que ahora es capaz de razonar sobre lo posible, es capaz de razonar y analizar conjeturas, y someterlas a comprobación experimental, y sacar conclusiones al respecto. Es en este período cuando el adolescente es capaz de formular hipótesis acerca de cosas que no están al alcance de su manipulación, se torna posible un proceso de ensayo y error auténticamente interno, así como un proceso más cognitivo de asimilaciones recíprocas de esquemas.

En términos generales puede destacarse que la obra de Piaget ha permitido entender los procesos de desarrollo por los que pasa el individuo en la construcción del conocimiento, además de servir como marco de referencia para entender como construye el alumno conceptos matemáticos.

2.3 MANEJO DEL ERROR

El campo de estudio sobre errores en el aprendizaje de las matemáticas se ha venido desarrollando y definiendo desde la segunda década del siglo pasado, destacándose algunas contribuciones realizadas en esta área como las investigaciones en Alemania, donde se destacan los trabajos de Seseman (1931), Rose (1928) quien trató de establecer una clasificación de las causas del error en educación matemática, o las investigaciones realizadas en Estados Unidos donde encontramos estudios como los de Thorndike(1917) con su psicología de la aritmética, Brueckner(1935) quien encauzó su trabajo principalmente al análisis de las dificultades en la enseñanza de la aritmética, o los trabajos de investigación sobre los procesos de enseñanza aprendizaje de las matemáticas, desarrolladas por Ginsburg (1977), Erlwanger (1975) También son relevantes los estudios realizados en España, donde ubicamos a investigadores como Villarejo A y Huerta (1953) Adicionalmente encontramos los estudios hechos por Centeno (1988) y los de Rico(1996), así como los realizados por la italiana Borassi (1994) quien se preocupa por analizar y utilizar los errores de los alumnos como plataformas para explorar nuevos conocimientos matemáticos.

Sin embargo, cabe destacar que los estudios relevantes en el ámbito del manejo didáctico del error son escasos. En este apartado me dedico a presentar una perspectiva del papel del error en la enseñanza-aprendizaje, a la vez que trato de explicar dónde y cómo se producen los errores y qué retos supone para el profesorado su incorporación como estrategia para ser más eficaz su labor docente.

Para ello, se aporta un panorama sobre la relevancia del error, el estatus que suele atribuirse en los diferentes modelos educativos, sus consecuencias en la intervención didáctica; por último se describe la forma en como se maneja el error para el análisis e interpretación de las respuestas dadas por los alumnos.

Error, equivocación, defecto, deficiencia, descuido, distracción, fallo, falta, torpeza, etc., son términos que recuerdan las expresiones que habitualmente utilizan los docentes en el trabajo cotidiano de la enseñanza. En numerosas ocasiones, mediatizados ya por la historia y por su experiencia personal, suelen repetir y reproducir aquellos modos con los que se procedió en su vida escolar como alumnos convencidos de que pertenecen quizás al sentido común. El mundo de la enseñanza ha estado muy contaminado por una interpretación negativa del error en el cual el docente al momento de percibir el error suele subrayar, tachar, y plasmar la falta en el cuaderno cargando así de culpabilidad al alumno y convirtiendo en angustiosos esos momentos educativos, llevando a los alumnos a emparentar el error con la trasgresión.

En la actividad docente donde la repetición constituye uno de los ejes metodológicos del aprendizaje y cuyo uso trae como consecuencia la producción de respuestas correctas e incorrectas, se ha llegado a la concepción de que todas las respuestas incorrectas, es decir los errores cometidos, son fruto de una incapacidad del sujeto o de una carencia (motriz, visual, etc.) En otras palabras, o bien el alumno no sabe ejecutar la tarea o bien la ejecución ha sido fruto de una negligencia. Si bien es cierto que esto último tiene algo de verdad, en muchas ocasiones suele suceder que las respuestas aparentemente erróneas no son sino la consecuencia de disponibilidad y de recursos puestos en juego por el sujeto para dar solución al problema que se le plantea, es decir, los alumnos responden como creen que es lo más adecuado por las circunstancias en las que se encuentran. Visto así, y admitiendo que las respuestas erróneas están llenas de significado, al igual que las respuestas correctas, dicha significación constituye

una aportación importantísima que debería ser contemplada en la metodología de la enseñanza y del aprendizaje.

En una didáctica del error se busca que el profesor sea un excelente observador capaz de detectar exactamente los errores que se producen por los alumnos.

En algunos modelos educativos se induce al profesorado responda a los errores poniendo remedio inmediato, es decir, que procure que desaparezcan instantáneamente. Pocas son las ocasiones en que se promueve el diagnóstico, la interpretación de lo sucedido. La reacción, cuando se constata la aparición de errores, consiste en emitir más información o nuevas informaciones referidas a la ejecución correcta, es decir, al modelo a imitar. Así el pensamiento del docente suele verse así, reducido a la idea de que la repetición de la información y el modo de abordar los problemas son factores clave para mejorar la ejecución y evitar en la medida posible la aparición de errores. En este sentido, dejan de lado una observación que permita identificar el origen de las respuestas erróneas, impidiendo con ello que el alumno analice en que ha fallado y que pueda incluso cambiar de estrategias o formas de resolver los problemas.

A continuación se analiza el papel que suele adjudicarse al error desde dos modelos educativos (el tradicional, y el constructivista)

Una corriente pedagógica bastante extendida, considera que el error debe ser eludido: el profesor organiza sus clases de modo que el alumno, si actúa adecuadamente es decir de acuerdo con las instrucciones y prescripciones del profesor, no cometerá error alguno.

En consecuencia, el error constituye un indicador de fracaso en el aprendizaje, y por tanto, algo a evitar y que no se debe repetir. Para garantizar el éxito e impedir que aparezca fallo alguno se promueve que la enseñanza esté estructurada según unos pasos sucesivos que planteen al individuo metas progresivamente accesibles de forma que éste tenga un refuerzo continuo. La forma práctica de implementar este principio son los minuciosos programas lineales. En estos programas las actividades se descomponen al máximo y de la

forma más accesible con una dificultad diferencial entre los pasos que el alumno debe seguir de forma tal que el alumno no cometa error, y que siempre pueda superar el paso anterior para pasar al siguiente incorporando de forma inmediata modos de comprobación que garanticen que se progresa por la dirección correcta, sin desviación alguna.

Esta manera de proceder es propia de las teorías conductistas y más concretamente de los trabajos de Skinner (1973), donde se propone un tipo de enseñanza-aprendizaje en el que la posibilidad de error por parte del sujeto sea suprimida o minimizada.

En esta perspectiva el aprendizaje ideal es aquel en el que no existe error. Se le adjudica así al error, una consideración de culpabilidad y fracaso. En este ambiente, el alumnado vive el error con la ansiedad de algo que no debía haber sucedido y cuya culpabilidad se debe a él. En ocasiones, en este clima, se relaciona el error (la equivocación) con la falta cometida algo así como “el pecado que hay que librar”. Recordémonos de expresiones que hasta hace poco eran pronunciadas por muchos docentes: “la letra con sangre entra”. El mundo escolar está repleto de ejemplos o situaciones todavía vigentes tales como castigar los fallos cometidos, como repetir la corrección al error tantas veces como el docente crea conveniente, o sancionar al alumno en sus formas más variadas, por considerar que el alumno no ha llegado al aprendizaje esperado. Frente a la comprobación del error, la respuesta es simple: se trata de repetir las explicaciones, de diseñar nuevas variantes en los ejercicios, de insistir en la tipificación de las situaciones y problemas.

En una propuesta constructivista, los errores no se consideran faltas condenables, ni fallos del programa de estudio; son síntomas interesantes de los obstáculos con los que se enfrenta el pensamiento del alumno; son la expresión de un esquema de conocimiento, y una fuente primordial para abordar el aprendizaje, donde se considera que también se aprende a través de situaciones

en las que el error, en lugar de ser evitado o "denunciado", indica la existencia de una lógica que importa explicitar y diagnosticar como la consecuencia de una interacción aceptada por todos.

Como cita S. de la Torre (1993) “Los errores que cometen los individuos de forma persistente son manifestaciones de la presencia de un fenómeno más amplio, que algunos autores denominan inadaptación del conocimiento, provocado por un obstáculo”¹⁹

El error dentro de esta interpretación es un hecho constatable que tiene su origen o es debido a la presencia de uno o varios obstáculos como fenómenos más generales y arraigados en el individuo.

En el mismo sentido, Brousseau: señala “El error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, de la casualidad, sino que es el resultado de un conocimiento anterior, que ha tenido su interés, su éxito, pero que ahora se revela falso o simplemente inadecuado”²⁰.

Estos investigadores y especialistas reconocen en sus trabajos, la importancia del error. Así ocurre con la Teoría de las Situaciones Didácticas, del Dr Guy Brousseau, en la que las nociones: "Obstáculos epistemológicos" y "conflicto cognitivo", intentan potenciar los momentos de mayor dificultad en un aprendizaje para generar un mejor y más profundo conocimiento de los conceptos.

“En este modelo se admite que el error ayuda a contemplar aquello que generalmente queda oscuro, que es porqué el niño hace las cosas de tal manera, tanto si se trata de aciertos como si se trata de errores. Esto se consigue

¹⁹ DE LA TORRE Saturnino. Aprender de los errores. El tratamiento didáctico de los errores como estrategia de innovación. Madrid 1993 p42

²⁰ QUEVEDO, Blanca. En: Funcionamiento del error en el aprendizaje de las matemáticas. Universidad de Zulia. Maracaibo 1999. pp23-24

siguiendo todos los procesos que se desencadenan en el niño para llegar al aprendizaje, preocupándose de averiguar si el proceso que ha hecho para llegar al acierto o al error sigue el proceso lógico. Ya que el hecho de que no acierte a la solución no implica que no haya proceso de maduración. Su error tiene siempre una explicación y un porqué (De la Torre, 1993)".²¹

Cuando el niño soluciona el problema, realiza la operación correctamente, se supone que se ha producido el éxito. Sin embargo, que el niño solucione el problema motor no implica que lo haya asimilado, entendido. El proceso por el cual el niño ha llegado a encontrar la solución queda velado. Frente a cualquier dificultad o tropiezo, el niño busca estrategias para sortear el obstáculo. Cuando siempre encuentra las mismas contrariedades y trampas, estas estrategias se mecanizan y el niño da las mismas respuestas a los mismos casos y también frente a casos parecidos.

La perspectiva temporal puede aportar aquí un elemento suplementario, muchos fracasos se interpretan mejor a la luz de los errores anteriores del alumno, pero también de los obstáculos ya superados.

La idea del error figura aquí como "motor del aprendizaje" puesto que, precisamente, las condiciones establecidas permiten al sujeto reconocer como tales sus errores a fin de poderlos corregir.

Como puede observarse, este modelo parte de la idea de que el error es un elemento inseparable de la vida. "No es posible no equivocarse en el proceso de aprendizaje". El error es asumido como una condición necesaria que acompaña a todo proceso de mejora, como un elemento constructivo e innovador. Reconocer un error permite proponer algo nuevo, aporta una corrección. Equivocarse no solo es una fatalidad; muchas veces puede ser lo que motive al cambio.

²¹ Ídem p 42

La consideración positiva del error supone una concepción innovadora una renovación didáctica por parte de los docentes. Exige pensar y actuar desde parámetros diferentes, como veremos a continuación.

Como señalaba, los errores resultan ser un componente natural de todo aprendizaje, con el que tenemos que contar, ya que son numerosas las posibilidades de que el error aparezca, porque son múltiples los ensayos que hay que realizar para alcanzar un concepto adecuado en cualquier campo del conocimiento.

Cuando un profesor cree que ayudar a sus alumnos para superar un error consiste en contraponer al razonamiento anómalo del aprendiz con la evidencia certera establecida por él, y exigir su inmediata sustitución, sin ninguna otra justificación, se equivoca. El error producido por el alumno surge como expresión de algo (estrategias para conseguir la solución), mientras que el enunciado o la regla "correctamente resuelta por el profesor" carece de significado y es una mera prescripción. En los contextos de aprendizaje, un argumento es más adecuado que una consigna.

Para ayudar al alumno, se debe poner de manifiesto la insuficiencia de su argumento y las contradicciones en las que incurre; hay que someter a crítica el conocimiento erróneo y contemplar qué elementos faltan o deben modificarse; se debe buscar que el alumno ponga a prueba sus propios argumentos, que aprecie sus contradicciones y que modifique o reelabore los argumentos iniciales para superar las dificultades detectadas, sólo así se respeta la capacidad de razonamiento del alumno y le ayuda a alcanzar un conocimiento válido y útil. Con tal proceder se habrá colaborado en su educación y "enseñado" una metodología de autoaprendizaje.

Por otra parte, interesa resaltar que, ante la presencia de los errores en el aprendizaje de las matemáticas, la labor del docente será permitir que se

expresen, analizar su naturaleza, sus causas, diseñar situaciones de aprendizaje para su tratamiento. No se trata, tan solo de atender al error, sino que implica un modelo distinto de actuar profesionalmente.

La corrección de los errores tiene como punto de partida su identificación y el conocimiento de la causa. No se trata de aceptar lo equivocado (lo estropeado) sino reconstruir a partir de lo existente, de buscar logros, de mejorar el proceso y los resultados de aprendizaje. Ello implica de alguna manera, una actitud flexible respecto al plan inicial y una formación para la innovación educativa.

Manejo del error en el análisis de las respuestas de los niños.

Como se observó en páginas anteriores, podemos encontrar varias líneas de investigación en torno a los errores que cometen los estudiantes en el momento de dar solución a problemas, y algoritmos matemáticos. Para los fines de esta investigación en el transcurso de este trabajo se empleará el término **error** como indicador de las dificultades con las que se enfrenta el pensamiento del alumno; Asimismo el error será utilizado como un medio para comprender y analizar como piensa el alumno en la construcción del conocimiento; para entender la lógica y naturaleza de sus repuestas en la resolución de problemas de estructura multiplicativa así como del algoritmo convencional de la multiplicación.

Pues como indicara S. de la Torre(1993)" Los errores son la expresión de un esquema de conocimiento, y una fuente primordial para abordar y entender el aprendizaje, indican la existencia de una lógica que importa explicitar y diagnosticar como la consecuencia de una interacción aceptada por todos".²²

Asimismo, los errores, que comete un alumno son una manifestación de un fenómeno más amplio que el simple fallo o ignorancia del alumno, ya que, en la mayor parte de los casos no son casuales pues estos pueden estar basados en

²² DE LA TORRE Saturnino. Aprender de los errores. El tratamiento didáctico de los errores como estrategia de innovación. Madrid 1993 p.46

experiencias y conocimientos previos, y por lo tanto tener diferentes causas que lo originen.

Como lo señalara en su momento Radatz, (citado por Luis Rico en el libro de J. Kilpatrick 1995)²³ y en cuya categoría me basaré para el análisis de las respuestas de los niños, los errores pueden tener diversos orígenes:

- a. Errores debidos a dificultades por el uso del lenguaje empleado en el texto del problema. Es decir que el aprendizaje de los conceptos, símbolos y vocabulario matemático es para los alumnos un problema similar al aprendizaje de una lengua extranjera. Una falta de comprensión semántica de los textos matemáticos.
- b. Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos. En este tipo de errores se incluyen todas las deficiencias del conocimiento sobre contenidos y procedimientos específicos para la realización de una tarea matemática. Estas deficiencias incluyen la ignorancia de los algoritmos, conocimiento inadecuado de hechos básicos, procedimientos incorrectos en la aplicación de técnicas en el algoritmo, dominio insuficiente de símbolos y conceptos necesarios y otros derivados de la ejecución de algoritmos básicos.
- c. Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento. La experiencia sobre problemas similares anteriores puede producir una rigidez en el modo habitual de pensamiento y una falta de flexibilidad para codificar y decodificar nueva información. Dentro de esta clase de errores se encuentran los siguientes:
 - Errores de asociación
 - Errores de asimilación

²³ KILPATRICK, Jeremy. Errores y dificultades de los estudiantes. Bogota 1995.

- d. Errores debido a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes. Este tipo de errores surge con frecuencia por aplicar con éxito reglas o estrategias similares en áreas de contenido diferentes.

Esta clasificación forma parte de los errores que podemos encontrar en él ó los tipos de respuestas que dan los alumnos al resolver un problema y cuyas categorías se apoyan en los estudios que hubieran realizado Leo Brueckner y Radatz.

Aunque, cabe señalar que esta clasificación resulta poco útil por el tipo de situaciones planteadas en el instrumento de esta tesis, por lo que se realizó una clasificación de errores en función de las respuestas emitidas por los niños en la prueba como son:

Datos mal utilizados. Se incluyen aquí aquellos errores que se han producido por alguna discrepancia entre los datos que aparecen en una cuestión y el tratamiento que le ha dado el alumno.

Dentro de esta investigación también interesa analizar los casos en que se añadió datos irrelevantes en el texto del problema, y el tipo de procedimiento que utilizó el alumno para resolverlo; asimismo interesa analizar si el alumno añade datos extraños en la resolución de estos, si omite o cambia algún dato necesario, si contesta algo que es irrelevante para su solución, o bien si hace una lectura incorrecta del enunciado.

Como se puede observar, la tipología de errores antes expuesta fue elegida tomando en cuenta los tipos de errores que pueden mostrarse en el momento en que el alumno de solución a problemas matemáticos, además de contemplar un mayor parámetro para clasificar y analizar la naturaleza de los errores que intervienen en el proceso de dar solución a problemas textuales de estructura multiplicativa, y del algoritmo de la multiplicación.

2.4 ANALISIS DEL PAQUETE CURRICULAR

En este apartado, se analiza lo establecido en los planes y programas de estudio de nivel primaria con el propósito de describir los objetivos se persiguen con la nueva propuesta en la enseñanza de las matemáticas. Además, se presenta un panorama general del contenido del paquete curricular en el cuarto grado de educación primaria, para lo cual, se muestra brevemente la función y utilidad de los materiales básicos que se proponen desde la SEP, como parte de la reforma de la enseñanza de las matemáticas, a partir de 1993.

Como primer punto, tenemos que en el año de 1992 la Secretaría de Educación Pública establece un nuevo plan de estudios para la educación primaria, así como los programas que corresponden a cada una de las asignaturas que lo integran. Este plan se aplicó en una primera fase en el ciclo escolar 1993-1994 y entró en vigor para todos los grados al inicio del ciclo 1994-1995.

En el plan de estudios se establecieron las siguientes finalidades: a) Dar prioridad a la renovación de los contenidos y los métodos de enseñanza, b) El mejoramiento de la formación de maestros, c) Crear consenso en torno a la necesidad de fortalecer los conocimientos y habilidades básicas, el uso de las matemáticas en la solución de problemas y en la vida práctica, y la relación que habría que promover para la enseñanza de los contenidos científicos.

Además de la integración de los planes y programas como medio para organizar la enseñanza, se buscaba implementar acciones que apoyaran y contribuyeran a la Reforma de la Educación Básica por lo que se renovarían los

libros de texto gratuito, y se producirían otros materiales educativos como el libro del maestro, el avance programático y el fichero de actividades.

Asimismo, se buscaba que con la elaboración del nuevo plan y programas de estudio se reorganizara la enseñanza y el aprendizaje de contenidos básicos, y que se obtuviera un mayor provecho de los conocimientos de los alumnos, a la vez de estimular las habilidades necesarias en el niño para un aprendizaje permanente.

De igual forma, se busca superar el enfoque anterior donde el alumno solo cumplía la función de receptor de la información, lo que ahora se pretende es una mayor participación de los alumnos donde ellos construyan conocimientos.

Por ello, el Plan y Programa de Estudios vigente para la Educación Primaria abordó el enfoque de resolución de problemas, esto es, la aplicación y movilización del estudiante en búsqueda, en acción reflexiva ya que se considera como el núcleo del aprendizaje de las matemáticas y de otras materias de estudio.

Al respecto, en el enfoque actual se señala lo siguiente: “Un problema debe constituir, una situación incierta que provoque en quien la padece una conducta (resolución del problema) tendente a hallar la solución (resultado esperado) y reducir de esta forma la tensión inherente a dicha incertidumbre”²⁴.

El problema debe ser entendido como aquella situación, en donde el niño requiera de la reflexión, de análisis, de explicación de una lógica en los procedimientos y de estructuración de resultados. Se considera, que los problemas deben ser sobre todo, situaciones que permitan desencadenar en él

²⁴ SEP. Guía para el maestro. Cuarto grado de Educación Primaria. 1992 p.11

alumno la exploración, investigación, discusión, reflexión, así como de la elaboración de estrategias que lo lleven a la solución y a la construcción de conocimientos, o al reforzamiento de los conocimientos previamente adquiridos, y al desarrollo de habilidades.

La resolución de problemas en el enfoque didáctico del paquete curricular tiene un sentido amplio, el cual corresponde a situaciones ricas que le permitan al niño usar los conocimientos adquiridos y desplegar diversos recursos, de tal manera que se promueva la construcción de nuevos conocimientos. Es la creación de un ambiente, más que una actividad de aplicación.

Desde este enfoque se considera a la “resolución de problemas como fuente de criterio de verdad de los conocimientos para el niño. Se aprende al resolver problemas nuevos porque se construyen conocimientos para poder hacerlo; se aprende también cuando se aplican los conocimientos a situaciones diversas porque se abstrae y se generaliza el saber anteriormente construido. Es ahí donde se muestra la solidez y validez de los conocimientos”.²⁵

Otro objetivo que se pretende alcanzar a través de la nueva propuesta es que en su aplicación el docente tenga mayor conocimiento del proceso de aprendizaje de sus alumnos, ya que de ahí se desprende el diseño y elaboración de actividades que vayan acordes a las características propias del niño de esta edad, y lograr con ello el propósito central de la enseñanza de las matemáticas: desarrollar en el alumno la formación de habilidades para la resolución de problemas y el desarrollo del razonamiento matemático a partir de situaciones prácticas.

Cabe señalar que para contribuir al logro de dicho propósito, en el nuevo Plan se toman conceptos del enfoque constructivista, en el que por las características

²⁵ SEP. Libro del Maestro. Matemáticas cuarto grado. México 1996. p.16

de los aprendices de este nivel se observa que las tareas propuestas parten de experiencias concretas.

Del enfoque constructivista podemos decir que toma en cuenta la actividad mental del alumno en la realización de los aprendizajes escolares; Coll (1991) menciona que este enfoque es un principio que lleva a concebir el aprendizaje escolar como un proceso de construcción del conocimiento y a la enseñanza como una ayuda, que diseña y orienta este proceso de construcción.

Por ejemplo, respecto al papel que desempeña el alumno, éste es concebido como el constructor y responsable de su propio aprendizaje. Es por ello que las actividades propuestas se aplican a conocimientos que ya posee, pues se considera que todo conocimiento se construye a partir de otro anterior. En este enfoque, se considera que en la construcción de los conocimientos matemáticos, los niños parten de experiencias concretas y que paulatinamente y en la medida en que vayan haciendo abstracciones podrán prescindir de los objetos físicos. El diálogo, la interacción y la confrontación de puntos de vista ayudan al aprendizaje y a la construcción de conocimientos. Así, tal proceso es reforzado por la interacción con los compañeros y con el maestro.

Como puede observarse este modelo de enseñanza-aprendizaje considera que el éxito en esta disciplina depende en buena medida del diseño de actividades que promuevan la construcción de conceptos a partir de experiencias concretas, así como de la interacción que se genere entre los integrantes del grupo.

A grandes rasgos, he detallado algunas características del enfoque constructivista propuesto en la Reforma Educativa, por lo que ahora analizaré el paquete curricular que se proporciona a docentes y alumnos en el cuarto grado de educación primaria en el área de matemáticas.

Entre los materiales que se proporcionan a los maestros se encuentran: el plan y los programas de estudios los cuales se explicaron en páginas anteriores, el avance programático, el libro para el maestro y el fichero de actividades. Por su parte, a los alumnos se les proporciona un libro.

Enseguida se describe brevemente la función y utilidad de cada uno de estos materiales.

AVANCE PROGRAMÁTICO

En esta etapa de reformulación del Plan y Programa de Estudio 1993, la Secretaría de Educación Pública pone a disposición un material auxiliar para el trabajo de los docentes, denominado Avance Programático.

Este material tiene como propósito ser un auxiliar para los maestros. En el que a partir de su formato el docente planifique las actividades de enseñanza interrelacionando a su vez y en forma natural los contenidos de las distintas asignaturas (matemáticas, español, historia, etc.)

Asimismo, el avance programático tiene por propósito que el docente cuente con un instrumento que le aporte mayor orientación con la finalidad de evaluar los resultados de aprendizaje de sus alumnos.

En este cuaderno se recomienda una secuencia de contenidos, se indican las páginas de los libros de texto que se relacionan con cada contenido y en el caso particular de Matemáticas, también se indica una ficha didáctica para hacer un taller de apoyo a cada tema.

En el Avance Programático de cuarto grado aparecen cinco bloques que conforman la asignatura de matemáticas. Al inicio de cada bloque se indican los propósitos que se persiguen, especificando a qué eje temático corresponden.

Por ejemplo, en el caso de la multiplicación, tema de esta tesis, puede observarse que desde el bloque número uno se abordan contenidos referentes al tema los cuales sirven de apoyo para que el alumno trabaje algunas conceptualizaciones de la estructura multiplicativa, así como el algoritmo convencional de la multiplicación, para ello se sugieren una serie de actividades que puedan llevar al alumno a resolver situaciones problemáticas como: a) resolución de problemas sencillos que impliquen el uso de la multiplicación, (véase Pág. 14 del avance programático de cuarto grado), b) la aplicación del algoritmo convencional de la multiplicación (Pág. 14), c) establecer la relación entre los procedimientos de “descomposición de rectángulos” y su algoritmo con números de tres cifras en el multiplicando por números de dos cifras en el multiplicador (Pág. 19), d) resolución de problemas de combinatoria (páginas. 34 y 84), así como el uso de la multiplicación para aproximarse al resultado de la división (Pág. 19), entre otras actividades.

Cabe señalar que para su realización los alumnos pueden emplear procedimientos no convencionales, es decir, los alumnos pueden valerse del uso de dibujos, diagramas, material concreto, etc. Se trata de procesos abiertos en los que el aprendiz pone en juego sus posibilidades, para llegar poco a poco a la institucionalización de saberes matemáticos.

FICHERO DE ACTIVIDADES

El fichero de actividades, es un complemento más que se le da al docente para que desempeñe su tarea de manera eficaz. También es un material de apoyo para el desarrollo de sus actividades docentes.

Las actividades del fichero son presentadas a través de talleres, a manera de juegos, lo cual además de gustar a los alumnos por presentar materiales variados, les dan oportunidad de aprender con ellos.

En cuanto al formato del fichero, cabe señalar que éste está integrado por el nombre de la actividad, los propósitos que se persiguen, el número de bloque que le corresponde y el eje o ejes temáticos (*los números, sus relaciones y sus operaciones, medición, geometría, tratamiento de la información, procesos de cambio, predicción y azar*) que se pueden trabajar a través de las actividades.

Algunas fichas tienen varias versiones, es decir se hace una pequeña modificación para que una misma actividad represente un nuevo reto para el alumno, o se desarrolla en etapas de diferente nivel de complejidad.

Respecto al tema que nos ocupa en esta tesis, en el fichero se proponen actividades en las cuales se pretende:

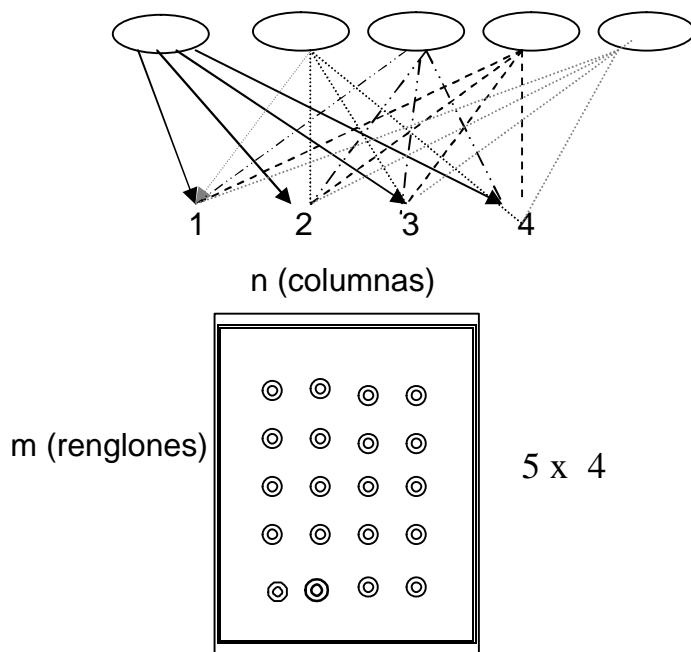
- Que los alumnos resuelvan problemas relacionados con su vida diaria, que impliquen el uso del algoritmo de la multiplicación de números naturales menores que 100,000.
- Que el alumno desarrolle estrategias para estimar y calcular mentalmente el resultado de problemas que impliquen el manejo del algoritmo de la multiplicación
- Que el alumno utilice el algoritmo

Como fin último, se pretende que al término del curso los alumnos resuelvan problemas de combinatoria (*producto cartesiano, según Gerard Vergnaud*), respecto a esta última actividad, habría que señalar que el propósito va más enfocado a que el alumno trabaje con el eje: predicción y azar, aunque el inicio del tratamiento se haga con un primer acercamiento a problemas de combinatoria.

Las actividades que se sugieren en el fichero permiten que el alumno emplee procedimientos no convencionales; aunque, se sugiere que el profesor introduzca

la representación gráfica, para posteriormente llegar a la representación simbólica:
 $5 \times 4 = 20$

Por ejemplo, el profesor puede inducir los siguientes modelos de representación:



Con el diseño del fichero, se pretende que las actividades propuestas permitan al alumno construir conceptos, desarrollar y ejercitar habilidades que son necesarias para lograr los propósitos de los programas de estudio.

LIBRO DEL MAESTRO

En este libro se ilustra la manera de involucrar los distintos materiales de apoyo que se otorgan al maestro y al alumno para conseguir las metas planteadas. Además de presentar una serie de recomendaciones respecto al papel que deberá desempeñar el maestro en la enseñanza de las matemáticas, las características que deberá tomar en cuenta respecto a sus alumnos para trabajar los contenidos en matemáticas, la forma en que deberá abordar los contenidos de enseñanza y la forma de aprovechar lo mejor posible los materiales de apoyo.

También se hace mención detallada de cómo están organizados los contenidos del curso y los ejes temáticos que deberán abordarse en el período escolar. Asimismo, se presentan una serie de recomendaciones didácticas por eje.

En el libro se enumeran los propósitos generales del grado. Con respecto a la multiplicación, se menciona la importancia de solucionar problemas multiplicativos, utilizando inicialmente procedimientos no convencionales, asimismo se busca que el alumno desarrolle su capacidad para resolver problemas que impliquen el uso del algoritmo convencional de la multiplicación.

Finalmente aparecen las recomendaciones de evaluación, ofreciendo estrategias que le permitan al docente hacer un examen más preciso de los conocimientos que han adquirido los alumnos. Considerando por ejemplo los exámenes escritos así como las observaciones hechas a lo largo del proceso de enseñanza-aprendizaje.

LIBRO DEL ALUMNO

El contenido del libro gira alrededor de seis ejes (los números, sus relaciones y sus operaciones, medición, geometría, tratamiento de la información, procesos de cambio, predicción y azar.) Respecto al primer eje (motivo de esta tesis), se dedican quince lecciones de un total de noventa y una lecciones para trabajar la multiplicación.

A continuación se presenta un panorama general de los contenidos que abarca el libro del alumno en el cuarto grado de educación primaria para la enseñanza de problemas de estructura multiplicativa, así como del algoritmo de la multiplicación.

Resolución de problemas de estructura multiplicativa en el libro de texto del alumno.

En este apartado se presentan las actividades que se sugieren en el libro de texto del alumno para abordar la resolución de problemas de estructura multiplicativa, así como del algoritmo de la multiplicación.

Cabe mencionar que las siguientes tablas estarán organizadas por bloques los cuales corresponden a cada una de las unidades que el alumno debe trabajar durante el curso escolar, el número y título de la lección, así como de la categoría a la que corresponde de acuerdo a la clasificación de Gerard Vergnaud, Greer y Castro.

Respecto del primer punto encontramos que:

En el bloque I se trabajan cuatro lecciones de las veinte que lo forman para la enseñanza de problemas de estructura multiplicativa. En tres de ellas trabaja la multiplicación como grupos iguales y en una como arreglo rectangular.

Bloque	Lección	Título de la lección	Páginas	Conceptualizaciones
I	2	El mercado	10 – 11	Isomorfismo de medidas Grupos iguales Modelo lineal
I	11	La huerta de Don Fermín	28-29	Isomorfismo de medidas Grupos iguales Modelo numérico
I	14	El vivero de Don Fermín	34-35	Producto de medidas Arreglo rectangular Modelo funcional Modelo cardinal
I	17	La camioneta de Don Fermín	40-41	Isomorfismo de medidas Grupos iguales Modelo numérico

En el bloque II se presenta una lección de multiplicación la cual aborda el contenido de arreglo rectangular

Bloque	Lección	Título de la lección	Páginas	Conceptualizaciones
II	7	Mosaicos de colores	60-61	Producto de medidas Arreglo rectangular Modelo cardinal

El bloque III incorpora diversos problemas donde en un primer momento se trabaja con algunas de las clasificaciones de la multiplicación expuestos por Green, Gerard Vergnaud y Castro como son grupos iguales e isomorfismo de medidas, producto de medidas, este último se trabaja con el cálculo de áreas, asimismo se trabaja con problemas de comparación multiplicativa.

Bloque	Lección	Título de la lección	Páginas	Conceptualizaciones
III	4	Jarabe para la tos	96-97	Isomorfismo de medidas Grupos iguales Modelo numérico
III	6	Medidas y Superficies	100-101	Producto de medidas Arreglo rectangular Modelo cardinal
III	8	Cajeros y clientes	104-105	Isomorfismo de medidas Grupos iguales Modelo numérico
III	11	Las golosinas	110-111	Isomorfismo de medidas Comparación multiplicativa Modelo de razón aritmética
III	14	Para medir el patio	116-117	Producto de medidas Arreglo rectangular Modelo cardinal
III	17	Hacemos recetas	122-123	Isomorfismo de medidas Grupos iguales Modelo numérico

En el bloque IV se da un acercamiento a la multiplicación y es él alumno quién debe de intuir la mejor manera de resolver los problemas; este es el caso de una de las actividades en la que se puede observar que el alumno puede utilizar el algoritmo de la multiplicación o bien puede valerse de otro tipo de estrategias ya sean icónicas para resolver los problemas planteados.

Bloque	Lección	Título de la lección	Páginas	Conceptualizaciones
IV	11	La maquina de escribir	148-149	Isomorfismo de medidas Modelo numérico

El bloque V esta integrado por dos actividades insertas en el marco de isomorfismo de medidas de acuerdo con Vergnaud; ó comparación multiplicativa

según Green. En la última actividad, se aborda el significado de producto de medidas a partir del modelo de arreglo rectangular. Asimismo, se dedica una lección para abordar el significado de Producto de Medidas o Producto cartesiano, en el que el alumno deberá resolver problemas sencillos de combinatoria.

Bloque	Lección	Título de la lección	Páginas	Conceptualizaciones
V	I	Algo sobre los animales	160-161	Isomorfismo de medidas Comparación multiplicativa Modelo funcional
V	5	Combinaciones	168-169	Producto de medidas Producto cartesiano Modelo cardinal
V	10	Alfombras de flores	178	Producto de medidas Arreglo rectangular Modelo cardinal

Como se puede advertir, en este grado se da mayor énfasis a la resolución de problemas que impliquen el uso de la multiplicación aunque es de señalarse que se deja de lado el trabajo relacionado con el algoritmo de la multiplicación pues el tipo de problemas que se plantean permite que el alumno desarrolle sus propias estrategias de solución, aunque no se descarta el manejo del algoritmo tal es el caso de la lección 14 “El vivero de Don Fermín”, donde la dificultad se ubica en el dominio de la técnica. En estos casos es el maestro quien debe apoyar ambos aspectos teniendo la precaución de trabajar el algoritmo de la multiplicación cuando estas ya tengan significado para los niños, es decir cuando las hayan identificado como instrumentos para resolver problemas.

El algoritmo de la multiplicación en el libro de texto del alumno.

De acuerdo con los planteamientos antes citados, y buscando alcanzar los objetivos propuestos respecto de la enseñanza del algoritmo de la multiplicación se observó que en el libro de texto del alumno se proponen al menos un conjunto de quince lecciones para abordar su enseñanza, de las cuales, solo cinco lecciones trabajan de forma directa el algoritmo de esta operación.

En las siguientes tablas se describen cada una de las actividades propuestas en el libro de texto del alumno, el bloque o unidad a la que pertenecen, el nombre y

título de las lecciones, así como la aplicación que se da a la multiplicación (resolución de problemas o algoritmo de la multiplicación)

En el primer bloque se trabajan seis lecciones para abordar el tema, en cada lección se pretende que el alumno resuelva problemas de estructura multiplicativa valiéndose de diversas estrategias, por ejemplo el alumno puede utilizar como recurso la suma reiterada, aunque, también puede recurrir al algoritmo.

Cabe destacar que, solo en tres actividades el alumno debe valerse de forma directa del algoritmo en el que para su solución se pide al alumno respete el valor posicional de cada número, asimismo, se pide al alumno realice algunas multiplicaciones.

Bloque	Lección	Título de la lección	Páginas	Aplicación
I	2	El mercado	10 – 11	Resolución de problemas que impliquen el manejo del algoritmo convencional de la multiplicación. Solución de hechos multiplicativos básicos (tabla del 3, 4, 5 y 7 de multiplicar).
I	9	Un montón de lentejas	24	Resolución de problemas que implique el uso del algoritmo convencional de la multiplicación
I	11	La huerta de Don Fermín	28-29	Resolución de problemas, que impliquen el uso del algoritmo convencional de la multiplicación.
I	14	El vivero de Don Fermín	34-35	Uso del algoritmo convencional de la multiplicación hasta con dos cifras en el lugar del multiplicador.
I	17	La camioneta de Don Fermín	40-41	Uso del algoritmo convencional de la multiplicación para la resolución de problemas.
I	18	Hilaza para el contorno	42	Resolución de problemas que impliquen el uso del algoritmo convencional de la multiplicación

En el bloque II se proponen dos actividades, de las cuales una de ellas se ocupa de manejar de forma directa el algoritmo de la multiplicación con tres cifras

en el multiplicando por dos cifras en el multiplicador. También se presenta una actividad donde el alumno debe obtener el área de algunas figuras.

Bloque	Lección	Título de la lección	Página	Aplicación
II	7	Mosaicos de colores	60-61	Uso de algoritmo convencional de la multiplicación
II	13	Cuadritos y contornos	72	Resolución de problemas de perímetro y área.

En el bloque III solo se dedica una lección para trabajar el algoritmo.

Bloque	Lección	Título de la lección	Página	Aplicación
III	4	Jarabe Para la tos	96-97	Resolución de problemas que impliquen el uso del algoritmo convencional de la multiplicación
III	6	Medidas y superficies	100-101	Resolución de problemas de perímetro y área.
III	8	Cajeros y clientes	104-105	Uso del algoritmo convencional de la multiplicación
III	11	Las golosinas	110-111	Resolución de problemas que impliquen el uso del algoritmo convencional de la multiplicación
III	14	Para medir el patio	116-117	Resolución de problemas que impliquen el uso del algoritmo convencional de la multiplicación
III	17	Hacemos recetas	122-123	Resolución de problemas que impliquen el uso del algoritmo convencional de la multiplicación

En el bloque IV se trabaja un problema donde interviene el algoritmo de la multiplicación, aunque es el alumno quien debe determinar la mejor forma de resolver el problema ya que puede valerse de otro tipo de estrategias como son: representaciones icónicas, o uso del algoritmo de la suma .

Bloque	Lección	Título de la lección	Página	Aplicación
IV	11	La maquina de escribir	148-149	Resolución de problemas que implique el uso del algoritmo de la multiplicación

En el bloque V, solo se trabajan tres lecciones en las que se puede recurrir al uso del algoritmo, este es el caso de la primera y quinta lección. También, se

propone una actividad que consiste en calcular el área de algunos objetos, esto con el fin de trabajar contenidos entre los que se destaca la medición en m^2 , así como reafirmar la enseñanza-aprendizaje del algoritmo de la multiplicación.

Bloque	Lección	Título de la lección	Páginas	Aplicación
V	1	Algo sobre los animales	160-161	Resolución de problemas que impliquen el uso del algoritmo convencional de la multiplicación
V	5	Combinaciones	168-169	Resolución de problemas que impliquen el uso del algoritmo convencional de la multiplicación
V	10	Alfombras de flores	178	Resolución de problemas de área.

De acuerdo a lo anterior, se observa que para llegar al procedimiento usual del algoritmo de la multiplicación se busca que el alumno resuelva primero diversos problemas mediante sus propios recursos; estos implican la búsqueda creativa de variados caminos, ensayos y errores.

También, es importante señalar que su enseñanza suele girar en un segundo momento en la descomposición de números según el valor posicional que este juega, es decir que los alumnos separan los números que se encuentran en el lugar del multiplicador para posteriormente hacer la suma de ambos productos ello con el fin de que el alumno tenga presente algunos de los pasos que sigue al operar el algoritmo convencional de la multiplicación.

En términos generales, éstos son los materiales con que cuentan los maestros y alumnos para desempeñar el proceso de enseñanza aprendizaje en el área de matemáticas.

Aunque habría que señalar, que estos materiales no son los únicos, pues todo maestro comprometido con su labor docente debe orientarse en aquellos materiales bibliográficos, cursos, etc., que hoy en día se producen en el ámbito de la Educación Matemática y que aporten un mayor aprovechamiento de los

recursos que se disponen, o en su caso la introducción de otros materiales para desempeñar con mayor éxito el trabajo educativo.

CAPITULO III

3. METODOLOGÍA

La finalidad de este capítulo es describir el diseño del estudio, los instrumentos, el tamaño de la muestra observada y sus características, así como el procedimiento utilizado para la recolección de los datos.

Asimismo, se hace una descripción de los instrumentos y el tipo de variables controladas al respecto. También, se explican los procesos de aplicación de cada instrumento (conceptual, procedimental) y la forma en como serán codificadas y organizadas las respuestas de los alumnos

3.1 SUJETOS

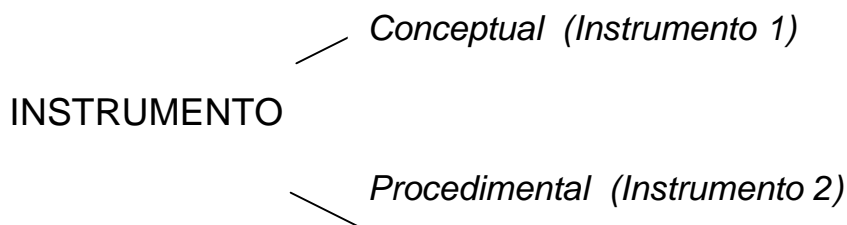
De acuerdo con el plan y programa de estudios y por el tipo de contenidos que se abordan en el cuarto grado de educación primaria, se determinó que los niños seleccionados debían corresponder a este grado escolar, ya que ello permitiría obtener información relevante tanto del índice de dificultad y de los errores que cometen los estudiantes cuando resuelven problemas verbales de estructura multiplicativa, como del algoritmo convencional de la multiplicación.

Por las facilidades otorgadas por parte de Director de la Institución, la aplicación del instrumento se llevó a cabo en la Escuela Primaria Heroica Veracruz ubicada en el norte de la ciudad de México (Delegación Gustavo A. Madero) en una zona socioeconómica media baja.²⁶

El tamaño de la muestra escolar sometida a la prueba fue de 81 alumnos los cuales corresponden a tres grupos de cuarto grado pertenecientes a la misma institución escolar. El tamaño de la muestra de cada grupo fue de 27 alumnos.

3.2 INSTRUMENTOS

En correspondencia con el marco teórico expuesto, en el estudio se contemplaron dos instrumentos.



Respecto del primer instrumento (**conceptual**), este contempla la resolución de problemas verbales (“simples”) de estructura multiplicativa de acuerdo con la clasificación establecida por Vergnaud (1998) “isomorfismo de medidas y producto de medidas” y la clasificación de Green (1992) “grupos iguales, comparación multiplicativa, producto cartesiano y arreglo rectangular” con el propósito de analizar la naturaleza de las dificultades que enfrentan los alumnos al abordar los distintos significados de estructura multiplicativa, así como para rescatar en cada caso la forma en que los niños resuelven los problemas multiplicativos.

El segundo bloque consta de una parte **procedimental** el cual se centra en la ejecución del algoritmo convencional de la multiplicación (a lápiz y papel), con el

²⁶Escuela Primaria. HEROICA VERACRUZ. Unidad el Coyol, Calle 298 A. Delegación Gustavo A Madero.

fin de detectar la naturaleza de los errores que se producen en este tipo de aprendizaje.

Para la elaboración de cada instrumento se tomó como marco de referencia a los autores Gérard Vergnaud (1998), Green (1992), Leo Bruckner (1980), James E. Inskeep(1985)²⁷, así como el apoyo del libro de texto del alumno. Para asegurar la validez y confiabilidad se hizo una aplicación piloto del instrumento para analizar si las instrucciones se comprendían, si su presentación era la adecuada, y si se podía valorar la información que interesaba, asimismo se pidió la opinión de cuatro maestros especialistas en Educación Matemática.

A continuación se describen detalladamente cada uno de los instrumentos.

Instrumento Conceptual

Para llegar a determinar las dificultades que presentan los alumnos cuando resuelven problemas simples de estructura multiplicativa se elaboró un instrumento el cual hace énfasis en el siguiente aspecto:

Identificar un conjunto de problemas verbales de estructura multiplicativa correspondientes a las categorías que contemplan Gerard Vergnaud y Green.

Cabe señalar que aunque las clasificaciones de ambos autores difieren en terminología, ambas poseen características básicas comunes como se verá en páginas siguientes.

El instrumento esta compuesto por un conjunto de diez problemas verbales “simples”, dos de ellos corresponden a problemas que para su resolución se requiere que el niño realice una operación directa de sustracción (1 y 6); solo un problema corresponde a una adición. Estos problemas corresponden a la clasificación de Carpenter y Moser

Se incluyen problemas de este tipo con el fin de no inducir al alumno a la resolución de los problemas que solo se resuelven mediante la operación de multiplicación.

Siete problemas (2, 3, 5, 7, 8, 9, 10) corresponden a problemas de estructura multiplicativa en los cuales se tomaron en cuenta las clasificaciones de Vergnaud, y Green. Las categorías consideradas son: *Isomorfismo de medidas, producto de medidas, grupos iguales, comparación multiplicativa, arreglo rectangular y producto cartesiano.*

A continuación se hacen explícitas cada una de las categorías contempladas en la prueba, los tipos de problemas seleccionados, así como el tipo de variables controladas.

Las categorías de los problemas de estructura multiplicativa contempladas en el instrumento fueron:

Problema de 'Isomorfismo de Medidas' de Vergnaud ó 'Grupos iguales' de Green (problemas 2 y 3.)

Comparación multiplicativa' descrita por Green (problemas 5 y 7.)

Producto de Medidas' de Vergnaud ó 'Producto cartesiano' de Green (problema 10)

Producto de medidas' de Vergnaud ó 'Arreglo rectangular' de Green (problemas 8 y 9)

Cuadro 1

CLASES DE PROBLEMAS.

²⁷ BAZAN, A y E. Mancera (compiladores) Antología Seminario de Educación Matemática U.P.N México, 1985.

<p>1. En una fiesta de cumpleaños Juanita tenía cuarenta y siete bolsas de dulces le dio quince bolsas de dulces a Carmen. ¿Cuántas bolsas tiene Juanita?</p>	<p>6.-Luis tiene dieciséis balones. Raúl tiene nueve balones; ¿Cuántos balones más tiene Luis que Raúl?</p>
<p>2. Susana fue a la nevería y compró catorce helados a seis pesos cada uno. ¿Cuánto dinero pagó por todos los helados?</p>	<p>7- Ana tiene treinta y cuatro fichas de colores. María tiene el doble de fichas de colores que tiene Ana. ¿Cuántas fichas de colores en total tiene María?</p>
<p>3.-¿Cuánto dinero pagó Miguel por todos sus coches, si compró seis coches a catorce pesos cada uno?</p>	<p>8-En el salón cinco, hay catorce filas de butacas. En cada fila hay doce butacas. ¿Cuántas butacas tiene el salón?</p>

<p>4.- Oscar tiene doce gorras; Pepito tiene dieciséis gorras más que Oscar. ¿Cuántas gorras tiene Pepito?</p>	<p>9.- Pedro tiene doce filas de soldados. En cada fila hay catorce soldados. ¿Cuántos soldados en total tiene Pedro?</p>
<p>5.-Daniel tiene treinta y cuatro canicas. María tiene dos veces más canicas ¿Cuántas canicas tiene María?</p>	<p>10.-Rocío fue de compras al supermercado y le compró cuatro blusas y tres faldas a su hija Natalia.</p> <p>Blusas = (azul, rosa, blanca, verde)</p> <p>Faldas = (azul, roja, marrón)</p> <p>¿De cuántas formas distintas puede vestirse Natalia usando esas blusas y faldas?</p>

VARIABLES CONTROLADAS.

En la redacción de los problemas se controlaron las siguientes variables:

Variables de Formato

Variables de Contenido.

Variables de Sintaxis

Respecto de las opciones de formato posibles en las que se puede plantear un problema se utilizó exclusivamente el formato verbal para el conjunto de los diez problemas.

Cabe señalar que los problemas planteados son problemas simples, puesto que para su resolución se requiere que el alumno utilice exclusivamente una operación.

*“Las variables de **contenido** se refieren al significado matemático de los problemas las cuales dan cuenta del significado del texto”.*²⁸

El tipo de variables controladas al respecto fue:

- tipo de números
- tipo de magnitudes
- tamaño de los números.

Los números empleados en cada uno de los problemas fueron solo números naturales, las magnitudes de tipo discreto. En cuanto al tamaño de los números, cabe mencionar que cualquier dato en cada problema no sobrepasa la centena.

Respecto de la terna de números (multiplicando, multiplicador y producto) se evitó que los números empleados fueran menores a la decena ya que serían números excesivamente fáciles de manejar para los niños sometidos al estudio, así, si el niño sumaba la otra cantidad consigo misma no se estaría seguro de que lo que ha dado es una solución basada en una adición, en cuyo caso podría no haber comprendido el problema, o una solución basada en adiciones repetidas, en cuyo caso sí hay comprensión del problema.

Respecto del problema # 10 de producto cartesiano, se consideró que la terna de números estuviera conformada por números pequeños para favorecer la solución no basada en la aplicación directa de la operación de multiplicar de tal forma que permita observar si el niño comprende este tipo de problema de estructura multiplicativa.

Otra limitante en el diseño de la prueba fue que no hubiera dos números iguales, por ejemplo $12 \times 12 = 144$. Esta limitante se impone porque para describir e interpretar adecuadamente las respuestas de los niños en caso de error es

²⁸ PUIG, L y Cerdan F. Problemas aritméticos escolares. Editorial Síntesis. 1995. p.33

fundamental establecer la diferencia numérica entre multiplicando y multiplicador, además de que ello permitiría observar si el niño tiene claro el rol que juega cada uno de ellos.

En el cuadro 2 se reflejan los valores asignados a estas variables en los 10 problemas contemplados.

Cuadro 2

Problema	Terna de Números	Personaje	Referencia
1	(47, 15, 32)	Juanita- Carmen	bolsas de dulces
2	(14,6,84)	Susana	helados
3	(6,14,84)	Miguel	coches
4	(16,12,28)	Oscar - Pepito	gorras
5	(34,2,68)	Daniel- María	canicas
6	(16,9,7)	Luís-Raúl	balones
7	(34,2,68)	Ana-María	fichas de colores
8	(14,12,168)	Salón cinco	filas - butacas
9	(12,14,168)	Pepito	filas - soldados
10	(4,3,12)	Rocío	blusas-faldas

Respecto de la “variable **sintáctica** se entienden aquellas características del problema que tienen que ver con el orden y las relaciones de las palabras y símbolos que contiene el enunciado del problema”.²⁹

Las variables controladas al respecto fueron:

- tamaño del problema
- forma de disponer las oraciones
- tiempo de los verbos
- presentación de los datos
- situación de la pregunta
- inclusión de distractores

- presencia de palabras clave

El tamaño de cada problema ha sido lo más corto posible evitando con ello que la complejidad sintáctica pueda influir en el índice de dificultad de los problemas. Las oraciones que conforman el problema están remarcadas mediante signos de puntuación de tal forma que permita la lectura adecuada de cada uno de ellos. El tiempo de los verbos empleados en los problemas son el presente y el pasado. La presentación de los datos en cada uno de los problemas ha sido expresada exclusivamente mediante palabras.

Respecto a la situación de la pregunta, se puede observar que en cada uno de los problemas la pregunta se encuentra aislada y al final del texto, excepto del problema número tres donde la situación de la pregunta se presenta dentro del texto del problema en el cual se entremezcla la pregunta y la información. (véase cuadro 1)

La inclusión de palabras clave y distractores también fue controlada. En la redacción de los problemas se procuró no incluir datos adicionales con el fin de observar el nivel de comprensión que muestran los escolares cuando resuelven cada una de las clases de problemas de estructura multiplicativa.

En la prueba sólo se presentó un dato adicional en el texto de un problema, el cual es irrelevante en la solución de este. (Véase problema 8)

En cuanto a la inclusión de palabras clave puede observarse que solamente el problema número siete presentó un significado preciso en el contexto matemático, en este caso el verbo doble característico de los problemas de comparación multiplicativa. (véase cuadro 1)

²⁹ Idem p 33.

Instrumento Procedimental

Respecto al segundo instrumento (aspecto procedimental) el ítem fueron seleccionados en función de los elaborados por Leo J. Brueckner³⁰ (1980), y James Inskeep.³¹

Para elaborar este instrumento se tomaron en cuenta los siguientes aspectos:

- ✓ Se seleccionaron los tipos de reactivos que serían evaluados.
- ✓ Se establecieron siete categorías para el análisis del algoritmo de la multiplicación.
- ✓ Se plantearon por lo menos tres ejercicios de cada categoría para detectar los patrones de error.

En el siguiente cuadro, se muestran las categorías contempladas.

(Algoritmo convencional de la multiplicación)	
Categorías	
A	Multiplicaciones sin reagrupamiento
B	Multiplicaciones con reagrupamiento en las decenas.
C	Multiplicaciones con lugares de reagrupamiento de las unidades a las decenas y de las decenas a las centenas
D	Multiplicaciones con un cero en el lugar de las decenas con reagrupamiento de las unidades a las decenas
E	Multiplicaciones con un factor de tres dígitos y otro factor con dos dígitos

³⁰ BRUCKNER, Leo. Diagnóstico y tratamiento de las dificultades de aprendizaje. 1980.

³¹ BAZAN, A y E. Mancera (Compiladores) Antología Seminario de Educación Matemática. Especialización en Educación Matemática. U.P.N. México, 1985.

(múltiplos de diez), con reagrupamiento en el segundo producto parcial.

F Multiplicaciones con un factor de tres dígitos y otro factor con dos dígitos, con reagrupamiento en el segundo producto parcial solamente.

G Multiplicaciones con un factor de tres dígitos por otro de tres dígitos sin reagrupamiento (ejercicio 1), y reagrupamiento en el segundo producto parcial de las unidades a las decenas y de las decenas a las centenas (Ej. 2), reagrupamiento en el segundo y tercer producto parcial de las unidades a las decenas y de las decenas a las centenas.

Se procuró seleccionar reactivos que facilitaran el análisis de los patrones de error. Asimismo, se tomó en cuenta aplicar una serie de tres ejercicios de cada categoría como mínimo con el fin de detectar con más claridad lo que causa dificultad a los alumnos, así como incrementar la validez del análisis, ya que usar menos de tres ejercicios puede no ser efectivo pues el patrón de error puede ocultarse por dificultades debidas a hechos básicos particulares (errores con las tablas de multiplicar.)

En el cuadro siguiente, se observan los hechos básicos controlados al respecto.

Segundo factor

HECHOS BÁSICOS									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Primer factor	0	***	**	*	*		*	*	
	1	*	***	*	****		****		
	2	*	***	**	***		**		
	3	**	*	**					
	4	*	***	***	*		*	**	**
	5	*	***	****	*			*****	
	6	*	***	*	****	*****			
	7			***		***		***	
	8		**	**					**
	9								

En este cuadro se muestran los tipos de números seleccionados tanto en el multiplicando (segundo factor) como en el multiplicador (primer factor). Asimismo, puede observarse, que en el instrumento se contemplan los números 7 y 9 con el objetivo de detectar si estos números son un factor que influye en el tipo de respuestas dadas por los alumnos a la hora de resolver el algoritmo convencional de la multiplicación, dado que, algunos autores han señalado que a los alumnos se les dificulta el manejo de las tablas de multiplicar de estos números.³²

A continuación se presenta cada categoría considerada en la prueba, y el tipo de reactivos seleccionados.

Cuadro 5

ALGORITMO DE LA MULTIPLICACIÓN			
$\begin{array}{r} 23 \\ \times 2 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 31 \\ \times 3 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 213 \\ \times 3 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 212 \\ \times 4 \\ \hline \end{array}$
Clasificación: Tipo A. Multiplicaciones sin reagrupamiento.			
$\begin{array}{r} 26 \\ \times 5 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 34 \\ \times 6 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 38 \\ \times 4 \\ \hline \end{array}$	
Clasificación: B. Multiplicaciones con reagrupamiento de las unidades a las decenas.			
$\begin{array}{r} 126 \\ \times 5 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 124 \\ \times 6 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 157 \\ \times 4 \\ \hline \end{array}$	
Clasificación: C. Multiplicaciones con lugares de reagrupamiento de las unidades a las decenas y de las decenas a las centenas.			
$\begin{array}{r} 206 \\ \times 5 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 304 \\ \times 6 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 803 \\ \times 4 \\ \hline \end{array}$	
Clasificación: D. Multiplicaciones con un cero en el lugar de las decenas con reagrupamiento de las unidades a las decenas.			
$\begin{array}{r} 126 \\ \times 50 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 134 \\ \times 60 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 172 \\ \times 90 \\ \hline \end{array}$	
Clasificación: E. Multiplicaciones con un factor de tres dígitos y otro factor con dos dígitos (múltiplos de diez), con reagrupamiento en el segundo producto parcial.			
$\begin{array}{r} 136 \\ \times 51 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 134 \\ \times 62 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 712 \\ \times 94 \\ \hline \end{array}$	
Clasificación: F. Multiplicaciones con un factor de tres dígitos y uno con dos, con reagrupamiento en el segundo producto parcial solamente.			
$\begin{array}{r} 624 \\ \times 172 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 642 \\ \times 172 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 264 \\ \times 171 \\ \hline \end{array}$	

³² BAZAN, A y E. Mancera (Compiladores) *Antología Seminario de Educación Matemática*. U.P.N. México 1985.

Clasificación: **G**. Multiplicaciones con un factor de tres dígitos por otro de tres dígitos Sin reagrupamiento (ejercicio 1) con reagrupamiento en el segundo producto parcial de las unidades a las decenas y de las decenas a las centenas (ej. 2), reagrupamiento en el segundo y tercer producto parcial de las unidades a las decenas y de las decenas a las centenas.

3.3 PROCEDIMIENTOS DE APLICACIÓN

Los dos instrumentos (conceptual, procedimental) fueron distribuidos a los tres grupos a la vez en cada una de sus aulas. Los instrumentos fueron aplicados de manera colectiva en dos sesiones de trabajo diferentes. En la primera sesión se aplicó el instrumento de tipo conceptual, una semana después el instrumento procedimental.

Los niños se sentaron en sus butacas habituales y, para evitar que copiaran la respuesta de algún compañero, cada uno de los salones fue supervisado por una persona externa al plantel, así como por su maestro de clase.

El tiempo empleado por los niños para resolver cada una de las pruebas (resolución de problemas de estructura multiplicativa, y, ejecución del algoritmo de la multiplicación) osciló entre los 15 y 50 minutos aproximadamente.

Antes de repartir el instrumento, el aplicador leyó a cada grupo una hoja de instrucciones para la realización de la prueba. (Véase cuadro adjunto. Concluida la lectura se le preguntó al grupo si necesitaban alguna aclaración. Se señaló que en caso de que tuviesen alguna duda respecto del instrumento podrían acudir única y exclusivamente con el aplicador. Se instó a los niños a que escribieran todas las operaciones necesarias para resolver cada uno de los problemas planteados.

A continuación se presentan las instrucciones dadas a los alumnos para la realización de la prueba.

INSTRUCCIONES

- 1.- Escribir en la primera hoja todos los datos que se piden (nombre completo, grado, grupo, edad)
- 2.- De preferencia resolver los problemas según el orden señalado
- 3.- Escribir todas las operaciones necesarias para resolver cada problema en el espacio en blanco que hay entre cada uno de los problemas, y en caso necesario emplear el reverso de la hoja.
- 4.- Escribir la solución en el espacio que se encuentra asignado en la hoja.
- 5.- No borrar ningún procedimiento u operaciones realizadas.
- 6.- También se aclaró que los ejercicios no serian tomados en cuenta para su calificación.

El aplicador instó a los niños para que respondieran según lo que ellos pensaban que era la solución sin fijarse en las respuestas dadas por sus compañeros.

Cabe destacar que en la resolución de los problemas los niños podían valerse tanto de algoritmos convencionales o de representaciones no convencionales (palitos, puntillos, dibujos) por lo que el instrumento contó con los espacios suficientes de tal forma que pudiera observarse el tipo de estrategias utilizadas por los alumnos.

Una vez resueltas las dudas sobre las instrucciones a seguir los niños procedieron a contestar la prueba.

En el caso del instrumento de tipo procedimental las instrucciones fueron las mismas excepto del punto cinco.

La aplicación de los instrumentos se llevó a cabo a principios del mes de marzo del año 2003, y sin previo aviso se les aplicó el primer instrumento (conceptual) a los tres grupos.

Cabe señalar que el instrumento fue aplicado cuando ya se habían cubierto los temas. Además de que las profesoras responsables de cada grupo desconocían el contenido de las pruebas.

3.4 CODIFICACIÓN DE LAS RESPUESTAS.

Para la codificación de las respuestas se elaboraron formatos distintos para cada uno de los instrumentos (conceptual, procedimental) los cuales se exponen a continuación.

Instrumento Conceptual

En la codificación del instrumento conceptual se realizó un análisis en función del siguiente aspecto: aciertos-errores de los niños cuando hacen explícita una forma de operar de acuerdo con los datos presentados en el problema. Con ello se pretende dilucidar si los distintos significados que se presentan en los problemas verbales de estructura multiplicativa tienen igual índice de dificultad para los niños.

Las respuestas de los niños fueron clasificadas en:

Respuesta correcta

Respuesta incorrecta.

No-respuesta

Las respuestas escritas dadas por los niños a los problemas fueron consideradas correctas o incorrectas. Si un niño no ha dado respuesta a un problema se ha catalogado como no respuesta. Las respuestas fueron consideradas correctas con relación a la comprensión del problema, si el niño emplea una operación aritmética que lo conduzca al resultado. La conducta que se ha tomado para medir la comprensión que tienen los alumnos al dar sus respuestas en la fase de resolución de problemas se basó en el proceso que sigue el niño para la solución del problema. Si el proceso es correcto se considera que ha habido comprensión del problema.

No se tienen en cuenta los fallos de cálculo, porque se considera que no forman parte sustancial de la fase de comprensión del problema.

Cabe destacar que las respuestas dadas por los niños, y puesto que la investigación se refiere a las dificultades que presentan los niños cuando resuelven problemas de estructura multiplicativa, la decisión de si una respuesta es correcta o no se ha basado en si el proceso seguido por el niño lo conduce a la obtención del resultado. Se han considerado también como respuestas correctas cuando el niño ha empleado estrategias distintas o procedimientos no convencionales que lo conduzcan a la solución siempre y cuando el resultado obtenido sea correcto.

Posteriormente, en una segunda etapa se analizaron y clasificaron los diferentes tipos de error que cometieron los alumnos cuando resolvieron los problemas de estructura multiplicativa sometidos a este estudio.

Respecto a la tipología de errores considerada en esta investigación se tomaron en cuenta criterios ya establecidos en clasificaciones previas mismas que se encuentran en la literatura consultada. A saber³³:

³³ CASTRO, M Enrique. Niveles de comprensión de problemas verbales de comparación multiplicativa. 1995. p 168

Error: Cambio de estructura

Error: Traducción.

Error: Emplear otra operación

Asimismo, del análisis de las respuestas proporcionada por los niños se desprendieron otras categorías que no habían sido contempladas en las categorías de Enrique Castro como son:

Error Articulación

Tomar datos equivocados

Tomar datos parciales

Realizar combinaciones parciales

Interpretación de la pregunta

Tomar datos que no se derivan del problema

Error "cambio de estructura" Significa que el alumno traduce el problema como si fuera de estructura aditiva (problemas de comparación multiplicativa) Por ejemplo en el problema: Ana tenía 4 paletas de caramelo. Miriam tenía 3 veces más paletas de caramelo que Ana. ¿Cuántas paletas de caramelo tenía Miriam? . En este caso se presenta el error en el momento en que el alumno propone como solución al problema la siguiente operación $4+3$ ó bien $4-3$.

Respecto al error "traducción" Significa que el alumno interpreta inadecuadamente el texto. Por ejemplo en el problema 4 si el alumno reitera dieciseis veces 12, es producto de la inadecuada interpretación de la expresión "más que."

Respecto a "emplear una operación inadecuada" Se considera errónea la respuesta cuando el niño emplea operaciones que no le permitieron arribar a la solución, como son: uso de la resta o división u otros procedimientos como el uso de diagramas de árbol, o representaciones icónicas.

Error de “articulación”; Se considera que el alumno comete error en el momento que integra datos que son irrelevantes para la resolución de problema.

Error “tomar condiciones parciales” Se considera que el alumno comete este error cuando da por respuesta alguno de los datos que se encuentran en el enunciado del problema.

Error “combinación parcial,” Se refiere a que el alumno realiza combinaciones parciales de los elementos puestos en juego (blusas y faldas)

Error “interpretación de la pregunta”, Significa que el alumno interpreta de manera equivocada lo que pide el problema.

“No se desprende del proceso” Se refiere a que la solución no se desprende del procedimiento seguido por el alumno.

De acuerdo a lo anterior, con la aplicación del instrumento se pretende estudiar los patrones de error, y las dificultades a las que se enfrentaron los niños de cuarto grado cuando se les presentaron problemas de estructura multiplicativa.

Instrumento procedimental

Respecto a la codificación del instrumento procedimental se realizó un análisis cualitativo en función del siguiente aspecto: errores de los niños cuando resuelven el algoritmo de la multiplicación.

Con ello se pretende dilucidar el tipo de dificultades y los errores que cometen los niños cuando resuelven el algoritmo convencional de la multiplicación.

Para ello, en la primera fase se estableció una tipología de los errores más frecuentes que presentan los alumnos cuando resuelven el algoritmo convencional de la multiplicación, mismas que se encuentran en la literatura consultada a saber³⁴

Errores mas frecuentes en la multiplicación de números enteros positivos

J. BRUECKNER

Error “Combinación”.

Hechos básicos

Errores en la combinación con un cero en el multiplicador.

Error “Llevar”

Errores al agregar el número que se lleva

Llevar un número erróneamente

Olvidarse de llevar

Contar al agregar el número que se lleva

Multiplicar el número que se lleva

Sumar el número que se lleva

Agregar el número cuando no se lleva

³⁴ Op Cit. BRUECKNER L. p 284

Error “Procedimientos defectuosos”

Escribir una fila de ceros cuando hay uno en el multiplicador

Usar el multiplicando como multiplicador

Errores debido al cero en el multiplicador

Omitir alguna cifra en el multiplicador

Omitir alguna cifra en el multiplicando

Errores debidos al cero en el multiplicando

Errores en la colocación de los productos parciales

No multiplicar una cifra del multiplicando

Olvidarse de sumar los productos

Dividir el multiplicador en dos o más números

Usar el multiplicador o multiplicando como producto

Repetir una cifra en el producto

Empezar por la izquierda

Multiplicar los productos parciales

Lapsus y otros.

Equivocar el proceso

Derivar combinaciones desconocidas de otras conocidas

Errores de lectura

Errores al escribir los productos

Multiplicar dos veces la misma cifra

Invertir las cifras en los productos

Errores de suma

Números ilegibles

La última fase, consistió en analizar y clasificar las respuestas de los niños con base en las categorías ya expuestas.

Al respecto, cabe marcar que un criterio utilizado para determinar cuándo un error era producto del descuido o debido al bajo dominio de los hechos básicos (dificultades con las tablas de multiplicar), era observar si el patrón de error se presentaba por lo menos, en tres ejercicios distintos.

Pues como señala Inskip “cuando dos ejercicios son contestados incorrectamente hay más información del proceso; la posibilidad de reconocer un patrón de error, si este existe es mayor. Así, si un niño comete errores en dos de tres ejercicios quiere decir que el niño no conoce como hacer ese tipo particular de operación”.³⁵

Asimismo, es importante señalar que las respuestas correctas también fueron analizadas, ya que una respuesta correcta no daba la seguridad absoluta de que el niño hubiese comprendido el proceso seguido en la resolución del algoritmo.

Por ejemplo, podrían presentarse casos en que el niño muestre patrones que lo lleven a obtener respuestas correctas al resolver el algoritmo, y en otros casos no, como puede advertirse en el siguiente ejemplo.³⁶

23	17	27	35
<u>x 4</u>	<u>x 5</u>	<u>x 3</u>	<u>x 2</u>
92	85	72	61

³⁵ BAZAN, A y E. Mancera (Compiladores) Antología Seminario de Educación Matemática. Especialización en Educación Matemática. U.P.N. México, 1985. p12

³⁶ Ídem p.15

En este caso puede observarse que en los primeros ejercicios, el niño llega a obtener respuestas correctas, no así en los dos últimos ejercicios.

Al respecto, se puede señalar que el extraño patrón que el niño usó, al ejecutar la multiplicación 27×3 es multiplicar 7 veces 3 es 21, y de modo que 1 es más pequeño que 2, entonces el número que llevo es 1.

Siguiendo este patrón, el niño llegará a obtener respuestas correctas para cierta clase de ejercicios, sin que ello signifique que el niño ha comprendido el proceso.

CAPITULO IV

4. ORGANIZACIÓN Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Una vez que fueron concentrados los datos, que se obtuvieron del análisis de las respuestas de los niños en cada uno de los instrumentos (resolución de problemas y algoritmo de la multiplicación) se organizó y analizó la información.

El análisis de los resultados considera vertientes complementarias:

i) Análisis cuantitativo, en el que se destacan aspectos comunes que dieron elementos para hacer generalizaciones respecto al tipo de dificultades y errores que se presentan en el aprendizaje de la multiplicación

ii) Análisis cualitativo, en el que destacan procesos más minuciosos e individuales que igualmente contribuyen a conocer y comprender los procesos y dificultades que se presentan en la resolución de problemas verbales de estructura multiplicativa, así como del algoritmo convencional de la multiplicación.

4.1 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA

Como primer punto señalo que en este apartado se utilizó como técnica el análisis de las respuestas escritas producidas por los niños, el tipo de operación o procedimientos que emplean y que supongo son producto directo de la comprensión del problema.

Las respuestas dadas por los niños a los 7 problemas verbales simples de estructura multiplicativa fueron clasificadas en correctas e incorrectas.

Una respuesta fue considerada correcta desde el punto de vista de la comprensión del problema si el niño empleaba una operación o procedimiento pertinente a la resolución del mismo.

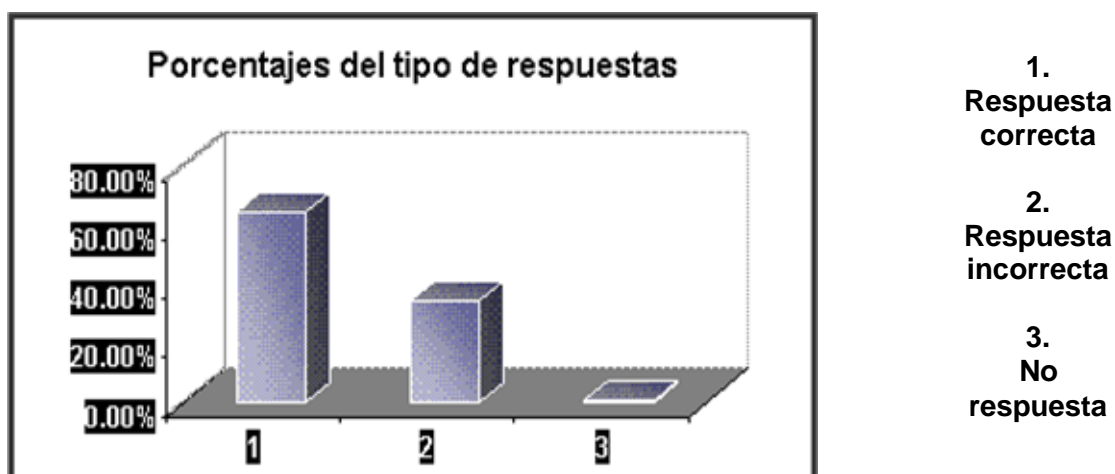
Para mantener este criterio no se consideraron aquellos procesos o errores cometidos por los niños, que no se atribuyen a la falta de comprensión al problema. Entre ellos tenemos:

- a) Estrategias de resolución adoptadas siempre que condujeran a la solución acertada. Así una respuesta que requiera de una multiplicación ha sido considerada correcta, si el niño realizaba sumas reiteradas y obtenía como solución la misma cantidad que daría si lo hubiera hecho al operar con una multiplicación.
- b) Errores que corresponden a la fase de ejecución del algoritmo, es decir errores de cálculo.
- c) La forma lingüística de expresar el resultado, siempre que ésta fuera una expresión equivalente a la esperada.
- d) Errores que se derivan de la inadecuada traducción de los números (expresados en la prueba verbalmente) de datos numéricos.

De las 588 respuestas proporcionadas por los niños a los 7 problemas propuestos, el número de respuestas correctas fue de 382 equivalente al 65%. El número de respuestas incorrectas fue de 203 equivalente al 34.5%, el .5% no contestó.

Con una muestra de 84 niños y 7 problemas verbales, el máximo de respuestas posibles es de 588. Solo en 3 de las 588 respuestas no se encontró rastro de algún intento de solución.

Gráfica 1



En el siguiente cuadro se muestra la tipología de errores encontrados en la resolución de problemas de estructura multiplicativa.

Tipología de Errores
E1.- Emplear otra operación
E2.- Tomar datos que no se desprenden del problema
E3.- Cambio de estructura
E4.- Traducción
E5.- Articulación
E6.- Tomar datos equivocados
E7.- Tomar datos parciales
E8.- Combinación parcial
E9.- Interpretación de la pregunta
E10.- No se desprende del proceso

En cada problema la mayoría de los procesos de solución erróneos se redujeron a sólo algunos tipos de error expuestos en el cuadro anterior.

Para dar idea de cuál es el tipo de proceso erróneo que con mayor frecuencia se comete en cada clase de problema, en las siguientes tablas se presentan los tipos de errores detectados en cada uno de los problemas formulados.

Tabla 1

Tipología de errores en problemas verbales de estructura multiplicativa				
Problema	Clasificación	Tipos de error	Total de errores	Porcentaje
2	Grupos iguales	E1=7 E2=5 E10=3	E1=17 E2= 7 E10=5	14.4%
3	Grupos iguales	E1=10 E2=2 E10=2		
5	Comparación multiplicativa	E1=1 E2=2 E3=9 E4=10 E9=1 E10=4	E1=3 E2=2 E3=16 E4=10 E7=1 E9=1 E10=8	19.4%
7	Comparación multiplicativa	E3=7 E7=1 E10=4		

Continuación

Problema	Clasificación	Tipos de error	Total de errores	Porcentaje
8	Arreglo rectangular	E1=1 E6=9 E2=1 E7=1 E5=4 E10=2	E1=36 E6=9 E2=3 E7=2 E5=4 E9=1	31.9%
9	Arreglo rectangular	E1=20 E10=7 E2=2 E9=1 E7=1 E10=7	E10=9	
10	Producto Cartesiano	E1=20 E8=30 E2=1 E9=9 E7=6 E10=3	E1=20 E8=30 E2=1 E9=9 E7=6 E10=3	34.3%
Total¹			203 errores	

¹ E1.Emplear otra operación E2-Tomar datos que no se desprenden del problema E3-Cambio de estructura E4.-Traducción E5.Articulación E6.Tomar datos equivocados E7.Tomar datos parciales E8.Combinación parcial E9.Interpretación de la pregunta E10.No se desprende del proceso

A continuación se exponen los resultados que se derivan del análisis de las tablas anteriores.

BLOQUE I

2.-Susana fue a la neveria y compró catorce helados a seis pesos cada uno. ¿Cuánto dinero pagó por todos los helados?

3.-¿Cuánto dinero pago Miguel por todos sus coches, si compró seis coches a catorce pesos cada uno?

Del análisis de la tabla anterior se desprende que los problemas #2 y #3 correspondientes a la clasificación de grupos iguales, los tipos de errores que se cometieron con mayor frecuencia fueron el **E1** (emplear otra operación) con un total de 16 respuestas erróneas, seguido del **E2** (tomar datos que no se derivan del problema) con un total de 7 resultados equívocos.

En caso de error **E1** los niños dieron respuestas como: sumar $14+6=20$, restar $14-6=8$, ó bien dividir $14/6=61$ (SIC) lo cual muestra que ante la incomprensión del problema, lo más frecuente es que los niños realicen otro tipo de operaciones.

En caso de cometer el error **E2**, los niños dieron por respuesta 21, resultado de sumar 14 más 7 o bien, obtuvieron 98 producto de multiplicar 14×7 .

BLOQUE II

5.-Daniel tiene treinta y cuatro canicas. María tiene dos veces más canicas que Daniel. ¿Cuántas canicas tiene María?

7.- Ana tiene treinta y cuatro fichas de colores. María tiene el doble de fichas de colores que tiene Ana. ¿cuántas fichas de colores tiene en total María?

En los problemas #5 y #7 de comparación multiplicativa, el tipo de error más común fue el **E3** (cambio de estructura) con un total de 16 de respuestas erróneas, seguido del **E4** (traducción) con un total de 10 respuestas incorrectas.

En estos problemas los niños cometieron error **E4** al traducir expresiones matemáticas, pues interpretaron de manera equivocada el término doble. Por

ejemplo, en el problema #7 los niños reiteraron el número treinta y cuatro, tres veces $(34+34+34)$ ó $(68+34)$ ó bien cometieron el **E3** pues tradujeron el problema como si fuera de estructura aditiva, es decir, que los alumnos propusieron como solución $34+2=36$.

BLOQUE III

8.- En el salón cinco, hay catorce filas de butacas. En cada fila hay doce butacas. ¿Cuántas butacas tiene el salón?.

9.- Pedro formó doce filas de soldados. Si en cada fila hay Catorce soldados. ¿Cuántos soldados en total tiene Pedro?

En cuanto a los problemas de arreglo rectangular #8 y #9 los tipos de errores más frecuentes fueron el **E1** (emplear otra operación) con un total de 36 respuestas erróneas, seguido del **E6** (tomar datos equivocados) con un total de 9 respuestas equivocadas.

En los casos en que se cometió el **E1** los niños sumaron $14+12=26$.

En caso de incurrir en el **E6** los niños plantearon como solución sumar $12+5=17$, $14+5=19$; multiplicar $14 \times 5=70$, $5 \times 12=60$ ó bien, dividir $12/5=2$ (SIC).

BLOQUE IV

10.- Rocío fue de compras al supermercado y le compró cuatro blusas y tres faldas a su hija Natalia. Blusas <azul, rosa, blanca, verde> Faldas <azul, roja, marrón> ¿De cuantas formas distintas puede vestirse Natalia usando esas blusas y esas faldas?

Mientras que en el problema # 10 de producto cartesiano el tipo de error que se presentó con mayor frecuencia fue el **E8** (realizar combinaciones parciales) con un total de 30 respuestas erróneas, seguido del **E1** (emplear otra operación) con un total de 20 respuestas incorrectas. En las respuestas dadas por los niños se observó que en caso de incurrir en el **E8** la mayor parte de los niños realizó combinaciones parciales de los elementos puestos en juego (combinación, blusas, faldas) es decir realizaron emparejamientos entre los elementos de ambos conjuntos, pero, sin que cada elemento apareciera en más de un emparejamiento.

En caso de cometer el **E1** los alumnos sumaron $4+3=7$.

Después de haber expuesto los errores observados en la resolución de cada uno de los problemas verbales de estructura multiplicativa, considere conveniente realizar un análisis global que permitiera identificar el orden de dificultad presentado por los alumnos en la resolución de los problemas de estructura multiplicativa, para ello, tome como parámetro de referencia la frecuencia relativa de éxito ó respuestas correctas obtenidas en la resolución de cada grupo de problemas.

En la tabla 2 se muestra el orden de dificultad observado en cada grupo de problemas; expresándolos en orden de creciente dificultad.

Tabla 2

Clasificación	Problema	Frecuencia relativa de fracaso	Porcentaje de fracaso obtenido en cada problema
Comparación Multiplicativa	7	12/84	14%
Grupos Iguales	3	14/84	17%
Grupos Iguales	2	15/84	18%
Comparación Multiplicativa	5	27/84	32%
Arreglo Rectangular	9	31/84	37%
Arreglo Rectangular	8	33/84	39%
Producto Cartesiano	10	69/84	82%

De la tabla anterior se desprende que el problema #7 de comparación multiplicativa presento menor índice de dificultad pues solo el 14% del total de los alumnos obtuvieron una respuesta incorrecta, seguido de los problemas de grupos iguales pues se observa que en el problema # 3 solo el 17% de los alumnos no obtuvo un resultado correcto, mientras que en el # 2, en el que se trabajó el mismo significado únicamente el 18% no obtuvo una respuesta acertada.

Ante este hecho conviene mencionar que en los libros de texto se dedica un gran número de lecciones para trabajar este significado, (isomorfismo de medidas), lo cual posiblemente contribuye a que los niños presenten menor dificultad en su resolución. Además, es de mencionarse que gran parte de los alumnos resolvieron el problema de comparación multiplicativa mediante una suma reiterada.

Con relación al problema #5 de comparación multiplicativa se hace ostensible una mayor dificultad pues el 32% de la muestra no contesto correctamente. En este caso, podemos señalar que aunque en la tarea #5 y #7 se trabajó el mismo significado, resulto más difícil su resolución cuando se empleó el término dos veces más, lo cual posiblemente es producto de que los alumnos aplican operaciones mediante asociaciones lingüísticas. Es decir, si en la pregunta leen “quedan”, restan; si leen, “mas” suman; pues se observa que se cometieron más errores cuando se empleó este término, que cuando se había empleado un adjetivo característico de esta clase de problemas como es el adjetivo doble.

En los problemas de arreglo rectangular se advirtió que en las tareas #9 y #8, el 37% y 39% de los sujetos de la muestra no obtuvieron la respuesta correcta, respectivamente.

Como se puede apreciar, el hecho de incluir datos adicionales en el enunciado influye ligeramente en la resolución del problema, ya que se observa cierta diferencia en relación al tipo de respuestas correctas proporcionadas por los alumnos, lo cual puede deberse a que el alumno al encontrarse con más de dos datos para tener en cuenta, en vez de organizarlos, opta por sumarlos todos, o bien, puede ser producto que el alumno no ha aprendido a analizar los problemas, a determinar los datos que son relevantes de los que no lo son. Esto entraña numerosas dificultades para algunos alumnos, que reciben los datos sin apreciar su significado y sin poder catalogarlos, ya que no saben procesar la información recibida a través del enunciado.

Al respecto, un niño indico: “para obtener el resultado sume 5, más 14, más 12, para que me diera el resultado, ante esta respuesta se le preguntó por que había tomado esas cantidades, a lo que el niño indicó que para obtener el resultado tenía que sumar todas las cantidades que había en el problema.”

Otro alumno tal vez sabia lo que debía buscar, pero no pudo discriminar los datos relevantes para hallar la solución.

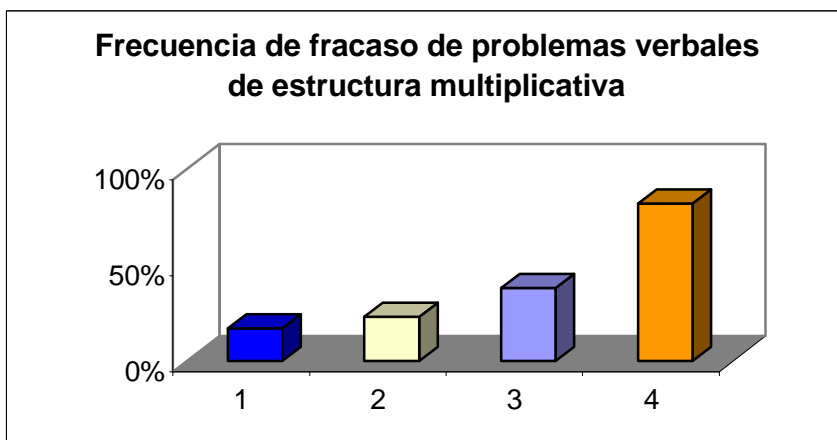
Respecto al problema 10, correspondiente a la clasificación de producto cartesiano, se hizo evidente una mayor dificultad en su resolución, ya que el 82% de la muestra dio una respuesta errónea, lo que indica que es uno de los tipos de problemas que causo mayor conflicto en su resolución. Este tipo de dificultad posiblemente pueda atribuirse, a que en gran parte de las lecciones del libro de texto del alumno se trabaja de forma constante con la clasificación de isomorfismo de medidas o grupos iguales, lo que conlleva a un conflicto conceptual importante en los alumnos cuando han de resolver esta clase de problemas, dado que en este tipo de problemas intervienen tres espacios de medida, en este caso: blusas, faldas, combinación y para que el alumno obtenga el número total de combinaciones tendrá que asociar los elementos del primer conjunto (blusas) a los elementos del segundo conjunto y obtener así el número total de combinaciones, que corresponden al tercero.

Es de mencionarse una respuesta emitida por uno de los niños. Ante la pregunta ¿cómo resolviste el problema? el niño señaló lo siguiente: *“para obtener el resultado combine rosa con rojo y blanco con azul. Por lo que se le preguntó ¿podrías combinar azul con azul? ante lo que contestó: no podría combinar azul con azul porque se vería igual y la pregunta dice que tienen que combinar blusas con faldas, y si lo hiciera de otra forma (se refiere a combinar azul con azul) no combinaría y no podría sacar el resultado.”* Esto ilustra que el sentido que un resolutor aplica al interpretar el problema debe ser ampliamente considerado para futuros diseños de investigación.

Por último, en la *gráfica 2* se observa una diferencia en los niveles de dificultad mostrados por los escolares en la resolución de problemas de grupos iguales y problemas de producto cartesiano, ya que mientras en el primer grupo de problemas (grupos iguales) se obtuvo un porcentaje de fracaso del 17%, en el problema de producto cartesiano se obtuvo un porcentaje de fracaso del 82%. Lo cual se puede interpretar como que los problemas de grupos iguales son menos difíciles de resolver que los de combinación. Y, que el hecho de desarrollar tan solo problemas del primer tipo no facilita en el niño la capacidad de resolver los del segundo, pues mientras los problemas de grupos iguales pueden resolverse utilizando estrategias aditivas donde se dispone de una cantidad inicial que va cambiando a medida que se repite sucesivamente un número de veces, los problemas de combinación, disponen de dos cantidades iniciales que deben considerarse simultáneamente, para resolver el problema.

En tanto, en los problemas de comparación multiplicativa y arreglo rectangular se observó una menor diferencia que lo mostrado en los bloques anteriores pues en los problemas de comparación multiplicativa se obtuvo un porcentaje de fracaso del 23%, mientras que en los problemas de arreglo rectangular se obtuvo un 38% de fracaso.

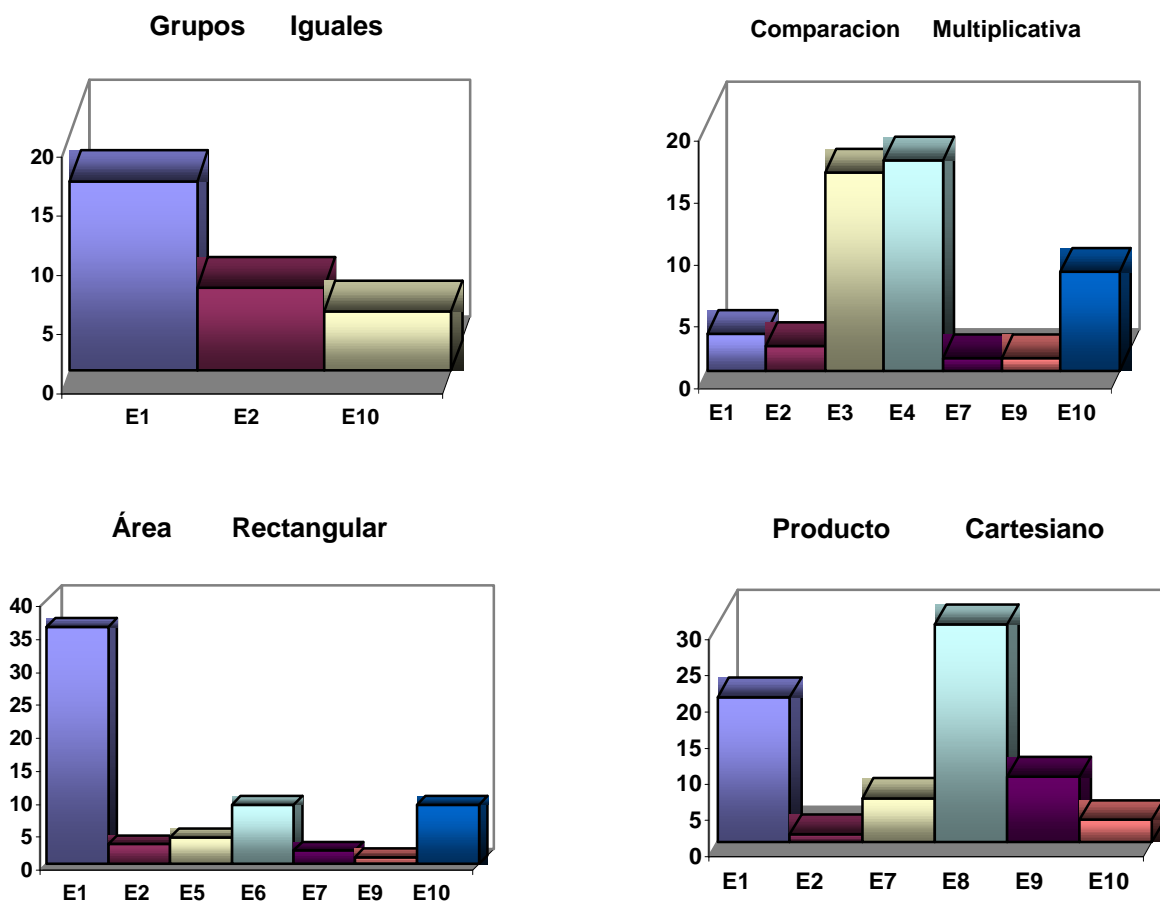
Otro aspecto observado fue la diferencia entre los problemas de arreglo rectangular y comparación multiplicativa ya que el gráfico muestra que el primer tipo de problemas resultó más difícil de resolver.



Gráfica 2
 1. Grupos iguales
 2. Comparación multiplicativa
 3. Área rectangular
 4. Producto cartesiano

4.1.2 ANÁLISIS GLOBAL DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS POR LOS ALUMNOS EN PROBLEMAS DE ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA.

En estas gráficas se muestran los tipos de errores presentados en cada grupo de problemas de estructura multiplicativa.²

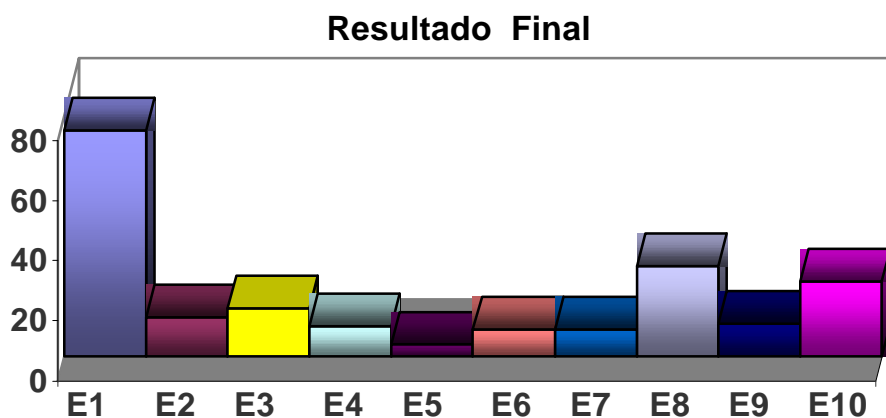


² E1. Emplear otra operación E2. tomar datos que no se desprenden del problema. E3. Cambio de estructura E4. Traducción E5. Articulación E6. Tomar datos equivocados E7. Tomar datos parciales E8. Combinación parcial E9. Interpretación de la pregunta E10. No se desprende del proceso

Se puede observar que en cada grupo de problemas se presentaron por lo menos tres tipos de errores diferentes. Los grupos de comparación multiplicativa y arreglo rectangular mostraron 7 errores cada uno, mientras que los problemas de producto cartesiano y grupos iguales presentaron 6 y 3 tipos de error respectivamente.

También se observa que los errores **E1**(emplear otra operación) **E2**(tomar datos que no se desprenden del problema, y **E10**(no se desprende del proceso) se presentaron en los cuatro grupos de problemas. Mientras que el error **E4**(error de traducción) fue exclusivo de los problemas de comparación multiplicativa, y los errores **E5** (articulación) y **E6**(tomar datos equívocos) fueron característicos de los problemas de arreglo rectangular, así como el error **E8** (combinación parcial) fue representativo del problema de producto cartesiano.

En la siguiente grafica se muestran los diez tipos de errores cometidos por los alumnos en la resolución del total de problemas verbales de estructura multiplicativa.



En este caso podemos destacar que ante la resolución de problemas de estructura multiplicativa el tipo de error que se presentó con mayor frecuencia fue el *realizar cualquier otra operación (E1)* la cual pudo ser producto de diversos aspectos, entre los que podemos destacar: la incomprensión del enunciado del

problema, así como la falta de organización y/o adecuado razonamiento que permitiera al alumno poder establecer que operación seguir para resolver cada uno de ellos.

En estos casos podremos encontrar alumnos que son capaces de analizar los problemas y explicar los pasos u operaciones que hay que seguir para dar solución a ellos, aunque, y como se muestra en esta investigación es frecuente que los alumnos no analicen y razonen la información que se les presenta en el texto del problema, lo que deben realizar y por qué deben hacerlo. Por el contrario, suelen enfrentarse a los problemas como si fuese un acertijo del cual hay que adivinar la respuesta dando soluciones no lógicas lo cual se ve reflejado en las respuestas que proporcionaron los alumnos como asignar números al azar **E10**, o realizar cualquier operación **E1** sin detenerse a pensar el por qué y para que las hacen, cuando no se bloquearon y fueron incapaces de resolver el problema.

Es de mencionarse que, aunque en la gráfica se observan otros errores que se cometieron con regular frecuencia, como realizar combinaciones parciales (**E8**) error cambio de estructura (**E3**) y error de traducción (**E4**) estos solo se presentaron en un grupo específico de problemas (problemas de producto cartesiano y comparación multiplicativa).

Por lo que (**E2**) tomar datos que no se desprendían o derivaban del texto del problema fue considerado como el segundo tipo de error presentado con mayor frecuencia. Ante esta situación, podemos señalar que este tipo de error pudo ser producto de la poca o nula atención que suele prestar el alumno al leer los problemas, o bien, ser producto de la falta de estabilidad del alumno para realizar una labor continuada para terminar sus tareas no logrando consolidar el aprendizaje actuando ante los problemas con la misma dispersión y falta de constancia. Suelen ir directamente a la solución sin establecer previamente un orden o plan de trabajo; no organizan la información recibida, o lo hacen con precipitación con lo cual toman datos que no aparecen en el texto del problema, esto fue advertido durante la aplicación del instrumento pues algunos niños se mostraron distraídos.

El tercer tipo de error encontrado, fue la comprensión del texto o *interpretación de la pregunta (E9)* pues los alumnos dieron respuestas equivocadas, tal vez porque no entendieron lo que se pedía pues en caso de cometer error los niños contestaron un sí cuando lo que pedía el problema estaba enfocado a otro tipo de respuesta, o bien, porque presuponen lo que se les pregunta, sin reflexionar sobre el contenido real de la pregunta.

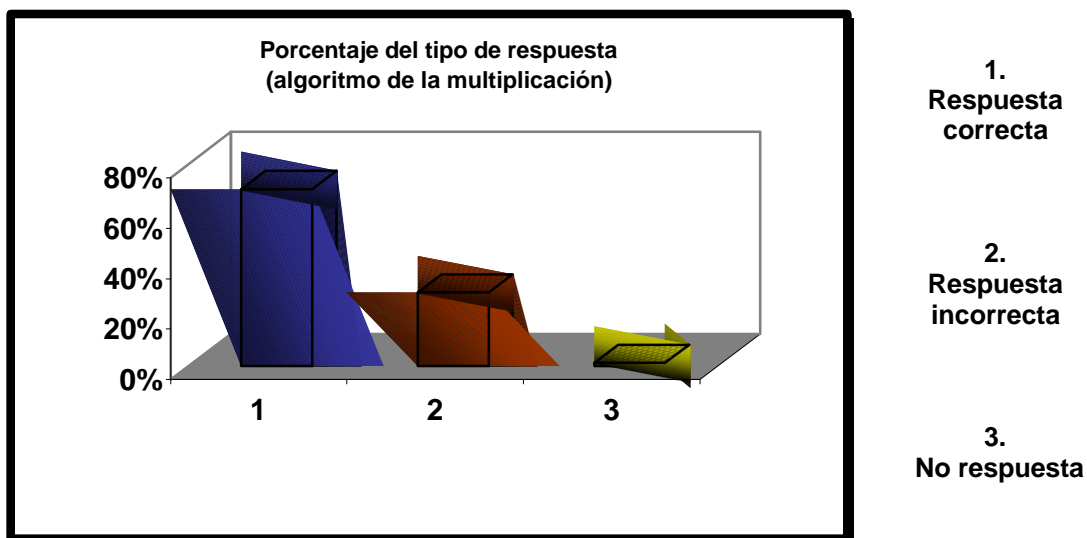
4.2 EJECUCIÓN DEL ALGORITMO DE LA MULTIPLICACIÓN

En este apartado realizo el análisis de las dificultades y los tipos de errores más habituales presentados por los alumnos en el aprendizaje del algoritmo de la multiplicación a partir de lo mostrado en sus respuestas al instrumento.

A partir del análisis de las respuestas dadas por los alumnos en la resolución del algoritmo de la multiplicación, advertimos que, los niños obtuvieron un desempeño aceptable en su resolución, pues de las 1848 respuestas analizadas, se obtuvieron un total de 1298 respuestas correctas equivalentes al 70%. Mientras que el número de respuestas incorrectas fue de 531 equivalente al 29%. Sólo 9 respuestas fueron catalogadas como no respuesta, lo que equivale al 1% del total de respuestas.

En la Gráfica número 1 se observan los porcentajes del tipo de respuestas.

Grafica 1



Descripción de los errores cometidos en la ejecución del algoritmo de la multiplicación.

Una vez analizadas las respuestas de los alumnos en la realización del algoritmo de la multiplicación llevé a cabo la segunda fase que consistió en clasificar las respuestas de los niños en relación a la tipología de errores expuesta por Leo Brueckner. Asimismo, a partir del análisis de las respuestas de los niños procedí a complementar la tipología de errores expuestos por el autor.

En la tabla 1 se esboza la tipología de errores encontrados.

Tabla 1

Tipología de errores en el algoritmo convencional de la multiplicación	
Tipo de error	Errores cometidos
Combinación	e1 Hechos básicos e2 Errores en la combinación con un cero en el Multiplicador
Llevar	e3 Agregar el número que se lleva e4 Llevar un número erróneamente e5 Olvidarse de llevar e7 Multiplicar el número que se lleva e8 Sumar el número que se lleva
Procedimientos defectuosos	e6 Colocar una fila de unos cuando hay uno en el multiplicador e9 Errores en la colocación de productos parciales e10 Olvidarse de sumar los productos e11 Multiplicar parcialmente e12 Multiplicar parcialmente (tomar un solo dígito) e13 Multiplicar entre sí las cifras del multiplicador e14 Equivocar el proceso en el segundo factor e15 Mal agrupamiento e16 Errores relacionados al renombrar y reagrupar e17 Empezar por la izquierda
Lapsos y otros	e18 Errores al escribir el producto (suma) e19 No se deriva del proceso e20 Realizar sumas parciales e21 Invertir cifras (llevar) e22 Invertir cifras en el producto e23 No multiplicar una cifra del multiplicando e24 Tomar cifras parcialmente al término de cada operación e25 Multiplicar dos veces el mismo número e26 Proceso incompleto

De la tabla anterior, se advierte que es posible detectar al menos 26 errores diferentes en sus respuestas.

Se observó que los procesos de solución erróneos encontrados en cada uno de los bloques que conformaron el instrumento se redujeron a solo algunos tipos de error presentados en la tabla 1.

Para dar cuenta de los tipos de error que con mayor frecuencia se presentaron en cada uno de los bloques, en la tabla 2 se exponen los tipos de error, así como los porcentajes con que se han presentado calculados sobre el total de respuestas erróneas.

Cabe mencionar que en esta tabla, también fueron registrados los casos en que se llegaron a cometer hasta dos errores en la respuesta a un reactivo.

Tabla 2

Tipología de errores							
Algoritmo convencional de la multiplicación							
Bloque	Tipos de error					Total	Porcentaje de errores
I		e1=8				8	1.2%
II	e1=12 e3=11 e4=4 e5=1			e16=3 e21=3		34	5.3%

III	e1=11 e3=9 e4=4 e5=7			e16=3 e21=3		37	5.7%
IV	e1=22 e4=2 e5=3	e7=29 e8=8	e15=3	e16=3 e19=1	e21=2 e23=1 e24=1	75	11.7%
V	e1=13 e2=44 e3=5 e4=6 e5=16	e8=2 e9=7 e10=3	e11=10 e12=4	e16=3 e17=6 e18=3 e19=9	e21=1	132	20.5%
VI	e1=30 e3=4 e4=3 e5=19	e6=1 e9=9 e10=3	e11=13 e12=3 e13=3	e16=3 e17=9 e18=11	e21=1 e22=1 e23=1 e24=2 e26=2	118	18.3%
VII	e1=48 e3=2 e4=9 e5=24	e6=6 e9=56 e10=3	e11=24 e12=12 e13=3 e14=9	e17=3 e18=23 e19=5 e20=6	e21=1 e22=1 e24=1 e25=1 e26=2	239	37.2%
Total						643	100%

De acuerdo con estos resultados, los bloques ordenados en grado decreciente a su orden de dificultad para los alumnos de la muestra son VII, V, VI, IV, II y I.

También, podemos señalar que es en el bloque número I donde se cometieron el menor número de errores, pues solo se obtuvieron 8 respuestas erróneas, equivalente al 1.2% del total de respuestas erróneas las cuales corresponden al **e1**(errores con las tablas de multiplicar) equivalente al 1.2% del total de respuestas erróneas exhibidas en este bloque.

Los bloques número II y III no presentaron dificultad para los alumnos, pues en el bloque II, solo se mostraron 34 errores equivalente al 5% del total de respuestas erróneas, de los cuales los errores **e1**(*errores con las tablas de multiplicar*) y **e3** (*que consistió en equivocar el proceso al agregar un número diferente al que se lleva*) fueron los más frecuentes con un total de 12 respuestas erróneas, mientras que al **e3** se adjudicaron 11 respuestas equívocas.

En el bloque III, solo se presentaron 37 errores equivalente al 5.7% del total de respuestas erróneas. Asimismo los tipos de error a los que se incurrió con mayor frecuencia fueron: el **e1** (*errores con las tablas de multiplicar*) y **e3** (*que consiste en equivocar el proceso al sumar el número que se lleva. Ej. $124 \times 6 = 734$*) con 11 y 9 respuestas respectivamente.

Las multiplicaciones que se presentaron en los bloques IV, V y VI, resultaron más difíciles que las presentadas en bloques anteriores, pues en el bloque IV se produjeron un total de 75 errores equivalente al 11.7% del total de respuestas erróneas, de los cuales los errores **e7** (*que consiste en equivocar el proceso al multiplicar el número que se lleva, por ejemplo, al multiplicar 206×5 , los niños multiplican el número 3 que se lleva de multiplicar 5×6 , por el número 5 que se encuentra en el lugar del multiplicador*), y **e1**(errores con las tablas de multiplicar) se presentaron con una frecuencia de 29 y 22 respuestas equívocas respectivamente.

En el bloque VI, se manifestaron 118 respuestas erróneas equivalente al 18.4% del total de respuestas erróneas, además, se destaca que los errores **e1** (*errores con las tablas de multiplicar*) y **e5** (*que radica en equivocarse al olvidarse de llevar*) se presentaron con una frecuencia superior al resto de los tipos de error presentados en este bloque con un total de 30 y 19 respuestas erróneas.

Mientras que en el bloque V, se encontraron 132 respuestas erróneas equivalente al 20.5% del total de respuestas erróneas, lo cual indica que los alumnos tienen mayor dificultad cuando en el multiplicador aparecen múltiplos de diez. Al mismo tiempo, se observó que el **e2** (*que radica en equivocarse cuando se presenta un cero en el multiplicador por ejemplo, al multiplicar 126×50 los niños dan por respuesta $126 \times 0 = 126$, $126 \times 5 = 630$, $126 + 6300 = 6426$*) se cometió con mayor frecuencia pues se obtuvieron un total de 44 respuestas incorrectas.

Por último, se destaca que en el bloque VII se presentaron más errores que en bloques anteriores, pues de las 643 respuestas erróneas exhibidas en la aplicación del instrumento, 239 respuestas corresponden a este rubro. Lo que equivale al 37.2% del total de respuestas erróneas cometidas en la prueba. Cabe destacar que los errores que se presentaron con mayor frecuencia fueron los errores **e9** (*que consiste en colocar erróneamente los productos parciales*) con un total de 56 respuestas, seguido del **e1** (*errores con tablas de multiplicar*) con un total de 48 respuestas equivocadas.

4.2.1 ANÁLISIS GLOBAL DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS EN LA EJECUCIÓN DEL ALGORITMO DE LA MULTIPLICACIÓN

Podemos inferir que las dificultades a las que se enfrenta el alumno en la resolución del algoritmo son producto principalmente del deficiente manejo de:

- ✓ Hechos básicos (tablas de multiplicar)
- ✓ Propiedad distributiva de la multiplicación
- ✓ Conocimiento del sistema decimal de numeración, en particular del valor posicional y el uso del cero

Una de las principales dificultades presentadas por los alumnos en la ejecución de las multiplicaciones es el bajo dominio de las tablas de multiplicar en especial el manejo de la tabla del 7 y 9 a pesar de que en el instrumento se evitó manejar estos números en los reactivos. Aunque, es obvio que el conocimiento y memorización de los hechos básicos es un factor que influye en los resultados obtenidos por los alumnos, cabe señalar que si el alumno considera que 7×9 es igual a 62 no significa que el alumno desconozca el mecanismo del algoritmo

Por otro lado, es importante destacar que otra dificultad a la que se enfrenta el alumno, es resultado del bajo dominio o deficiente manejo de la *propiedad distributiva de la multiplicación*, pues se observa que una parte considerable de los alumnos cometió error al ejecutar de manera parcial el algoritmo, mostrando errores como el siguiente:

$$\begin{array}{r}
 624 \\
 \times 172 \\
 \hline
 1248 \\
 4368 \\
 \hline
 44928
 \end{array}$$

Este tipo de error se puede atribuir al hecho de que el niño no ha comprendido la propiedad distributiva de la multiplicación; o sea, que no es consciente de que al realizar esta operación está multiplicando $624 \times 2 + 624 \times 70 + 624 \times 100$, lo cual lo lleva a operar únicamente con los dos primeros números que se presentan en el multiplicador y parar el procedimiento.

Otro error que presenta el alumno al momento de resolver el algoritmo es olvidar sumar los productos parciales, lo cual es debido a la no *comprensión de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición*, esto se deduce a partir de la aplicación de la prueba ya que una parte de ellos olvidan, o no reconocen que tienen que sumar los productos parciales.

Por ejemplo uno de los niños muestra el siguiente error:

$\begin{array}{r} 134 \\ \times 62 \\ \hline 268 \\ 804 \\ \hline \end{array}$	<p>En este caso, se observa que el niño no es consciente de que al multiplicar un número éste se separa en partes ($134 \times 2 + 134 \times 60$) y que, como estamos operando parcialmente, el producto final es el resultado de la suma de los productos parciales.</p>
--	---

Este hecho se pudo confirmar en una de las entrevistas realizadas a uno de los niños, ya que cuando se le preguntó ¿por que no has sumado ambos productos?, el niño contestó: **“porque no es necesario”**, pero, si queremos que salga la comprobación de multiplicar 134×62 tenemos que sumar (se refiere a sumar $268 + 804$). “

Otro de los problemas que impiden al alumno aplicar correctamente el algoritmo, es el manejo deficiente que tienen los niños del *sistema decimal de numeración*, esto se observó en el alto índice de errores que presentaron los niños cuando tuvieron que llevar números.

Los niños muestran los siguientes tipos de error:

$\begin{array}{r} 124 \\ \times 6 \\ \hline 624 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3 \\ 26 \\ \times 5 \\ \hline 120 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2 \\ 38 \\ \times 4 \\ \hline 143 \end{array}$	$\begin{array}{r} 13 \\ 206 \\ \times 5 \\ \hline 1150 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3 \\ 206 \\ \times 5 \\ \hline 1080 \end{array}$
--	--	--	---	--

Como se observa, existen numerosas equivocaciones que pueden adjudicarse al uso de “las llevadas” en la multiplicación. En el instrumento aplicado, observe al menos cinco tipos de error.

En el primer caso se observa que el niño olvida sumar los números que lleva, por lo que al multiplicar 124×6 obtiene como resultado 624.

En el segundo caso observe que el niño equivoca el proceso al sumar el número que lleva.

En el tercero se advierte que el niño confunde el número que lleva, en este caso lleva el número menor (2) en el lugar de las decenas por lo que obtiene 3222.

Respecto de los dos últimos casos, se advierte que tras realizar correctamente la multiplicación de las unidades, se opera el multiplicador por lo que se lleva; que vienen a sustituir al multiplicando por lo que al multiplicar 206×5 obtiene por resultado 1150. En el último caso, se aprecia que el niño realizó adecuadamente la multiplicación de las unidades, pero, al momento de multiplicar las decenas el alumno suma el dígito del multiplicador con el dígito que llevaba después de operar con las unidades obteniendo 1080.

Examinando lo anterior, se hace evidente que “las llevadas,” provocan variados problemas al alumno. Como señala Carlos Maza, si el niño no ha comprendido que multiplicar 6×124 es resultado de sumar $6 \times 4 = 24$, $6 \times 20 = 120$ y $6 \times 100 = 600$ dando 744 esto conducirá a que el niño cometa errores algorítmicos ante la presencia de llevadas.

Otro error que se hace evidente en las respuestas proporcionadas por los niños fue el colocar los productos parciales de manera equivocada, lo cual tiene origen en el insuficiente dominio del valor posicional de los números. Siendo así que el valor que se deriva de dicho lugar, resulta totalmente incomprensible para los niños y entonces el hueco bajo el primer producto es colocado por los niños de manera equívoca.

En caso de error los niños muestran los siguientes procesos:

$$\begin{array}{r}
 134 \\
 \underline{\times 62} \\
 268 \\
 \underline{804} \\
 1072
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 644 \\
 \underline{\times 172} \\
 1288 \\
 4508 \\
 \underline{644} \\
 52808
 \end{array}$$

En la ejecución de estas multiplicaciones se pone de manifiesto que los niños colocaron de manera equívoca los productos parciales, lo cual refleja que los niños no comprenden el valor posicional de cada uno de los números. Los niños no comprenden que el 644 hace referencia a 64400 unidades en función de la cual los dos huecos corresponden al cero que se elimina al respetar el valor posicional. Asimismo, el alumno no es consciente de que cada una de las cifras con que se expresa un número representan diferentes agrupamientos de los cuales derivan su valor, lo cual, los lleva a colocar erróneamente los productos parciales.

Al respecto, en una de las entrevistas se pidió a uno de los niños que había cometido este error que resolviera un algoritmo similar al que se le había planteado en la prueba, posteriormente se le mostró una de las respuestas que había sido correcta, y se le preguntó ¿por qué crees que este niño ha dejado este espacio en blanco? ante lo cual contestó *“tal vez se equivocó... porque los números tienen que estar alineados para que se puedan sumar.”*

$$\begin{array}{r}
 134 \\
 \underline{\times 62} \\
 268 \\
 \underline{804} \longleftrightarrow \\
 8308
 \end{array}$$

Otra de las dificultades que enfrentaron los alumnos en la ejecución del algoritmo, fue operar erróneamente cuando aparece un cero en el multiplicando o en el multiplicador. Ello indica que no es fácil para los niños llegar a entender porqué multiplicar un número por cero da cero, es decir que para los niños multiplicar 4×0 , puede ser 0 ó 4.

En los resultados observe el siguiente error:

$$\begin{array}{r}
 126 \\
 \times 50 \\
 \hline
 126 \\
 \underline{630} \\
 6426
 \end{array}$$

En este caso se percibe que para el niño todo número multiplicado por cero es igual al número por el cual se multiplicó, es decir, que para el niño multiplicar 0×6 es igual a 6, 0×2 es igual a 2 y, 0×1 es igual a 1

Como se observa, no es fácil para los niños aceptar por qué multiplicar un número por cero da cero y tanto hacen esto como poner como resultado el número por el cual se multiplicó el cero es decir, para los niños, muchas veces las dificultades que tienen con el cero se originan en la contradicción que, desde el punto de vista del niño, implica tener que poner una cifra para indicar que nada hay, si el niño no comprende el valor posicional.

CAPITULO V

5. CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS DIDÁCTICAS

En este capítulo se presentan las principales dificultades y errores cometidos por los alumnos de cuarto grado de educación primaria cuando abordan los problemas de estructura multiplicativa y el algoritmo de la multiplicación. Asimismo se presentan algunas sugerencias didácticas y se mencionan algunas de las limitaciones que se presentaron en la realización de este estudio.

El orden a seguir será el siguiente: a) Se mencionará la importancia y los resultados obtenidos a partir del análisis de las obras de Vergnaud, Green y Castro., b) Se mostrarán los resultados obtenidos a partir del análisis del paquete curricular de cuarto grado, c) Se describirán las dificultades y errores observados a partir de la aplicación de la prueba, c) Se presentarán algunas sugerencias didácticas, e) Se mencionarán las principales limitantes en la realización de este estudio.

Respecto del primer punto señalo que para el análisis de las respuestas de los niños en la resolución de problemas se integraron elementos teóricos presentes en los trabajos de Vergnaud, Green y Castro, ya que estos autores hacen un análisis detallado de los problemas de estructura multiplicativa además de aportar los elementos necesarios para el diseño de los reactivos. Cabe señalar que aunque las clasificaciones de Vergnaud y Green diferían en terminología, ambas clasificaciones poseían características básicas comunes excepto la clasificación comparación multiplicativa. Los modelos de Castro, también fueron considerados con objeto de tener un mayor campo de estudio y análisis de las dificultades que se presentan en su aprendizaje.

También es de mencionarse que el análisis de estos autores me permitió tener un mayor panorama de los problemas de estructura multiplicativa y dejar en claro que el concepto de multiplicación no solo se reduce a un modelo de suma reiterada, sino que hay una gran variedad de significados y de representaciones que dan lugar a la estructura multiplicativa.

Así, la enseñanza de la multiplicación no debe reducirse al significado de una suma reiterada, pues ello tendrá grandes repercusiones cuando se tenga que abordar otra clase de problemas. Pues este significado no facilita en el niño la capacidad de resolver problemas de producto cartesiano, ya que mientras los problemas de grupos iguales y comparación multiplicativa pueden resolverse utilizando estrategias aditivas, en los de producto cartesiano (combinatoria) deben considerarse todos los elementos puestos en juego para resolver el problema.

b) Paquete curricular de cuarto grado

Con relación al paquete curricular de cuarto grado es de subrayarse que para trabajar el tema de multiplicación se dedican al menos un conjunto de quince lecciones de un total de noventa y un lecciones que conforman el libro del alumno, de las cuales solo cinco lecciones abordan de forma directa el algoritmo de la multiplicación.

Respecto de las diez lecciones que componen el área de resolución de problemas la mayor parte de ellas se enfoca al trabajo constante de problemas de isomorfismo de medidas dejando de lado los problemas de producto cartesiano. Al respecto es de señalarse que en el libro del alumno solo se dedica una lección para abordar problemas de combinatoria sin llegar a establecer una relación con la estructura multiplicativa, lo cual influye en que los alumnos presenten mayor dificultad al trabajar esta clase de problemas.

Antes de dar inicio con las dificultades que se presentaron en la resolución de problemas de estructura multiplicativa y en la ejecución del algoritmo es de señalarse que para su análisis se integraron elementos teóricos presentes en las obras de Encarnación Castro y Leo Brueckner respectivamente. Respecto a este último autor es de destacarse que su taxonomía de errores es muy amplia lo cual me permitió analizar a detalle los errores en que incurrieron los alumnos al momento de ejecutar el algoritmo. Aunque, cabe señalar que su clasificación resultaba poco útil por el tipo de situaciones planteadas en el instrumento de esta

tesis por lo que se anexo una clasificación de errores en función de las respuestas emitidas por los niños en la prueba por ejemplo: Colocar una fila de unos cuando hay uno en el multiplicador, multiplicar parcialmente, multiplicar entre sí las cifras del multiplicador, realizar sumas parciales y tomar cifras parciales al término de cada operación.

Una vez contemplados estos errores se procedió a analizar las respuestas de los alumnos a cada una de las pruebas lo cual se alude en el siguiente inciso.

c) Dificultades y errores que cometieron los alumnos en la resolución de problemas y en la ejecución del algoritmo de la multiplicación.

Es de señalarse que el desempeño de los alumnos en cada una de las pruebas fue aceptable ya que el 65% y 63% de los alumnos contesto correctamente la prueba de resolución de problemas de estructura multiplicativa y del algoritmo de la multiplicación, respectivamente.

Respecto a los que dieron respuestas erróneas se puede señalar que a los niños les resulto difícil reconocer qué operación emplear cuando se enfrentaron a los problemas, pues al no lograr entenderlos, lo mas común fue que los alumnos realizaran cualquier operación, o bien recurrieran al descifrado de pistas proporcionadas “implícitamente” por el texto a partir de la enseñanza impartida en el tema, además de observarse una falta de organización como de un adecuado razonamiento que permitiera al alumno poder establecer que operación seguir para resolver cada uno de ellos.

Como se observó, es más frecuente que los alumnos que incurren en errores no utilicen sus conocimientos, ni analicen y razonen la información que se les presenta en el texto del problema, esos alumnos suelen enfrentarse a los problemas como si éstos fuesen un acertijo del cual hay que adivinar la respuesta; no analizan a detalle el problema, para esos niños un problema significa hacer operaciones inmediatamente; ante unos datos numéricos y una vaga idea de reunión se ponen a juntar los números sin tomar una visión de conjunto del problema a resolver.

Asimismo, nos encontramos a niños que ante los problemas hicieron algo sin importar qué, lo cual da la impresión que el niño hace cualquier cosa porque hay que dar una respuesta al problema, pero que lo más importante no es encontrar una solución “justa”; el niño se precipita, suma o resta y por una especie de comportamiento transforman los datos del problema en elementos de solución.

Aunque también encontramos a aquellos niños que les cuesta trabajo organizar los datos para formar una secuencia la cual partiendo de lo conocido los lleve hacia la respuesta. Esto se vio reflejado en aquellos casos en que los alumnos no dieron respuesta a alguno de los problemas y devolvieron su hoja en blanco, la explicación de ello no es siempre fácil, aunque podríamos señalar que en este tipo de situaciones podemos encontrar a aquellos niños que se inhiben como consecuencia de una imposibilidad de saber traducir lo que han comprendido. De igual forma encontraremos a aquellos niños que se quedan totalmente bloqueados ante un ejercicio de matemáticas, o bien aquellos que prefieren no comenzar porque no están seguros de terminar el ejercicio a tiempo, están igualmente, aquellos niños que comprenden poco o no comprenden nada, ante este tipo de situaciones habrá que ser prudente en la interpretación de estas conductas.

Ante estos escenarios, podemos señalar que para los alumnos no es fácil establecer un plan de trabajo a seguir para resolver problemas, pues, el niño debe realizar una representación de éstos, establecer un plan, realizar físicamente o en el pensamiento una operación y traducirla después por medio de un algoritmo. Sabemos que este aprendizaje no se realiza sin antes haber puesto un mínimo de esfuerzo y de conocimientos previos.

Esto pone de relieve algunas de las dificultades con las que tropiezan los alumnos en sus primeros intentos al tratar de resolver un problema, pues ello requiere de un rigor y una capacidad de organización. Además de que el análisis de un texto exige comprensión lectora, conocimiento del lenguaje utilizado y del contexto al que se refiere el problema.

De manera más específica, podemos señalar que entre cada categoría de los 4 que conforman el instrumento (grupos iguales, comparación multiplicativa, arreglo rectangular y producto cartesiano) se observaron diferentes niveles de dificultad ya que los niños presentaron mayor número de errores en problemas de arreglo rectangular y producto cartesiano en contraste con problemas de grupos iguales y comparación multiplicativa, lo cual puede atribuirse a diversos factores entre los que podemos citar el hecho que en los libros de texto, se maneje el concepto de multiplicación como una suma reiterada lo que contribuye de manera significativa a obtener mejores resultados en esta clase de problemas. También es de señalarse la dificultad observada en los problemas de arreglo rectangular pues este tipo de problema resultó más difícil de resolver siendo que en el tercer grado de educación primaria se introduce al tema de multiplicación mediante arreglos rectangulares.

Respecto de los problemas de producto cartesiano podemos señalar que sus dificultades pueden atribuirse a diversos factores, como son el hecho de que tanto en los salones de clase como en el libro de texto se marque de manera constante el concepto de multiplicación como una suma reiterada lo cual impide al alumno reconocer o asentar los problemas de producto cartesiano (combinatoria) pues este modelo no corresponde o no obedece en su solución a estrategias de suma reiterada, dado que este problema es estructuralmente diferente que los problemas de isomorfismo de medidas ya que intervienen tres espacios de medida diferentes.

Otro factor es la interpretación del texto del problema, ya que la palabra combinar dio lugar a diversas interpretaciones por ejemplo, un alumno señaló que no podía combinar azul con azul porque se vería igual. Otros niños mencionaron que no podían combinar verde con azul porque se vería mal, también encontramos alumnos que hicieron preguntas específicas respecto del texto del problema como fue el significado de la palabra marrón.

Este tipo de dificultades se vio reflejado en el gran número de errores cometidos por los alumnos al resolver el problema, pues en caso de error los niños

realizaron combinaciones parciales de los elementos puestos en juego (en este caso de blusas y faldas) sin que cada elemento apareciera en más de un emparejamiento. Además, se advierte que en un número reducido de casos los niños emplearon como estrategia de resolución la multiplicación.

Cabe destacar que estos resultados concuerdan con los reportes presentados por Carlos Maza, pues él había señalado que una de las causas que impiden al alumno resolver este tipo de problemas tiene su origen en un serio obstáculo conceptual: “La multiplicación es concebida como una suma reiterada y este modelo va impedir tanto la aplicación de la multiplicación a problemas de producto cartesiano, como su extensión a conjuntos numéricos distintos de los naturales”³.

Respecto del algoritmo de la multiplicación señalo que por la frecuencia con que se presentaron los errores en su ejecución, estos errores reflejaron las principales dificultades a las que se enfrentaron los alumnos.

Estas dificultades tuvieron orígenes diversos entre otros el deficiente e inadecuado manejo de conceptos como: el valor posicional de los números, el sistema numérico decimal, la propiedad distributiva de la multiplicación y el uso del cero.

Aunado a lo anterior, hay que considerar que los alumnos cometen errores al ejecutar el algoritmo a causa de: a) bajo dominio de las tablas de multiplicar, b) por la presencia del cero en el multiplicando o multiplicador. Con relación a este punto encontré que el uso del cero en el algoritmo representa gran dificultad para los niños puesto que ellos se han venido creando ideas contradictorias acerca de la forma en que se opera este número. Buena parte de ello puede deberse a que durante su enseñanza se obliga a los niños a memorizar productos, sin darles

³ MAZA, Gómez Carlos. Enseñanza de la multiplicación y división. Editorial Síntesis. Madrid.1991 p17.

suficiente oportunidad para descubrir y comprender nuestro sistema de numeración.

El manejo deficiente de los conceptos numéricos impedirá al alumno enlazar el conocimiento conceptual con el procedimental, además de que también le impedirá comprender los motivos por los cuales seguimos ciertas reglas al ejecutar el algoritmo convencional de la multiplicación. Esta no comprensión cabal provoca un gran número de errores.

Por lo anterior, es importante que los docentes analicen y reflexionen la naturaleza de los errores, y las razones de las dificultades que impiden que el alumno obtenga un desempeño aceptable en la resolución de problemas de estructura multiplicativa, así como en la ejecución del algoritmo de la multiplicación.

Como señala C. Maza, “Se debe poner especial atención en los errores que presentan los alumnos, ya que ellos nos ponen sobre aviso de la existencia de verdaderos obstáculos cognitivos que el alumno se ve, en unos primeros momentos incapaz de superar”⁴.

d) Sugerencias didácticas

A continuación se presentan algunas sugerencias didácticas, las cuales se desprenden de las observaciones y análisis de las respuestas de los alumnos a cada uno de los instrumentos.

Considero que la comprensión del concepto de estructura multiplicativa debe surgir a partir de la creación y aplicación de estrategias elaboradas por el niño de tal forma que él vaya creando el concepto de multiplicación. Asimismo, conviene apuntar que su enseñanza no debe ser de arriba-abajo, es decir que primero se le enseñe el algoritmo y que después el niño lo relacione con los problemas que le son presentados en la institución escolar; es preciso trabajar en ida y vuelta constante de tal forma que el niño esté en posibilidad de entender que lo que él aprende de manera formal en la escuela representa algo, que descubra la

multiplicación como un instrumento útil para responder a aspectos específicos de su vida cotidiana.

De igual forma, es importante que los niños construyan estos conceptos en forma diferente a la planteada en la enseñanza tradicional, que en un primer momento sean construidos por el niño mismo, que se le dé la oportunidad de crear sus propias estrategias, quien a partir de sus acciones sobre los objetos pueda entender el conocimiento matemático.

También es fundamental que la labor del docente esté enfocada a coadyuvar a que el niño reconozca la estructura de los problemas, que permita que el alumno ponga en práctica sus procedimientos, tanto “erróneos” como correctos propiciando situaciones de confrontación que lleven al niño a desarrollar estrategias cada vez más eficientes y económicas para solucionar los problemas que se le presentan.

La función de la enseñanza ha de ser entonces, la de planear las experiencias de aprendizaje partiendo de las características y los conocimientos previos de los niños. La secuencia que se haya de seguir tome en cuenta los siguientes aspectos:

La resolución de problemas debe caracterizar el proceso de enseñanza de la multiplicación, dando sentido o significado a los problemas, los cuales deben ser planteados en función del contexto en el cual se desenvuelve el alumno; Además de lo anterior, se debe dar significado a cada uno de los pasos que se consideran necesarios al resolver un problema.

Asimismo es importante que cuando una estrategia haya conducido a un error, sea tomada en cuenta pues a partir de ello, el niño puede aprender distintas propiedades de los conceptos que intervienen en el algoritmo y de las que no es previamente consciente. De igual forma, es importante tomar en cuenta los errores de los alumnos, pues ellos expresan el carácter incompleto de sus

⁴ Ídem p 96

conocimientos, aparte de que permiten tanto a los compañeros como al profesor ayudarlo a completar el conocimiento adicional o llevarlo a comprender por sí mismo aquello que estaba mal, que se revelaba falso e incomprensible.

Otro punto importante a considerar es el significado que comúnmente se le da en la escuela al concepto de multiplicación, pues se observó que este concepto suele ser manejado en la mayor parte de los casos como una suma reiterada, ante ello habría que señalar que si bien la multiplicación corresponde en algunos casos al modelo de suma reiterada, este modelo solo es aplicable a situaciones simples, y solo es una forma de representar la estructura multiplicativa.

Como quedó evidenciado en este estudio, hay otras categorías de los problemas de multiplicación, como las categorías de isomorfismo de medidas y producto de medidas expuestas por G. Vergnaud, que deberían ser abordadas ó estudiadas con mayor frecuencia en el salón de clase, conforme el grupo vaya evolucionando en su aprendizaje.

Otro aspecto a tener presente en la resolución de problemas, es que el docente trabaje de manera constante la fase de comprensión del problema de tal forma que con el trabajo persistente los alumnos vayan aprendiendo a analizar los problemas. Considero, que debería existir una transición del lenguaje informal o cotidiano a otro formal o matemático, en el que el niño vaya aprendiendo a hacer un análisis detallado de los problemas, y que ayude a que el niño aprenda a discernir de información adicional o superficial y pueda extraer solo los datos necesarios., ya que en el transcurso de la investigación me pude percatar que los niños suelen presentar errores cuando el texto del problema presenta datos que son irrelevantes e innecesarios en su resolución.

Ante las dificultades presentadas en la resolución de problemas, el docente podría inducir en su caso el uso de representaciones simbólicas, por ejemplo, el docente podría promover el uso de diagramas.

Con respecto a la enseñanza del algoritmo de la multiplicación, considero que la ejercitación del algoritmo es necesaria, pero sólo en el momento en que el niño lo haya comprendido y entendido su utilidad.

Es importante destacar que su enseñanza no debe ser enfocada exclusivamente a la memorización de la técnica por medio de la cual se ejecuta el algoritmo, ya que ello ocasionará que el niño no realice un aprendizaje que lo lleve a comprender el significado de las acciones que esta operación implica.

Ante este problema, pienso que, con base en los conceptos previos que alumno posee respecto a: valor posicional, la propiedad distributiva de la multiplicación y el sistema de numeración decimal, habría que hacer enlaces de estos conceptos con la enseñanza del algoritmo de la multiplicación de tal forma que permita al alumno comprender el significado de las reglas y las acciones que él lleva a cabo al ejecutar el algoritmo.

La enseñanza de la multiplicación no debe ser reducida a un aprendizaje mecánico donde la multiplicación sea tan sólo una suma económica, y donde la enseñanza de los algoritmos se vea reducido a una mecanización de pasos que el alumno debe seguir para resolverlos, sin un contexto particular, considerándolos como un fin en sí mismos, pues de seguir con esta forma de enseñanza-aprendizaje los niños siempre que vean el signo correspondiente a la multiplicación o cualquier otra operación podrán reconocerlos y en algunos casos llegar a realizarlos satisfactoriamente, pero no serán capaces de aplicarlos en situaciones o contextos diferentes a las escolares.

e) Limitaciones en la realización de la investigación

En esta investigación se han utilizado problemas de estructura multiplicativa de varias categorías semánticas, los resultados principales del estudio sólo se han obtenido a partir de problemas de isomorfismos de medidas y producto de medidas de una sola etapa, es decir que para su solución basta con una sola

operación. Por tanto los resultados no pueden generalizarse a otras categorías semánticas como son problemas de proporcionalidad simple y de aquellos problemas que requieren más de una operación.

Las limitaciones antes señaladas, así como las variables controladas marcan las sugerencias para futuras investigaciones. Investigaciones con niños de otro tipo de nivel socioeconómico, de distinto grado, que bien pueden complementar los resultados aquí obtenidos. Así mismo, se hace necesario realizar investigaciones complementarias sobre el efecto de las variables controladas en los resultados obtenidos.

También son necesarios estudios en los que se considere el efecto de otro tipo de variables. Se debería estudiar como influyen el tipo de números (naturales, decimales) y la naturaleza de las cantidades (discreta, continua) tanto en el índice de dificultad de los problemas, como en el tipo de errores que cometen los niños.

Otro aspecto a tratar es el análisis conjunto de otro tipo de categorías como problemas de arreglo rectangular y de proporcionalidad simple.

En relación con los problemas de combinatoria habría que analizar el tipo de estrategias que utilizan los alumnos en su resolución, sobre todo con niños de niveles superiores a los que participaron en este estudio. En este caso, es importante cuidar también el texto de los problemas que generalmente son más largos y complejos de plantear y buscar vocabulario adecuado al niño.

Otra línea de investigación que podría desprenderse producto de esta tesis es analizar si existe una correlación entre la resolución de problemas de estructura multiplicativa y la ejecución del algoritmo de la multiplicación lo cual no pudo efectuarse por la limitante del factor tiempo.

Por ultimo es necesario marcar que las sugerencias aquí presentadas deben ser analizadas y en su caso contrastadas empíricamente.

BIBLIOGRAFÍA

ADQUINS, Dorothy, Wood. Elaboración de test: desarrollo e interpretación de los test de aprovechamiento. Editorial Trillas. México, 1965.

BAZÁN, A y E. Mancera (Compiladores) Antología Seminario de Educación Matemática. Especialización en Educación Matemática. U.P.N. México, 1985.

BONILLA E, Martha. Sánchez H Neila. Vidal A, Martha. Como enseñamos la aritmética. Universidad Distrital IDEP. Colombia. 1999.

BRUECKNER, Leo. Diagnóstico y tratamiento de las dificultades de aprendizaje. Madrid, 1980.

CARRETERO, Mario. Constructivismo y educación. Editorial Luis Vives. Buenos Aires Argentina 1993.

CASTRO E, Rico L. Estructuras aritméticas elementales y su modelización. Grupo Editorial Iberoamérica. Bogotá 1995.

CASTRO, M Enrique. Niveles de comprensión de problemas verbales de comparación multiplicativa. Universidad de Granada 1995.

De la Torre Saturnino. Aprender de los errores. El tratamiento didáctico de los errores como estrategia de innovación. Editorial. Escuela Española. Madrid 1993.

ED LABINOWICZ. Introducción a Piaget. Pensamiento, Aprendizaje y Enseñanza. Fondo Educativo Interamericano. Por Addison Wesley Longman de México. 1998

GIMÉNEZ Jóaquim, Girondo Luisa. Cálculo en la escuela. Reflexiones y propuestas para la enseñanza primaria. Editorial GRAÓ. Barcelona 1993.

GRONLUND, N. E. Elaboración de test de aprovechamiento. Editorial Trillas. México.

HERNÁNDEZ Sampieri, Roberto. Fernández Collado Carlos. Baptista Lucio Pilar. Metodología de la investigación. México. Editorial McGraw-Hill. 1998.

INHELDER B. Aprendizaje y estructuras del conocimiento. Ediciones Morata. Madrid. 1996.

KILPATRICK, Jeremy. Gómez, Pedro. Rico Luis. Educación matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Grupo Editorial Iberoamérica. Bogota 1995.

LERNER de Zunino, Delia. Antología La matemática en la escuela III. U.P.N. México 1988.

MAZA, Gómez Carlos. Multiplicar y dividir a través de la resolución de problemas. Aprendizaje Visor. España 1991.

MAZA, Gómez Carlos. Enseñanza de la multiplicación y división. Matemáticas cultura y aprendizaje. Editorial Síntesis. Madrid 1991.

ORTON, Anthony. Didáctica de las matemáticas. Cuestiones, teoría y práctica en el aula. Ediciones Morata. Madrid 1998.

PERALTA, Javier. Principios didácticos e históricos para la enseñanza de la matemática. Huerga Fierro Editores. Madrid-España 1995.

PIAGET, Jean. Seis estudios de psicología. Editorial Planeta. Barcelona 1981.

PIAGET, J. La equilibración de las estructuras cognitivas. Editorial Siglo XXI. Madrid 1978.

PIERRE, Astolfi, Jean. El error un medio para enseñar. Editora Díada. España 1999.

POLYA George. Como plantear y resolver problemas. Editorial Trillas. México. 1989.

PUIG, L y Cerdan F. Problemas aritméticos escolares. Editorial Síntesis. 1995.

QUEVEDO, Blanca. En: Funcionamiento del error en el aprendizaje de las matemáticas. Universidad de Zulia. Maracaibo 1999.

ROJAS Soriano, Raúl. Guía para realizar investigaciones sociales. México. Plaza y Valdés. México 2001.

SANTOS Trigo, Luz Manuel. Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas. Grupo Editorial Iberoamérica. México 1997.

SEP. Plan y Programas de Estudio. Educación Básica Primaria. 1993

SEP. Avance programático. Matemáticas. Cuarto grado México 1998.

SEP. Libro para el Maestro. Matemáticas Cuarto grado. México 1996

SEP. Fichero de actividades didácticas. Matemáticas. Cuarto grado. México 1996.

SEP. Libro del alumno. Matemáticas. Cuarto grado. México 1997.

VERGNAUD, Gerard. El niño, las matemáticas y la realidad. Problemas de enseñanza de las matemáticas. Editorial Trillas. México 1998.

WILLERDING Margaret. Conceptos matemáticos un enfoque histórico. Compañía Editorial Continental, S.A. CECSA. 1976.

Nombre: _____

Escuela: _____ **Grupo:** _____

Lee con atención y resuelve cada uno de los problemas que se te presentan a continuación.

1. En una fiesta de cumpleaños Juanita tenía cuarenta y siete bolsas de dulces le dio quince bolsas de dulces a Carmen. ¿Cuántas bolsas tiene Juanita?

Resultado: _____

2. Susana fue a la nevería y compró catorce helados a seis pesos cada uno. ¿Cuánto dinero pagó por todos los helados?

Resultado: _____

3-¿Cuánto dinero pago Miguel por todos sus coches, si compró seis coches a catorce pesos cada uno?

Resultado: _____

4.-Oscar tiene doce gorras; Pepito tiene dieciséis gorras más que Oscar. ¿Cuántas gorras tiene Pepito?

Resultado: _____

5.-Daniel tiene treinta y cuatro canicas. María tiene dos veces más canicas que Daniel. ¿Cuántas canicas tiene María?

Resultado: _____

6.-Luis tiene dieciséis balones Raúl tiene nueve balones, ¿Cuántos balones más tiene Luis que Raúl?

Resultado: _____

7.-Ana tiene treinta y cuatro fichas de colores. María tiene el doble de fichas de colores que tiene Ana, ¿Cuántas fichas de colores tiene María?

Resultado: _____

8.-En el salón cinco, hay catorce filas de butacas. En cada fila hay doce butacas.
¿Cuántas butacas tiene el salón?

Resultado: _____

9.- Pedro formó doce filas de soldados. Si en cada fila hay catorce soldados. ¿Cuántos soldados en total tiene Pedro?

Resultado: _____

10.-Rocío fue de compras al supermercado y le compró cuatro blusas y tres faldas a su hija Natalia.

Blusas: (azul, rosa, blanca, verde)

Faldas: (azul, roja, marrón)

¿De cuántas formas distintas puede vestirse Natalia usando esas blusas y esas faldas?

Resultado: _____

Nombre: _____

Escuela: _____

Grupo: _____ Edad: _____

INSTRUCCIONES: Realiza las operaciones que se te presentan a continuación.

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 31 \\ \times 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 213 \\ \times 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 212 \\ \times 4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 5 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 34 \\ \times 6 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 38 \\ \times 4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 126 \\ \times 5 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 124 \\ \times 6 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 157 \\ \times 4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 206 \\ \times 5 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 304 \\ \times 6 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 803 \\ \times 4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 126 \\ \times 50 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 134 \\ \times 60 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 172 \\ \times 90 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 136 \\ \times 51 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 134 \\ \times 62 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 712 \\ \times 94 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 624 \\ \times 172 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 642 \\ \times 172 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 264 \\ \times 171 \\ \hline \end{array}$$