SECRETARIA DE EDUCACIÓN CULTURA Y DEPORTE

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

UNIDAD UPN 042

EL CERO Y SU RELACIÓN CON LOS NÚMEROS NATURALES

TESINA EN LA MODALIDAD DE ENSAYO

para obtener el título de:

LICENCIADO EN EDUCACION

Plan '94

Presenta

MANUEL ALEJANDRO PEREZ SEGOVIA

CIUDAD DEL CARMEN, CAMPECHE ABRIL 2004

D E D I C A T O R I A

A MIS MAESTROS

Por sus conocimientos compartidos
conmigo, en el logro de mis metas.
Para ellos mi admiración y respeto.

ÍNDICE

INTRODUCCION

La presente tesina aborda un concepto común y aparentemente conocido, aplicado por el ser humano, es un elemento cuyo descubrimiento revoluciona el mundo de las matemáticas y hace posible el desarrollo de la ciencia y de la tecnología. Se hace referencia al cero, ese número tan conocido que da origen a las matemáticas actuales; por eso la presente tesina se titula "El cero y su relación con los números naturales".

Este trabajo se estructura en seis capítulos:

El capitulo uno aborda los fundamentos teóricos de la enseñanza de las matemáticas y el enfoque pedagógico del programa de educación primaria en lo que respecta a esta asignatura: cabe señalar que la orientación que guía el proceso enseñanza-aprendizaje en el nivel antes citado se apoya en la teoría psicogenética de Jean Piaget y en las posturas constructivistas de apropiación de conocimientos.

El capitulo dos aborda el cero y los antiguos sistemas de numeración: en él se analiza la necesidad de estudiar al cero y su función en los números naturales, como principio constructor de otros números. Además analiza el valor que toman los números en función del lugar que ocupan en la cifra, es decir se estudia el valor absoluto y relativo de los mismos.

El capítulo tres se encarga de los números naturales y su relación con el cero, es importante señalar que para fines didácticos el cero en la educación primaria es considerado como número natural, además en este apartado se abordan las cuatro operaciones básicas aunque para ejemplificar el uso del cero desde una perspectiva didáctica en el sexto capítulo se trabaja solo con la suma y la resta.

En el capítulo cuatro se estudia la función del cero como exponente y para contar, también se revisan los diferentes sistemas de numeración en los cuales el cero es un elemento fundamental.

El capítulo cinco, plasma los fundamentos básicos de los sistemas de numeración y presenta como ejemplo de ellos los sistemas de numeración binario, vigesimal y el más común de todos el decimal.

El capitulo sexto, en él se plasman algunas sugerencias didácticas para enseñar el cero en la escuela primaria, para ello se trabaja con la adición y sustracción de números naturales.

Las conclusiones aspectos relevantes del trabajo que el sustentante destaca como punto final a la tesina: en las cuales presenta la noción de fa función del cero y la conceptualización de este número, como conceptos de suma importancia en el proceso de aprendizaje de las matemáticas; su enseñanza y comprensión por educandos y maestros hace posible su uso adecuado, así como sus aplicaciones diversas en situaciones de la vida cotidiana.

La apropiación del cero implica una reconstrucción de situaciones concretas, en las cuales el alumno percibe el significado de este número, a través de la ausencia del objeto, de tal forma que se dé cuenta de lo que representa el concepto; el sistema primario decimal y en el conjunto de los números naturales.

"Se considera al cero como un elemento, que representa la ausencia de cantidad o la cardinalidad del conjunto vacío. El cero es mucho más que esto, es un símbolo numérico que hace posible el desarrollo del proceso de numeración, conteo y la realización de los cuatro operaciones básicas en aritmética (suma, resta, multiplicación y división). De ahí la importancia para la integración y formación de cantidades"[1].

El cero debe y tiene que ser un concepto matemático que el alumno construya

y comprenda: que asimile mediante su propia acción sobre los objetos. Para realizar esta tesina se preguntó

¿Cuál es la relación de los números naturales con el cero?

E I cero, sus funciones y operaciones: es un tema que poco se debate por ser, aparentemente común; sin embargo es un concepto cuya relevancia en el mundo de las matemáticas está presente en todos los ámbitos de esta ciencia. A pesar de ello, existen varias dificultades en el manejo del tema, el material bibliográfico es muy limitado, los referentes que se encuentran para su información, se refieren al proceso histórico de su aparición.

En este trabajo se trata de abordar al cero desde la perspectiva de ser el gran constructor de las series numéricas; sin él¡ el sistema numérico decimal, se reduciría a los números de 1 al 9 y la serie no crecería; además es también digna de destacar en esta tesina la función de este número en las operaciones fundamentales y su importancia capital en la aritmética.

El concepto del cero es un conocimiento fundamental en el proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas para todos los niveles educativos. El proceso histórico de aparición del cero es un hecho paralelo al desarrollo de la humanidad; es más, el surgimiento de este concepto marca un hito en el devenir del pensamiento humano. La

---

[1] Abacuc, Pérez. Matemáticas 1. Pág. 16

enseñanza del cero en la escuela primaria, no es una tarea inútil, sino un hecho que permite al alumno recrear la historia de las matemáticas y comprender muchas de las propiedades de los números y el valor posicional de las cifras. El cero da sentido al sistema de numeración decimal y permite conocer y comprender otros sistemas de numeración menos común, pero no por ello menos relevantes.

El cero, concepto básico de las ciencias exactas, es la razón de este trabajo; presentar su origen, sus características y sus funciones, es el propósito que orienta esta tesina.

- Por ello los objetivos de este trabajo son:
- Presentar el desarrollo histórico del cero.
- Presentar el cero y sus funciones en las operaciones básicas de la aritmética.
- Identificar el cero como principio básico en la construcción de otros números.
- Identificar al cero y su función en el valor posicional de los números naturales.

1. TEORIA QUE SUSTENTA EL PROCESO ENSENANZA-APRENDIZAJE DE LAS MATEMATICAS EN LA ESCUELA PRIMARIA

1.1. El aprendizaje en matemáticas

La adquisición de conocimientos matemáticos, así como de otras ciencias requiere de la acción del sujeto sobre el objeto de conocimiento, asimismo, es indispensable conocer el nivel cognitivo y las características del educando para desarrollar un proceso de enseñanza-aprendizaje, que satisfaga sus necesidades y responda a sus intereses.

Para Jean Piaget, existen tres tipos de conocimientos: físico, social y el lógico-matemático, los cuales se dan simultáneamente cuando el niño entra en contacto con el medio.

En la pedagogía de Piaget, el proceso de aprendizaje presupone una actitud mental que propicia la construcción de nuevos conocimientos.

"Piaget distingue cuatro grandes periodos en el desarrollo de las estructuras cognitivas, ligadas al desarrollo de la afectividad y socialización del niño".[2]

Periodo sensoriomotriz! comprende de cero a dos años aproximadamente

- El niño incorpora las cosas novedosas externas a su esquema de asimilación.
- Existe egocentrismo integral.

Invención de nuevos medios mediante combinaciones mentales. Periodo preoperatorio, comprende de los dos a los siete años aproximadamente. La función simbólica tiene gran desarrollo. Entre los tres y los siete años, la actividad lúdica es la característica.

- Tiene un pensamiento irreversible (preoperatividad).

Periodo de las operaciones concretas comprende de los siete a 11 u 12 años aproximadamente.

En este periodo existe un gran avance en cuanto a la socialización y objetivación del pensamiento. Mediante un sistema de operaciones concretas, realiza estructuras de agrupamientos: los niños trabajan en colaboración! existe mayor relación entre loS infantes y los adultos.

Periodo de las operaciones formales, comprende de 11 a los 15 años.

- Existe gran desarrollo de los procesos cognitivos, debido a las nuevas relaciones sociales que ellos hacen posibles.
- Inicia el pensamiento forma, que hace posible la coordinación de opera-

[2] UPN. Desarrollo del niño y aprendizaje escolar. Pp. 106-111

ciones que no existían.

- En esta etapa el individuo empieza a manejar proporciones lógicas, las confronta mediante un sistema reversible de operaciones: lo que le permite solucionar problemas cada vez más complejos.

1.2. Enfoque pedagógico del programa

"Una vez que se completan las etapas de enseñanza-aprendizaje de los conceptos, generalizaciones, nuestros estudiantes tienen los elementos teóricos necesarios para incluir resultados correctos a los innumerables problemas matemáticos sustentados en los planes y programas de estudios vigentes con las siguientes recomendaciones".[3]

Para ampliar y consolidar los conocimientos, habilidades matemáticas y las capacidades para aplicarlas en el planteamiento y resolución de problemas de la actividad cotidiana, es necesario que el alumno:

- Resuelva problemas utilizando la curiosidad y la imaginación creativa.
- Adquiera seguridad y destreza a través de la solución de problemas.
- Reconozca y analice los distintos aspectos que componen un problema.
- Elabore conjeturas, las comunique y valide.
- Reconozca situaciones análogas (desde un punto de vista matemático: cuando se tiene un problema cuya estructura es equivalente a alguno tratado con anterioridad).
- Escoja y adapte la estrategia adecuada para la resolución de un problema.
- Comunique estrategias, procedimientos y resultados de manera clara y concisa.
- Prediga y organice resultados.
- Desarrolle de manera gradual el razonamiento deductivo.

El aprendizaje de las matemáticas se puede desarrollar si se considera lo siguiente:

- Que el punto de partida para la construcción de diversos conceptos y métodos sea el conocimiento que posea el alumno y haya adquirido en su experiencia cotidiana.
- Se parta de situaciones ligadas a problemáticas cercanas al estudiante para que a partir de procesos paulatinos de generalización acceda a diversos niveles de

[3] Planes y programas de estudio 1993 Educación Primaria. p. 37

abstracción.

- Se utilicen situaciones problemáticas de otros cursos para ilustrar la utilidad de la matemática en sus estudios siendo necesario apoyar a los profesores de otros espacios curriculares para que con mayor frecuencia se utilicen las matemáticas en sus cursos, y los alumnos puedan observar la utilidad de los contenidos matemáticos en contextos diferentes a la clase de matemáticas.
- No se introduzca al alumno en la aplicación de las matemáticas de manera forzada. Los problemas se representan mencionando las limitaciones de los enfoques utilizados al resolverlo y las posibilidades prácticas de las soluciones obtenidas.
- Se impulse la búsqueda de claridad, simplicidad, economía y racionalidad en los procesos de solución de problemas y de construcción de argumentaciones o razonamientos matemáticos.
- Se hagan aclaraciones constantemente con relación al tipo de inferencias y recursos que el estudiante está utilizando; esto es, deberá aclararse si lo que está realizando es una verificación, un proceso inductivo, una detección de analogías y/o una deducción.
- Lograr que alumnos mejoren su formación matemática mediante la revisión de su actitud ante esta disciplina. Si su posición ha sido negativa, es necesario lograr que le pierdan el miedo, que lleguen a sentirse atraídos por ella, que se sientan capaces de aprender, de preguntar lo que no entiendan sin sentirse rotulados como "poco inteligentes" o "lentos". El cambio de actitud requiere una revisión vivencial de la historia personal de cada adolescente en relación con la matemática.
- Que los alumnos se apropien del lenguaje matemático, lo hagan suyo y lo usen para comunicarse entre sí para expresar sus ideas y descifrar las de otros aunque inicialmente su empleo sea poco preciso y riguroso. Es necesario desmitificar el lenguaje matemático, lograr que no sea considerado como algo sagrado, incomprensible o inalcanzable. Una práctica útil consiste en la invención de códigos compartidos por un grupo, lo que facilita la comprensión del carácter convencional del lenguaje matemático.
- Utilizar el tiempo adecuado.
- Utilizar diferentes herramientas didácticas.
- Fomentar la creatividad en el adolescente tratando de que el alumno tenga la

relación de maestro-alumno y padres de familia.

Es importante considerar al realizar la tarea didáctica el enfoque del proceso enseñanza-aprendizaje, del programa de educación primaria, el cual en la asignatura de matemáticas se sustenta en la teoría constructivista. En dicha perspectiva constructivista: la construcción del conocimiento se realiza a través de la actividad del sujeto: con lo que resulta primordial: no hay "objeto de enseñanza" sino "objeto de aprendizaje".

La construcción del conocimiento.

Diversos estudios relativos a la forma en que los estudiantes resuelven problemas matemáticos, han llevado a la explicación de corte constructivista, de que la estructura de la actividad de resolución de problemas surge como un objeto cognoscitivo (un esquema) a partir de la reflexión que el sujeto hace sobre sus propias acciones. "El conocimiento matemático" es resultado de esta reflexión sobre acciones interiorizadas - la abstracción reflexiva- la matemática no es un cuerpo codificado de conocimientos sino esencialmente una actividad.

La tarea del educador constructivista consiste en diseñar y presentar situaciones que le permitan al estudiante asimilar y acomodar nuevos objetos de aprendizaje y nuevas operaciones asociadas a él. El siguiente paso consistirá en socializar estos significados personales a través de una negociación con otros estudiantes, con el profesor, con los textos, etc.

Al poner énfasis en la actividad del estudiante! se genera una didáctica basada en la teoría constructivista la cual exige también una actividad mayor de parte del educador. El docente ya no se limita a tomar el conocimiento de un texto yexponerlo en el aula, o en unas notas, o en otro texto con mayor o menor habilidad. La actividad demandada por esta concepción es menos rutinaria, en ocasiones impredecibles y que exige del educador una constante creatividad.

De acuerdo a la interpretación constructivista todo esto permite cambiar las concepciones de la colectividad (sujeto cognoscente) sobre la disciplina, la matemática se reconoce como una actividad, siendo la interiorización de las acciones su punto de partida.

El conocimiento matemático es un cuerpo de conocimientos que anteceden al estudiante, debiendo el educando desarrollar un comportamiento cognoscitivo acorde con la normatividad de la disciplina matemática.

La construcción del significado.

El núcleo de la actividad constructiva por parte del estudiante consiste en construir significados asociados a su propia experiencia incluyendo competencia lingüística. La socialización de este proceso consiste en la negociación de tales significados en una comunidad (el salón de clases) que ha hecho suyo ese proceso constructivo. La sensación de objetividad que se desprende del objeto negociador, induce a la creencia que este conocimiento compartido preexiste a la comunidad que se dedica a su construcción. Es necesario analizar con cuidado las relaciones entre matemática y lenguaje. Este último es un campo de experimentación para el estudiante.

A lo largo del proceso constructivo (que es permanente), el estudiante encuentra situaciones que cuestionan el "estado" actual de su conocimiento y le obligan aun proceso de reorganización, con frecuencia va a rechazar por inviable mucho de lo que ya había construido.

La matemática da cuenta de la estructura de un mundo ideal! cuya materia prima son las acciones interiorizadas del sujeto. Es necesario el empleo de un lenguaje formal para hablar de este mundo ideal. En la versión de la didáctica derivada del formalismo existe la tendencia a identificar los objetos de la matemática (que son objetos epistémicos, pues ellos constituyen nuestro saber) con los nombres que usamos para referirnos a tales objetos en la lengua formal.

La enseñanza a través de la problematización.

La parte más importante del programa de educación básica actual es el cambio que sugieren en cuanto aplicar la enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas. Esta característica intenta propiciar formas de motivar las clases de matemáticas y la participación de los estudiantes. Es necesario reafirmar que un objetivo fundamental de la escuela primaria es enseñar a los niños a resolver problemas.[4]

Saber matemáticas es hacer matemáticas.

Las situaciones problema ayudan a formar el contexto para el aprendizaje y el hacer matemáticas, motivan y establecen la necesidad de nuevas ideas y procesos de simbolización. Los estudiantes pueden enlazar nociones y nuevos aprendizajes en el contexto del problema. Se puede olvidar una noción pero el contexto en el cual se aprendió puede servir para recordarla o reconstruirla, de esta forma se incrementa o robustece la comprensión conceptual de los estudiantes dando significado y relevancia a

[4] UPN. Los problemas matemáticos en la escuela. pág 14

lo aprendido.

La enseñanza puede hacerse más afectiva a ayudar al desarrollo intelectual, si se incorporan en ella problemas desafiantes. Los estudiantes de manera natural, buscan oportunidades para usar sus metas en formas nuevas y creativas. Las matemáticas generadas en la solución de problemas ofrecen una estimulación apropiada a las capacidades de los estudiantes y son importantes para su futuro. Sin embargo, las situaciones problema deben seleccionarse para proporcionar experiencias ricas conceptualmente y formación académica.

Lo más conveniente es que dichas situaciones estén ligadas a los intereses de los estudiantes y ser suficientemente desafiantes pero no excesivamente frustrantes.

Las actividades propuestas al alumno suscitarán su interés en la medida en que le permitan involucrarse: y en la medida en que mantengan su atención hasta encontrar una solución.[5]

La enseñanza a partir de problemas implica que:

- Los temas deberían integrarse en una selección de actividades conceptualmente ricas.
- Se debe involucrar a los estudiantes activamente en el proceso de aprendizaje investigando y explorando individualmente y en grupos.
- Se debe motivar la enseñanza con contextos relevantes. Los estudiantes deberían experimentar el uso de los conceptos en contextos reales o matemáticos.
- Las actividades de matemáticas deben desarrollarse tanto dentro como fuera del salón de clases.
- Las actividades de matemáticas deben relacionarse con temas como el arte y la ciencia.
- Los maestros deben facilitar el aprendizaje, no sólo ser transmisores de conocimientos.

Al resolver un problema se puede echar mano de diferentes recursos. Es difícil reconocer un problema escolar que no sea un ejercicio rutinario, que se resuelva exclusivamente a partir de un solo contenido matemático. Cuando se resuelve un problema se ponen en juego diferentes recursos y habilidades. Resolver un problema no significa encontrar una solución, incluso en el caso de que la solución sea única, lo importante es

[5] Ibídem.págs. 21-22

entender la estructura del problema, enfocarlo desde diversas perspectivas; modificarlo para comprender los alcances y límites de las soluciones encontradas.

Un problema plantea una situación que debe ser modelada para encontrar la respuesta a una pregunta que se deriva de una situación, la resolución de problemas se refiere a la coordinación de experiencias previas al conocimiento e intuición, en un esfuerzo para encontrar una solución que no se conoce. A grandes rasgos puede decirse que al resolver un problema1 el sujeto:

- Formula el problema en sus términos propios. .
- Experimenta, observa) tantea.
- Conjetura.
- Valida.

La etapa de validación es central en este proceso porque a través de ella la conjetura puede ser reformulada, ajustada para dar mejor cuenta de la situación planteada por el problema; o puede mostrarse falsa, encontrarse un contra ejemplo que la invalide, con lo que será necesario construir una nueva conjetura teniendo en cuenta los errores anteriores que valen como ensayos. Dentro de la actividad matemática la validación se da en un proceso dialéctico entre el que resuelve y el conocimiento matemático establecido, representado por los profesores de la materia, o por la misma teoría matemática.

Características de la resolución de problemas escolares.

- Entender el problema.
- Desarrollar y llevar a cabo una estrategia.
- Evaluar la solución.

Un aspecto sumamente importante en el proceso de resolución de problemas y que debe considerarse parte inherente a él, es el error. El error que el alumno comete al resolver un problema o llevar a cabo un algoritmo, merece ser considerado como fuente de conocimiento. Al maestro le permite detectar dificultades conceptuales de las que no había sido consciente y que pueden afectar a buena parte de sus alumnos; dificultades de comprensión en su lectura; términos desconocidos para sus alumnos y que admiten una significación distinta de la que el contexto del problema .supone. Por su parte, si al alumno se le invita a discutir su resolución, si se le permite explicar sus concepciones, sus estrategias, buscar la manera de validar su resultado en un ambiente propicio para el diálogo, es capaz de percatarse del error cometido y de buscar y proponer una resolución, estrategia o alternativa1 y en esta búsqueda puede aclararse un concepto o comprenderse mejor.

Entre los comportamientos con los que el maestro puede ayudar a crear una atmósfera propicia para la práctica de resolución de problemas, se pueden mencionar:

- Animar a los estudiantes a explorar cualquier idea que pueda ayudarlos a entender y/o resolver un problema, sin censurar las ideas generadas.
- Reconocer y reforzar los diferentes tipos de habilidad o excelencia de los estudiantes.

La resolución de problemas es un proceso y como tal debe considerarse. Las acciones del maestro deben estar encaminadas a asegurarse de que el problema ha sido comprendido por los alumnos antes de que éstos procedan a la resolución: discutiendo las palabras del texto que eventualmente les causen dificultades; observando el trabajo de los alumnos durante la resolución; e interrogándolos para identificar las dificultades que enfrentan, animándolos a desarrollar una o varias estrategias; y si es necesario, hacerles varias sugerencias.[6]

Es muy probable que en el trabajo necesario para hacer que los profesores reconozcan en la resolución de problemas una fuente de conocimientos1 que les permita optar por un acercamiento a los diferentes temas de estudio del programa de matemáticas a través de problemas, sea un trabajo que requiera de muchos años de paciente labor; en las que tal vez sea el mismo maestro el que se adentre en áreas de la matemática que hasta ahora le son desconocidas, a través del planteamiento de algunos problemas clave que despierten su interés y curiosidad por saber cuál podría ser la solución y cuál la manera o maneras de encontrarla.

[6] Cochram, David. La enseñanza a través de problemas. Pág. 69.

Esquema para la enseñanza de las matemáticas a través de la problematización

Actividad sugerida	Habilidad que se propicia	Énfasis	Utilidad didáctica
Planeamiento de un problema	Reconocer y analizar los distintos aspectos que componen un problema, fomentar la curiosidad	Utilidad matemática	Motivación para el estudio de las matemáticas
Discutir el tipo de soluciones factibles	Resolver problemas utilizando la curiosidad y la imaginación creativa y las actitudes que la hicieron posible	Integración del conocimiento que posee	Destacar la importancia de considerar los significados de los conceptos
Después de resolver el problema, y discutir sobre los datos que son necesarios para obtener una solución dada, considerando los datos necesarios si se determina la solución y se conservan algunos de los datos originales	Adquirir seguridad y destreza a través de la solución de problemas. Elaborar conjeturas comunicarlas y validarlas. Comunicar estrategias de manera clara y concisa	Diversas formas de influencia de los datos en la resolución de problemas	Reconstrucción de los realizado e identificación de loa información relevante
Uso de los mismos datos pero modificando el contexto del problema	Reconocer situaciones análogas	Reconocimiento de esquemas generales relativos a procedimientos y significados de los conceptos	Identificación de las diversas interpretaciones de los conceptos y operaciones en situaciones aparentemente similares
Hacer énfasis en la aplicación de definiciones	Desarrollar de manera gradual el razonamiento deductivo	Identificación de empleos y no empleos indicando la necesidad de considerar ejemplos o no	Propiciar la claridad y precisión de los razonamientos.

2. EL CERO Y LOS ANTIGUOS SISTEMAS DE NUMERACION

2.1. Antecedentes del cero

La creación de los números surge por la necesidad que tiene el hombre por llevar un registro de los sucesos o actividades que realiza en su vida diaria; así el ser humano desde épocas prehistóricas consignó lo que cazaba, pescaba y recolectaba.

Cuando descubre la agricultura y se hace sedentario, desarrolla la matemática, ya que tenía que saber el momento propicio para sembrar, cosechar, etc.; es decir, tuvo que medir el tiempo y plasmarlo por medio de la escritura, la cual desempeña un papel relevante en la evolución de las matemáticas: la idea de cantidad tiene que ser registrada por medio de marcas representativas; luego para concretar con mayor precisión el conteo, se crearon símbolos adecuados para ello; llegando con este proceso de desarrollo, al concepto de número, noción imprescindible para el desarrollo de la civilización actual.

La representación de los números ocurre de diferentes maneras, según cada cultura; de las cuales solamente dos lograron desarrollar el principio posicional, es decir, el valor de cada símbolo depende del lugar que ocupa, gracias al uso del cero; estos pueblos fueron: el maya y el hindú.

Sin duda alguna, la cultura maya tiene el honor de haber logrado un profundo desarrollo matemático: referente a su sistema de numeración, adelantándose por siglos a los hindúes, a los griegos ya los romanos, quienes se preciaban de tener una gran cultura, base de la civilización actual. No tener un apropiado manejo de los números, les impidió lograr grandes avances en el cálculo matemático.

Sin embargo, los mayas lo lograron gracias a observaciones que hallaron en la propia naturaleza, como fue el cuerpo humano. Se inicia de esta manera el proceso de conteo, utilizándose primeramente los veinte dedos que conforman las manos y los pies, integrando un grupo o conjunto que al dividirse queda cuatro cincos.

A través del tiempo otras observaciones condujeron a relacionar este tipo de conteo por medio de un ábaco natural, encontrado en la víbora de cascabel (AjauCan), llamado Canamayté. Con el empleo de este ábaco natural, los números adquirieron un concepto sagrado en dicha cultura, concediéndosele al mismo tiempo una enorme importancia para su empleo en la Astronomía y la Agricultura.

Para las matemáticas a este período que comprende del preclásico superior 350 a.c. 150 d.C.-, se le consideró el más fructífero en relación con los períodos anteriores. Fue entonces cuando se dio la creación del símbolo más grandioso de todo sistema de numeración: la abstracción matemática llamada cero. "EI cero es un concepto superior, para algunos un meta concepto, en teoría de conjuntos es considerado y de hecho lo es la cardinalidad del conjunto vacío, porque éste no tiene ningún elemento"[7]. Este número que resulta de fácil aplicación y comprensión para la civilización contemporánea! es un elemento matemático cuya elaboración comprensión y uso, tuvo que ser madurado por la humanidad durante más de cinco mil años, para poder se plasmado como elemento de conteo y constructor de sistemas de numeración en los albores de los primeros siglos después de Cristo y surge como una aportación al mundo de las culturas del medio oriente y de las precolombinas entre estás se puede citar a la cultura maya. El cero es un gran salto que dio el ser humano, tan importante como el descubrimiento del fuego y el invento de la rueda.

Dicho concepto lo compartieron solamente con el sistema de numeración hindú - arábigo; la única diferencia es que éstos lo lograron siglos después, por lo que el mérito corresponde al pueblo maya.

El considerar este sistema es referirnos al nuestro, ya que su uso es universal. "el sistema decimal surge cuando el hombre se da cuenta que puede usar 10 dígitos para contar y que este conteo es natural puesto que puede usar sus dedos como un ábaco natural y hacer realizar cuentas con facilidad y precisión de tal forma que el contar y operar se vuelve un proceso que responde a su naturaleza misma"[8] Esto se logró gracias a que la cultura árabe tuvo el trabajo de difundirla por los continentes y además lo perfeccionaron para un mejor uso. Los símbolos que se emplean en este sistema de numeración son diez! del cero al nueve! dándole un gran realce al cero (pues gracias a su empleo es fácil comprender el sistema posicional). Este símbolo fue creado en su concepción por un ingenioso matemático, ciego de nacimiento y de origen árabe, llamado Tawarik Makutín, quien lo llamó la nada que yo veo encerrada por una línea.

A lo largo de la historia de cada cultura, también existieron como aspecto principal para su reconocimiento como tal, los números, solamente que representados con diferentes símbolos.

---

[7]VISION 2000. Matemáticas. Vol.2 .pág. 729.

[8] Vázquez Sánchez Artemio. La historia de las matemáticas. Pág. 127.

2.2. Sistemas de numeración

Un sistema de numeración se define de la siguiente manera: Es un conjunto de reglas que sirven para expresar y escribir los números[9].

Con lo anterior queda aclarado en forma sencilla lo que es un sistema de numeración, haciendo notar que todos ellos tienen una base. También es conveniente saber lo que es un sistema numérico: es 0 son las propiedades particulares de los diferentes conjuntos de números (enteros, racionales, naturales: etc.); es decir, son independientes de los símbolos usados para representarlos.

Continuando con estas consideraciones, aunque parezca de poca importancia, es necesario para la comprensión del tema en estudio, hacer una distinción entre los términos numer, numeral, cifra y digito

Número. Es la cardinalidad (poner en correspondencia uno a uno dos conjuntos de tal forma que se pueda establecer el cardinal o totalidad de elementos puesto en correspondencia entre dos conjuntos con el mismo número de elementos aun conjunto de tres sillas le corresponde un conjunto de tres alumnos: es decir el cardinal de estos conjuntos es tres) asociada aun conjunto de cosas u objetos, considerado también como signo convencional que sirve para expresar una cantidad grande o pequeña de cualquier conjunto.

Numeral. Son los símbolos que se utilizan para representar o escribir un número, ejemplo: el ocho.

Para nosotros es: 8

Para los romanos: VIII

Para los mayas: ●●●
——

Los numerales sirven para comunicar ideas de números.

Las cifras son signos que denotan ideas de los números, que no se pueden encontrar como objetos tirados en cualquier parte, como por ejemplo: una piedra a la cifra es la abstracción de una cantidad que se representa con una serie de numerales que le dan sentido a dicha cantidad en función de la posición que ocupan en el número, ejemplo 1214,. se tiene en el número la cifra dos, ésta representa la cantidad de dos centenas, también se tiene el cuatro que representa cuatro unidades, que leídas en

[9] BALDOR Aurelio. Aritmética. p. 27

conjunto indican la cantidad de mil doscientos catorce unidades, éstas pueden se pesos} anima/es, personas etc."[10]

Los dígitos son los diez primeros números naturales, es decir el 0,1 2,3, 4, 5, 6, 7, 8, y 9; con ellos se puede construir toda la serie numérica desde el o hasta infinito.

2.3. Notaciones antiguas

Desde los tiempos antiguos, el hombre se sintió con la necesidad de anotar o registrar las cuentas de los sucesos y de las cosas; lo cual se infiere gracias a las marcas encontradas en las cuevas donde habitó, muescas hechas en palos y huesos, o los nudos hechos de cordeles, donde cada marca -se supone- representa una cosa.

Con estos hechos no podemos decir que el hombre sabía contar, sino simplemente había hallado una manera de mostrar la cantidad de cosas. Estas marcas fueron las primeras representaciones de los números, aunque el hombre primitivo no alcanzó a comprenderlo.

Al transcurrir el tiempo se abstrae el concepto número a partir de la cardinalidad de ciertos conjuntos, ejemplo, el conjunto de los dedos de la mano, conjunto de los dedos de un pie, conjunto de pesos que equivale a cinco pesos.

Después de haberlo logrado, algunos pueblos iniciaron con la formación de conjuntos de 10 elementos (sumerios, egipcios e hindúes); otros se valieron de grupos de 20 (mayas) y de 60 (babilonios).

Principio aditivo

Para escribir los números, los pueblos antiguos se valieron de diferentes principios; fundamentalmente todos utilizaron el aditivo. Este consiste en sumar los valores de los numerales, para obtener el valor total de números que se quiere representar. Ejemplos:

Para tener referencia de los símbolos usados en la antigüedad, se presentan loS símbolos usados por los egipcios, cuales contaban en agrupamientos de diez en diez. Los símbolos que utilizaron son los siguientes.

Vara	1
Talón	10 = 10 x 1
Cuerda	100 = 10x 10

[10] SANTILLANA. Matemáticas para primaria. Vol 1. p. 29.

Flor 1000 =10x10x10

Dedo 10000 =10x10x10x10

Pez 100000 =10x10x10x10x10

Hombre asustado 1000000 =10x10x10x10x10x10

Para formar cantidades este sistema utiliza el principio aditivo, consiste en sumar el valor que se le asigna a cada símbolo, y así conocer de qué cantidad se trata.

1) Los egipcios, sumaban los valores de los símbolos hasta acumular el valor del número que se quería escribir.

100+40+5= 145

2) Con los aztecas observamos el mismo principio, los valores de los símbolos se suman para obtener el total del número.

400 + 20 + 2 =422

3) El pueblo romano utilizó el principio aditivo.

2000 + 300 + 60 + 3 =2363

4) También los mayas se valieron del principio aditivo, para escribir sus números.

1 + 1 + 1 + 1 = 4

5 + 2 = 7

Principio sustractivo

"Algunos pueblos no tuvieron la paciencia necesaria para escribir un símbolo hasta nueve veces antes de llegar a la biena"[11]. Los egipcios y los babilonios sí lo hacían; pero los demás, idearon símbolos intermedios (mayas, griegos y romanos). Véase como ejemplo el número nueve.

Egipcios: I I I I I I I I I

Babilonios: 

Mayas: 

Griegos: ___ IX

Romanos: IX, el IX es un símbolo intermedio

Observamos que los romanos fueron muy pacientes, para escribir un número cercano a otro superior, indicaban este hecho escribiendo una cantidad menor a la izquierda de ese número superior próximo a ser alcanzado.

---

[11] Romanos: IX, el IX es un símbolo intermedio. Habacuc Pérez Matemáticas primer curso, Editorial Herrero, p. 87 Las bienas son agrupamientos formados para facilitar un cómputo.

IV IX XL

5-1 =4; 10-1 =9; 50-10=40;

XC CD CM

100-10=90; 500-100=400 1000-100=900

Este principio puede generalizarse aún más, pero hay que considerar que los romanos sólo utilizaban las seis combinaciones anteriores, y nunca las siguientes: IL, IC, XD, XM, DM, IM, etc.

Todo símbolo fundamental (I, X, C, M) que se ubica a la izquierda de otro mayor, se debe restar su valor, son las restricciones siguientes:

El I solo debe restar de V y de X.

El X solo debe restar de L y de C.

El C solo debe restar de D y de M.

Para concluir, los romanos fueron los únicos que usaron el principio sustractivo. Principio multiplicativo

Cuando se pretendía alcanzar un número mayor, se presentaba la dificultad de inventar más símbolos. Antes de que el hombre buscara una solución adecuada para representar cantidades mayores, se pensó en alterar a los símbolos en su valor por medio de multiplicadores, es decir, factores que aumentan el valor de los mismos. Con esto se llaga al principio multiplicativo.

Los romanos lo utilizaron colocando una barra superior al numeral, que lo multiplica por mil:

$\overline{V} = 5000$; $\overline{VII} = 7000$; $\overline{X} = 10000$

Con el uso de multiplicadores: estos pueblos lograron disponer de símbolos para representar números "grandes".

Principio partitivo

Este principio se conoce gracias al pueblo azteca, que lo utilizó. Para poder representar parte del valor de un número que se representa por un símbolo, los antiguos mexicanos fraccionaron dicho símbolo, dándosele a cada parte un valor equitativo.

El jeroglífico IIII representa al número 20; al fraccionarse, cada parte tiene un valor.

I = 5 II = 10 III = 15

También existió otra cifra para representar un valor mayor: = 400, con el cual representaban valores pequeños al dividirla, ejemplo:

V = 100 W = 200 VVV = 300

A estas divisiones de valores se les llamó valor parcial.

Principio de posición

Lo característico de los sistemas posicionales es que en ellos los símbolos no tienen un valor fijo, sino que éste depende del lugar en que están colocados"[12]. Entiéndase que en el sistema de posición existe una base elevada a su respectivo exponente, la cual da distintos valores a los números que se colocan en diferente posición; cuando se necesita representar la ausencia de una de ellas, se hace con el cero, lo que contribuye a comprender las reglas de la escritura y lectura de cantidades .

No solamente la numeración hindú -arábiga logró la existencia de dicho símbolo tan determinante para la representación correcta de los números; también los mayas lo emplearon en el mismo sistema de posición para representar las cantidades muy grandes! con lo cual se facilita su escritura.

Este símbolo decisivo contribuye a representar ausencia de valores, de, acuerdo con la posición que ocupa.

Al ejemplificar lo anterior, quedará de la siguiente manera:

Los mayas emplearon solamente tres símbolos: entre los cuales se incluye el cero. Los otros dos son el punto (•) y la raya (__). El empleo de este principio fue de abajo hacia arriba! aumenta su valor. Ejemplos:

Tercera posición	__	$5X20_2 = 5X400$	=	2000
Segunda posición		$0X20_1 = OX20 =$		0
Primera posición.		82X20 =2X1=		<u>2</u>
				2002

Segunda posición	$3X20_1 = 3X20=$	60
Primera posición	OX20 o= OX1 =.	<u>0</u>
		60

b) Ahora en el sistema decimal de numeración se utilizan diez símbolos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Para formar cantidades mayores, los valores aumentan de diez en diez, de derecha a izquierda. Ejemplos:

[12] PÉREZ Habacuc C. Matemáticas I. p. 94

1) 2022

2 x 1 00 = 2 x 1= 2

2 x 1 01 = 2 x 1 0= 20

0 x 1 02 = 0 x 1 00= 0

2 x 1 03 = 2 x 1 000 = <u>2000</u>

2022

2) 3303

3 x 1 00=3 x 1= 3

0 x 1 01=0 x 1 0= 0

3 x 1 02=3 x 1 00= 300

3 x 1 03=3 x 1 000= <u>3000</u>

3303

En el ejemplo 1, el número 2 va adquiriendo distintos valores, los cuales son relativos; pero en sí por su forma y nombre tiene su valor llamado absoluto. El cero que está en el orden de las centenas indica ausencia de cantidad.

Valor absoluto y relativo de los números

Cuando cada cifra de un número es afectada por un multiplicador, el cual no está escrito, se obtiene su valor relativo.

Los valores absoluto son los que en si contienen los números.

Ejemplo e valor relativo y absoluto, sea el número 3235:

El valor relativo de tres en el número 3235, es igual:

De izquierda a derecha el primer tres tiene un valor relativo de 3x1 03 = 1000 el segundo tres tiene un valor relativo de 3x101 = 10. El valor absoluto de tres es el que representa en la recta numérica independientemente de la posición que ocupa en el número 3235: en este caso el valor absoluto de tres es tres porque su posición en la recta es la siguiente:

0 1 2 3

Afirmando lo anterior entendemos: "Los números tienen dos valores. El que le corresponde por su forma, absoluto; y el de su orden de colocación, relativo."[13]

Podemos afirmar entonces que el principio de posición no es otra cosa que el principio multiplicativo, con la única excepción de que los multiplicadores no aparecen escritos por ninguna parte. Gracias a esta simplificación el hombre alcanzó en la notación numérica un auxiliar eficaz para el desarrollo sorprendente de la investigación matemática.

En los sistemas posicionales actuales: los multiplicadores son potencias de un número llamado base "es el número de dígitos que interviene en la conformación del sistema numérico, así se tiene en sistema binario o base dos interviene dos dígitos el (0,1), en el de base cuatro (0,1,2,3), en el de base 10 (O, 1,2,3,4,5,6,7,8,9)"[14]. La base puede ser elegida en forma arbitraria, ejemplo:

1) 505 (base 10)

5X10 = 5X1 = 5

0X101= 0X10 = 0

5X102 = 5X100 = 500

505 (base 10)

2) 302 (base 5)=77(base 10)

2X5 = 2X1= 2

0X51 = 0X5= 0

3X52 = 3X25= 75

77 (base 10)

[13] Moreno José y Mariano Ortiz, La matemática en el aula de educación primaria. pág. 64.

[14] Habacuc Pérez, Matemáticas primer curso. Editorial Herrero. Pág. 87. Base es el número de elementos que forman el sistema

3. LOS NUMEROS NATURALES

3.1. Los números naturales

La necesidad del ser humano, condujo a ampliar sus conocimientos sobre los números; para representar la cantidad de elementos que contienen un conjunto, llamándolo: cardinalidad de un conjunto. Esto contribuyó a formar el concepto de los números naturales, al que se le consigna con la letra N. Este conjunto parte del cero, por ser la cardinalidad más pequeña del conjunto vacío, y al ir agregándole un elemento sucesivamente a cada conjunto, va creciendo la cardinalidad hasta el infinito.

Fundamentalmente la integración de los números naturales, se tiene los siguientes principios llamados axiomas de Peano.

1) Todo número natural tiene un sucesor. Por grande que sea un número, siempre hay otro que sigue: la sucesión es ilimitada.

2) Existe un número que no es sucesor de ningún número natural: el cero. Todos los demás números naturales son sucesores de algún otro: el 10 es sucesor del 9; el 98 es sucesor del 97; el 115, del 114; etc. Pero el número cero es sucesor de ningún número natural.

3) Ninguno de los números naturales es sucesor de dos números diferentes. Si hemos dicho que el 10 es sucesor del 9, el 10 no será sucesor de ningún otro número natural, como no sea el 9. Se dice que el orden que existe entre los números natura/es es más completo que el que pueda existir entre una familia.

4) Si un conjunto de números naturales contiene al cero y al sucesor de cada uno de sus elementos, contendrá a todos los números naturales.

5) Este axioma, llamado principio de inducción finita es muy importante para la aritmética, citado por Habacuc, págs. 55 y 56. Para su representación de estos números suelen hacerse sobre una semirrecta partiendo del cero, quedando de la siguiente manera:

O 1 2 3 4 5 6 7 8...

3.2. Adición de números naturales

Es una operación que se realiza con dos números naturales, dando como resultado otro número natural. Cuando se trabaja con conjuntos, es importantes señalar la diferencia que existe entre una suma de números y una unión de conjuntos, ya que en este caso el resultado sería otro conjunto; ejemplo:

3.2 Adición de números naturales

Es una operación que se realiza con dos números naturales, dando como resultado otro número natural.

Cuando se trabaja con conjuntos, es importante señalar la diferencia que existe entre una suma de números y una unión de conjuntos, ya que en este caso el resultado sería otro conjunto; ejemplo:

Adición de números naturales 4+20 = 6

En esta unión de conjuntos, no dio un resultado de elementos que indique una suma de sus cardinalidades; resulta ser entonces que, si algún elemento de los conjuntos está en ambos no se repite dos veces en la unión; en el caso anterior el primer conjunto tiene cuatro elementos y el segundo tiene dos, pero el resultado no es seis, Sin embargo cuando se suman dos números naturales el resultado si es otro número natural.

Cuando se quieren sumar varios números resulta imprescindible, realizarlos de dos en dos hasta obtener nuestro resultado final: a esta forma de operar se le llama binaria.

Ejemplo:

8+4+1+5=18

Se produce de la siguiente manera: ocho más cuatro es igual a doce; doce más uno es igual a trece; trece más cinco es igual a dieciocho. A cada uno de los números que se suman se les llama sumandos y el resultado suma.

Sumandos suma

4 + 8 = 12

3.2.1. Propiedades de la adición

Al realizarse una operación de suma, siempre debe apegarse a ciertas propiedades que le dan validez.

Propiedad de cerradura

Esta indica que la suma de dos números naturales siempre resulta otro número natural.

A esta propiedad también se le puede denominar clausurativa, por limitarse solamente al conjunto de los naturales! aunque existan otros conjuntos de números más complicados.

En general si a y b son números naturales, c que es la suma: también será otro natural.

Simbólicamente: a + b = c siendo números naturales, c.

Para saber si la suma es un número natural, bastará con saber que los números sumados son naturales.

Propiedad conmutativa.

8+6 = 6+8

Claramente se observa que para sumar dos números naturales no importa el orden de los sumandos, el resultado es el mismo.

Tendremos: El orden de los sumandos no altera la suma.

Simbólicamente: m + n = n + m

Propiedad asociativa

Como su nombre lo indica, para poder sumar tres o más sumandos, basta con asociarlos para facilitar la solución.

45+30+23+52+38+25=213

45	52	98
30	38	luego: +115
23	25	
98	115	

Dentro de la operación con varios sumandos, es conveniente utilizar los paréntesis asociándolos de dos en dos, de tres en tres, etc.; lo cual indica que se deben realizar primero las operaciones que se encuentran dentro del paréntesis.

(45+30)+(23+52)+(38+25)=   (75+75)+63=   150+63=213

En forma simbólica quedará: si a, b ,c ,d y e son números naturales, entonces, (a+b) + (c + d) + e = a + (b + c) + (d + e).

Propiedad del cero o elemento neutro

Todo número natural sumado con cero, siempre dará el mismo número natural. La existencia de este número es la edición de números naturales no altera el valor del sumando. Ejemplo:

5+0=5

En la adición de varios sumandos se puede agregar o suprimir ceros según convenga y el resultado no se altera.

$5 + 3 + 0 + 9 + 12 = 29$

$5 + 3 + 9 + 12 = 29$

$5+0+3+0+9+0+12+0=29$

Simbólicamente: $a + 0 = a$: $0 + a = a$ cuando a es un número natural.

3.3. Sustracción de números naturales

Operación aritmética estrechamente ligada con la adición de números naturales. Además se le considera como la operación inversa a la adición, ya que para representarla se realiza a través de una suma.

$8+7= 15$

$15-8= 7$

Notaremos que existe un cambio de signo de operación y de lugar en los números.

El signo menos (-) representa una operación de resta. y cada número adquiere un nombre diferente que en la suma; al 15 se le llama en la sustracción minuendo, al 8 sustraendo y, al resultado resta o diferencia.

Para poder realizar la sustracción entre los números naturales debe cumplirse con la condición de que el minuendo sea mayor o igual que el sustraendo; en caso contrario no se haría la resta.

Simbólicamente tenemos: $a- b = c$ ó $a- a = 0$

3.3.1. Propiedades de la sustracción

En una sustracción no existe o no son aplicables las propiedades: asociativa, conmutativa, ya que solamente se realiza con dos números: llamados minuendo y sustraendo, sin embargo por su característica, tiene las siguientes propiedades.

Propiedad uniforme

Restando miembro a miembro dos igualdades se obtiene otra igualdad.

$M = n$

$P = q$

$M - p = n - q$

Leyes de monotonía

Restando miembro a miembro dos desigualdades de distinto sentido, se obtiene una nueva desigualdad del mismo sentido que la primera.

$m > n$	$8 > 6$	$m < n$	$10 < 12$
$p < q$	$3 < 4$	$p > q$	$7 > 5$
$m-p > n-q$	$8-3 > 6-4$	$m-p < n-q$	$10-7 < 12-5$
	$5 > 2$		$3 < 7$

Restando miembro a miembro una igualdad de una desigualdad se obtienen como resultado una desigualdad de sentido contrario a la dada.

$M = n$	$7 = 7$	$m = n$	$9 = 9$
$P < q$	$5 > 3$	$p < q$	$5 < 7$
$M - p > n - q$	$5 - 7 < 7 - 3$	$m - p > n - q$	$9 - 5 < 9 - 7$
	$-2 < 4$		$4 > 2$

Restando miembro a miembro una desigualdad de una igualdad, se obtienen como resultado una desigualdad del mismo sentido que la dada.

$M > n$	$8 > 5$	$m < n$	$6 < 7$
$P = q$	$3 = 3$	$p = q$	$7 = 5$
$M - p > n - q$	$8 - 3 > 5 - 3$	$m- p < n - q$	$6 - 5 < 7 - 5$
	$5 > 2$		$1 < 2$

El cero en la sustracción: cuando el sustraendo contiene ceros, al realizar la operación el valor del minuendo solamente se coloca en el resultado o diferencia en la columna respectiva.

$452 - 200 = 252$

Simbólicamente tenemos: $(a - 0 = a)$

Si el cero está contenido en el minuendo y el sustraendo es diferente de cero, en dos cantidades que se están restando; este adquiere un valor posicional de una cantidad, prestándoselo al número inmediato superior. Ver ejemplo página siguiente:

$$\begin{array}{r} 809 \\ -\underline{450} \\ 359 \end{array}$$

3.4. La multiplicación de los números naturales

La multiplicación es una suma abreviada de dos o más sumandos iguales; ejemplo:

5 + 5 + 5 + 5 = 20

Abreviando: 4 veces el 5 = 4 x 5 = 20

A cada uno de los números que integran una multiplicación se les llama factores y al resultado producto.

8 X 3 = 24

factores producto

El signo por (X) se emplea para determinar una multiplicación entre dos números naturales.

También a cada factor se le atribuye un nombre específico: al primero que índica cuantas veces se repite el otro se llama multiplicador y el segundo que se repite en una suma es multiplicando.

5 X 6 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 30

multiplicador multiplicando

3.4. 1 Propiedades de la multiplicación

Propiedad de cerradura o clausurativa

Al multiplicar dos números naturales siempre se obtienen otro número natural. Se le considera de esta manera por ser una suma abreviada de números naturales.

Simbólicamente se escribe: a X b = c

El signo por (X), cuando se escribe entre literales se puede suprimir.

a x b = c sería ab = c

Propiedad conmutativa

El orden de los factores no altera el producto.

5 X 4 = 20 4 X 5 = 20

En los dos casos el resultado es el mismo.

Propiedad Asociativa

Para obtener el producto de 3 o más factores, resulta conveniente asociarlos con paréntesis.

5 X 5 X 4 = (5 X 5) X 4 = 5 X (5 X 4) = 1 00

De las dos formas de asociarlo, el resultado es el mismo.

Elemento neutro de la multiplicación

Todo número natural multiplicado por 1: siempre da el mismo número natural.

1 X 2 = 1 + 1 = 2

En este ejemplo vemos que el 1 se suma 2 veces. Obteniendo como resultado el número 2.

Propiedades del cero en la multiplicación

El empleo del cero como factor obliga a que el producto sea cero.

3 X 0 = 0 + 0 + 0 = 0

Aplicando la propiedad conmutativa de la multiplicación en el ejemplo anterior tenemos:

3 X 0 = 0 X 3 = 0

En este caso de 0 X 3, por deducción es igual a 0, ya que carece de sumandos que sumar.

Concluyendo: Todo número natural multiplicado por cero, siempre da como resultado cero. Esta propiedad es única para el cero.

Propiedad distributiva

Consiste en distribuir los números naturales que se suman o se restan según el caso: con el factor que se multiplica.

(6 + 2) X 5 = (6 X 5) + (2 X 5) = 30 + 10 = 40

(4 -1) X 3 = (4 X 3) -(1 X 3) = 12- 3 = 9

En estos ejemplos el factor que multiplica es 5 y 3 sucesivamente.

3.5. División de números naturales

La división es la operación inversa a la multiplicación.

Dado el producto de dos factores y uno de ellos, hay que encontrar el otro factor desconocido, por medio de la división.

8 X 5 = 40

40 + 8 = 5

En una división cada número recibe un nombre: El que divide se llama divisor; el que es dividido, dividendo, al resultado, cociente y al último que sobra, residuo, ejemplo: 25 + 8 =

		3 cociente
Divisor	8	25 dividendo
		1 reciduo

División Exacta

Es cuando el cociente, al ser multiplicado con el divisor, da el dividendo;

ejemplo:

40 + 8 = 5, porque, 5 X 8 = 40

Generalidades de la división

Al dividir dos números iguales el resultado es 1; ejemplo: 4 + 4 = 1

porque 1 X 4 = 4.

Si se divide un número natural entre uno el cociente es el mismo número natural; ejemplo: 5 + 1 = 5~ porque, 5 X 1 = 5

Cuando el dividendo es cero y el divisor un número cualquiera diferente de cero, el cociente es cero; ejemplo:

0+ 6 = 0, porque, 0X 6 = 0

Simbólicamente: 0 = 0, porque, o (h) = 0/h

Al dividir un número diferente de cero entre cero! no se puede, pues no existe ningún natural que multiplicado por cero dé diferente de cero, ejemplo:

4 -:- O = (carece de significado).

Simbólicamente: k =¿ (0) = K/0

En los números naturales y en cualquier otro conjunto numérico la división entre cero no esta definida en cálculo se dice que este tipo de operación de cero entre cero o cualquier otro número entre cero se llama límites indeterminados y su resultado tiende a infinito, este es el caso de 0/0. o de X/0.

3.5.1. Propiedades de la división

Propiedad distributiva

La división como es el inverso de la multiplicación, cumple con esta propiedad respecto a la adición y sustracción de números naturales.

Propiedad distributiva respecto a la adición

Se puede dividir 15 + 9 entre 3, en dos formas diferentes:

$(15 + 9) + 3 = 24/3 = 8$

o bien $15/3 + 9/3 = 5 + 3 = 8$

Respecto a la sustracción

Para dividir una diferencia, se puede realizar de dos formas diferentes, obteniendo el mismo resultado.

1. $\frac{8 - 4}{2} = 4 – 2 = 2$

2. $\frac{8}{2} – \frac{4}{2} = \frac{4}{2} = 2$

Los dos casos de la división, serán válidos siempre y cuando la adición, al igual que la sustracción! sea de números naturales y el divisor divida exactamente a dichos números.

División inexacta

Esto sucede cuando no existe un número natural que multiplicado con el divisor, dé como resultado exactamente el dividendo.

A esta división también se la llama división euclidiana.

Se define: " El dividendo es igual al producto del cociente por el divisor más el residuo"

4. EL CERO COMO EXPONENTE Y ELEMENTO PARA CONTAR

4.1. El cero como exponente

La potenciación es una multiplicación de factores iguales:

2 X 2 X 2 X 2 = 16

Simplificando: 2^4 = 16

2 X 2 X 2 X 2 = 2^4 = 16

Esta expresión simplifica la multiplicación de un mismo factor. Ahora a cada uno de los números de la expresión se le da un nombre: al 2 que se repite. Se le llama base; al 4 que índica cuantas veces se multiplica la base, recibe el nombre de exponente y al número 16 que es el resultado, se le llama potencia.

Para determinar una potencia basta con multiplicar el factor o la base, tantas veces como indica el exponente. Ejemplo:

5^3 = 5 X 5 X 5 = 125

5 es la base

3 el exponente

125 la potencia

El producto de bases iguales con sus respectivos exponentes, resulta ser una suma de los exponentes. Así tendremos: 4 X 4 X 4 = 4^3

Con lo que se demuestra que al multiplicar dos o más expresiones con la misma base, solamente se suman los exponentes y se escriben la misma base; finalmente se efectúa la operación de potenciación.

4^6 = 4 X 4 X 4 X 4 X 4 X 4 = 4096

Ahora para hacer una división, entre dos expresiones con igual base, sus exponentes solamente se restan; o bien, al realizar la operación queda: $5^4 + 5^3 = 5^1$.

Como 5 es el dividendo y 5 es el divisor, se resta el exponente del primero menos el exponente del segundo.

Cuando una división de bases iguales con sus exponentes también iguales se realiza, el resultado de loS exponentes es cero. Ejemplo:

$8^3 + 8^3 = 8^{\circ} = 1$

Las operaciones de división también se representan en forma vertical y el resultado es el mismo que de una representación horizontal.

Observando los resultados nos daremos cuenta que hay exponentes.

También resulta importante señalar que cuando se escribe una base sin escribir el exponente, se le considera como exponente 1. Ejemplo:

$5 X 5 = 5_2$ ó $6_3 + 6_2 = 6$

Existe una posibilidad muy importante de obtener un resultado diferente a los ya mencionados y es el resultado con exponente cero:

$8_1 + 8_1 = 8_{8\text{-}8} = 8° = 1$

Esto es el resultado de dividir dos bases iguales con exponentes iguales.

$2_3 + 2_3 = = 2°$

$2° = 1$ por tanto, $2_3 + 2_3 = 2° = 1$

Sintetizando todo lo anterior tendremos una expresión o conclusión que se ha expuesto en los ejemplos anteriores: Todo número elevado al exponente cero es igual a 1.

4.2. El cero para contar

Una de las características principales del sistema de numeración decimal y vigesimal es que en común tienen un símbolo para representar al número cero. El empleo de este es tan efectivo, que al no haber existido, no hubiera sido posible interpretar el principio posicional donde cada número adquiere un valor distinto al valor que contienen como cifra.

Además el cero, al ser usado para contar y escribir cualquier cantidad donde es necesario representar la ausencia de un valor posicional, se convierte en el más imprescindible de esas cantidades. En este caso diremos por ejemplo: En el número 204, cada número adquiere un valor posicional; el 4 como unidad, el cero indica ausencia del valor 10, o sea las decenas, y por último tendremos al lugar de las centenas ocupado por el 2.

Desarrollándolo tendremos:

= 2 X 1 00 + 0 X 1 0+ 4 X 1

= 200 + 0+ 4

204 = 204

Sin la existencia de la representación gráfica de la nada (0), y la utilización del principio de posición: la matemática no hubiera evolucionado tanto en los cálculos y representaciones simbólicas simplificadas.

Ejemplificando nuevamente al cero: en el conteo, daremos con su enorme utilidad; puesto que al no tenerse este símbolo, la cantidad 2005, se escribiría 2 5, lo que podría prestarse a diferentes interpretaciones. Esto sucede cuando los conocimientos matemáticos han sido tratados con firmeza y exactitud y al mismo tiempo hayan sido retenidos.

4.3. El cero como número

Los números son ideas nuestras que se representan a través de símbolos, los cuales adquieren sentidos, existencia y vida cuando son acompañadas por otras ideas que juntas las rige. Tales ideas son la necesidad de una comunicación para su entendimiento.

A estos símbolos que representan los números se les llama cifra. Pero inicialmente, la palabra cifra fue con la que se le designó al cero ya que provienen de la voz árabe ziffeto que significa: lugar vacío.

Para la escritura de los números en nuestro sistema de numeración solamente se emplean los siguientes símbolos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

Las cifras correspondientes del 1 al 9 reciben el nombre de cifras significativas, ya que, por sí solas llevan un valor propio.

Sin embargo como el cero representa carencia de valor recibe el nombre de cifra no significativa o cifra auxiliar.

La cifra cero, surgió de la necesidad de poder representar al conjunto vacío o nulo de elementos; por lo que se le considera una cardinalidad de dicho conjunto.

Los números cardinales son aquellos que representan la cantidad de elementos que contiene un conjunto.

Así tendremos: la cardinalidad del conjunto vacío es 0

La cardinalidad del conjunto unitario es 1, y de acuerdo a la cantidad de elementos que integran un conjunto se le atribuye un número cardinal.

Concluyendo, tendremos que cero es el sinónimo de vacío, dichos términos han corrido con la misma suerte en nuestro lenguaje, al representar a la nada.

Se puede sustituir el uno por el otro, ejemplo:

Se puede decir que un conjunto tiene cero elementos en lugar de decir que es un conjunto vacío, o viceversa.

4.4. El cero como constructor de otros números

La conceptualización y el razonamiento lógico a que conduce la matemática al saberla interpretar da al ser humano un sentido amplio para la solución de sus problemas cotidianos; sin embargo existen otros detalles de los que no tienen suficientes conocimientos y presentan dificultades para el manejo, debido a que siempre se trata de hacer de ellos temas menos importantes, uno de éstos es el manejo del cero.

La enseñanza de los números representa para cada uno de nosotros una preparación amplia, no solamente en su conceptualización; sino que requiere de un razonamiento que ayude a cada educando a interpretar y entender su utilización dentro de un sistema de numeración.

La historia dice que la conceptualización y la representación gráfica del cero no se logró antes que los otros números; ocurrió cuando se tuvo la urgencia de crearlo para poder representar cantidades que necesariamente requerían de un símbolo que rellene loS espacios donde la anotación posicional marque ausencia de cifras significativas. Ejemplo:

Para construir la cantidad cien se necesita que el 1 ocupe la tercera posición y se le antepone dos ceros, no podríamos representarlo simbólicamente: 100; el primer cero contando de la derecha a la izquierda ocupa la primera posición o sea la de las unidades, el segundo cero indica el de las decenas y el 1 el de las centenas. Explícitamente los dos ceros indican ausencia de valores de esas posiciones.

En los alumnos de nivel primaria se presentan algunas confusiones en la construcción de números; principalmente cuando son números elevados, no buscan como acomodar los ceros, ejemplo:

Se les pide que construyan el número quinientos un mil uno; aquí surge la posibilidad de que escriban el número correcto es un poco complicada, y casi seguro de que no lo puedan construir correctamente; no toman en cuenta las clases en que se dividen los valores posicionales de los números.

Ahora bien: para la construcción de las cantidades grandes y enteras, es necesario conocer correctamente los valores posicionales; además de la conceptualización del cero y su uso dentro del sistema.

5. SISTEMAS DE NUMERACION DE DIFERENTES BASES

5.1. Principios fundamentales

Para cualquier sistema de numeración de diferentes bases, se deben de cumplir los siguientes principios:

"Un número de unidades de cualquier orden, igual a la base, forma otra unidad del orden inmediato superior”[15].

Ejemplo: En el sistema binario, dos unidades de un orden cualquiera, forman otra unidad del orden inmediato superior.

Escribir 2 ----------------------1 0

Escribir 4 -------------------1 0 0

Escribir 8 ----------------1 0 0 0

"Una cifra escrita a la izquierda de otra, representa unidades tantas veces mayores que las que representa la anterior, Como indique la base"[16] Baldor, p. 38. Ejemplos:

Se da el número 234

El 3! es cinco veces mayor que el 4, el 2 representa unidades cinco veces mayores que el 3! es decir! veinticinco veces mayores que lo que representa el 4.

Tomemos el número 146.

El 4 representa unidades diez veces mayores que el 6; el 1 escrito a la izquierda del 4, representa unidades diez veces mayores que I 4, es decir, unidades 1 00 veces mayores que las que representa el 6.

"En todo sistema, con tantas cifras como unidades tenga la base, se puede escribir todos los números". Baldor, pág, .39.

Podemos explicarlo de la siguiente manera:

En el sistema decimal, como la base tiene diez unidades, con diez cifras que son el 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, y el 0, se pueden escribir todos los números. En el sistema binario, como la base tiene dos unidades, con dos cifras que son el 0 y el 1, se pueden escribir todos los números.

5.2. Sistema de numeración vigesimal

"El hecho más notable en la matemática maya es su conocimiento del principio de posición y el uso del cero". Arquímedes Caballero, et. al. Pág. 58.

[15] Baldor Aurelio. Aritmética, Págs. 38
[16] Ibídem pág. 38

Este conocimiento solamente es compartido con los hindúes, puesto que ni los griegos y romanos lo conocieron, considerando que estas culturas son cuna de la civilización.

Como referencia, nuestro actual sistema de numeración decimal tiene su fundamento en el principio de posición y el cero.

La base del sistema de numeración maya fue el veinte.

Los mayas para escribir sus números emplearon solamente tres símbolos:

El punto. (1),

La raya (5), y

El cero (0).

Para escribir los números del 1 al 19 usaron el principio aditivo:

A partir del número 20 en adelante, entraba en juego el principio posicional, como se ha mencionado anteriormente, en el que todo símbolo numérico adquiere un valor diferente (valor relativo), según el lugar que ocupa en la representación numérica.

Para escribir las cantidades, loS símbolos se disponían en forma vertical: la primera posición se colocaba en el primer renglón de abajo; la segunda posición al que estuviera en el renglón inmediato superior y así sucesivamente las demás posiciones en forma ascendente.

El símbolo ..., colocado en primera posición representa 3 unidades; el símbolo .:::, colocado en segunda posición representa 8 veces 20 y el numeral. ., colocado en tercera posición representa 2 veces 400.

La cantidad representada es:

800 + 160 + 3 = 963

Al escribir los números se les presentaba un inconveniente: precisar el lugar o posición que correspondía a cada símbolo. Se necesitaba de un símbolo que representara un lugar desocupado, o sea, cuando careciera de unidad talo cual posición, pero sin tener valor alguno por sí mismo. Ese símbolo extraordinario fue el cero.

5.3. Sistema binario de numeración

Este sistema de numeración es el más sencillo que existe, porque consiste en agrupar los elementos de un conjunto tomando como base, el número 2; es decir, agrupando de dos en dos.

Como su base es 2, solamente se necesitan 2 símbolos: 1,0, para escribir cualquier cantidad

Es por esta razón que las calculadoras y computadoras lo utilizan, ya que estos dos símbolos se representan por los dos estados que tiene un circuito eléctrico: encendido (1) y apagado {2). A continuación se dan algunos ejemplos: Escribir el número 101 O (no se lee, un mil diez).

Debe decirse: el número uno, cero, uno, cero de base 2, ¿Qué cantidad representa el número 1010 de base 2, en el sistema decimal?

5.4. Sistema de numeración decimal.

Nuestro sistema de numeración se llama decimal, porque tiene como base el número diez.

Este sistema se descubrió y desarrolló en la India, aplicándose el principio de posición y el cero. Fue introducido por los árabes en Europa allá por el siglo XI, DC. Los símbolos o signos que se utilizaran para la escritura de los números, reciben el nombre de cifras o guarismos; estos signos son diez: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 0. Con ellos se pueden escribir todos los números.

Cuando los números se representan con una sola cifra, reciben el nombre de dígitos; cuando se representan con dos o más, se llaman polidígitos.

El principio de posición se ejemplifica con las cantidades siguientes: Consideremos el número 333.

Se emplea solamente la cifra 3, esta adquiere un valor diferente según el lugar que ocupa. Los lugares que ocupa la cifra tres, se van considerando de derecha a izquierda, por tanto:

El primer 3 vale, 3 unidades.

El segundo 3 vale, 3 decenas; o sea 3 veces 10 que es igual a 30 unidades.

El tercer 3 vale, 3 centenas; o sea, 3 veces 100 que es igual a 300 unidades. Podemos decir que la cifra 3 tiene un valor por su forma o figura: llamado valor y un valor por el lugar que ocupa, llamado valor relativo.

Ahora tenemos el número 4 040, escribiéndose de otra manera:

4 unidades de millar

0 centenas

4 decenas

0 unidades

Simplificando, se escribe: 4 040.

Nuevamente se observa que el valor de cada cifra depende del lugar en que esta situada:

El cero representa ausencia de unidades.

El cuatro representa 4 decenas; o sea, 4 veces 10 lo que es igual a 40 unidades.

El cero representa ausencia de centenas.

El cuatro representa unidades de millar; más claro, 4 veces 1000 que es igual a 4 000 unidades.

En el ejemplo anterior, el 4 tiene un valor absoluto que es el 4 y un valor relativo que es: 40 y 4 000.

El cero sólo sirve para indicar ausencia de unidades y centenas.

Ordenes de unidades) clases y períodos.

Ordenes de unidades. El orden de las unidades se considera de derecha a izquierda, según el lugar que cada cifra ocupa en un número. Ejemplo:

Consideremos el número 7 465.

5 es de primer orden

6 es de segundo orden

4 es de tercer orden

7 es de cuarto orden1 y así sucesivamente.

Clase. Cada tres órdenes de unidades forman una clase. Cada clase tiene unidades, decenas y centenas.

Clase de las unidades: unidades! decenas y centenas.

Clases de los millares: unidades, decenas y centenas de millar.

Clases de millones: unidades: decenas y centenas de millón.

Clases de los millares de millón: unidades: decenas y centenas de millar de millón.

Clases de billones: unidades, decenas y centenas de billón.

Períodos: Dos clases forman un período.

Primer período: primera y segunda clase; o sea, clase de las unidades y millares.

Segundo período: tercera y cuarta clase; o sea: clase de los millones y millares de millón

Tercer período: Quinta y sexta clase; o sea billones y millares de billón.

Lectura y escritura de los números.

La numeración hablada consiste en un conjunto de reglas que permite, por la combinación de pocas palabras, dar un nombre distinto a cada número.

La numeración escrita se ocupa de la forma correcta de presentar los números por medio de signos.

Para expresar verbalmente un número: se nombra sucesivamente la centena, decena y unidades de cada clase: comenzando por el orden más elevado.

"Al escribir un número de más de tres cifras conviene dejar entre clase y clase una pequeña separación. Las clases no deben de separarse con puntos y comas"[17].

De acuerdo a la información, anterior: se resaltan dos clases:

El número 325368747 se lee separado y nombrando la clase: 32 millones (clase de los millones), 536 mil (clase de los millares)7 874 (clase de unidades).

El número 6048005: las órdenes donde se encuentra el cero no figuran en la pronunciación:

6 millones, 4800, 5. No se nombra ni centenas ni millares, centenas y decenas, ya que el cero indica ausencia de las mismas.

---

[17] Arquímedes Caballero. La enseñanza de la aritmética en la escuela secundaria Pág. 62

6. SUGERENCIAS PARA ENSEÑAR EL CERO EN LA ESCUELA PRIMARIA

Objetivo general

Que el estudiante de sexto grado de primaria comprenda la relación que existe entre el cero y los números naturales.

Objetivos particulares

- Comprenda la trascendencia histórica del cero en el desarrollo de las matemáticas.
- Identificar el cero como principio generador de los números.
- Discutir el principio provisional de los números naturales y el papel del cero. .Descubrir la función del cero en los sistemas numéricos.

ACTIVIDADES PARA DESARROLLAR LA ENSENANZA

- Proponer una actividad que lleve al alumno a investigar sobre el cero.
- Elección de un problema significativo para los alumnos que involucre al cero y sus propiedades.
- Discusión y alternativas de solución al problema.
- Elección del modelo matemático para solucionar el problema.
- Desarrollo del calculo
- Verificación de la solución.

La secuencia de actividades propuesta es un esquema basado en la didáctica de las mtemáticas, así como en el método aritmético. Lo que se pretende es abrir un espacio de reflexión en el alumno: por medio de las inquietudes planteados por él mismo.

La presente estrategia de enseñanza se desarrolla en dos sesiones de clase.

Primera sesión de clase

Tema: La trascendencia del cero en la historia de los números y la conformación de los naturales y SUS operaciones fundamentales.

Los alumnos de sexto grado de primaria llegan de la primaria con ciertos conocimientos; por ello antes de iniciar con el tema es necesario partir de la forma siguiente.

Proponer un problema en el que el cero sea usado como sumando o como suma.

Ejemplo:

Juan compró un marcador fosforescente en \$20.00 y dos libretas en \$30.00; además compró un juego de geometría en \$50.00; si paga con un billete de \$100.00 ¿Cuánto de cambio le darán?

marcador fosforescente	\$ 20.00
libreta	\$ 30.00
Juego de geometría	\$ 50.00
Total	\$100.00

Paga con un billete de \$100.00

Importe de la compra \$ 100.00

A partir de este resultado se invita al alumno a pensar sobre cuál es la función del cero en la situación problemática anterior.

Después de este problema y de haber discutido ampliamente el resultado se les pide que planteen otro y lo resuelvan, y den la solución tanto en sistema decimal: como en otro sistema aritmético, por ejemplo el maya.

Pedro plantea el problema siguiente:

En esta época de calor mi papá compró un equipo de aire acondicionado en \$4080.00 y un abanico eléctrico en \$ 240.00. ¿Cuánto gastó el papá de Pedro? expresar el resultado en sistema decimal y en numeración maya.

Solución.	4080.00	Aire acondicionado
	+ 240.00	Abanico eléctrico
	5320.00	

5320 sistema decimal.

5320 y su representación vigesimal o en numeración maya.

Como se puede notar los estudiantes usaron las cuatro operaciones fundamentales de los números naturales: suma, resta, multiplicación y división.

Después de esta actividad se pide a los alumnos que planteen más problemas y que identifique el modelo matemático que hace posible su solución:

Ejemplos:

Un automóvil recorrió el martes 250 Km., el miércoles 180, el jueves 60, el sábado 30 y el domingo 70; ¿cuántos Km. recorrió a la semana y cuál es el promedio que recorre diario?

Semana

Lunes = A Martes = B Miércoles = C

Jueves = D Viernes = E Sábado = F Domingo = G

Modelo matemático de solución.

§ = Km. recorridos a la semana

§ = A + B + C + D + E + F + G.

A = 0 B = 250 C = 180 D = 60 E = 0 F = 30 G = 70

§ = 0 + 250 + 180 + 60 + 30 + 70

§ = 590.

§ = 590 Km. recorridos en una semana.

El promedio diario está dado por:

P.D. = promedio de Km. recorridos diario.

días de la semana = DS

P. D. = $\frac{\text{S = Km. en la semana} \quad 590}{\text{D.} \quad \text{días de la semana} \quad 7}$

P. D = $\frac{590}{7}$= 34.28 Km. diarios recorre el carro

El salario mínimo es de $ 30.00 si un obrero trabaja 10 días ¿cuanto gana? y si no trabaja ningún día ¿cuanto gana?

Días trabajados = 7

Salario = S.

Ganancia = G

Modelo matemático

G =T. S.

S = 30 .00 = salario

T = Días trabajados

S = $ 30.00T = 10 días

Cuando el trabajador; trabajó 10 días gana S XT =30 X1 O= $300.00

g = T. S.

g = 10 x 30.00 = $300.

Cuando el trabajador no trabaja ningún día

T = 0 S = $ 30.00

g = T. S.

g = 0 x 30. 00 = 0

Esto significa que si no trabajo ningún día no gano ningún centavo

Segunda sesión de clase

Tema: El cero y su cardinalidad y su función en el valor potencial de las cifras en el número.

Para iniciar esta sesión se les pide a loS alumnos que presenten o den ejemplos de conjuntos finitos.

Los conjuntos sugeridos son:

A. (Entidades de la península de Yucatán}

B. (Equipo de primera división del fútbol nacional.}

C. (Alumnos de sexto que sepan manejar un play station)

Los alumnos en los dos primeros conjuntos pueden precisar el número de elementos de estos conjuntos finitos, en el primer caso la cardinalidad es 3; porque el conjunto cuenta con tres elementos; en el segundo la cardinalidad es 24, porque hay 24 equipos que participan en esta liga.

En el tercer caso, los alumnos se dan cuenta que en el grupo de 28 alumnos, 14 alumnos juegan play station; es decir, es un conjunto finito de 14 elementos; y su cardinalidad es 14.

Aclarada la situación de la cardinalidad del conjunto vacío, la cual es cero; se les pide a los alumnos que den varias cantidades, para elegir una y analizar el cero y su función en el valor funcional; se elige 70024 y se plantean las siguientes preguntas:

¿Qué función tiene el cero en las cantidades?

¿Qué indica el cero en la cantidad 70024?

¿Qué valor tienen los ceros en la cantidad anterior?

¿Qué valor tiene el 7 en la cantidad presentada?

¿Entonces el siete es 7 y también 70 000? ¿Por qué?

Se les pide a los alumnos que presenten más números y los analicen desde este enfoque.

Analizar la funcionalidad del cero en otros En cuanto a las sesiones presenta das se puede comentar lo siguiente:

La evaluación de las sesiones se realiza a través de problemas que los alumnos van a plantear en clase, los cuales tendrán las características siguientes:

- Evaluación de las operaciones básicas de la aritmética.
- Pueden representarse a través de un modelo matemático.
- Transformen los resultados de sistema decimal a otro sistema numérico.
- Que puedan presentar los resultados por medio de notación desarrollada.

CONCLUSIONES

Con base en los textos revisados y las funciones que tiene el cero como generador de números en las operaciones básicas de aritmética, se menciona su proceso de enseñanza-aprendizaje de algunos problemas de aplicación práctica, significativos en la aula cotidiana del alumno, propiciando con ello que el educando logre la conceptualización correcta del cero en el conjunto de los números naturales: la que sirve como fundamento para comprender el valor posicional de las cifras en las aplicaciones.

La comprensión del concepto del cero parece una cosa simple y sencilla, sin embargo el alumno lo emplea de manera mecánica sin entender la función del cero y la connotación que éste tiene en todos los procesos matemáticos en los que interviene y sus operaciones en la solución de problemas.

Por ello se realiza este trabajo; con la intención de que el estudiante de primaria comprenda la relación del cero con los números naturales y su función en las cuatro operaciones básicas.

Además se puede destacar el descubrimiento del cero por el ser humano, es un paso gigantesco en el desarrollo de las matemáticas y de la civilización y la cultura del hombre.

- El cero como concepto, aunque aparentemente es una abstracción, de la cardinalidad de un conjunto vacío; su construcción y comprensión es una tarea que requiere del trabajo y actividades sobre objetos concretos, ya que para comprender la ausencia de cantidad: el alumno primero tiene un conjunto real.
- El cero y la notación decimal hacen posible el desarrollo de los sistemas numerlcos.
- También cabe destacar que las culturas que descubrieron el cero: son las que más desarrollaron las ciencias exactas: como la maya, la hindú, etc.
- El cero da sentido al proceso de construcción de los sistemas numéricos a través de la porción que ocupa en los contenidos, en este sentido el cero y todos los números en las cantidades; tenemos dos valores: el absoluto y el relativo; el absoluto es el número que representa en sí mismo; y el relativo es el valor que tienen por la posición que ocupa en la cantidad expresada.
- Es importante señalar que en la escuela primaria, el estudio del surgimiento del cero, ya que su estudio recrea la historia de la matemática

como producto del pensamiento humano.

- Presentar el cero! no solamente como una cifra del conjunto numérico, sino como un elemento que hace posible la construcción de los sistemas numéricos y como punto de partida para la comprensión del valor decimal de las cifras de cualquier cantidad en cualquier sistema numérico.

Para cerrar la presente tesina y después de presentar una alternativa para la enseñanza del cero, se puede decir que:

- Aparte del sistema de numeración decimal que es el común y el que utilizan los niños de manera cotidiana, el conocimiento del sistema de numeración vigesimal o sistema de numeración maya, ensancha el panorama matemático del alumno, y lo pone en contacto con sus orígenes culturales, los cuales pertenecen a esta gran civilización precolombina.

BIBLIOGRAFIA

ALVAREZ, Ma. del C. Acerca de la numeración. Ed. CINVESTAV-IPN. México, 1987. 63 pp.

BALBUENA, Hugo, David Block, Irma Fuenlabrada. "la enseñanza de las matemáticas", en: Cero en Conducta. Revista. Ed. SEPOMEX: México, 1991. Año 6: No.25. 67 pp.

BALDOR, Aurelio. Aritmética y Geometría México, Porrúa, 1981. 444 pp.

CABALLERO, Arquímedes. La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria. México, Ed. Herrero, 1985. 224 pp.

CONAFE. Recursos para el aprendizaje. México. SEP. 1994. 179 pp.

Piaget, Jean. Introducción a la Psicología. México. Editorial Piados. 1987. 316 pp.

MORENO Bayardo, María Gpe. Didáctica fundamentación y práctica. México. Editorial Progreso S.A. 1982. 119 pp

MORENO, José y Ortiz Mariano. Las matemáticas en el aula de educación primaria. SEP. México. 1995. 196 pp.

PEREZ, Habacuc. Matemáticas I Curso. México, Ed. Herrero, 1990. 326 pp.

SANTILLANA.México. diccionario de ciencias de la educación Grupo editorial Santillana. 1995. 1143 pp.

SANTILLANA. Matemáticas para primaria V. 1. México. Grupo editorial Santillana. 1995. 265 pp.

SECRET ARIA DE EDUCACION PUBLICA. Guía para el maestro primer grado de educación básica. México. SEP. 1992. 145 pp.

SECRETARIA DE EDUCACION PUBLICA. Plan y programas de estudio 1993 Educación Básica. México. SEP. 1993. 164 pp.

SECRETARIA DE EDUCACION PUBLICA. Propuesta para divertirse y trabajar en el aula sus números y su representación. México. SEP. 1992. 145 pp.

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL. !Construcción del conocimiento matemático en la escuela. México (LEP'94), SEP. 1996. 151 pp

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL. Desarrollo del niño y aprendizaje escolar. México. 1995. 273 pp.

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL Matemáticas y educación indígena II Antología. México, SEP7 1993.

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL. Matemáticas en la escuela I. México, (Antología LEPEP'85), SEP, 1988. 371 pp.

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL. Los problemas matemáticos en la escuela México (LEP'94), SEP. 1997. 181 pp

VÁZQUEZ Sánchez. Artemio. La historia de las matemáticas. México. Edit. Patria. 528 pp.

VISION 2000. Matemáticas. Vol. 2. México. Edit. Visión S.A. 1998. 412 pp.