INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA MEDIANTE EL USO DE MANIPULABLES Y LA CALCULADORA GRÁFICA

Universidad Pedagógica Nacional

Presentan:

Horacio Galicia Montilla

Verónica Marivel Pérez Pérez

Para obtener el título de

Licenciado en Psicología Educativa

Asesor:

Dr. Tenoch Esaú Cedillo Ávalos

Generación 1994-1998

2004

Índice

INTRODUCCIÓN

El contexto educativo

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas han sufrido una sensible transformación en los últimos años para dar respuesta a las actuales exigencias educativas de nuestro país. El desarrollo de nuevas formas electrónicas de comunicación y procesamiento de información ha realzado la importancia de la matemática como disciplina y como una parte importante del acervo cultural de la humanidad, lo cual ha conducido a dar un mayor énfasis a sus aplicaciones en la vida cotidiana, en la ciencia, y en las diferentes ramas de la actividad productiva (Plan y Programas de Estudio de Secundaria, SEP, 1993).

El trabajo que aquí se propone está dirigido a realizar investigación sobre los aprendizajes de los estudiantes de secundaria en el área de preálgebra. La elección de estos contenidos de enseñanza se debe esencialmente a que el álgebra es uno de los temas centrales de la matemática en la escuela secundaria y porque la reforma educativa destaca su papel en los nuevos programas bajo una perspectiva novedosa que propone una aproximación a esta disciplina menos abrupta, mediante la inclusión de temas orientados a preparar a los estudiantes para que tengan mayores posibilidades de éxito en sus estudios.

El álgebra, más que cualquier otra parte de la matemática en la secundaria, constituye un punto crucial en la transición de la aritmética y la geometría elemental de la primaria a la matemática de grados superiores. Casi toda la matemática del bachillerato y la educación superior requieren del lenguaje del álgebra para modelar situaciones y resolver problemas, así como para expresar relaciones cuantitativas en niveles cada vez más abstractos.

Para favorecer el acceso al álgebra, los nuevos programas de enseñanza recomiendan que desde el primer grado de la escuela secundaria los alumnos se familiaricen de manera gradual con el uso de expresiones con literales, con las primeras reglas de escritura algebraica y con otros temas que desde la aritmética y la geometría preparan el estudio de esta disciplina. Asimismo, se sugiere que las actividades de enseñanza deben acudir a situaciones concretas, donde el alumno sea el que construya, diseñe, experimente y cultive sus propios aprendizajes (Plan y Programas de Estudio para Secundaria, SEP, 1993).

Con esto se pretende dejar atrás lo que tradicionalmente se ha manejado en la enseñanza de este tema, que tiende a inscribirse en un contexto en donde las clases se limitan al uso del gis y la exposición verbal, con una visión tácitamente aceptada por maestros y alumnos en la que siempre hay una regla o un procedimiento previamente establecido a seguir para resolver un problema de matemáticas, lo cual parece limitar la capacidad creativa del alumno. Esta forma de trabajo puede conducir al estudiante a ser demasiado dócil y obediente, a ser un sujeto que prefiere ser enseñado autoritariamente y desdeña el aprendizaje por descubrimiento.

Es sabido que el alumno tiene problemas para comprender la matemática escolar, lo cual se manifiesta en los índices de reprobación; muchos alumnos no sienten atracción por la matemática, esta actitud negativa tiene diversas fuentes; entre ellas destacan por su importancia la naturaleza del pensamiento matemático y las formas rigurosas de comunicación y expresión de las matemáticas que dificultan su comprensión. En el plan Nacional de Educación (2001-2006), se resalta que la calidad educativa no responde cabalmente a las perspectivas sociales y a el nivel educativo que se desea para el país, ya que en evaluaciones realizadas en la última década se obtuvieron resultados insatisfactorios. Las mediciones de los logros de matemáticas en la primaria muestran que aproximadamente la mitad de los alumnos no alcanza los objetivos establecidos en los programas de estudio correspondientes al grado cursado. Además, los exámenes de ingreso a la educación media superior y superior permiten observar que los aspirantes presentan un desarrollo poco satisfactorio de competencias básicas, especialmente en las áreas de razonamiento verbal y matemáticas (Plan Nacional de Educación, 2001-2006).

El álgebra es un núcleo esencial en la comunicación y expresión de las ideas matemáticas y debe ser introducida como una parte útil, atractiva y bella, que propicie el desarrollo de procedimientos empíricos, inductivos y creativos frente al tradicional planteamiento formal y deductivo.

El enfoque actual considera importante promover la enseñanza de las matemáticas desde la acción auxiliándose de materiales diversos, entre ellos se encuentran los manipulables y la calculadora, que permiten explorar, experimentar y estimar, para llegar a la construcción de los conceptos (Planes y Programas de Estudio 1993).

Según Dienes, citado por Resnick y Ford, (1990), el uso de materiales didácticos en la enseñanza de las matemáticas promueve el desarrollo significativo de conceptos que permiten al estudiante activar su creatividad y descubrir principios por sí mismos. De manera similar, Cedillo (1996b), reporta que la calculadora permite el acceso individual y colectivo a poderosos procesadores matemáticos para explorar distintos acercamientos a la solución de un problema, lo cual ayuda a los estudiantes a afinar sus planteamientos y hacer público su trabajo cuando ellos lo deciden. Este autor reporta que, contrario a lo que podría esperarse, la forma individual de trabajo que induce el uso de la calculadora no inhibe que se dé el trabajo colaborativo; la retroalimentación inmediata que da la calculadora y la posibilidad que brinda a los estudiantes de explorar soluciones siguiendo sus propias formas de razonamiento, da lugar a la producción de distintas y originales soluciones a un mismo problema, lo cual estimula a los estudiantes a compartir y discutir sus hallazgos con sus compañeros y el profesor. Desde luego, esta manera de aproximarse al estudio de las matemáticas no depende solamente del uso de la calculadora, el tipo de actividades de enseñanza y la participación del profesor desempeñan roles determinantes.

Perspectiva desde la Psicología.

En este apartado mencionaremos las implicaciones de orden psicológico que se relacionan de manera más directa con este proyecto.

A este respecto, Bruner (1995), señala que la cultura en el sentido de una forma de vida, es un poderoso instrumento que modela y amplía las capacidades cognoscitivas del hombre en el mismo sentido en el que los utensilios y herramientas extienden y modifican las habilidades y capacidades de éste para transformar el mundo físico. Bruner estudió los procesos cognoscitivos de los niños, preocupándose especialmente de cómo representan mentalmente los conceptos e ideas que van aprendiendo. Para esto propuso la teoría del desarrollo conceptual, donde describe tres modos de representación: enactiva, icónica y simbólica. Mediante esta teoría ofrece una explicación de cómo el individuo es capaz de darle significado a las regularidades del entorno como producto de un sistema de codificación y procesamiento.

Con relación al presente trabajo, el planteamiento de Bruner permite guiar el uso de materiales manipulables para tener impacto sobre el aprendizaje, en particular en la fase de representación enactiva, de la que retomamos la orientación que esta postura teórica proporciona en cuanto al uso de materiales concretos como medios para activar el proceso cognitivo del estudiante. Los materiales manipulables, vistos de esta manera, pueden ser empleados por el profesor con la intención de que el estudiante transforme, retenga, descubra y comprenda conceptos matemáticos complejos a partir de experiencias sensoriales, de tal forma que el aprendizaje esté anclado a un significado en el contexto de una experiencia basada en la manipulación concreta de materiales. Para Bruner la experiencia sensorio motora es necesaria por parte de quien aprende, por que facilita la codificación y organización de las relaciones cuantitativas involucradas en una actividad de enseñanza para después hacer uso de esta experiencia en niveles más altos de complejidad cognitiva (citado por Linaza J. L., 1989).

En este trabajo de tesis, retomamos el aporte de Vigotsky (1962), que se refiere a la Zona del Desarrollo Próximo, donde sostiene que hay una diferencia entre lo que el alumno es capaz de aprender y hacer sólo y lo que es capaz de hacer y aprender con ayuda de otras personas más aventajadas, observándolas, siguiendo sus instrucciones o colaborando con ellas. En este sentido, la incidencia de la acción educativa se convierte en un factor importante en para alcanzar, a través de una enseñanza eficaz, que parta del nivel de desarrollo efectivo del alumno, un progreso de la Zona del Desarrollo Próximo, para ampliar y generar, eventualmente, nuevas zonas de desarrollo.

Materiales manipulables y la matemática

Ledesma (1994), destaca que el uso de materiales manipulables propicia cambios en las actitudes hacia las matemáticas, que promueven el gusto, interés y disposición del estudiante y motivan un aprendizaje placentero, apoyado en bases lúdicas y más concretas. El alumno, al transformar, construir y descubrir conceptos mediante los materiales manipulables, tiene a su alcance la posibilidad de un aprendizaje por descubrimiento, que a su vez sea significativo. El uso de manipulables puede facilitar una organización, codificación, transformación y uso de la información codificada. Estos planteamientos concuerdan con lo propuesto por Bruner cuando considera que la cultura es un poderoso instrumento que modela y amplía las capacidades cognoscitivas del hombre, en el mismo sentido en el que los utensilios y las herramientas extienden y modifican sus habilidades y capacidades para transformar el mundo físico. Ledesma reporta que la estrategia de trabajo empleada en su investigación comenzó con la interacción directa del alumno con el material (representación enactiva de Bruner); esta fase fue seguida de la realización de dibujos y diagramas (modo icónico); finalmente, se pidió a los alumnos que completaran las actividades propuestas hasta llegar a construir sus propias reglas, apoyado en sus hallazgos (modo simbólico).

Dienes, citado por (Resnick y Ford, 1990), se apoya en la teoría del desarrollo conceptual de Bruner, defiende la importancia de incorporar los descubrimientos de las investigaciones psicológicas a la enseñanza de las matemáticas. En sus investigaciones, donde la utilización de materiales manipulativos es el principal estilo de trabajo, se puede apreciar implicaciones de orden psicológico tales como; la percepción, imaginación, reconocimiento, abstracción, construcción, y descubrimiento, como resultado de la actividad con materiales manipulables. Dienes creó un programa para la enseñanza de los conceptos complejos con niños pequeños, expresa que el desarrollo de los conceptos matemáticos se consigue mejor mediante una serie de patrones cíclicos, cada uno de los cuales supone una secuencia de actividades de aprendizaje que van de lo concreto a lo simbólico. En su programa distingue tres fases del desarrollo de conceptos, en la primera fase juego libre, los niños manipulan los materiales matemáticos de formas no estructuradas, haciéndose idea de su tamaño, peso, textura y color, como un apoyo para inducir construcciones imaginativas.

Después de este periodo de juego libre, señala otro en el que se puede empezar a estructurar de forma sistemática las experiencias de los niños, aprovechando los materiales concretos.

En la tercera fase del ciclo de aprendizaje, Dienes menciona que cuando a los niños se les ha guiado por manipulaciones o juegos controlados, es el momento de ayudarles a descubrir métodos que les permitan hablar de sus descubrimientos, dibujando imágenes, gráficos o mapas sencillos, para acabar asociando símbolos matemáticos a los conceptos.

A continuación se mencionan los diversos materiales manipulables elaborados por los investigadores y empleados en esta investigación.

- Fichas de domino de cartón de 6cm de largo por 3cm de ancho
- Tangram cuadrado de foamy de 7 piezas
- Tangram de triangulo equilátero.
- Tangram rectángulo de foamy de 8 piezas.
- Círculos de foamy de 1cm de diámetro
- Tarjetas numeradas de Cartón de $10cm^2$
- Cuadros pequeños de cartón de $2\ cm^2$
- Triángulos equiláteros de 1 cm de altura
- Tiras de cartón de 0.5 cm de ancho por 5 cm de largo
- Frijoles

La calculadora

La Secretaría de Educación Pública, en la reforma curricular de 1992, hizo la recomendación de que se incluyera el uso de la calculadora en la enseñanza de las matemáticas en el nivel básico. Diversas investigaciones proporcionan evidencia a favor de la calculadora como herramienta para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Al respecto Hembree y Dessart (1992), citado por Waits y Demana (2001), recomiendan el uso de la calculadora para la enseñanza de los conceptos aritméticos, la resolución de problemas y para favorecer las actitudes positivas en los estudiantes hacia las matemáticas.

Un hallazgo que resalta en la investigación desarrollada por Hembree y Dessart (1992) menciona que el uso de la calculadora no inhibe el desarrollo de habilidades aritméticas básicas, en cambio, propicia que los estudiantes desarrollen estrategias no formales que les proporcionan herramientas más sólidas para sus estudios posteriores.

Waits y Demana (2001), destacan que el uso de la calculadora genera cambios en la manera de enseñar y en la manera de aprender, anteriormente los estudiantes empleaban mucho tiempo en la práctica, llegando a ser expertos en el uso del lápiz y papel y de las técnicas de manipulación simbólicas. Actualmente mucho de ese tiempo se puede emplear en la comprensión y en la resolución de problemas y en el desarrollo de habilidades.

Cedillo (1997), señala que el trabajo con la calculadora permite que los niños transiten de lo particular a lo general y que empiecen a apoyar sus razonamientos sobre “valores desconocidos”. El autor menciona que al incorporar la calculadora en el aula se introducen nuevos elementos que implican el diseño de actividades de aprendizaje para emplear fructíferamente la nueva herramienta y por tanto nuevas formas de enseñanza aprendizaje. El empleo de la calculadora favorece que los estudiantes se concentren en los procesos de solución, ya que el cálculo aritmético se realiza en la calculadora.

Cedillo (2000), destaca que la calculadora gráfica permite al estudiante usar estrategias no convencionales como resultado de su propio razonamiento. Argumenta que el desarrollo de estrategias no convencionales cuando se emplea la calculadora se debe a que los estudiantes proponen y verifican por sí mismos sus soluciones; los estudiantes hacen conjeturas que después son evaluadas por ellos mismos, sin necesitar constantemente del apoyo del profesor para que apruebe sus resultados. Además, los estudiantes pueden dar significados al código algebraico según la manera en que lo usan, sin necesitar un conocimiento previo de definiciones y reglas sintácticas. Esto sugiere que, al emplear la calculadora, los estudiantes pueden aprender álgebra en formas no tradicionales (mediante su uso).

Los conceptos y enfoques de enseñanza que hasta ahora se han bosquejado serán tratados con mayor amplitud en los distintos capítulos y secciones que conforman esta tesis.

Estructura de la tesis

Esta tesis está organizada de la siguiente forma: una introducción y cinco capítulos, los cuales se describen brevemente a continuación.

En la introducción se hace una presentación general de los distintos elementos que constituyen este trabajo.

En el Capítulo I se aborda la revisión de la literatura de investigación relacionada con el tema que abordamos en este trabajo, en particular la literatura que se dirige al estudio de la transición de la aritmética al álgebra con el auxilio de material manipulable y calculadora gráfica y sus implicaciones hacia la enseñanza.
El Capítulo II aborda el referente teórico que sustenta el análisis de los datos que se recabaron en esta tesis. En este capítulo abordaremos posturas teóricas acerca del aprendizaje, especialmente el trabajo de Bruner, Vigotsky y Dienes. En particular, se retoman sus aportaciones sobre la introducción a la enseñanza del álgebra.

El capítulo III da cuenta de los lineamientos metodológicos que orientaron el desarrollo de esta tesis. Este capítulo contiene tres secciones: i) Método de Investigación y propósitos ii) Reporte del Estudio Piloto y, iii) Reporte del estudio principal. En este capítulo se describe el método de análisis cualitativo que se empleó y la técnica de estudio de casos.

El capítulo IV presenta los resultados obtenidos en el trabajo de campo. En esta sección se describe con detalle el trabajo realizado por cada alumno, en particular las nociones y estrategias que desarrollaron los estudiantes cuando el ambiente de enseñanza para la introducción del álgebra escolar se basa en el uso de manipulables y la calculadora grafica . Los datos se discuten con base en el referente teórico adoptado en esta tesis y se lleva a cabo una comparación con los hallazgos de otras investigaciones en este tema.

El capitulo V presenta las conclusiones que se derivan de los resultados reportados en el capítulo IV, estos resultados se analizan a la luz de lo reportado en la literatura de investigación que se relaciona con el trabajo desarrollado en esta tesis.

Se incluyen dos anexos al final del texto de la tesis. En el anexo I se presentan las hojas de trabajo que se emplearon para recopilar el trabajo desarrollado por los alumnos durante las sesiones de clase. En el anexo II se incluyen los protocolos de entrevista que se utilizaron para profundizar en el análisis de los datos.

Al final del cuerpo de esta tesis se encuentra la lista de Referencias Bibliográficas que dan cuenta de las diferentes fuentes de literatura revisadas como apoyo al desarrollo de este trabajo.

CAPITULO 1
REVISIÓN DE LITERATURA

Introducción

El presente capitulo aborda la revisión de la literatura relacionada con la presente investigación. El capitulo se estructura de la siguiente manera:

1. Referente teórico.
2. Transición de la aritmética al álgebra.
3. Materiales manipulables.
4. Uso de la calculadora.

El referente teórico se derivó esencialmente de investigaciones que se relacionan de manera directa con este trabajo de tesis, considerando posturas que se plantean desde la psicología, donde se destacan autores como Bruner (1995), Vigotsky (1962), Dienes y Golding (1971). Asimismo se revisó material bibliográfico acerca del uso de materiales manipulables (Szendrei, 1996, Ledezma, 1994, Nickson, 2000). También se revisaron investigaciones que se han dedicado al estudio de la transición de la aritmética al álgebra, (Socas, 1996; Cedillo 1995, 1997, 1999; Nickson 2000). A continuación se discute cómo estas posturas han ejercido una influencia en el desarrollo de este trabajo.

Referente teórico

Teoría del desarrollo conceptual.

En este apartado mencionaremos las implicaciones de orden psicológico que se relacionan de manera más directa con esta investigación. A este respecto, Bruner (1995), señala que la cultura, en el sentido de una forma de vida, es un poderoso instrumento que modela y amplía las capacidades cognoscitivas del hombre en el mismo sentido en el que los utensilios y herramientas extienden y modifican las habilidades y capacidades de éste para transformar el mundo físico. Bruner estudió los procesos cognoscitivos de los niños, preocupándose especialmente de cómo representan mentalmente los conceptos e ideas que van aprendiendo. Para esto propuso la teoría del desarrollo conceptual, donde describe tres modos de representación: enactivo, icónico y simbólico. Mediante esta teoría ofrece una explicación de cómo el individuo es capaz de darle significado a las regularidades del entorno como producto de un sistema de codificación y procesamiento. Los modos de representación que propone Bruner pueden describirse sucintamente como sigue.

(i) El modo enactivo es una forma de representar eventos mediante una respuesta motriz, es decir, a través de la acción. Algunas cosas las conocemos porque sabemos cómo hacerlas, por ejemplo, montar en bicicleta, hacer nudos, nadar.

(ii) El modo icónico es la forma de representación que nos permite codificar los acontecimientos mediante la organización selectiva de lo que se percibe a través de imágenes mentales, apoyadas por las estructuras espaciales, temporales y cualitativas del campo perceptivo. Las imágenes representan eventos perceptivos con la fidelidad, pero del modo convencionalmente selectivo en que una pintura representa al objeto en ella retratado. Por ejemplo, una manera de recordar dónde se olvido algún objeto que hace unos momentos se tenía en las manos, es recordar los lugares a través de imágenes en donde se estuvo, después de haber hecho consiente la pérdida del objeto, junto con las imágenes se recuerdan movimientos y objetos (pueden ser muebles) donde se detuvo o se sentó, como lugares que destacan ante los demás objetos que no representan una pista para recordar dónde quedó el objeto extraviado. Estas imágenes no necesariamente se recuerdan con todo el detalle del lugar, sino que resaltan las acciones más representativas de dónde se pudo olvidar el objeto.

(iii) El modo simbólico se refiere a las formas en que representamos objetos y acontecimientos por medio de características formales, como el distanciamiento y la arbitrariedad donde una palabra no tiene por qué denotar un referente espacial o temporalmente contiguo a ella, ni guardar una semejanza formal con el objeto como si fuera una pintura. Por ejemplo, la palabra Filadelfia no se asemeja a la ciudad que designa, sino a una serie de sílabas que cobran sentido por otro tipo de información. Otra propiedad esencial del lenguaje, como forma de representación simbólica, es su productividad combinatoria, que supera con mucho a la de las imágenes o los actos.

Con relación al presente trabajo, el planteamiento de Bruner permite guiar el uso de materiales manipulables para tener impacto sobre el aprendizaje en las tres fases de representación: enactiva, icónica y simbólica. Esta postura teórica nos proporciona orientaciones para el uso de materiales concretos como medios para activar el proceso cognitivo del estudiante. Los materiales manipulables, vistos de esta manera, pueden ser empleados por el profesor con la intención de que el estudiante transforme, retenga, descubra y comprenda conceptos matemáticos complejos a partir de experiencias sensoriales, de tal forma que el aprendizaje esté anclado a un significado en el contexto de una experiencia basada en la manipulación concreta de materiales. Para Bruner es necesaria la experiencia sensorio motora por parte de quien aprende, ya que puede facilitar la codificación y organización de las relaciones cuantitativas involucradas en una actividad de enseñanza, para después hacer uso de esta experiencia en niveles más altos de complejidad cognitiva.

En cuanto al modo de representación simbólica, la postura que retomamos en este trabajo descansa en el uso de la calculadora, debido a las facilidades que ésta ofrece para introducir el código del álgebra como un lenguaje que permite representar ideas matemáticas.

En contraste con esto, el uso del material manipulable proporciona al estudiante un recurso que le permite pasar por el modo enactivo e icónico como un antecedente importante en el tránsito hacia el modo de representación simbólico.

La Zona de desarrollo próximo.

Vigotsky (1962), desarrolló el concepto de la "Zona del Desarrollo Próximo", como un "préstamo de conciencia" que el niño recibe de manos del adulto y que conserva hasta que puede valerse por sí mismo. Este préstamo se realiza no sólo estructurando el mundo de un modo adecuado, sino ofreciendo "claves" y "elementos accesorios", que serán asimilables en el grado en que el adulto y el niño, puedan permanecer dentro de este formato informativo y accesible. Según el autor, cada individuo es capaz de aprender una serie de conceptos que tienen que ver con su nivel de desarrollo, pero existen otros fuera de su alcance que pueden ser comprendidos con la ayuda de un adulto o de compañeros más aventajados. Este concepto es de gran interés para esta tesis, ya que define una etapa de desarrollo en el niño donde la acción del profesor es de especial incidencia. La teoría de Vigotsky concede al docente un papel esencial al considerarle como facilitador y partícipe en el desarrollo de estructuras mentales que apoyan al alumno en la construcción de aprendizajes más complejos (Vigotsky 1962).

La enseñanza de las matemáticas con el empleo de materiales.

Existen propuestas sobre el trabajo en el aula que se han desarrollado en concordancia con la teoría del desarrollo conceptual de Bruner, entre éstas destacan los trabajos de Dienes y Golding (1971), quienes sugieren que se creen recursos de enseñanza que acerquen las matemáticas al campo de la experiencia concreta. Según Dienes, el desarrollo de los conceptos matemáticos se consigue mejor mediante una secuencia de actividades de aprendizaje que van de lo concreto a lo simbólico. Para este fin sugiere que los materiales se diseñen de manera que estén desprovistos de elementos distractores, es decir, que no sean objetos que se utilicen para otras cosas en la vida diaria, sino que sean diseñados para facilitar el aprendizaje de las matemáticas.

Dienes y Golding, sugieren que debe haber una fase que denominan "juego libre",donde el niño ensaye y pruebe diferentes ideas al tocar y sentir el material, al manipularlo, el estudiante tiene la posibilidad de identificar su tamaño, su peso y color, así como descubrir cómo usarlos y crear construcciones imaginativas. Se propone que el estudiante juegue libremente durante el proceso de aprendizaje para que experimente holgadamente con los materiales.

Después de este periodo de juego libre, el estudiante puede estructurar sus experiencias aprovechando los materiales concretos. El papel que desempeña el profesor en esta fase de estructuración, es la de dirigir al alumno a través de una serie de experiencias de aprendizaje, rescatando aspectos importantes que refuercen lo que se está aprendiendo. Aquí es donde los materiales tienen un máximo impacto sobre el aprendizaje, ya que lo que hace el niño, según Dienes, es empezar a abstraer un concepto, para esto, el niño tiene que recopilar todo lo que es común a una gran variedad de experiencias y rechazar todo lo que sea irrelevante a dichas experiencias.

Dienes propone que los niños utilicen diferentes materiales para facilitar la clasificación y abstracción de un concepto. Sugiere que las diversas materializaciones deben diferenciarse entre sí todo lo que sea posible, a lo que llama *principio de la variabilidad perceptual*, que da un marco de explicación para las formas en que los niños llegan a ser capaces de “ver”’ la estructura del conocimiento matemático desde perspectivas diferentes.

En una fase posterior se debe ayudar a los niños a descubrir métodos que les permitan hablar de sus descubrimientos, dibujando imágenes, gráficos o mapas sencillos, para apoyar la asociación de símbolos matemáticos a los conceptos. El empleo de símbolos debe ser informal al principio, dirigido a ayudar a los niños a recordar las formas y relaciones que han percibido. Los niños pueden, incluso, utilizar símbolos que hayan elegido ellos mismos. Cuando el estudiante alcanza un nivel de simbolización logra extraer significado a las imágenes mentales, esto le permite una actuación en una situación determinada y así convertirla en herramienta que le permita nuevas formas de manipulación simbólica. Al usarse los símbolos, las experiencias matemáticas se liberan de sus referentes concretos, y se convierten en elementos que permiten nuevos tipos de manipulaciones mentales.

Los planteamientos teóricos de Bruner, (1995) y Dienes y Golding (1971), así como los hallazgos de Ledezma (1994), dan sustento a una hipótesis del trabajo. Esta hipótesis se basa en la idea de que el alumno, al transformar, construir y descubrir conceptos mediante la experiencia con materiales manipulables y la calculadora gráfica, tendrá a su alcance la posibilidad de un aprendizaje por descubrimiento que a su vez sea significativo.

Desarrollo conceptual y psicogenético en el aprendizaje de las matemáticas.

Según Bruner, la formulación de los modos de representación equivale, a una teoría de las etapas de desarrollo del intelecto que es similar en muchos sentidos a lo propuesto por Piaget (1969), ya que la base del desarrollo conceptual planteada por Bruner, sigue un curso paralelo a la teoría general del desarrollo intelectual, es decir, en cada una de las etapas del desarrollo intelectual de Piaget, estadio sensoriomotriz, estadio de operaciones concretas y estadio de operaciones formales, se puede llevar a cabo los modos de representación cognitiva propuestos por Bruner.

Bruner (1995), refiriéndose a la obra de Piaget, señala que hacia los 5 o 6 años, el esfuerzo mental del niño se enfoca centralmente a establecer relaciones entre lo sensorial y lo motor. En este estadio, el niño se interesa especialmente en manipular físicamente el mundo a través de la acción (estadio preoperacional), en el que el principal logro simbólico consiste en aprender a representar el mundo por medio de símbolos establecidos por simple generalización. Lo que aún no ha adquirido el niño en esta etapa es la reversibilidad, por lo tanto, no puede comprender ideas esenciales que constituyen el fundamento de la matemática y la física.

Una operación es un tipo de acción que puede ejecutarse directamente mediante la manipulación de objetos, o bien internamente, manipulando en nuestra mente los símbolos que representan objetos y relaciones; dicho de otra forma, una operación es un medio de introducir en nuestra mente información de lo que pasa, transformarla, organizarla y utilizarla para dar respuesta a diferentes problemas. En el estadio de las operaciones formales, que abarca entre los 10 y 14 años de edad, la actividad intelectual del niño parece basarse en la capacidad de operar y llegar a una hipótesis, lejos de verse limitada a las experiencias pasadas o presentes.

Las etapas de desarrollo no cambian drásticamente en el niño, si no que se van integrando poco a poco de una etapa a la siguiente y así hasta llegar a la etapa donde el niño alcanza un razonamiento formal. Cada etapa es conclusión de algo empezado en la que precede y el principio de algo que nos llevará a la que sigue, esto no quiere decir que la etapa anterior desaparezca, sino que son la base para desarrollar y estructurar conocimientos más formales (Inhelder y Piaget, 1969, citados por Socas, 1996).

El álgebra y los estadios del desarrollo

Socas (1996), estudia aspectos relacionados con la enseñanza del álgebra en cada estadio del desarrollo cognitivo planteado por Piaget, así como la manera característica del razonamiento y los tipos de tarea que los alumnos pueden hacer. Socas sugiere que los adultos y adolescentes regresan al estadio de las operaciones concretas y a un pensamiento preoperacional cuando se les expone a nuevas áreas de aprendizaje, beneficiándose con experiencias concretas antes de avanzar a niveles abstractos de pensamiento.

En el período de las operaciones concretas, la acción física y mental del niño con los objetos crea operaciones y relaciones. En las operaciones aritméticas básicas, el significado que le asigna el niño a los números se sustenta en alguna analogía física que puede lograrse por la disponibilidad del material concreto. El niño necesita clausurar; es decir, tiene la necesidad de asignarle un resultado o darle solución a una operación para comprender la situación que está enfrentando. El niño puede relacionar tanto los números como las operaciones con el mundo físico que le es familiar. El niño que se encuentra en el estadio de las operaciones concretas desarrolla relaciones con el apoyo de materiales concretos. Posteriormente, puede pensar sobre una relación de relaciones y en otras ideas abstractas que le permiten apreciar las abstracciones simbólicas del álgebra.

Socas (1996), propone que el cálculo aritmético puede conducirse por medio de la manipulación del material físico; como ábacos, bloques aritméticos, multibase, y tableros de contar que implican operaciones concretas. De acuerdo con Socas, el cálculo con algoritmos formalizados es la frontera entre las operaciones concretas y las formales.

Cuando se está llegando al final del estadio de las operaciones concretas, el niño puede comenzar su trabajo con cierto número de operaciones en secuencia si los números son chicos, y con números grandes si forman parte de operaciones sencillas. De esta manera van conociendo el resultado único de una operación sencilla con números chicos y así pueden comparar expresiones algebraicas mediante su valor numérico; en el caso de números grandes el niño cierra cada parte de cada operación por separado y compara.

Socas (1996), plantea que cuando los alumnos llegan a la generalización concreta logran trabajar con fórmulas que incluyen hasta cuatro variables; como V=axbxc, siempre y cuando sean capaces de tener en cuenta que cada letra representa a un número, y que cada operación binaria puede llevarlo a una clausura.

En la etapa de las operaciones formales el alumno puede tomar como realidad un sistema abstracto, bien determinado, con sus definiciones, relaciones y reglas, no llegando a un resultado, sino poniendo en práctica sus conjeturas hasta agotarlas todas.

El alumno puede resolver problemas en los que las letras representan números o variables que emplean una operación bien determinada, puede obtener la conclusión final hasta haber considerado las diversas posibilidades, ésta es una estrategia esencial para obtener una relación distinta a la de obtener un resultado único.

En este período la habilidad de los niños para pensar va más allá de la realidad concreta, empleando razonamientos deductivos e inductivos, abstracciones reflexivas, pensamiento proporcional, esquemas operacionales que implican combinaciones de operaciones o combinaciones de variables.

El lenguaje materno y el lenguaje del álgebra.

En una serie de investigaciones realizadas por Cedillo (1999), encontramos algunos hallazgos que se relacionan con esta investigación (Bruner, citado por Cedillo,1999), propone que el lenguaje natural no es sólo una consecuencia del desarrollo intelectual, o un resultado del asombroso sistema neurológico con el que estamos dotados los seres humanos. Entre sus principales resultados encontramos que el lenguaje natural se enseña, que el adulto arregla artificialmente el ambiente de manera que sintonice con las posibilidades de comprensión del niño.

En su estudio de la adquisición del lenguaje, Bruner (1980) sugiere la existencia de fases: la sintáctica, la semántica y la pragmática. En este estudio, retomamos la fase de la pragmática, ya que implica procesos diferentes a los empleados para dominar un conjunto de códigos semánticos y sintácticos. La semántica y la sintaxis están relacionadas más directamente con la comunicación de la información por medio de un código para "representar" algún conocimiento del mundo "real". En cambio, la pragmática se dirige a estudiar el proceso por el cual se llega al habla para lograr fines sociales, como prometer, humillar, advertir, pedir; los elementos de la pragmática no representan nada, son algo. La pragmática se relaciona con el discurso y depende del contexto, de un contexto compartido. El discurso presupone un compromiso recíproco entre hablantes que incluyen elementos como:

- Un conjunto de convenciones compartidas para establecer la intención del hablante y la disposición del que escucha.
- Una base compartida para explotar las posibilidades del contexto temporal, espacial e interpersonal.
- Medios convencionales para establecer y recuperar presupuestos.

De acuerdo a lo citado anteriormente, se puede ver que el discurso no puede necesariamente depender de las categorías gramaticales, ya que son las reglas las que rigen los actos del habla las que aparecen en las expresiones del discurso. Por ejemplo, para poder entender lo que un niño dice, o quiere decir, es necesario que se sepa qué es lo que él está haciendo y esto se logra a través de la interacción adulto-niño. Para Bruner, la interacción que existe entre el adulto y el niño es una forma de comunicación por medio del habla, la cual denomina *formato*. Un formato es un esquema de interacción regulada, en el que el niño y el adulto hacen cosas el uno para el otro y entre sí. Los formatos, al regular la interacción comunicativa antes de que comience el habla léxico-gramatical entre el niño y la persona a cargo de su cuidado, se constituyen en vehículos para la transición de la comunicación al lenguaje. Lo destacado anteriormente sobre la adquisición del lenguaje materno es algo análogo a la forma de aprender un lenguaje matemático empleando la calculadora gráfica (Cedillo, 1999).

Cedillo (1999), plantea que la calculadora es una herramienta que puede emplearse para simular un ambiente en el que el lenguaje que "se habla" es el lenguaje de las matemáticas, concretamente, los códigos de la aritmética y el álgebra. Con esta herramienta el alumno puede realizar su trabajo y en ocasiones recurrir al apoyo de un experto a través de formatos de interacción preconcebidos por el profesor (en el sentido de Bruner). Cuando hablamos de formatos queremos decir que debe existir un tipo de actividad altamente regulada que propicie que el estudiante pueda prever la intención del profesor y viceversa, además, la actividad debe estar estructurada de manera que sea posible la incorporación de elementos matemáticos de orden más complejo que permitan al estudiante, con el tiempo, avanzar en el conocimiento de la materia escolar que está estudiando (Cedillo, 1999).

El trabajo realizado con el apoyo de la calculadora puede desarrollar un ambiente en donde el estudiante participe activamente; además, esta herramienta puede estimular la creatividad y llevar al alumno a desarrollar habilidades matemáticas básicas que lo acerque al manejo del código matemático en la resolución de problemas que incluyen contenidos algebraicos.

Transición de la aritmética al álgebra

En este apartado se señalan las diferentes dificultades que se han reportado en algunas de las investigaciones relacionadas con el tema de esta tesis. Esta sección se organiza en los siguientes apartados: i) Términos literales, ii) El uso del signo igual, iii) Obstáculos cognoscitivos, iv) Resolución de problemas, v) Simbolización.

"Los primeros escenarios en la enseñanza-aprendizaje de la aritmética son importantes para el significado y aprendizaje del álgebra" (Nickson, 2000). Lee y Wheeler (1989), ven el camino de la aritmética al álgebra obstaculizado por problemas de procedimiento, lingüísticos, conceptuales y epistemológicos.

La mayor parte de enseñanza del álgebra a los niños puede ser tratada como un puente temporal de transición, el cual Gray y Tall (1994) lo han llamado "Un hueco cognitivo" entre las dos materias. Los autores reportan que los niños extrapolan los procesos establecidos en la aritmética hasta que en años subsecuentes de escuela se enfrentan a situaciones algebraicas las cuales no las pueden entender. En las secciones que siguen se abordaron puntualmente los conceptos algebraicos que con mayor frecuencia se reportan como áreas problemáticas.

Peck y Jencks (citados por Nickson, 2000), sugieren que si los niños pueden hacer uso del sentido total de la aritmética y emplearla como una herramienta en su pensamiento, entonces la comprensión del álgebra fluirá naturalmente.

Desafortunadamente el sentido que los niños le dan a la aritmética impide la comprensión del álgebra, ya que los niños utilizan las reglas aritméticas en el contexto algebraico sin entender las diferencias y limitaciones al aplicarlas en el nivel del álgebra. No es posible tener una capacidad de comprensión en álgebra sin antes tener una capacidad de comprensión para trabajar con la aritmética.
El álgebra es un lenguaje que tiene unidades con significado propio, tales como términos y expresiones que tienen que ser usados según sus propias reglas en el contexto algebraico.

Vergnaud (1997), citado por Nickson (2000), puntualiza en que el álgebra no requiere únicamente de cálculos simbólicos, ya que es una nueva situación en la que también implica aprender nuevos conceptos tales como: ecuación, fórmula, función, variable y parámetro, en donde los números y operaciones adquieren un significado diferente

El hecho de aprender a reconocer nuevas entidades como objetos matemáticos de un nuevo lenguaje y distinguirlos del lenguaje que ya se conoce es una dificultad que los niños deben superar para hacer una transición efectiva desde la aritmética a la actividad algebraica (Sutherland, 1987).

Los niños son capaces de usar métodos intuitivos en la resolución de problemas aritméticos dirigidos a encontrar una respuesta y así evitar usar las estructuras implícitas en el problema, sin embargo, en el álgebra, las estructuras no pueden ignorarse, tienen que ser reconocidas para resolver exitosamente los problemas algebraicos (Kieran, 1989, Vergnaud, 1997).

Las investigaciones citadas por Nickson (2000), sugieren que las dificultades presentadas en reconocer y usar las estructuras algebraicas provienen del hecho de que las estructuras son mal comprendidas debido a la manera en que los niños dan significado al uso de símbolos. Ellos continúan usando los símbolos algebraicos como lo hicieron en aritmética, por lo tanto tratan de usar y asignar un significado idéntico al que les dan en el contexto aritmético, sin considerar los aspectos de estructura que no pueden ignorarse a nivel algebraico.

Lo que menciona Nickson, se relaciona a lo encontrado en este estudio en el sentido de que los alumnos recurrían a sus conocimientos aritméticos para solucionar la tarea planteada sin advertir las diferencias existentes de la aritmética al álgebra, consideramos que en parte es debido a que su actuación previa en las matemáticas, habían sido en el ámbito aritmético. Una vez que hacían consiente esta diferencia o que advertían que se estaba hablando de cosas diferentes, gradualmente había intentos de acceder al lenguaje algebraico, dando significado al uso de las letras.

Se puede ver que existieron dos momentos:

Cuando advertían que el tratamiento que le daban a la letra no era correcto porque sabían que estaba mal, que la letra tenía un significado diferente que en aritmética.

Cuando hacen consiente el signo de la letra comenzaron a emplear recursos aritméticos pero tomando en cuenta el significado de la letra y la relación existente entre las letras y las operaciones, esto se puede ver cuando empleaban el recurso de manipulación aritmética.

i) *Términos literales.*

Hersovics y Linchesvski (1994), citados por Nickson (2000), sugieren que el límite cognitivo entre la aritmética y el álgebra puede ser caracterizado como la inhabilidad del estudiante para operar espontáneamente con o en lo desconocido, sin embargo algunas ocasiones se ha dificultado al utilizar términos literales deben también subyacer en las diferencias en las que los estudiantes pueden estar sustentando las formas en que esos términos son empleados. Harper (1987), estudio esta clase de confusión y encontró que a los niños se les enseña a ver las literales como etiquetas o incógnitas en sus primeros años durante el aprendizaje de la aritmética y cuando están resolviendo problemas, por lo que se les lleva muy rápidamente a la noción de que una letra es como algo dado con lo que pueden calcular con una serie de valores. Una situación común es que se les presenta a los niños las tablas de multiplicaciones en forma de diagrama, por ejemplo como se le muestra en la figura siguiente.

X	X3 →	Respuesta
1	→	3
2	→	6
3	→	9
4	→	12

Harper (1987), sugiere que hay etapas en las cuales los niños deben progresar para que puedan entender cuándo un término literal es una variable, se espera que ellos sean capaces de conceptualizar esto antes de que realmente puedan ver de lo general en lo particular. Harper propone que los niños adquieran concepciones procedimentales de los términos literales antes de que entiendan los aspectos estructurales del álgebra que los gobierna, la explicación de esto es que esta concepción procedimental domina, a menos que los conceptos estructurales se hayan hecho explícitos. Se pide a los niños que expresen la idea de un patrón numérico en una forma algebraica antes de que hayan comprendido el concepto de generalización y posiblemente antes de que hayan tenido una comprensión significativa del concepto de patrón numérico.

Harper (1987), propone que los niños adquieran concepciones procedimentales de los términos literales antes de que entiendan los aspectos estructurales del álgebra que los gobierna. En este estudio se encontró que algunos alumnos como Shantal, Oscar y Carlos, no lograron consolidar la idea o el concepto de patrón numérico. La fase del estudio que se destino a que los alumnos consolidaran el concepto de patrón, no fue suficiente. Coincidimos con el planteamiento de Harper en el sentido que debe existir una etapa donde se asegure que los niños adquieran concepciones procedimentales de los términos literales antes de que se quiera que entiendan los aspectos estructurales del álgebra.

ii) *El uso del signo igual.*

Saenz-Ludlow y Waldgrave (1998), encontraron que la interpretación de los niños de igualdad aritmética y algebraica cambia y se desarrolla gradualmente. Inicialmente, el signo igual es visto por los niños como un comando que indica que se tiene que hacer una operación para encontrar un resultado. Posteriormente, se dan cuenta que a lo que se refiere es a que debe existir la "igualdad cuantitativa" en ambos lados del símbolo. En esta fase el autor recomienda que la tarea del maestro se concentre en escuchar a los niños para identificar sus dificultades y apoyarles en el entendimiento del significado y la función del signo igual.

Saenz-Ludlow y Waldgrabe (1998), encontraron que el diálogo entre los alumnos y el maestro es un aspecto vital en el aprendizaje de los niños de los procesos de simbolización, ya que ayuda a la construcción e interpretación de significados convencionales de los símbolos matemáticos. Sugieren que hay dos procedimientos a seguir: por una parte, ellos están teniendo que construir significados aritméticos para el concepto de igualdad, por otro lado, ellos están teniendo que aprender a usar el lenguaje simbólico involucrado. En el curso de esta "actividad simbólica", los niños escriben su "expresión simbólica" como un paso de transición donde usan símbolos convencionales que representan lo que ellos han hecho, sin perder lo que esos símbolos se supone significan. Los autores observaron que en el proceso de expresar el significado del signo igual en sus propias palabras y trabajando entre sí a través del diálogo y con su maestro, los niños llegan a reconocer y entender los factores esenciales en la interpretación correcta del signo igual.

iii)*Obstáculos cognoscitivos.*

Linchevski y Herscovics (1994), exploraron la naturaleza de los obstáculos cognoscitivos en el pensamiento de los niños. Uno de los propósitos del trabajo realizado por estos autores fue hacer una demarcación sistemática entre los primeros cursos de enseñanza del álgebra escolar de la secundaria, comenzando con preálgebra. El estudio involucró 7 alumnos destacados (aproximadamente 12 a 13 años de edad) y tenía dos objetivos.

A: Estudiar el potencial en preálgebra de alumnos de 12-13 años de edad.

B: Extender la valoración de lo que representan las habilidades aritméticas en el álgebra.

Por ejemplo, a los niños se les enseñó el orden de las operaciones y se identificaron los siguientes obstáculos.

Generalización de el orden de las operaciones.

Se les pidió a los alumnos que evaluaran las siguientes operaciones:

a) $5+6\times10=?$
b) $7-3\times5=?$
c) $27-5+3=?$
d) $24:3\times2=?$

Encontraron que los alumnos tendían a ver a la suma con mayor prioridad que la resta. Donde la resta se involucraba, ellos optaban por ignorar la expresión con el signo menos y proceder a partir de esto. Solo la pregunta C fue resuelta correctamente por todos los niños.

Cancelación de términos equivalentes

Se refiere a la manera en que los niños trabajaron de izquierda a derecha cuando se enfrentan a expresiones de este tipo y no buscan en toda la operación para determinar dónde pueden cancelar términos o unirlos. Por ejemplo, sólo el 59.3% de los alumnos obtuvieron la respuesta correcta para 329+167-167, cancelando términos equivalentes.

Retomando lo que mencionan Linchevski y Herscovics acerca de la cancelación de términos equivalentes. En esté estudio encontramos que cuando se les propuso a los alumnos resolver alguna situación donde tenían que encontrar el patrón existente en la situación, al no poder encontrar la respuesta correcta optaban por ignorar términos e inventar o brincarse signos, letras o números según la situación.

Visión estática del uso de paréntesis.

Los alumnos entendieron que el paréntesis significa "haz esto primero" y todos los alumnos respondieron bien a preguntas como 8x(5+7). Como sea, una vez que el contexto cambió y se les pidió decir que si 926-167-167 era lo mismo que 926-(167+167), sólo dos de los 27 alumnos pensaron que era igual.

Separación de un término de la operación indicada.

En trabajos anteriores Linchevski y Hercovics habían encontrado evidencia de que los alumnos tendían a separar un término cuando una substracción estaba indicada. Por ejemplo, en 27-5+3 ellos hacían 27-5 primero, después sumaban 3. Hubo alguna variación en la forma en que hacían todas las operaciones y sus

explicaciones eran como "baso mi decisión en lo que creo que es conveniente. Si hubiera utilizado la multiplicación hubiera tenido que ser cuidadoso".
Este tipo de obstáculo que mencionan Linchevski y Herscovics se pudo observar repetidamente en el estudio, al proponerles la actividad donde tenían que encontrar el patrón numérico, los alumnos tendían a operar aritméticamente sin involucrar las letras de modo que para encontrar cada uno de los resultados tenían que hacer una operación y no involucraban las letras que es lo que les hubiera permitido generalizar el comportamiento del patrón involucrado.

Brincarse a la última operación.
Este obstáculo se refiere a la forma en que los estudiantes tienden a agrupar términos semejantes donde la distancia entre los términos se centra en la operación con el termino siguiente, por ejemplo, dada una cadena de operaciones como 217+175-217+175+67, solamente el 70.3% cancelaron el 217 correctamente y se centraron en el signo negativo después del segundo termino, los alumnos realmente rechazaron hacer esta tarea diciendo que "tú tienes que ir de izquierda a derecha, yo no puedo nada más por que sí brincármelo".

Siguiendo su estudio de los obstáculos aritméticos en preálgebra, se les pidió después que resolvieran algunas ecuaciones. La mayoría de los estudiantes fueron capaces de resolver las ecuaciones "usando procedimientos basados exclusivamente en manipulaciones numéricas o sustituciones numéricas". Donde ellos fallaron fue en resolver las ecuaciones con éxito, esto permitió a los investigadores delimitar un nuevo obstáculo cognitivo.

Este estudio es particularmente importante a la luz del trabajo reportado anteriormente en conexión con la brecha cognitiva entre la aritmética y el álgebra (Gray y Tall, 1994). Hay pequeños problemas que llaman la atención en preálgebra. Linchevski y Herscovics (1994) optaron por hacer el orden de operaciones mas claro y menos arbitrario. La introducción de los paréntesis y su uso también necesita ser más explicito mediante nuevas presentaciones, como la tendencia de los alumnos a sobre generalizar. Esto sería una etapa donde la calculadora parece ser útil; explorándola, los alumnos descubren mas rápido los diferentes resultados y las reglas que gobiernan la jerarquía de las operaciones aritméticas.

Boulton-Lewis (1997) citados por Nickson (2000), investigaron la transición de la aritmética al álgebra. Analizaron la introducción de los conceptos de variable, ecuación y solución de ecuaciones lineales con alumnos de 8° grado. Ciertos materiales (manipulativos) fueron usados al inicio como auxiliares para introducir los conceptos, después de la parte inicial donde fueron usados, ninguno de los 21 alumnos usaron materiales para resolver las ecuaciones lineales. La mayoría (14) usaron operaciones inversas, otra evidencia es la tendencia de los niños para aplicar procesos aritméticos a la solución de procesos algebraicos (Sfard 1989, Kieran 1992, Linchevski y Herscoivics 1996). La conclusión de los estudios fue:

En primer lugar la estrategia de las operaciones inversas usa una concepción diferente de ecuación (un cambio en dos vías) a partir del enfoque de enseñanza (equilibrio). Segundo, las respuestas de los estudiantes reflejan los hallazgos de Hart (1981), en que existe una brecha entre la representación concreta y simbólica. Tercero, el hallazgo parece reforzar la fuerte carga cognitiva involucrada en el uso de los recipientes como objetos. Cuarto, el hallazgo también parece apoyar el argumento de Kieran (1992), de que el conocimiento algebraico se desarrolla a partir de lo procedimental hacia la estructura en la misma forma en que las operaciones inversas son una estrategia procedimental mientras que el enfoque de los recipientes y los objetos parece tener una tendencia estructural Boulton y Lewis (1997). La necesidad para que los estudiantes entendieran una ecuación algebraica como una secuencia de operaciones, también se destaco en este estudio.

Los hallazgos que se reportan en este estudio, difieren de los reportados por Kieran (1992) en el sentido de que el conocimiento algebraico se desarrolla a partir de lo procedimental hacia la estructura y que los materiales manipulables no apoyan el desarrollo. En este estudio se encontró que los alumnos vieron el apoyo de los materiales como un auxiliar que les permitió activar ideas que posteriormente fueron refinando para llegar a la resolución de la situación planteada. Es cierto que también hubo estudiantes que tuvieron una actuación como lo reportan Boulton y Lewis en 1997 en la investigación que realizaron con alumnos de 8° grado donde se analizó la introducción de los conceptos de variable, ecuaciones y solución de ecuaciones lineales, en el inicio del estudio utilizaron materiales manipulables y después la mayoría de ellos ya no vio la necesidad de usarlos.

Algunos alumnos manifestaron esta misma actuación pero al mismo tiempo hubo un reconocimiento hacía los materiales manipulables como algo que les permitió generar ideas al inicio de la tarea a realizar.

Parte de este estudio involucro entrevistas con niños de 7° grado, con la pregunta, ¿puedo obtener algún conocimiento de qué es lo que ellos sabían acerca de las operaciones, las leyes de las operaciones, las igualdades y las variables?, y se encontró que se pudo haber enseñado a los estudiantes acerca de las operaciones y las igualdades como una parte en el currículo de la aritmética pero no sabían nada o casi nada sobre las variables o ecuaciones lineales, lo cual podrían haber derivado intuitivamente de su conocimiento aritmético Boulton-Lewis (1997). A partir de las preguntas que se les hicieron se encontró que solo el 26% de la muestra fue capaz de encontrar el orden correcto de las operaciones aritméticas, por lo tanto ellos lo aplicaron en el contexto de las soluciones de las ecuaciones lineales, una vez más se encontró que respecto al signo de igualdad en una ecuación que contenía una serie de operaciones casi el 100% de los estudiantes creían que encontrar la ecuación significaba encontrar una respuesta y cuando habían encontrado la ecuación solamente la mitad de ellos podían decir que la ecuación significaba que los valores numéricos de los dos lados debían ser los mismos, al menos la mitad de ellos no tenían el concepto de equivalencia, esto proporciona más evidencia de que cuando los estudiantes confrontan este tipo de problemas algebraicos muchos de ellos tomarían el significado del signo igual como una señal para encontrar una respuesta. Una de las implicaciones derivada de este estudio fue que muchos de los niños en este estudio necesitaban una mejor comprensión de la división y el orden de las operaciones en una aritmética más compleja. Otro factor importante identificado por Boulton-Lewis y otros fue que los estudiantes en su estudio no entendieron la diferencia entre el uso de X como una variable y X como una incógnita cuando estaban resolviendo ecuaciones que involucraban el uso de múltiples valores para la variable.

iv) *Resolución de problemas.*

Los problemas que enfrentan comúnmente en álgebra los alumnos son de importancia para los investigadores, por ejemplo, Douady (1997), Davis (1998), Noddings (1993), Sfard y Linchevski (1994). Muchos de los problemas que incluyen en los libros no hacen que el alumno se involucre esencialmente porque no los pueden relacionar con nada remotamente tangible en sus vidas, aunque para algunos alumnos motivados tal vez los problemas sean el punto de entrada al álgebra. Skovsmose (1994), se pregunta ¿por qué orientación sobre problemas? Él propone que esto es importante porque un problema específico puede ser el punto de entrada a la complejidad, que puede volverse comprensible si se estudia el problema central. En las clases de álgebra parece que esto no sucede.

Hay dos tipos de problemas comunes en el álgebra los primeros son: los que directamente se dirigen a resolver ecuaciones, sin algún contexto más que el matemático. Los segundos son los problemas basados en una historia donde el problema se presenta en algún contexto y se involucra el uso del álgebra, se pide primero entenderlo, luego expresarlo y por último resolverlo, los problemas de palabras son fáciles de definir pero en álgebra es difícil (Kieran, 1989).

v) *Simbolización*

Mason (1987), argumenta que la atención de los estudiantes debe ser conducida a que observen el poder de los símbolos para que ellos entiendan por qué esos símbolos son utilizados y que se conviertan en una herramienta que puedan emplear articuladamente y en particular los procesos de especialización para encontrar o descubrir qué es lo que dice una afirmación abstracta en términos de casos particulares y de la generalización para que lleguen a ver la generalidad ejemplificada por casos particulares, entonces puede mostrarse a los estudiantes, por ejemplo, a través de preguntarse a sí mismo, qué es lo común entre varios actos o situaciones y esto puede conducirlos a observar la generalidad.

Se les puede mostrar a los estudiantes mediante ejemplos, cómo es que frecuentemente son mentalmente interrumpidos al intentar reconstruir un texto o de qué se trato la clase y pedirles que hagan esto, les ayuda a construir un recuento razonablemente coherente de un tema y que al tratar de verbalizarlo con el apoyo de los diagramas y las metáforas ellos pueden generar ideas accesibles sobre una situación que ya antes ocurrió, en otras palabras los estudiantes deben ser consientes de su aprendizaje, la aparente simplicidad del proceso al que nos estamos refiriendo puede disfrazar la dificultad usualmente asociada con la abstracción. Sin embargo el punto que Mason señala es un

asunto importante y es útil recordarlo cuando consideramos los problemas relacionados con la simbolización en una generalización.
Este asunto es también tomado por Kaput (1987), quien considera la falta de significado en situaciones simbólicas como los objetos algebraicos. Kaput describe una expresión simbólica como un esquema que en sí mismo no tiene ningún significado y que requiere de un campo de referencia para darle significado a ese esquema, el se refiere a los símbolos cómo objetos fenomenológicos (Mason utiliza la palabra imágenes para dar significado más o menos a esto) y ve eso como el mundo de estabilización para los estudiantes.

Cómo se ha señalado previamente (Kieran 1989, 1992, Sfard 1991) el tratamiento de situaciones algebraicas como objetos y en concordancia con las reglas estructurales son la principal dificultad que encuentran los estudiantes para darle algún significado al álgebra. La idea de que los estudiantes pueden detenerse y mentalmente reconstruir su atención sobre acciones es muy importante en el camino para asociar significados a esos símbolos que carecen de significados.

Abstracción con datos.
Reden (1994), dio un patrón de cuatro números de elementos simultáneos de una muestra de 1435 niños entre edades de 10-13 años a los cuales realizo 4 preguntas a cada uno.

1. ¿Cuál es el siguiente período en el patrón?
2. Describe una regla general del patrón en el lenguaje natural.
3. Calcula el valor de un término incontable.
4. Escribe las reglas en la notación simbólica de las matemáticas.

Él clasifico los resultados evaluados, de ellos identifico dos jerarquías a seguir, la primera era el procesamiento de datos dimensiónales donde los niños exhibieron una habilidad manual con diferentes números de elementos (diferentes datos). Provistos por los estímulos de los reactivos. Dentro de esta jerarquía había 2 niveles:

a) El modo simbólico concreto, donde los niños estaban respondiendo a una parte del dato dentro de un elemento, pero no podían dar descripciones exactas donde existía más de un dato, era más complicado.

b) En un nivel más alto parte de ellos estaban resolviendo con más de un dato con éxito.

La segunda jerarquía relacionada a la dimensión de "expresión general" donde cuatro grupos fueron identificados:

a) El grupo pre-estructural donde los niños no encontraron con éxito los reactivos de estímulo (su trabajo no incluyo un análisis total).

b) El grupo que respondió a la parte necesaria del reactivo dio un ejemplo especifico, pero no una descripción general del patrón.

c) El grupo que se enfoco a los resultados dio una descripción de cómo se mueve un término al siguiente en secuencia.

d) El grupo que estaba provisto de una serie de datos "para describir una relación funcional entre una variable dependiente y una variable independiente".

Esas jerarquías previeron un trazo por la progresión de un procedimiento con una perspectiva más estructural en el desarrollo del álgebra pensando en los niños.

Simbolizando un proceso

Reggiani (1994), estudio los niveles de generalización de niños de 11-12 años en Italia enfocándose a un problema dando a los alumnos la solución, la cual no depende de un dato introducido. El problema fue el siguiente.

Piensa en un número, dóblalo, súmale cinco, réstale el número que pensaste, súmale dos, ahora réstale el número que tú pensaste otra vez y entonces multiplícale el total por tres.
Tú amigo dice que cualquier número que tu pensaste, el resultado será siempre 21. Trata de ver si es cierto.

a) Comienza con el número 7 y realiza el calculo necesario.
b) Ahora comienza con el número 20 y después con el 100 y sigue el mismo procedimiento.
c) Trata de entender por qué tu tienes siempre 21, puedes usar esquemas, símbolos para auxiliarte.

Reggiani encontró que los niños que tenían experiencia no formal en álgebra estaban "pensando algebraicamente " y solo algunos casos particulares en "sentido general".
Algunos estaban explicando sus soluciones verbalmente y simbólicamente, aunque a un nivel muy simple como por ejemplo; El alumno que escribió "yo siempre obtuve el mismo número porque multiplique, sume, reste y sume otra vez los diferentes números, siempre los mismos números, el resultado no cambio".

Allí pareció estar involucrada la noción general pero no se alcanzó el nivel de generalización. Reggiani, noto que el 40% de los ejemplos de los alumnos de primero de secundaria recurrían a los mismos signos y procedimientos.

Otro estudio dirigido a un diferente tipo de simbolización involucra a los niños a resolver problemas algebraicos presentados como historias cortas (Bito-Lima y Da Rocha Falcao, 1997), 72 niños de 6 a 13 años de edad fueron entrevistados, las respuestas de los protocolos fueron analizados. El investigador noto que los niños más jóvenes produjeron lo que ellos llamaron "esquemas prealgebraicos" el cual incluía ecuaciones híbridas, donde el lenguaje natural, iconos, números y operaciones matemáticas formales aparecen.

Los alumnos crearon una regla representativa que les apoyo como guía en la solución de problemas, la cual se considero como precursor del nivel intermedio donde los niños están dispuestos a seguir con la situación, por lo que logran encontrar la expresión matemática que la representa.

¿Qué se esta simbolizando?

Un ejemplo de cómo la simbolización de un procedimiento matemático toma el significado como un punto central de un problema matemático es dado por Underhill (1991), e ilustra el asunto que Mason señala acerca de lo poco útil que es detenerse a pensar y reconstruir cuando uno esta concentrado en la resolución de un problema matemático. Underhill nota que cuando se le pregunta a alguien que es lo que quiere decir, los estudiantes contestan en términos verbales o a través de algún procedimiento de simbolización, en el caso del promedio podría ser x+y+z/ 3 cuando los tres nombres que se quieren promediar son x, y y z, con relación a la importancia del concepto de promedio, el autor cita un ejemplo de cómo un adulto encuentra difícil explicar que es lo que quiere decir la palabra promedio. Por lo que se le propuso un problema que involucra temperaturas a lo largo de una semana a lo cual se le pidió que encontrar la temperatura promedio y el correctamente calculo la media aritmética después de esto se le indicó que agregara o restará algunos grados a ese promedio en cada día de la semana para ver el efecto que esas operaciones dará en el promedio, habiendo hecho esto el llega a la conclusión de que si cada número en un grupo es cambiado en la misma forma entonces la representación del grupo puede cambiar, en el contexto de otro ejercicio Underhill explicó que su experiencia en promediar calificaciones le enseño que dado que todos los números en un grupo contribuyen de igual manera en un promedio, un número que es considerablemente mayor o menor que los otros puede drásticamente afectar a la media aritmética que en este caso es el promedio. Otro ejemplo de la recapitulación de Mason menciona la importancia de recordar la importancia de utilizar la simbolización como medio para un fin. Hemos visto evidencia de las dificultades que tienen los niños en el aprendizaje algebraico y como los símbolos se convierten en algo que los aleja de contextos familiares y vienen a convertirse en el establecimiento de ecuaciones. Las formulas desde esta concepción se entienden como medios para presentar situaciones pero el significado de esas situaciones se deja aparte con el uso mecánico de esas formulas en la resolución de problemas donde su origen son fácilmente olvidados.

Una pregunta de otro estilo relacionada con lo que es simbolizado fue explorado por Furinghetti y Paola (1994), quienes usaron un cuestionario para indagar sobre las percepciones de los estudiantes de 12 a 17 años de edad con relación a los parámetros y su asociación con incógnitas y variable. El resultado que obtuvieron indico que el 69% de sus estudiantes reconocieron que había una diferencia entre parámetros incógnitas y variables, solamente el 20% de 199 estudiantes fueron capaces de utilizar alguna expresión para explicar lo que ellos consideraban que eran esas diferencias, tales estudiantes no utilizaron nociones básicas como generalización o la presencia de cuantificadores en sus explicaciones. Un estudiante reconoció que la diferencia entre tres conceptos, parámetros, incógnitas y las variables tenían que ser establecidos a través de los problemas matemáticos que querían resolver.

Estereotipos de los símbolos literales.

Bills (1997), discute la posibilidad de una dificultad innecesaria a la que se enfrentan los alumnos al querer que aprendan álgebra mediante un uso de las letras a través de estereotipos presentando casos en los que se les enseña a utilizar las letras en ejercicios en los que se espera siempre que cumplan un papel determinado. Un ejemplo de esto es cuando se pide a los estudiantes que factoricen x^3-a^3, en general Bills se encontró que los estudiantes no saben representar la literal “a”, en este punto todos los polinomios que habían factorizado los estudiantes eran mostrados en casos en donde X es la variable y había coeficientes numéricos. La respuesta inmediata en estos casos fue pedirles a los estudiantes evaluar en el caso de x^3-a^3 y darle valores numéricos a la letra a, por lo que no hubo ningún problema con la interpretación de lo que es la X. La respuesta de los alumnos se puede resumir como sigue “el papel que desempeña la X es la de una variable, esto es como una cantidad que puede tomar muchos valores y no toma ningún valor particular en cualquier momento a menos que así se halla establecido, sin embargo al utilizar la letra a junto con la letra X como otra manera de presentar los coeficientes o cualquier otra letra como la Ь ó la Y provoco en los estudiantes que vieran esta tarea como algo distinto en un contexto diferente que los confundió.

En otro ejemplo se les pidió a los estudiantes que identificaran la ecuación de la tangente a un círculo cuyo centro es el (2, 4) en el punto (p, q) que es un punto que esta en la tangente, únicamente un estudiante de todos a los que se les hizo la pregunta dio la respuesta en términos de X y Y, Bills a partir de esto hace la distinción entre lo matemático y lo culturalmente determinado que provoca la toma de una decisión y señala que las letras X y Y llevan con ellos muchos contextos y mensajes que pueden en ocasiones ser útiles para el estudiante pero también puede resultar un obstáculo. Un problema similar fue estudiado por Wong (1997), ella propone que para investigar las dificultades de los estudiantes de secundaria con expresiones exponenciales que contienen números que desempeñan el papel de exponentes comparados con expresiones que tienen letras que desempeñar el papel de exponentes. Ella encontró que los estudiantes se desenvolvían mejor cuando la base en esas expresiones exponenciales eran letras y los exponentes eran números que al contrario. Por ejemplo, los estudiantes no traducían la regla de sumar los exponentes cuando esos exponentes estaban representados por literales, cuando las expresiones exponenciales que llevan esos exponentes eran multiplicados.

Los procesos y el concepto de simbolización

Crowley y otros (1994) discutían el significado de los símbolos en álgebra y se refirieron a la noción de procepto (Gray y Tall 1993, Gray y Tall 1994) que es planteado como "un símbolo que se aplica tanto para procesos como al resultado de esos procesos" (Crowley 1994). Crowley argumenta que la manipulación mental de proceptos conlleva un potencial de pensamiento y flexibilidad que se desarrolla en el tiempo; como resultado de un proceso gradual que es contenido en si mismo por el que esta pensando hasta el punto en el que se convierte en un objeto aritmético o algebraico, el ejemplo más obvio es el conteo que es un proceso que eventualmente se resume en el concepto de número con los símbolos numéricos. En este estudio específico ellos exploraron la noción de una expresión algebraica como un procepto:

Desde nuestro punto de vista... los niños ven X+3 como un proceso y no como un objeto mental es decir como un proceso que no puede llevarse a cabo porque no saben que es lo que es X. Para ser capaces de abordar tal símbolo se requiere no solamente que se le de un significado si no que el significado debería incorporar tanto un proceso (de evaluación cuando X es conocida) como también como un objeto que puede ser manipulado tal como esta (Crowley 1994), ellos encontraron en una investigación previa que los estudiantes tienden a concatenar términos, es decir, cuando ellos tienen 3a+4b+2a lo que hacen es reunir todo en una sola expresión como 9ab. Por esta razón su muestra en este estudio involucro tanto un grupo de estudiantes de 13 a 14 años de edad y un grupo de estudiantes del segundo años que se estaba preparando para ser profesores, habiendo considerado que este último grupo debería mostrar esa tendencia. A esa muestra se les pidió que realizaran tres sumas y tres multiplicaciones las cuales iban aumentando en el nivel de dificultad, las primeras operaciones respetaban un orden sintáctico pero en las últimas ese orden ya no se respeto. Los resultados mostraron que a medida en que la dificultad de las cuestiones se incrementaba tanto los estudiantes de 13 a 14 años de edad como los futuros profesores invertían los enunciados de esas operaciones de manera que la operación apareciera del lado izquierdo y la respuesta del lado derecho. Cuando la sintaxis era demasiado complicada para permitirles la primera traslación de términos de un lado al otro de la igualdad y como no se les sugirió que utilizaran letras algebraicas los errores ocurrieron al tratar de pasar términos de un lado al otro del signo igual. Los resultados mostraron que los estudiantes tuvieron un desempeño particularmente malo cuando la sintaxis de las ecuaciones fue alterada, esto ocurrió también con muchos de los futuros profesores aunque cabe mencionar que ellos no habían estudiado matemáticas en tres años.

Los autores mencionan "vimos que los estudiantes respondían al proceso de pasar términos de un lado al otro del signo igual no solamente respetando un orden sintáctico puro, si no también intentando darle sentido a los datos utilizando la aritmética y los conceptos algebraicos relacionados a su nivel de desarrollo escolar, en cuanto a estas manipulaciones algebraicas, por ejemplo verificando sus operaciones algebraicas numéricamente tratando de encontrar si se habían cometido errores.

Stacey y Macgregor (1994), investigaron las razones por las que los estudiantes tienden a confundir la notación para el producto algebraico, por ejemplo, a, b, para demostrar la suma a + b, Tall y Tomas (1991), llaman a esto el obstáculo de ubicación.

Materiales manipulables.

El uso de los materiales manipulables como un recurso didáctico es considerado como una herramienta que puede jugar un papel importante en la construcción de un argumento lógico. Szendrei (1996), hace una reseña de los materiales concretos utilizados a lo largo de la historia con fines educativos, menciona que estos materiales se pueden clasificar en dos tipos: (i) como herramientas comunes, que son las que existen en el ambiente, y, (ii) materiales educativos, que son materiales diseñados para un contenido en específico.

Szendrei concluye que los materiales concretos pueden ser herramientas poderosas construidos para lograr propósitos escolares y educativos en la clase de matemáticas. La autora cita que en algunas escuelas la filosofía educativa difiere con respecto a cómo los alumnos aprenden y comprenden los conceptos necesarios, algunos consideran que la meta principal de la enseñanza de las matemáticas es dar información al alumno sobre la materia, mientras que otros desarrollan medios con el fin de crear formas diferentes que permitan al alumno comprender y dar significado a los contenidos matemáticos. Las filosofías educativas hacen hincapié en el modo de cómo deben ser usados los materiales concretos. En algunos sistemas educativos consideran que los materiales manipulables comunes como fichas, semillas, piedras, cuentas mostradores, palos y más, son importantes en etapas iniciales de la niñez, en el aprendizaje y creación de los conocimientos matemáticos.
Comenio y Pestalozzi (citados por Szendrei 1996), ven la necesidad de construir materiales educativos. Según Comenio, el objetivo debe venir antes de las reglas y el contenido antes de la forma, Pentalozzi confirmó que los sentidos son los primeros pasos en cualquier proceso de aprendizaje.

Decroly (citado por Szendrei 1996), refiere que las herramientas comunes y los materiales concretos como bellotas o castañas, son materiales que favorecen la clase en las aulas, él no sólo da importancia a las herramientas comunes, sino también a los materiales educativos. A este respecto, Dienes y Gattegno (Szendrei, 1996), entre otros educadores, estudiaron la correspondencia entre la estructura del conocimiento matemático y la estructura de los materiales educativos.

Varga (Szendrei 1996), frecuentemente usa herramientas comunes en algunas situaciones, sin embargo presta atención al uso de materiales educativos, particularmente cuando es necesario apoderarse del concepto matemático subyacente. Por otra parte, sugiere que antes o después de usar el material educativo, puede haber un período en el que sea pertinente usar otros materiales bajo una estructura diferente.

Boero (Szendrei 1996), en el proyecto Grupo Génova, le da énfasis al uso de herramientas comunes (calendarios, monedas, termómetro, reglas, mapas, calculadora y otros) ocasionalmente fabricados algunos durante la clase, para activar los procesos de aprendizaje de los niños. Dentro del proyecto él es uno de los que argumenta algunas razones del por qué no usar materiales educativos, las cuales son:

1. Los conceptos son desarrollados al usar herramientas comunes ya que permiten resonancias positivas dentro y fuera de la escuela y se experimenta un inmediato cambio al emplear las matemáticas dentro de situaciones de la vida real, esto generalmente no sucede cuando se usan materiales educativos.
2. Las herramientas comunes pueden ser seleccionadas a través de la evolución cultural de la humanidad. Partiendo de la historia, la construcción de los conceptos matemáticos y procedimientos son una consecuencia de procesos seleccionados. Los maestros pueden explotar las herramientas como medios eficaces para la construcción y deducción real del proceso mental enfocado a las matemáticas.

3. El tiempo empleado para enseñar a los niños el uso apropiado de los materiales educativos es tiempo perdido, el tiempo empleado al enseñar a los

niños el uso de herramientas comunes es menor y al mismo tiempo es menos complejo hacerlo.

4. Los maestros pueden abusar de los materiales educativos con la posibilidad de no llevar al alumno al objetivo, en cambio, otros maestros son expertos por naturaleza usando herramientas comunes.

Los participantes en el proyecto Génova no emplearon juegos en las situaciones de aprendizaje, ya que los conductores pensaron que, al hacerlo, los niños reciben una imagen falsa de la naturaleza de las matemáticas como disciplina. Los investigadores del proyecto Génova aclaran que el hecho de que los participantes no empleen situaciones de juego en el aprendizaje, no quiere decir que no vean al juego como algo útil, por lo tanto, proponen que no se necesita diseñar una actividad de juego, ya que el alumno al tener contacto con los materiales, se encuentra en una situación en donde la exploración y experimentación está implícito el juego.

En suma, Boero menciona que es mejor el uso de herramientas comunes que el de materiales educativos, sin embargo, no desconoce que las herramientas comunes se pueden alternar con los materiales educativos permitiendo más variaciones en sus usos.

Los autores citados por Szendrei, coinciden en que el uso de materiales, ya sean los diseñados con fines educativos o las herramientas comunes, son importantes para la enseñanza de las matemáticas, ya que facilitan la comprensión de la estructura del conocimiento matemático y activan los procesos de aprendizaje en el niño. Estas aportaciones de los autores coinciden con lo propuesto con Bruner, ya que para él es necesario tomar en cuenta la representación del entorno para amplificar nuestros actos motores y nuestras percepciones, lo cual enriquece nuestra actividad de raciocinio (representaciones enactiva, icónica y simbólica de Bruner).

En el siguiente apartado hablaremos sobre los aspectos de orden matemático que nos llevan a relacionar la teoría del desarrollo conceptual de Bruner, con el uso de materiales concretos como activadores de la creatividad para hacer matemáticas, específicamente con relación a los contenidos de preálgebra.

Un referente empírico que parece ser relevante al trabajo que aquí se presenta es el realizado por Ledesma (1994). Este autor estudió los efectos que produce en el rendimiento escolar de alumnos de tercer grado de secundaria el aprendizaje de los contenidos referentes a productos notables y factorización, haciendo uso de material didáctico manipulable. Menciona que la estrategia de trabajo comenzó con la interacción directa del alumno con el material (representación enactiva de Bruner); luego el alumno debe realizar dibujos y diagramas adecuados (icónica) y, finalmente, resolver los ejercicios propuestos (simbólica), hasta llegar a construir sus propias reglas apoyado en sus hallazgos. Reporta que la experiencia que obtuvieron los alumnos al ver, tocar, e interactuar con el material didáctico, que consistió de un paquete de 60 piezas de madera, les permitió clarificar conceptos, descubrir relaciones, establecer propiedades y elaborar sus propios procedimientos para solucionar situaciones diversas. Agrega, que el uso de manipulables logra cambios en las actitudes hacia la matemática.

El uso de los materiales concretos se ha tomado como un método de enseñanza de habilidades y conceptos numéricos, que ayuda a los alumnos en el aprendizaje de las matemáticas de una manera más significativa. Su aceptación general ha ganado importancia en el marco de los estudios piagetianos en el desarrollo del pensamiento de los niños y de la manipulación física de objetos que se realizan en las operaciones matemáticas. Algunos de esos materiales son referidos en las escuelas como materiales de desecho (material reciclable) que incluyen gran cantidad de objetos que se usan en la vida diaria y con los que se apoyan en actividades para contar o pesar. Las propiedades de los materiales tangibles ayudan a los niños en el desarrollo de conceptos y construcción de estructuras mentales, el mismo material por sí solo no lleva al estudiante a desarrollar conceptos y habilidades, sino que a partir de las propiedades de los materiales, y un enfoque didáctico adecuado, se puede construir conocimientos matemáticos (Nickson, 2000).

Gravemeijer (1997), citado por Nickson (2000), plantean que no basta con la tangibilidad de los materiales concretos, si no se equipara con darle sentido a esos objetos matemáticos mediante el apoyo de estos materiales. No basta con las propiedades del material, la discusión o el trabajo que se hace con ellos es lo que sirve o les da un sentido matemático.

El uso de los materiales manipulables no está visto de abajo hacia arriba, más bien las propiedades son inherentes, es decir, tienen que ser construidas o reconstruidas con el propósito de eliminar todos los aspectos del medio ambiente, que puede ser un obstáculo para que el estudiante aprenda, además tiene que existir alguien que ya sepa cómo usar los materiales para que los otros vean lo que hay de utilidad para las matemáticas (Nickson, 2000).

Lapp (1999), refiere que frecuentemente los educadores enseñan destrezas, como resultado de esto no se concentran en los conceptos esenciales para comprender las matemáticas, los estudiantes no deberían jugar con símbolos sobre un pedazo de papel, si no que se les debería permitir jugar con ideas que conducen a una comprensión conceptual de las matemáticas. Los materiales y la tecnología estimulan el descubrimiento de destrezas las cuales pueden ser aprendidas en un tiempo muy corto. Para resolver un problema se sugiere comenzar por los manipulativos para que puedan los estudiantes examinar los procesos. El acto de colorear los bloques o iluminar las hileras para construir las figuras puede ser de gran beneficio en la comprensión de un proceso.

Lapp (1999) menciona que el estudiante puede confirmar sus respuestas a través de varias formas de representación, enriqueciendo el proceso de razonamiento en la mente de éste. Los manipulativos pueden ayudar para que los estudiantes descubran el proceso que conduce a una respuesta.

Uso de la calculadora.

En este apartado se aprecia la importancia que ha tenido el uso de la calculadora gráfica como recurso para la enseñanza aprendizaje del álgebra en la investigación.

Las calculadoras ocasionan cambios en la manera de enseñar y la manera de aprender, antes de las computadoras y las calculadoras, era necesario que los estudiantes pasaran mucho tiempo practicando, llegando a ser un experto en el uso del lápiz y el papel y de las técnicas de manipulación simbólica (algoritmos). En la actualidad mucho de ese tiempo puede utilizarse en la comprensión creciente, profunda, conceptual, valiosa y crítica, pensando en la resolución de un problema y desarrollando habilidades. (Waits y Demana, 2001).

Estos autores destacan lo siguiente:

- Las calculadoras reducen la carga de trabajo en los procedimientos aritméticos y algebraicos cuando éstos no son el foco de la atención. Proporcionan mejores formas de manipular símbolos, por lo tanto, en una situación problemática, el desafío para el estudiante será determinar si la respuesta que obtuvo tiene sentido en la situación del problema, tarea que requiere de toda su atención, llegando a ser menos importante el cálculo aritmético y algebraico apoyado en la técnica de lápiz y papel.

- Las calculadoras ayudan a los estudiantes a apreciar las matemáticas. Los estudiantes que usan calculadora ven a las matemáticas más interesantes. Texas Instruments, introdujo el 1994 un dispositivo que permite conexiones mundiales y propicie al estudiante haga mediciones precisas de muchos fenómenos científicos y almacene las medidas en sus calculadoras para su análisis posterior (Bruneningsen y Krawiec 1998, citado por Waits y Demana 2001).

Hembree y Dessart (1992) citado por Waits y Demana (2001), recomiendan el uso de la calculadora para la instrucción, ya que mejora el desarrollo de habilidades y el aprendizaje de los conceptos aritméticos, la resolución de problemas y favorece actitudes positivas de los estudiantes hacia las matemáticas.

Para Waits y Demana (2001), es importante que los estudiantes desarrollen la habilidad para reconocer cuándo las respuestas son correctas y que ellos sepan métodos para comprobar sus respuestas sin necesidad de resolver el problema. Además, también es importante que los alumnos comprendan por lo menos a nivel intuitivo por qué procedimientos trabajar y cuándo son aplicables.

En el currículo debe proveerse tiempos para la practica apropiada de las habilidades. Un método que pueden utilizar los profesores para lograr un buen balance está en tener estudiantes que rutinariamente empleen las siguientes estrategias.

- Resuelvan problemas utilizando lápiz y papel y después verifiquen los resultados usando tecnología.
- Resuelvan problemas donde usen tecnología y después confirmen los resultados utilizando papel y lápiz.

- Resuelvan problemas donde ellos elijan qué es más apropiado, utilizar técnicas de papel y lápiz o técnicas con la calculadora o la combinación de ambos.

Cedillo (1999), señala algunas ventajas, a continuación mencionaremos la relación que tienen estos hallazgos con nuestra investigación.

Cedillo (1997) que el trabajo con la calculadora permite que los niños transiten de lo particular a lo general y empiecen a basar sus razonamientos sobre "valores aun desconocidos". Para este autor incorporar la calculadora en el aula introduce nuevos elementos que implican, entre otros aspectos, el diseño de actividades de aprendizaje acordes a esa nueva herramienta, y por lo mismo, en consonancia con nuevas formas de enseñanza y aprendizaje. El uso de la máquina favorece que los estudiantes se concentren en los procesos de solución al hacer descansar el cálculo aritmético en la calculadora (Shumway,1990; Shuard, 1992, citados por Cedillo 1997).

Otro aspecto señalado por Cedillo (1995), es que al editar expresiones algebraicas en el ambiente de cálculo numérico automatizado de la máquina, hace factible un acercamiento al álgebra con base al bagaje aritmético que los alumnos han adquirido en la escuela. Por otro lado, la máquina permite abordar el estudio del álgebra a partir de su uso y además, que ese uso del código algebraico promueve que los estudiantes generen significados para ese lenguaje simbólico que les permite emplearlo para abordar la solución de problemas y expresar y justificar generalizaciones.

Para Cedillo (1995), al introducir la manipulación sobre expresiones simbólicas a partir de la noción de variable, propicia que los estudiantes desarrollen sus propias reglas para operar y, además , como una consecuencia de esto, que cuenten con elementos para verificar la validez de esas reglas.

También reporta que el trabajo con la calculadora propició que el uso de paréntesis y la prioridad de las operaciones se aceptaran como convenciones necesarias para expresar procedimientos que pudieran ser "comunicados" a la calculadora. Otro punto que se destaca al usar la calculadora, es que los alumnos comprenden que una letra sirve para representar "cualquier numero", o que la elección de la letra con la que se va a hacer un programa no afecta la manera en que éste funciona (Cedillo, 1995).

Con la calculadora puede apoyarse el desarrollo de la noción de equivalencia algebraica basada en el referente numérico de las expresiones que se construyen, esa noción permite aborda situaciones que implican operar algebraicamente con términos semejantes e invertir funciones lineales (Cedillo 1999).

El trabajo con las calculadoras propicia que los estudiantes exploren tantas estrategias como les sea posible sin que eso agote sus esfuerzos, lo cual parece favorecer que en muchas ocasiones encuentren más de una forma de resolver un problema (Cedillo 1997).

Cedillo (2000), las facilidades que ofrece la calculadora para editar y evaluar expresiones algebraicas, permiten a los estudiantes ir más allá de una simple memorización, como se hace con el lápiz y papel. Un aspecto importante de la calculadora gráfica es que facilita al estudiante trabajar con expresiones algebraicas usando una lista de valores para la variable y para verificar resultados obtenidos calculados en el programa formulado.

La calculadora gráfica permite al estudiante usar estrategias personales no convencionales como resultado de su razonamiento. Los estudiantes hacen conjeturas que después son evaluadas por ellos mismos, sin necesitar constantemente el apoyo del profesor para que apruebe sus resultados, los estudiantes proponen y verifican soluciones, y los métodos de validación se discuten con el profesor (Cedillo, 2000).

Los estudiantes pueden asignar significados al código algebraico según la manera en que lo usan, sin necesitar un conocimiento previo de definiciones y reglas sintácticas. Esto sugiere que los estudiantes pueden aprender el álgebra al usar la calculadora.

Cedillo (2000), desarrolló un modelo didáctico para el uso de la calculadora en el aula se aborda aspectos que se relacionan con esta investigación. Resalta que la calculadora facilita la realización de cálculos aritméticos ya que admite todo tipo de manipulación numérica y algebraica, que facilita el análisis del comportamiento de funciones a través de gráficas y tablas, este recurso de la calculadora ha llamado la atención de profesores e investigadores.

Se pueden distinguir dos formas de incorporar la calculadora en el aula: (a) La adaptación de los recursos de la calculadora a las formas de enseñanza habituales; y (b) Concepción de nuevas formas de enseñanza a la luz de los recursos que ofrece la calculadora. La primera forma se caracteriza por promover que los estudiantes usen la calculadora para verificar sus cálculos, ya sea en la ejecución de ejercicios o en la resolución de problemas. La segunda forma del uso de la calculadora conduce a la creación de nuevos enfoques didácticos que implican de manera inmediata una revisión de las concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje. La propuesta didáctica que se desarrolla se basa esencialmente en base a estas dos premisas:

- Concebir a la aritmética y el álgebra como sistemas de signos que constituyen un lenguaje mediante el que se expresan, manipulan y comunican las ideas matemáticas.

- Incorporar la calculadora en el aula como el ambiente de trabajo que exigirá al profesor y al estudiante emplear los lenguajes de la aritmética y el álgebra como medio de comunicación.

Cedillo (1996b,1999), menciona que la calculadora programable posee códigos que son gobernados por la sintaxis algebraica, además de que cuenta con una notación muy parecida a la del álgebra, señala que algunos modelos emplean la notación algebraica en especifico. El alumno que cuenta con las nociones aritméticas puede manejar las calculadoras eficientemente ya que las maquinas disponen de un lenguaje formal que esta instalado para ser usado, y lo único que se requiere es que la persona se disponga a utilizarla para realizar una tarea en especifico.

También indica que al usar la calculadora se requiere emplear el código matemático como la aritmética y el álgebra, ya que juegan el papel de un lenguaje matemático, lo cual inicia la comunicación y conversación entre la calculadora y el usuario para resolver alguna tarea cuyo contenido es estrictamente matemático. La maquina es un elemento de mediación entre el sujeto y el contenido matemático que además le exige expresar su línea de razonamiento en términos rigurosamente matemáticos. Más que ningún otro medio desde la perspectiva la calculadora justifica el que veamos a la aritmética y el álgebra como lenguajes matemáticos.

CAPÍTULO 2: REFERENTE TEÓRICO

En este capítulo se discuten de los aspectos teóricos que se consideraron en el desarrollo de este trabajo. Se retoman las aportaciones de Bruner (1995), Vigotsky (1962), Dienes (citado por Resnick y Ford 1990), Piaget (citado por Resnick y Ford 1990), Socas (1996) y Cedillo (1990, 1996, 1996b, 1997, 1997a, 1999). Iniciaremos destacando la Teoría del Desarrollo Conceptual de Bruner y el concepto de Zona del Desarrollo Próximo de Vigotsky. Posteriormente tratamos algunos aspectos de la teoría psicológica en el ámbito de aprendizaje de las matemáticas, destacando los estudios de Dienes, Socas y Cedillo.

El referente teórico que se adoptó en esta tesis se basa principalmente en la teoría del desarrollo conceptual de Bruner (1995), quien estudió los procesos cognoscitivos de los niños preocupándose en especial de cómo representan mentalmente los conceptos e ideas que van aprendiendo. En palabras de Bruner, "si queremos sacar partido de nuestro contacto con las regularidades recurrentes del entorno debemos representarlas de alguna forma. Dejar de lado este tema diciendo que se trata de "memoria pura y simple" supone no entender el problema. Porque lo más importante de la memoria no es el almacenamiento de la experiencia pasada, si no la recuperación de lo que es relevante, en un formato que se pueda utilizar. Esto depende de cómo se codifica y se procesa la experiencia anterior para que pueda ser relevante y aprovechable en el presente cuando se necesite. El producto final de tal sistema de codificación y procesamiento es lo que podemos llamar representación" (Bruner, 1995, pp. 47).

Como se ha mencionado antes, Bruner propone tres modos de representación: (i) modo enactivo, es el modo de representar acontecimientos pasados por medio de *respuestas motoras* apropiadas; (ii) modo icónico, codifica los acontecimientos mediante la organización selectiva de los perceptos y las imágenes, mediante las estructuras espaciales, temporales y cualitativas del campo perceptivo y sus imágenes transformadas; (iii) modo simbólico, representa objetos y acontecimientos por medio de características formales entre las que se destacan el distanciamiento y la arbitrariedad.

En esta tesis retomamos también el trabajo de Vigotsky (1962), particularmente el concepto de Zona del Desarrollo Próximo, donde plantea que el aprendizaje no se deriva simplemente del desarrollo intelectual, sino que, por el contrario, es el que lo impulsa. Vigotsky propone que el aprendizaje que se da a partir de desarrollos específicos ya establecidos; el aprendizaje es el que impulsa un avance que se produce en la Zona de Desarrollo Actual y evoluciona hasta alcanzar los límites de autonomía posibles definidos por la Zona de Desarrollo Próximo; el concepto de aprendizaje como vehículo del desarrollo intelectual es el que nos permite descubrir la estructura y características del aprendizaje humano.

Vigotsky (1962), establece una diferencia entre lo que el alumno es capaz de hacer y aprender solo y lo que es capaz de hacer y aprender con ayuda de otras personas, observándolas, imitándolas, siguiendo sus instrucciones o colaborando con ellas. La distancia entre las capacidades del sujeto trabajando solo o con el apoyo de un colega más experimentado es lo que Vigotsky llama Zona de Desarrollo Próximo, este aprendizaje se sitúa entre el nivel de desarrollo efectivo y el nivel de desarrollo potencial. Este concepto delimita el margen de incidencia de la acción educativa, Vigotsky propone que la enseñanza eficaz es la que parte del nivel del desarrollo efectivo del alumno, no para acomodarse, sino para propiciar el progreso a través de la Zona de Desarrollo Próximo, para ampliar y generar eventualmente nuevas zonas de desarrollo próximo.

Teoría psicológica y el aprendizaje de las matemáticas

Existen propuestas sobre el trabajo en el aula que se han llevado a cabo en concordancia con la teoría del desarrollo conceptual de Bruner, entre éstas destacan los trabajos de Dienes, (citado por Resnick y Ford 1990), quien plantea que los niños van formándose una imagen de la realidad a partir de sus experiencias con los objetos del mundo. Dienes sugiere que se creen recursos didácticos que acerquen las matemáticas al campo de la experiencia concreta mediante materiales que pueden emplearse de manera que sean particularmente útiles para la enseñanza. Para esto recomienda que esos materiales estén desprovistos de elementos distractores, es decir, que no sean objetos que se utilicen para otras cosas en la vida diaria, sino que sean diseñados específicamente para facilitar el aprendizaje de las matemáticas.

Dienes propone el *juego libre* como la primera fase del desarrollo de conceptos, sugiere que en esta fase se debe permitir que los niños manipulen los materiales libremente sin que haya unos pasos a seguir, dándoles oportunidad de ensayar y probar sus ideas; señala que debe darse al niño la posibilidad de familiarizarse con los materiales y reconocer sus propiedades, propiciando que se forme una idea de su tamaño, peso, textura y color, y que descubra las maneras en que se pueden utilizar para realizar construcciones imaginativas. Este tipo de actividad debe propiciar que los niños descubran las formas y regularidades del entorno. También recomienda que no se intente reducir la fase de juego libre en el ciclo de aprendizaje, porque los niños necesitan tiempo para experimentar con los objetos que los rodean.

Después de este periodo de juego libre, Dienes plantea otro en el que se debiera empezar a estructurar sistemáticamente las experiencias de los niños aprovechando los materiales concretos. Para esto, sugiere que el profesor guíe a los niños a través de una serie de experiencias de aprendizaje que apuntan a las propiedades de interés y refuercen el concepto que se está aprendiendo. En este periodo es donde los materiales manipulables tienen su máximo impacto sobre el aprendizaje. Según Dienes, lo que hace el niño al trabajar con materiales manipulables es empezar a abstraer un concepto, para lo cual el niño tiene que recopilar todo lo que es común a una gran variedad de experiencias y rechazar todo lo que sea irrelevante.

Dienes propone que los niños trabajen con materiales de diferentes tipos. Al usar materiales diversos se facilitan los procesos de ordenación y clasificación, que son necesarios para la abstracción de un concepto. Agrega que las diversas materializaciones de un hecho matemático deben diferenciarse entre sí tanto como sea posible cuando se trabaja con materiales manipulables; Dienes llama a este proceso *principio de la variabilidad perceptual*, que proporciona un marco de explicación para comprender las formas en que los niños llegan a ser capaces de "ver"' la estructura del conocimiento matemático desde perspectivas diferentes.

Dienes propone un tercer ciclo en el aprendizaje que se refiere a las experiencias de los niños a través de manipulaciones guiadas, o juegos controlados. Este tercer ciclo es el momento en que debe ayudarse a los niños a descubrir métodos que les permitan hablar de sus descubrimientos, dibujando imágenes, gráficos o mapas sencillos, para apoyar la asociación de símbolos a los conceptos matemáticos. Sugiere que el empleo de símbolos debe ser informal al principio, dirigido a ayudar a los niños a recordar las formas y relaciones que han percibido, en esta etapa Dienes recomienda que se permita a los niños utilizar símbolos elegidos por ellos mismos. Este autor sugiere que cuando el niño se encuentra en el periodo de simbolización es cuando puede elevar su actividad matemática a un plano superior al de las experiencias que hasta ese momento ha registrado mediante manipulaciones físicas o como imágenes mentales (representaciones enactiva e icónica de

Bruner). La existencia de este plano superior se basa en el supuesto de que las materializaciones múltiples propician la creación de un banco significativo de imágenes mentales.

La transición a la representación simbólica debe apoyarse permitiendo que esas imágenes se lleguen a evocar por símbolos matemáticos asociados a las ideas. Al aplicarse los símbolos, las experiencias matemáticas se liberan de sus referentes concretos, y se convierten en herramientas que dan lugar a nuevos tipos de manipulaciones mentales.

Una investigación relevante al trabajo que aquí se presenta es la realizada por Ledezma (1994), quien estudió los efectos que produce en el rendimiento escolar de alumnos de tercer grado de secundaria el aprendizaje de los productos notables y la factorización haciendo uso de material didáctico manipulable. Su estrategia de trabajo tiene como punto de partida la interacción directa del alumno con el material (representación enactiva de Bruner); luego el alumno debe realizar dibujos y diagramas adecuados (icónica) y, finalmente, sugiere que se proponga al alumno resolver los problemas propuestos empleando símbolos hasta llegar a construir sus propias reglas con base en sus hallazgos. Ledezma (1994), reporta que la experiencia que obtuvieron los alumnos al interactuar con el material didáctico, que consistió de un paquete de 60 piezas de madera, les permitió clarificar conceptos, descubrir relaciones, establecer propiedades y elaborar sus propios procedimientos para solucionar situaciones diversas. Agrega que el uso de manipulables logra cambios en las actitudes de los alumnos hacia las matemáticas.

Los planteamientos teóricos de Bruner y Dienes, así como los hallazgos de Ledezma, dan sustento a una hipótesis que subyace en esta tesis. Esta hipótesis se basa en la idea de que el alumno, al transformar, construir y descubrir conceptos mediante la experiencia con materiales manipulables y la calculadora gráfica, tendrá a su alcance la posibilidad de un aprendizaje por descubrimiento que a su vez sea significativo.

En el siguiente apartado abordaremos los aspectos de orden matemático que nos llevan a relacionar la teoría del desarrollo conceptual de Bruner, con el uso de materiales concretos como activadores de la creatividad para hacer matemáticas, específicamente con relación a los contenidos de preálgebra.

Materiales manipulables y el aprendizaje prealgebraico.

Piaget, citado por Resnick y Ford (1990), supone una reestructuración constante de los datos y de las relaciones como consecuencia de las interacciones de los niños con su entorno. Bruner, apoyándose en parte en las ideas de Piaget, se centró en cómo se representan estos resultados en episodios interactivos en la mente del niño.

Bruner propone que el desarrollo de la representación se da en el orden enactivo-icónico-simbólico; cada modo de representación depende del anterior y exige práctica antes de que se pueda llevar a cabo la transición al modo siguiente. La formulación de los modos de representación equivale, según Bruner, a una teoría de las etapas de desarrollo del intelecto. Resnick señala que el planteamiento de Piaget es similar al de Bruner en varios sentidos. La base del desarrollo conceptual planteada por Bruner, sigue un curso paralelo a la teoría general del desarrollo intelectual, es decir, en cada una de las etapas del desarrollo intelectual de Piaget (estadio sensoriomotriz, estadio de operaciones concretas y estadio de operaciones formales) se puede llevar a cabo los modos de representación cognitiva propuestos por Bruner.

Bruner (1995), refiriéndose a la obra de Piaget, señala que hacia los 5 o 6 años el esfuerzo mental del niño se centra sobre todo en establecer relaciones entre lo sensorial y lo motor. En este estadio, el niño se interesa especialmente en manipular el mundo a través de la acción (estadio preoperacional), en el que el principal logro simbólico consiste en aprender a representar el mundo exterior mediante símbolos establecidos por simple generalización. Lo que el niño aún no ha adquirido es la reversibilidad, por lo tanto, no puede comprender ciertas ideas esenciales que constituyen el fundamento de la matemática y la física.
El estadio de las operaciones concretas es operatorio, en contraste con el anterior que sólo es activo. Una operación es un tipo de acción que puede ejecutarse directamente mediante la manipulación de objetos, o bien internamente, esto es, manipulando en nuestra mente los símbolos que representan objetos y relaciones; dicho de otra forma, una operación es un medio de introducir en nuestra mente datos acerca del mundo real para transformarlos de manera que podamos organizarlos y utilizarlos de forma selectiva en la resolución de problemas.

En el estadio de las operaciones formales, que media entre los 10 y 14 años de edad, la actividad intelectual del niño parece basarse en la capacidad de operar sobre proposiciones hipotéticas, lejos de verse limitada a las experiencias pasadas o presentes. En este estadio el niño es capaz de considerar las posibles variables e incluso reducir relaciones potenciales que más tarde podrán verificar experimentalmente.
Las etapas de desarrollo no cambian drásticamente en el niño, se van integrando poco a poco a la siguiente etapa, hasta finalizar en las etapas donde el niño llega al razonamiento formal. Cada etapa es conclusión de algo empezado en la que le precede, y el principio de algo que nos llevará a la que sigue, esto no quiere decir que la etapa anterior desaparezca, si no que es la base para desarrollar y estructurar conocimientos más formales.

En cuanto a la relación de lo antes planteado con el aprendizaje del álgebra, Socas (1996), describe aspectos relacionados con la enseñanza del álgebra en cada estadio del desarrollo cognitivo según Piaget, así como la manera característica del razonamiento y los tipos de tarea que los alumnos pueden hacer. Socas propone que los adultos y adolescentes regresan al pensamiento de operaciones concretas y a un pensamiento preoperacional cuando se les expone a nuevas áreas de aprendizaje, beneficiándose con experiencias concretas antes de avanzar a niveles abstractos de pensamiento.

En el período de operaciones concretas, la acción física y mental del niño con los objetos crea operaciones y relaciones. En las cuatro operaciones aritméticas, el significado que se les asigna a éstas y a los números se sustenta en alguna analogía física que puede lograrse por la disponibilidad del material concreto. El niño necesita clausurar; es decir tiene la necesidad de asignarle un resultado o darle solución a una operación para comprender la situación que está enfrentando. El niño puede relacionar tanto los números como las operaciones con el mundo físico que le es familiar.

El estadio de las operaciones concretas se caracteriza por la necesidad de manipular materiales físicos, implica solamente operaciones que presentan clausuras, es decir, una expresión matemática será significativa para el niño si es posible concluir en un único número.

Socas (1996) propone que el niño que se encuentra en el estadio de las operaciones concretas desarrolla relaciones con el apoyo de materiales concretos; posteriormente puede pensar sobre una relación de relaciones y llegar a ser capaz de apreciar las abstracciones simbólicas del álgebra.

En general, los cálculos aritméticos conducidos por el uso de materiales físicos, como ábacos, bloques aritméticos, multibase, y tableros de contar, implican operaciones concretas. De acuerdo con Socas (1996), el cálculo con algoritmos formalizados es la frontera entre las operaciones concretas y las formales.

Al finalizar la etapa de las operaciones concretas, el niño es capaz de trabajar con cierto número de operaciones en secuencia si los números se mantienen pequeños, y puede trabajar con números grandes si forman parte de operaciones simples. Así los alumnos reconocen la unicidad del resultado de una operación simple con números pequeños y de este modo pueden realizar tareas de comparación de expresiones algebraicas. En el caso de números pequeños sin recurrir a la clausura, y en el caso de números grandes que se escapan a la visualización física, el niño se repliega a la clausura, cierra cada parte por separado y compara.

Socas (1996), plantea que cuando los alumnos llegan a la generalización concreta están dispuestos a entender y a usar con significado la generalización y a trabajar con fórmulas que incluyen hasta cuatro variables, como $V=a\times b\times c$, siempre y cuando sean capaces de tener en cuenta que cada letra representa a un número, y que cada operación binaria puede clausurarse en cualquier momento.

En la etapa de las operaciones formales el alumno puede tomar como realidad un sistema abstracto, bien determinado, con sus definiciones, relaciones y reglas, no abordando la clausura hasta que han agotado todas las posibilidades.

El alumno puede resolver problemas en los que las letras representan números o variables que emplean una operación bien determinada, puede evitar sacar la conclusión final hasta haber considerado las diversas posibilidades, estrategia esencial para obtener una relación distinta de la de obtener un resultado único.

Este período se caracteriza por la habilidad de los niños para pensar más allá de la realidad concreta, empleando razonamientos deductivos e inductivos, abstracciones reflexivas, pensamiento proporcional, esquemas operacionales que implican combinaciones de operaciones o combinaciones de variables.

Relación entre la teoría y los instrumentos para la toma de datos.

En este trabajo se aborda la iniciación al álgebra tomando en cuenta el nivel de desarrollo intelectual donde se encuentra un alumno de 12-13 años de edad. Se tomó como punto de partida el estadio de operaciones concretas para abordar los temas de preálgebra, que de acuerdo con Bruner, es la etapa del desarrollo intelectual en que inicia el desarrollo de los modos de representación.

Para llevar a cabo el presente estudio se recurrió al uso de hojas de trabajo con la finalidad de contar con evidencia escrita de las diferentes manifestaciones de comportamiento que el estudiante tiene cuando manipula materiales didácticos y la calculadora gráfica. Las actividades que se presentaron en las hojas de trabajo fueron seleccionadas para motivar la reflexión, la construcción de conceptos y la elaboración de métodos propios que permitieran crear vínculos que facilitaran el paso al estudio del álgebra. Una hoja de trabajo es, en extensión, una página. Su contenido incluye situaciones en las que el fin que se persigue está claramente establecido para propiciar que el estudiante inicie de inmediato su trabajo haciendo algo que se concreta en una producción propia. Para esto, en cada hoja de trabajo se propone un reto intelectual al estudiante, cuidando que ese reto permita al estudiante percibir desde el principio que puede abordar la actividad, y que sea claro que lo único que todavía no sabe es cómo organizar su razonamiento para empezar a hacer lo que se le está planteando (Cedillo 1996b).

El aprendizaje del álgebra empleando la calculadora.

El uso de calculadoras en la clase de matemáticas ha sido un tema de gran debate durante las ultimas dos décadas, uno de los principales temas han sido las preocupaciones de los profesores acerca de la introducción del uso de la calculadora en una tradición de enseñanza fuertemente orientada en auxiliar a los niños a desarrollar destrezas aritméticas en la escuela elemental. Hembree y Dessart (1986), estudiaron el potencial de la calculadora como una herramienta para facilitar el trabajo de los estudiantes cuando se les exige poner en práctica sus habilidades al resolver problemas y en qué medida el uso de la máquina permite al estudiante descubrir, explorar y crear su propio conocimiento. Estos autores reportan evidencia obtenida en estudios con poblaciones amplias que han mostrado que un uso adecuado de la calculadora no inhibe el desarrollo de destrezas aritméticas básicas. Específicamente, encontraron que la calculadora permite al alumno desarrollar conceptos y crear estrategias para la solución de problemas, además de que estimula sus habilidades para producir respuestas. También reportan que el apoyo que brinda la calculadora lleva a mejores resultados que los encontrados mediante el uso del papel y lápiz con estudiantes de diferentes grados escolares.

La investigación llevada a cabo por Hembree y Dessart en Estados Unidos a finales de los 70 y principio de los 80, donde integraron 79 estudios sobre el uso de la calculadora, estuvo enfocada a los efectos de su uso desde el nivel de educación preescolar hasta la preparatoria. En cada estudio un grupo de estudiantes tenía permitido usar la calculadora en un período de 30 días en la escuela, las máquinas fueron empleadas para ayudarles a desarrollar conceptos y estrategias en la resolución de problemas; durante el mismo período se observó un grupo testigo que recibía instrucciones sobre los mismos temas matemáticos pero sin tener acceso a las calculadoras. Los resultados de esa investigación sugieren que el uso de las calculadoras, en conjunción con la instrucción tradicional en matemáticas, puede ayudar a mejorar el promedio de las habilidades básicas de los estudiantes al trabajar con lápiz y papel tanto en la realización de ejercicios como en la resolución de problemas.

Otro hallazgo importante se refiere a que las calculadoras benefician notablemente tanto a los estudiantes con desempeños pobres en la resolución de problemas, como a los estudiantes con buenas habilidades para esta tarea. Hembree y Dessart (1986) hacen énfasis en el potencial del uso de la calculadora durante los exámenes, a este respecto encontraron que a lo largo de todos los grados y niveles de habilidad, el apoyo brindado por la calculadora auxilió a los estudiantes al lograr mejores calificaciones que las alcanzadas empleando estrategias basadas en el uso de papel y lápiz. En particular, ellos observaron los efectos más positivos en los estudiantes con bajas habilidades y los de habilidad notable en la resolución de problemas, así como una mejor actitud hacia las matemáticas y el logro de una más alta autoestima, a diferencia de los que no manipulan la calculadora.

En la búsqueda de evidencia más sólida y amplia para fundamentar de mejor manera sus hallazgos, Hembree y Dessart (1992) realizaron nueve investigaciones adicionales, esto les permitió confirmar de que usando la calculadora durante la instrucción, los estudiantes de bajo promedio mejoran considerablemente su desempeño en matemáticas. Confirmaron también que los estudiantes que usaron la calculadora mejoraron su actitud hacia las matemáticas.

Ruthven citado por Cedillo (1996), reporta que las características de la calculadora dan lugar a un uso individual de la tecnología que ofrece ventajas para emplearlas como herramientas que propicien un aprendizaje por descubrimiento. Las facilidades de edición y recuperación de datos que presentan modelos actuales de algunas calculadoras, aunadas al pequeño tamaño de su pantalla, permiten al estudiante realizar numerosos intentos sin ser sometidos a la crítica de su profesor y sus compañeros; se observó durante las clases donde se permitió el uso de la máquina que los estudiantes hacían menos preguntas a sus profesores y que cuando mostraban su trabajo era porque estaban seguros que sus respuestas eran correctas. En general, las observaciones de los profesores destacan que los estudiantes habían seguido estrategias que ellos no les habían enseñado (estrategias no convencionales); Ruthven (citado por Cedillo,1996) sustenta en estos hallazgos la afirmación de que las calculadoras, empleadas adecuadamente, pueden ayudar al desarrollo de un aprendizaje por descubrimiento y a elevar la autoestima de los estudiantes.

Ruthven (citado por Cedillo, 1996) señala que una micro computadora puede se un obstáculo en aulas donde sólo cuentan con una sola máquina, porque esto ofrece pocas posibilidades de acceso a los estudiantes de grupos numerosos. Este hecho propicia que muchos maestros utilicen la computadora como un recurso para mostrar imágenes o texto a todo el grupo, de manera similar a como se usan las láminas presentadas en cartulina, el pizarrón o incluso un pizarrón electrónico. Además, el acceso de los estudiantes a la computadora se ve limitado por el control del maestro y pocos estudiantes hacen uso espontáneo de los recursos de la máquina. Respecto a costos, la calculadora ofrece una alternativa, ya que el precio de todo un equipo de calculadoras para un salón de clases es comparable con el de una sola computadora.

En un estudio de dos años en dos escuelas, donde se proporcionó una calculadora gráfica para uso personal de cada alumno dentro y fuera de la escuela, se encontró que los estudiantes mostraron un gado de participación e iniciativa que sugiere que la disponibilidad de la calculadora puede ejercer una influencia positiva sobre las actitudes de los estudiantes hacia la tecnología en las matemáticas. El proyecto arrojó datos que alentaron la aplicación de políticas escolares en Inglaterra para que los estudiantes dispongan de una calculadora para su uso personal (Ruthven, 1995).

(Cedillo, 1994, 1995, 1995a, 1996c), realizó una investigación que tuvo como propósito obtener evidencia empírica acerca del modelo didáctico basado en el uso de la calculadora, centrándose en las estrategias y nociones algebraicas que desarrollan los estudiantes. Reportó que la calculadora puede emplearse para abordar la enseñanza de la aritmética bajo un enfoque didáctico que ofrece un promisorio antecedente para el estudio del álgebra, ya que permite que los estudiantes transiten de lo particular a lo general y comiencen a basar sus razonamientos sobre valores aún desconocidos. En ese estudio obtuvo evidencia empírica que sugiere que las estrategias que desarrollan los estudiantes muestran una tendencia hacia la generalización y que esta forma de trabajo puede ser un antecedente importante en el paso de la aritmética al álgebra

Cedillo reportó que la incorporación de la calculadora en el aula crea nuevos elementos que involucran entre otros aspectos el diseño de actividades de aprendizaje acordes a esa nueva herramienta y nuevas formas de enseñanza y de aprendizaje.

Al trabajar con expresiones matemáticas en la calculadora se inicia una comunicación entre el estudiante y la máquina que consiste en la anticipación a una respuesta que genera el estudiante antes de acudir a la máquina, la respuesta que da la máquina le ofrece retroalimentación inmediata que le indica si sus instrucciones fueron emitidas y recibidas con la intención y el significado que él perseguía. Este proceso cierra el ciclo de comunicación entre la máquina y el sujeto.

Cedillo (1996), realizó una investigación en la escuela secundaria sobre el uso de la calculadora como apoyo en la enseñanza del álgebra. Reportó que el uso del código de programación de las calculadoras permite introducir el "lenguaje algebraico" a partir de su uso y que esto propicia que los estudiantes generen significados que les permiten usar el lenguaje simbólico del álgebra para explorar y expresar generalizaciones. Cedillo sugiere que la calculadora puede emplearse para crear un ambiente de trabajo que motive al estudiante, en el cual puede expresar su razonamiento mediante el código que la calculadora exige, el algebraico. La calculadora también ofrece la posibilidad de obtener retroalimentación inmediata y fomenta una actitud favorable para la exploración y verificación de conjeturas.

CAPITULO 3: METODOLOGÍA

Introducción

Este capítulo aborda los aspectos metodológicos que orientaron la realización de este trabajo, en él se detalla la información que da cuenta del proceso, los temas abordados, las actividades experimentales utilizadas y la forma en que se incorporó el material manipulable y la calculadora, como herramientas para la enseñanza del álgebra.

El capítulo está estructurado en las siguientes secciones:

- Elección del método de investigación.
- Estudio piloto
- Estudio principal

En la primera sección se aborda el método de análisis cualitativo y la técnica de estudio de casos. La segunda sección da cuenta de los trabajos preliminares a la fase del estudio principal (Estudio Piloto). En esta fase se pusieron a prueba las actividades diseñadas, en particular, para verificar su congruencia con el método de investigación, se revisaron la pertinencia del referente teórico, los instrumentos para la recolección de datos, las entrevistas, la elección de los alumnos, la forma de organización de las actividades, la interacción maestro-alumno, los contenidos de enseñanza, las categorías de análisis, todo esto en el marco de los propósitos del proyecto. Como se reporta en esta sección, el poner a prueba lo anterior permitió ajustar, ordenar, afinar y rediseñar algunas actividades de enseñanza. Los avances obtenidos en el estudio piloto nos permitieron diseñar las fases del Estudio Principal.

En la tercera sección, que es la fase principal de la investigación, se presenta la planeación de la toma de datos y las categorías de análisis.

Método

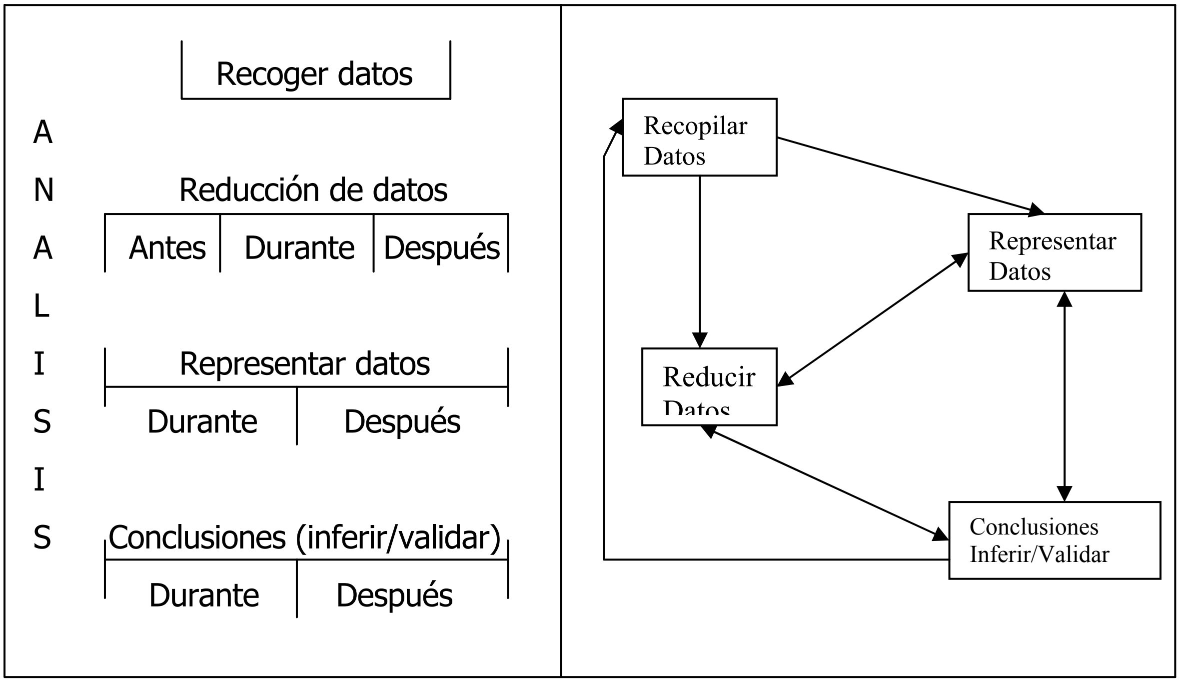
Se empleo el método de análisis cualitativo con apoyo de la técnica de estudio de casos. Las razones por las que se eligió este esquema metodológico se discuten brevemente a continuación. Este estudio se enfocó a conocer en profundidad el tipo de estrategia que emplearon los estudiantes en su aprendizaje, los datos que se recabaron son episodios donde se indagó sobre sus formas de razonamiento, por lo que la información recabada proviene de datos de entrevistas y observaciones del trabajo en clase. Una fuente de datos importante fue el trabajo escrito de los estudiantes, que arrojó información sobre la manera en que éstos abordaron cada actividad, para esto las actividades se diseñaron de manera que permitieran documentar aceptablemente los procesos de razonamiento que emplearon los alumnos en sus respuestas puntuales a preguntas específicas.

Lo anterior sugiere que un método de investigación adecuado es el de análisis cualitativo de datos. El método de análisis cualitativo que se seleccionó es el que desarrollaron Miles y Huberman (1984). Aunque en muchos estudios es factible combinar métodos cuantitativos con métodos cualitativos, en esta tesis no parece ser un buen recurso de investigación esta combinación, ya que los métodos cuantitativos sólo informarían las veces que un estudiante pudo lograr una respuesta correcta, cuando no lo logra, o después de cuántos intentos fue capaz de superar los problemas que se le plantearon. En contraste, el análisis cualitativo permite documentar cuáles fueron sus formas de razonamiento y cómo fueron afinando sus estrategias, lo cual concuerda de mejor manera con los propósitos de este estudio. A continuación se resume el modelo de Miles y Huberman, (citado por Cedillo, 1996). Estos autores destacan tres fases esenciales: el proceso de reducción de datos, la representación de datos y el establecimiento de conclusiones. Los autores puntualizan que estas fases de análisis, junto con la de recopilación de datos forman un proceso interactivo y cíclico. De acuerdo con las necesidades del proceso de investigación, los procesos de reducción de datos, estructuración y análisis de los mismos, y la formulación de las conclusiones, se interrelacionan, e influyen unos a otros. El análisis cualitativo es un sistema activo, los datos así obtenidos son fuente de información y de procesos altamente interconectados que dan sentido al proceso indagatorio.

Marcelo (1995), citado por Calix (2000), señala que Miles y Huberman se refieren a "dar sentido" a los datos cualitativos, como el proceso que consiste en reducir notas de campo, descripciones, explicaciones, y justificaciones, más o menos prolijas, hasta llegar a una cantidad de unidades significativas y manejables. Este proceso significa también estructurar y representar los contenidos y por último, extraer y confirmar conclusiones más comprensibles.

Durante la recopilación de datos se buscó sistematizar las ideas generales que se encuentran inmersas en las actividades realizadas durante el proceso de investigación. Normalmente, estas ideas generales se registran a través de códigos (Marcelo, 1995). Los códigos son estructuras que permiten reducir las declaraciones individuales, pero además representan un esfuerzo interpretativo y explicativo del investigador, buscando siempre la validez y la objetividad de los resultados. Por tanto los códigos se convierten en un auxiliar para transformar los datos primarios en unidades pertinentes y eficaces que permiten una mejor lectura de las características del contenido abordado.

En el siguiente cuadro se presenta un esquema del modelo de Miles y Hueberman en el que se apoya esta investigación.



Esquema 1

Como se puede apreciar, en este modelo el *"análisis consiste en tres momentos concurrentes en una actividad: reducción de datos, representación y conclusiones inferir/verificar"*. En el momento de la reducción de los datos, los autores recomiendan una actividad anticipadora o inicial que permite perfeccionar las actividades que tendrán que ver con la representación de los datos o estudio principal. A este respecto, para esta investigación se realizó un estudio piloto que permitió rediseñar, cuando fue necesario, las actividades que forman parte del estudio principal.

El tercer momento recomendado en este modelo consiste en localizar los componentes más significativos que dan sustento a la tarea de búsqueda y que tienen que ver con los propósitos prediseñados en el proyecto de investigación. Esta fase metodológica no se da de manera aislada, ya que *la reducción de datos, su representación y la formulación de conclusiones* son tres fases interactivas que siempre deben estar presente en el proceso de investigación. (Véase esquema 1).

Resumiendo, *"la investigación cualitativa consiste en descripciones detalladas de situaciones, eventos, personas, interacciones y comportamientos que son observables. Además, incorpora lo que los participantes dicen... tal y como es expresado por ellos mismos y no como uno los describe",* Montero, 1984 (citado en Calix, 2000).

También nos apoyamos en la técnica de estudio de casos para investigar sobre el concepto de variable, el de función y equivalencia algebraica y sobre estrategias de generalización que los estudiantes desarrollan cuando el ambiente de enseñanza para la introducción al álgebra escolar se basa en el uso de manipulables y calculadora. El estudio de casos analiza las formas personales de pensar y las estrategias a las que el sujeto recurre para dar respuesta a una situación de acuerdo a su realidad en determinado contexto, reflejando actitudes, dudas y habilidades. A través del estudio de casos es posible conocer las representaciones de cada individuo, recuperando en parte el sentido y la lógica de las actitudes.

El proceso de investigación consistió en llevar a cabo una serie de actividades y registros en el aula, así como entrevistas individuales. Consideramos que los trabajos en el aula realizados por los alumnos son una herramienta importante para poder analizar tanto los resultados de los trabajos individuales como los de las entrevistas.

Diseño de la investigación

Problema a estudiar

¿Qué nociones sobre el uso de las literales en el álgebra y estrategias de generalización desarrollan los estudiantes cuando el ambiente de enseñanza para la introducción al álgebra escolar se basa en el uso de materiales manipulables y calculadoras gráficas?

Propósitos de la investigación

Obtener evidencia empírica que permita proponer respuestas plausibles a las siguientes preguntas de investigación.

1. ¿Cómo influye un modelo didáctico en el que se combinan materiales manipulables y la calculadora programable, en el aprendizaje de las expresiones algebraicas como un medio para expresar generalizaciones?
2. ¿Qué tipo de generalizaciones pueden plantear algebraicamente los estudiantes una vez que han trabajado con materiales manipulables y la calculadora?
3. ¿Qué estrategias desarrollan los estudiantes para resolver problemas que involucran el reconocimiento de patrones numéricos?
4. ¿Qué estrategias generan los estudiantes para abordar situaciones de equivalencia algebraica?

Categorías de análisis

A continuación se mencionan las categorías de análisis que se emplearon en este trabajo:

- Expresión verbal de una generalización.
- Generalización mediante el código aritmético.
- Generalización empleando el código álgebraico.

La categoría *Expresión verbal de una generalización* se refiere a episodios en los que los alumnos acudieron al lenguaje común para describir la forma en que razonaron al abordar una actividad. Por ejemplo, cuando emplearon expresiones como las siguientes: "siempre te va a salir lo mismo", "el comportamiento es de dos en dos", "va de tres en tres", etcétera.

La categoría de *Generalización mediante el código aritmético* se asocio a episodios en los que los alumnos, además de utilizar el lenguaje común, emplearon recursos aritméticos para explicar el comportamiento de un patrón numérico. Por ejemplo, cuando usaron el código aritmético o expresiones como "es la tabla del tres" o "se va sumando de dos en dos".

La categoría *Generalización empleado el código algebraico* se empleó para distinguir los casos en los que los alumnos usan literales para expresar una generalización y les daban significados como los siguientes: "la letra representa los números de entrada", "la letra representa los valores que están en las llaves" (se referían a los números de entrada cuando creaban un programa en la calculadora), "la letra representa cualquier número", "puedes utilizar letras en vez de números". Las expresiones anteriores se interpretaron como acciones en las que los estudiantes fueron capaces de usar las literales como variables algebraicas.

Estudio Piloto

El estudio piloto es una réplica breve, resumida, que sintetiza lo que se hará en el estudio principal. El propósito inicial fue poner a prueba las actividades diseñadas en cuanto al nivel de dificultad de las tareas que se proponen, su pertinencia con los propósitos del estudio principal y obtener información que permita hacer los ajustes correspondientes. Además permitió obtener una experiencia previa y con esto la posibilidad de abordar con mejor oportunidad de éxito, y mayor sustento, la siguiente fase de investigación (estudio principal). A continuación se reporta cómo se llevó a cabo el trabajo de campo durante el estudio piloto y los resultados que de éste se obtuvieron.

Escenario

El trabajo de campo se llevó a cabo en la Escuela Secundaria Jesús Reyes Heroles No 425, turno vespertino, en esta etapa del "estudio piloto", participaron 44 estudiantes de primer grado y se desarrolló del 18 de octubre al 24 de noviembre, del 2000. durante este periodo se efectuaron doce sesiones de trabajo con una duración de 50 minutos cada una, las cuales se distribuyeron de la siguiente forma:

- Dos sesiones para la actividad de preparación en el uso del material manipulable.
- Cuatro sesiones para la actividad principal con el uso de manipulables.
- Seis sesiones en la que se usó la calculadora gráfica. El estudio piloto se realizó en dos partes, la primera consistió en la actividad preparatoria para el uso de material manipulable y calculadora gráfica, y tuvo como finalidad que el estudiante se familiarizará con el manejo del material manipulable y el reconocimiento de las principales funciones de la calculadora. La segunda fase, es la actividad principal la cual estuvo orientada al reconocimiento de patrones numéricos.

Diseño de las actividades

El diseño de las actividades considera los contenidos matemáticos (aritmética y álgebra), se centran en proponer al estudiante que encuentre patrones numéricos. Para contar con información más clara y confiable nos auxiliamos de entrevistas al inicio, durante y al final de cada etapa de enseñanza durante las sesiones de trabajo, cada una de las entrevistas fue video grabada.

Miles y Huberman (1984), establecen tres formas de describir y sistematizar la información obtenida; código descriptivos, interpretativos y explicativos. Codificar "*es un proceso por el que los datos brutos son transformados sistemáticamente y agregados en unidades que permiten una descripción precisa de las características pertinentes del contenido*" (Bardin, citado en Marcelo 1995). De acuerdo con el propósito de esta investigación, y la información obtenida, elegimos los tres tipos de códigos citados para sustentar los hallazgos encontrados en este proyecto. Primero se describió el proceso de investigación abarcando los contenidos, actividades, y herramientas; después se interpretaron los resultados recabados; por último se explica y sustentan los hallazgos a partir del marco teórico.

Actividades que se pusieron a prueba

Durante el estudio piloto se pusieron a prueba 46 hojas de trabajo, de las cuales las que se emplearon para trabajar con materiales manipulables fueron diseñadas por los investigadores y las que se emplearon para trabajar con la calculadora fueron diseñas por Cedillo (1995, 1999). En las hojas de trabajo se propusieron actividades relacionadas con contenidos que introducen al álgebra, tales como patrones numéricos, uso de variables, y jerarquía de las operaciones aritméticas. Para realizar las actividades propuestas en las hojas de trabajo el alumno se auxilió de materiales manipulables y calculadoras gráficas.

Durante el trabajo del pilotaje se pidió a los alumnos contestar un cuestionario donde se buscó obtener información acerca del gusto o rechazo hacia las matemáticas y sobre la experiencia previa que tuvieran trabajando con materiales manipulables y calculadora gráfica.

Posteriormente se invito a los alumnos resolver las actividades propuesta en las hojas de trabajo, de la siguiente forma:

Uso de material manipulable:

- Se les proporcionaron 13 hojas de trabajo para la actividad preparatoria.
- En las actividades de la segunda parte del estudio piloto se emplearon 13 hojas de trabajo, en estas actividades se introdujo el tema de reconocimiento de patrones numéricos.

Uso de calculadora gráfica:

- En las actividades preparatorias, se propusieron 11 hojas de trabajo.
- En la segunda parte se abordaron nueve hojas de trabajo correspondientes a las actividades principales donde se pidió a los alumnos que identificaran las regla que gobiernan ciertos patrones numéricos.

Actividades preparatorias

El trabajo efectuado por los alumnos en esta etapa con materiales manipulables y calculadora gráfica tuvo una duración de cuatro sesiones de 50 minutos cada una, de las cuales, dos fueron para manipulables y dos para la calculadora, con el desarrollo que se describe a continuación:

Se propuso a los alumnos actividades como formar figuras con palillos, círculos y el tangram; explorar las diversas funciones de la calculadora a partir de actividades relacionadas con el valor posicional en el sistema decimal, la lectura y escritura de números y equivalencia numérica. En estas actividades se pretendía que pusieran en juego habilidades que les permitieran resolver las situaciones propuestas, la finalidad central fue que adquirieran experiencia en el manejo de los materiales y la calculadora gráfica.

Durante el desarrollo se observó que las actividades propuestas despertaron interés en los estudiantes, sin embargo, pronto manifestaron cierta confusión al enfrentase a situaciones con las que no estaban muy familiarizados y en las que había que seguir instrucciones. Creemos que algunas de las razones por las que los estudiantes tuvieron dificultad fueron la apatía por el trabajo que mostraron algunos de ellos, la indisciplina grupal que impidió que los estudiantes se concentraran y, una de mayor importancia, la baja capacidad de comprensión lectora, que al parecer impedía que los estudiantes abordaran el material escrito para seguir instrucciones.

En cuanto al manejo de los materiales, se observó que en las actividades donde se propone el uso de dos materiales distintos presentó un alto grado de dificultad por lo que ningún alumno pudo resolver la actividad propuesta. Creemos que influyó en gran medida el espacio reducido del que se dispuso para trabajar

El tiempo para el trabajo con las calculadoras fue muy corto, por lo que los estudiantes no alcanzaron un dominio que les permitiera explotar los recursos que les brinda. Aunque el tiempo utilizado fue corto, en la mayoría de los casos las respuestas eran exitosas.

El desempeño que alcanzaron en la solución de las actividades no fue el que se esperaba, probablemente debido al poco tiempo que se empleó para el desarrollo de estas actividades preparatorias. El tiempo dedicado a esta etapa debió ser mayor, sin embargo debíamos restringirnos a las facilidades que la escuela nos podía otorgar.

Actividades relacionadas con el Estudio Principal

Las actividades se desarrollaron en ocho sesiones de 50 minutos cada una, en las primeras cuatro se trabajo con material manipulable y en las restantes con calculadora. Al inicio del trabajo se dio una breve explicación de lo que es un patrón de comportamiento numérico, con la intención de clarificar lo que se proponía en las actividades de las hojas de trabajo.

En la medida que se desarrollaban las diferentes actividades propuestas en las hojas de trabajo se les iban proporcionando los materiales a los alumnos según lo solicitaran. A cada alumno se le proporcionó en préstamo una calculadora, se les fue guiando sobre el manejo y función de las teclas de la calculadora para desarrollar las actividades que se le propusieron en hojas de trabajo.

En algunos casos unos quince alumnos alcanzaron cierto dominio de los materiales y la calculadora gráfica, lo cual les permitió resolver las diferentes situaciones que se les presentaron. Hubo alumnos que no alcanzaron un dominio de los materiales y la calculadora gráfica, que les permitiera utilizarlos como auxiliares en la resolución de las situaciones que se propusieron.

De acuerdo a las observaciones realizadas y las respuestas de los alumnos en las hojas de trabajo, pensamos que entre los factores que influyeron en el buen desempeño de los alumnos, se encuentran: la disposición e interés que mostraron para realizar las actividades, la persistencia que manifestaron y la iniciativa constante de pedir apoyo a los investigadores, situación que no se dio con los alumnos que mostraron menor dominio en el manejo de los materiales y la calculadora gráfica.

Se observó que a partir de la hoja de trabajo 5 de las actividades principales con material manipulable se requería del uso de paréntesis (jerarquía de operaciones), situaciones que no se abordaron previamente, por lo que los caminos que siguieron para solucionar las actividades no se apegaban en mucho de los casos al uso de recursos algebraicos, si no que se valían de sus conocimientos aritméticos para contestar lo que se les pedía. Este resultado es importante porque proporciona indicadores de que los alumnos podían generar por sí mismos estrategias válidas no convencionales.

En cuanto al tipo de respuesta que los alumnos dieron, gran parte de ellos utilizaron recursos aritméticos para solucionar las situaciones, sólo en algunos casos lograron utilizar letras dándole un significado algebraico y comprendiendo cual es su función.

En términos generales se observó que los alumnos al inicio de las actividades se auxiliaban de los materiales para resolver las actividades propuestas, en la medida que avanzaban con las actividades dejaban de utilizarlos argumentando que ya le habían entendido y que ya no era necesario utilizarlos.

Conclusiones

Como resultado de las observaciones y el análisis de las respuestas derivadas de la aplicación del estudio piloto recabamos información que nos permitió hacer los ajustes que a continuación se mencionan.

Durante el desarrollo de las actividades del estudio piloto se observó que uno de los factores que interfirieron en el desempeño de los estudiantes para realizar las actividades, tanto con materiales como con calculadora gráfica, fue el espacio reducido en el que trabajaron.

Otro de los factores que influyeron en el desempeño es que existe dificultad en los alumnos en la capacidad lectora, ésta no parece ser suficiente para abordar el material escrito donde se tiene que seguir instrucciones, por lo tanto se modificó la forma en que abordaron las actividades. En el estudio principal el maestro realizó la lectura de las actividades junto con los alumnos, procurando clarificar lo que se propone, en la medida que los estudiantes manifestaron mayor soltura, se les fue dando más autonomía.

En las actividades de preparación del estudio piloto, se hicieron ajustes en las hojas de trabajo. Debido a que durante el desarrollo se observó que representa un grado de dificultad muy elevado para los alumnos el manejar dos materiales manipulables al mismo tiempo, se eliminaron las hojas de trabajo 6 y 7.

Se hicieron los siguientes ajustes respecto a las hojas de las actividades diseñadas para el estudio principal para el uso de materiales manipulables. Durante el análisis del tipo de respuesta que dan los alumnos, notamos que, en la mayoría de los casos, sus respuestas se apoyan en conocimientos aritméticos. Creemos que esta situación limita el tipo de respuesta que puede dar el estudiante, por lo tanto decidimos incluir en las actividades del estudio principal con manipulables el recurso de jerarquía de operaciones, para brindar al estudiante la posibilidad de ampliar la gama de estrategias para la resolución de las situaciones planteadas.

Durante el desarrollo del estudio piloto notamos que el orden en el que se propone la resolución de las hojas no es el más adecuado ya que el grado de dificultad no fue correctamente valorado. Por lo anterior, en el estudio principal se cambió el orden en el que se proponen las actividades, además de incluir las dos hojas de jerarquía de operaciones.

Otro factor que provocó que en general el desempeño de los alumnos no fuera el que se esperaba fue el poco tiempo del que se dispuso para la actividad de familiarización con los materiales y la calculadora gráfica, ya que los alumnos como con cualquier otra herramienta, requieren de tiempo para tener un dominio aceptable de los materiales. Por lo anterior, en el estudio principal se duplicó el tiempo que se dedicó a las actividades de familiarización con los materiales y la calculadora.

De acuerdo a lo observado en el estudio piloto, en las actividades de preparación con calculadora para el estudio principal se anexó la hoja de trabajo 13, una presentación de este tipo permitirá al alumno clarificar el tipo de situaciones que realizara en las actividades principales con la calculadora.

El estudio piloto se realizó bajo condiciones reales en una aula de trabajo, es decir se dispuso del espacio y tiempo similar al de otras asignaturas y con todos los integrantes del grupo, de a cuerdo a lo anterior y a los datos recabados en el estudio piloto creemos que es posible llevar a cabo una práctica de este estilo en una aula en condiciones normales.

Estudio principal

Escenario

La escuela secundaria donde se desarrolló la investigación es una institución privada, está situada en la calle 12, Mz. 100, lote 34, colonia Valle de los Reyes, Estado de México. La condición socioeconómica de los estudiantes se puede caracterizar como media baja, la colonia cuenta con servicios públicos como agua potable, drenaje, luz, teléfono, biblioteca y áreas verdes.

La escuela, cuenta con biblioteca, laboratorio de computación y departamento de orientación vocacional. El aula está equipada con mesas rectangulares, las cuales fueron usadas por tres estudiantes al mismo tiempo.

Fuente de datos

Hojas de trabajo

El diseño de las hojas de trabajo dio el contexto de generalización algebraica a las actividades realizadas tanto con material manipulable como con la calculadora gráfica.

Las entrevistas se basaron en las actividades que habían desarrollado los estudiantes al abordar las hojas de trabajo, cuya estructura se describe a continuación.

El formato de las hojas de trabajo se empleó para realizar las actividades durante la fase de campo de esta tesis. Las hojas de trabajo fueron el recurso para entregar a los estudiantes las actividades que ellos debían realizar, con este fin construimos hojas de trabajo para ser abordadas mediante el material manipulable y otras que se abordarían usando la calculadora. En términos de la investigación las hojas de trabajo fueron empleadas como fuentes de datos, es decir, fueron los instrumentos que nos permitieron registrar todas las respuestas e intentos que desarrollaron los estudiantes para obtener la solución a los problemas planteados en cada una de las actividades.

Para el material manipulable se emplearon 27 hojas de trabajo, diseñadas por los investigadores y para la calculadora 23 diseñadas por Cedillo (1995, 1999).

- Hojas de trabajo para la fase de preparación, cuya finalidad fue que los estudiantes se familiarizaran con los estilos de trabajo basados en el uso de materiales manipulables (ver anexo 1).

- Hojas de trabajo para la fase de preparación, cuya finalidad fue que los estudiantes se familiarizaran con los estilos de trabajo basados en el uso de la calculadora gráfica (ver anexo 1).

- Hojas de trabajo para el estudio principal diseñadas para el uso de materiales manipulables, consistió de un paquete de 16 hojas donde se introdujo el tema de reconocimiento de patrones numéricos (ver anexo 1).

- Hojas de trabajo del estudio principal para el uso de la calculadora, consistió de un paquete de 9 hojas, donde se pidió a los alumnos que identificaran las reglas que gobiernan ciertos patrones numéricos (ver anexo 1)

La investigación se desarrolló en dos etapas, la fase de preparación cuya finalidad fue familiarizar al estudiante como una forma de trabajo basada en el material impreso que les exige una capacidad de lectura que debíamos confirmar. Y la etapa del estudio principal en la que una vez familiarizados los estudiantes con el estilo de actividad presentado en las hojas de trabajo nos proporcionarían la información que esta tesis requería

La estructura de las actividades propuestas se inicia con la presentación de un patrón numérico mediante una secuencia de figuras, o de relaciones numéricas, o de una tabla de valores.
En esta presentación se hacen preguntas al estudiante cuyo propósito es motivarlo para que encuentre el patrón numérico correspondiente. El diseño de las actividades tuvo como finalidad que el estudiante las percibiera como un juego que consistía en identificar la regla que genera el patrón numérico que se le da. El juego finalizaba cuando lograba crear un programa que expresara el comportamiento general de la relación numérica propuesta.

Es importante mencionar que las actividades propuestas no fueron diseñadas como ejercicios en el sentido de propiciar el desarrollo de destrezas mediante la ejecución repetida de un mismo tipo de actividad, sino que estas actividades fueron diseñadas con la finalidad de ofrecer al estudiante experiencias distintas en el manejo del código algebraico. En cada una de las hojas de trabajo se introdujeron nuevos elementos que hacen de cada actividad un problema que plantea un nuevo reto al estudiante en un contexto que le es familiar. En el diseño de la hojas de trabajo de esta tesis, se tomo como base la estructura desarrollada por Cedillo (1999).

El modelo didáctico constituido por las hojas de trabajo pretende guiar a los alumnos en la identificación de las invariantes involucradas en relaciones numéricas generadas por funciones de la forma f(x)=ax+b. El reconocimiento de una invariante es un elemento indispensable en la formulación de una generalización, si no se identifica lo que no varía, no se podrá descubrir el comportamiento general implícito en la situación.

Entrevistas

- Protocolos para las dos entrevistas individuales que se realizaron al final del trabajo de campo con el objeto de obtener información a profundidad sobre aspectos específicos que no pueden ser observados a partir del trabajo escrito de los estudiantes ni del registro de observación en clase. Estas entrevistas se vídeo grabaron y transcribieron para su análisis (Ver anexo 2).

Como se mencionó antes, la investigación se realizó en dos etapas, el Estudio piloto que se ha descrito en las secciones anteriores y el Estudio principal. El estudio principal consistió en el trabajo de campo, las etapas de registro y análisis de datos. El trabajo de campo se llevó a cabo en el salón de clases, en 12 sesiones de 50 minutos, durante dos meses. Los investigadores desempeñaron el papel del profesor y se encargaron de orientar, aplicar, observar, registrar la información y reportar los detalles que resultaron del actuar de los alumnos en las diferentes actividades.

Sujetos

La población con la que se trabajó cursa el primer grado de la escuela secundaria, es un grupo de 20 estudiantes de ambos sexos cuyas edades fluctúan entre 12 y 13 años de edad, de los cuales se eligieron ocho sujetos de acuerdo con su desempeño en la clase de matemáticas para el estudio de casos. Para esto se solicitó el apoyo del profesor titular del grupo, quien proporcionó datos acerca del desempeño de los alumnos. Los sujetos que se eligieron para el estudio de casos corresponden a los siguientes estratos: i) alto desempeño en matemáticas; ii) Desempeño promedio; (iii) desempeño por debajo del promedio. Se procuró que los sujetos seleccionados no tuvieran dificultades para comunicarse verbalmente.

Los datos que se recabaron tuvieron como propósito dar cuenta de los aprendizajes de los estudiantes y las dificultades que se observaron.

Capítulo 4
Descripción y análisis de resultados

Introducción

En este capítulo se describen y analizan los datos obtenidos mediante la aplicación de las hojas de trabajo y la realización de tres entrevistas con cada uno de los estudiantes que participaron en el estudio de casos. Los resultados que aquí se presentan se refieren esencialmente a dos aspectos:

(i) Cómo influyó el modelo didáctico en las formas en que los estudiantes usaron expresiones matemáticas para describir el comportamiento general de un patrón numérico.

(ii) Los tipos de estrategias que desarrollaron los estudiantes para abordar situaciones que involucran nociones de equivalencia algebraica.

Los resultados se presentan en el siguiente orden: *nivel alto:* Amairany, Mariel, Carlos Montiel; *nivel medio:* Jared, Miguel Ángel, Carlos Mendoza; *nivel bajo:* Oscar y Shantal. Se describe cómo evolucionó cada estudiante con base en el análisis de sus respuestas a las hojas de trabajo y en cada una de las tres entrevistas.

Usaremos las categorías de análisis descritas en el capitulo anterior. Con la finalidad de favorecer la lectura de este documento , nuevamente se describirán de una manera sintética.

- Expresión verbal de una generalización.
- Generalización mediante el código aritmético.
- Generalización empleando el código algebraico.

La categoría *Expresión verbal de una generalización*, se asignó a episodios en que los alumnos se apoyaron exclusivamente del lenguaje común para describir la forma en que razonaron al abordar una actividad. Por ejemplo, cuando emplearon expresiones como "siempre te va a salir lo mismo", "el comportamiento es de dos en dos", "va de tres en tres", entre otras.

Generalización mediante el código aritmético es una categoría que se asoció a episodios en los que los alumnos, además de acudir al lenguaje común, emplearon recursos aritméticos para explicar el comportamiento[1] de un patrón numérico. Por ejemplo, cuando usaron el código aritmético o expresiones como "es la tabla del tres" o "se va sumando de dos en dos".

La categoría *Generalización empleando el código algebraico* se empleó para distinguir casos en que los alumnos usaron literales para expresar una generalización y les daban significados como los siguientes: "la letra representa los números de entrada", "la letra representa los valores que están en las llaves" (se referían a los números de entrada cuando creaban un programa en la calculadora), "la letra representa cualquier número", "puedes utilizar letras en vez de números". Lo anterior se interpretó como acciones en las que los alumnos fueron capaces de usar las literales como variables algebraicas.

Descripción y análisis de resultados

El caso de Amairany

Primera entrevista.

Propósitos de la entrevista

[1] Cuando utilizamos el término *comportamiento*, nos referimos a encontrar la regularidad o patrón en una secuencia de figuras o relaciones numéricas que no son generadas al azar.

La primera entrevista se diseñó para estudiar con mayor profundidad las nociones y estrategias que desarrollaron los estudiantes para expresar generalizaciones en el contexto de actividades que consisten en reconocer un patrón de comportamiento en una secuencia de figuras o en una relación numérica (ver protocolo, entrevista 1, Anexo 2). Las relaciones numéricas que se emplearon corresponden a valores particulares de funciones de la forma $f(x)=ax+b$.

Antecedentes

Amairany es una alumna de 12 años de edad que cursa el primer grado de secundaria, su nivel escolar es alto de acuerdo con su desempeño en su clase regular de matemáticas. En la entrevista se observó que para ella los materiales manipulables no fueron un apoyo esencial para resolver las actividades que se le propusieron.

El trabajo realizado por Amairany en las actividades previas a la entrevista sugiere que esta niña tiende a desempeñarse de manera independiente, las notas de observación que se hicieron después de cada clase indican que en muy pocas ocasiones requirió del apoyo del profesor; además, en sus respuestas mostró una gama de estrategias propias que utilizó exitosamente en la resolución de las actividades que se le propusieron (ver anexo 1).

Datos obtenidos: primera entrevista

Los siguientes extractos corresponden a las respuestas de Amairany a las preguntas 6 y 7 de la primera entrevista, en ellos se encuentra evidencia de que fue capaz de expresar generalizaciones empleando el có
digo algebraico. Asimismo, es posible observar el tipo de apoyo que le brindaron los materiales manipulables (**E**: entrevistador; **A**: Amairany).

E: ¿Crees que has podido aprender más matemáticas utilizando los materiales manipulables?

A: ¿Quiere un ejemplo? Cuando estás multiplicando, aquí... es que va aumentando [ver figura abajo], vas sabiendo cuánto hay, las bolitas que se deben poner, por ejemplo, Q+4, con eso ya sabes que va aumentando el número de canicas en cada figura.

Fig. 1 OO
Fig. 2 OOOOOO
Fig. 3 OOOOOOOOOO
Fig. 4 OOOOOOOOOOOOOO
...
Fig. n

Al preguntarle sobre el significado de la expresión Q+4 contestó: "cualquier letra sumada con un número te vuelve a dar Q+4... Si Q=2 te da 6..., Q+4 te da 8 si Q=2... y así te da el valor".

En otra actividad se le pidió que explicara el comportamiento numérico que se muestra en el diagrama de abajo.

Fig. 1 O
Fig. 2 OOO
Fig. 3 OOOOO
Fig. 4 OOOOOOO
...
Fig. n

Amairany respondió lo siguiente.

A: El comportamiento es de dos en dos para cada figura [escribió lo siguiente][2] 1=1, 2=3, 3=5, 4=7, 5=9, 6=11, 7=13, 8=15...

E: Explica lo que hiciste.

A: Mira, aquí vemos figura 2 y nos damos cuenta de que son de dos en dos, es la tabla del dos, para sacar el anterior se resta dos [lo expresa escribiendo las expresiones Q+2 y Q-2 como una forma de referirse a cómo avanzar hacia arriba o hacia abajo en la secuencia de figuras][2].

Análisis de este episodio.

Las respuestas de Amairany muestran que alcanzó un nivel de generalización que incorpora un uso de las literales muy cercano a la noción matemática de variable, ya que logra ver a las letras como símbolos que sirven para representar "cualquier número que se suma, resta o multiplica por algo", como ella lo manifiesta.

Debemos destacar que Amairany no recurrió a la manipulación del material concreto, sólo lo empleó como un referente a nivel visual; el material le facilitó seguir el arreglo físico de los objetos y le permitió concentrarse en la actividad. De acuerdo con las categorías de análisis que se emplearon en el estudio, la podemos ubicar en *generalización mediante el código algebraico.* Aparentemente el razonamiento de Amairany es recursivo, el nivel de generalización que alcanza sólo le permite hacer pronósticos sobre los valores de la tabla cuando conoce el valor inmediato anterior o el inmediato posterior (Q-2 y Q+2). Sin embargo, cuando hace el listado: 1=1, 2=3, 3=5, que parece incoherente, se refiere a que en la tabla al lugar 1 le corresponde el número 1, al lugar 2 le corresponde el número 3, al 3 le corresponde el 5, y al 4 el 7. Es decir, estaba empezando a reconocer el patrón funcional que

[2] De aquí en adelante, el texto que aparece entre paréntesis rectangulares corresponde a notas aclaratorias introducidas por nosotros.

corresponde a la lista de los números impares, sin embargo su razonamiento fue dominado por la diferencia entre los valores 1, 3, 5, 7 (lo que ella expresó como Q+2 o Q-2). En las dos siguientes fases de actividades y en las respectivas entrevistas se observará si llega a definir una regla de correspondencia no recursiva.

Segunda entrevista

Propósitos de la entrevista

La segunda entrevista se centró en recabar nueva evidencia empírica sobre los siguientes aspectos:

(i) Los significados que asignaron los niños a las letras cuando las usan para construir expresiones de generalización acerca del comportamiento de un patrón numérico.

(ii) El tipo de estrategias que generan para abordar situaciones de equivalencia algebraica.

Significados

Las respuestas que dio Amairany a la pregunta 1 durante la segunda entrevista muestran que alcanzó un nivel de generalización que le permitió argumentar sus hallazgos con mayor precisión. En el episodio que se transcribe a continuación puede observarse que cuando las relaciones numéricas podían determinarse mediante el uso de una sola operación aritmética, Amairany fue capaz de expresar generalizaciones empleando el código algebraico. La calculadora fue un apoyo importante cuando las relaciones numéricas requerían la combinación de dos o más operaciones.

E: ¿Hubieras podido resolver las actividades si no contaras con la calculadora?

A: Sí, por ejemplo, en la actividad de los números de entrada y números de salida, el número que estaba acá y el número que estaba acá [señala los números de entrada y de salida que se le presentaron en la tabla] lo dividías y te daba el resultado, entonces ya todos los de entrada los multiplicabas y ya te daba todos los números de salida.

Núm. de entrada	1	2	3	4	5
Núm. de salida	9	18	27	36	45

Cuando se le pidió crear un programa contestó lo siguiente:

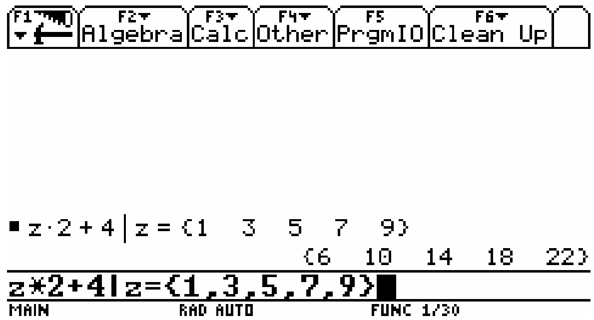
E: ¿Puedes programar tu calculadora para conocer los números de salida que faltan en la siguiente tabla?

Núm. de entrada	1	2	3	4	5
Núm. de salida	6	10	14		

A: [Analizó la tabla y después de algunos intentos que ella misma descartó y produjo el siguiente programa]

$$z\times 2+4 \,|\, z=\{1,3,5,7,9\}$$

Lo corrió y obtuvo como valores de salida 6, 10, 14, 18, 22.



E: ¿Qué representa la letra z? ¿Qué representan los números?

A: La letra z representa los números de entrada y te va diciendo que cualquier número lo multiplica por dos más cuatro. Los números de entrada cambian y por 2 más 4 es el patrón.

En el episodio descrito anteriormente se observa que Amairany logró construir expresiones de generalización que describen el comportamiento de un patrón numérico empleando reglas de correspondencia no recursiva, es decir logró un avance en su nivel de comprensión que muestra al emplear expresiones de generalización donde hace evidente el significado que logró construir acerca de las letras, el cual se relaciona con la manera en que éstas se emplean en el código del álgebra.

Análisis de este episodio

Las respuestas de Amairany muestran que fue capaz de producir expresiones algebraicas más complejas (como la mostrada en el ejemplo). Las estrategias que desarrolló para el reconocimiento y representación algebraica de patrones numéricos se pueden caracterizar como "tanteo y refinamiento", usó esas estrategias para validar o refutar las expresiones algebraicas que ella producía.

Amairany fue capaz de identificar las operaciones aritméticas que debía realizar para reproducir un patrón numérico sin acudir ostensiblemente a la calculadora ni a los materiales manipulables, eso muestra sólo una fase en el desarrollo de sus habilidades para expresar generalizaciones, a esta fase se le puede definir mediante la categoría "generalización empleando el código aritmético". Sin embargo, también es claro que el trabajo con la calculadora fue un apoyo importante cuando se le pidió construir un programa para reproducir una tabla de valores. Para programar la calculadora ella debía expresar la secuencia de operaciones numéricas que tenía en mente en un nivel de generalización que le exige emplear el código algebraico.

Este episodio confirma una de las hipótesis en que se sustenta el tratamiento didáctico basado en el uso de la calculadora. La calculadora se introdujo como un medio que le exige al estudiante expresar su razonamiento algebraicamente, esto es, para que el alumno logre hacer lo que la calculadora haga lo que él quiere, necesita usar el código que la máquina entiende y ese es el código del álgebra.

Equivalencia

Se observó que Amairany fue capaz de encontrar varios programas que produjeron los mismos valores, por ejemplo, $S\times2+4$, $S\times2+2+2$, $A\times2+3+1$.

Hay que destacar dos momentos: (i) la equivalencia de las expresiones algebraicas apoyada en la equivalencia aritmética, por ejemplo, la descomposición de 4, como 2+2 y 3+1, que no parece estar relacionada con la noción de equivalencia algebraica, sin embargo la niña afirma que $S\times2+4$ y $S\times2+2+2$ son expresiones equivalentes. El segundo momento es cuando crea a la expresión $A\times2+3+1$, donde además de descomponer 4 como 3+1, también cambia la literal S por A. Eso significa que la niña acepta que las literales en una expresión algebraica son "mudas", es decir, el cambio de literal no modifica el valor numérico de la expresión, por lo que para ella las expresiones S×2+4, S×2+2+2 y A×2+3+1 son equivalentes.

En los programas realizados por Amairany se observa que el referente numérico de las expresiones que construyó le permitió desarrollar la noción de equivalencia algebraica. En el análisis que hizo Amairany se hace evidente que su estrategia para encontrar programas equivalentes se basa principalmente en trabajar sobre los términos independientes de la expresión.

La estrategia desarrollada por Amairany para encontrar programas equivalentes consistió en explorar el valor numérico de las expresiones algebraicas, esta forma de trabajo sugiere que la noción de equivalencia que estaba desarrollando está articulada a la forma en que se usa el código de la calculadora para describir patrones numéricos.

Estos hallazgos se relacionan con lo reportado por Cedillo (1998), él encontró que los alumnos dan respuestas como la siguiente: dos programas son equivalentes si producen los mismos valores de salida cada vez que los corro con distintos números de entrada. Esta noción de equivalencia se sustenta en el valor numérico de una expresión algebraica y no en reglas de transformación algebraica.

Tercera entrevista

Propósitos de la entrevista

La tercera entrevista se dedicó a recabar nueva evidencia empírica sobre los siguientes aspectos:

- Los significados que asignaron los niños a las letras cuando las usan para construir expresiones de generalización acerca del comportamiento de un patrón numérico.

- El tipo de estrategias que generan para abordar situaciones de equivalencia algebraica.

Significados

En esta entrevista Amairany mostró un mayor dominio en el manejo de las literales, lo cual sugiere un avance en sus estrategias de generalización. Esta afirmación se sustenta en el tipo de respuestas que ella produjo. El siguiente episodio proporciona evidencia que apoya lo anterior.

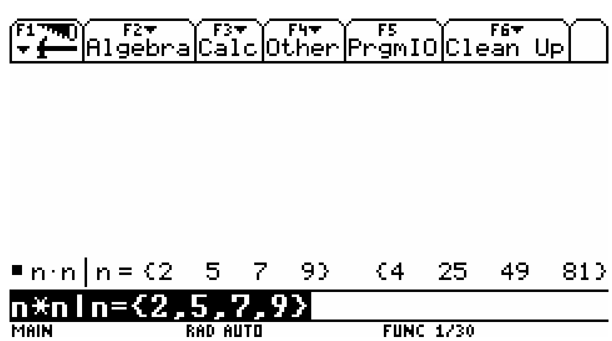
E: ¿Qué valor toma la "n"?

A: Cualquier número.

E: ¿Puedes construir un programa que produzca los siguientes valores?

No. de entrada	2	5	7	8	10
No. de Salida	4	25	49	64	100

A: n×n|n={2, 5, 7, 8, 10}



E: ¿Qué pensaste para construir ese programa?

A: Porque es el número por el mismo número, los números que tenemos son 2, 5, 7, 8, 10, entonces sería el número por él mismo... y ya da el resultado; 2×2, 5×5, 7×7, 8×8...

Análisis de este episodio

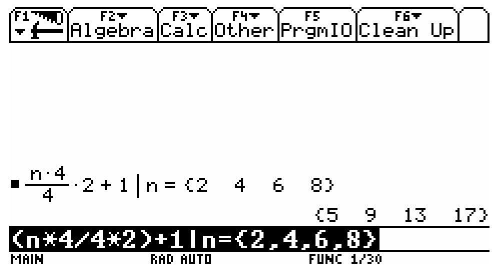
Ubicamos las respuestas de Amairany en la tercera entrevista en la categoría *generalización empleando el código algebraico*. Sus respuestas hacen evidente que ha comprendido que las reglas o fórmulas que construyó son expresiones generales que sintetizan el comportamiento de la situación propuesta. Es importante destacar que desde la primera entrevista Amairany asignó un significado a las letras como símbolos que representan cualquier número. El trabajo con los números le daba "pistas" para obtener la regla que gobierna a las relaciones numéricas que se presentaban, esas pistas son las que le permitieron aceptar o refutar sus conjeturas y asignar un significado a las letras que empleaba al construir programas en la calculadora.

Equivalencia

En la tercera entrevista se observó un cambio importante en las estrategias de Amairany para construir programas equivalentes. A continuación se transcribe un episodio que ilustra el nivel de dominio que alcanzó para producir programas equivalentes.

E: Al tratar de escribir el programa (n×2)+1, me equivoqué y escribí (n×4)+1, ¿puedes ayudarme a corregirlo sin suprimir nada?

A: [Analiza el programa y teclea el programa (n×4-8)+1. Al darse cuenta de que ese programa no produce los valores esperados mo difica la estrategia y teclea el programa (n×4-2)+1, lo corre y se da cuenta que no es programa correcto. Finalmente produjo el programa (n×4÷4×2)+1|n={2,4, 6, 8}



E: ¿Me quieres explicar qué es lo que hiciste? ¿Qué significa el programa que acabas de hacer?

A: n es cualquier número, entonces si lo estás multiplicando por 4, con la operación contraria de multiplicar … sería dividir entre 4 … entonces ya quedaría cero y ahora se le aumenta por dos (sic).

Estos datos muestran que Amairany desarrolló una noción de equivalencia algebraica apoyada en el referente numérico de las expresiones que construyó, sus respuestas hacen evidente que fue capaz de entender que dos programas son equivalentes si producen los mismos valores cada vez que se corre[3] en la calculadora con distintos valores**.**

Análisis del episodio

Estos hallazgos contrastan con los resultados reportados por Kücheman (citado por Cedillo,2000), quien, con base en trabajo de Piaget, sugiere que los estudiantes sólo son capaces de interpretar las letras como variables hasta que alcanzan la etapa de las operaciones formales. Según Kücheman, para que el alumno desarrolle la noción de variable (en el sentido algebraico), tiene que desarrollar antes la noción de las letras como objetos y después como números generalizados, para poder alcanzar la noción de las literales co-

[3] Cuando se utiliza el término correr se refiere a dar instrucciones a la calculadora para que ejecute las operaciones o programas que se están trabajando.

mo variables. Los resultados de este estudio sugieren que los estudiantes pueden usar las literales como variables sin tener que transitar por las concepciones descritas por Kücheman. La evidencia empírica obtenida en este estudio sugiere que la noción de variable no depende únicamente de un nivel de desarrollo intelectual, sino también de las formas de enseñanza.

Resumen del caso de Amairany.

Desde la etapa inicial del trabajo de campo Amairany mostró haber asignado un significado a las letras como símbolos que sirven para representar cualquier número. El episodio de la primera entrevista que presentamos ofrece evidencia en favor de esta afirmación. Cuando se le preguntó acerca del significado que tiene la expresión Q+4 contestó: "cualquier letra que se suma a un número te vuelve a dar Q+4… mire, Q+4 da 6 si Q=2 y Q+4 te da 8 si Q=4... y así te da el valor… siempre da lo que valga Q agregándole 4."

Aparentemente Amairany no tuvo dificultades al manejar expresiones algebraicas debido a que logró dar un significado al uso de letras; para ella, el material y la calculadora son utensilios que le ayudaron a simplificar su trabajo y a comprobar sus conjeturas. Su desempeño en este estudio se relaciona con lo planteado por Bruner en el marco de la teoría de desarrollo conceptual: "sí el intelecto se desarrolla en el orden enactivo-icónico-simbólico, entonces lo lógico es enseñar los conceptos en dicho orden" (citado por Resnick y Ford, 1990, página 140). Bruner también señala que existe un tipo de alumnos que pueden estar preparados para aprender a partir de una representación puramente simbólica, pero aún así recomienda propiciar por lo menos experiencias en el modo icónico, con la finalidad de que los estudiantes dispongan de imágenes de reserva como antecedente a la representación simbólica.

Podemos situar el caso de Amairany en este tipo de alumnos, porque para ella no pareció ser necesario el paso previo de las representaciones enactiva e icónica. Ella inmediatamente comenzó a trabajar empleando literales, al parecer esto se debió al tipo de actividades que se propusieron, donde la noción de variable estuvo presente desde el primer momento, la presentación de las relaciones numéricas mediante tablas es una de las tres formas posibles de representar una función, y es en las relaciones funcionales donde se emplea cabalmente la noción de variable en la matemática escolar.

El tipo de estrategia que desarrolló Amairany para construir expresiones de generalización acerca del comportamiento de patrones numéricos se basó en el análisis del valor numérico de las expresiones. Empleó estrategias de "*tanteo y refinamiento*" para aceptar o refutar sus respuestas.

El tipo de estrategia que generó para abordar situaciones de equivalencia algebraica consistió esencialmente en operar sobre los términos independientes de las expresiones algebraicas. Es importante destacar que en la segunda entrevista produjo programas equivalentes donde, además de descomponer la parte numérica de la expresión, también cambió la literal original por otra, lo cual sugiere que la alumna acepta que las literales en una expresión algebraica son "mudas", es decir, el cambio de la literal no altera el valor numérico de la expresión. Esto nos condujo a ubicar su desempeño en un nivel intermedio entre generalización mediante el código aritmético y generalización mediante el código algebraico.

Cabe destacar que a pesar de que aparentemente ni los materiales manipulables ni la calculadora fueron herramientas indispensables para Amairany que, final del estudio reconoció que los materiales le facilitaron organizar sus ideas y además fueron un referente visual que le sirvió como punto de partida en la búsqueda de sus respuestas.

El caso de Carlos Montiel

Primera entrevista

Propósito de la entrevista

La primera entrevista se diseñó para estudiar con mayor profundidad las nociones y estrategias que desarrollaron los estudiantes para expresar generalizaciones en el contexto de actividades que consisten en reconocer un patrón de comportamiento en una secuencia de figuras o en una relación numérica (ver protocolo, entrevista 1, Anexo 2). Las secuencias de figuras y relaciones numéricas que se emplearon se basan en valores particulares de funciones de la forma $f(x)=ax+b$.

Antecedentes

Carlos Montiel es un alumno de trece años de edad que cursa el primer grado de secundaria; su desempeño escolar es alto de acuerdo con sus calificaciones en la clase de matemáticas. Durante la primera entrevista se pudo observar que el material manipulable le proporcionó un apoyo importante para formular generalizaciones. A continuación se presentan las respuestas del alumno a las preguntas 1 y 4 del protocolo de la primera entrevista en las que proporciona evidencia de lo anterior.

Datos obtenidos: primera entrevista.

A continuación se muestran extractos con las respuestas de Carlos Montiel a las actividades realizadas en esta entrevista.

E: ¿Te fueron útiles los materiales para realizar las actividades?

CM: Los materiales en ocasiones son útiles para resolver las actividades, por ejemplo, en las actividades de las tarjetas numeradas[4] se me complicaba, me hacía bolas, tenía que regresar a lo mismo, necesitaba ayuda y los materiales me ayudaron.

E: ¿Crees que hubieras podido resolver las actividades si no contaras con los materiales?

CM: Me hubiera atorado, con las tarjetas numeradas me di cuenta qué pasaba... que iba sumando y quitando de cinco en cinco y así sé de cuánto en cuánto va aumentando, agarro más lógica (sic).

Al dar respuesta a esta preguntas Carlos evocaba el trabajo que realizó en la actividad de la fase preparatoria con las tarjetas numeradas, donde representó con operaciones lo que ocurría cuando acomodaba las tarjetas en distintos órdenes para dar respuesta a la pregunta 7 del protocolo de la primera entrevista (ver anexo 2).

A continuación se describe el trabajo que realizó, se observa que para encontrar el patrón de comportamiento primero usó estrategias recursivas y después estrategias que sugieren un acercamiento al concepto de función.

E: Fíjate qué pasa en cada una de las figuras y dime cómo le haría para saber qué número de figura corresponde a N.

No de fig.	Sucesión
4	OOOOOOO
5	OOOOOOOOO
6	OOOOOOOOOOO
...	

[4] Es parte del material, consiste en tarjetas de cartón cuadradas (de 4x4 cm), numeradas.

N OOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOO

CM: Aquí lo que he visto es que hay 7+2, 9+2 y se puede decir que cada figura va de dos en dos [señala con su dedo]

E: ¿Crees que exista una forma más fácil de conocer la respuesta?

CM: También puedo realizar una multiplicación para llegar al resultado rápidamente; $2\times4-1= 7$, $2\times5-1=9$.

E: Ahora representa eso con letras

CM: ¿Con letras?

E: Sí, ¿qué valores se pueden representar con letras y cuáles no?

CM: El 2... sería mx2

E: Tienes 4x2=8. ¿Eso te daría el resultado que buscas o recurrirías a otra operación?

CM: Se haría otra operación… la resta... mx2, esta m quedaría como 6 y queda… mx2=12, 12-1=11.

E: Ahora sólo escríbeme la fórmula, ¿Cómo queda lo que acabas de hacer?

CM: mx2-1

Análisis de este episodio.

Carlos logró encontrar el patrón numérico apoyado en el trabajo que realizó con los números encontró que el patrón va de 2 en 2, después ajustó para obtener los resultados que buscaba y lo representó como 2x4-1=7, 2x5-1=9, llegando finalmente a generar la expresión algebraica $m\times2-1$.

Se puede observar que empleó un razonamiento recursivo y más adelante vio la relación entre los valores de la primera y la segunda columna como la función $m \mapsto m\times2-1$. En sus respuestas hace explícito que el número de figuras va aumentando de 2 en 2 (razonamiento recursivo), para hacerlo más rápidamente y no tener que ir sumando recurrió a otra interpretación del patrón y propuso las expresiones 2x4-1=7, 2x5-1=9, 2x6-1=11 (razonamiento funcional), cuando se le pidió que lo expresara empleando letras construyó el programa mx2-1. Como en el caso de Amairany, el trabajo de Carlos Montiel se basó en la manipulación numérica para obtener pistas que le permitieran explorar las relaciones particulares para construir la regla general que gobierna a un patrón numérico dado.

Segunda entrevista

Propósito de la entrevista

La segunda entrevista se dedicó a recabar nueva evidencia empírica sobre los siguientes aspectos:

- Los significados que asignaron los niños a las letras cuando las usan para construir expresiones de generalización acerca del comportamiento de un patrón numérico.
- El tipo de estrategias que generan para abordar situaciones de equivalencia algebraica.

Significados

En esta entrevista se obtuvieron respuestas de Carlos Montiel que muestran la importancia que tuvo la inclusión de literales en el lenguaje matemático que se usó en las actividades de las hojas de trabajo. A continuación se describen algunas respuestas de este alumno a las preguntas 4 y 5 del protocolo de la segunda entrevista.

E: ¿Tiene para ti algún significado utilizar letras en las actividades?

CM: Suplantarlas por números... ponerlas en lugar de los números.

E: ¿Crees que si no se te permitiera usar letras hubieras podido realizar la actividad?

CM: Sí se podría, por ejemplo utilizar únicamente números, sería 7x5= 35, utilizando letras sería 7xn, por ejemplo igual a 35, aquí a lo que me estoy refiriendo es que tengo que encontrar el número, o sea qué valor tiene n para que me dé 35.

Cuando se le pidió encontrar el programa para la actividad de la pregunta 6 contestó lo siguiente:

E: En la siguiente tabla, ¿cómo le harías para encontrar el programa que me da los números de salida?

Núm. de entrada	1	2	4	7
Núm. de salida	9	18	36	63

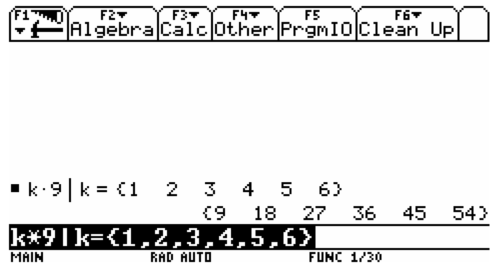
CM: El número de entrada lo está multiplicando por 9 para que me dé los números de salida.

E: ¿Cómo lo programarías en la calculadora?

CM: 1xj=9, aquí la J representaría el patrón... o sea, el número 9, aquí lo que me está diciendo es 2x9=18, 3x9=27 y así nos podríamos seguir siempre y cuando el 9 no cambie y los números de entrada van cambiando.

E: A ver, haz ese programa en la calculadora y pruébalo.

CM: [Después de probar en la calculadora notó que el programa 1xj no funcionaba como esperaba y finalmente tecleó el programa Kx9|k={1, 2, 3, 4, 5, 6}]



Análisis de este episodio

Las respuestas de Carlos Montiel muestran que en la segunda entrevista usaba las literales como variables con mayor confianza, evidencia de esto es que fue capaz de crear los programas que se le pedía, además pudo verificar por sí mismo sus respuestas comunicándose con la máquina mediante el código algebraico.

La estrategia de Carlos Montiel para expresar generalizaciones se basó en el trabajo numérico, al inicio empleó el código aritmético como un recurso que le permitió dar respuesta a las situaciones planteadas, con el tiempo fue perfeccionando sus ideas hasta aproximarse a una generalización algebraica. Como se observó, los episodios del trabajo de Carlos proporcionan evidencia de que alcanzó una generalización algebraica, fue capaz de ver las letras como representantes de cualquier número y ése es un significado plausible para una variable. La calculadora fue un instrumento que le permitió verificar sistemáticamente sus respuestas y la comunicación con la máquina fue el medio que propició un aprendizaje del lenguaje algebraico a través de su uso.

La información obtenida en este episodio concuerda con lo que reporta Cedillo (2001), donde reporta que no importa que las actividades de enseñanza se centren en el trabajo numérico, lo que tiene mayor impacto es que las actividades exijan que los estudiantes generen sus propios métodos, porque los que conocen previamente no les permiten abordar la situación problemática que se les propone. Cedillo sugiere que las actividades de ese tipo dan lugar a que los estudiantes generen una tendencia hacia la generalización de procedimientos y que esa forma de trabajo puede ser un antecedente importante para ayudar a los estudiantes en la transición de la aritmética al álgebra.

Durante el trabajo de campo se observó que las actividades así diseñadas, y el apoyo de la calculadora, propiciaron que Carlos explorara tantas estrategias como le fuera posible sin que eso agotara sus esfuerzos, lo cual parece haber favorecido que en muchas ocasiones encontrara más de una forma de resolver un problema. Este hecho ayudó para que este alumno rompiera el esquema de respuesta única y se iniciara en la búsqueda de estrategias más generales y más eficientes.

Equivalencia

A continuación se muestra un breve extracto de la entrevista con Carlos Montiel, donde por medio de la exploración del valor numérico de las expresiones algebraicas dadas encontró programas equivalentes.

E: ¿Me puedes decir cuáles son los números de salida que faltan en la siguiente tabla?

Núm. de entrada	1	3	5	7	9
Núm. de salida	6	10	14		

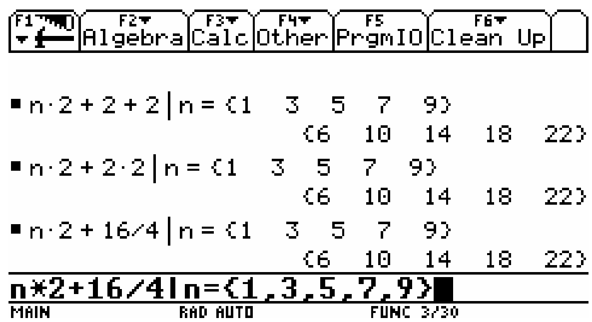
CM: Los números de salida 6, 10, 14... 18 y 22

E: Para que me dé 6, 10, 14,... ¿Qué tengo que hacer?

CM: N×2+4|N={1, 3, 5, 7, 9}

E: Ahora dime, ¿habría otro programa con el que te puedan salir los mismos resultados?

CM: [teclea en la calculadora los programas que se muestran a continuación]



Análisis de este episodio

Carlos, igual que Amairany, trabajó sobre los términos independientes de la expresión, en este caso sólo con los términos numéricos y no sobre la parte literal, mediante esta estrategia logró encontrar 3 programas equivalentes:

N×2+2+2|N={1, 3, 5, 7, 9}

N×2+2×2|N={1, 3, 5, 7, 9}

N×2+16÷4|N={1, 3, 5, 7, 9}

Carlos encontró expresiones algebraicas equivalentes apoyándose en la equivalencia aritmética, descompuso el 4 de como 2+2, 2×2 y 16÷4 y los resultados que le da la máquina le permitieron afirmar las tres expresiones son expresiones equivalentes porque todas producen los mismos números de salida para los mismos valores de entrada (en términos de la programación con la calculadora).

Los resultados que aquí se describen parecen confirmar lo que reporta Cedillo, quien informa que los alumnos que participaron en su investigación fueron capaces de construir nociones de equivalencia algebraica apoyados en estrategias basadas en la exploración del valor numérico de expresiones algebraicas, la descripción que los alumnos presentaron con más frecuencia fue: "dos programas son equivalentes si producen los mismos valores cada vez que se corren los programas con distinto número (Cedillo, 1998).

Tercera entrevista

Propósitos de la entrevista

La tercera entrevista se dedicó a recabar nueva evidencia empírica sobre los siguientes aspectos:

- Los significados que asignaron los niños a las letras cuando las usan para construir expresiones de generalización acerca del comportamiento de un patrón numérico.
- El tipo de estrategias que generan para abordar situaciones de equivalencia algebraica.

Significados

Carlos Montiel mostró un mayor dominio en el manejo de las letras y mostró un nivel de generalización de orden algebraico apoyándose en el uso la calculadora. A continuación se describen algunas respuestas de este alumno con base en las preguntas 4, 5 y 13 del protocolo de entrevista (**E:** Entrevistador, **CM:** Carlos Montiel).

E: ¿Qué resultado dará la calculadora si a n le doy el valor 2 en el programa (nx2)+1?

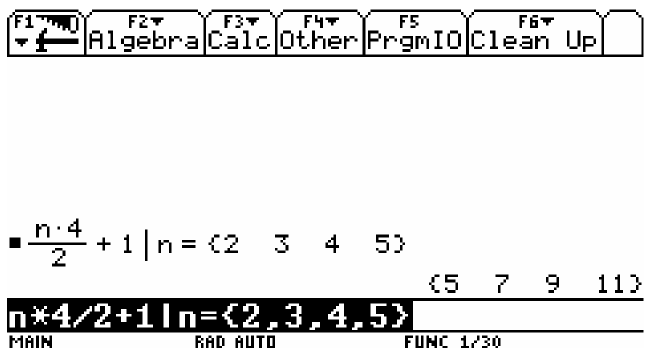
CM: (2x2)+1... 5

E: ¿Si pongo 3?

CM: (3x2)+1... 7

E: Al tratar de escribir el programa nx2+1 me equivoqué y escribí el programa nx4+1, ¿cómo le puedo hacer para que me salgan los mismos resultados que en el programa (nx2)+1 sin borrar nada de lo que escribí?

CM: [Después de probar y comprobar en la calculadora lo que estaba pensando creó el programa que se muestra abajo]



Análisis del episodio

El trabajo de Carlos sugiere que el apoyo que le brindó la calculadora le ayudó a asignar un significado a las expresiones algebraicas que le permitió usarlas como instrumentos para describir relaciones generales. En la tercera entrevista se observó que tenía un mayor dominio en el manejo de las letras. Para expresar generalizaciones de orden algebraico acudió en primer término a una generalización de orden verbal, por ejemplo, "va de dos en dos"; posteriormente expresó esas relaciones en forma aritmética recurriendo a las operaciones básicas y apoyándose en el uso de la calculadora. Más adelante, al darse cuenta que el hacer operación por operación implicaba más trabajo recurrió al uso de las letras.

Carlos le dio sentido al uso de las letras cuando se dio cuenta que éstas podían tomar cualquier valor. De manera similar a como lo hizo Amairany, Carlos acudió al trabajo con los números para obtener pistas que lo orientaran en la construcción de la regla que gobierna a las relaciones numéricas que se le presentaban, esas pistas le permitieron confirmar sus conjeturas y darle significado a las letras cuando construía un programa en la calculadora.

Equivalencia

A continuación se trascriben las respuestas de Carlos a las preguntas 6 y 7 del protocolo de la tercera entrevista.

E: Al tratar de escribir el programa A×2-1, me equivoque y escribí A×2-2, ¿crees que pueda corregirlo sin suprimir nada y obtener los mismos valores que produce el programa inicial?

CM: Sí, 2×2+1-2

E: ¿Puedes escribir eso como un programa?

CM: ¡Sí, a la primera! [tecleó el programa A×2)+1–2]

E: Pruébalo con los números 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

CM: (A×2)+1–2|A={2, 3, 4, 5, 6}{3, 5, 7, 9, 13}

Análisis de este episodio

Las estrategias empleadas por Carlos Montiel en la tercera entrevista para expresar programas equivalentes se apoya de la exploración del valor numérico de las expresiones algebraicas, mediante este recurso logró encontrar programas equivalentes transformando los términos independientes de la expresión dada. El trabajo de Carlos se centra en descomponer el valor numérico de la expresión para llegar a los programas que produzcan los mismos valores cada vez que se corren en la calculadora.

Resumen

En el caso de Carlos Montiel destaca el empleo de estrategias basadas en la exploración numérica de las expresiones, lo cual parece haberle sido de ayuda para dar significado a las letras que usaba al construir programas en la calculadora para describir el comportamiento de un patrón numérico.

Durante las sesiones de trabajo Carlos manifestó que los materiales manipulables le fueron útiles para resolver ciertas actividades, que le ayudaron a organizar sus ideas y como un apoyo visual. Los materiales manipulables le apoyaron a desarrollar sus primeras nociones sobre el significado que tienen las letras cuando se usan para construir expresiones de generalización, esas nociones fueron la base para que desarrollara estrategias que le permitieron expresar algebraicamente el comportamiento de un patrón numérico. Las estrategias que desarrolló para abordar situaciones de equivalencia algebraica consistieron en el análisis de los términos independientes de la expresión. En sus respuestas a preguntas sobre el significado de las letras, respondió que "las letras sirven para suplantar a los números" y con ese significado las usó para expresar la regla que gobierna a un patrón numérico.

El caso de Mariel

Primera entrevista

Propósitos de la entrevista

La primera entrevista se diseñó para estudiar con mayor profundidad las nociones y estrategias que desarrollaron los estudiantes para expresar generalizaciones en el contexto de actividades, que consisten en reconocer un patrón de comportamiento en una secuencia de figuras o en una relación numérica (Ver protocolo, entrevista 1, Anexo 2). Las secuencias de figuras y relaciones numéricas que se emplearon se basan en valores particulares de funciones de la forma f(x)=ax+b.

Antecedentes

Mariel es una alumna de 13 años de edad que cursa el primer grado de secundaria, de acuerdo con sus calificaciones tiene un desempeño promedio en matemáticas. En la primera entrevista se obtuvo información que muestra que el apoyo con el material manipulable le permitió comenzar a formular generalizaciones. (**E:** Entrevistador, **M:** Mariel)

Datos obtenidos: primera entrevista

A continuación se transcriben algunos extractos de las respuestas de Mariel recabadas durante la entrevista.

E: ¿Los materiales te permiten comprobar si tus respuestas son correctas?

M Sí

E: ¿En qué te apoyaron los materiales? Si quieres dímelo con algunos ejemplos.

M: El material te ayuda a resolver las actividades siempre y cuando sigas las instrucciones precisas, porque si no sabes si el resultado es correcto con los materiales sí... si los manejas como dice la actividad... Sí me ayuda... a veces no me salía bien lo que quería hacer, entonces trataba de hacerlo con el material y utilizándolo encontraba la solución.

Para introducir a Mariel en la actividad que se muestra a continuación se le recordó que anteriormente ya había resuelto una actividad similar (la actividad es muy parecida a la actividad realizada en una hoja de trabajo de la fase preparatoria).

E: Observa la siguiente secuencia de figuras. Ayúdame a encontrar el número que corresponde a la figura n.

Fig.1: OOOOO
Fig.2: OOOOOOOOOO
Fig.3 OOOOOOOOOOOOOOO
Fig. 4 OOOOOOOOOOOOOOOOOOOO

Fig. n: OOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOO
OOOOO

M: [Observó las "bolitas" y las contó] Va aumentando de 5 en 5.

E: Ya te fijaste qué pasa de la Fig. 1 a la Fig.2, a la Fig. 3... Ahora dime, ¿qué número corresponde a la Fig. n si ésta tiene 45 círculos?

M: 9

E: ¿Cómo le hiciste para saberlo?

M: Pues multiplique 9x5

E: Escríbelo en la calculadora, ¿Crees que haya un programa que me permita conocer el número de cualquier figura si te digo cuántos círculos le corresponden?

M: Puede ser con una letra.

E: ¿Cuál es el patrón numérico?

M: Es el cinco

E: ¿Cuál es el número que va a cambiar?

M: Puedo poner Mx5

E: ¿Nada más queda Mx5?

M: Sí, Mx5

Análisis de este episodio

En las respuestas que da Mariel se observó que acude a la expresión verbal para describir la generalización existente en la secuencia de figuras, posteriormente, conforme se le pedía continuar con el análisis empleó el código aritmético auxiliándose del material manipulable. La estrategia que utilizó fue analizar la regularidad existente entre las figuras, y así poder sumar, restar o multiplicar para encontrar el número de objetos en la figura que se le presentó. Las respuestas de Mariel sugieren que los materiales manipulables le apoyaron en la generación de imágenes mentales, en el sentido que lo propone Bruner en su Teoría del Desarrollo Conceptual.

Sus respuestas también hacen evidente que a pesar de que no se refirió a la letra "n" con algún significado explícito, le dio un tratamiento como si fuera un número, de hecho, como si representara a cualquier número. En este episodio hubo un momento en el que se le sugirió a la alumna recordar alguna actividad en la que utilizó material manipulable, cuando la alumna recordó esa actividad logró comprender la relación existente en la sucesión de figuras que se le presentó en la pregunta 7 de la entrevista 1, por lo que aparentemente logró expresar la regla que gobierna el comportamiento de esta sucesión (mx5).

En el trabajo realizado por esta alumna encontramos que logró darle utilidad a las letras como una forma de representar números de manera general. Se observa que hay un acercamiento inicial que permite ver que el material manipulativo le sirvió de apoyo, y que su comprensión en el uso de las letras es un inicio promisorio a la interpretación algebraica del uso de literales.

En esta entrevista se observó que Mariel realizó las actividades propuestas apoyándose en sus conocimientos aritméticos. Al identificar la regularidad que existía en las actividades generó una regla para encontrar rápidamente la respuesta, la regla estaba representada por una expresión que contenía una letra y un número, la letra tomaba cualquier valor y el número significaba el patrón.

Lo anterior parece confirmar lo propuesto por Lapp (1999), quien sugiere que para resolver un problema es conveniente comenzar empleando materiales manipulables; argumenta que el acto de colorear y poner bloques al construir una figura puede ser de gran beneficio, ya que esto puede ayudar a la comprensión del problema, además sugiere que se comprueben las respuestas a través de varias formas de representación porque esto enriquece el proceso de razonamiento del estudiante. Los manipulativos pueden ayudar para que los estudiantes descubran los procesos que conducen a una respuesta. Los datos que hemos obtenido sugieren que el uso de distintas representaciones, empleando modelos físicos e icónicos, pueden jugar un papel importante en la construcción de un argumento.

Waits y Demana (2001), proponen que una estrategia promisoria para la enseñanza aprendizaje de las matemáticas es emplear un enfoque equilibrado en el que se usen materiales manipulables y técnicas de papel y lápiz durante el desarrollo inicial de conceptos, y el uso de la calculadora en la extensión y generalización de fases.

Segunda entrevista

Propósito de la entrevista

La segunda entrevista se dedicó a recabar nueva evidencia empírica sobre los siguientes aspectos:

- Los significados que asignaron los niños a las letras cuando las usan para construir expresiones de generalización acerca del comportamiento de un patrón numérico.
- El tipo de estrategias que generan para abordar situaciones de equivalencia algebraica.

Significados

En la segunda entrevista se mencionan algunos datos que proporcionan evidencia de lo alcanzado por la alumna.

E: ¿Qué significado tiene para ti manejar las letras en la clase de matemáticas?

M: Representan para mi un número que no está escrito.

E: ¿Crees que si no te permitiera usar letras podrías realizar la actividad?

M: No, me confundiría más.

E: ¿Me podrías decir qué programa me ayuda a conocer los valores de los números de salida de la siguiente tabla?

Núm. de entrada	1	2	3	4	5
Núm. de salida	9	18	27	36	

M: Está aumentando de 9 en 9

E: ¿Qué operación utilizarías?

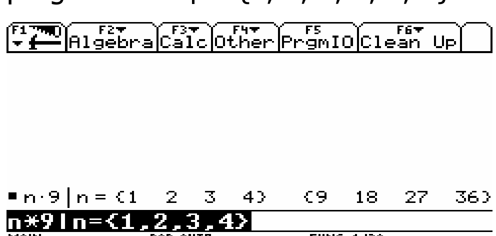
M: La multiplicación 9x2=18, 9x3=27, se multiplicaría por los números

E: ¿Cuáles números cambian?

M: 1, 2, 3, 4, 5, 6, y el patrón es 9

E: ¿Cómo queda el programa?

M: [Después de probar y comprobar sus ideas en la calculadora] construyó el programa nx9|n={1, 2, 3, 4, 5, 6}



Análisis de este episodio

En esta entrevista Mariel se apoya nuevamente en la estrategia que utilizó en la primera entrevista, donde después de analizar la relación existente entre los números que se le presentaron en una tabla como valores de entrada y de salida, logró construir un programa que describe el comportamiento general de esa relación.

En esta entrevista se observó un avance en las estrategias empleadas por Mariel para encontrar la regla que expresa el comportamiento de los valores de una tabla dada, se observa con más claridad que entre los recursos que emplea para expresar un programa están presentes las letras. Mariel había hecho uso de las letras como un recurso que representa cualquier número en la primera entrevista, en la segunda entrevista esta idea es utilizada más firmemente al expresar que las letras significan "un número que no está escrito". Un avance importante que alcanza Mariel con respecto a la primera entrevista es que en la segunda hace uso de las letras sistemáticamente, es decir, emplea las letras como su primer recurso para expresar el comportamiento general de un patrón numérico.

Equivalencia

La información obtenida en este segmento de la entrevista con Mariel fue la siguiente:

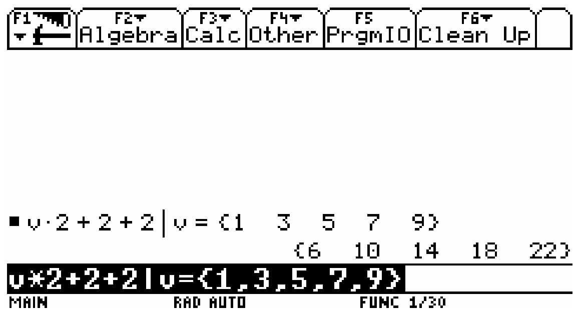
E: Vamos a construir una tabla y describir un programa, ¿qué crees que esté pasando en la tabla? ¿Qué operación debes hacer para obtener los números de salida? Piensa en la operación más sencilla.

Núm. de entrada	1	3	5	7	9
Núm. de salida	6	10	14		

M: D×2+4|D={1, 3, 5, 7, 9, 11}

E: ¿Puedes hacer otro programa que haga lo mismo?

M: [Después de algunos intentos teclea el programa que se muestra abajo]



Análisis de este episodio

Como se puede observar, Mariel fue capaz de encontrar el programa V×2+2+2|V={1, 3, 5, 7, 9, 11}, que cumple la condición de que producir los mismos valores que el programa D×2+4|D={1, 3, 5, 7, 9, 11}.

La estrategia que empleó Mariel para abordar situaciones de equivalencia algebraica consistió en explorar del valor numérico de las expresiones algebraicas, empleó recursos como los utilizados por Amairany y Carlos Montiel, consistentes en probar varias conjeturas con la finalidad de encontrar un patrón numérico, al parecer esto le permitió establecer una relación entre sus nociones de equivalencia y el uso del código de la calculadora para describir patrones numéricos.

En el caso de esta alumna destaca que su idea de equivalencia contempla que las literales significan "un número que no está escrito y pueden tomar cualquier valor", por tanto, el cambio de la literal no altera el valor numérico de la expresión; del mismo modo, con los términos numéricos tiene claro que puede transformarlos siempre y cuando esas transformaciones mantengan la equivalencia aritmética.

Las respuestas de Mariel contrastan con los resultados obtenidos por Küchemann (citado por Cedillo, 2000). En su investigación con niños de 12 y 13 años de edad, encontró que un porcentaje muy alto de 12000 estudiantes no pudieron responder a las preguntas planteadas sobre equivalencia, aparentemente debido a que los niños no habían podido asignar un significado matemático a las literales. Reporta que en entrevistas individuales encontró que alguno de los significados probables que los niños asignaron a las letras fue el de darle un valor dependiendo del lugar que la letra ocupa en el alfabeto. Al plantearles la pregunta de que si A podía valer más que Z contestaban que nunca, ya que la Z es mayor A por la posición que tienen en el alfabeto.

Reporta que también le asignaron a las letras significados lingüísticos, usándolas como iniciales o abreviaturas, por ejemplo, en la expresión M+P le asignaban significados a M como manzana y a la P como pera, si se les pedía comparar los valores de P y M mencionaban que no eran comparables por que eran manzanas y peras. En algunos casos también asignaron significados a las letras como los que se les dan en geometría, por ejemplo a la A como área y a la P como perímetro.

En este estudio no encontramos resultados como los de Küchemann, una explicación plausible es que en la propuesta didáctica en la que se basó este estudio las literales se introducen en el contexto del uso de la calculadora, y ese contexto, tanto sintáctica como semánticamente está estrechamente vinculado al valor numérico de las expresiones algebraicas.

Tercera entrevista

Propósitos de la entrevista

La tercera entrevista se dedicó a recabar nueva evidencia empírica sobre los siguientes aspectos:

- Los significados que asignaron los niños a las letras cuando las usan para construir expresiones de generalización acerca del comportamiento de un patrón numérico.
- El tipo de estrategias que generan para abordar situaciones de equivalencia algebraica.

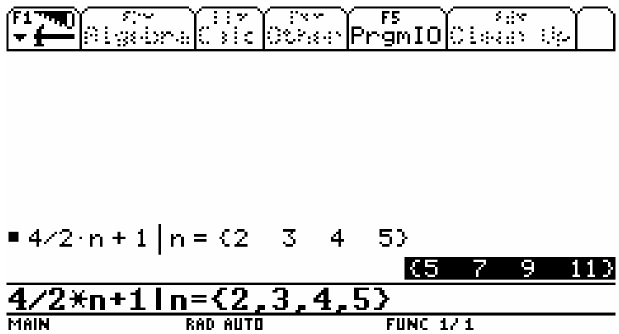
Significados

El siguiente episodio muestra las estrategias que empleó Mariel para crear programas algebraicamente equivalentes y cómo sus formas de trabajo están relacionados con el significado que asignó a las literales como símbolos que representan a cualquier número. En la pregunta 4 del protocolo de entrevista se le pidió corregir el programa nx4+1 para obtener los mismos valores que los que produce el programa nx2+1, se le indicó que no podía borrar nada de lo que ya estaba escrito; empezó verificando qué resultados numéricos que producía el programa nx2+1. A continuación se transcribe un extracto de la entrevista con Mariel.

M: [Comienza a sustituir n por valores numéricos en el programa nx4+1]

E: **¿**Qué tienes que "decirle" a la máquina para que dé los mismos números de salida que el programa nx2+1?

M: Después de probar y comprobar sus ideas en la calculadora escribió el siguiente programa:



Análisis del episodio

En esta entrevista se puede observar que Mariel mostró un mayor dominio en el manejo de las letras, un indicador de esto es que las empleó como su primer recurso para representar diferentes valores y simplificar así su trabajo.

Las respuestas de Mariel muestran que se desempeñó en el nivel de generalización de orden algebraico al crear programas equivalentes. Los datos obtenidos durante el trabajo de campo sugieren que la estrategia recursiva que empleó desde la primera entrevista le dio elementos que le permitieron avanzar gradualmente en la consolidación de sus ideas y en el empleo de las letras como recursos algebraicos. Después de explorar diversas estrategias con la finalidad de generar una fórmula que describiera el comportamiento general de un patrón numérico reunió información que le permitió pasar de una estrategia recursiva a una funcional. Del trabajo realizado por Mariel se puede concluir lo siguiente:

- La calculadora fue una herramienta importante en la concreción de sus ideas, ya que fue el medio que le facilitó crear significados para el lenguaje algebraico que emplea el código de la calculadora. También se apoyó en el uso de la máquina para poner a prueba sus conjeturas.

- Los hallazgos observados en el trabajo de Mariel se relacionan con lo encontrado por Cedillo (2000), quien reporta que las facilidades que ofrece la calculadora para registrar y manipular simbólicamente expresiones algebraicas permite a los estudiantes ir más allá de una simple memorización, como puede ocurrir con el papel y lápiz. Un rasgo importante de la calculadora es que permite al alumno trabajar con expresiones algebraicas dando valores numéricos a las variables con la posibilidad inmediata de verificar los resultados obtenidos en el programa creado.

Equivalencia

El trabajo que realizó Mariel en esta entrevista indica que desarrolló una noción de equivalencia algebraica con base en la exploración del valor numérico de las expresiones algebraicas, a continuación se presenta un extracto con las respuestas que ejemplifican lo anterior.

E: Al tratar de escribir el programa A×2−1 me equivoque y escribí A×2−2 ¿Crees que se pueda corregir sin suprimir nada de lo que ya esta escrito y obtener los mismos valores que con el programa inicial?

M: Sí

E: ¿Cómo?

M: Multiplico (2×2)−2+1=3

E: ¿Te dio el resultado que esperabas utilizando el 2?

M: Sí

E: Ahora pruébalo con los valores 5, 7, 9 y 11.

M: A×2−2+1

E: Completa el programa

M: (A×2–2)+1|A={2, 3, 4, 5 ,6}

Pregunta 10

E: En la calculadora escribí el programa 3.5×N|N={1,2,3,4,5}, del cual obtengo los valores 3.5, 7, 10.5, 14, 17.5. Si anoto 3.5×N|N={75} ¿cuánto me da?

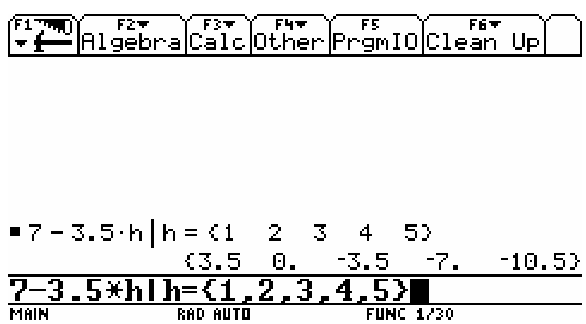
M: 262.5

E: Ahora necesito que me ayudes a encontrar otro programa que haga lo mismo, pero diferente a mi programa, con los mismos números de entrada (1, 2, 3, 4, 5 ,6).

M: ¿Debo encontrar un programa que me de los valores 3.5, 7, 10.5, 14, y 17.5?

E: Sí, busca otro programa basándote en mi programa y encuentra esos valores

M: 7–3.5×H|H={1,2,3,4,5}

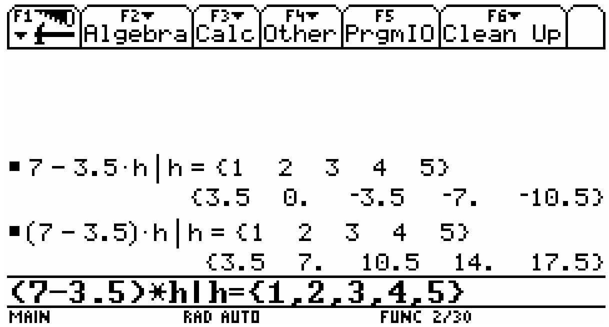


E: ¿Qué pasó ahí por que no salieron los valores que esperábamos?

M: Me faltaron los paréntesis

E: Anótalos

M



E: ¿Me puedes explicar qué significa eso que tú acabas de hacer?

M: El 3.5 lo sumé por el mismo número para que me resultara siete, pero como nada más necesitaba 3.5 le resté 3.5, después lo multipliqué por H, porque H representa los números de entrada y ya salió (sic).

Análisis de este episodio

Para encontrar el programa equivalente Mariel exploró primero el valor numérico de la expresión algebraica dada con auxilio de calculadora, cabe destacar que aunque su trabajo se basó en un cálculo aritmético, lo hizo sobre el coeficiente de la variable, lo cual indica claramente que comprende la equivalencia entre 3.5 h y (7-3.5) h. También es notable que fue capaz de corregir su programa inicial porque conoce la función que desempeña el paréntesis, lo cual sugiere que está cerca de entender que 7h-3.5h=3.5h, que corresponde a una noción más amplia de equivalencia algebraica. La estrategia que empleó Mariel marca una clara relación entre su noción de equivalencia y el uso del código de la calculadora para descubrir patrones numéricos (Cedillo, 1999).

El trabajo desarrollado por Mariel en la tercera entrevista fue similar que el que presentó en las entrevistas previas, pero mostró avances que denotan mayor profundidad. Su estrategia incluyó probar con varias operaciones aritméticas con el propósito de encontrar un patrón numérico.

El significado que asignó a las literales se resume en su expresión: "las letras para mí representan un número que no esta escrito".

El caso de Jared

Primera entrevista

Propósitos de la entrevista

La primera entrevista se diseñó para estudiar con mayor profundidad las nociones y estrategias que desarrollaron los estudiantes para expresar generalizaciones en el contexto de actividades que consisten en reconocer un patrón de comportamiento en una secuencia de figuras o en una relación numérica (Ver protocolo, entrevista 1, Anexo ¿??). Las secuencias de figuras y relaciones numéricas que se emplearon se basan en valores particulares de funciones de la forma $f(x)=ax+b$.

Antecedentes

Jared es una alumna de 12 años de edad con un nivel de aprovechamiento promedio en matemáticas de acuerdo a las evaluaciones hechas por su profesor. Esta alumna constantemente recurría al auxilio de los investigadores para realizar sus actividades, en la medida que fue resolviendo sus dudas fue ganando seguridad y logró tener una actuación más independiente sin abandonar por completo su tendencia a pedir ayuda para enfrentar situaciones que superaban sus posibilidades.

Datos obtenidos: primera entrevista

Durante la primera entrevista dio respuestas que indican que el material manipulable le ayudó a formular generalizaciones. Esta afirmación se basa en episodios como los que se describen a continuación.

Cuando se le pidió encontrar la regla que gobierna la secuencia que se muestra en la figura de abajo contestó lo siguiente (pregunta 7 de la entrevista uno; **E**: entrevistador; **J**: Jared).

Fig. 2	OOOO
Fig. 3	OOOOOO
Fig. 4	OOOOOOOO
Fig. 5	OOOOOOOOOO
.	
.	
.	
Fig. n	?

J: Empieza con la figura número 2, si tuviera la figura 1, tendría dos canicas, porque va aumentando de dos en dos. ¡Sí! Va aumentando de dos en dos.

E: ¿Cuántas canicas debe tener la figura 20?

J: Sería más fácil hacerlo con las bolitas[5] que estar pensando cuántas bolitas hay en la figura 20; [después de pensar un momento contesta] "va a tener 40".

E: Explica, ¿cómo le hiciste?

J: Es que si la figura 2 tiene cuatro, la figura 3, seis, la figura 4, ocho, y así, entonces es el doble... porque son de 2 en 2, y la figura 20 tiene 40".

Análisis de este episodio

En este episodio se observó que el uso de material manipulable le dio a esta alumna la oportunidad de concretar su pensamiento mediante acciones. En

[5] Las "bolitas" forman parte del material manipulable que se les proporciono en las sesiones de trabajo en las cuales la tarea era contestar las hojas de trabajo diseñadas durante esta etapa..

otros términos, el material manipulable le permitió tener a la vista un registro que la guiaba en la elaboración de su razonamiento.

Este episodio muestra que la estrategia a la que recurrió Jared para formular una generalización fue analizar la relación que había entre el número de objetos y el número de la figura, lo cual corresponde a la identificación de una relación funcional (el número de objetos depende del número de la figura).

De acuerdo con lo planteado por Socas (1996), Jared se desempeñó en el nivel de *generalización concreta*. Socas propone que la realización de cálculos aritméticos mediante el uso de materiales físicos sitúa al alumno en la posibilidad de alcanzar el nivel de generalización concreta. Asimismo, este autor plantea que cuando los alumnos llegan a ese nivel están en una mejor posición para entender y dar un significado a la generalización que han logrado. Por otra parte, Dienes (citado por Resnick y Ford, 1990) propone que el desarrollo de los conceptos matemáticos se consigue mejor mediante una serie de patrones cíclicos, cada uno de los cuales supone una secuencia de actividades de aprendizaje que van de lo concreto a lo simbólico.

Segunda entrevista

Propósito de la entrevista

La segunda entrevista se dedicó a recabar nueva evidencia empírica sobre los siguientes aspectos:

- Los significados que asignaron los niños a las letras cuando las usan para construir expresiones de generalización acerca del comportamiento de un patrón numérico.
- El tipo de estrategias que generan para abordar situaciones de equivalencia algebraica.

Significados

En esta entrevista Jared acudió a recursos aritméticos para dar respuesta a las actividades que se le proponían, gradualmente fue incorporando a sus estrategias el uso de las letras como instrumentos para expresar una generalización. La actividad se describe a continuación (pregunta 6 del protocolo de entrevista).

E: Escribí un programa que me da los valores de la siguiente tabla, por descuido lo borré. Ayúdame a encontrar un programa que produzca los valores para completar la tabla.

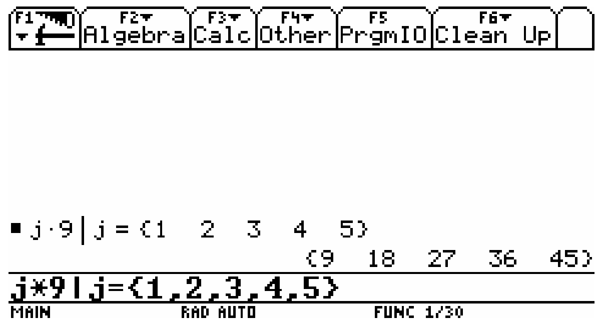
Núm. de entrada	1	2	3	4	5
Núm. de salida	9	18			

J: El número de salida para el 3 es 27, para el 4 es 36, para el 5 es 45.

E: ¿Cómo encontraste los números que hacían falta?

J: Bueno, los encontré porque fui multiplicando por 9, $1\times9=9$, $2\times9=18$, $3\times9=27$, $4\times9=36$, $5\times9=45$, y así.

En ese momento de la entrevista se le pidió que utilizara la calculadora para expresar el razonamiento que la condujo a encontrar el comportamiento del patrón numérico que se presentó en la actividad propuesta. Después de dos intentos Jared generó el programa que se muestra en la figura de abajo, comentó que no se había dado cuenta que el programa le permitía dar más respuestas y más rápidamente.



Análisis de este episodio

Jared mostró en un principio que no le parecía de mucha utilidad crear un programa en la calculadora ya que podía enfrentar las actividades que se le proponían aplicando recursos aritméticos. Finalmente logró asignar un significado al uso de las letras para representar los números por medio de ellas.

Jared accedió gradualmente a usar el código algebraico con el auxilio del profesor. Este episodio se relaciona con el concepto de zona de desarrollo próximo de Vigotsky (citado por Linaza, 1984, pág. 184). Vigotsky estudió el progreso del niño en el aprendizaje de las matemáticas desde la aritmética al álgebra. Según este autor, no es posible que un niño pase a un nivel superior del álgebra a menos que haya comprendido suficientemente las operaciones aritméticas, como para apreciar ciertas claves que revelen el estatus concreto de estas operaciones. Estos progresos pueden darse con mayor celeridad si el niño es apoyado por un par más competente.

El progreso de Jared en el uso de letras para crear sus programas se puede ubicar como un ejemplo del "préstamo de conciencia" que el niño recibe de manos del adulto y que conserva hasta que puede valerse por sí mismo. Este "préstamo" se realiza no sólo estructurando el mundo de un modo adecuado, sino ofreciendo "claves" y "elementos accesorios", que serán asimilables en el grado en el que el adulto y el niño pueda permanecer dentro de este formato informativo y accesible.

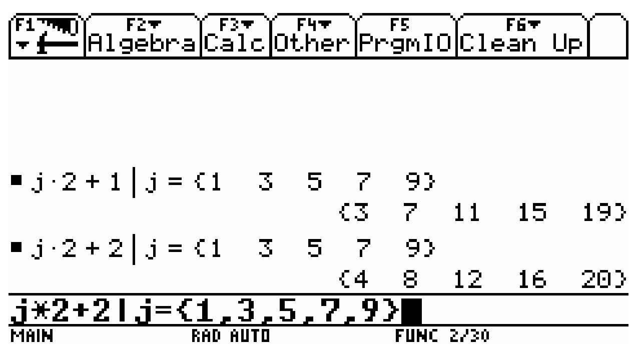
Equivalencia

Jared requirió del apoyo del entrevistador para aclarar sus dudas en actividades que involucraban situaciones de equivalencia algebraica. A continuación se transcribe un episodio de la entrevista donde se observa el estilo de trabajo de Jared. En la actividad de la pregunta 11 de la entrevista 2 contestó lo siguiente:

E: ¿Puedes programar tu calculadora para encontrar los números de salida de la siguiente tabla?

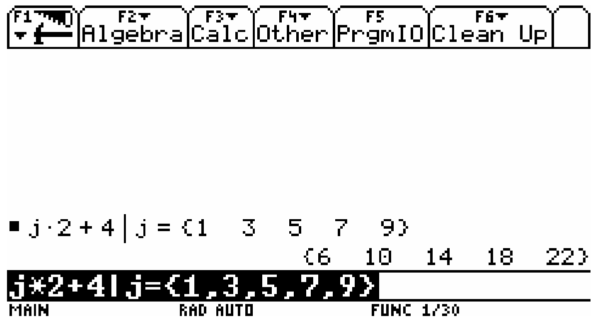
Núm. de entrada	1	3	5	7	9
Núm. de salida	6	10	14		

J: [teclea el programa] J×2+1, [obtiene 3, 7, 11, 15, 19, para los valores J=1, 3, 7, 9. Al darse cuenta que no son los valores que buscaba hizo ajustes y creó el programa que se muestra abajo].



E: Analiza qué estas haciendo para que sepas qué más tienes que hacer para que te salga.

J: [Tecleó el programa J×2+4].



Análisis de este episodio

El episodio que describimos muestra que las estrategias que empleó Jared son similares a las que usaron Amairany, Carlos Montiel y Mariel. Su análisis se basa en la exploración del valor numérico en las expresiones algebraicas, lo cual fue la base para crear una noción sobre equivalencia algebraica. En la tercera entrevista se constatará si logró algún avance a este respecto.

Tercera entrevista

Propósitos de la entrevista

La tercera entrevista se dedicó a recabar nueva evidencia empírica sobre los siguientes aspectos:

- Los significados que asignaron los niños a las letras cuando las usan para construir expresiones de generalización acerca del comportamiento de un patrón numérico.
- El tipo de estrategias que generan para abordar situaciones de equivalencia algebraica.

Significados

El trabajo desarrollado por Jared en esta última entrevista proporciona información relevante sobre el significado que asignó al uso de las letras al programar la calculadora. El episodio que se describe a continuación ilustra este aspecto (preguntas 4, 5 y 13, del protocolo de entrevista).

E: ¿Qué significa la n en el programa n×2+1?

J: El número que se va a multiplicar por dos... el programa multiplica por 2 a la n cambiándola por algún número.

E: Jared, en mi calculadora escribí el programa 2×n-1 para producir los valores de salida de la siguiente tabla:

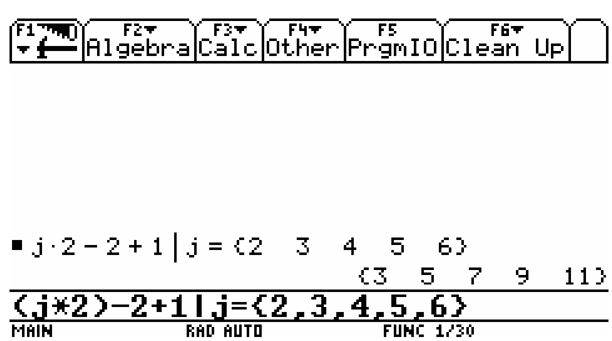
Núm. de entrada	2	3	4	5	6
Núm. de salida	3	5	7	9	11

Lo quise hacer de nuevo, pero al teclearlo me equivoqué y escribí A×2-2. ¿De qué manera puedo yo arreglar este programa para que me dé los números de salida 3, 5, 7, 9 y 11?

J: [Hace en la calculadora las operaciones 2×2-2+1=3, 3×2-2+1=5, 4×2-2+1=7, 5×2-2+1=9 buscando obtener los números de salida de la tabla].

E: Estás olvidando algo que ya habíamos ejecutado anteriormente, si te das cuenta tú estás sustituyendo para sacar cada valor.

J: [Teclea el siguiente programa en la calculadora]



Análisis de este episodio

El tipo de respuesta de Jared concuerda con lo reportado por Cedillo (1999), quien encontró que la calculadora permite a los estudiantes usar el código de programación no sólo como un medio de edición sino, además, como una herramienta para calcular. Otro factor que parece haber influido en el avance que logró Jared es que todas las actividades se basaron en la descripción de patrones numéricos, como esta descripción es un acto de generalización no es extraño que este tipo de tareas ayude a establecer una conexión entre el nuevo código formal que estaban usando y la experiencia aritmética, que implica ver lo general en lo particular y expresar generalizaciones a partir del análisis de casos particulares.

Resumen

Los hallazgos encontrados durante el trabajo experimental y las entrevistas se relacionan con lo reportado por Cedillo (1999), donde se observó que la calculadora le permite al alumno usar el código de programación no sólo como un medio de edición, sino también como una herramienta de cálculo, la relación existente entre las actividades experimentales y la herramienta de cálculo lleva al alumno a usar el referente numérico como forma de validación para sus respuestas. Por ejemplo, el programa J×J genera el patrón numérico 4, 25, 49, 64, 100, para J=2, 5, 7, 8, 100. Si ése era el patrón que el alumno quería generar sabía que el programa que había construido era el que buscaba, si no, buscaba otro programa o hacía los ajustes correspondientes.

Los datos que recabamos sugieren que este ambiente de trabajo indujo a Jared a identificar las reglas o fórmulas que usaba como "expresiones para calcular". Las estrategias de tanteo que empleó para afinar sus respuestas le sirvieron para validar las expresiones algebraicas que produjo.

Equivalencia

Las estrategias que desarrolló Jared para encontrar programas equivalentes durante la tercera entrevista se basaron en la exploración del valor numérico de las expresiones algebraicas. A continuación se presenta un extracto de la entrevista, preguntas 4 y 6 del protocolo, que ilustran lo anterior.

Pregunta 4

E: Al escribir el programa nx2+1 me equivoqué y escribí el programa nx4+1. ¿Me puedes ayudar a corregirlo de manera que de los mismos resultados que el programa inicial sin borrar nada? Puedes agregar lo que creas necesario.

J: La "n" la multiplicó y la cambió por algún número. ¿Tengo que darle un valor a "n"?

E: Ya se lo diste, a ver prueba el programa inicial para que veas cuales son los resultados que da el programa.

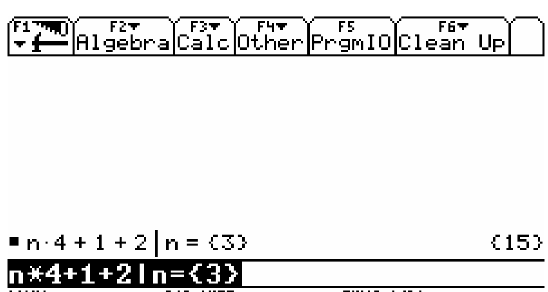
J Para el 3… es 7… es la n por dos más 1, da 7.

E: Ahora quiero que el programa nx4+1 me de 7, cómo le harías sin mover ni quitar nada al programa, sólo se vale agregar algo.

J: Multiplicar 3x4=12-6+1=7,

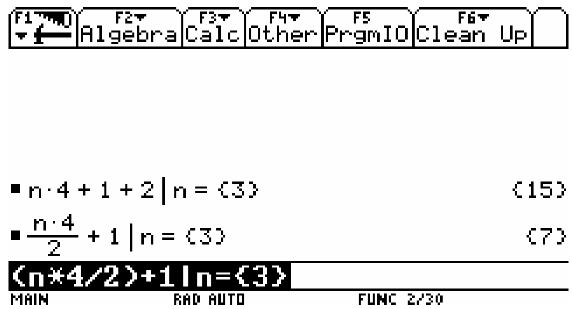
E: ¿Funciona para cualquier número?

J:



E: Checa bien el programa nx4+1.

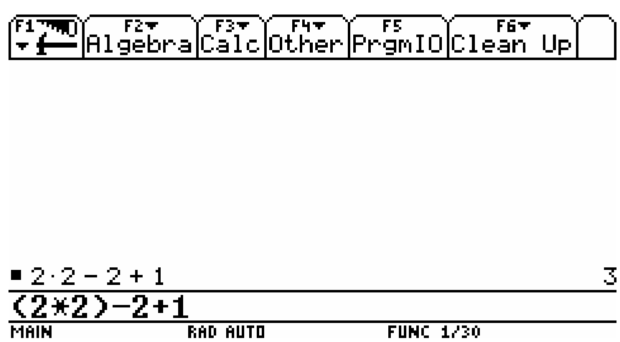
J: El dos es el que está cambiando, entonces queda (nx4÷2)+1.



En el siguiente extracto se incluyen algunas de las respuestas de Jared de la pregunta 6 del protocolo de entrevista

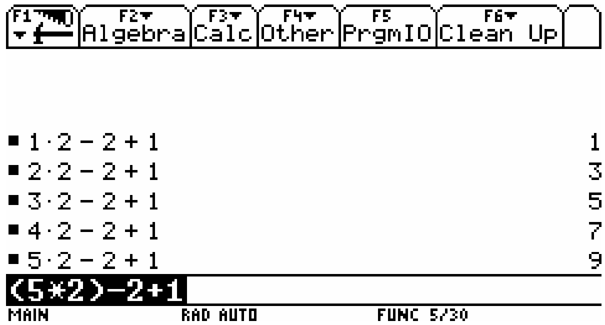
E: Cuando estaba tecleando el programa Ax2-1, me equivoqué y teclee el programa Ax2-2. ¿Me puedes ayudar a acomodar el programa para que me dé lo mismo que el programa inicial, sin que le quites nada?

J: Si, voy a multiplicar el número de entrada por dos, paréntesis, luego por menos dos y luego le sumo uno, y ya me salió.



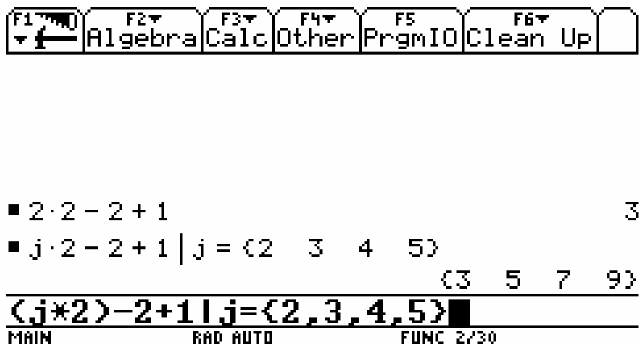
E: A ver, pruébalo para el 3.

J: Si me sale, voy a probarlo para el 4, 5.



E: ¿Puedes hacerlo más rápido sin tener que estar sacando cada valor?

J: [Tecleo el programa que se muestra abajo]



Análisis de este episodio

Es importante destacar los criterios que aplicó Jared para construir programas equivalentes, esos criterios son indicadores de un avance relevante en su capacidad de lectura de expresiones algebraicas, lo anterior se discute con mayor detalle a continuación.

En la primera actividad Jared creó un programa equivalente trabajando sobre el coeficiente de n: (nx4÷2)+1. En la segunda actividad operó sobre el término independiente; de acuerdo con las características de cada una de esas actividades ambas decisiones fueron las opciones más eficientes a que podía acudirse, lo que sugiere una comprensión de la estructura de las expresiones algebraicas involucradas que descansa en el análisis del significado numérico de esas expresiones.

El caso de Miguel Angel

Primera entrevista

Propósito de la entrevista

La primera entrevista se diseñó para estudiar con mayor profundidad las nociones y estrategias que desarrollaron los estudiantes para expresar generalizaciones en el contexto de actividades que consisten en reconocer un patrón de comportamiento en una secuencia de figuras o en una relación numérica (ver protocolo, entrevista 1, Anexo 2). Las secuencias de figuras y relaciones numéricas que se emplearon se basan en valores particulares de funciones de la forma f(x)=ax+b.

Antecedentes

Miguel Ángel es un estudiante de 13 años de edad que cursa el primer grado de secundaria; de acuerdo con su desempeño en la clase de matemáticas su nivel escolar es medio. Este alumno, presentó dificultades para entender las instrucciones que se presentan en las hojas de trabajo y requirió el auxilio del maestro con frecuencia durante las actividades previas en la primera entrevista. En la medida que fue comprendiendo las actividades que se le proponían su actuación fue siendo más independiente y logró un desempeño satisfactorio de las actividades hacia el final del trabajo de campo.

Datos obtenidos: Primera entrevista

Durante la entrevista dio respuestas que indican que el uso de los materiales manipulables le apoyó en la formulación de generalizaciones.

Se le preguntó si los materiales le permitieron generar ideas que antes no había pensado y si le fueron útiles para comprobar sus respuestas. Las respuestas de Miguel Ángel a las preguntas 2 y 6 de la entrevista 1 se transcriben a continuación, (**E**: entrevistador; **M**: Miguel).

E: ¿El uso de los materiales te generó ideas que antes no habías pensado?

M: Los materiales estimulan nuestro cerebro y nos ayudan a buscar respuestas con mayor facilidad, aún en los casos más difíciles, me acuerdo de los ejercicios donde se tenía que encontrar la equivalencia. ¿Cuál es la equivalencia de cada uno? [pregunta que se hace y contesta el mismo alumno]. Por ejemplo, de 28 a 30, ¿cuál era el número de separación? ... El patrón, los patrones, cómo el ejercicio que nos mostraba del niño de secundaria que empezó a hacer flores, y que aquí [utiliza un pieza del material, lo toma de ejemplo y dice que imaginemos que es un círculo]... Haga de cuenta que es una flor y que aquí son cuatro cuadritos y después empieza a usar más cuadritos, por ejemplo el patrón iba aumentando de uno en uno.

E: ¿Crees que has aprendido más matemáticas ahora que utilizaste materiales?

M: Sí, he aprendido más matemáticas usando los materiales, porque casi siempre hay que hacer operaciones y yo para las operaciones no soy muy bueno, con los materiales estoy más en la disposición de poder resolver los problemas con mayor posibilidad".

Análisis de este episodio.

Las respuestas de Miguel Ángel sugieren que el trabajo con el material le ayudó a comprender lo que tenía que hacer en las hojas de trabajo, en particular se reproduce a continuación su actividad en la pregunta ocho del protocolo de entrevista. En el extracto de la entrevista que se presenta se observa que Miguel Ángel se fue percatando de la regularidad numérica que existía, describió esa regularidad como "una proporción de cuatro y que al número de figura se le sumaban cuatro y así conocería cuántos objetos tendría la siguiente figura". A continuación se transcribe la pregunta ocho de la entrevista uno donde se muestra evidencia de lo anterior

E: Encuentra la regla o fórmula que exprese el comportamiento de la sucesión numérica

4	8	12	16					
1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°

M: Aquí la proporción es 4, aquí lo único que tenemos que sumar es el 4+4=8, 8+4=12, 12+4=16, y así sucesivamente.

Consideramos que las respuestas de Miguel Ángel formulan una generalización porque proporciona evidencia de que ha comprendido qué tipo de operación tiene que realizar para conocer el valor numérico correspondiente a cualquier figura; en este caso recurre primeramente a la suma y posteriormente a la multiplicación. El nivel de generalización que alcanza este alumno se puede situar en el rango correspondiente al aritmético.

En el caso de Miguel Ángel, el material manipulable, como lo reporta Lapp (1999), estimuló el descubrimiento de procesos que lo llevaron a formular una respuesta.

Segunda entrevista

Propósito de la entrevista

La segunda entrevista se dedicó a recabar nueva evidencia empírica sobre los siguientes aspectos:

- Los significados que asignaron los niños a las letras cuando las usan para construir expresiones de generalización acerca del comportamiento de un patrón numérico.
- El tipo de estrategias que generan para abordar situaciones de equivalencia algebraica.

Significados

Miguel Ángel manifestó dificultad para comprender lo que se le proponía en las actividades previas a la entrevista, dijo no poder resolver las actividades aún cuando recibió apoyo por parte del profesor.

En la entrevista se observa que Miguel Ángel alcanzó una mayor familiaridad en el uso de las letras, desde la primera entrevista interpretó a la literal como un símbolo que representa cualquier valor y con la que se puede crear una fórmula, esto se ilustra a continuación (**E:** Entrevistador, **M.A:** Miguel Angel)

E: ¿Qué significado tiene para ti utilizar letras?

M.A Supongo que eso sería parte de una fórmula y cada letra representa un número.

E: ¿Puedes programar tu calculadora para conocer los números de salida de la siguiente tabla?

Núm. de entrada	1	2	3	4
Núm. de salida	9	18	27	36

M.A: Sí, $f \times 9 | f=\{1, 2, 3, 4\}$, aquí el número de variable es el número de entrada 1, 2, 3, 4, y son representados por la letra f, el patrón no se representa con una letra por lo que el patrón es 9.

Análisis de este episodio

Las respuestas que dio Miguel Ángel se relacionan con lo reportado por Cedillo (1995) quien encontró que los alumnos mostraron desde el inicio del estudio que habían entendido que una letra sirve para representar cualquier número, o que la elección de la letra con la que van a hacer un programa no afecta la manera en que éste funciona; además existe un rango de generalidad en la expresión que se construye y está dado por la generalidad del simbolismo que está empleando.

La actuación de Miguel Ángel en la primera entrevista fue satisfactoria, en la segunda hubo un cambio notable en la actitud que mostró para resolver lo que se le proponía, en esta entrevista no logró la resolución de las actividades, al llamado de la tercera entrevista ya no acudió, mostró desinterés en ese período, su asistencia a la escuela fue irregular, estas fechas de inasistencia coincidieron con las fechas programadas para la entrevista.

Datos obtenidos: Equivalencia

En esta entrevista no se obtuvo información relevante, Miguel Ángel empleó la mayor parte del tiempo para realizar las actividades de generalización. Cuando se le pidió hacer un programa equivalente a N×2 +4, realizó lo siguiente: T×2+4| T = {1, 3, 5, 7}, nene ×2+4| nene ={1, 3, 5, 7}. Su respuesta muestra un nivel de comprensión amplio del significado de una variable en el contexto de programación de la calculadora, el usar la palabra "nene"como variable es un indicador claro de generalización para el significado de las literales en matemáticas. Debido al poco tiempo que restaba para finalizar la entrevista ya no pudo darnos una explicación de lo que hizo y ya no se presentó otra oportunidad de trabajar con este alumno porque el período escolar estaba finalizando, además de que Miguel Ángel ya no se presento a la siguiente entrevista.

El caso de Carlos Mendoza

Primera entrevista

Propósitos de la entrevista

La primera entrevista se diseñó para estudiar con mayor profundidad las nociones y estrategias que desarrollaron los estudiantes para expresar generalizaciones en el contexto de actividades que consisten en reconocer un patrón de comportamiento en una secuencia de figuras o en una relación numérica (ver protocolo, entrevista 1, Anexo 2). Las secuencias de figuras y relaciones numéricas que se emplearon se basan en valores particulares de funciones de la forma $f(x)=ax+b$.

Antecedentes

Carlos Mendoza es un alumno de 12 años 7 meses de edad que cursa el primer grado de secundaria, de acuerdo al rendimiento reflejado en sus calificaciones en matemáticas es de nivel bajo, sus respuestas permiten observar que los materiales le fueron útiles para formular generalizaciones.

Datos obtenidos: primera entrevista

En el trabajo desarrollado por este alumno se observó que su desempeño en las actividades previas a la entrevista requirió del constante apoyo del profesor, en particular porque se le dificultaba entender las instrucciones de las actividades que se le propusieron.

A continuación se transcriben las respuestas a las preguntas 3 y 7 de la entrevista uno; (**E**: Entrevistador; **C**: Carlos Mendoza).

E: ¿Los materiales te han permitido comprobar tus respuestas?

C: Las tablitas[6] iban saltando y la numeración tenía que ir saltando de un número a otro, creo que era de 4 en 4.

Para Carlos el material es un instrumento de apoyo que le permite realizar conjeturas para probar lo que esta pensando acerca de alguna situación que se presente. En la siguiente respuesta se observa lo que se mencionó anteriormente.

Cuando se le propuso la actividad donde tenía que encontrar el número de objetos que tiene la figura "n".

Fig. 1 000
Fig. 2 000000
Fig. 3 000000000
Fig. n

C: (Dibuja el número correcto de objetos y dice) "fui sumando de tres en tres".

En la respuesta que dio a la actividad que se le planteo donde tenía que descubrir el número de objetos de la figura 30, responde que son 90, su respuesta se basó en la identificación de la multiplicación como la operación que le permite obtener el número objetos a partir del número de la figura.

Análisis de este episodio

En las respuestas de Carlos Mendoza se observó que los materiales le sirvieron como un apoyo visual que le permitió descubrir la regularidad numérica involucrada en la actividad.

[6] Utiliza el término "tablitas" para referirse al material manipulable denominado "tarjetas numeradas"

Sus respuestas sugieren que alcanzó un nivel de generalización aritmética al descubrir el patrón existente y después realizar operaciones con el número de figura para encontrar el número de objetos en cada una. En el trabajo que realizó se observa un desempeño bajo con respecto a los estudios de caso analizados anteriormente, ya que él sólo alcanzó el nivel de generalización aritmético y los estudios de caso de nivel alto alcanzaron una generalización algebraica.

Segunda entrevista

Propósito de la entrevista

La segunda entrevista se dedicó a recabar nueva evidencia empírica sobre los siguientes aspectos:

- Los significados que asignaron los niños a las letras cuando las usan para construir expresiones de generalización acerca del comportamiento de un patrón numérico.
- El tipo de estrategias que generan para abordar situaciones de equivalencia algebraica.

Significados

En esta entrevista se observó que Carlos Mendoza recurrió al uso del código aritmético para dar respuesta a las actividades propuestas en el protocolo de entrevista.

A continuación se transcriben algunos extractos que dan evidencia de lo anterior. En este caso el alumno requirió de apoyo constante de los investigadores para encontrar el programa Kx9|k={1, 2, 3, 4}, para reproducir los valores de la siguiente tabla.

Núm. de entrada	1	2	3	4	5
Núm. de salida	9	18	27	36	

E: ¿Me puedes decir qué esta pasando en la tabla?

C: Va sumando de 9 en 9, 9+9+9+9 y multiplicando 9x1, 9x2, 9x3....

E: Te acuerdas que trabajamos con patrones y variables, ¿Me puedes decir cuál es el patrón en 9×1, 9×2, 9×3 y por qué?

C: 9, porque es el que se multiplica o se suma.

E: ¿Cuál es la variable?

C: 1, 2, 3, 4, 5, 6 (números de entrada de la tabla)

E: Ahora para obtener los números de salida de la tabla más rápidamente puedes crear un programa.

C: [se queda pensando y contesta] Sí... No

E: Puedes usar la calculadora

C: [El teclea en la calculadora K+K] y pregunta ¿será así?

E: Fíjate que operación tienes que realizar.

C: Multiplicar K×K

E: ¿Cuáles son los números que representan la variable?

C: El nueve

E: ¿Estás seguro que es el nueve?

C: ¡Ah! El 1, 2, 3, 4, 5.

E: ¿Cómo lo representas?

C: Como K

E: Ahora crea un programa donde uses una variable y el patrón.

C: K×9lK={1, 2, 3, 4, 5} [programa creado por el alumno]

Análisis de este episodio

El trabajo realizado por este alumno se relaciona con lo reportado por Socas (1996). De acuerdo con este autor Carlos está situado en el periodo temprano de operaciones concretas, ya que la concreción de las operaciones está garantizada por alguna analogía física y la concreción de los números asegurada por la disponibilidad del material físico, por lo que el alumno está aún en el trayecto de alcanzar un nivel de generalización de orden aritmético.

Equivalencia

Calos Mendoza no manifestó soltura al manejar expresiones, por lo cual tuvo dificultades para encontrar el programa de la siguiente tabla.

Núm. de entrada	1	3	5	7	9
Núm. de salida	6	10	14		

Los programas que tecleó son los siguientes: K×2+4|K={1, 3, 5, 7, 9}, K×4+2|K={1, 3, 5, 7, 9}, K×2×2+4|K={1, 3, 5, 7, 9}, K×2×2+2|K={1, 3, 5, 7, 9}, K×2×2|K={1, 3, 5, 7, 9}, K×2+2|K={1, 3, 5, 7, 9}, finalmente creó el programa K×2+2+2|K={1, 3, 5, 7, 9} (ver figura dos y tres), el cual le dio como valores de salida 6,10,14... Cuando se le pidió encontrar un programa equivalente no pudo realizarlo, en este caso creemos que con este alumno se requiere un estudio con mayor profundidad que más adelante se debe hacer, debido a las limitaciones del tiempo a que obliga la naturaleza de esta tesis simplemente se reportan y se plantean algunas hipótesis plausibles que pudieran explicar su bajo desempeño.

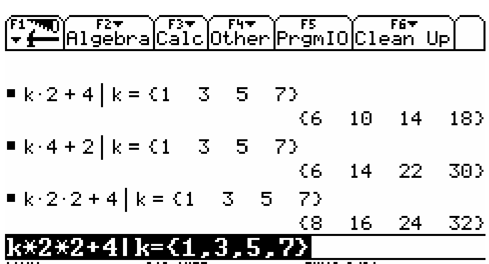


figura 2

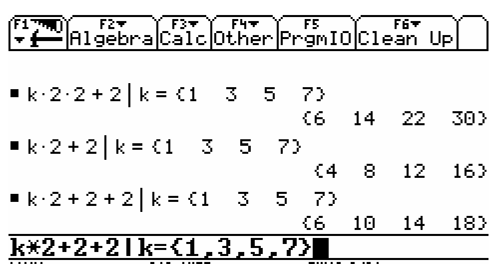


figura 3

El caso de Oscar

Primera entrevista

Propósito de la entrevista

La primera entrevista se diseñó para estudiar con mayor profundidad las nociones y estrategias que desarrollaron los estudiantes para expresar generalizaciones en el contexto de actividades que consisten en reconocer un patrón de comportamiento en una secuencia de figuras o en una relación numérica (ver protocolo, entrevista 1, Anexo 2). Las secuencias de figuras y relaciones numéricas que se emplearon se basan en valores particulares de funciones de la forma $f(x)=ax+b$.

Antecedentes

Es un alumno que tiene 12 años 10 meses de edad, es considerado de nivel medio en cuanto al aprovechamiento académico en la materia de matemáticas.

Datos obtenidos: primera entrevista

Manifiesta que casi no utilizó los materiales para resolver las actividades por que se da cuenta de que puede resolver los ejercicios sumando o multiplicando, menciona que se apoya en los conocimientos que adquirió en la primaria. Las actividades que se le propusieron fueron resueltas exitosamente.

Sus respuestas muestran que sin acudir al uso de los materiales alcanzó un nivel de generalización. Cuando se le propuso la actividad en la que tenía que explicar el comportamiento de los objetos al ir aumentando de 3 en 3, después de analizarlo dijo "se está sumando tres".

Al preguntarle sobre el número de objetos que tiene la figura "n", lo que hace es sumar tres tantas veces como lo indica el número de figura, después se dio cuenta que es más fácil multiplicar, y multiplicó el número de figura por tres.

Con estas respuestas Oscar manifiesta un nivel de generalización de orden aritmético que le permite identificar el patrón de comportamiento en la situación planteada.

Segunda entrevista

Propósitos de la entrevista

La segunda entrevista se dedicó a recabar nueva evidencia empírica sobre los siguientes aspectos:

- Los significados que asignaron los niños a las letras cuando las usan para construir expresiones de generalización acerca del comportamiento de un patrón numérico.
- El tipo de estrategias que generan para abordar situaciones de equivalencia algebraica.

Significados

En la entrevista Oscar recurrió a sus recursos aritméticos; para dar respuesta a las actividades propuestas desarrolló la estrategia de identificar el patrón numérico y los números de entrada los representó con una letra. A continuación se transcribe la pregunta 6, donde se observa lo mencionado anterior mente, (**E**: entrevistador; **O**: Oscar).

E: ¿Podrías encontrar un programa que produzca los valores que faltan en la tabla?

Núm. de entrada	1	2	3	4	5
Núm. de salida	9	18	27		

O: Sí, 9×2=18, 9×3=27,... 9×6=54... multiplicando por nueve los números de entrada... queda así: O×9**|**O={1,2,3,4,5}

E: Y si quiero cambiar la letra O por m, ¿se alteraría el programa?

O: No, porque significa lo mismo, porque se pueden poner diferentes números con letras diferentes.

E: ¿Qué significa para ti el 9?

O: El patrón.

Análisis de este episodio

Oscar inició su trabajo utilizando la calculadora para realizar cálculos aritméticos, su actividad sugiere que la relación existente entre las actividades experimentales y la herramienta de cálculo lo indujo a relacionar las operaciones aritméticas con las expresiones algebraicas para calcular el patrón numérico en las actividades que se le proponían, es decir, es muy probable que el uso del código de programación de la calculadora lo indujo a representar expresiones algebraicas que sintetizaban un patrón numérico dado.

Equivalencia

En la entrevista Oscar no logró encontrar programas equivalentes al programa dado, se notaba nervioso y distraído. No se concentró para realizar las actividades, agotó sus recursos y tiempo sin lograr una respuesta correcta, no nos dio respuestas para que se pudiera interactuar con él, o no supimos aprovechar las que ofreció. En la tercera entrevista se comprometió y se obtuvo una mejor respuesta de su parte (en el reporte de la tercera entrevista se describirá su trabajo).

Tercera entrevista

Propósitos de la entrevista

La tercera entrevista se dedicó a recabar nueva evidencia empírica sobre los siguientes aspectos:

- Los significados que asignaron los niños a las letras cuando las usan para construir expresiones de generalización acerca del comportamiento de un patrón numérico.
- El tipo de estrategias que generan para abordar situaciones de equivalencia algebraica.

Significados

En esta entrevista se recopiló información que nos muestra que Oscar logró con un poco más de tiempo un manejo de las letras en la calculadora que le permitió obtener las respuestas requeridas, pero no ve a la literal como variable ni como incógnita, a continuación se muestra un extracto de la entrevista.

E: Al tratar de escribir el programa (nx2)+1 en la calculadora me equivoqué, escribí (nx4)+1, en vez de 2 tecleé 4, quiero que me ayudes a encontrar una manera para que el programa nx4+1 me dé los mismos números de salida que el programa inicial. ¿Sabes que significa la "n"?, ¿Qué hace la "n"?

O: Para poder cambiar los números

E: Quiero que me platiques que hace el programa (nx2)+1 para el valor 2, qué me va ha dar como resultado.

O: Dos

E: ¿Por qué?

O: Por que se multiplicaría por uno.

E: El 2 dónde queda, hace rato decías que la "n" es la que se sustituye por cualquier valor, ¿sí o no?

O: X toma cualquier valor

E: ¿Qué resulta si haces eso?

O: O sea aquí me tiene que dar 2x2, cuatro y luego más uno es igual a cinco.

E: Si pongo en vez de "n" el número 2 como número de entrada me sale 5, recuerda... es lo mismo, observa la tabla, estamos trabajando sobre el programa nx2+1, pero recuerda que yo me equivoqué y en vez de escribir 2 escribí 4, sobre este mismo programa nx4+1, sin borrar nada, ¿cómo le puedo hacer para que me den los mismos números de salida?

Análisis de este episodio

En la entrevista realizada a Oscar se pudo apreciar que el significado que le asignó a las letras cuando creó un programa en la calculadora, no era el de variable, sino que utilizaba las letras sólo como un código que usa mecánicamente para comunicarse con la maquina para crear una expresión para calcular un patrón numérico. Lo anterior lo podemos observar en la respuesta que da a la pregunta 13 de la tercera entrevista, donde se le pide, crear un programa, en el cuál tiene que multiplicar los números de entrada por sí mismos, en esta tarea deja claro que sólo utiliza las letras para comunicarse con la calculadora. Por lo anterior consideramos Oscar que no logró dar el significado de variable a las expresiones algebraicas que produjo. El trabajo que logró desarrollar este alumno estuvo influenciado en gran medida por la ayuda que le brindaron los investigadores.

Equivalencia

La información obtenida en esta entrevista nos permite afirmar que Oscar logró encontrar la equivalencia de las expresiones propuestas. Lo anterior se describe a continuación (pregunta cuatro del protocolo de entrevista): (**E:** Entrevistador, **O:** Oscar)

E: Al tratar de escribir el programa N×2+1, me equivoqué y escribí N×4+1, ¿puedo corregir mi programa sin suprimir nada que haya escrito?

O: Si, el programa es (N×4/2)+1.

E: ¿Cómo le hiciste, puedes platicarme cómo pensaste eso?

O: Por que se multiplicó y como es dos se tuvo que dividir para que hiciera como que restara (sic).

Análisis de este episodio

En esta entrevista Oscar fue capaz de mostrar una noción sobre equivalencia aritmética, eso sugiere que él ha comprendido que dos programas son equivalentes si producen los mismos valores de salida para valores iguales de entrada. Estos hallazgos se relacionan con lo que reporta Cedillo (1996), donde informa que los estudiantes desarrollaron nociones sobre equivalencia algebraica con base en la exploración del valor numérico de las expresiones algebraicas. Esta estrategia marca una clara relación entre esas nociones de equivalencia y el uso del código de la calculadora para descubrir patrones numéricos.

El caso de Shantal

Primera entrevista

Propósito de la entrevista

La primera entrevista se diseñó para estudiar con mayor profundidad las nociones y estrategias que desarrollaron los estudiantes para expresar generalizaciones en el contexto de actividades que consisten en reconocer un patrón de comportamiento en una secuencia de figuras o en una relación numérica (ver protocolo, entrevista 1, Anexo 2). Las secuencias de figuras y relaciones numéricas que se emplearon se basan en valores particulares de funciones de la forma f(x)=ax+b.

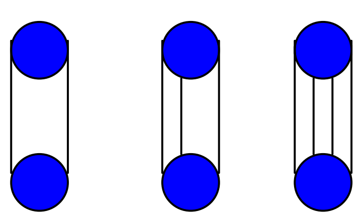
Antecedentes

Shantal es una alumna de 13 años de edad que cursa el primer grado de secundaría, su nivel académico es bajo según sus calificaciones en el curso regular de matemáticas.

Datos obtenidos: primera entrevista

En la primera entrevista se pudo observar que el apoyarse con el material le permitió comenzar a formular generalizaciones, cuando se le hace preguntó sobre la utilidad de los materiales manipulables contestó que “al utilizar el material puedes comprobar lo que estás realizando para que salga bien”.

Para Shantal fue importante haber manipulado el material en el momento de resolver las actividades propuestas en las hojas de trabajo. Explicó que utilizando palitos y bolitas puede hacer figuras donde lo único que cambia son el número de palitos que pone y que lo que no cambiaría es el color y el número de círculos que tiene la figura que realizó.



La actividad que se describe esta relacionada con patrones, al manifestar que no cambia ni el color ni el número de círculos lo expresa como un patrón. También explica que en una de las actividades había bolitas o circulitos y que se ponían dos arriba y luego cuatro, y "ahí tenían que sumar de dos en dos y eso era la suma"; lo que trataba de explicar es que en cada figura había un determinado número de círculos y que iban aumentando de dos en dos, es decir que en la figura uno había dos círculos, la figura dos tenía cuatro círculos y así sucesivamente.

No de fig.	Núm. de Círculos
Fig. 1	OO
Fig. 2	OOOO
Fig. 3	OOOOOO

En la actividad de la pregunta siete del protocolo de entrevista ella respondió lo siguiente:

E: Hay una figura en la que sabemos hay 36 canicas, ayúdanos a encontrar el número de esa figura.

No de figura	Sucesión
Fig. 3	OOOOOOOOOOOO
Fig. 4	OOOOOOOOOOOOOOOO
Fig. 5	OOOOOOOOOOOOOOOOOOOO
Fig. 6	OOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOO
.	.
.	.
Fig. n	OOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOOO

S: 9

E: ¿Me quieres explicar cómo le hiciste para saber el número de la figura?

S: Que va aumentando de cuatro en cuatro.

E: Haz de cuenta que no podemos usar la suma ¿Qué operación podríamos utilizar?

S: La multiplicación

E: ¿Cómo lo harías con una multiplicación?

S: El 9 lo multiplicaríamos por 4.

Análisis de este episodio

En esta entrevista Shantal comprende que existe una regularidad en la actividad propuesta ya que se da cuenta que el numero de círculos va aumentando de "cuatro en cuatro" y que puede utilizar una suma o multiplicación para llegar al resultado, ella utiliza las operaciones aritméticas para simplificar su trabajo, con esto consideramos que ha alcanzado una generalización de tipo aritmético al encontrar el patrón existente.

Segunda entrevista

Propósitos de la entrevista

La segunda entrevista se dedicó a recabar nueva evidencia empírica sobre los siguientes aspectos:

- Los significados que asignaron los niños a las letras cuando las usan para construir expresiones de generalización acerca del comportamiento de un patrón numérico.
- El tipo de estrategias que generan para abordar situaciones de equivalencia algebraica.

En el caso de esta alumna no se obtuvo información en cuanto a significados y equivalencia, ya que no hubo respuesta por parte de Shantal al pedirle que escribiera un programa que produjera los valores de la tabla que a continuación se describe.

Núm. de entrada	1	2	3	4	5
Núm. de salida	9	18	27	32	

Creemos que esta niña agotó sus posibilidades y no alcanzó un nivel de comprensión de las tareas que se le propusieron cuando se trabajó con todo el grupo en la fase preparatoria con calculadora, por lo que al proponerle actividades en la entrevista no dio respuesta alguna.

CAPITULO 5: CONCLUSIONES

Este capítulo está organizado en cuatro secciones, en la primera se abordan los resultados de este trabajo en el marco de las preguntas de investigación que lo orientan; la segunda parte se refiere a las ventajas y limitaciones encontradas cuando el ambiente de enseñanza para la introducción al álgebra escolar se basa en el uso de material manipulable y la calculadora grafica; en la tercera, se discute la combinación de la tecnología y el material manipulable como propuesta para enriquecer el proceso de aprendizaje en el aula; por último, se plantean las limitaciones de esta tesis.

Respuestas plausibles a las preguntas de investigación

El propósito de la tesis fue investigar:

1) ¿Cómo influyen las actividades de aprendizaje presentadas en el formato de hojas de trabajo y basadas en el uso de materiales manipulables y calculadora gráfica en el aprendizaje del álgebra escolar como un medio para expresar generalizaciones?
2) ¿Qué tipo de generalizaciones pueden plantear algebraicamente los estudiantes una vez que han trabajado con materiales manipulables y la calculadora?
3) ¿Qué estrategias desarrollan los estudiantes para resolver problemas que involucran el reconocimiento de patrones numéricos?
4) ¿Qué estrategias generan los estudiantes al abordar situaciones de equivalencia algebraica al trabajar con la calculadora grafica.

En la sección que sigue se abordarán estas preguntas de investigación a la luz de los datos y resultados que obtuvimos en el trabajo de campo, lo que se discuta respecto a cada una de las preguntas de investigación bosquejará respuestas plausibles a cada una de ellas.

Respuestas a las preguntas de investigación 1, 2, 3

¿Cómo influyen las actividades de aprendizaje presentadas en el formato de hojas de trabajo y basadas en el uso de materiales manipulables y calculadora gráfica en el aprendizaje del álgebra escolar, como un medio para expresar generalizaciones?

¿Qué tipo de generalizaciones pueden plantear algebraicamente los estudiantes una vez que han trabajado con materiales manipulables y la calculadora?

¿Qué estrategias desarrollan los estudiantes para resolver problemas que involucran el reconocimiento de patrones numéricos?

Los datos y resultados discutidos en el capítulo anterior muestran que los alumnos fueron capaces de formular generalizaciones una vez que trabajaban con materiales manipulables y la calculadora gráfica.

En lo que sigue se discute en secciones separadas las formas en que influyeron en el aprendizaje de los alumnos los tres elementos básicos que empleamos en el diseño didáctico para el trabajo en el aula (hojas de trabajo, material manipulable y calculadora).

El material manipulable

Las actividades que realizaron los estudiantes al emplear el material manipulable involucran el comportamiento general de relaciones numéricas. De acuerdo con los datos obtenidos durante el trabajo de campo los estudiantes emplearon el material manipulable para explorar posibles soluciones a los problemas planteados en una hoja de trabajo, por ejemplo, cuando se les pidió encontrar una fórmula o regla, recordaron lo que realizaron con el material manipulable, recurrían a las expresiones aritméticas (adición, sustracción, multiplicación), posteriormente se daban cuenta de que con una fórmula se podía llegar más rápido a la respuesta y decidían emplear letras. Para ellos las letras son como símbolos que sirven para representar cualquier número que se suma, resta o multiplica por algo.

Evidencia de lo anterior es lo que realiza Amairany, cuando se le pregunta sobre el significado de la expresión Q+4 que ella formuló para dar respuesta a una actividad propuesta en la entrevista. Ella contestó que "cualquier letra sumada con un número te vuelve a dar Q+4, si Q=2 te da 6, Q=4 teda 8 ...y así te da el valor".

Carlos Montiel se apoyó en la multiplicación y la resta para encontrar la respuesta a la actividad, su argumento es el siguiente (ver pág. 105): "aquí lo que he visto es que hay 7, 9... cada figura va de dos en dos y puedo utilizar la multiplicación 2x4–1=7, 2x5–1=9, y para más rápido mx2–1".

En el caso de Mariel se apoyó primeramente en la expresión verbal de una generalización, ya que dice que los objetos de la Fig. 1 a la Fig. 2 va aumentando de 5 en 5; posteriormente, al ver lo que pasaba en la actividad, se dio cuenta que podía emplear una operación básica que es la multiplicación 5x9=45, y generalizarla a su vez con la fórmula mx5.

Estas respuestas son ejemplo de los logros de los estudiantes, ellos alcanzaron un nivel de generalización en la categoría de expresión verbal, de orden aritmético y de orden algebraico, apoyándose en el material concreto, observándolo y manipulándolo.

En particular debemos destacar en este punto que el uso de las letras como instrumento de generalización se indujo de manera sutil en la redacción de las actividades propuestas en las hojas de trabajo, (ver hojas de trabajo 1, 3 y 7, en anexo 1).

Es muy probable que el uso de las letras en el sentido algebraico que se empleo en esas hojas de trabajo, haya conducido a los alumnos a emplear literales en la construcción de fórmulas como las que hemos mencionado en los párrafos anteriores. Las respuestas de los estudiantes en cuanto a emplear de manera "espontánea" las letras como instrumentos de generalización, sugieren una confirmación importante en términos de la enseñanza del álgebra; el álgebra puede enseñarse como un lenguaje que es factible aprender a través de su uso sin recurrir previamente a definiciones y reglas (Cedillo, 1996).

El material manipulable fue un elemento que influyó para que los alumnos desarrollaran estrategias diferentes que los llevaron a dar una respuesta a las actividades propuestas. Estos hallazgos en el trabajo de los alumnos se relacionan con lo reportado por Lapp (1999), quien afirma que los materiales manipulables estimulan el descubrimiento y que algunas destrezas pueden ser aprendidas en un tiempo mucho más corto.

Estos hallazgos no sólo se relacionan con lo propuesto por Lapp, sino también con lo planteado por Bruner (1995), quien sustenta que los materiales manipulables permiten al alumno representar eventos mediante una respuesta motriz adecuada, es decir a través de la acción. Para Bruner, el uso del material manipulable tiene impacto sobre el aprendizaje en las tres fases de representación: enactiva, icónica y simbólica, ya que activan el proceso cognitivo del estudiante.

Jared, Carlos Mendoza, Oscar, Miguel Ángel y Shantal, lograron identificar la invariante en la actividad propuesta en la entrevista, esto es expresado por ellos en las siguientes formas: "va aumentando de 2 en 2", "hay proporción de 4", "va aumentando de 4 en 4"; esto sugiere que están alcanzando una generalización de orden verbal. Cuando se les pidió expresar con una fórmula "eso que iba aumentando", Carlos Mendoza, Oscar y Shantal recurrieron a la multiplicación, , por ejemplo, 30×3, 8×4; el 3 y el 4 eran el número de bolitas que iba aumentando. Las respuestas de estos alumnos se sitúan en la categoría de generalización mediante el código aritmético, ya que acuden a recursos aritméticos, también el caso de Miguel Ángel se sitúa en esta categoría, la diferencia es que él se apoyo en la suma.

Para construir sus respuestas estos alumnos acudieron a su experiencia durante las actividades de las hojas de trabajo de la fase del estudio principal y usaron esas vivencias en el momento que se les propusieron las actividades en la entrevista.

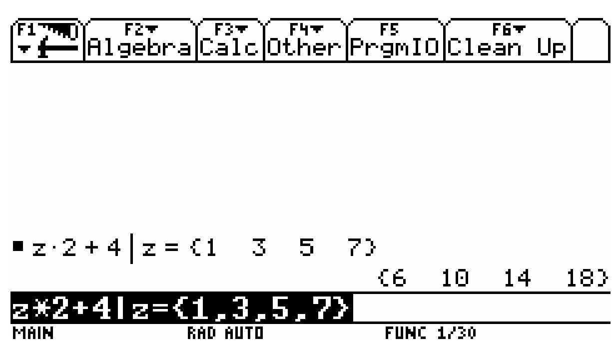
Estos datos sugieren que recurrieron a imágenes mentales que fueron construyendo cuando organizaban o visualizaban el material y recurrían a las operaciones aritméticas para dar respuesta. Cuando el alumno es capaz de recuperar información por medio de imágenes mentales lo situamos en lo que Bruner llama representación icónica. Para Bruner (1995), el modo icónico es la forma de representación que nos permite codificar acontecimientos mediante la organización selectiva de lo que se percibe a través de imágenes mentales, apoyadas por las estructuras temporales y cualitativas del campo perceptivo y sus imágenes transformadas.

Tanto Amairany como los otros estudiantes recurrieron a los modos de representación enactiva, icónica y simbólica. Codificaron la información mediante una organización selectiva de lo que perciben a través de imágenes mentales, para posteriormente transformarlas en forma simbólica (expresiones aritméticas y expresiones algebraicas).

Los datos que recabamos durante la fase de campo de esta tesis sugieren que el trabajo desarrollado por los alumnos es una síntesis de procesos cognoscitivos de los que nos habla Bruner en la teoría del desarrollo conceptual. Bruner (1995) plantea que los materiales manipulativos pueden ser empleados por el profesor con la intención de que el estudiante transforme, retenga, descubra y comprenda conceptos matemáticos complejos a partir de experiencias sensoriales, de tal forma que el aprendizaje esté anclado a un significado en el contexto de una experiencia basada en la manipulación concreta de materiales.

La calculadora

En cuanto al uso de la calculadora gráfica, nos encontramos que en algunas ocasiones se empleó como una herramienta para comprobar conjeturas, como en el caso de Amairany. Ella fue capaz de identificar las operaciones aritméticas que debía utilizar para producir un patrón numérico sin recurrir a la calculadora, alcanzando de esta forma una generalización de orden aritmético; sin embargo, para facilitar y simplificar su trabajo recurrió a la calculadora, apoyándose en ésta al producir expresiones algebraicas. Por ejemplo, cuando se le pidió encontrar el programa que le ayudara a conocer los valores de los números de salida de una tabla de valores ella construyó el programa Zx2+4|Z= { 1, 3, 5, 7, 9}.



Aquí utilizó la calculadora para comprobar la idea que generó. La expresión que formuló representa el comportamiento de un patrón numérico, esto sugiere que Amairany alcanzó un nivel de generalización empleando el código algebraico y utilizó la calculadora como un medio para comprobar lo que tenía en mente.

Carlos Montiel, Mariel, Oscar, Miguel Ángel, y Jared, utilizaron la calculadora para crear programas y al mismo tiempo para verificar sus respuestas, comunicándose con la calculadora mediante un código similar al algebraico. Ellos al principio utilizaban sólo el código aritmético, pero al darse cuenta que podían utilizar letras para representar cualquier número, comprendieron que podían usar la calculadora y simplificar su trabajo al manejar el código algebraico. Por ejemplo, cuando se les pidió encontrar un programa que diera los valores de los números de salida de una tabla, ellos experimentaban primero con la multiplicación, mencionaron que “se multiplicaban por 9”, posteriormente se les pidió construir el programa con el que podían llegar más rápido a los números de salida y crearon los siguientes programas:

Carlos Montiel $K\times 9 \,|\, K=\{1,2,3,4,5,6\}$

Mariel $n\times 9 \,|\, K=\{1,2,3,4,5,6\}$

Debe observarse que Carlos Montiel desde el uso del material manipulable fue capaz de proponer una fórmula algebraica como un recurso que le permitía “ir más rápido” cuando trataba de describir una generalización, cuando trabajo con la calculadora afino sus estrategias, confirmo que lo que había empleado lo podía hacer con la calculadora, esto se sustenta con lo sugerido por Waits y Demana (2001), donde menciona que para lograr un balance en el desarrolló inicial de conceptos y generalización de fases es conveniente usar manipulativos, técnicas de papel y lápiz y la calculadora.

Para Lapp, los materiales manipulables y la tecnología fomentan hallazgos, ya que puede introducir al alumno en un proceso de conjetura combinando los manipulativos y la tecnología, dejando atrás el pensamiento tradicional. Para resolver un problema se sugiere comenzar por los manipulativos para que se pueda examinar el proceso, el acto de colorear y poner bloques al construir una figura puede ser de gran beneficio ya que se comprende el proceso y posteriormente confirmar con la calculadora.

Es importante destacar que la calculadora por sí misma no puede elegir con qué operaciones se trabaja, aquí entra el papel del estudiante, ya que él es el que elige con qué operaciones trabajar para generar el tipo de expresión que empleará con la finalidad de expresar formalmente el comportamiento general de una relación numérica que es gobernada por un patrón algebraico.

Los datos obtenidos en el desarrollo del trabajo de los estudiantes concuerdan con los hallazgos encontrados por Cedillo (1995), donde menciona que el uso de la máquina lleva a los estudiantes a concentrarse en los procesos de solución al hacer descansar el cálculo aritmético en la calculadora, y que el uso de expresiones simbólicas a partir de la noción de variable propicia que los estudiantes desarrollen sus propias reglas para operar y además verificar la validez de sus conjeturas. En el presente trabajo, los alumnos también asignaron significados a las letras que empleaban para construir un programa en la calculadora. Ellos se dieron cuenta que las letras se usan para representar “cualquier número” y que no importa que letra se emplee para crear un programa, “de todos modos éste funcionará”.

El uso del código algebraico promueve que los estudiantes generen significados para el lenguaje simbólico, éste les permite emplearlo para abordar soluciones de problemas y expresar y justificar generalizaciones (Cedillo, 1995).

La calculadora gráfica permite al estudiante usar estrategias no convencionales como resultado de su razonamiento; los estudiantes plantearon conjeturas y las evaluaban por ellos mismos al trabajar con la calculadora.

En todas las actividades que se propusieron estuvo involucrado el reconocimiento de patrones numéricos, el hecho de que los alumnos hayan realizado un trabajo donde probaban sus ideas con el auxilio de material manipulable y la calculadora gráfica, les permitió discriminar entre una serie de sucesos las invariantes de la situación.
En el modelo didáctico que se empleó, los alumnos no llegaron únicamente al nivel de reconocer las invariantes en cualquier otro contexto, sino en el matemático, en particular lo que está detrás es la idea de función, donde hay una variable que depende de otra. Puede observarse en las actividades propuestas que todas las relaciones numéricas involucradas pueden representarse por funciones de la forma $f(x)= ax+b$.

El material manipulable ayudó a los alumnos a generar imágenes mentales, a partir de que hacen arreglos con el material, mediante su manipulación pasan al menos por dos de las etapas que propone Bruner, la enactiva y la icónica. Por la etapa enactiva, ya que sus primeras reacciones son motrices basadas en la acción, manipulan, hacen un esquema con los materiales, los arreglan y con esto crean imágenes mentales. Como hemos mencionado antes en este capítulo, hubo niños que no necesitaron utilizar la calculadora para expresar algebraicamente sus hallazgos, ya que el uso de los materiales les permitió crear imágenes mentales que les ayudaron a formular expresiones algebraicas (modo icónico).

Los alumnos entran al modo de representación simbólico a través de la identificación de invariantes y el uso de un código formal. Cuando se les preguntó acerca del patrón numérico que gobierna una serie de números presentados en una tabla, expresaron lo siguiente: el comportamiento va, por ejemplo, "de dos en dos", de "cuatro en cuatro". Lo anterior fue expresado por los alumnos verbal, aritmética o algebraicamente. Esto muestra que la expresión de una generalización requiere de un código formal, con una estructura más sólida que la que ofrece el material manipulable, en otras palabras, acuden a otro sistema de signos, donde esta presente otro modo de representación, el simbólico.

El material manipulable influyó de manera decisiva en los alumnos de los tres niveles (por abajo del promedio, promedio y arriba del promedio). Sin embargo, el desempeño alcanzado fue diferente, las producciones de los alumnos de alto nivel fueron en su mayor parte exitosas y originales. Cuando se les preguntó si los materiales les fueron útiles para resolver las actividades, las respuestas afirmativas fueron sustentadas en producciones exitosas, ellos respondieron mediante acciones en las que mostraron ejemplos de cómo usaban el material, los alumnos de este nivel pasaron más rápidamente del modo de representación enactivo al modo icónico; un ejemplo de esto se puede ver en el capitulo 4, análisis y descripción de resultados con los alumnos Carlos Montiel, Mariel y Jared.

Los alcances de los alumnos de nivel medio también fueron exitosos. Sin embargo requirieron más apoyo de los investigadores para dar respuesta a las actividades propuestas.

Las respuestas de los alumnos con nivel por debajo del promedio fueron más limitadas, sólo con el apoyo del maestro pudieron encontrar alguna respuesta a las actividades. En ellos se notó que las ideas generadas a partir del empleo del material no fueron suficientes, sino que requieren del apoyo más directo del profesor.

En los casos de Amairany (nivel alto) y Oscar (nivel bajo), en los que el uso del material no pareció necesario, los resultados alcanzados fueron muy diferentes, mientras que Amairany fue capaz de generar respuestas en el nivel algebraico, Oscar generó respuestas sólo a nivel verbal y aritmético apoyado por el profesor.

En estos alumnos se puede observar que el bagaje de conocimientos previos les permitió desenvolverse aceptablemente, pero esto depende del nivel de consolidación que se tenga de esos conocimientos.

Hubo niños a los que el trabajo con la calculadora los llevó a expresar algebraicamente sus hallazgos. El trabajo con la calculadora, para buena parte de los alumnos, fue el medio que los condujo a expresar ideas basadas en imágenes mentales en la forma convencional en que se expresan en matemáticas, que es algo que está directamente relacionado con los contenidos escolares. Estos alumnos, además de empezar a hacer generalizaciones matemáticas, las pudieron expresar de distintas maneras, como producto de las actividades basadas en el reconocimiento de patrones numéricos, apoyados por los materiales manipulables y la exigencia de la calculadora, que los condujo finalmente a expresarse algebraicamente en los niveles anteriormente analizados.

Probablemente, si se continuara con este tipo de propuesta didáctica sería muy factible que los alumnos llegaran a tener desempeños de nivel más alto que los que se obtienen simplemente de una clase dictada por el profesor, en donde los estudiantes están obligados a seguir la línea de razonamiento del profesor y tienen pocas oportunidades, o ninguna, de iniciar la búsqueda de una solución a partir de sus propias estrategias y conocimientos.

El tipo de trabajo que se propuso en esta investigación les da la oportunidad de expresar generalizaciones, incluso llegar al nivel de generalización algebraica siguiendo sus propias formas de razonamiento y empleando sus propias estrategias, ya que es un nivel más alto que el usualmente esperado en los cursos de matemáticas.

Otro resultado que se observó de la aplicación de este tipo de actividad, es que ayuda a los estudiantes a generar significados para el simbolismo algebraico a través de su uso, en particular significados para las letras y las fórmulas algebraicas que pueden producir empleando esas letras.

La influencia de la calculadora en los alumnos de nivel alto fue un agente de motivación, la calculadora representó un medio que promovió el uso del lenguaje algebraico (ver ejemplo en el capitulo 4, en los casos de Carlos Montiel, Mariel y Jared).

De acuerdo con los datos recabados en este trabajo, para los alumnos por debajo del promedio la calculadora fue una herramienta que les facilitó el cálculo numérico. En algunas actividades estos alumnos fueron capaces de emplear el código algebraico, pero sin un significado claro en términos de los datos numéricos que proponía la actividad, empleaban las letras porque los investigadores lo sugerían.

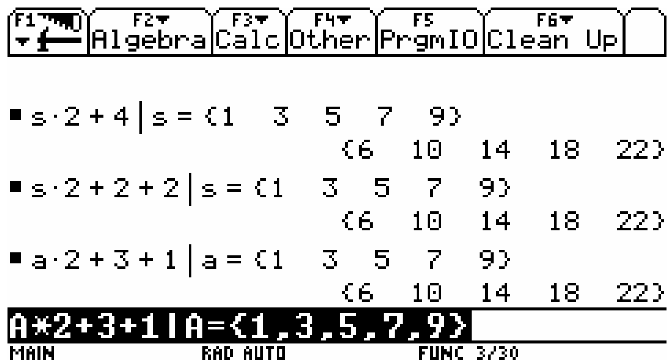
Pregunta de investigación 4

¿Qué estrategias generan los estudiantes al abordar situaciones de equivalencia al trabajar con la calculadora grafica?

Los datos descritos en el capítulo 4 nos muestran cómo los alumnos se apoyaron en diferentes estrategias para llegar a proponer respuestas a las preguntas planteadas en las entrevistas. Cuando se les pidió encontrar una expresión algebraica, la calculadora fue un factor importante, ya que exploraban sus ideas. Para encontrar una expresión que les permitiera generar un programa diferente, pero que produjera los mismos valores de salida de la tabla, se apoyaron en la calculadora como un medio que les auxiliaba para comprobar sus conjeturas.

La estrategia más común que generaron los estudiantes fue la de "tanteo y refinamiento", que consistió en crear un programa que tecleaban en la calculadora asignándole distintos valores numéricos a la variable para tener una tabla con valores de entrada y valores de salida; esa tabla es la que le daba la pista para intentar construir un programa equivalente. Una vez que construían un programa buscando que fuera equivalente a otro, corrían ambos programas asignándole los mismos valores de entrada a las variables correspondientes, con esto producían dos tablas de valores, las comparaban, si en ambas tenían los mismos valores de salida, entonces aceptaban la equivalencia entre esos programas; si encontraban diferencias en los valores de salida regresaban a revisar el segundo programa que habían hecho para buscar una explicación plausible y a partir de esa explicación hacer las correcciones necesarias para obtener un programa equivalente al programa original. A esa estrategia es a la que llamamos "tanteo y refinamiento".

Por ejemplo, cuando se le pidió a Amairany programar la calculadora para conocer los números de salida (la tabla de la pregunta 11 de la segunda entrevista), comenzó a teclear varios programas hasta crear el programa S×2+4. Cuando se le pidió encontrar otro programa que la llevara al mismo resultado, encontró dos programas más, los cuales son Sx2+2+2 y Ax2+3+1.



Nótese que estos programas son equivalentes al programa Sx2+4, estas expresiones muestran los primeros intentos de esta estudiante para producir expresiones algebraicas equivalentes, en las que queremos destacar la equivalencia que asigna al uso de distintas letras.

Las respuestas de Amairany son una clara evidencia de que había asignado a las letras un significado algebraico, es decir no le importaba si la letra que estaba usando es "S", "A", o cualquier otra, lo que importaba era la secuencia y estructura de las operaciones aritméticas que estaba empleando, lo cual corresponde a un significado para las literales como "separadores de un lugar" que puede ocupar cualquier número. Esto es, la equivalencia entre esas expresiones no sería alterada por el valor numérico que se le otorga a la letra, la equivalencia está determinada por la estructura de la expresión, lo cual corresponde a un significado algebraico, ya que va más allá del significado puramente aritmético.

Debemos ver que este significado ya no está relacionado con el uso de las letras que seguramente se vio antes en geometría, en las formulas en donde las letras, además de admitir la sustitución por distintos valores, están asociadas a un nombre, por ejemplo, A para área, S para superficie, P para perímetro, L para lado. En estos significados se genera una confusión entre el significado coloquial y el significado que se le da a esos mismos símbolos en el código algebraico Kücheman, (citado por Cedillo 2000).

Se ha observado en estudiantes de preparatoria que ante ecuaciones como las siguientes 3x+4=9 y 3a+4=9, en donde las expresiones son distintas sólo por el cambio de letra, los estudiantes no se dan cuenta que son la misma ecuación. Lo cual se hace evidente porque al proponérselas resuelven ambas. Esto muestra que aún no alcanzan a comprender el significado más abstracto de la equivalencia algebraica (Cedillo, 2002).

Carlos Montiel tecleó varios programas hasta llegar al programa Nx2+4, el cual le da los números de salida de la tabla de valores que se le propuso. Cuando se le pidió encontrar otro programa que lo llevará al mismo resultado, el tecleó los siguientes programas: Nx2+2+2, Nx2+2x2 y Nx2+16÷4.

Mariel también exploró con diferentes programas para crear el programa Dx2+4, una vez que encontró el programa se le preguntó si podía hacer otro programa que la llevara a los mismo valores que el programa Dx2+4. Después de varios intentos creó el programa Vx2+2+2. Lo que hizo esta alumna es muy similar a lo que realizó Amairany.

Jared utilizó diferentes estrategias como “exploración del valor numérico” y “tanteo y refinamiento” apoyándose en la calculadora. Para resolver alguna de las tareas que se les proponía en la que tenían que expresar mediante una ecuación lineal el patrón existente en una serie de datos que se les presentaban mediante tablas, generalmente se apoyaba de la estrategia de "exploración del valor numérico" en la que probaba varias operaciones con la finalidad de encontrar el patrón numérico y expresar mediante una ecuación el comportamiento de los datos que se presentaban en tablas. La estrategia de "tanteo y refinamiento" la empleaba al crear un programa en la calculadora asignando distintos valores numéricos a la variable y corrigiendo los programas que pensaba para encontrar los números de salida de la tabla de valores (ver capítulo 4, segunda entrevista). Por ejemplo, tecleaba J+1+1+4, en la búsqueda de un programa equivalente a Jx2+4, finalmente construyo el programa J+J+4. En el caso de esta estudiante, estableció equivalencias mediante expresiones aritméticas, donde para ella daba lo mismo sumar un número consigo mismo que multiplicarlo por dos (J+J=Jx2).

También Carlos Mendoza creó un programa equivalente al programa Kx2+4, en su caso se requirió de mucho apoyo por parte de los investigadores, ya que él aún no consolidaba el uso de las letras, tenía dificultades para comunicarse con la calculadora. Creemos que esto se debe a que cuando se trabajaron las actividades de la fase del estudio principal el alumno se distrajo y no prestó la atención necesaria.

En el trabajo realizado por estos alumnos es evidente que ellos exploraron y ponían a prueba sus propias reglas empleando diferentes estrategias como "exploración del valor numérico" y "tanteo y refinamiento". Las estrategias desarrolladas por estos alumnos para encontrar programas equivalentes están basadas en la exploración del valor numérico de las expresiones algebraicas y encontrar programas en la calculadora asignando distintos valores numéricos a la variable para encontrar los valores de salida de una tabla, y así generar la ecuación que expresara la relación de los valores de las tablas que se les presentaban. Mediante estas estrategias probaban varias operaciones con la finalidad de encontrar un patrón numérico y establecer una relación de equivalencia.

Para que los alumnos estuvieran en la posibilidad de recurrir a este tipo de estrategias fue importante el trabajo con las actividades previas a la entrevista, en las que la mayoría de los estudiantes partió de la estrategia de "ensayo y error", en la que iniciaban tecleando información en la calculadora, en la que probaron sus conjeturas, lo cual les permitió avanzar en el tipo de estrategias que emplearon para resolver las actividades que se les propusieron.

Los hallazgos encontrados en el trabajo de estos estudiantes se relacionan con lo reportado por Cedillo (1999), donde informa que con la calculadora se logra el desarrollo de la noción de equivalencia algebraica basada en el referente numérico de las expresiones que se construyen; esa noción permite abordar situaciones que implican operar algebraicamente con términos semejantes. También menciona que el trabajo con la calculadora propicia que los estudiantes exploren tantas estrategias como les sea posible sin que eso agote sus esfuerzos, lo cual parece favorecer que en muchas ocasiones encuentren varias formas de resolver un problema (Cedillo, 1997).

Estos reportes sugieren que la calculadora es una herramienta que hace que el alumno vaya más allá de una simple memorización, como muchas veces ocurre con el lápiz y papel, ya que proporciona mejores formas de manipular símbolos, por lo tanto en una situación problemática el desafío para el estudiante es determinar si la respuesta que obtuvo tiene sentido y para ello se requiere toda su atención (Waits y Demana, 2001).

La calculadora permite la introducción del álgebra dándole énfasis firmemente al uso de las expresiones simbólicas generales; iniciando el álgebra manipulando símbolos, para que el alumno vea el álgebra como una herramienta matemática que permita representar relaciones generales que ellos mismos producen (Cedillo, 2000).

Shantal, Miguel Ángel y Oscar no crearon programas equivalentes, sólo encontraron el programa principal. Sus estrategias fueron limitadas, ya que no recurrían a pensar en otro tipo de operación que los llevará a la misma respuesta, sólo cambiaban la letra pero no aplicaban otra operación.

REFLEXIONES FINALES

El material manipulable y la calculadora grafica son herramientas que pueden favorecer de manera determinante la introducción al estudio del álgebra, cuando se preguntó a los estudiantes acerca de la utilidad que representaba tanto la calculadora como el material manipulable, dieron respuesta como las siguientes: "en ocasiones son útiles ya que usando el material me di cuenta de lo que pasaba con las tarjetas numeradas" (Carlos Montiel entrevista uno); "el material te ayuda a resolver las actividades ya que luego no me salía bien lo que quería hacer y utilizando el material encontraba la solución" (Mariel entrevista uno); "los materiales estimulan nuestro cerebro y nos ayudan a encontrar repuestas con mayor facilidad" (Miguel Ángel entrevista uno).

Estos hallazgos se relacionan con lo reportado por Szendrei (1996), quien afirma que el empleo de materiales es importante para la enseñanza de las matemáticas, ya que facilita la comprensión de la estructura del conocimiento matemático y activan procesos de aprendizaje en el individuo.

Ledesma (1994), reporta que el efecto que produce el uso de los materiales en el aprendizaje de los productos notables en el tercer grado de secundaria, es que les ayuda a clarificar conceptos, a descubrir relaciones, a establecer propiedades y elaborar sus propios procedimientos para solucionar situaciones diversas.

Nickson (2000), sugiere que las propiedades tangibles de los materiales ayudan a los niños en el desarrollo de conceptos y construcción de estructuras mentales. Aclara que el material por sí solo no lleva al estudiante a desarrollar conceptos y habilidades, sino que depende de la discusión o el trabajo que se haga con ellos, eso es lo que sirve o da sentido a las matemáticas.

Los hallazgos encontrados en este estudio coinciden con lo reportado en esas investigaciones ya que nuestros resultados confirman el uso de materiales manipulativos como utensilios que pueden facilitar la generación de ideas, la activación de procesos de aprendizaje y cómo descubrir relaciones.

Waits y Demana (2001), encontraron que las calculadoras introducen cambios en la manera de enseñar de los profesores y en la manera de aprender de los estudiantes. Antes que se tuviera acceso a la tecnología (computadora y calculadora), era necesario que los estudiantes pasaran mucho tiempo practicando para llegar a ser expertos en el manejo de los algoritmos mediante lápiz y papel. En la actualidad, mucho de ese tiempo puede utilizarse en la comprensión creciente, profunda y crítica, pensando en el problema y desarrollando habilidades.

Waits y Demana (2001), reportan que las calculadoras reducen la carga de trabajo en los procedimientos aritméticos y algebraicos cuando éstos no son el foco de atención. Proporcionan mejores formas de manipular símbolos, por lo tanto, en una situación problemática, el desafío para el estudiante será determinar si la respuesta que obtuvo tiene sentido en la situación del problema, tarea que requiere de toda su atención, llegando a ser menos importante el cálculo aritmético y algebraico apoyado en técnicas de lápiz y papel. Las calculadoras ayudan a los estudiantes a ver un valor en las matemáticas. Los estudiantes que usan calculadora ven a las matemáticas más interesantes.

La calculadora es un recurso que exige el empleo del código algebraico. Los resultados alcanzados por los estudiantes reflejan que la calculadora puede emplearse como recurso que favorece la enseñanza y el aprendizaje en la introducción al álgebra escolar. Durante el desarrollo de las actividades, el trabajo con la calculadora representó un apoyo importante, al programar la calculadora el estudiante está obligado a expresar la secuencia de operaciones que tiene en mente en un nivel de formulación que les exige emplear el código algebraico.

Episodios como los que se analizaron en la descripción y análisis de resultados de Amairany, Carlos Montiel y Mariel, confirman una de las hipótesis en que se sustenta el tratamiento didáctico empleado en este estudio. La calculadora se introdujo como un medio que le exige al estudiante expresar su razonamiento algebraicamente, para que el alumno logre hacer que la calculadora haga lo que él quiere, necesita usar el código que la máquina entiende, y ése es el código del álgebra. A continuación se discuten algunos ejemplos que ilustran lo anterior.

Durante la segunda entrevista, se le pidió a Mariel construir un programa que dé los valores de salida de la tabla siguiente:

Núm. de entrada	Núm. de salida
1	9
2	18
3	27
4	
5	

Ante la pregunta, ¿Cómo le hiciste para construir el programa Nx9| N ={1, 2 ,3, 4 ,5}?, respondió lo siguiente:
"Analizando los números de entrada y de salida de la tabla me di cuenta de que iba sumando 9, entonces, dije que era más fácil con la multiplicación, en esta expresión la N representa los números de entrada y por 9 representa el patrón" (sic).

Carlos Montiel, en la segunda entrevista, preguntas 11 y 12, analizó la relación entre los números de entrada y los números de salida para obtener el patrón correspondiente.

Núm. de entrada	Núm. de salida
1	3
3	10
5	14
7	
9	

Durante el proceso de exploración para construir un programa que produjera los números de salida de la tabla, ponía en juego estrategias donde prevalecía el apoyo en los recursos aritméticos; en la medida que se le proponía reflexionar acerca del tipo de lenguaje que tenía que emplear para que la calculadora le entendiera lo que él quería hacer, donde estaba implícito el uso de las letras, este alumno produjo los siguientes programas:

Nx2+4|N={1, 3, 5, 7, 9}
Nx2+2+2|N={1, 3, 5, 7, 9}
Nx2+2x2|N={1, 3, 5, 7, 9}
Nx2+16/4|N={1, 3, 5, 7, 9}

VENTAJAS Y LIMITACIONES

El modelo de enseñanza para la introducción al álgebra escolar, donde se combinó el uso del material manipulable y la calculadora gráfica, parece ser un ambiente que propicia en el estudiante un mayor interés en la clase de matemáticas. De acuerdo con las observaciones realizadas durante el desarrollo de las actividades, los estudiantes que manifestaron poco agrado hacia las matemáticas en los cuestionarios iniciales, aparentemente debido al ambiente didáctico que se empleó, manifestaron durante el trabajo de campo un interés creciente, lo cual sugiere que este ambiente didáctico resultó muy estimulante para los alumnos.

La calculadora y los materiales manipulables parecen ser elementos que motivan al alumno a aceptar sin mayor cuestionamiento el uso de un nuevo código, el algebraico. El ambiente de enseñanza que se empleó en esta tesis sugiere que la combinación de materiales concretos y la calculadora, son recursos promisorios que pueden favorecer de manera determinante la introducción del estudio del álgebra en la secundaria.

A este respecto Waits y Demana (2001) plantean que se necesita un enfoque equilibrado entre la tecnología y las técnicas de papel y lápiz en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Reconocen la importancia de que los alumnos adquieran habilidades tradicionales en aritmética y álgebra, por ejemplo, desarrollar destrezas que les permitan multiplicar o dividir rápidamente dos números, uno que tenga valor único y el otro 10, y usar papel y lápiz para obtener la factorización. El equilibrio que proponen se refiere a un uso apropiado del papel y lápiz en las técnicas que dan una base para el uso de la calculadora. El uso del papel y el lápiz y las calculadoras pueden complementarse mutuamente.

Lapp (1999), sugiere que para enseñar matemáticas como un sistema de conceptos interrelacionados se debe dar un cambio en el énfasis: de un currículo dominado por la memorización de hechos aislados y de procedimientos, a un currículo que privilegie la comprensión de conceptos, las representaciones múltiples, las conexiones de modelación matemática y la resolución de problemas.

Los materiales manipulables y la tecnología estimulan el descubrimiento en el aprendizaje de las matemáticas (Herd, 1992, citado por Lapp, 1999). Lapp propone que se comience por los manipulativos. El acto de colorear los bloques o iluminar las hileras para construir las figuras, puede ser de gran beneficio para la comprensión de un proceso. Sugiere que se confirmen las respuestas a través de varias formas de representación, enriqueciendo el proceso de razonamiento en el estudiante. Los materiales manipulables pueden ayudar a que los estudiantes descubran el proceso que conduce a una respuesta. Finalmente consideramos necesario mencionar las implicaciones derivadas de la aplicación de un enfoque didáctico como el que se empleó en esta tesis en la tarea del profesor y en los aprendizajes de los alumnos.

El diseño didáctico empleado permite al profesor organizar la clase de manera que pueda llevar un seguimiento de cada alumno en cuanto a sus producciones. Durante el desarrollo de la clase el profesor no se centra en trasmitir el conocimiento de una manera lineal, ya que deja de desempeñar el rol habitual donde es él quien lo sabe todo y es el que tiene que ser el principal portador de ideas para que el alumno aprenda, sino que toma el papel de guiar, auxiliar, orientar, en el proceso que generan los estudiantes para resolver las situaciones planteadas. Es decir, no impone reglas a seguir, permite la plena libertad de que el alumno exponga y exprese sus ideas, haciendo más atractiva la clase de matemáticas, viendo las actividades como retos o juegos sin la necesidad de memorizar fórmulas.

El hecho de que los alumnos registren sus ideas en hojas de trabajo permite al profesor analizar más profundamente las producciones de éstos y conocer las deficiencias donde requieren más apoyo. Esta revisión conduce al profesor a crear un plan, donde decida diferencialmente el tipo de actividades que va a pedir para que cada alumno alcance los conocimientos necesarios.

También este diseño didáctico invita al profesor a emplear formas de enseñanza distintas para lograr que el estudiante se interese en el estudio del álgebra; el profesor tiene que estar preparado para analizar producciones originales que antes no había conocido. Por otro lado, el profesor dispone de: i) tiempo para apoyar más directamente al alumno que manifiesta apatía o poco entendimiento de la situación propuesta, ii) de una serie de actividades que previamente se diseñaron que se pueden emplear para tratar de brindar los elementos al alumno, para que pueda acceder a los conocimientos que le permitan abordar las situaciones que se le planteen más adelante.

Los resultados de este trabajo muestran que este tipo de propuesta didáctica propicia que el alumno tenga una actitud favorable hacia el trabajo, evidencia de esto se observó durante el trabajo de campo, ya que ellos mismos manifestaron su desacuerdo cuando se les pedía que dejaran de trabajar porque el tiempo se había terminado. Hubo alumnos que mostraron apatía, creemos que esto se debió a que desde un principio no se esforzaron en tratar de entender lo que se les planteaba y conforme se avanzaba en las actividades para ellos resultaba de poco interés lo que se proponía ya que no entendían la actividad.

En el ambiente de aprendizaje que empleamos el alumno se siente más atendido por el profesor, ya que éste revisa su trabajo y le brinda la posibilidad de que se hagan nuevas preguntas y se reflexione sobre lo ya producido.

El desempeño del estudiante empleando estos recursos didácticos es más natural y activo, ya que puede trasmitir sus ideas y conjeturas comprobando lo que piensa generando un aprendizaje significativo.

Por último, debemos mencionar que una de las limitaciones de este trabajo se deriva del marco metodológico empleado, ya que la técnica de estudio de casos no permite hacer generalizaciones, para esto, en una etapa posterior de esta investigación consideramos necesario obtener datos provenientes de un estudio longitudinal.

REFERENCIAS

Bruner, J., (1995). Desarrollo cognitivo y Educación, tr. J.M. Igoa, r. Arenales, G. Solana y F. Colina. Madrid: Morata.

Calix, C., (2000). Las gráficas y tablas de funciones como herramientas para la solución de ecuaciones lineales y cuadráticas: una alternativa basada en el uso de la calculadora gráfica. Tesis Doctoral, Escuela Normal de Sinaloa, SEP, México.

Cedillo, T., (1990). De la Aritmética a las habilidades de representación simbólica: Una propuesta didáctica empleando calculadoras. Memorias de la Tercera Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Educación Matemática. Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas. Acapulco, Gro., México,.

Cedillo, T., (1996). Exploring Algebra as a Lenguaje in use: A study eith 11-12 year old using graphic calculator (Tesis doctoral). Institute of Education, University of London Uk.

Cedillo, T., (1996b). Matemáticas en la escuela secundaria: Potencial de las calculadoras como apoyo a la enseñanza, (articulo de investigación): Reportes de investigación educativa: Proyectos seleccionados, Didáctica y Curriculum. Programa de apoyo a proyectos de investigación educativa, SEP-CONACYT. Dirección General de Investigación Educativa, SEP, México.

Cedillo, T., (1997). Algebra as a language in use: a study with 11-12 year olds using graphic calculators. XXI Congreso Anual del Grupo Internacional de Psicología en Educación Matemática. Finlandia, 1997.

Cedillo, T., (1997a). A pragmatic approach to algebraic equivalence: A study with 12-13 year olds using graphic calculators. XIX Congreso Anual de la Rama Norteamericana del PME.

Cedillo, T., (1999). Potencial de la calculadora en el desarrollo del sentido numérico: Un estudio con niños de 11-12 años (artículo de investigación). *Educación Matemática*, Vol. 11, No 2, Agosto 1999, pp. 16-31. Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Cedillo, T., (1999). Desarrollo de habilidades algebraicas. Vol.3. La Calculadora en la clase de matemáticas. Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Cedillo, T., (1995). "Introducción al álgebra mediante su uso: una alternativa factible con calculadoras programables". Educación Matemática, Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V., Vol. 7 No.3. México.

Cedillo, T., (2000). Toward an Algebra Acquisition Support System: A Study Based on Using Graphic Calculators in the Classroom. National Pedagogical University, Tlalpan, Mexico.

Crowley, L., Thomas, M. and Tall, D., (1994). Algebra, symbols, and traslation of meaning. Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.
Douady, R., (1997). Didactic engineering. In Nunes, T. and Bryant, P. Learning and Teaching mathematics: An International Perspective. Hove, East Sussex: Psychology press Ltd.
Furinghetti, F. and Paola, D., (1994). Parameters, unknowns and variables: a little difference? Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of mathematics Education.
García, J, M., (1995). Matemáticas 1. Estrategias, teoría, problemas y ejercicios. Editorial Esfinge, México.
Gray, E. M. and Tall, D. O., (1993). Succes and failure in mathematics: the flexible meaning of symbols as process and concept. Mathematics Teaching.
Gray, E. M. and Tall, D. O., (1994). Duality, ambiguity and flexibility: a proceptual view of simple arithmetic. Journal for Research in Mathematics Education.
Harper, E., (1997). Ghosts of Diophantus. Educational Studies in Mathematics.
Hart, K., (1981). children's Understanding of mathematics. London: John Murray.
Hembree, R and Dessart, D., (1992). "Research on Calculators in Mathematics Education". In calculators in Mathematics Education, 1992 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, edited by James T. Fey, Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.
Kaput, J. J., (1987). Towards a theory of symbol use in mathematics. In Javier, C. (ed.) Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics. London: Lawrence Erlbaum Associates.
Kieran, C., (1989). The early language of algebra: a structural perspective. In Warner, S. and Kieran, C. (eds) Research Issues in the Learning and Teaching of algebra. Virginia: National Council of Mathematics Teachers (Lawrence Erlbaum associates).
Küchemann, D. E., (1980). The Understanding of Generalised Arithmetic by Secondary School Children. Unpublished Doctoral Dissertation, Chelsea College, University of London.
Lapp, D. A., (1999). Mathematics Teacher, Vol. 92, No 2, febrero.
Ledesma, R. M., (1994). Apoyos didácticos para la enseñanza de la factorización algebraica. (reportes de investigación educativa).
Lee, L. And Wheeler, D., (1989). The arithmetic connection. Educational Studies in mathematics.
Linaza, J., L., (1989). Jerome Bruner; Acción, pensamiento y lenguaje, Alianza Psicología.
Linchevski, L and Herscovics, N., (1994). Cognitive obstacles in pre-algebra. Proceedings of the 18th conference of the International Group for the Psychology of mathematics Education.

Mason, J., (1987). Representing representing. In Janvier, C. (ed.) Problems of Representation in the Teaching and Learning of mathematics. London: Lawrence Erlbaum Associates.

Miles, M. and Huberman, (1984). Qualitative Data Analisis, a sourcebook of new methods. SAGE Publications, London.

Nickson, M., (2000). Teaching and Learning. A teacher،s Guide to Recent Research and its Application, Cassell Education.

Noddings, N, (1993). Politicizing the mathematics classroom. In Restivo, S., Van Bendegem, J. P. and Fischer, R. (eds) Math Worlds: Philosophical and Social Studies of Mathematics and Mathematics Education. Albany: State University of New York.

Plan Nacional de Educación, (2001-2006). Secretaría de Educación Pública.

Plan y Programas de estudio (1993). Educación básica. Secundaria. Elaborado en la Dirección General de la Secretaria de Educación Básica y Normal. Segunda edición.

Redden, T., (1994). Alternative pathways in the transition from arithmetic thinking to algebraic thinking. Proceedings of the 18th Conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education.

Resnick, B, y Ford, W. (1990). La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos. Tr. Alejandro Pareja. Barcelona: Paidos.

Saenz-Ludlow, A. and Waldgrave, C., (1998). Third Graders' interpretations of equality and the equal symbol. Educational Studies in Mathematics.

Sfard, A., (1989). Transition from operacional to conceptual construction: the notion of function revisited. In Vergnaud, G., Rogalski, J. and Artigue, M. (eds) Proceedings of the 13th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Sfard, A., (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on proceses and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics.

Socas, M. y Camacho M., (1996). Iniciación al álgebra, Matemáticas cultura y aprendizaje. Editorial Síntesis, Madrid,.

Skovsmose, O., (1994). Twoards a Philosophy of Critical Mathematics education Dodrecht. The Netherlands: Kluwer academic Publishers.

Stacey, K. and MacGregor, M., (1994). Algebraic sums and products: students' concepts and symbolism. Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Sutherland, R., (1987). A study of the use and understanding of algebra related concepts wishin a logo environment. In Bergeron, J. C. Herscovics, N and Kieran, C. (eds) Proceedings of the 11th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Szendrei, J., (1996). "Concrete materials in the classroom. En International Handbook of Mathematics Education, part one. Bishop, Alan et al (eds.). Kluwer Academic Publishers Dordrecht. The Netherlands.

Tall, D. O. and Thomas, M. O., (1991). Encouraging versatile thinking in algebra using the computer. Educational Studies in mathematics.

Underhill, R. G., (1991). Two Jayers of constructivist interaction. In von Glaserfeld, E. (ed.) (1991). Radical Constructivism in Mathematics Education. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Vygotsky, L., S., (1934). Thought on lenguaje, Cambridge ass.: M.I.T pies 1962.

Vergnand, G., (1997). The nature of mathematical concepts. In Nunes, T. and Bryant, P. (eds) Learning and teaching Mathematics: An International Perspective. Hove, East Ssser Psychology Press Ltd.

Waits, B and Demana, F., (2001). Calculators in mathematics Teaching and Learning: Past, Present and future. In Technology and the Mathematics Classroom, Part. 2. National Council of Teachers of Mathematics.

Wong, M. P. B., (1997). Numbers versus letters in algebraic manipulation: which is more difficult? Proceedings of the 21th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.

ANEXO 1

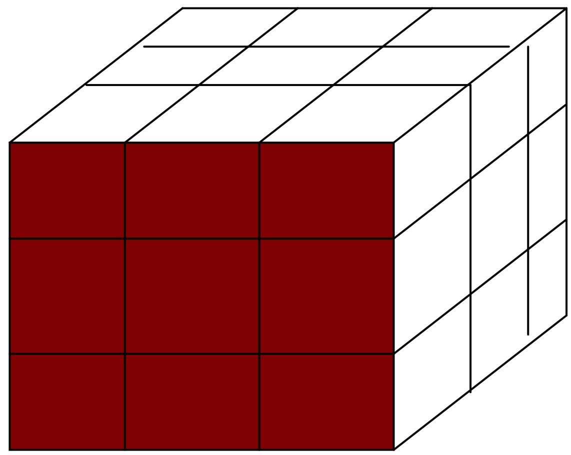
Hojas de trabajo para la fase preparatoria

Uso de materiales manipulables

HOJA DE TRABAJO 1

EL CUBO ROJO

Observa el cubo y contesta lo que se te pide.

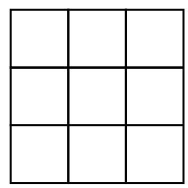


1. ¿Cuántos cubos pequeños forman el cubo grande? ________________________
2. Imagina que al cubo grande, sin desarmarlo, lo pintamos, pero aún se ven las divisiones de los cubos pequeños.
3. ¿En cuántos cubos pequeños sólo quedaron pintadas tres caras? __________ ____
4. ¿En cuántos cubos pequeños quedaron sólo dos caras pintadas? ____
5. ¿ En cuántos cubos pequeños quedó sólo una cara pintada? _____________
6. Habrán quedado cubos sin pintar ¿Cuántos? ___________________________
7. Explica cómo razonaste para dar esas respuestas de manera que cualquiera de tus compañeros pueda entenderte. ___________________________________
____
____
____
____
____
____

HOJA DE TRABAJO 2

MISCELÁNEA CON PALILLOS

Para realizar la siguiente actividad utiliza los palillos que te proporcionará el maestro. Acomoda 24 palillos como lo muestra la figura.



Después quítale cuatro palillos de manera que queden sólo cinco cuadrados.

Dibuja cómo quedan ordenados los palillos.

HOJA DE TRABAJO 3

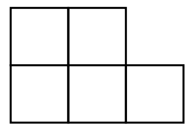
Acomoda los palillos como lo muestra la figura.

Obtén tres cuadrados del mismo tamaño que los originales, quitando cinco palillos.

Dibuja cómo quedan ordenados los palillos.

HOJA DE TRABAJO 4

Acomoda los palillos para formar una figura como la siguiente.



Quita tres palillos de modo que queden tres cuadros del mismo tamaño. No deben quedarte palillos sueltos.

Dibuja cómo quedan ordenados los palillos.

HOJA DE TRABAJO 5

El maestro te facilitará 12 palillos, forma con ellos una figura que contenga cinco cuadrados. No todos los cuadrados deben ser del mismo tamaño.

Dibuja cómo quedan ordenados los palillos.

A la figura que formaste quítale dos palillos de manera que te quede una figura formada por sólo dos cuadrados.

Dibuja cómo quedan los palillos.

HOJA DE TRABAJO 6

Con los palillos y fichas que te proporcionará el maestro, coloca 10 monedas en cinco filas, con cuatro monedas en cada fila.

Dibuja en el espacio siguiente la figura que encontraste.

Explica qué hiciste para construir la figura, de tal forma que tus compañeros te entiendan. ____
____
____
____
____
____
____
____
____

HOJA DE TRABAJO 7

DOMINÓ DE PORCENTAJES Y FRACCIONES

Forma un equipo con tres de tus compañeros, utiliza el dominó que te proporcionará el maestro, sigue las reglas para jugarlo.

Reglas

1. Reparte las fichas entre los miembros del equipo (4).
2. Se les llama "mulas" a las fichas que tienen el mismo número en ambas mitades. Pide a tus compañeros que encuentren la "mula más grande" (la que se muestra abajo). Quien encuentre esa ficha comienza el juego.

1	**100%**

3. Los demás integrantes, en el orden que les toca, buscarán una ficha que se acomode con la que se tiró en la jugada anterior.

4. Gana el alumno que se quede con menos fichas (si todos tienen el mismo número de fichas, deberán sumar los valores numéricos y gana el que tenga el valor más bajo).

5. En este juego puedes relacionar tanto fracciones equivalentes como cantidades iguales.

HOJA DE TRABAJO 8

El maestro te facilitará un tangram de siete piezas, las cuales forman un cuadrado de 12 cm por lado. Las siete piezas tienen en total 144 cm cuadrados de área.

Con cinco piezas del tangram forma un barco y anota que fracción del total del área del tangram es el área del barco ____

Dibuja tu barco de manera que se vea qué piezas del tangram usaste.

¿Qué piezas ocupan un cuarto de 144 cm cuadrados? _________________________
su área es de ________ cm cuadrados.

¿Qué triángulo mide 1/8 de 144 cm cuadrados? ______________________________

HOJA DE TRABAJO 9

Con las piezas del tangram construye las figuras que se te piden.

Elige dos piezas del tangram de manera que el área de las dos piezas juntas sea 1/8 del área total, y que con ellas puedas formar un cuadrado. En el espacio siguiente dibuja cómo queda el cuadrado que hiciste de manera que se vean las piezas que usaste.

Elige tres piezas del tangram de manera que el área de las tres piezas juntas sea 1/4 del área total, y que con ellas puedas formar un cuadrado. En el espacio siguiente dibuja cómo queda el cuadrado que hiciste de manera que se vean las piezas que usaste.

Elige cuatro piezas del tangram de manera que el área de las cuatro piezas juntas sea 1/2 del área total, y que con ellas puedas formar un cuadrado. En el espacio siguiente dibuja cómo queda el cuadrado que hiciste de manera que se vean las piezas que usaste.

Elige cinco piezas que al juntarlas tengan la mitad del área total del tangram Con ellas construye un cuadrado. Dibuja como queda el cuadrado de manera que se vean las piezas que usaste.

HOJA DE TRABAJO 10

Utiliza las piezas del tangram para realizar las siguientes actividades.

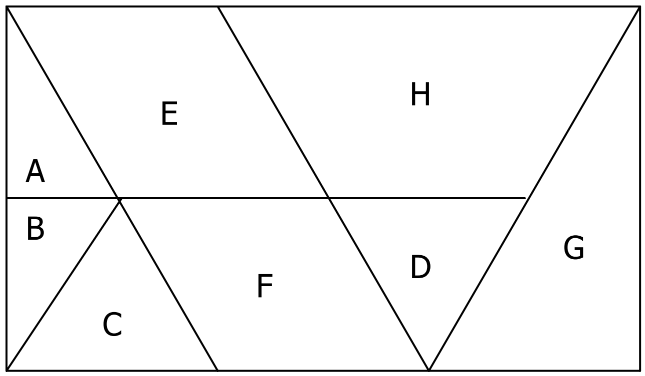
¿Cuántos triángulos pueden formarse con tres piezas del tangram?

Dibuja cómo los formaste.

El área de cada triángulo __________ del área total del tangram

HOJA DE TRABAJO 11

Recorta las piezas del tangram y utilízalas para solucionar la siguiente situación.



Con 3 piezas del tangram construye un rectángulo cuya área sea ¼ del área total del tangram y dibújalo en el siguiente espacio.

HOJA DE TRABAJO 12

Utiliza las piezas del tangram rectangular para construir las figuras que a continuación se te piden.

1. Con cuatro piezas del tangram forma un rectángulo, dibuja cómo quedan acomodadas.

2. Con ½ de las piezas del tangram forma un rectángulo, dibuja cómo quedan acomodadas en el siguiente espacio.

3. Construye un cuadrado con seis piezas, de manera que el área del cuadrado sea 2/3 del área del tangram rectangular.

HOJA DE TRABAJO 13

Un granjero tiene nueve cerditos que no pueden estar juntos porque pelean entre sí. El corral que tiene ese granjero es un cuadrado como el de la figura de abajo. Te invitamos a participar en este juego. El juego consiste en que dibujes dos cuadrados adentro del corral cuadrado de la figura, de manera que quede dividido en nueve corrales más pequeños para que cada cerdito quede en un espacio independiente.

El maestro te proporcionará nueve cerditos para que los acomodes cada uno en su corral.

Dibuja en el cuadrado de abajo cómo quedan acomodados los cerditos en los corales que construiste.

FASE PREPARATORIA

Uso de la calculadora

HOJA DE TRABAJO 1

VALOR POSICIONAL

Escribe en la calculadora el número **796182453**. Supongamos que los nueve dígitos que forman ese número son "invasores espaciales". Para salvar al planeta debes "eliminarlos" uno por uno convirtiéndolos en cero haciendo una sola operación con el número 796182453 y otro número que tú propongas. Por ejemplo, eliminar al "1" quiere decir que hagas una operación para que el número 796**1**82453 cambie a 796**0**82453. Después de que elimines al 1 debes eliminar al 2, luego el 3, y así sucesivamente.

1. Completa la siguiente tabla para mostrar cómo eliminaste a cada "invasor".

Dígito	Operación que hiciste en la calculadora	Resultado
1		796082453
2		796080453
3		796080450
4		796080050
5		796080000
6		790080000
7		90080000
8		90000000
9		0

2. Ahora elimina uno por uno cada uno de los dígitos del número 4983.26715. Completa la siguiente tabla para mostrar cómo eliminaste a cada "invasor".

Dígito	Operación que hiciste en la calculadora	Resultado
1		4983.26705
2		4983.06705
3		4980.06705
4		980.06705
5		980.0670
6		980.0070
7		980
8		900
9		0

HOJA DE TRABAJO 2

LECTURA Y ESCRITURA DE NÚMEROS

1. Escribe en la calculadora los números que están descritos con palabras. Cuando vayas escribiendo los números ve haciendo con la calculadora las sumas que se indican. Si leíste y escribiste correctamente cada cantidad obtendrás el total que se indica. Si el total que obtuviste es diferente del que se indica, busca y corrige el error que cometiste. Cuando hayas producido los números correctos escríbelos en el cuadro de la derecha.

CANTIDADES EN PALABRAS	CANTIDADES CON NÚMEROS
a) siete millones setecientos ochenta mil cuatro, más ciento veinticinco mil cinco, más doce mil uno, más trescientos cuarenta y cinco mil ochenta y siete. **TOTAL:** ________________	____________ + ____________ + ____________ + ____________ **TOTAL: 8262097**
b) trece mil noventa y nueve más veinticinco millones ciento cinco, más ciento veintiocho millones ochenta y seis, más trescientos cinco mil uno. **TOTAL:** ________________	____________ + ____________ + ____________ + ____________ **TOTAL: 153318291**
c) cuatrocientos treinta y seis mil cien, más un millón dos mil, más quinientos mil veinte, más trescientos mil treinta. **TOTAL:** ________________	____________ + ____________ + ____________ + ____________ **TOTAL: 2238150**
d) diez millones uno, más dos millones cien, más treinta y siete mil uno, más quinientos cuarenta mil diez. **TOTAL:** ________________	____________ + ____________ + ____________ + ____________ **TOTAL: 12577112**

2. Inventa una suma con cuatro sumandos como las anteriores. Usa números tan complicados como te sea posible. Verifica que el total que obtienes es el mismo que el que se indica.

CANTIDADES EN PALABRAS	CANTIDADES CON NÚMEROS
________________ más ________________ más ________________ más ________________ **TOTAL:** ________________	____________ + ____________ + ____________ + ____________ **TOTAL: 4000136**

HOJA DE TRABAJO 3

EQUIVALENCIA NUMÉRICA

1. En cada recuadro construye una representación distinta del número quinientos nueve. **No puedes usar las teclas del 5 y el 9.** Intenta usar en cada una de tus respuestas **cuatro operaciones distintas**. Usa tu calculadora para comprobar tus respuestas.

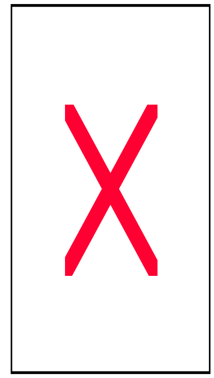
2. En cada recuadro construye el número trescientos doce. **Debes usar cuatro operaciones distintas y no puedes usar las teclas del 3 y el 1**. Encuentra tantas formas distintas como te sea posible y escríbelas en los siguientes espacios.

3. Construye en la calculadora el número mil doscientos veintidós. **Debes usar cuatro operaciones distintas y no puedes usar las teclas del 1 y el 2**. En cada recuadro escribe al menos dos representaciones distintas de ese número.

4. En cada recuadro construye al menos una representación distinta del número cuatrocientos uno **sin usar las teclas del 4 y el 1**.

HOJA DE TRABAJO 4

DEL CERO AL CIEN SÓLO CON "CUATROS"



Una alumna encontró que puede construir con la calculadora los números del cero al cien usando sólo el número 4 y las teclas

+ − × ÷ √

Por ejemplo, el cero puede construirse como sigue: 4÷4–4÷4. El 10 puede construirse como sigue: $4+4+\sqrt{4}$. El 3 puede obtenerse como (4+4+4)÷4. Otra regla de este juego es <u>que no es válido escribir números</u> como 44+44=88.

1. El cero y el diez están en la siguiente lista, encuentra otras formas de escribirlos. De la misma manera, intenta encontrar al menos dos formas distintas de escribir sólo con cuatro "cuatros" los demás números de la lista. Los casos que te parezcan más difíciles resuélvelos usando más de cuatro "cuatros".

Núm.	RESPUESTAS	Núm.	RESPUESTAS	Núm.	RESPUESTAS
0		27		58	
2		31		63	
3		35		64	
5		36		69	
9		40		75	
10		48		83	
13		49		89	
18		51		94	
22		52		100	

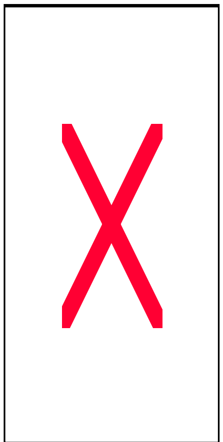
2. Un alumno dice que 4+4+4÷4=3. Uno de sus compañeros dice que eso no está bien, que el resultado correcto es 9. ¿Estás de acuerdo con alguno de ellos? Justifica tu respuesta. ____
____

3. ¿Qué resultado produce la calculadora si realizas la operación 4÷4+4×4? ____________________ Explica por qué obtienes ese resultado con la calculadora. ____
____

4. Sin cambiar ninguna operación ni ningún número, ¿puedes "arreglar" la operación 4+4+4÷4 para que dé como resultado 3,? ¿Cómo lo harías? ______________________________
____

HOJA DE TRABAJO 5

¡AL CERO EN CINCO PASOS!



Esta hoja presenta juego matemático que consiste en lo siguiente:

Se trata de reducir a cero un número que esté entre cero y mil. Puedes hacer esto mediante sumas, restas, multiplicaciones o divisiones. Puedes repetir una operación las veces que quieras.

Las operaciones deben hacerse con el número que se da y otro número entero que tú elijas. El número que elijas debe ser uno de los siguientes: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, o 9. Puedes usar el número que elijas las veces que quieras.

Cada operación que hagas se cuenta como un paso y el resultado de cada operación que hagas <u>debe ser un número entero</u>.

Ganas el juego si, **<u>a lo más en cinco pasos</u>,** puedes reducir a cero cada uno de los siguientes números.

EJEMPLO: REDUZCAMOS A CERO EL NÚMERO 869.

Paso 1:	$869 - 5 = 864$
Paso 2:	$864 \div 9 = 96$
Paso 3:	$96 \div 8 = 12$
Paso 4:	$12 \div 6 = 2$
Paso 5:	$2 - 2 = 0$

Usa la calculadora para encontrar distintas maneras de reducir a cero los siguientes números:

a) 789	b) 629	c) 823
Paso 1: Paso 2: Paso 3: Paso 4: Paso 5:	Paso 1: Paso 2: Paso 3: Paso 4: Paso 5:	Paso 1: Paso 2: Paso 3: Paso 4: Paso 5:

d) 952	e) 997	f) 857
Paso 1: Paso 2: Paso 3: Paso 4: Paso 5:	Paso 1: Paso 2: Paso 3: Paso 4: Paso 5:	Paso 1: Paso 2: Paso 3: Paso 4: Paso 5:

HOJA DE TRABAJO 6

SUMA Y ESTIMACIÓN

1. En cada inciso escribe dos números tal que al sumarlos den por resultado el número que se indica.

0.321	**0.457**	**1.305**
a)	d)	g)
b)	e)	h)
c)	f)	i)
0.4056	**1.00506**	**3.040578**
j)	m)	o)
k)	n)	p)
l)	ñ)	q)

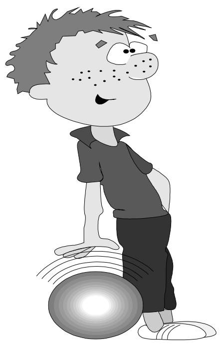
2. ¿Qué hiciste para obtener los números que se piden en el inciso 1? Describe tu método de manera que cualquiera de tus compañeros lo entienda. Si quieres hazlo con un ejemplo
____
____
____
____

3. En cada inciso escribe tres números tal que al sumarlos den por resultado el número que se da. Los números que uses en cada inciso deben ser distintos y ninguno de los sumandos debe ser cero. Usa la calculadora para comprobar tus respuestas, no debes tener ningún error.

0.7101	**0.2003**	**0.3015**
a)	d)	g)
b)	e)	h)
c)	f)	i)

HOJA DE TRABAJO 7

RESTA Y ESTIMACIÓN



1. En cada inciso escribe dos números tales que, al restar uno del otro, den por resultado el número que se da.

0.425	**0.307**	**2.0056**
a)	d)	g)
b)	e)	h)
c)	f)	i)
0.509	**3.05608**	**19.50807**
j)	m)	o)
k)	n)	p)
l)	ñ)	q)

2. ¿Qué hiciste para encontrar los números que se piden en el inciso 1? Describe tu método de manera que cualquiera de tus compañeros lo entienda. Si quieres hazlo con un ejemplo
____
____

3. Encuentra los números que faltan en cada inciso. Escribe en cada espacio las operaciones que hagas para obtener tus respuestas. **Usa la calculadora para comprobar tus respuestas, no debes tener ningún error**.

a) $x - 0.01012 = 4.576$	b) $y - 0.10203 = 1.079$	c) $0.30076 - w = 3.45$

HOJA DE TRABAJO 8

LECTURA Y ESCRITURA DE NÚMEROS DECIMALES

1. Escribe en la calculadora los números que están descritos con palabras. Cuando vayas escribiendo los números ve haciendo con la calculadora las sumas que se indican. Si leíste y escribiste correctamente cada cantidad obtendrás el total que se indica. Si el total que obtuviste es diferente del que se indica, busca y corrige el error que cometiste. Cuando hayas producido los números correctos escríbelos en el cuadro de la derecha.

CANTIDADES EN PALABRAS	CANTIDADES CON NÚMEROS
a) Un entero cuatro centésimos, más tres milésimos, más dos enteros setenta milésimos, más veinticinco milésimos. **TOTAL:** ____________________	____________ + ____________ + ____________ + ____________ **TOTAL: 3.138**
b) Mil un enteros un centésimo, más dos mil noventa y nueve enteros diez centésimos, más cuarenta mil siete enteros un diez milésimo, más veintitrés mil diez enteros diez milésimos. **TOTAL:** ____________________	____________ + ____________ + ____________ + ____________ **TOTAL: 66117.1201**
c) Treinta y ocho mil veinte enteros veinte milésimos, más treinta mil tres enteros treinta y siete diez milésimos, más cuarenta y dos mil treinta y un enteros treinta milésimos, más un entero dos milésimos. **TOTAL:** ____________________	____________ + ____________ + ____________ + ____________ **TOTAL: 110055.0557**
d) Diez millones uno, más dos millones cien, más treinta y siete mil uno, más quinientos cuarenta mil diez. **TOTAL:** ____________________	____________ + ____________ + ____________ + ____________ **TOTAL: 12577112**

2. Inventa una suma con cuatro sumandos como las anteriores. Usa números tan complicados como te sea posible. Verifica que el total que obtienes es el mismo que el que se indica.

CANTIDADES EN PALABRAS	CANTIDADES CON NÚMEROS
____________________ , más ____________________, más ____________________, más ____________________ . **TOTAL:** ____________________	____________ + ____________ + ____________ + ____________ **TOTAL: 38001.036**

HOJA DE TRABAJO 9

LECTURA Y ESCRITURA DE MEDIDAS DE LONGITUD

1. Usa números decimales para escribir en la calculadora las medidas que están descritas con palabras. Cuando vayas escribiendo los números ve haciendo con la calculadora las sumas que se indican. Si leíste y escribiste correctamente cada cantidad obtendrás el total que se indica. Si el total que obtuviste es diferente del que se indica, busca y corrige el error que cometiste. Cuando hayas producido los números correctos escríbelos en el cuadro de la derecha.

MEDIDAS EXPRESADAS CON PALABRAS	MEDIDAS EXPRESADAS CON NÚMEROS
a) Un metro dos centímetros, más tres milímetros, más dos centímetros, más tres centímetros dos milímetros. **TOTAL:** ______________________	______________ + ______________ + ______________ + ______________ **TOTAL: 1.075 metros**
b) Treinta metros cuarenta centímetros, más dos kilómetros veinticinco metros cuatro centímetros, más tres metros cuatro milímetros, más cuatro metros treinta y dos centímetros un milímetro. **TOTAL:** ______________________	______________ + ______________ + ______________ + ______________ **TOTAL: 2062.765 metros**
c) Seis kilómetros ocho metros, más dos hectómetros cinco metros tres centímetros, más dos decámetros cuarenta y ocho milímetros, más veintiséis metros treinta y siete milímetros. **TOTAL:** ______________________	______________ + ______________ + ______________ + ______________ **TOTAL: 6259.115 metros**
d) Cien kilómetros diez metros cuarenta y ocho centímetros, más cincuenta kilómetros dos metros nueve milímetros, más cuarenta y nueve kilómetros y medio, más dos kilómetros y medio, treinta y seis milímetros. **TOTAL:** ______________________	______________ + ______________ + ______________ + ______________ **TOTAL: 202012.525 metros**

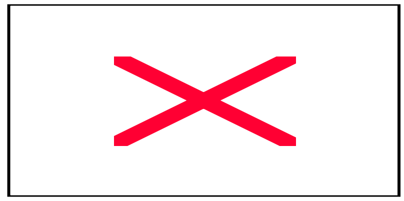
2. Inventa una suma con cuatro sumandos como las anteriores. Usa medidas de longitud tan complicadas como te sea posible. Verifica que el total que obtienes es el mismo que el que se indica.

MEDIDAS EXPRESADAS CON PALABRAS	MEDIDAS CON NÚMEROS
______________________ más ______________________ , más ______________________ , más ______________________ **TOTAL:** ______________________	______________ + ______________ + ______________ + ______________ **TOTAL: 38001.036 metros**

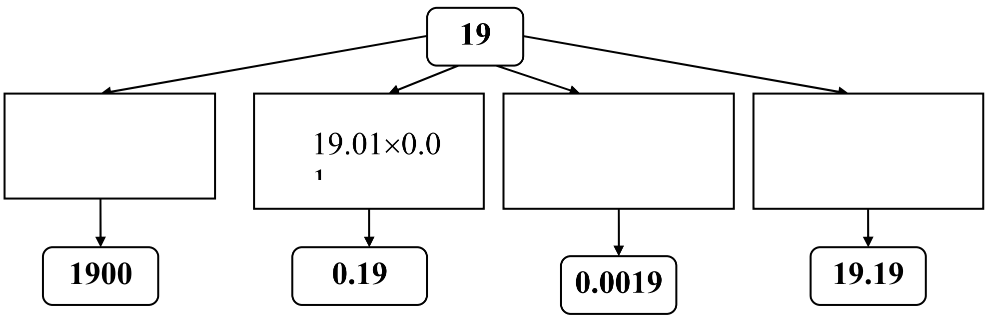
HOJA DE TRABAJO 10

TRANSFORMACIONES EN UN SOLO PASO

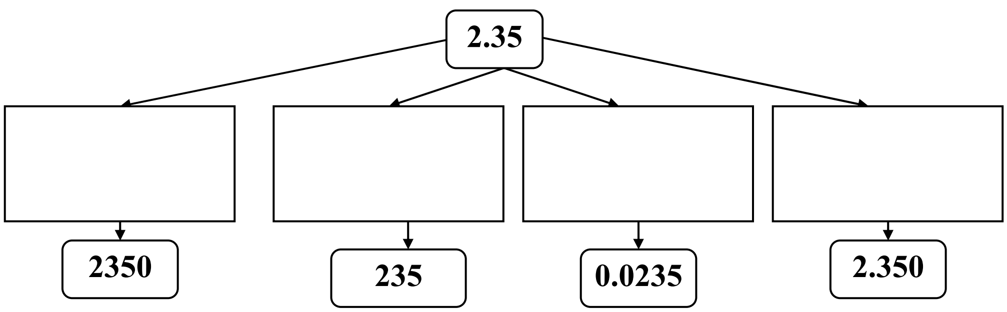
Encuentra **al menos** dos formas para obtener los números de abajo a partir del número de arriba.



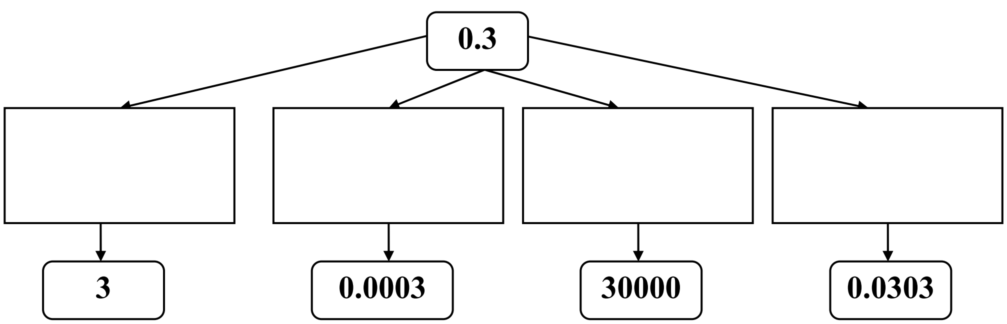
1.



2.



3.



4. Una alumna dice que 1.5 es igual 1.5000. ¿Tiene razón? ___________ ¿Por qué? _______

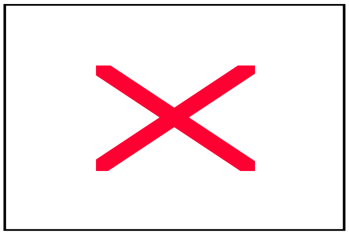
____

____

____

HOJA DE TRABAJO 11

¡SE DESCOMPUSO LA TECLA DEL PUNTO DECIMAL!



Supongamos que la tecla del punto decimal se descompuso. Encuentra **al menos dos maneras distintas** de producir con la calculadora cada uno de los siguientes números <u>sin usar la tecla del punto decimal</u>. En cada cuadro escribe lo que hiciste en la calculadora para obtener lo que se indica.

a) 0.5	**b) 1.5**	**c) 0.3**
d) 23.4	**e) 10.1**	**f) 1342.58**
g) 19876.035	**h) 10003.002**	**i) 0.00034**
j) 3333.333	**k) 0.02**	**l) 3.25**

ESTUDIO PRINCIPAL

Hojas de trabajo para el uso de material manipulable.

HOJA DE TRABAJO 1

Con los manipulables que te dará el maestro, costruye figuras que tengan similitudes. Un alumno de otra secundaria construyó estas figuras.

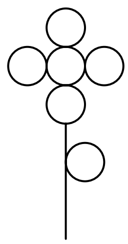
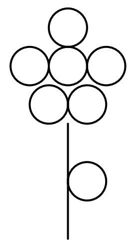
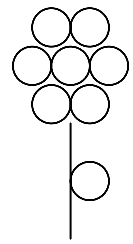
		

Figura 1	Figura 2	Figura 3

Nos dijo que la similitud es que todas son flores y estan formadas por círculos, palillos y cada flor aumenta un círculo. Nosotros le dijimos que a esas similitudes que encontró, también les puede decir patrones.

Ahora intenta crear alguna figura que tenga alguna similitud, apóyate de los materiales y dibújalas en el espacio.

Dinos cual es esa similitud que encontraste con los manipulables, de manera que lo pueda entender cualquiera de tus compañeros. ____

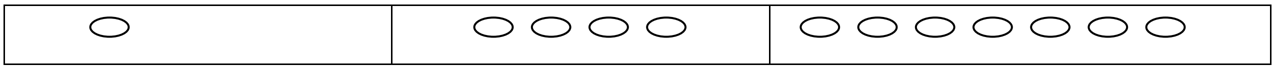
____

____

____

HOJA DE TRABAJO 2

Tu maestro te dará un montón de frijoles. Con ellos forma secuencias donde se manifieste un patrón de comportamiento, como se muestra en el ejemplo:



Desafío

1. ¿Puedes dibujar o escribir el número de canicas que faltan?

Figura 1 ------> oo

Figura 2 ------> oooo

Figura 3 ------> oooooo

Figura 4 ------> oooooooo

Figura 5 ------> oooooooooo

Figura 6 ------>____________________________________

Figura 7 ------>____________________________________

Figura 8 ------> oooooooooooooooooo

Figura 9 ------>____________________________________

Figura 10 ------>___________________________________

Figura 11 -----> oooooooooooooooooooo

Figura 12 -----> ___________________________________

Figura 13 -----> ___________________________________

Figura 14 -----> ___________________________________

Figura 15 -----> ___________________________________

Escribe cómo le hiciste para saberlo. ____

____

____

____

HOJA DE TRABAJO 3

1. Con los materiales que te proporcionó él maestro continua la secuencia, dibuja los frijoles que faltan en algunas figuras.

Figura 1 -----> ooo

Figura 2 -----> oooooo

Figura 3 -----> ooooooooo

Figura 4 -----> oooooooooooo

Figura 5 -----> ooooooooooooooo

Figura 6 -----> ______________________________

Figura 7 -----> ______________________________

Figura 8 -----> oooooooooooooooooooooooo

Figura 9 -----> ______________________________

Figura 10 ---> ______________________________

2. Hay una figura en la que sabemos que hay 54 canicas. pero falta el número de la figura. Al número de esa figura le llamaremos "n", ¿qué número representa la letra "n"? ____

Figura "n" ----->   =54

Anota el procedimiento que seguiste para encontrar el número que corresponde a la letra "n". Hazlo de manera que cualquiera de tus compañeros lo entienda.

____

____

____

____

¿Habrá una regla o formula que te permita expresar lo que hiciste? ¿Cuál es?

____

____

HOJA DE TRABAJO 4

Usa las tarjetas numeradas que té proporcionó el maestro para construir las series numéricas que se te proponen. Anota los siguientes cinco números de cada sucesión.

Sucesión a	**2**	**5**	**8**	**11**				

Sucesión b	**1**	**5**	**9**	**13**				

Elige una de esas sucesiones y explica cuál es su patrón de comportamiento ____
____
____
____
____

Un patrón se puede describir usando variables, una variable es una letra que se usa para representar cualquier número. Una variable te permite expresar en forma breve relaciones entre números, figuras o juegos. Por ejemplo, la sucesión "a" expresada con variables queda así: Q+3.

El patrón del comportamiento de la sucesión que elegiste en la pregunta anterior se puede expresar mediante una regla o fórmula. ¿Cuál es? Anótala. _________________
____
____
____

Utilizando una variable para expresar el patrón numérico de la sucesión "b" ____

HOJA DE TRABAJO 5

Con las tarjetas numeradas que te proporciono el maestro continúa la secuencia numérica de manera similar a la del ejemplo:

Sucesión	90	84	78	72				
	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°

¿Qué número de tarjeta se encontrará en el 15° lugar? ____________________________

____

¿Qué hiciste para conocer el número de la tarjeta? Explícalo de tal forma que tus compañeros lo entiendan, trata de expresarlo mediante una regla o fórmula ___________

____

____

HOJA DE TRABAJO 6

1. Continúa la secuencia escribiendo los siguientes cinco números de la sucesión.

16	**18**	**14**	**20**	**12**	**22**				

¿Cómo le hiciste para saber que número continuaba? Explícalo de manera que tus compañeros lo entiendan ____

____

____

____

2. Inventa otra sucesión y represéntala con las tarjetas que te proporcionó el maestro. Anota los primeros quince números de la sucesión que inventaste.

3. Expresa mediante una regla o fórmula el patrón de la sucesión que construiste

____

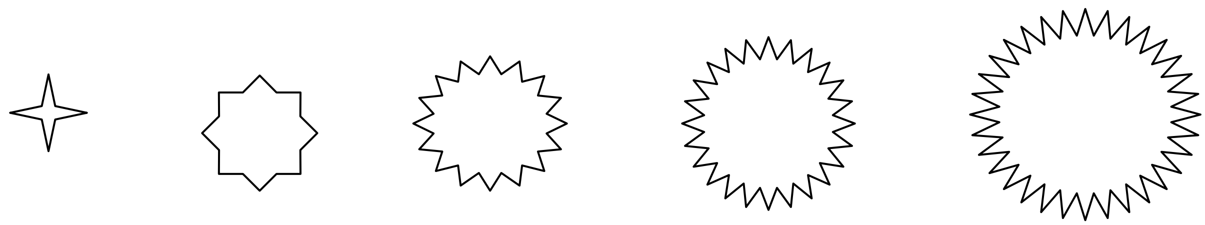
____

____

____

HOJA DE TRABAJO 7

Tu profesor te proporcionará materiales con los que podrás construir figuras similares a las que se muestran. Cada "pico" de la estrella le llamaremos "destello".



1. Completa la siguiente tabla.

No. de figura	1	2	3	4	5
No. de destello					

¿Cuántos destellos tendrá la figura 68? ______________________________

Puedes explicar cómo le hiciste para saberlo, anótalo. ______________________

____

____

____

2. Desafío

¿Qué número se encontrará en el lugar 84?

1o.	2o.	3º....	84º
42	43	44	

¿Cómo le hiciste para saberlo? Explícalo con tus propias palabras y trata de expresarlo mediante una regla. ______________________________________

____

____

____

HOJA DE TRABAJO 8

Observa las figuras y usa los materiales que te proporcionará el maestro para construir secuencias de manera que encuentres el número de círculos que te piden en las diferentes figuras.

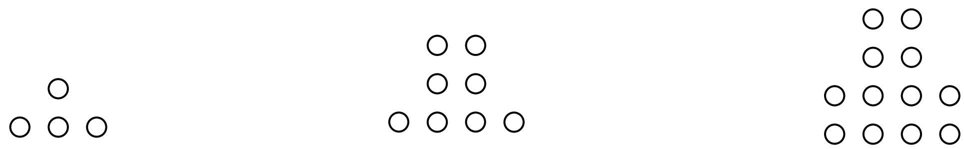


Fig.1 Fig. 2 Fig. 3

Dibuja las dos figuras que continúan la secuencia.

De acuerdo con la secuencia de figuras, ¿Cuántos círculos tendrá la figura 25? ______________________________

Con cuántos círculos se formará la figura 137 ______________________________

____

Explica cómo le hiciste para saber el número de círculos con los que se forma la fig. 137, procura que tu explicación pueda entenderla cualquiera de tus compañeros. Si encontraste alguna regla o patrón escríbela y explícala. ______________________________

____

____

HOJA DE TRABAJO 9

Observa las siguientes figuras.

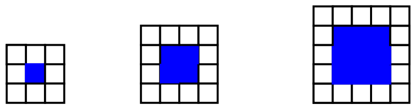


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

1. Con los materiales que te facilitará él maestro continua la secuencia de figuras. Dibuja en el espacio de abajo las tres figuras que siguen.

2. ¿Cuál es el patrón de comportamiento que relaciona al número de la figura con el número de cuadrados que forman el marco de cada una? ______________________ ____.

3. Expresa ese patrón de comportamiento mediante una fórmula. __________________

4. ¿Cuántos cuadrados se necesitan para construir el marco del cuadrado negro en la figura que va en el lugar 27? ____

5. ¿Cuántos cuadrados s necesitan para formar el marco de la figura 53? ___________ ____

6. Explica cómo le hiciste para encontrar el número de cuadros que se necesitan, de manera que cualquiera de tus compañeros pueda entenderlo. Trata de expresarlo mediante una regla o formula. ____ ____ ____

HOJA DE TRABAJO 10

Las figuras dibujadas que a continuación se presentan están formadas con cerillos, obsérvalas, notarás que hace falta completar la secuencia. Con ayuda de cerillos que te proporcionara el maestro continua completando las figuras y dibuja las que hacen falta.

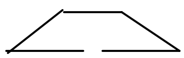


Fig. 1

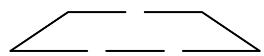


Fig. 2

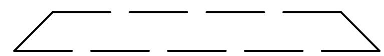


Fig. 4

1. En el espacio de abajo dibuja la figura 3

2. ¿Cuántos cerillos tendrá la figura 15? ______________________________
3. ¿Cuántos cerillos tendrá la figura 75? ______________________________

Explica cómo le hiciste para encontrar el número de cerillos, de manera que cualquiera de tus compañeros pueda entenderte.____
____
____

HOJA DE TRABAJO 11

Las figuras que a continuación se presentan están formadas con triángulos, obsérvalas, notarás que hace falta completar la secuencia.

1. Con ayuda de los triángulos que te proporcionará el maestro dibuja en el espacio de abajo la figura que falta y las tres figuras que siguen.

				△
				△ △
		△		△ △ △
	△	△ △		△ △ △ △
△	△ △	△ △ △		△ △ △ △ △
Fig. 1	Fig. 2	Fig. 3	Fig. 4	Fig. 5

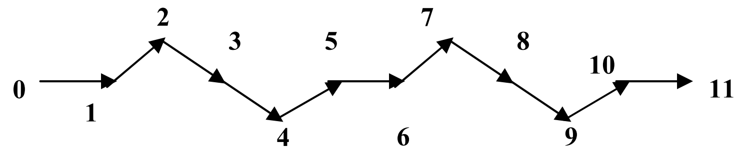
Ahora contesta lo que se te pide.

2. ¿Cuántos triángulos tendrá la figura 20? ______________________ ¿Cuántos triángulos tendrá la figura 137? ____
3. ¿Cómo le hiciste para encontrar la respuesta?. Procura explicarlo de manera que tus compañeros puedan entenderlo. ________________________________
____
____

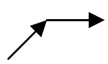
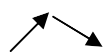
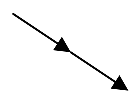
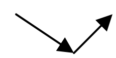
Expresarlo mediante una regla o formula. _______________________________________

HOJA DE TRABAJO 12

Si el camino sigue siempre el mismo patrón, ¿cuál es la sucesión de flechas que va de 1999 a 2001?.



Elige una de las siguientes opciones para dar tu respuesta. Puedes auxiliarte del material que se te proporciona.

a)  b)  c)  d) 

Explica Cómo le hiciste para dar tu respuesta de manera que tus compañeros pueda entenderlo. ____

____

____

____

Expresa la regla o formula que te permitió conocer la respuesta.______________________

____

____

HOJA DE TRABAJO 13

Observa la secuencia y contesta lo que se pide en cada caso, puedes hacer uso de los cuadrados que te proporciona el maestro para representar las figuras. le llamaremos vértices a los puntos que están en las esquinas de los cuadros.

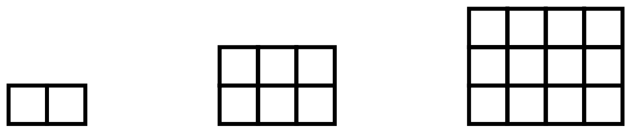


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

¿Cuantos vértices y cuadros tendrá la figura 10? ___________________________________

____

¿Cuantos vértices y cuadros tendrá la figura 83? ___________________________________

____

Si te es necesario, puedes utilizar este espacio para hacer dibujos.

Explica cómo le hiciste para responder las preguntas anteriores, hazlo de manera que cualquiera de tus compañeros pueda entenderlo. ___________________________________

____

____

Escribe la regla o formula del patrón de comportamiento que te permitió saber cuántos vértices tiene cada figura de la sucesión.____________________________

____

Escribe la regla o formula del patrón de comportamiento que te permitió saber cuántos cuadros tiene cada figura de la sucesión. ______________________________________

____

ANEXO 5

ESTUDIO PRINCIPAL

Hojas de trabajo para el uso de la calculadora

HOJA DE TRABAJO 1

En mi calculadora escribí un programa que hace lo siguiente:

Si introduzco 1 me da por resultado 5; si introduzco 2, da por resultado 6, y así sucesivamente.

Núm. de entrada	Núm. de salida
1	5
2	6
3	7
4	8
5	9

1. ¿Qué resultado va a dar la calculadora le doy a mi programa como "número de entrada" el 6? ______________ ¿Si es 10 ? _______________ ¿Si el número de entrada es 0? ____

¿Qué operación hiciste para obtener esos resultados? ___________________________
____

2. ¿Puedes programar tu calculadora para que haga lo mismo que mi programa? Escribe tu programa en el cuadro de abajo.

3. Usa el programa que hiciste para encontrar los números que faltan en la tabla.

Núm. de entrada	17	35.02	89.73	107.06	299.1	307.09		
Núm. de salida							511	613.03

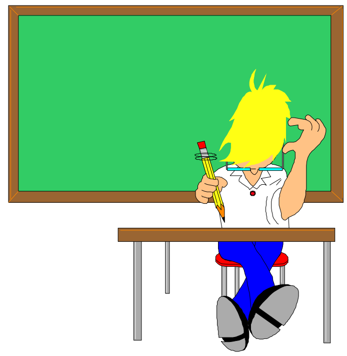
¿Qué operaciones hiciste para obtener los valores asociados a 511 y 613.03?
____
____

5. ¿Cómo puedes comprobar que el valor que obtuviste para 511 es el correcto?
____
____
____

HOJA DE TRABAJO 2

Núm. de entrada	Núm. de salida
7	14
8	16
9	18
15	30
18	32

En mi calculadora escribí un programa que hace lo siguiente:



1. ¿Qué resultado me va a dar la calculadora si escribo en mi programa el número 5? ______________________ ¿ Y si escribo el número 25? _______ ¿Si escribo el número 17? ____

¿Qué operaciones hiciste para obtener esos resultados? ____________________________
____

3. ¿Puedes programar tu calculadora para que haga lo mismo que la mía? Escribe tu programa en el cuadro de abajo.

3. Usa el programa que hiciste para encontrar los números que faltan en la tabla.

Núm. de entrada	25	37.03	59.83	117.18	136.1	200.79		
Núm. de salida							551	653.38

4. ¿Qué operaciones hiciste para obtener los valores asociados a 551 y 653.38? ________
____

5. ¿Cómo puedes comprobar que el valor que obtuviste para 653.38 es el correcto?
____
____

HOJA DE TRABAJO 3

1. Encuentra los números que faltan y completa la tabla.

Núm. de entrada	Núm. de salida
2.5	7.5
3.1	9.3
4	12
5.3	
6.2	
	47.4
73	

4. ¿Qué operaciones hiciste para obtener los números que faltaban en la tabla? ________
____
____

5. ¿Puedes programar tu calculadora para encontrar los números de la columna de la derecha? Escribe tu programa en el cuadro de abajo.

Comprueba que tu programa permite obtener los mismos números que se muestran en la tabla.

4. Completa la tabla de abajo usando el programa que escribiste.

9	17	18.04	47.01	50.4	63.9		
						89.1	92.4

¿Qué operaciones hiciste para obtener los valores asociados a 89.1 y 92.4? ___________
____

3. ¿Cómo puedes comprobar que el valor que obtuviste para 92.4 es el correcto? _________
____
____

En mi calculadora escribí un programa que hace lo siguiente

HOJA DE TRABAJO 4

Núm. de entrada	Núm. de salida
1.1	3.2
2.6	6
3	7
4.3	9.6
5	11

Construí la tabla e la izquierda usando un programa.

1. ¿Qué resultado me va a dar la calculadora si escribo en mi programa el número 50? ______________________ ¿Y si escribo el número 81? ____________________ ¿Si escribo el número 274? ____

2. ¿Qué operaciones hiciste para obtener esos resultados? ________________________
____
____
____

3. ¿Puedes programar tu calculadora para que haga lo mismo que la mía? Escribe tu programa en el cuadro de abajo.

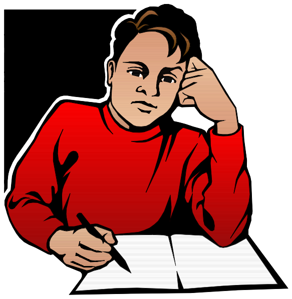
4. Usa el programa que hiciste para completar la siguiente tabla.

Núm. de entrada	12	16	19.05	48.02	51.45	62.7		
Núm. de salida							88.2	95.4

Un alumno dice que puedes usar el programa que hiciste para comprobar que obtuviste para 88.2 es valor el correcto ¿Estás de acuerdo con él? __________________ Indica con la mayor precisión posible cómo puedes usar el programa que hiciste para comprobar que el valor que obtuviste para 95.4 es el correcto. ________________________________
____
____
____

HOJA DE TRABAJO 5

En mi calculadora escribí un programa que hace lo siguiente



Núm. de entrada	Núm. de salida
1	1
2	3
3	5
4	7
5	9

1. ¿Qué resultado me dará la calculadora si escribo en mi programa el 6? _____________
   ¿Y si escribo el 7? _____________ ¿Si escribo el 15? __________________________

2. ¿Qué operaciones hiciste para obtener esos resultados? ________________________
   ____
   ____

3. Programa tu calculadora para que haga lo mismo que la mía. Escribe tu programa en el cuadro de la derecha.

Comprueba que tu programa produce los mismos resultados que el mío.

4. Usa tu programa para completar la siguiente tabla. Comprueba con tu programa que los valores que obtuviste para 25 y 137 son los correctos.

Núm. de entrada	10	11	15		27		259.14
Núm. de salida				25		137	

5. ¿Cómo puedes comprobar que el valor que obtuviste para 137 es el correcto? _______
   ____
   ____
   ____
   ____

HOJA DE TRABAJO 6

1. Encuentra los números que faltan y completa la siguiente tabla.

-10	-9.7	-7.8	-6.2	-5.3	-4.6	-0.7	0	1.3	12.4
-9.5	-9.2	- 7.3	-5.7						

2. ¿Puedes programar tu calculadora para que haga el trabajo de completar la tabla?.

Una vez que lo hayas hecho escribe tu programa en el cuadro de la derecha.

Usa el programa que hiciste para obtener los números que se muestran en la tabla anterior. ¿Pudiste obtener los mismos números? ______________ Si no es así, corrige tu programa e intenta de nuevo.

3. Completa la siguiente tabla usando el programa que hiciste. Comprueba con tu programa que el valor que encontraste para –10.3 es el correcto.

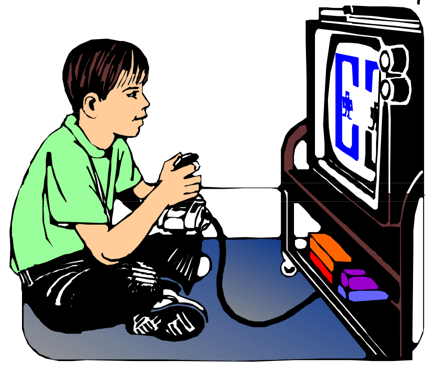
-20	-14.7	-13.8	-12.3		-9.6		2.5
				-10.3		0	

4. Usa tu programa para comprobar que los valores que obtuviste para -10.3 y 0 son los correctos. ¿Obtuviste los mismos valores? _________ Si no, corrige tu programa e intenta de nuevo.

HOJA DE TRABAJO 7

Núm. de entrada	Núm. de salida
-15	-16.5
-14.5	-16
-12.4	-13.9
-10.2	-11.7
-5.8	
-4.6	
-0.9	
0	

¿Puedes ayudarme a encontrar los números que faltan?



1. ¿Qué operaciones hiciste para encontrar los números que faltan en la tabla? Escribe un ejemplo usando uno de los números de la tabla. ______________________________
____
____

2. ¿Puedes programar tu calculadora para reproducir los números de la tabla?

Una vez que lo hayas hecho escribe tu programa en el cuadro de la derecha.

Comprueba que tu programa permite encontrar los mismos números que se muestran en la tabla.

3. Completa la siguiente tabla usando el programa que hiciste.

-20		-13.8		-10.83		-.05	
	-17.3		-11.9		-9.72		10

4. Escribe sobre la línea cómo usarías tu programa para comprobar que el valor que obtuviste para -9.72 es correcto. ____
____
____
____
____

HOJA DE TRABAJO 8

En mi calculadora escribí un programa que hace lo siguiente:

Núm. de entrada	Núm. de salida
10.5	5.25
14.42	7.21
15.3	7.65
16.7	8.35
20.1	10.05

1. Si escribo el número 6 ¿qué número va a dar como resultado la calculadora? __________________ ¿Y si escribo el número 19.3? _______________ ¿Si escribo el número 56? ________________ ¿Y si escribo el número 177?, __________________

2. Explica cómo obtuviste esos resultados de manera que cualquiera de tus compañeros pueda entenderte. ____
____
____
____

3. ¿Puedes programar tu calculadora para que haga lo mismo que la mía? Una vez que lo hayas hecho escribe tu programa en el cuadro de abajo.

Comprueba que tu programa te permite obtener los mismos valores que los de la tabla.

HOJA DE TRABAJO 9

Núm. de entrada	Núm. de salida
6	9
8	12
14	21
15	22.5
18	27

Escribí un programa que produce estos valores:

1. ¿Qué resultado me va a dar la calculadora si escribo el número 10? _______________
   ¿Y si escribo el número 13.4? ____________________ ¿Si escribo el número 15.6? ___

2. Explica cómo obtuviste esos resultados de manera que cualquiera de tus compañeros pueda entenderte ____
   ____
   ____

3. ¿Puedes programar tu calculadora para que haga lo mismo que la mía? Escribe tu programa en el cuadro de abajo.

4. Usa tu programa para completar la siguiente tabla.

Núm. de entrada	20		35		44		72	
Núm. de salida		33		57		75		123

5. Explica cómo usas tu programa para comprobar que el valor que encontraste para 57 es el correcto. ____
   ____
   ____
   ____
   ____

Entrevista 1

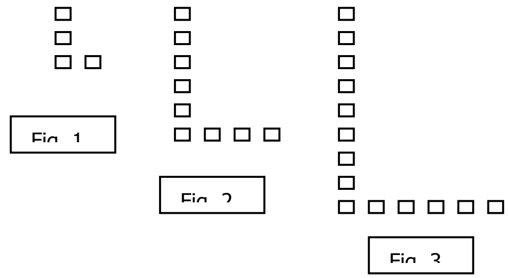
<table>
<tr><th>Objetivos</th><th>Preguntas de investigación relacionadas con cada objetivo</th><th>Protocolo de entrevista</th></tr>
<tr>
<td rowspan="2">Investigar qué nociones y estrategias desarrollan los estudiantes cuándo el ambiente de enseñanza para la introducción al álgebra escolar se basa en el uso de manipulables y calculadora gráfica</td>
<td>- ¿Cómo influye un modelo didáctico en el que se combinan materiales manipulables y la calculadora programable, en el aprendizaje de las expresiones algebraicas como un medio para expresar generalizaciones? (P1, P2)
- ¿Qué tipo de generalizaciones pueden plantear algebraicamente los estudiantes una vez que han trabajado con materiales manipulables y la calculadora?
- ¿Qué estrategias desarrollan los estudiantes para resolver problemas que involucran el reconocimiento de patrones numéricos?</td>
<td>1. ¿Te fueron útiles los materiales manipulables y la calculadora gráfica para resolver las actividades?
2. ¿El utilizar materiales te genera ideas que antes no habías pensado? ¿como cuáles? Escribe un ejemplo.
3. Los materiales te permiten comprobar si tus respuestas son correctas?
4. ¿Si no contaras con material hubieras podido resolver las actividades?
5. ¿Qué dirías si en este momento me llevara los materiales?
6. ¿Crees que has aprendido más matemáticas ahora que utilizaste materiales?
7. Hay una figura en la que sabemos hay 51 canicas, ayúdanos a encontrar el número de esa figura.

No. de fig. sucesión

1 °°°
2 °°°°°°
3 °°°°°°°°°
4
.
.
.
n

¿Cómo le hiciste para encontrar el número de la figura? ¿Habrá una regla que exprese lo anterior?</td>
</tr>
<tr>
<td>- ¿Qué vínculos se presentan entre los contenidos que se abordaron con el concepto de proporcionalidad?
- ¿Qué estrategias generan los estudiantes para abordar situaciones de equivalencia algebraica?
- ¿Qué estrategias generan los estudiantes para abordar situaciones de inversión de funciones lineales?</td>
<td>8. Encuentra la regla o fórmula que exprese el comportamiento de la siguiente sucesión numérica.
<table><tr><td>1°</td><td>2°</td><td>3°</td><td>4°</td><td>5°</td><td>6°</td><td>7°</td><td>8°</td><td>9°</td></tr><tr><td>4</td><td>8</td><td>12</td><td>16</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>
9 Explica el razonamiento que utilizaste para expresar la regla
Auxíliate de la regla para decir que número se encuentra en el lugar 77°</td>
</tr>
</table>

Entrevista 1

Objetivos	Preguntas de investigación relacionadas con cada objetivo	Protocolo de entrevista
Investigar qué nociones y estrategias desarrollan los estudiantes cuándo el ambiente de enseñanza para la introducción al álgebra escolar se basa en el uso de manipulables y calculadora gráfica	- ¿Qué vínculos se presentan entre los contenidos que se abordaron con el concepto de proporcionalidad? - ¿Qué estrategias generan los estudiantes para abordar situaciones de equivalencia algebraica? - ¿Qué estrategias generan los estudiantes para abordar situaciones de inversión de funciones lineales? -	10. Observa la siguiente figura y dime cuántos cuadros tendrá la figura número cuatro, cuántos la figura 10, cuantos la figura 54. ¿Podrías decir una formula que te permita decir con rapidez el número de cuadros que tendría cualquier número de figura.  11. En las actividades que se proponen en las que tienes que encontrar alguna relación entre el número de la figura y el número de objetos, ¿anticipas lo que sucede en el comportamiento de las series numéricas? Explica tu respuesta.
	¿Qué tipo de actitudes promueve hacia las matemáticas el aprendizaje del álgebra desde una postura de la acción?	12. 12¿Qué tanto te ha gustado trabajar con los materiales y la calculadora? ¿por qué?

Entrevista 2

<table>
<tr><th>Objetivos</th><th>Preguntas de investigación relacionadas con cada objetivo</th><th>Protocolo de entrevista</th></tr>
<tr>
<td>Investigar qué nociones y estrategias desarrollan los estudiantes cuándo el ambiente de enseñanza para la introducción al algebra escolar se basa en el uso de manipulables y calculadora gráfica</td>
<td>
- ¿Cómo influye un modelo didáctico en el que se combinan materiales manipulables y la calculadora programable, en el aprendizaje de las expresiones algebraicas como un medio para expresar generalizaciones?
- ¿Qué tipo de generalizaciones pueden plantear algebraicamente los estudiantes una vez que han trabajado con materiales manipulables y la calculadora?
- ¿Qué estrategias desarrollan los estudiantes para resolver problemas que involucran el reconocimiento de patrones numéricos?
- ¿Qué vínculos se presentan entre los contenidos que se abordaron con el concepto de proporcionalidad?
- ¿Qué estrategias generan los estudiantes para abordar situaciones de equivalencia algebraica?
</td>
<td>
1. ¿Si no contaras con una calculadora hubieras podido resolver las actividades?
2. ¿Qué dirías si en el momento en que estás resolviendo alguna actividad con la calculadora me la llevara?
3. ¿Crees que al auxiliarte con la calculadora has aprendido más matemáticas? Da algunos ejemplos. (De acuerdo al ejemplo se le pedirá que explique su respuesta, durante su explicación se iran planteando preguntas relacionadas con sus respuestas)
4. ¿Qué significado tuvo para ti el utilizar letras en las actividades que se te propusieron?
5. ¿Crees que si no se te permitiera usar letras podrías realizar la actividad?
6. Escribí un programa que me da los valores de la siguiente tabla, por descuido lo borré, ayúdame a encontrar un programa que produzca los valores de la tabla.
<table>
<tr><th>Núm. de entrada</th><th>Núm. de salida</th></tr>
<tr><td>1</td><td>9</td></tr>
<tr><td>2</td><td>18</td></tr>
<tr><td>3</td><td>27</td></tr>
<tr><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td></td></tr>
</table>
7. ¿Cómo le hiciste para construir el programa? Platícamelo
8. Corre el programa para ver si los números de salida son los mismos que están en la tabla.
9. En este programa, ¿qué representa la letra? ¿Qué representa el número?
10. ¿Qué pasa si al programa que encontraste le cambiamos la letra que usaste? ¿Se alteraría el programa? ¿Obtendrías los mismos valores de salida?
11. ¿Puedes programar tu calculadora para conocer los números de salida de la siguiente tabla?
<table>
<tr><th>Núm. de entrada</th><th>Núm. de salida</th></tr>
<tr><td>1</td><td>6</td></tr>
<tr><td>3</td><td>10</td></tr>
<tr><td>5</td><td>14</td></tr>
<tr><td>7</td><td></td></tr>
<tr><td>9</td><td></td></tr>
</table>
12. ¿Puedes escribir otro programa que haga lo mismo? Pruébalo en tu calculadora y escríbelo.
</td>
</tr>
</table>

Entrevista 2

<table>
<tr><th>Objetivos</th><th>Preguntas de investigación relacionadas con cada objetivo</th><th>Protocolo de entrevista</th></tr>
<tr>
<td>Investigar qué nociones y estrategias desarrollan los estudiantes cuándo el ambiente de enseñanza para la introducción al algebra escolar se basa en el uso de manipulables y calculadora gráfica</td>
<td>- ¿Qué vínculos se presentan entre los contenidos que se abordaron con el concepto de proporcionalidad?
- ¿Qué estrategias generan los estudiantes para abordar situaciones de equivalencia algebraica?
- ¿Qué estrategias generan los estudiantes para abordar situaciones de inversión de funciones lineales?</td>
<td>En mi calculadora escribí un programa que hace lo siguiente:
<table>
<tr><th>Num. de entrada</th><th>Núm. de salida</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2.5</td></tr>
<tr><td>2</td><td>5</td></tr>
<tr><td>3</td><td>7.5</td></tr>
<tr><td>4</td><td>10</td></tr>
<tr><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td></td></tr>
</table>
13. Encuentra el programa que produzca los valores de salida de la tabla anterior. Prueba tu programa en la calculadora y escríbelo.
14. hora inventa un programa que invierta lo que hace el programa que encontraste anteriormente. Es decir que te de los números de salida de la tabla, escríbe como queda el programa.
<table>
<tr><th>Num. de entrada</th><th>Núm. de salida</th></tr>
<tr><td>2.5</td><td>1</td></tr>
<tr><td>5</td><td>2</td></tr>
<tr><td>7.5</td><td>3</td></tr>
<tr><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>12.5</td><td></td></tr>
<tr><td>15</td><td></td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

Entrevista 3

<table>
<tr><th>Objetivos</th><th>Preguntas de investigación relacionadas con cada objetivo</th><th>Protocolo de entrevista</th></tr>
<tr>
<td rowspan="2">Investigar qué nociones y estrategias desarrollan los estudiantes cuándo el ambiente de enseñanza para la introducción al álgebra escolar se basa en el uso de manipulables y calculadora gráfica</td>
<td>- ¿Qué vínculos se presentan entre los contenidos que se abordaron con el concepto de proporcionalidad?
- ¿Qué estrategias generan los estudiantes para abordar situaciones de equivalencia algebraica?
- ¿Qué estrategias generan los estudiantes para abordar situaciones de inversión de funciones lineales?</td>
<td>1. ¿Puedes programar la calculadora de manera que utilices sólo 4 cuatros y obtengas el número 5?
2. ¿Qué pasa si hago esto $4\times4+4\div4$?
3. ¿Qué pasa si coloco paréntesis?
4. Al tratar de escribir el programa $(n\times2)+1$, me equivoque y escribí $(n\times4)+1$, ¿Puedo corregir mi programa sin suprimir nada que haya escrito?
5. Corre el programa, acuérdate que tiene que funcionar para cualquier número.

6. A ver qué te parece si escribimos el programa $(A\times2)-1$ en la calculadora, para conocer los valores de la siguiente tabla:

Programa principal
$(A\times2)-1$
<table>
<tr><th>Num. de entrada</th><th>Núm. de salida</th></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>3</td><td>5</td></tr>
<tr><td>4</td><td>7</td></tr>
<tr><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td></td></tr>
</table>

1. ¡ay! Me equivoqué y escribí el programa $(A\times2)-2$, ¿crees que pueda corregirlo sin suprimir nada de lo que ya está escrito y obtener los mismos valores que el programa principal? ¿por qué? muéstrame cómo queda el programa.
1. Completa la tabla usando el programa que hiciste.
2. ¿Qué crees que esté pasando con los números de entrada y los números de salida con relación a la tabla?</td>
</tr>
<tr>
<td>¿El promover el aprendizaje del álgebra desde una postura de la acción posibilita actitudes a favor de las matemáticas?</td>
<td>1. ¿Te gusta trabajar matemáticas con la calculadora? ¿Por qué?
2. ¿El trabajar con la calculadora te facilita o complica tu aprendizaje? ¿Por qué? Dame un ejemplo.
3. ¿Cómo se te hace más atractivo abordar los contenidos matemáticos usando la calculadora o sin ella?
4. ¿Sí te tocara explicar algún tema de matemáticas a tus compañeros que ya entendiste te apoyarías de la calculadora para explicarlo?¿Por qué? ¿Qué función crees que tendría la calculadora?</td>
</tr>
</table>