UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

SECRETARIA ACADEMICA
DIRECCIÓN DE INVESTIGACIÓN
COORDINACION DE ESPECIALIDADES
ESPECIALIZACION PARA DOCENCIA EN EL BACHILLERATO

"PLANTEAMIENTO DE PROBLEMAS QUE CONDUZCAN A UNA FUNCION EXPONENCIAL"

T E S I N A
QUE PARA OBTENER EL DIPLOMA DE:
L A E S P E C I A L I Z A C I O N E N
DOCENCIA PARA EL BACHILLERATO
P R E S E N T A:

AMELIA RAMÍREZ ESPINOSA
ASESORA: DRA. MA. ANGELINA ARRIOLA MIRANDA

MEXICO, D.F., ABRIL DEL 2002

INDICE

RESUMEN

Lo principal de este trabajo es la propuesta para mejorar la práctica educativa del tema "Planteamiento de problemas que conduzcan a una función exponencial y su representación gráfica", ya que con frecuencia los estudiantes tienen dificultades al plantear el modelo algebraico. Para ello se revisaron varios textos con diferentes enfoques en la presentación del tema, se hizo una revisión histórica sobre el concepto de función, se aplicaron dos redes semánticas para conocer las concepciones de los alumnos respecto a "función" y "exponencial", además, se diseñó y aplicó una evaluación diagnóstica para saber que conocimientos previos tenían los alumnos y se diseñó y aplicó un plan de clase con duración de tres sesiones de dos horas cada una para el desarrollo de la estrategia y una sesión para la evaluación.

En cada actividad realizada se recopiló información que fue analizada en su momento. En la bibliografía revisada para el contenido de "función exponencial" se observó que todos los textos abordan el tema iniciando con la representación algebraica para después construir la tabla y la gráfica. Mientras que la revisión histórica nos da un enfoque totalmente diferente, en ésta hay que empezar con la representación en lenguaje común pasando por las representaciones tabular y gráfica y por último aterrizar en la representación algebraica que precisamente es donde tienen muchas dificultades los alumnos.

Por lo tanto la propuesta incluida en este trabajo es congruente con el enfoque histórico, en primer lugar el estudiante debe reflexionar ante situaciones problemáticas en lenguaje natural, comprender el problema, analizar los datos y proponer alguna representación del mismo para explicarla a sus compañeros y finalmente construir una representación simbólica.

En las redes semánticas se obtuvieron muchas concepciones que al parecer no tienen nada que ver con el contexto matemático de "función" y "exponencial", en su núcleo sólo destacan las palabras "operación" y "exponente" respectivamente.

En la evaluación diagnóstica los estudiantes aplicaron correctamente los exponentes enteros positivos mientras que los negativos y el cero no los manejan, hubo muchas dificultades con el concepto de función y variables dependiente e independiente. En la localización de pares ordenados con coordenadas naturales no tienen problema, pero con números enteros y decimales hay dificultad, en particular con coordenadas decimales invirtieron la abscisa por la ordenada y viceversa. Respecto a la lectura de una representación gráfica no hubo problema, pero en su interpretación se requiere trabajar más.

Los resultados obtenidos son satisfactorios, ya que los promedios generales fueron en el pretest de 40 puntos, mientras que en el postest de 69.72 puntos de un total de cien, reflejándose así algún aprendizaje en los alumnos.

En conclusión la experiencia vivida al realizar este trabajo ha sido muy grata y enriquecedora.

INTRODUCCION

Actualmente en México y en todo el mundo una de las materias de mayor controversia dentro del proceso educativo es la Matemática, los profesores de esta disciplina están inmersos en la problemática de bajo aprovechamiento y en consecuencia alto índice de reprobación. En diversas instituciones educativas se han puesto en marcha proyectos tendientes a mejorar el aprovechamiento de los estudiantes, dichos proyectos apuntan a factores que desde un ámbito educativo es posible incidir, tales como: deserción, hábitos de estudio, estrategias de comprensión lectora, estrategias de intervención pedagógica. Ya que en la escuela es difícil considerar los factores económicos, sociales, políticos y familiares, entre otros.

El profesor en la actualidad está convencido de que él y los estudiantes son los actores principales de la práctica educativa y por lo tanto está consciente que puede impactar directamente con sus actitudes y con el tipo de enseñanza que promueva, pues de ésta dependerá el tipo de aprendizaje el cual se manifiesta en el aprovechamiento de los alumnos. La enseñanza y el aprendizaje van de la mano por eso es conveniente considerar la práctica educativa, que sin el estudiante o sin el profesor no tiene sentido. Así el profesor de matemáticas se ubica como un eslabón en la cadena de instancias que pueden incidir en un mejor aprovechamiento de los alumnos.

Algunos de los factores que hasta la fecha han influido para que la mayoría de los estudiantes no logren aprender significativamente la matemática son: que los maestros generalmente siguen un método tradicional (exposición el 100% de la clase) y con dicha actitud han logrado que los alumnos se enfrenten a muchas dificultades, así se han fomentado actitudes desfavorables en los estudiantes, la mayoría de ellos en el aula son apáticos y en el mejor de los casos muestran muy poco interés por el desarrollo de la clase.

Con cierta frecuencia y en diferentes espacios los alumnos manifiestan que las clases de matemáticas son aburridas, que no les van a servir para nada y que es la materia más difícil, por lo tanto es el momento adecuado para que el profesor cambie de actitud y vea la práctica educativa desde una perspectiva constructivista. El docente necesita convencerse de las bondades de este método en la promoción de la construcción de conocimientos por parte del alumno.

El interés principal que se persigue en la realización de este trabajo consiste en iniciar un cambio del método tradicional al constructivista y provocar actitudes favorables hacia la matemática por parte de los alumnos, que ellos muestren interés y motivación a través de su participación en la resolución de problemas.

Para mejorar la práctica educativa en matemáticas en el nivel medio superior existe la necesidad de reflejar en las aulas a través de la actitud cotidiana, la preocupación que actualmente tienen los profesores de que sus alumnos realmente aprendan, para ello se eligió el contenido de "Planteamiento de problemas que conduzcan a una función exponencial y su representación gráfica", que a primera vista parece muy simple, pero la experiencia contradice dicha visión, ya que semestre a semestre los alumnos presentan dificultades en la representación algebraica.

Tratando que se dé un aprendizaje con sentido en los estudiantes se obtuvo información de los conocimientos previos de los alumnos respecto al planteamiento de problemas que conducen a una función exponencial y su representación gráfica a través de una evaluación diagnóstica cuyos resultados permitieron diseñar situaciones didácticas que promuevan una mejor construcción de conocimientos en los estudiantes.

El trabajo consta de cinco capítulos:

1. El primero corresponde a la didáctica de las matemáticas en el que se incluyen diversas teorías sobre la construcción del conocimiento y los fundamentos de la propuesta didáctica. 2. En el segundo se incluye la metodología. 3. En el tercero se presenta la propuesta didáctica. 4. En el cuarto los resultados y 5. Un quinto capítulo de conclusiones.

1. DIDACTICA DE LAS MATEMATICAS

1.1 LA CONSTRUCCION DEL CONOCIMIENTO EN EL AULA.

El análisis que se presenta se enmarca en la perspectiva constructivista de la práctica educativa.

Uno de los grandes iniciadores de la teoría del aprendizaje desde el punto de vista cognitivo fue Piaget (citado en Martínez, Arriola), para él, el aprendizaje surge de los desequilibrios que se presentan en el sujeto cuando éste tiene conflictos cognitivos. Este autor refiere que cuando el sujeto interactúa con el objeto de conocimiento trata de interpretar lo que ve de acuerdo a sus propios esquemas de conocimiento (a este proceso le llama asimilación). Si lo que interpreta no es acorde con los esquemas cognitivos entonces en ese momento se presentan desequilibrios (también llamados conflictos) en la estructura cognitiva. Sin embargo, el aprendizaje no se puede dar así nada más, sino que es fundamental que el sujeto este consciente de que se presentan dichos conflictos e intente resolverlos logrando una nueva equilibración, en todo este proceso se van dando cambios en los esquemas y/o estructuras cognitivas (acomodación).

Desde la perspectiva piagetana se podría decir que el aprendizaje es el producto del proceso asimilación-acomodación. Esta teoría en su aspecto medular sigue vigente, aunque carece de un enfoque instruccional, no por ello pierde importancia, para todo aquel que se dedique a la educación lo primero es conocer los procesos cognitivos que se dan en el sujeto.

Otra de las teorías que sustentan este trabajo es la de Vigotsky (citado en Martínez, Arriola), que supone que el aprendizaje es un proceso que va del exterior al interior y consiste en la reconstrucción de significados.

Primeramente el sujeto toma signos de su entorno, los interioriza y le da significado a la información con rasgos perceptivos comunes.

Considero que las teorías de Piaget y Vigotsky se complementan, ya que, en la primera el sujeto interactúa con el objeto de conocimiento y trata de interpretar lo que ve de acuerdo a sus esquemas cognoscitivos, éste es un proceso que va del exterior al interior, porque el sujeto toma signos de su entorno y los interioriza, al igual que en la segunda teoría. Además, para Vigotsky (citado en Martínez, Arriola) los conceptos espontáneos por si solos no pueden alcanzar niveles importantes, sino que requieren de los conceptos científicos los cuales se adquieren a través de la instrucción.

Vigotsky (citado en, Martínez, Arriloa) delimita tres zonas de desarrollo cognitivo: zona de desarrollo efectivo, zona de desarrollo potencial y zona de desarrollo próximo. En la primera considera lo que el sujeto puede hacer por sí solo y sin ayuda de otra(s) persona(s). La zona de desarrollo potencial tendría lo que el sujeto sería capaz de hacer con ayuda de otra(s) persona(s) y la zona de desarrollo próximo de un sujeto en una tarea determinada, es la diferencia entre el desarrollo efectivo y el desarrollo potencial. Se puede concluir que desde el punto de vista de Vigotsky (citado en, Martínez, Arriola) el aprendizaje es el producto del proceso de reestructuración de significados, es decir, donde los conceptos científicos (adquiridos a través de la instrucción) sólo pueden adquirirse reestructurando los conocimientos previos.

De ahí que se pueda plantear que en las estrategias que promueva el profesor es fundamental proponer situaciones que originen el trabajo cooperativo entre iguales a fin de activar en los alumnos la zona de desarrollo potencial (previa identificación de lo que los estudiantes pueden hacer por si solos) y estar conscientes de la incidencia que se puede tener en la zona de desarrollo próximo.

Estas teorías resultan de gran interés para todo aquel que se dedique a la docencia, pero a pesar de ello siguen siendo muy generales. Se tiene información de qué procesos surgen en la mente del sujeto para adquirir conocimientos, no logran aun responder a la pregunta ¿cómo el sujeto hace suyos los conocimientos en general y cómo construye los conocimientos matemáticos en particular?

Tratando de contar con un marco de referencia más amplio sobre ¿cómo aprende los conocimientos el sujeto? Se considera la Teoría del aprendizaje significativo de Ausubel (1978) la cual sin duda alguna complementa las dos anteriores.

Ausubel (citado en Martínez, Arriola) considera que la clave está en la instrucción formal (no necesariamente instrucción escolar) donde el punto medular es que los materiales que se le presenten a los estudiantes deben estar bien organizados y estructurados para que la información tenga significado por sí misma para el sujeto. Considerando previamente las estructuras cognitivas que existen sobre la nueva información, es decir, se da significado a la nueva información a través de la interacción (relación, enlace, anclaje, eslabón, encadenamiento) entre el material (objeto) y las estructuras cognitivas preexistentes (ideas, conocimientos previos) en el sujeto. Dicha interacción produce cambios significativos en los esquemas y/o estructuras cognitivas del sujeto.

De manera entonces que la adquisición del aprendizaje significativo requiere esencialmente de la disposición del sujeto para hacer un esfuerzo al establecer la interacción con el objeto (nueva información, material) y producir cambios (significativos) en las estructuras cognitivas.

Por lo expuesto anteriormente se puede destacar que en la construcción del conocimiento en el aula es importante considerar: las concepciones y/o representaciones de los alumnos (denominadas por Piaget conflictos cognitivos), situaciones problema y la enseñanza estratégica.

1.1.1 LA CONSTRUCCION DEL CONOCIMIENTO CON UN ENFOQUE DE CAMBIO DE CONCEPCIONES Y/O REPRESENTACIONES.

Piaget , Ausubel y Vigotsky en sus teorías del aprendizaje consideran la existencia de esquemas y estructuras cognitivas las cuales son flexibles y dinámicas. Además, Dykstra (1989) en su “Ensayo sobre un punto de vista constructivista de la educación” considera que el conocimiento son *“las concepciones construidas por las personas para entender el mundo”* (pág. 1), por lo tanto dicha concepción no es estática sino dinámica, ya que pasa por diversos estados destacándose el inicial y el final. Este autor explica los procesos cognitivos basándose en la teoría piagetana.

Los alumnos entran a una asignatura con ciertas concepciones iniciales y en el transcurso del mismo éstas van cambiando y llegan a un estado final (transitorio), se podría decir que los conocimientos cambian de estados iniciales a finales temporalmente, porque las concepciones finales en un determinado momento vuelven a considerarse concepciones iniciales y así sucesivamente se va dando el aprendizaje. Con este enfoque es necesario que la labor de los docentes este encaminada a promover cambios de concepciones en los alumnos y llevarlos en diferentes momentos de una concepción inicial a otra final. En su obra Dykstra (1989) no plantea estrategias instruccionales para lograr los cambios de concepciones.

La aportación de Dykstra (1989) es considerar cambios de concepciones. Este punto de vista es congruente con lo que se está investigando actualmente sobre el movimiento de las concepciones alternativas (citado en Rodríguez, 1998), en esta perspectiva ya se considera el papel del profesor como tal, es decir, este enfoque está inmerso en el proceso educativo (la instrucción es formal en un salón de clase) y hace referencia a que el estudiante llega a una asignatura con concepciones iniciales (también llamadas preconcepciones o representaciones sociales) sobre los contenidos que se abordarán en el curso. Y para que el estudiante aprenda y pase por un proceso de cambio de concepciones, es necesario que el docente tome en cuenta las preconcepciones de sus alumnos para proponer estrategias adecuadas que promuevan dicho cambio.

Para que el sujeto adquiera nuevos conocimientos es necesario que en su mente se den cambios de concepciones (citado en Rodríguez, 1998) y esto sólo es posible cuando está consciente de las concepciones (alternativas) que utiliza. Este aspecto destaca la responsabilidad que tiene el estudiante en la construcción de su conocimiento, en el momento en que el alumno está consciente de las concepciones que utiliza es corresponsable en la práctica educativa. Es decir, la modificación de las concepciones implica crear conciencia y responsabilidad, para salir de los conflictos cognitivos que conduzcan a un nuevo conocimiento o a una nueva representación.

Desde un punto de vista muy particular las concepciones alternativas y las Teorías del aprendizaje mencionadas con anterioridad no dan una explicación satisfactoria sobre los procesos internos que se dan en la mente para lograr un cambio de concepciones. Pero aportan claridad para que sistemáticamente el docente y específicamente el profesor de matemáticas tome en cuenta los conocimientos previos, así como las preconcepciones o concepciones alternativas que los alumnos han construido para entender y comprender su entorno, a fin de proponer las estrategias didácticas adecuadas para promover el paso de una representación deficiente a una mejor elaborada. Este nuevo enfoque se ve fortalecido cuando Rodríguez (1998) apunta que en el futuro las investigaciones del Movimiento de concepciones alternativas estarán más aplicadas al ámbito educativo.

1.1.2 LA CONSTRUCCION DEL CONOCIMIENTO A PARTIR DE LAS SITUACIONES PROBLEMA

Desde la perspectiva constructivista hay varias propuestas para poner en práctica la resolución de problemas con los alumnos: 1.- Es necesario dejar la responsabilidad del saber del estudiante al estudiante mismo, ya que para construir un saber en matemáticas es de suma importancia que el alumno lo estructure personalmente. 2.- Hay que tener presente que el estudiante aprende de las contradicciones, de las dificultades y de los errores. Inmerso en dicho contexto este trabajo tiene una influencia de la didáctica de las matemáticas, que según Saiz

(1994) tiene como objetivo dar una explicación de los fenómenos que se dan en la práctica educativa, a través del desarrollo de recursos de análisis para describir y comprender mejor los fenómenos presentes en el proceso enseñanza-aprendizaje.

En la práctica educativa se establecen interrelaciones entre el profesor, el saber y los alumnos con el propósito de que éstos construyan su propio conocimiento y para esto es indispensable asegurar que los estudiantes cuenten con conocimientos previos, pues el alumno sólo puede aprender a partir de lo que ya sabe. El maestro necesita propiciar condiciones que promuevan el aprendizaje y buscar problemas que le den sentido a los conocimientos por enseñar.

En una situación problema está presente implícita o explícitamente un contrato didáctico, donde se establece una devolución al alumno de la responsabilidad de sus aprendizajes, el alumno necesita sentir esa responsabilidad en la resolución de problemas. Vergnaud (citado en Alvarez, 1998) sugiere al respecto que la resolución de problemas es *"la fuente y criterio del saber; ..."* (pág. 10). Así mismo en el se establecen los roles, lugares y funciones. Brousseau (citado en Alvarez, 1998) afirma por ello que el maestro es *"la memoria de referencia de la clase, recuerda las convenciones, los acuerdos y los hechos pertinentes. Es por este papel que dirige y controla los aprendizajes"* (pág. 22).

El maestro así entonces se apoya de las producciones de los alumnos para hacer progresar los aprendizajes (concepciones) del grupo, un factor clave es que los errores no se esconden por el contrario son una vía para construir el conocimiento.

En una situación problema se presentan las siguientes etapas de aprendizaje:

a) acción.
b) formulación.
c) validación.
d) institucionalización.

a) Acción: Con base en los conocimientos anteriores y experiencias previas, los alumnos proponen cuál puede ser una posible resolución del problema e intentan realizar dicho procedimiento o por lo menos lo inician (Saiz, 1994).

b) Formulación: Esta etapa se da en el trabajo colectivo frente a una situación problema donde el estudiante tiene la necesidad de justificar sus propuestas, aquí se da el intercambio de información y se facilita cuando el alumno posee concepciones adecuadas y pertinentes pues puede identificar elementos nuevos y hacerlos explícitos. De manera que el alumno necesita identificar sus errores y los de los demás para construir su conocimiento, *"es necesario que él construya una descripción, una representación, un modelo explícito."* (Brousseau, 1978, pág. 3).

Un problema provoca en el estudiante incertidumbre y éste es adecuado si lo es al menos para el 80% del grupo. Al respecto Lester (citado en Godino, Batanero, 1994) define un problema como *"una situación en la que se pide a un individuo realizar una tarea para la que no tiene un algoritmo fácilmente accesible que determine completamente el método de solución"* (pág. 9).

c) Validación: En una situación problema los alumnos necesitan pasar por una confrontación de sus resultados, es decir, por una validación *"Se trata ahora de explicitar estas reglas, de precisar las convenciones, de decir porqué tal escritura matemática es correcta y porqué ella es pertinente"* (Brousseau, 1978). El alumno requiere ser crítico ante los modelos que construye, para que se dé cuenta si su procedimiento es erróneo o correcto y también validar el de sus compañeros. Esta etapa es muy importante porque no se trata de aceptar las propuestas sólo porque provienen del “mejor” estudiante, sino porque es necesario comprender las afirmaciones de los compañeros y quedar convencidos de su validez. En caso contrario hay que dar argumentos adecuados que desvaloren las propuestas que no admitimos. Además, es indispensable tomar en cuenta los diversos procedimientos que sigan los alumnos así como sus diferencias cognitivas personales.

d) Institucionalización: Por último hay que pasar por ésta etapa donde se da un carácter más oficial a algunos conocimientos y/o producciones de los alumnos. En ésta se recomienda considerar dos fases una interna y otra externa. En la primera el maestro puede aplicar la lluvia de ideas para que los alumnos tomen acuerdos con respecto a la simbología que utilizarán en la clase para designar los contenidos, mientras que en la segunda el profesor dará a conocer a sus estudiantes los símbolos que se usan en el contexto matemático en los libros, revistas científicas, enciclopedias, etc., dichos símbolos han surgido de acuerdos tomados por matemáticos de diferentes países y son considerados como convenciones sociales y universales.

Es posible que en Francia haya dado buenos resultados la práctica educativa propuesta por Brousseau, pero en México aun no se ha difundido ampliamente entre los profesores de las diversas instituciones. Teniendo un panorama general de la propuesta es notorio que la formación que se pretende que reciba el alumno corresponde a la de un “investigadorcito”, es decir, involucrarlo en situaciones parecidas a las que se enfrenta un investigador, pero este enfoque tal vez sea posible para grupos con un número reducido de alumnos. De sobra se sabe que en el Colegio de Bachilleres (C.B.) los grupos en promedio tienen 55 estudiantes y por lo tanto no es posible pensar en una enseñanza personalizada, desgraciadamente tiene que ser masiva. Las situaciones problema consideradas en la didáctica de las matemáticas requieren en su operación que cada equipo cuente con una serie de materiales impresos para cada sesión lo cual en el C.B. parece imposible. La afirmación anterior puede ser “atrevida”, pero los docentes necesitan saber con que infraestructura cuentan para proponer estrategias en su práctica educativa que sean totalmente viables. Por lo tanto la propuesta de Brousseau podría aplicarse con sus limitaciones en el C.B. de manera selectiva para algún subtema, pero no permanentemente para cubrir todo el programa de una asignatura. Otra posibilidad es enriquecer la práctica que se ha estado desarrollando en el C.B. con algunos aspectos de este enfoque de la didáctica de la matemática.

1.1.3 LA CONSTRUCCION DEL CONOCIMIENTO A TRAVES DE LA ENSEÑANZA ESTRATEGICA

El docente en la práctica educativa necesita respaldar su actividad en un modelo para el desarrollo de la clase, a continuación se presenta el modelo tridimensional llamado “Enseñanza estratégica” (Castañeda, López, Arriola, y Martínez, 1994) en el que se consideran los tipos de conocimiento; declarativo, de procedimientos y condicional. Las actividades cognitivas; identificar, categorizar, inferir y resolver problemas. Y las componentes instruccionales:

1.- Revisión y análisis de necesidades, conocimientos y habilidades.
2.- Preparando el terreno.
3.- Desarrollo de la clase.
4.- Practicando para mejorar: Refinamiento y automatización de lo enseñado.

5.- Enseñando y aprendiendo con conciencia.
6.- Evaluando.

1. “Revisión y análisis de necesidades, conocimientos y habilidades”, aquí se propone aplicar una evaluación diagnóstica para detectar los conocimientos y las habilidades que poseen los alumnos al inicio del contenido (unidad, tema o subtema) a través de pruebas de reconocimiento (opción múltiple, relación de columnas), pruebas de recuerdo (completar oraciones, ensayos cortos) y pruebas de ejecución en tareas de resolución de problemas (que estén bien o mal definidos).

2. “Preparando el terreno”, los autores consideran que se deben utilizar los primeros 8 o 10 minutos de la clase para activar los conocimientos previos de los estudiantes y así facilitar el aprendizaje de la nueva información a través de diferentes estrategias instruccionales como: presentar la “orden del día de la clase”; visuales (redes semánticas y mapas conceptuales).

Al tener un panorama de cómo preparar el terreno antes del desarrollo de la clase queda claro que dicha actividad se puede realizar en 8 o 10 minutos sólo por profesores expertos en la enseñanza estratégica, porque con toda seguridad un profesor novato se llevará más tiempo por falta de experiencia. Pero a pesar de ello hay que mantener optimismo para llevarlo a la práctica y dejar de ser un novato a fin de adquirir habilidades en la operación de estrategias que promuevan la construcción de conocimientos en los alumnos.

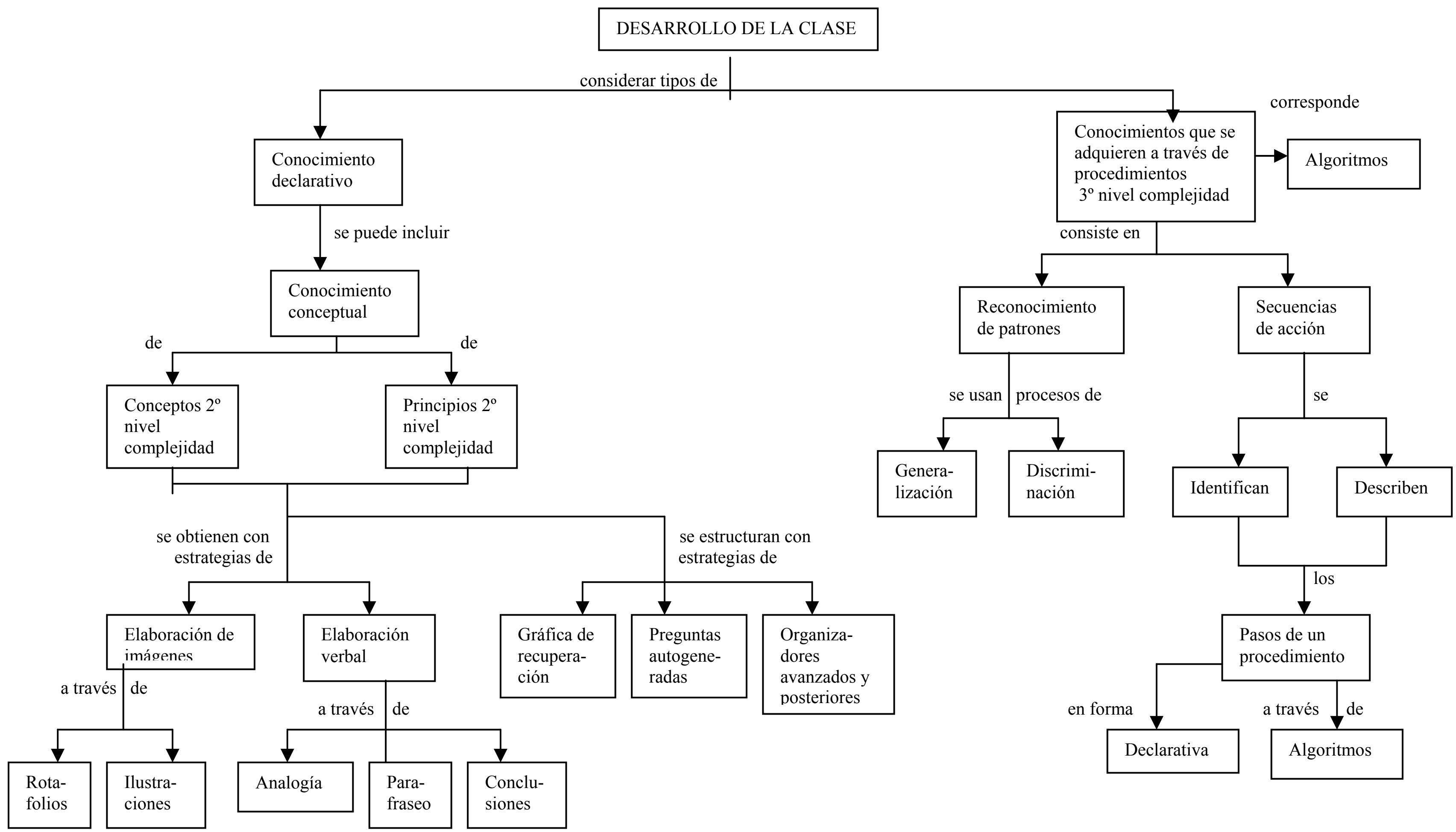
3. **“Desarrollo de la clase”**, en la siguiente página se presenta un mapa conceptual de los elementos que se recomienda considerar.

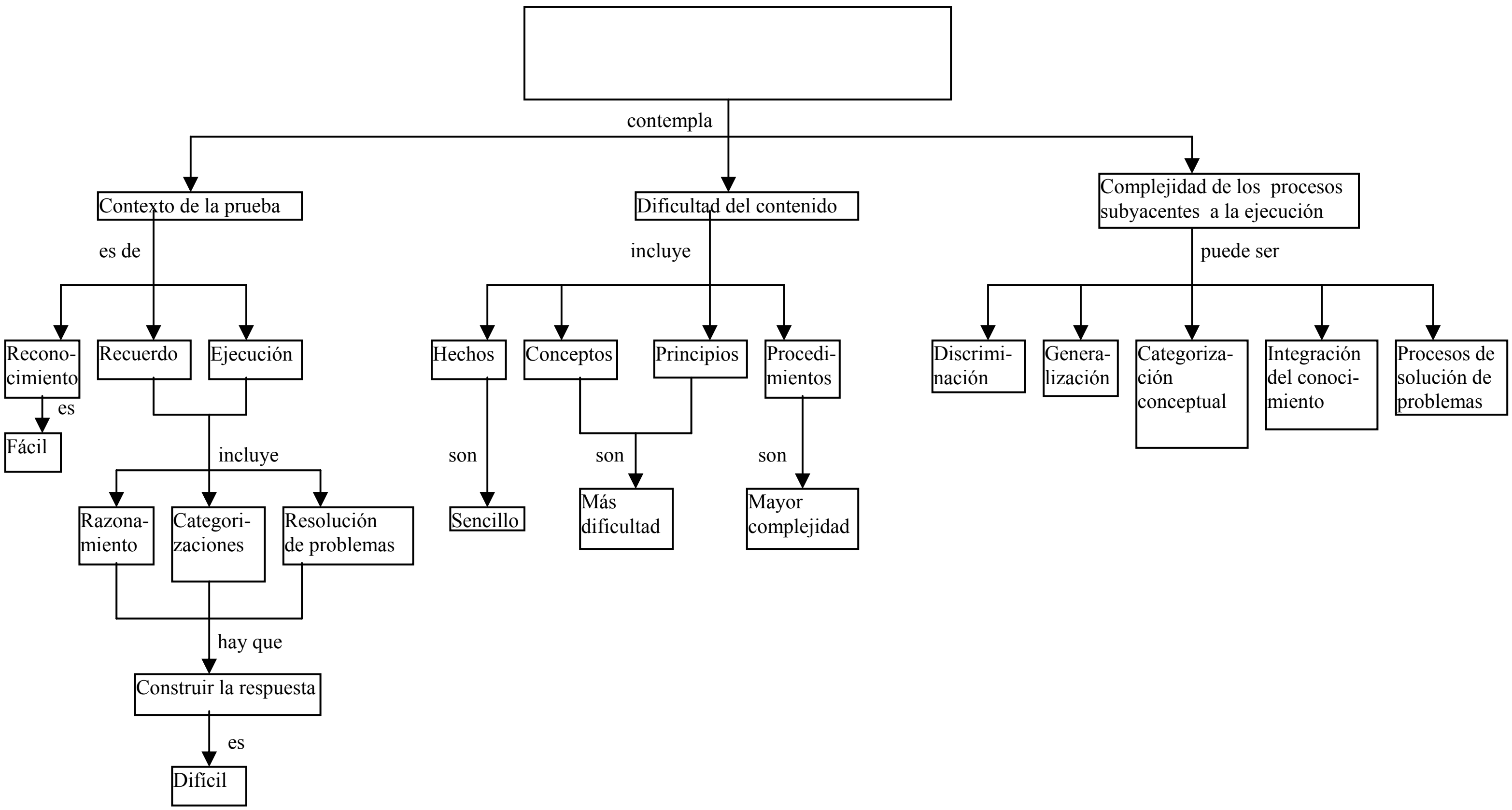
4. “Practicando para mejorar”, es una fase de refinamiento y consolidación de lo aprendido, a través de la resolución de ejercicios y/o problemas. Permite al alumno observar y corregir, errores, así como valorar aciertos en función de sus propios resultados. Se recomienda usar ilustraciones, explicaciones de procesos, etc.

5. “Enseñando y aprendiendo con conciencia”, esta fase corresponde a la autorregulación del aprendizaje donde se recomienda al profesor que oriente a los estudiantes para formularse preguntas para saber qué han aprendido, cómo han aprendido, qué no han aprendido, qué estrategias pueden poner a la práctica para mejorar su aprendizaje, etc..

6. “Evaluación del aprendizaje”, donde los autores (Castañeda, López, Arriola, y Martínez, 1994) proponen un “Modelo tridimensional de la evaluación del aprendizaje”, considerando como parte indispensable que la evaluación es un proceso planeado, sistemático, dinámico, etc. Este modelo se presenta en el mapa conceptual de la siguiente página.

A primera vista da la impresión de que el **modelo tridimensional de la enseñanza estratégica** no es operativo, porque va describiendo paso a paso cada actividad de la práctica educativa. Parecería que cada componente instruccional es independiente una de otra y que por lo tanto es necesario cubrir una para continuar con la siguiente, pero analizando el modelo se llega a la conclusión que las últimas cuatro componentes realmente están interrelacionadas y que todas ellas son dependientes, una misma actividad puede estar cubriendo las cuatro componentes. Por ejemplo la evaluación no es sólo al principio y al final, sino que es un proceso permanente y sistemático a lo largo de la práctica educativa. En conclusión el **modelo tridimensional de la enseñanza estratégica** resulta versátil y operativo.


DESARROLLO DE LA CLASE
considerar tipos de
Conocimiento declarativo
se puede incluir
Conocimiento conceptual
de
de
Conceptos 2º nivel complejidad
Principios 2º nivel complejidad
se obtienen con estrategias de
se estructuran con estrategias de
Elaboración de imágenes
a través de
Rota-folios
Ilustra-ciones
Elaboración verbal
a través de
Analogía
Para-fraseo
Conclu-siones
Gráfica de recupera-ción
Preguntas autogene-radas
Organiza-dores avanzados y posteriores
Conocimientos que se adquieren a través de procedimientos 3º nivel complejidad
corresponde
Algoritmos
consiste en
Reconocimiento de patrones
se usan procesos de
Genera-lización
Discrimi-nación
Secuencias de acción
se
Identifican
Describen
los
Pasos de un procedimiento
en forma
Declarativa
a través de
Algoritmos



contempla
Contexto de la prueba
Dificultad del contenido
Complejidad de los procesos subyacentes a la ejecución
es de
incluye
puede ser
Reconocimiento
Recuerdo
Ejecución
Hechos
Conceptos
Principios
Procedimientos
Discriminación
Generalización
Categorización conceptual
Integración del conocimiento
Procesos de solución de problemas
es
Fácil
incluye
son
son
son
Razonamiento
Categorizaciones
Resolución de problemas
Sencillo
Más dificultad
Mayor complejidad
hay que
Construir la respuesta
es
Difícil

1.2 FUNDAMENTOS DE LA PROPUESTA DIDACTICA.

Un primer pensamiento sobre la elaboración de este trabajo fue cubrir el contenido con una propuesta didáctica basada en Brousseau (1978), cuyo desarrollo se centra en situaciones problema para que el alumno cambie de concepciones. Después paso por la mente la infraestructura del plantel y por supuesto del salón de clase, los apoyos humanos, materiales y equipo con que se dispone en la institución, los grupos masivos que hay que cubrir, las características de los programas de estudio, la carga de trabajo, el no tener horas liberadas para construir situaciones problema para los contenidos de todo un programa de estudio. Los alumnos no están acostumbrados a trabajar en un ambiente de resolución de problemas y con todo esto, se entra en un proceso de desequilibrio del cual no es fácil salir.

Con 52 o más alumnos en un grupo la institución no promueve una enseñanza individualizada (personalizada) y aunque se consideren los diferentes estilos de aprendizaje de los alumnos, con 14 equipos de 4 integrantes cada uno y sin la posibilidad de circular adecuadamente entre el mobiliario queda claro que la institución promueve una enseñanza "masiva".

Para decidir que hacer en este trabajo se consideró que la propuesta no quede sólo como un ejemplo aislado de lo que se puede hacer con un grupo pequeño de alumnos, lo que aquí se va a proponer depende de los factores anteriores.

En conclusión se busca que la propuesta didáctica sea viable y que dependa del profesor-alumno-contenidos y no de otras variables difíciles de controlar.

Dado que la enseñanza de las matemáticas corresponde a una modelación de lo real y que los alumnos al aprender construyen concepciones y representaciones en su mente acordes con el mundo que les rodea (entorno) entonces la enseñanza no debe verse separada del aprendizaje por lo que en este trabajo el proceso de enseñanza aprendizaje se considerará como la práctica educativa cuyos elementos fundamentales son el profesor- alumno–contenidos (saber).

Los fundamentos de la propuesta didáctica son:

1.2.1 Concepción de aprendizaje.
1.2.2 Características de una situación problema.
1.2.3 Representaciones o concepciones iniciales.
1.2.4 Enfoque histórico.

1.2.1 CONCEPCION DE APRENDIZAJE

Dentro de la práctica educativa es indispensable contar con una concepción de aprendizaje, la cual se obtiene de una combinación de las teorías mencionadas en los antecedentes y cuyos elementos son: a) concepciones espontáneas, b) asimilación, c) acomodación, d) construcción de conocimientos y e) material significativo.

a) La base fundamental de la concepción de aprendizaje son las **concepciones espontáneas** (naturales) que cada sujeto construye en su mente para comprender el mundo que le rodea (entorno), por lo tanto las concepciones de un sujeto son personales y diferentes a las de otros sujetos puesto que depende de sus propias experiencias.

b) El sujeto tiene necesidad de interrelacionarse con el objeto para tratar de interpretarlo (**asimilarlo**) de acuerdo a sus propias concepciones iniciales en las estructuras cognitivas, durante éste proceso se dan desequilibrios (conflictos) cognitivos.

c) Para aprender el sujeto debe hacer un esfuerzo (consciente) por resolver los conflictos, es decir, necesita darle significado a la nueva información a través de la interrelación o anclaje con sus conocimientos preexistentes (concepciones iniciales) en los esquemas y/o estructuras cognitivas, dándose el proceso de **acomodación** .

El proceso de acomodación permite llegar a una nueva equilibración, por lo tanto hay que pasar de desequilibrios a equilibrios a fin de que haya una reestructuración de significados (cambios de concepciones en la mente).

d) Entendiéndose que un sujeto **construye nuevos conocimientos** cuando se dan cambios de concepciones en su mente.

e) El maestro necesita promover cambios de concepciones en los estudiantes, para ello requiere preparar **material significativo** y planear estrategias adecuadas que promuevan un anclaje entre la nueva información con los conocimientos previos y/o concepciones iniciales.

1.2.2 CARACTERISTICAS DE UNA SITUACION PROBLEMA.

Se promoverá la resolución de problemas colectivamente donde el alumno se responsabilice de su aprendizaje y el profesor funcione como coordinador y guía para que los estudiantes tengan una interrelación adecuada con los contenidos, aprendan de los errores y de las dificultades.

El maestro más que validar el conocimiento de los estudiantes tendrá que "devolver" las preguntas a los alumnos para que ellos mismos se cuestionen sobre su validez de manera que la práctica educativa estará permeada por un contrato, o ciertas "reglas" en las que se comprometen profesor y alumno y donde se establecen las funciones y responsabilidades de ambos. Algunas condiciones son implícitas como devolver las preguntas a los alumnos en la resolución de problemas y otras deben explicitarse (por ejemplo que no importa que se equivoquen en los procedimientos o en la solución), lo importante es que ellos mismos identifiquen sus errores y/o los de sus compañeros y además propongan como corregirlos.

Se recomienda que los alumnos pasen por las siguientes etapas al intentar resolver un problema:

1. Acción.
2. Formulación.
3. Validación.
4. Institucionalización.

1. En la **acción** se enfrentará a los alumnos con el problema para que pongan en práctica cierto(s) procedimiento(s) para intentar resolverlo con base en sus conocimientos previos, en esta etapa lo importante será la confrontación del estudiante con el problema.

2. En la **formulación** el mismo trabajo colectivo los enfrenta a la necesidad de hacer preguntas, explicarlas y justificarlas ante sus compañeros. Los equipos entregarán un reporte del

trabajo realizado, el cual elaborarán mientras resuelven el problema, entonces la situación requerirá que sean explicitados los conocimientos en un lenguaje que pueda ser entendido por los demás.

3. Se dará importancia a la confrontación entre los equipos en una puesta en común, donde se resaltarán los diversos procedimientos puestos en acción por los equipos y las diversas creencias de los alumnos. En la confrontación cada equipo necesita explicitar sus mejores argumentos para convencer a los demás y el grupo en general debe validar o identificar errores con base en los argumentos presentados, por ello a dicha etapa se le llamará de **validación**.

4. Para integrar el conocimiento de los alumnos a los conocimientos socialmente establecidos el profesor procede a **institucionalizar** los contenidos.

En esta etapa el maestro hace referencia de la notación y simbología (convenciones) que usan los libros en el desarrollo de los contenidos.

La función del profesor es de coordinar, guiar y promover que se realice de la mejor manera cada etapa.

1.2.3 REPRESENTACIONES O CONCEPCIONES INICIALES

Con la finalidad de contar con información sobre las concepciones que tienen los estudiantes acerca de un estímulo se aplicará la técnica de redes semánticas (Reyes, 1993) para indagar el contenido semántico que poseen los alumnos en relación con la función exponencial. El procedimiento consiste en: Producir definidoras, es decir, se solicitará a los alumnos que en tres minutos anoten con claridad y precisión cinco palabras que permitan definir "exponencial" y "función", después se asigna un minuto para que cada estudiante jerarquice (asigne un número del uno al cinco) las cinco palabras producidas según su importancia. Esta información debe analizarse inmediatamente en casa para que el maestro a partir de los 5 o 10 conceptos con mayor peso semántico desarrolle sus estrategias.

1.2.4 ENFOQUE HISTORICO

En matemáticas es importante el aspecto histórico, porque *"el modelo histórico es útil en la enseñanza y puede facilitar la comprensión de las dificultades que supone el aprendizaje de determinados fenómenos científicos, así como orientar al profesor en el tratamiento de las concepciones alternativas de los estudiantes"* (Rodríguez Moreno, 1998).

Efectivamente se puede estar de acuerdo que el contexto histórico permite conocer las diferentes etapas que atravesó el hombre en la construcción de determinado contenido y en particular saber como resolvió las diversas dificultades a las que se enfrentó. El enfoque histórico se puede presentar en forma general, pero no es conveniente en cada contenido específico, pues el sujeto actual no tiene una larga vida, para pasar por las diversas concepciones que se han dado a través de la historia en cada uno de los contenidos, además, el entorno que rodea actualmente al estudiante es muy diferente al de nuestros antepasados y en consecuencia las concepciones de un alumno actual no son iguales a las de un alumno de siglos atrás, es natural que sólo algunas de ellas tengan coincidencia o parecido.

A continuación se presentan algunos datos interesantes de la historia del concepto de función.

HISTORIA DEL CONCEPTO DE FUNCION

Hay indicios que permiten pensar que los primeros en trabajar algún aspecto relacionado con la función fueron los babilonios, ya que éstos se interesaron en la astronomía y la astrología, su interés los llevó a la necesidad de observar y hacer predicciones sobre algunos acontecimientos, construyeron tablillas donde se observan relaciones del ángulo que forma un planeta con el sol y las etapas en que dicho planeta era visible. Los documentos de los astrónomos babilonios presentan con toda certeza tabulaciones de funciones (Funciones y gráficas, Azcárate, C. y Deulofeu, J. 1990, Cap. 2, ed. Sintesis, España).

En el período de los griegos el concepto de función no avanzó como podría esperarse, debido a ciertos obstáculos epistemológicos, tal es el caso de la trascendencia que tuvo en Grecia el uso de las proporciones, éstas no permitieron el avance de la función porque en ellas no sé explícito la dependencia entre las magnitudes distintas. Los pocos avances de la función se le reconocen a los pitagóricos, puesto que determinaron *"...las leyes simples de la acústica que representan un intento para buscar relaciones cuantitativas de dependencia entre variables físicas, como por ejemplo las longitudes de las cuerdas y los tonos de las notas emitidas al pulsarlas" (op. cit. pág. 41)*. En este período los pitagóricos conservaban la idea de que todo era número, pero el problema de la inconmensurabilidad promovió la distinción entre magnitud y número, ya que se estableció la existencia de magnitudes no medibles. Lo anterior al parecer también fue un obstáculo epistemológico para el concepto de función. Los griegos trabajaron con la idea de movimiento, de cambio y llegaron a considerar algunas cantidades variables pero no lo hicieron cuantitativamente y, además, priorizaron el estudio de la matemática pura, se cree que por ello el concepto de función no evoluciono.

Otros obstáculos de la función en dicha época fueron la ausencia de símbolos para una expresión algebraica, así como el enfoque geométrico de la matemática griega, a pesar de ello Diofanto avanzo en el planteamiento del lenguaje común con conceptos relacionados con la dependencia funcional. En conclusión *"... el estudio de fenómenos de cambio es aun muy reducido y que las aproximaciones cuantitativas y cualitativas de dichos fenómenos se hallan todavía totalmente disociadas y por tanto no es posible hablar de la formulación explícita de nociones como variable, dependencia o función." (op. cit. p. 43)*. Posteriormente los árabes retomaron el trabajo realizado por los griegos y avanzaron en las funciones trigonométricas, sin embargo, no hay bases para considerar que llegaron al concepto general de una función. Aproximadamente en el año 1300 (siglo XIV) la matemática toma en consideración las ciencias naturales, debido a esto hay un auge en la ciencia experimental porque el hombre busco las causas que originaban los fenómenos naturales, los principales precursores fueron las escuelas de filosofía natural de Oxford y París influenciadas por los científicos Roger Bacon o Robert Grosseteste. Desde un siglo atrás (XIII) los estudios de los fenómenos naturales quedaron registrados cuantitativamente, en particular los fenómenos de cambio y de movimiento, siguiendo la línea de Aristóteles se analizan fenómenos como luz, calor, velocidad, además se analizan algunas cualidades como: velocidad instantánea, aceleración, presentándose así cantidades variables relacionadas con el concepto de función.

En el siglo XIV (1323-1382) en Francia Nicolás Oresme uso coordenadas que les llamo longitud y latitud, *"Oresme pretende que se entienda más fácil y más rápidamente la naturaleza de los cambios, ya sean cuantitativos o cualitativos, de forma que sea posible dar una representación de todos ellos."* (op. cit. p. 45). Tres siglos después (XVII) de las coordenadas que uso Nicolás Oresme (longitud, latitud), otros matemáticos famosos como Rene Descartes y Pierre de Fermat también usaron coordenadas en su trabajo. Cabe destacar que las investigaciones de Fermat sólo se publicaron después de su muerte, él era abogado de profesión y en sus ratos libres se dedicaba a la matemática.

Galileo (1564-1642), desarrolló experimentos tomando datos cuantitativos y estableciendo relaciones funcionales entre las magnitudes, por eso es un gran impulsor del concepto de función. Un obstáculo epistemológico que seguía frenando el avance del concepto de función fue la ausencia de símbolos algebraicos adecuados en el siglo XVI.

En la segunda mitad del siglo XVI ya se habían superado los siguientes obstáculos epistemológicos: se hizo una extensión del concepto de número, apareció el álgebra simbólica, se le dio forma a los números reales, se introdujeron signos para muchas operaciones y literales para incógnitas y variables (op. cit.). Las investigaciones de otros matemáticos como Galileo, Newton, Leibnitz y Gregory promovieron el descubrimiento de la geometría analítica y posteriormente del cálculo infinitesimal, los cuales impulsaron diferentes definiciones de una función.

A principios del siglo XVII con los avances descritos hasta el momento, una función podía representarse con lenguaje natural o a través de una tabla o por medio de una gráfica pero aun no estaba establecido un lenguaje adecuado para la misma. En 1637 Descartes público sus ideas más importantes en su libro "La Géométrie" el cual marca el surgimiento de la geometría analítica porque se analizan curvas por medio de ecuaciones, *"... en este mismo trabajo aparece por vez primera el hecho de que una ecuación en x e y es una forma para expresar una dependencia entre dos cantidades variables, de manera que, a partir de ella, es posible calcular los valores de una variable que corresponden a determinados valores de la otra."* (op. cit. p. 47). Descartes sólo simbolizó las funciones algebraicas. El plano cartesiano se llama así en honor a Descartes a pesar de que él no usaba el sistema rectangular como hoy en día lo conocemos.

Aproximadamente en 1637 Pierre de Fermat escribió sus ideas principales que fueron publicadas en 1679 sobre el método de coordenadas, tomando un eje de referencia y sobre el un punto fijo como origen y en los extremos segmentos perpendiculares. Lo anterior fue el "trampolín" para el concepto de función.

Newton (1642-1707) *"...tomando el tiempo como argumento analiza las variables dependientes como cantidades continuas que poseen una determinada velocidad de cambio."* (op. cit. p. 48). En 1671 Newton escribió un trabajo sobre el método de fluxiones y series infinitas éste se publicó después de 1736, expuso sus ideas sobre el cálculo infinitesimal (diferenciación e integración).

Gottfried W. Leibnitz (1646-1716) fue un impulsor del concepto de función con su trabajo de “series infinitas” donde determinó que la tangente a una curva depende de la razón entre las diferencias de las ordenadas y de las abscisas cuando éstas tienden a cero. Leibnitz introdujo la notación para las diferenciales (dx,dy) y para la integral . *“El término función aparece por vez primera en un manuscrito de Leibnitz de 1673”* (op. cit. p. 49) dicho término lo utiliza en un problema específico, pero en 1694 lo vuelve a utilizar dándole un sentido más general.

Jean Bernoulli (siglo XVII) dice que una función de x es una cantidad expresada de cualquier manera a partir de la x y de constantes, por lo tanto a estas alturas ya se consideraban tanto las funciones algebraicas como las trascendentes, ésta definición fue publicada en 1718.

El matemático Suizo Leonhard Euler (1707-1783) fue el primero en utilizar la notación actual de funciones f(x) en 1740 y posteriormente en 1748 publica “Introduction in analysis infinitorum” donde expone un trabajo minucioso sobre el concepto de función y define a ésta como *“Una función de una cantidad variable es una expresión analítica formada de cualquier manera a partir de esta cantidad variable y números o cantidades constantes”* (op. cit. p. 50). Euler también dice que término constante es una cantidad definida que toma siempre un mismo valor determinado, y variable es una cantidad indeterminada, o universal, que comprende en sí misma todos los valores determinados, con el paso de los años Euler continua dedicado a las funciones y en 1755 se publica “Institutiones calculi differentialis” donde presenta otra definición más acabada del concepto de función *“si x es una cantidad variable, entonces toda cantidad que dependa de x de cualquier manera o que esté determinada por aquél se llama una función de dicha variable.”* (op. cit. p. 51). Los cambios en el concepto de función responden a las necesidades de la época y son acordes a la problemática de la misma, la definición anterior es ampliada en el siglo XVIII por los matemáticos Fourier, Lagrange, Cauchy y Dirichlet. En la antigüedad la idea que sé tenia prevaleció durante largos siglos, mientras que en el siglo XIX se dieron cambios frecuentes a la definición de Euler, dichas modificaciones condujeron a una definición más general, tal es el caso de las definiciones de Dirichlet y la correspondiente a un enfoque conjuntista. La idea inicial de este apartado de historia era no saturar de tanta definición, pero no es posible concluir esta pequeña descripción histórica sin antes mencionar las dos definiciones que cierran con broche de oro el siglo XIX. Tal es el caso del planteamiento general que hace Dirichlet en el año 1837 en el que establece que *“si una variable y está relacionada con otra variable x de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y, entonces se dice que y es una función de la variable independiente x.”* (op. cit. p.52). Analizando éste planteamiento y revisando diversos libros de texto a nivel bachillerato, se llega a la conclusión que muchos de ellos incluyen en el desarrollo del tema dicha definición con algunas variantes, como por ejemplo hablar de los conjuntos a los que pertenecen las variables, es decir, con base en la definición el autor establece su respectivo enfoque. Son menos los textos que presentan la perspectiva conjuntista, siendo ésta más general que la anterior donde *“... dados dos conjuntos arbitrarios A y B una función (o aplicación) de A en B es una ley que a cada elemento x de A hace corresponder un solo elemento y de B; o si se prefiere, una función de A en B es un subconjunto F del producto cartesiano AxB tal que si (x,y) y (x,z) pertenecen a F entonces y=z.”* (op. cit. p.53). Actualmente para tratar el concepto de función es inevitable introducir los conjuntos a los que pertenecen las variables y hablar de dominio e imagen de la función.

Uno de los objetivos propuestos al incluir este apartado de historia se ha cumplido, porque se ha tenido la oportunidad de conocer a grandes rasgos las diferentes concepciones que la humanidad ha utilizado a lo largo de más de 2000 años. Nos damos cuenta que en los primeros siglos después de Cristo el cambio de concepciones se da lentamente y en algunos siglos parece permanecer estable, mientras que del siglo XVII al siglo XIX se dan cambios muy importantes en lapsos de tiempo relativamente cortos e incluso en diferentes partes del mundo, se estudian paralelamente diversos problemas que conducen a resultados similares (análogos). Cabe mencionar que en 1830 los matemáticos Riemann, Cauchy y Weierstrass desarrollaron la teoría de funciones complejas.

En conclusión del siglo XVII hasta nuestros días el concepto de función ha tenido mucho auge, por la necesidad que el hombre ha tenido de utilizarlo en la problemática que enfrenta (científica, tecnológica, etc.). La idea de retomar la historia en este trabajo es para proponer una práctica educativa congruente con la evolución histórica del concepto de función.

En la propuesta didáctica del "Planteamiento de problemas que conduzcan a una función exponencial y su representación gráfica" se eligió el **enfoque histórico** porque:

- Conduce al estudiante **de lo simple a lo complejo**.
- La **secuencia** de una etapa a otra es lógica.
- **Integra** los conocimientos previos hasta llegar a la última etapa que es la más abstracta.

Se concluye que el **enfoque histórico** del concepto de función pasa por cuatro etapas, cuya jerarquía está establecida por el orden en que nuestros antepasados fueron descubriendo el concepto de función, las representaciones en orden histórico son: 1. Lenguaje común, 2. Tablas, 3. Gráficas, y por último mediante 4. Fórmulas o lenguaje algebraico.

1. Primero surgieron problemas que el hombre verbalizó y analizó utilizando el único medio que tenía (el lenguaje), así se familiarizó con la "**representación en lenguaje común**" de una función para comprender el problema.
2. La segunda etapa consiste en presentar en forma organizada los valores correspondientes a las variables involucradas en el problema. Se acostumbra llamarle "**representación tabular**" porque la estructura que se adopta es la de una tabla. Además, la representación tabular permite observar algunas características de la función las cuales no es posible detectar fácilmente en la representación en lenguaje común.
3. Utilizando una tabla es posible construir una "imagen" o "dibujo" de la función, se le llama "**representación gráfica**" de la función, en dicho dibujo podemos visualizar más características de la misma y analizar su comportamiento.
4. Tomando en cuenta las tres etapas anteriores es posible dar el "brinco" a la cuarta etapa correspondiente a la "**representación algebraica**", ésta es la más abstracta porque consiste en la formalización de una función.

A través de la historia la matemática ha adquirido las siguientes características (Colegio de

Bachilleres, programa de la asignatura Matemáticas II, 1993):

- El **Rigor Lógico**. Se refiere a la secuenciación rigurosa de las construcciones teóricas y metodológicas de la matemática.
- El **Carácter Abstracto**. Está relacionado con los procesos mentales que se realizan para manejar el lenguaje e identificar las características de los objetos y producir imágenes mentales.
- El **Lenguaje Simbólico**. Permite elaborar modelos matemáticos con su respectiva simbología.
- El **Carácter Integrador**. Es necesario reestructurar los conocimientos, esto se logra con la recuperación e integración de los conceptos previos.

2. METODOLOGIA

El estudio que se realizará será de tipo exploratorio, ya que se pretenden indagar las concepciones de los alumnos, conocer los conocimientos previos y ver que impacto tiene el desarrollo de una propuesta didáctica que permita generar aprendizaje significativo en el estudiante a partir del tema "Planteamiento de problemas que conduzcan a una función exponencial y su representación gráfica".

2.1 PREGUNTAS DE INVESTIGACION

A partir de la revisión anterior y considerando la propuesta que se pondrá en práctica, se definen las siguientes preguntas de investigación:

¿Cuáles son las concepciones de los estudiantes respecto a la función exponencial?

¿Cuáles son los conocimientos previos de los alumnos con respecto a la función exponencial?

¿Cuál sería una alternativa para mejorar la práctica educativa desarrollada hasta ahora en el contenido función exponencial?

¿Mejorará la calidad del aprendizaje con una propuesta de enseñanza basada en el enfoque histórico?

2.2 OBJETIVOS DE ESTUDIO

- Identificar las concepciones que tienen los alumnos respecto a la función exponencial a través de dos redes semánticas, con base en las palabras "función" y "exponencial".
- Diseñar y aplicar una evaluación diagnóstica para identificar los conocimientos y habilidades previos de los alumnos.
- Desarrollar una propuesta didáctica que permita generar aprendizaje significativo en el estudiante a partir del tema función exponencial.

2.3 VARIABLES

Variable independiente: Propuesta didáctica.
Variable dependiente: Calidad de aprendizaje del estudiante en: representaciones conceptuales, conocimientos y habilidades.

2.4 PARTICIPANTES

El estudio se aplicará a los alumnos de segundo semestre del Colegio de Bachilleres, plantel número 13 “Xochimilco–Tepepan” turno matutino, específicamente al grupo 201.

2.5 ESCENARIO

Cada una de las actividades propuestas se llevará a cabo en el salón de clase correspondiente, con un espacio físico de seis metros de ancho por seis metros de largo, hay 60 sillas individuales y 30 mesas binarias para los alumnos, una silla y una mesa para el profesor, no se dispone de enchufes para conexiones eléctricas.

Número de horas clase: 6
Número de horas para el postest: 2
Número de sesiones: 4 (2 horas para cada sesión).
Fechas: 13, 16, 18 y 19 de noviembre de 1998.
Horario: de 13.00 a 15.00 hrs.

2.6 MATERIALES

Los materiales se explicitan en cada uno de los procedimientos incluidos en el punto 2.7.

2.7 PROCEDIMIENTOS

2.7.1 REDES SEMANTICAS

Los conceptos que los estudiantes han aprendido los construyeron de su realidad. De ahí que es primordial conocerlos, para ello es fundamental indagar las representaciones y/o concepciones. Una de las técnicas más recomendadas son las redes semánticas que permiten conocer el contenido semántico que poseen los alumnos con relación a un concepto (estímulo), además, ayudan a organizar y jerarquizar la información (Reyes, 1993).

El profesor necesita conocer las concepciones previas que manejan sus estudiantes para: a) definir la(s) situación(es) de aprendizaje y b) para anclar la nueva información.

Se elaborarán dos redes semánticas con las palabras “función” y “exponencial”, el material que requiere el alumno es una hoja de papel y un lápiz o bolígrafo.

El procedimiento para la indagación es el siguiente:

- Los alumnos producen al menos 5 definidoras (verbos, adjetivos, adverbios, sustantivos, etc.).
- Los alumnos jerarquizan las definidoras según su importancia (en orden decreciente).
- Se concentran los datos en un listado con las palabras generadas por cada alumno del grupo y se escriben las frecuencias y la jerarquización otorgada a cada palabra.
- Una vez concentrados los datos se calcula el tamaño de la red (TR) multiplicando el número de alumnos por el número total de definidoras.
- Se calcula el valor ponderado (VP) multiplicando la ponderación por la frecuencia.
- Se determina el peso semántico (PS) obteniendo la sumatoria de los valores ponderados.

- Elaborar una lista jerarquizando las palabras de mayor a menor peso semántico.
- Obtener el núcleo de la red (NR) con las 10 definidoras de mayor peso semántico.
- Para calcular la distancia semántica (DS), a partir de la definidora de mayor peso semántico se calcula la diferencia entre cada dos pesos semánticos consecutivos.
- Se hace una red semántica, cuyo nodo principal es el "estímulo" y de éste salen las 10 definidoras con mayor peso semántico.
- Se obtiene la distancia semántica expresada en porcentaje asignándole el 100% a la definidora con mayor peso semántico y se obtienen los otros porcentajes a través de la proporcionalidad directa.

La red semántica tiene el inconveniente de que consume mucho tiempo para su elaboración, porque son muy laboriosos sus cálculos, además, hay que trabajar todos los datos inmediatamente a su aplicación para que la información sea oportuna y se puedan diseñar (o ajustar) las estrategias didácticas adecuadas.

2.7.2 EVALUACION DIAGNOSTICA (PRETEST)

Con la finalidad de diseñar la evaluación diagnóstica para indagar los conocimientos y habilidades previos que tienen los alumnos antes del desarrollo de la clase, es necesario determinar los conocimientos declarativos y de procedimientos que se consideran prerrequisito del contenido y que serán necesarios para que el contenido que se aborde en clase tenga significado para los estudiantes.

Los resultados que se obtengan de la evaluación diagnóstica serán considerados para proponer las actividades a desarrollarse en la práctica educativa, más específicamente en el desarrollo de la clase. A continuación se presentan dos cuadros con los diferentes conocimientos declarativos y de procedimientos previos, acompañados del aprendizaje que el alumno debe poseer. La primera columna de cada cuadro corresponde al número del reactivo en la evaluación diagnóstica o pretest (anexo 2).

REACTIVO	CONOCIMIENTO DECLARATIVO	APRENDIZAJES
1	Función	Identificar una función.
2	Dominio	Concepto de dominio de una función.
2	Imagen	Concepto de imagen de una función.
3	Variable dependiente	Identificar la variable dependiente en una ecuación.
3	Variable independiente	Identificar la variable independiente en una ecuación.
9	Dominio	Identificar el dominio en una representación gráfica.
9	Imagen	Identificar la imagen en una representación gráfica.

REACTIVO	CONOCIMIENTO DE PROCEDIMIENTOS	APRENDIZAJES
4	Representación gráfica	Identificar las coordenadas rectangulares de pares ordenados en el plano cartesiano.
5	Representación gráfica	Evaluar una función.
6	Leyes de los exponentes	Aplicar las leyes de los exponentes.
7	Dominio	Determinar el dominio de una función con base en la regla de correspondencia.
8	Representación gráfica	Representar parejas ordenadas en el sistema coordenado rectangular.
9	Representación gráfica	Analizar e interpretar una representación gráfica.

A continuación se presenta la tabla de especificaciones de la evaluación diagnóstica, en ella se ubica cada reactivo dentro de los tres ejes del modelo de evaluación.

TABLA DE ESPECIFICACIONES

Número De reactivo	CONTEXTO DE LA PRUEBA		DIFICULTAD DE LOS CONTENIDOS			COMPLEJIDAD DE LOS PROCESOS			
	Reconocimiento	Recuerdo	Concepto	Principio	Procedimiento	Identificar	Categorizar	Inferir	Solución De problemas
1	x		x			x			
2		x	x				x		
3		x	x			x			
4		x	x			x			
5		x			x				x
6		x		X					x
7		x			x			x	
8		x			x		x		
9		x			x				x

La evaluación diagnóstica se aplicará a los alumnos del grupo 201 que cursan matemáticas II, turno matutino, plantel 13 del C.B. La aplicación se realizará en el salón de clase, los materiales que se utilizarán serán una fotocopia del examen (anexo 2) para cada alumno, ya que, éste será resuelto individualmente por los estudiantes, además se necesita: lápiz, goma y sacapuntas. Para no tener contratiempos en la aplicación, el profesor será el encargado de fotocopiar los exámenes con previa anticipación, llevarlos el día establecido y aplicarlos a los alumnos.

El procedimiento para la aplicación de la evaluación diagnóstica será el siguiente:

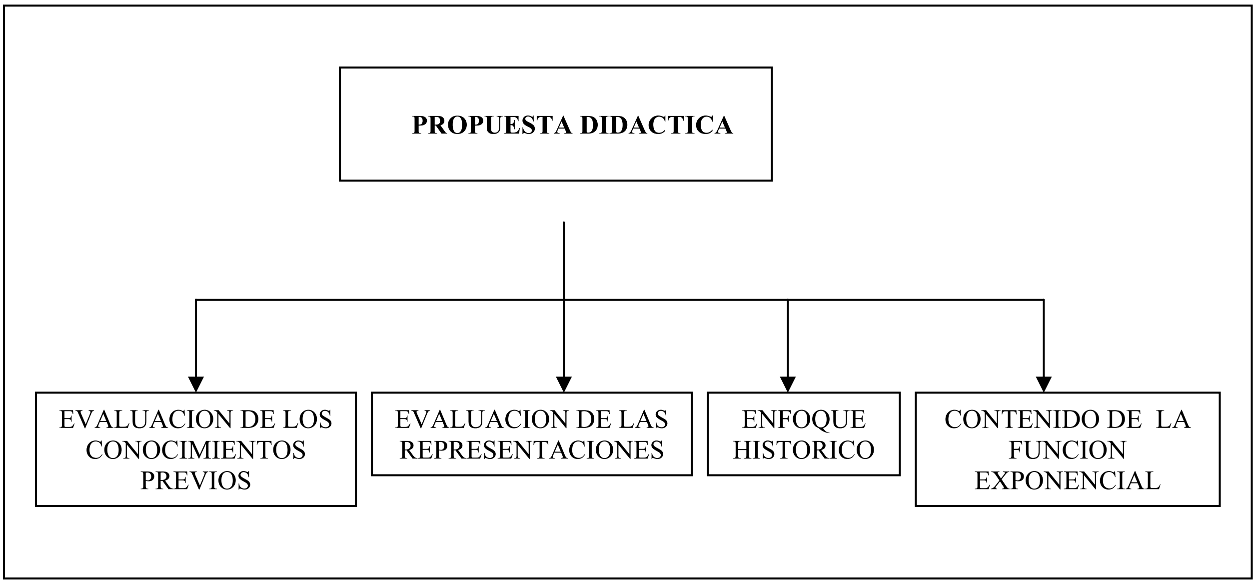
El profesor:

- Solicitará a los alumnos que guarden sus cuadernos, libros, mochilas y que sólo dejen en su mesa, lápiz, goma y sacapuntas.
- Explicará el objetivo que se pretende con la aplicación de la evaluación diagnóstica.
- Indicará que sólo aclarará dudas técnicas respecto a la prueba, es decir, no explicará dudas sobre los contenidos.
- Indicará que la resolución del examen es individual y por lo tanto solicitará no hacer comentarios con sus compañeros en el transcurso de la aplicación.
- Indicará que los alumnos que deseen usar calculadora pueden hacerlo.
- Avisará a los estudiantes que disponen de una hora para resolver el examen, contando a partir del momento en que sé de inicio a la misma.
- Distribuirá una fotocopia del examen a cada alumno.
- Solicitará que escriban los datos generales en su examen.
- Indicará que cuando terminen de contestar el examen alcen la mano.
- Avisará que la resolución del examen da inició, anotará en el pizarrón la hora de inicio y la hora de término.
- En el transcurso de la aplicación supervisará que ésta se realice en condiciones adecuadas.

- Conforme los alumnos vayan terminando irá recogiendo los exámenes e invitará a los alumnos a retirarse del salón de clase.
- Cuando falten cinco minutos para concluir la hora de aplicación hará un aviso a los estudiantes.
- Al término de la hora recogerá los exámenes faltantes.

Una vez aplicada la evaluación se procederá a realizar una valoración cuantitativa y sobre todo cualitativa, para identificar los conocimientos y habilidades de los estudiantes, conocer las deficiencias, dificultades y creencias de los mismos.

3 PROPUESTA DIDACTICA



Con base en el análisgis realizado es posible hablar de un modelo de enseñanza adecuado para el contenido “Planteamiento de problemas que conduzcan a una función exponencial y su representación gráfica”, dicho modelo cuenta con:
a) Los resultados de la evaluación diagnóstica.
b) Las concepciones “operación” y “exponente” obtenidas en las redes semánticas.
c) Un enfoque histórico.
d) El contenido de la función exponencial.

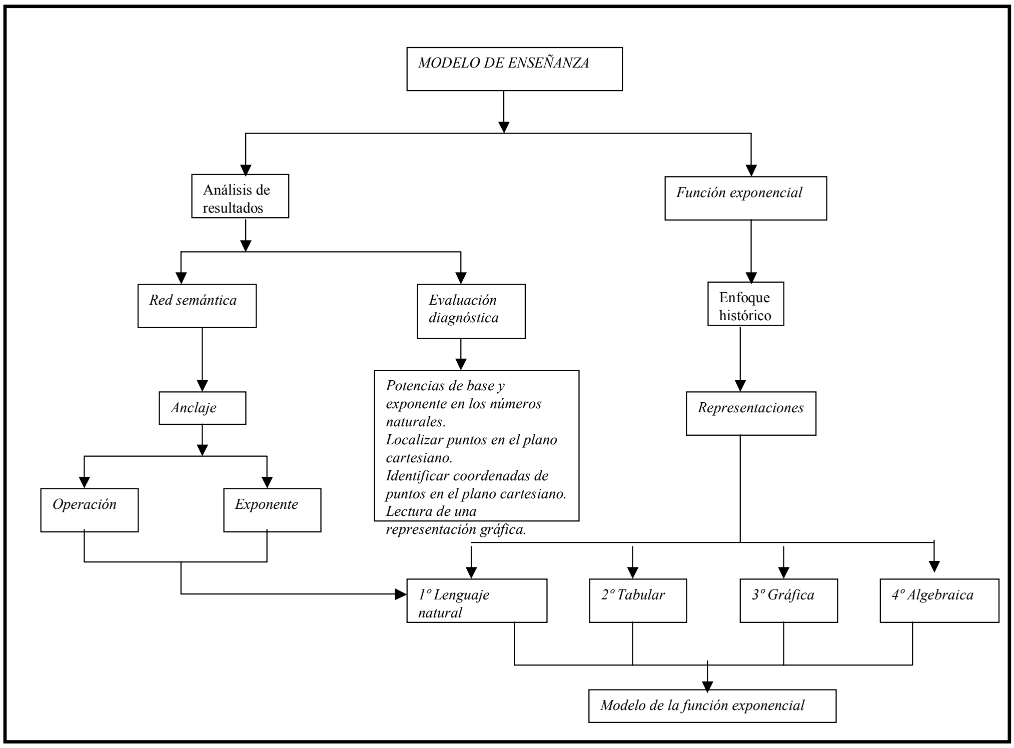
a) Los **prerrequisitos** (anexo 2) no podían dejarse de lado porque son fundamentales al hacer una propuesta para mejorar el aprendizaje de un tema. Las evaluaciones cuantitativa y cualitativa de los mismos se pueden revisar con detalle en los resultados.

b) Otro elemento a considerar son los resultados de las **concepciones** de los alumnos (anexos 3 y 4). Respecto a la palabra “función” tal vez el único disponible pueda ser “operación”, ya que para evaluar numéricamente una función hay que resolver las operaciones establecidas en la regla de correspondencia. En cuanto a la palabra “exponencial” las concepciones rescatables son “exponente” y “potencia”, aunque con sus reservas, ya que en la evaluación diagnóstica los estudiantes sólo contestaron adecuadamente las potencias con exponente en los números naturales y base también en los números naturales y cuando aparecieron exponentes enteros y/o base racional se presentaron muchas deficiencias.

c) La idea de retomar el **enfoque histórico** en este trabajo es para proponer una práctica educativa congruente con la evolución histórica del concepto de función. Nuestros antepasados descubrieron diversas representaciones, las cuales se fueron presentando en el siguiente orden: lenguaje común, tablas, gráficas y por último mediante fórmulas o expresiones algebraicas.

d) Fue necesario revisar bibliografía específica del **tema "función exponencial"** para identificar los contenidos fundamentales en dicho tema, conocer los diversos enfoques de cada texto y la variedad de aplicaciones que tiene la función exponencial, a fin de valorar los niveles de profundidad y complejidad de los problemas que se seleccionaron para la práctica educativa (anexo 5).

A continuación se presenta un mapa conceptual del modelo descrito para la propuesta didáctica.



3.1 OBJETIVOS DEL TEMA FUNCION EXPONENCIAL

La propuesta se aplicará en un grupo de segundo semestre, por ello es necesario considerar los siguientes objetivos:
1.- Objetivo de la asignatura Matemáticas II.
2.- Objetivo de la unidad 3.
3.- Objetivo general.
4.- Objetivos específicos.

1.- Para la realización de este trabajo se eligió el programa de asignatura de matemáticas II que los alumnos cursan en el segundo semestre de bachillerato, dentro del área propedéutica en el plan de estudios, **esta asignatura pretende** que “A partir del estudio del álgebra, de las funciones lineales, cuadráticas, polinomial, exponencial y logarítmica, y su relación con la ecuación (según sea el caso) el estudiante desarrolle habilidades de análisis y de sistematización a nivel conceptual y operativo, estableciendo las relaciones entre conceptos algebraicos y los fenómenos y problemas cotidianos destacando su generalización y abstracción”.

2.- El interés particular de lo que se desarrollará en esta propuesta quedará ubicado dentro de la unidad 3 **cuya intención es** que “El estudiante desarrollará el concepto de función, elaborará su gráfica, identificará sus elementos (regla de correspondencia, dominio, contradominio e imagen)”.

3.- La propuesta hará énfasis en la función exponencial a través del siguiente **objetivo general** “El alumno obtendrá la función exponencial a partir del planteamiento de problemas en lenguaje común y la representará gráficamente”.

4.- El contenido correspondiente al “Planteamiento de problemas que conduzcan a una función exponencial y su representación gráfica” se desarrollará en clase tomando en cuenta los siguientes **objetivos específicos**:

- Obtener la expresión algebraica de una función exponencial a través del planteamiento de problemas.
- Representar gráficamente algunas funciones exponenciales.
- Resolver problemas utilizando la función exponencial.
- Definir la función exponencial.
- Identificar algunas características generales de la función exponencial.

Para cubrir los objetivos específicos en la práctica educativa es indispensable considerar: a) los conocimientos declarativos y b) los conocimientos de procedimientos, con el fin de proponer actividades adecuadas para que los alumnos construyan su conocimiento.

a) Conocimientos declarativos.

- Concepto de función exponencial creciente.
- Concepto de función exponencial decreciente.
- Idea intuitiva de función continua.
- Definición de función exponencial.

b) Conocimientos de procedimientos.

- Evaluar una función exponencial para valores definidos de la variable independiente y así obtener la tabla correspondiente.
- Representar gráficamente una función exponencial con base en su regla de correspondencia.
- Determinar el dominio de una función exponencial analizando los valores donde está definida la variable independiente.
- Determinar la imagen (rango) de una función exponencial a partir de su dominio.
- Interpretación de tablas numéricas a partir de los datos.
- Interpretar la representación gráfica de una función exponencial.
- Obtener la expresión algebraica de una función exponencial con base en el planteamiento de un problema en lenguaje común.

Considerando los conocimientos declarativos y de procedimientos se puede identificar las siguientes **habilidades** fundamentales en el desarrollo del contenido “Planteamiento de problemas que conduzcan a una función exponencial y su representación gráfica”:

- Representación gráfica de una función exponencial a partir del planteamiento de un problema en lenguaje común.
- Representación gráfica de una función exponencial con base en la regla de correspondencia.
- Interpretación de una representación gráfica.

3.2 CONSIDERACIONES PARA INCLUIR CADA REACTIVO EN LA EVALUACION DIAGNOSTICA (PRETEST).

Cubriendo los aspectos establecidos en la tabla de especificaciones se diseñaron los reactivos de la evaluación diagnóstica o pretest (anexo 2).

A continuación se incluyen algunas consideraciones que se tomaron en cuenta para determinar la inclusión de cada reactivo. La numeración siguiente corresponde al número del reactivo en dicha evaluación.

1.- La intención en esta pregunta es que el alumno identifique entre algunas gráficas, cuál es la que representa una función, reconociendo que cada número real en el dominio debe estar relacionado con un sólo valor de "y", es decir, que cada elemento del dominio tenga sólo una imagen.

2.- En esta pregunta el propósito es que el alumno recuerde la definición de dominio e imagen de una función con base en una frase que deberá de completar. Se espera que la mayoría de los estudiantes contesten correctamente, ya que deben estar familiarizados con ambos conceptos y como en el enunciado de la pregunta se escribe la definición es de esperarse que recuerden cual corresponde al dominio y a la imagen respectivamente.

3.- Este reactivo se incluyó para ver si los alumnos recuerdan los conceptos de variables dependientes e independientes y con base en esto las identifiquen en algunas ecuaciones. Ya que son fundamentales dentro del concepto de una función.

4.- Como las representaciones gráficas se construyen con base en la localización de puntos en el plano cartesiano, entonces es muy importante, que los estudiantes recuerden la ubicación de las coordenadas rectangulares de los puntos en el plano cartesiano, y que identifiquen que la primera coordenada corresponde al eje "x", mientras que la segunda a "y".

5.- Para construir una representación gráfica es importante manejar las operaciones básicas con números reales, en particular hay que saber evaluar las funciones para los valores de x en el dominio de la misma. Esta pregunta precisamente pretende identificar si los estudiantes recuerdan el procedimiento para evaluar una función y ver si realizan las operaciones en el orden adecuado.

6.- El objetivo por el que se incluye esta pregunta es para ver si los alumnos recuerdan algunas de las leyes de los exponentes, que inevitablemente se requieren en la función exponencial, las leyes que se incluyen son con exponente cero, positivo y negativo, combinándose con una base de números naturales o racionales expresados como fracción común.

7.- En una función el dominio y la imagen son conceptos básicos, por eso se incluye en la evaluación diagnóstica una pregunta dónde se espera que los alumnos recuerden que es el dominio y cómo se determina dicho conjunto, además, saber que los valores del eje "x" están definidos para la regla de correspondencia. Lo anterior, con la idea de que los alumnos quiten los valores de x para los cuales no están definidas las funciones en los números reales.

8.- En la función exponencial, aunque en el dominio se tengan números enteros algunas imágenes son números racionales, por lo que es indispensable que los alumnos recuerden el procedimiento para localizar pares ordenados en el plano cartesiano tanto con coordenadas positivas, como negativas o combinadas e incluyendo las fracciones decimales, en las que frecuentemente se equivocan los estudiantes.

9.- El último reactivo incluye una parte fundamental de una función, ya que en los diferentes medios de comunicación se presentan diversas representaciones gráficas de ciertos fenómenos y para entenderlos y comprenderlos es esencial saber leer e interpretar la gráfica, es por ello que en esta pregunta se incluyen algunos incisos donde se pretende que el alumno demuestre que sabe leer una representación gráfica, y también se incluyen otros donde la idea es ver si pueden interpretar la gráfica que se presenta.

3.3 DESARROLLO DE LA PROPUESTA

La propuesta se desarrolló a partir del "Planteamiento de problemas que conduzcan a una función exponencial y su representación gráfica".

Los problemas que se trabajarán en las sesiones son: "El chisme", "Los tatarabuelos", "Tablero" y "Bacterias", se seleccionaron porque las resoluciones de éstos permitirán hacer un anclaje con las concepciones de "función exponencial" obtenidas en las redes semánticas las cuales son: operación y exponente, además, en la evaluación diagnóstica los estudiantes sólo dominaron los exponentes y bases en el conjunto de los números naturales, entonces se espera que estos problemas sean significativos para los alumnos y que logren anclar los nuevos conocimientos con los anteriores.

3.3.1 PLANEACION DE LA PRIMERA SESION

Fecha: 13 de noviembre de 1998.

Horario: 13.00 a 15.00 hrs.

ACTIVIDADES

PROFESOR	ALUMNO
ANTES DE LA SESION - Se solicitó al subdirector del plantel un salón con el mobiliario adecuado para trabajar con los estudiantes, sé checo que estuviera disponible y que los materiales previstos estuvieran al alcance. - Escribir en el pizarrón: • La orden del día. • Las actividades para la resolución del problema. DURANTE LA SESION	
13.00-13.10 hrs. Explicar los objetivos generales de las tres sesiones. 1. Obtener la expresión algebraica de una función exponencial con base en el planteamiento de un problema en lenguaje común. 2. Representar gráficamente una función exponencial. 3. Identificar algunas características generales de la función exponencial.	Tomar nota y preguntar sus dudas.
- Explicar los objetivos específicos de la primera sesión: • Los alumnos se familiarizarán con la función exponencial a través del planteamiento de problemas en lenguaje común. • Los alumnos reflexionarán sobre la importancia y ventajas de presentar la información de un problema a través de su representación tabular. • Con base en los procedimientos realizados por los alumnos se hará una retroalimentación de los siguientes conceptos: ❖ Dominio ❖ Imagen de un elemento ❖ Exponente ❖ Regla de correspondencia	Tomar nota y hacer comentarios al respecto.

❖ Representación tabular - Distribuir a los estudiantes en tres equipos de 4 integrantes cada uno. - Pegar en el pizarrón una cartulina con información sobre algunos campos de aplicación de la función exponencial. • Invitar a algún alumno a leer la información de la cartulina. • Solicitar comentarios de los alumnos.	Integrarse en equipos. Equipo 1. Nava Casas María Isabel Bonilla Hernández Manuel Juárez Solares Ulises Sánchez González Alicia Equipo 2. Rangel Escobar Tomas García Palacios Alberto Tinoco Contreras Cristian De Anda Belli Arely Equipo 3. Leyte Muñoz Erika Cornejo Becerra Rubén Monroy Salcedo Javier Alvirde Rangel Adriana Hacer comentarios sobre las aplicaciones de la función exponencial.
- Leer la orden del día previamente escrita en el pizarrón. ORDEN DEL DÍA 13.00-13.10 HRS. Encuadre y objetivos. 13..00-13.25 hrs. Resolución del problema 1. 13.25-13.50 hrs. Resolución del problema 2. 13.50-14.30 hrs. Puesta en común. 14.30-15.00 hrs. Explicitación de los contenidos incluidos en los problemas a través de interrogatorio dirigido y lluvia de ideas. 13.10 hrs. Repartir a cada alumno una fotocopia del problema 1 “El chisme”. - Repartir a cada equipo el material: Lápices, calculadoras, hojas blancas y plumones.	Dar su opinión sobre la orden del día y preguntar sus dudas.
13.10-13.25 hrs. Resolución del problema 1 “El chisme”. Recomendar a los alumnos que elaboren un reporte del (los) procedimiento(s) que siguieron para llegar a la solución, dicho reporte debe elaborarse en forma paralela a la realización de la actividad. Escribir con detalle los procedimientos realizados. - Mientras los equipos resuelven el problema el profesor tendrá el rol de observador y en la medida de lo posible hará un registro de los acontecimientos durante la resolución del problema. - Circular entre los equipos para observar el proceso de resolución del problema. 13.25 hrs. Repartir a cada alumno una fotocopia del problema 2 “Los tatarabuelos”.	- Ponerse de acuerdo en los equipos para la resolución del problema. - Resolver el problema en equipos escuchando las opiniones de sus compañeros y dando una opinión personal sobre el procedimiento a seguir. - Argumentar para seleccionar una estrategia que los conduzca al resultado correcto. - Elaborar el reporte correspondiente al problema “El chisme”.
13.25-13.50 hrs. Resolución del problema 2 “Los Tatarabuelos”.	- Hacer propuestas - Escuchar a sus compañeros

• Circular entre los equipos para estar pendiente de los acontecimientos y si es posible tomar notas. • Ante las preguntas de los estudiantes hacer una “devolución” de las mismas. 13.45 hrs. Pedir a los equipos que se pongan de acuerdo sobre lo fundamental de sus procedimientos para la puesta en común. • Elegir al azar los alumnos que expliquen los procedimientos realizados por sus equipos. • Organizar a los equipos para la puesta en común. El primer equipo que exponga, será aquel que no haya seguido un camino correcto para la solución, Un segundo equipo será el que más o menos tenga un razonamiento correcto y el último equipo será aquel cuyo desarrollo se acerque más al modelo que resuelva el problema. • Recoger los reportes de los equipos. 13.50-14.30 hrs. Puesta en común de los equipos. - Coordinar la exposición de los equipos. - Conducir la puesta en común de los equipos a fin de llegar al resultado de los problemas. - Al terminar de exponer cada equipo el maestro invitará a los demás equipos a aportar sus ideas para enriquecer la discusión y así lograr que se aclaren las dudas que hayan surgido durante el proceso de solución. - Primero coordinar la puesta en común del problema 1 y al término de ésta pasar al problema 2. 14.30-15.00 hrs. El profesor con ayuda de los estudiantes y con base en la resolución de los problemas, explicitará los contenidos matemáticos de los mismos. PROBLEMA “LOS TATARABUELOS” Susana tuvo $2^4=16$ tatarabuelos, entonces se obtiene la pareja ordenada $(4,2^4)$ donde x=4 pertenece al dominio de la función y $y=2^4$ es la imagen de x=4. En general los puntos sobre la función son de la forma (x,y) donde “y” es la imagen de x. Para obtener 16 es necesario obtener la potencia 2^4, donde 2 es la base y 4 el exponente, además, $2^4=(2)(2)(2)(2)$. En las potencias con base y exponente en los números naturales se cumple que el exponente indica el número de veces que hay que considerar la base como factor. Para calcular el número de tatarabuelos es necesario recordar que las generaciones de ascendientes antes de	- Justificar sus propuestas - Elaborar el reporte correspondiente al problema 2. - Involucrarse activamente en la solución del problema. Seleccionar el o los procedimientos fundamentales para la solución de los problemas. Determinar al azar el alumno que presente su trabajo. - Un representante de cada equipo pasará al frente a explicar el trabajo realizado por su equipo. Tendrá que argumentar su propuesta. - Hacer comentarios sobre el trabajo de los otros equipos. - Hacer críticas constructivas a los demás equipos. - Enriquecer el trabajo de sus compañeros. - Plantear conclusiones. La participación activa de los estudiantes es fundamental en esta actividad, ya que ellos con base en la experiencia vivida minutos antes establecerán algunas conclusiones guiados por el profesor. El maestro involucrará a todo el grupo.

Susana son padres, abuelos, bisabuelos y tatarabuelos que corresponden a la primera, segunda, tercera y cuarta generaciones. Si “n” es el número de generaciones, entonces n=1, n=2, n=3 y n=4 pertenecen al dominio de la función y $y=2^1$, $y=2^2$, $y=2^3$ y $y=2^4$ son las imágenes para cada valor de “n”, están incluidas en el conjunto imagen de la función.

Si nos interesaran más generaciones, entonces podríamos calcular el número de ascendientes para las generaciones 5,6,7,8,…,n,… con n en los números naturales. Por lo tanto el dominio=R consiste en el conjunto de valores que admite la variable “n”. La imagen de la función es igual al $\{ y / y=2^n \text{ para } n\in N \}$.

A la generación número “n” se le llama n-ésima generación y el número de ascendientes en la n-ésima generación es 2^n, esta expresión es una regla que indica que valor le corresponde a los ascendientes en la generación “n”, se le suele llamar “regla de correspondencia” cuando se escribe de la siguiente forma $y=2^n$.

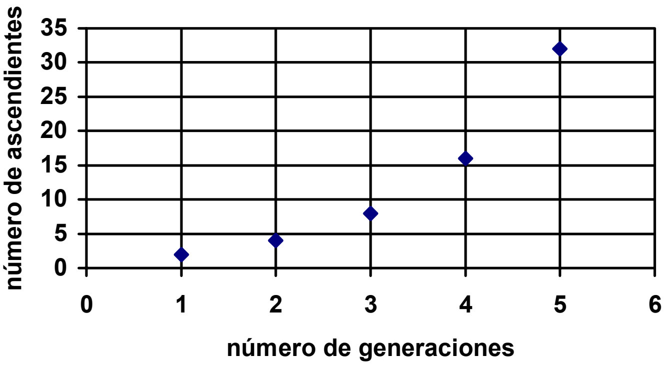
Para organizar la información desde la antigüedad se recurre a la representación tabular donde es necesario ubicar en una columna los valores de la variable independiente y en la otra columna los de la variable dependiente. En la expresión anterior $y=2^n$ es la variable dependiente porque su valor depende del valor de “n”, por lo tanto “n” es la variable independiente. A continuación se presentan algunos valores en la representación tabular:

generación "n"	núm.de ascendientes y=2^n
1	2^1=2
2	2^2=4
3	2^3=8
4	2^4=16
5	2^5=32
6	2^6=64

La tabla permite visualizar los movimientos de la función al aumentar o disminuir las imágenes de los elementos. Observemos las imágenes en la tabla 2,4,8,16,32 y 64 siempre la imagen del renglón superior es menor que la del renglón siguiente, es decir, conforme “n” igual a 1,2,3,4,5,o 6 va aumentando su respectiva imagen también aumenta, entonces podemos concluir que la función es creciente. Además, la tabla nos permite conocer otras características de la función.

Existe otro tipo de representación de la función que favorece la visión, ya que en ésta aparece una “imagen” del

comportamiento de los puntos. Nos referimos a la representación gráfica, donde el dominio está representado por la horizontal y el contradominio por la vertical, en este último se encuentran las imágenes de la función. La siguiente corresponde a la representación gráfica: - Concluir la sesión, e invitar a los alumnos a presentarse a la siguiente, en el mismo salón y a la misma hora.	



A continuación se presentan los problemas 1 y 2 con sus respectivas soluciones.

PROBLEMA 1

"EL CHISME"

A las 9 de la mañana, del 24 de enero de 1998, llegó a Celestum, Mérida un vecino del Distrito Federal, llevando una nueva noticia de interés general; comunicó la noticia a cuatro vecinos del pueblo, haciéndolo en media hora. Conocida la noticia, cada uno de estos cuatro vecinos la comentó a otros cuatro, empleando media hora en hacerlo. Cada uno de los nuevos conocedores, la comunicó a otros cuatro ciudadanos, y así sucesivamente.

a) ¿Cuántas personas conocían la noticia después de la tercera media hora de haber llegado ésta?

b) ¿Cuántas personas conocían la noticia después de 3 ½ horas de haber llegado ésta?

c) Si la cantidad de habitantes en el pueblo fuera mucho mayor. ¿Qué operaciones tendrías que realizar para calcular el número de personas que estarían enterados de la noticia después de la vigésima media hora de haber llegado ésta?

d) ¿Qué operación(es) tendrían que realizarse para calcular la cantidad de personas que conocerían la noticia en la n-ésima media hora?

e) En la respuesta del inciso d). ¿A qué conjunto numérico pertenecen los valores que admite la variable "n"?

RESOLUCION DEL PROBLEMA 1
"EL CHISME"

a) En la primera media hora se enteraron 4 personas.
En la segunda media hora se enteraron $4(4)=4^2=16$ personas.
En la tercera media hora se enteraron $4[4(4)]=4^3=64$ personas.
Por lo tanto el número de personas que conocían la noticia después de la tercera media hora de haber llegado ésta, se obtiene sumando las cantidades parciales, es decir, $4+16+64$.

b) Tres y media horas corresponde a la séptima media hora, por lo tanto el número de personas que conocieron la noticia después de 3 y ½ horas es de $4^7= (4)(4)(4)(4)(4)(4)(4)=16384$ habitantes del pueblo.
Para calcular el número de personas que conocían la noticia después de las 3 y ½ horas de haber llegado ésta se obtiene con la siguiente suma: $4^1+4^2+4^3+4^4+4^5+4^6+4^7$.

c) En la vigésima media hora es necesario considerar el número 4 veinte veces como factor para obtener el resultado y se puede expresar con 4^{20}. En forma desarrollada sería $(4)(4)(4)(4)\ldots(4)$ contando el número cuatro veinte veces. Por lo tanto el total de habitantes conocedores de la noticia después de la vigésima media hora es $4^1+4^2+4^3+4^4+4^5+\ldots+4^{19}+4^{20}$.

d) Tendría que calcularse una potencia donde la base fuera el número 4 y el exponente el número "n", por lo tanto sería necesaria la operación siguiente: $(4)(4)(4)(4)\ldots(4)$ donde el número cuatro apareciera "n" veces. La expresión abreviada es la potencia 4^n. Por lo tanto el total de personas enteradas de la noticia en la n-ésima media hora se obtiene calculando la siguiente suma: $4^1+4^2+4^3+\ldots+4^{n-1}+4^n$.

e) La variable "n" aparece en el exponente y representa el número de períodos de media hora entonces podríamos considerar cualquier número natural, ya que el número cuatro puede considerarse como factor cualquier número de veces "n", donde "n" es un número natural.

PROBLEMA 2

"LOS TATARABUELOS"

Susana tiene interés de conocer el número de ascendientes hasta cierta generación. ¿Podrías ayudarle a calcular el número de tatarabuelos que tuvo ella?

a) ¿Cuántos tatarabuelos tuvo Susana?

b) ¿Qué operaciones efectuaste para obtener el resultado del inciso a)?

c) ¿Cuántas generaciones antes de Susana tuviste que considerar para llegar a los tatarabuelos?

d) ¿Podría existir una expresión para representar él número de ascendientes en la n-ésima generación antes de Susana? En caso afirmativo ¿Cuál?

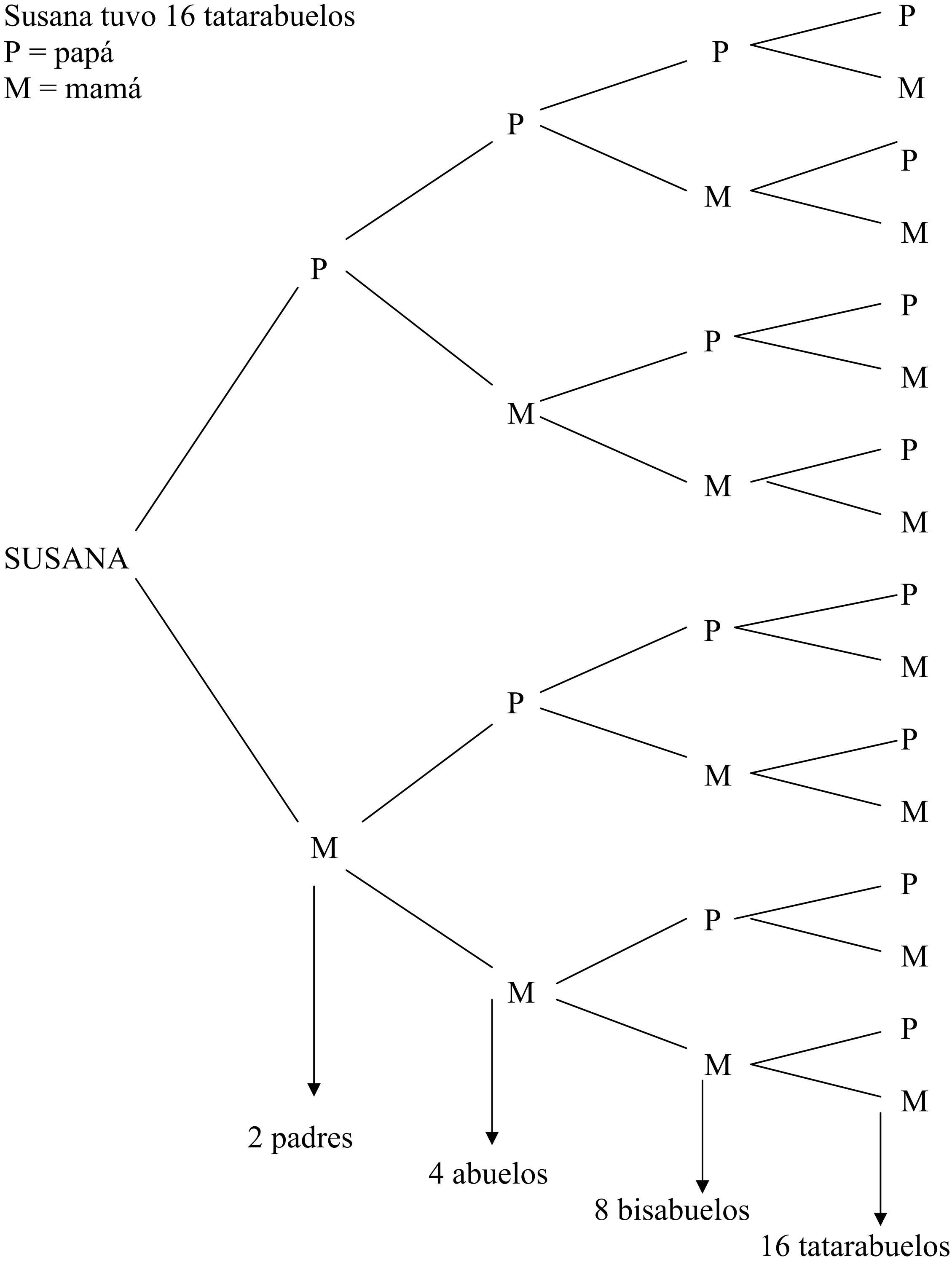
e) Si tú respuesta al inciso d) es afirmativa. ¿A qué conjunto numérico pertenecen los valores que admite la variable "n"?

f) ¿Crees que la afirmación de los incisos anteriores sé pueda representar a través de una tabla? En caso afirmativo constrúyela?

g) ¿Existirá otra forma de representar los datos? En caso afirmativo ¿Cuál?

RESOLUCION DEL PROBLEMA 2
"LOS TATARABUELOS"

Susana tuvo 16 tatarabuelos
P = papá
M = mamá



b) El número 16 se obtiene de multiplicar (2)(2)(2)(2)=2^4=16, es decir, de considerar el número 2 cuatro veces como factor. Ya que el exponente cuando es un número natural indica el número de veces que hay que considerar la base como factor.

c) Se Consideraron cuatro generaciones las cuales son:
Primera generación de los padres = 2
Segunda generación de los abuelos = (2)(2) = 2^2
Tercera generación de los bisabuelos = (2)(2)(2) = 2^3
Cuarta generación de los tatarabuelos = (2)(2)(2)(2) = 2^4

d) Sí.
En la n-ésima generación antes de Susana el número de ascendientes es 2^n .
Para calcular el total de ascendientes de Susana hasta la n-ésima generación es necesario sumar los ascendientes de las generaciones anteriores, es decir, $2^1+2^2+2^3+\ldots+2^{n-1}+2^n$ para "n" en el conjunto de los números naturales.

e) "n" puede ser cualquier número natural. Porque sólo hay generaciones enteras positivas.

f) Sí.

Núm. De generaciones N	**Núm. De ascendientes en la n-ésima generación 2^n**	**Roll**
1	2^1=2	Padres
2	2^2 = 4	Abuelos
3	2^3 = 8	Bisabuelos
4	2^4 = 16	Tatarabuelos
…	…	…
n	2^n	

En la tabla se observa que conforme aumenta el número de generación también aumenta el número de ascendientes.

g) Sí.
La representación gráfica.

3.3.2 PLANEACION DE LA SEGUNDA SESION

Fecha: 16 de Noviembre de 1998.
Horario: 13.00 a 15.00 hrs.

ACTIVIDADES

PROFESOR	ALUMNO
ANTES DE LA SESION - Checar que el salón este disponible y que los materiales estén al alcance. - Escribir en el pizarrón la orden del día. - Escribir en el pizarrón las actividades para la resolución del problema. - Escribir en el pizarrón el guión de la discusión.	
DURANTE LA SESION 13.00 hrs. -Explicar y escribir en el pizarrón los objetivos de la segunda sesión. *Retroalimentación de la utilidad de la representación tabular de una función. *Reflexionar sobre la importancia y ventajas que tiene la representación gráfica de una función.	Tomar nota de los objetivos y preguntar dudas al respecto.
13.02 hrs. -Explicar la orden del día: *13.04 hrs. Hacer un resumen de la primera sesión. *13.15 hrs. En equipo resolución del problema 3. *14.00 hrs. Puesta en común de los tres equipos. *14.35 hrs. Determinar los contenidos matemáticos incluidos en el problema "Tablero".	Tomar nota de las actividades a realizar y de los tiempos asignados a fin de organizarse para cumplir con los productos en los tiempos planeados.
13.04-13.15 hrs. RESUMEN de la primera sesión a través de lluvia de ideas. *Recordar que para obtener el número de ascendientes en la generación "n" hay que considerar el número 2 "n" veces como factor, es decir (2)(2)(2)…(2) "n-veces", lo cual se simboliza con 2^n, entonces se tiene base 2 y exponente n. Dominio está integrado por los números naturales (N) porque son los valores posibles que puede tomar el número de generaciones. Imagen de un elemento del dominio es el número de	Los alumnos participarán paralelamente con el profesor dando sus opiniones al respecto, para ir concretando lo más relevante de la sesión anterior. Los estudiantes participarán en el interrogatorio dirigido por el profesor.

ascendientes en cada generación, es decir: La generación 1, tiene a 2 como imagen. La generación 2 tiene a 4 como imagen…la generación "n" tiene a 2^n como imagen. La imagen de la función es $\{2^n$, para n en N$\}$. También se recordará que dada una generación "n" el número de ascendientes en dicha generación es 2^n y éste número en único y por lo tanto cada elemento del dominio "n" tiene una sola imagen la cual corresponde a 2^n, es decir, la relación definida $x \rightarrow 2^n$, es una función.	
Se enfatizó que la representación tabular permite observar algunas características de la función, por ejemplo conforme el número de generaciones va aumentando también el número de ascendientes aumenta, entonces la función es creciente.	Los alumnos enfatizarán las características fundamentales de la representación tabular.
13,15-13.17 hrs. Distribuir a los alumnos en los equipos. De los tres equipos iniciales sólo uno permanecerá constante y los otros dos tendrán intercambio de integrantes tanto en la segunda como en la tercera sesiones. Al azar le toco al equipo número 2 como constante, es decir, sus integrantes serán los mismos que en la primera sesión. Y los equipos 1 y 3 intercambiaran dos integrantes cuidando que en cada equipo haya al menos un alumno con alto, intermedio y bajo puntaje (respecto a la evaluación diagnóstica).	Los alumnos se integrarán en sus equipos: Equipo 1. Nava Casas María Isabel Cornejo Becerra Rúben Juárez Solares Ulises Alvirde Rangel Adriana Equipo 2. (igual que en la sesión 1) Rangel Escobar Tomás García Palacios Alberto Tinoco Contreras Cristian De Anda Belli Arelly Equipo 3. Leyte Muñoz Erika Bonilla Hernández Manuel Monroy Salcedo Javier Sánchez González Alicia.
13.17-13.18 hrs. Describir las actividades para la resolución del problema previamente escritas en el pizarrón: *Tiempo 40 minutos. *Hacer la lectura del problema y comprenderlo. *Discutir en el equipo las posibles vías de solución. *Elaborar un reporte paralelamente a la resolución del problema e incluir una descripción completa del proceso de resolución. *No borrar nada, aunque se siga otro procedimiento. *Al final al azar se determinará el expositor del equipo.	Tomar nota de lo más relevante y preguntar dudas.
13.18-13.20 hrs. –Repartir a cada alumno una copia fotostática del problema 3 "Tablero". -Repartir los materiales como: lápices, goma de borrar, sacapuntas, hojas blancas, diurex, plumones y calculadoras.	Leer el problema para comprenderlo.
13.20-14.00 hrs. -Resolución del problema.	- Proponer vías de solución del

-Circular en los equipos para observar como se lleva a cabo el trabajo. *Ante las preguntas de los estudiantes hacer una “devolución” de las mismas. -En la medida de lo posible tomar nota de los acontecimientos de los equipos. 13.55 hrs. –Indicar a los alumnos que cuentan con 5 minutos para tomar acuerdos sobre los aspectos más importantes para su exposición. -Al azar se determina el alumno representante del equipo para la puesta en común. 14.00 hrs. –Recoger los reportes de los tres equipos. Seleccionar dos de los tres equipos para la exposición: Explicar el guión de la discusión: • Explicitar las dificultades a las que se enfrentó el equipo y como las solucionaron. Coordinar y moderar la exposición de los equipos. 14.00-14.15 hrs. Primero pasará el equipo que este más alejado de la solución del problema. 14.15-14.30 hrs. En segundo lugar el equipo con avance intermedio a la solución. 14.30-14.35 hrs. Solicitar al equipo que se aproximó más a la solución correcta que enriquezca los planteamientos de los otros dos equipos. -Recoger los reportes de cada equipo. 14.35-15.00 hrs. Retomar los planteamientos de los estudiantes en la resolución del problema para enfatizar los contenidos matemáticos implícitos. a) Se obtiene que en el octavo cuadro el ministro pidió 128 granos de trigo, recordar que 128 es la imagen de 8 bajo la función. 64 granos de trigo en el séptimo cuadro, corresponden 64 a la imagen de 7 bajo la función. El número de cuadros del tablero 1,2,3,…,64 son los elementos del dominio, entonces: Dominio={1,2,3,…,64}. Contradominio=R. Imagen de la función = {1, 2, 4, 8, 16,… 2^{n-1}}. b) (2)(2)(2)(2)(2)(2)(2)= $2^7=2^{8-1}$. En el octavo cuadro se resuelve la potencia anterior de base 2 y	problema. - Discutir con los compañeros del equipo sobre diferentes propuestas de solución. - Oír las propuestas de los demás integrantes del equipo y valorar su pertinencia. - Justificar sus procedimientos por escrito. Los estudiantes toman acuerdos sobre los aspectos a presentar en la puesta en común. Al azar se decide que estudiante explicará el procedimiento. Entregar su reporte. Los alumnos acomodarán el mobiliario a fin de quedar de frente al pizarrón y poner atención a la presentación de los demás compañeros. Tomarán nota para que al final de la presentación hagan sus comentarios y planteen sus dudas al equipo expositor. Los alumnos participarán a través de lluvia de ideas y contestarán el interrogatorio dirigido por el profesor, para que todo el grupo realice un resumen de los contenidos matemáticos explícitos o implícitos en la solución de la actividad. Los estudiantes durante esta actividad darán sus puntos de vista y el profesor los inducirá a las definiciones adecuadas. Participación de los estudiantes para que el profesor haga la

exponente 8-1=7, es decir, el 2 se toma 7 veces como factor. c) Para obtener la solución no es suficiente con la calculadora, pues por mucho tiene 10 cifras, entonces hay que pensar en una expresión general, para calcular el número de granos en el cuadro "n" se obtiene la potencia 2^{n-1} con base 2 y exponente "n-1". Entonces la imagen de "n" es 2^{n-1} y se podemos simbolizar $n \rightarrow 2^{n-1}$ el cual indica el número de granos de trigo que hay que poner en el cuadro "n" del tablero de ajedrez. d) 2^{n-1} indica que el número 2 se considera "n-1" veces como factor, donde 2 es la base y, "n-1" el exponente. La expresión anterior se puede considerar como un modelo o como una regla. e) En la tabla observamos que hay que incluir dos variables, el número de cuadros que es una variable independiente y el número de granos de trigo que es una variable dependiente, ya que el número de granos de trigo depende del cuadro correspondiente. La representación tabular es muy útil, ya que en cualquier momento nos permite saber cuál es la imagen de un elemento, es decir, a través de la tabla se presenta de manera explícita la relación entre las variables dependiente e independiente. f) Se enfatizará que la variable independiente corresponde al número de cuadro porque éste no depende de ninguna otra variable, es decir, en el problema es "n". Mientras que la variable dependiente en 2^{n-1} porque su valor depende del valor de "n" y en el problema es el número de granos de trigo. Inducir a los estudiantes a reconocer la utilidad de la tabla para observar que conforme aumenta el número de cuadro también aumenta el número de granos de trigo y esto nos hace ver que la imagen de los elementos cada vez es mayor, es decir, conforme el valor de "n" crece, va creciendo el valor de 2^{n-1}. g) Existe otro tipo de representación que es la gráfica y recordemos que consiste en hacer un dibujo en el plano cartesiano donde el eje horizontal corresponde al dominio y el vertical al contradominio donde se ubican las imágenes de los elementos, por lo tanto el eje "x" se asocia con	recopilación de cada inciso enfatizando los contenidos programáticos.

la variable independiente y el eje "y" con la variable dependiente. Se observará que dado un cuadro del tablero es único el número de granos de trigo que le corresponden y que por lo tanto se trata de una función. También resulta importante que los alumnos observen que en la gráfica conforme el valor del eje "x" se aleja a la derecha su correspondiente valor en el eje "y" sube cada vez más y conforme el valor del eje "x" se acerca a la izquierda el valor de "y" tiende a ser cada vez más pequeño, entonces la función es creciente. - Solicitar a los alumnos que extra clase inventen algunos problemas cuyo planteamiento lleve a expresiones donde la variable independiente este en el exponente. DESPUÉS DE LA SESION Analizar el reporte de cada equipo.	

A continuación se presenta el problema 3 "Tablero" con su respectiva solución.

PROBLEMA 3

"TABLERO"

De acuerdo con una vieja leyenda, un rey hindú le concedió a su gran ministro un pago por haberle enseñado el juego del ajedrez, que como es sabido se juega sobre un tablero de 64 cuadros. El ministro le pidió al rey que le diera un grano de trigo para colocarlo en el primer cuadro, dos granos de trigo para el segundo, cuatro para el tercero, y así sucesivamente hasta cubrir el tablero; a lo que el rey accedió sorprendido de que le pidiera tan poca cosa.

a) ¿Cuántos granos de trigo pidió el ministro para colocarlos en el octavo cuadro?

b) ¿Cuáles fueron las operaciones que efectuaste para contestar el inciso a)?

c) ¿Cuál es la cantidad total de granos de trigo que pidió el ministro?

d) ¿Qué operación (es) hay que efectuar para calcular el número de granos de trigo que corresponden al n-ésimo cuadro?

e) Representa a través de una tabla los datos.

f) ¿Se presenta(n) en el problema alguna(s) variable(s)? En caso afirmativo descríbelas con detalle.

g) ¿De qué otra forma se puede representar la información? Según la respuesta, si es posible constrúyela.

RESOLUCION DEL PROBLEMA 3
"TABLERO"

a) primer cuadro, 1 grano de trigo
segundo cuadro, 2 granos de trigo
tercer cuadro, 4 granos de trigo
cuarto cuadro, 8 granos de trigo
quinto cuadro, 16 granos de trigo
sexto cuadro, 32 granos de trigo
séptimo cuadro, 64 granos de trigo
octavo cuadro, 128 granos de trigo.

b) $(2)(2)(2)(2)(2)(2)(2) = 2^7 = 2^{8-1}$ en el octavo cuadro.

c) Como en el octavo cuadro el número de granos de trigo fue $2^7 = 2^{8-1}$, entonces para el n-ésimo cuadro se calcula con 2^{n-1}, pero el tablero cuenta con 64 cuadros, por lo tanto para el cuadro 64 es necesario resolver la potencia $2^{64-1}=2^{63}$. Para calcular el valor de granos de trigo en cada cuadro se necesita conocer $2^0,2^1,2^2,2^3,2^4,\ldots 2^{60},2^{61},2^{62}$ y 2^{63}.
La cantidad total de granos de trigo que pidió el ministro fue: $2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+\ldots+2^{60}+2^{61}+2^{62}+2^{63}$.

d) 2^{n-1} indica "n-1" veces como factor el número 2.

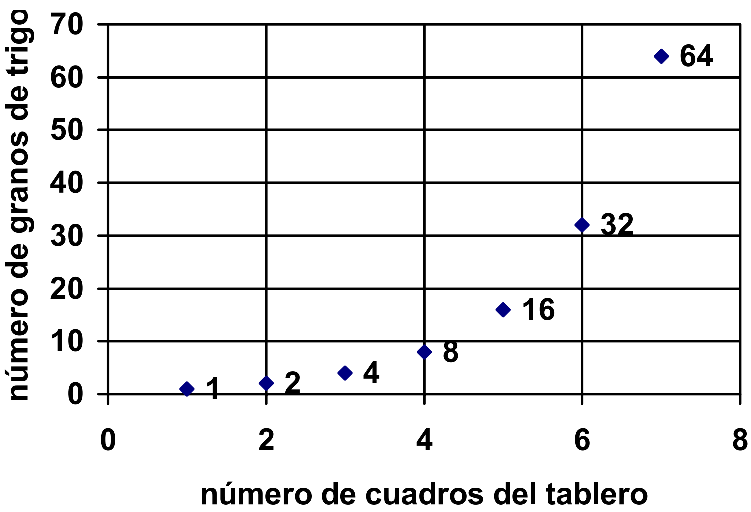
e)

número de cuadro "n"	número de granos de trigo 2^n-1
1	2^1-1=2^0=1
2	2^2-1=2^1=2
3	2^3-1=2^2=4
4	2^4-1=2^3=8
5	2^5-1=2^4=16
6	2^6-1=2^5=32
7	2^7-1=2^6=64
8	2^8-1=2^7=128
…	…
63	2^63-1=2^62
64	2^64-1=2^63

f) Sí.
La variable independiente es "n" que representa el número de cuadros del tablero. La variable dependiente corresponde al número de granos de trigo, ya que éste depende del número de cuadro del tablero.

El número de cuadros del tablero es {1,2,3,…,64} que corresponde al dominio de la función y el número de granos de trigo es la imagen del número de cuadro correspondiente, por lo tanto el conjunto imagen es $\{ 2^0,2^1,2^2,\ldots,2^{63} \}$.

g) A través de una representación gráfica.



En la representación gráfica se observa que conforme aumenta el número de cuadro del tablero también aumenta el número de granos de trigo.

Es importante recordar que los valores de la variable independiente se localizan sobre la horizontal mientras que los de la variable dependiente deben ir sobre la vertical. Además, los pares ordenados (x,y) siempre tienen como primer coordenada a la variable independiente y como segunda coordenada la variable dependiente.

3.3.3 PLANEACION DE LA TERCERA SESION

Fecha: 18 de Noviembre de 1998.
Horario: 13.00 a 15.00 hrs.

ACTIVIDADES

PROFESOR	ALUMNO
ANTES DE LA SESION -Revisar que el salón asignado este disponible, el material al alcance y se cuente con una copia fotostática del problema 4 para cada alumno. -Distribuir a los integrantes de dos de los equipos para que intercambien ideas con los demás compañeros. El equipo número 2 permanecerá con los mismos integrantes.	
DURANTE LA SESION	
13.00-13.02 hrs. Indicar a los estudiantes en qué equipo se integren. 13.02-13.03 hrs. Distribuir el material a los equipos: hojas blancas, lápices, plumones, gomas de borrar, sacapuntas y calculadoras para cada equipo. 13.03-13.05 Hrs. Explicitar la orden del día.	Integrarse en el equipo que les corresponda: Equipo 1: Leyte Muñoz Erika Cornejo Becerra Rubén Juárez Solares Ulises Sánchez González Alicia Equipo 2: Rangel Escobar Tomas García Palacios Alberto Tinoco Contreras Cristian De Anda Belli Arely Equipo 3: Nava Casas María Isabel Bonilla Hernández Manuel Monroy Salcedo Javier Alvirde Rangel Adriana
13.05- 13.08 hrs. Explicar los objetivos de la sesión. • Obtener la representación algebraica con base en el planteamiento de un problema en lenguaje común. • Explicitar la definición de la función exponencial. • Obtener las representaciones tabular y gráfica de algunas funciones exponenciales crecientes y decrecientes con base en su representación algebraica. • Obtener algunas características de la función	Los alumnos tomarán nota de los objetivos y preguntarán sus dudas.

exponencial. 13.08-13.10 Distribuir a cada alumno una copia fotostática del problema 4 “Bacterias”. -Enfatizar que al elaborar el reporte hay que describir con detalle los procedimientos y no borrar en caso de cambiar dicho procedimiento. -13.10-13.40 hrs. Indicar que inicien la resolución del problema, con base en la discusión colectiva y la toma de acuerdos. -Permanecer como observadora en un equipo designado al azar (le tocó aleatoriamente al equipo núm. 3). -En la medida de lo posible elaborar una bitácora sobre los acontecimientos que suceden en el equipo núm. 3 durante la resolución del problema, ya que con toda seguridad los otros dos equipos llamarán al profesor para preguntar dudas. Está permitido que en la observación del trabajo del equipo se puedan “devolver” las preguntas del equipo. -Recoger los reportes de los tres equipos.	Leer el problema 4 “Bacterias” Tomar nota para cumplir con el reporte adecuado y nombrar al secretario. Los alumnos expondrán sus puntos de vista y discutirán sus propuestas, valorando la pertinencia de cada argumentación y se pondrán de acuerdo sobre el procedimiento correcto en cada inciso. Cada equipo en la medida de sus posibilidades construirá la tabla, gráfica y propondrá el modelo algebraico de la función.
13.40-13.50 hrs. Exposición del equipo cuyos resultados estén menos completos. 13.50-14.00 hrs. Presentación del equipo cuyos resultados tengan un avance intermedio. 14.00-14.10 hrs. Presentación de los resultados del equipo cuyo reporte este más completo. - Durante las presentaciones de los equipos en la medida de lo posible el profesor tomará nota sobre las creencias de los estudiantes. - Explicitar la importancia y utilidad de la representación algebraica de una función.	Ponerse de acuerdo quién explicará al grupo sus resultados. Estar atentos en la exposición del equipo y al término de ésta hacer observaciones. Prestar atención al trabajo realizado por el equipo y al final enriquecer los puntos de vista. Tomar nota de los aspectos relevantes de la exposición y al final de la misma intercambiar puntos de vista con sus compañeros.
14.20-15.00 hrs. A través de un interrogatorio dirigido y de lluvia de ideas se concretarán los siguientes contenidos: - Explicitar la definición de la función exponencial como: $f:R \rightarrow R^+$ (función real de variable real) tal que $f(x)=a^x$ con a,x elemento de los R, $a>0$, $a \neq 1$, $[a \in (0,1)$ o $a \in (1,\infty)]$ donde a es la base y x es el exponente, también la ecuación $y=a^x$ determina la función exponencial. - Solicitar a los alumnos que den ejemplos, primeramente se retomarán las funciones de los problemas 1,2,3 y 4, $f(x)=4^x$, $f(n)=2^n$, $f(x)=2^{x-1}$,	Los alumnos aportan ideas paralelamente con el profesor para establecer la definición de la función exponencial. Proporcionar los modelos de las funciones de los cuatro problemas.

<table>
<tr>
<td>

$f(x)=3^x(10)^6$,… se observará que la base de una función exponencial es un número real positivo distinto de la unidad por lo tanto también son ejemplos de funciones exponenciales las siguientes: $f(x)=(4/3)^x$, $f(x)=(1/2)^x$, $f(x)=(5/6)^x$, $f(x)=(3/4)^x$,…

- Solicitar a un alumno que pase al pizarrón a tabular la función $f(x)=(4/3)^x$.
- Aclarar las dudas de los estudiantes con respecto a las leyes de los exponentes a fin de concluir exitosamente la tabla.

</td>
<td>

Dar ejemplos de funciones exponenciales con base en los números racionales.

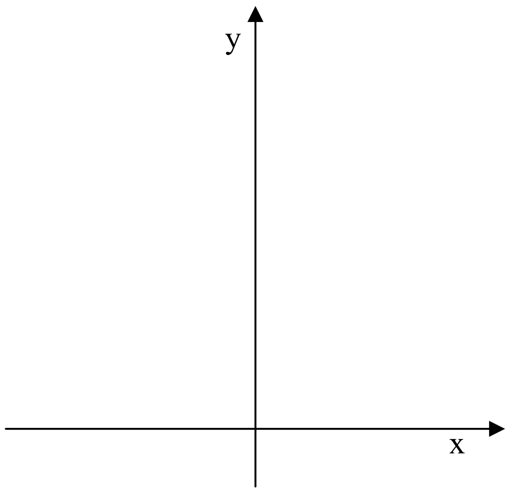
Elaborar la representación tabular de la función $f(x)=(4/3)^x$.

<table>
<tr><td>x</td><td>f(x)=(4/3)^x</td></tr>
<tr><td>-4</td><td>f(-4)=(4/3)^-4=(3/4)^4=81/256</td></tr>
<tr><td>-3</td><td>f(-3)=(4/3)^-3=(3/4)^3=27/64</td></tr>
<tr><td>-2</td><td>f(-2)=(4/3)^-2=(3/4)^2=9/16</td></tr>
<tr><td>-1</td><td>f(-1)=(4/3)^-1=(3/4)=0.75</td></tr>
<tr><td>0</td><td>f(0)=(4/3)^0=1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>f(1)=(4/3)^1=1.33</td></tr>
<tr><td>2</td><td>f(2)=(4/3)^2=16/9=1.77</td></tr>
<tr><td>3</td><td>f(3)=(4/3)^3=64/27=2.37</td></tr>
</table>

</td>
</tr>
<tr>
<td>

- Solicitar a un alumno que pase al pizarrón a construir la representación gráfica de la función anterior.

</td>
<td>



</td>
</tr>
<tr>
<td>

- Con ayuda de los alumnos concluir que:
  - La gráfica intersecta al eje “y” en el punto (0,1).
  - A medida que x crece, f(x) también crece, es decir, la gráfica crece de izquierda a derecha y entonces la función es creciente.
  - El eje x es una asíntota horizontal para la gráfica, ya que sí $a>1$, entonces al ir decreciendo “x” y tomando valores negativos, la gráfica se aproxima al eje x sin llegar a tocarlo, ya que $a^x>0$ para todo x.
  - También se observará que:

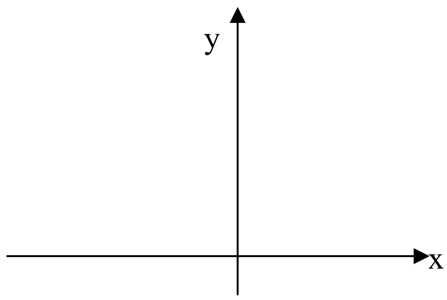
</td>
<td>

Con la guía del profesor los alumnos identificarán algunas características de la función exponencial.

Intercambiar opiniones para concluir las características de la función exponencial, con base mayor que la unidad.

</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>
Dominio=$\Re$
Imagen=$\Re^+$
- Solicitar a un alumno que pase al pizarrón a tabular la función $f(x)=(1/2\ )^x$.
- Aclarar dudas sobre la tabulación de la función.

- Un alumno voluntario pasará a obtener la representación gráfica de la función.
</td>
<td>
Obtener la representación tabular de la función $f(x)=(1/2)^x$.
<table>
<tr><td>x</td><td>f(x)=(1/2)^x</td></tr>
<tr><td>-3</td><td>f(-3)=(1/2)^-3=(2)^3=8</td></tr>
<tr><td>-2</td><td>f(-2)=(1/2)^-2=(2)^2=4</td></tr>
<tr><td>-1</td><td>f(-1)=(1/2)^-1=2</td></tr>
<tr><td>0</td><td>f(0)=(1/2)^0=1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>f(1)=(1/2)^1=1/2=0.5</td></tr>
<tr><td>2</td><td>f(2)=(1/2)^2=1/4=0.25</td></tr>
</table>


</td>
</tr>
<tr>
<td>
- Indicar que por parejas y en su lugar representen tabular y gráficamente la siguiente función: $f(x)=(3/5)^x$.

- Con la participación de los alumnos concluir algunas características de las funciones $f(x)=a^x$ con base a tal que $a \in (0,1)$.
• La representación gráfica pasa por el punto (0,1).
• f(x) es decreciente, porque el valor de la función decrece conforme x crece, es decir, la gráfica decrece de izquierda a derecha.
• El eje x es una asíntota horizontal de la función, ya que al ir creciendo "x" y tomando valores positivos, la gráfica se aproxima al eje x sin llegar a tocarlo, ya que $a^x>0$ para todo x.
• También se observará que Dominio=$\Re$
Imagen de la función=$\Re^+$.
</td>
<td>
Tomar nota de la función y ponerse a trabajar en parejas para tabular y graficar la función $f(x)=(3/5)^x$.

Participar con "Lluvia de ideas para concluir algunas características de la función exponencial con base en el intervalo (0,1).
</td>
</tr>
<tr>
<td>
Proponer a los alumnos que extra clase obtengan las representaciones tabulares y gráficas de las siguientes funciones exponenciales: $f(x)=(6/5)^x$ y $f(x)=(6/7)^x$ y que al menos inventen dos planteamientos de problemas en lenguaje común que conduzcan a una representación algebraica de una función exponencial.
</td>
<td>
Extra clase representarán tabular y gráficamente las funciones: $f(x)=(6/5)^x$ y $f(x)=(6/7)^x$.
Extra clase inventarán al menos dos problemas que se resuelvan usando una función exponencial.
</td>
</tr>
</table>

DESPUES DE LA SESION Analizar detalladamente los tres reportes de los equipos en la resolución del problema y también analizar la bitácora levantada como observador del equipo núm. 3 en la resolución del problema 4.	

A continuación se presenta el problema 4 “Bacterias” con su respectiva resolución.

PROBLEMA 4

“BACTERIAS”

En un cultivo de cierta bacteria hay una concentración de un millón de bacterias por cada mililitro, si la población de bacterias se triplica cada 15 minutos, (suponiendo que se da el caso ideal de que no mueran bacterias) obtener la:

a) Representación tabular.

b) Representación gráfica.

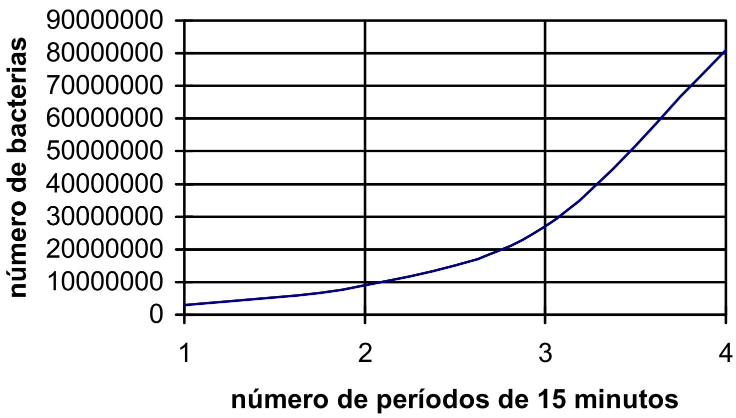
c) Representación algebraica de la cantidad de bacterias que habrá en “x” períodos de 15 minutos.

RESOLUCION DEL PROBLEMA 4
"BACTERIAS"

a)

períodos de 15 minutos	número de bacterias
1	3(10^6)=3(10^6)
2	3^2(10^6)=9(10^6)
3	3^3(10^6)=27(10^6)
4	3^4(10^6)=81(10^6)
5	3^5(10^6)=243(10^6)

b)



c) La cantidad de bacterias que habrá en "x" períodos de 15 minutos se obtiene con la siguiente expresión: $f(x) = 3^x (10^6)$.

4. RESULTADOS

Los resultados se reportan dependiendo de los instrumentos y/o materiales que se aplicaron. Considerándose los siguientes:

4.1 Resultados de las redes semánticas.
4.2 Resultados de la evaluación diagnóstica (pretest).
4.3 Resultados de las bitácoras.
4.4 Análisis de los reportes entregados por los equipos.
4.5 Resultados de la aplicación del postest.

4.1 RESULTADOS DE LAS REDES SEMANTICAS

Las redes semánticas se aplicaron a 39 estudiantes del grupo 201 de la asignatura Matemáticas II del turno matutino del Colegio de Bachilleres, plantel número 13 "Xochimilco-Tepepan".

La aplicación de las redes semánticas de las palabras "función y "exponencial" se llevaron a cabo tal y como se planeo, contándose con una muestra de 17 mujeres y 22 hombres con edades entre 16 y 19 años para la palabra "función" y con una muestra de 17 mujeres y 23 hombres entre las mismas edades para la palabra "exponencial". Durante la aplicación se indicó a los alumnos que no intercambiaran opiniones.

En el anexo 3 se presenta la relación de las 107 concepciones que se obtuvieron de los 39 alumnos que se presentaron a la aplicación de la red semántica correspondiente a la palabra "función". En cada renglón se incluyen las cuantificaciones que permiten obtener el peso semántico. En los cuadros donde aparecen dos números separados por un guión, el primero representa la frecuencia (número de alumnos) en que la definidora fue determinada por los alumnos y el número que aparece después del guión es el producto de la frecuencia por la ponderación.

En el anexo 4 se presenta la relación de las 94 concepciones que se obtuvieron de los 40 alumnos que se presentaron a la aplicación de la red semántica correspondiente a la palabra "exponencial".

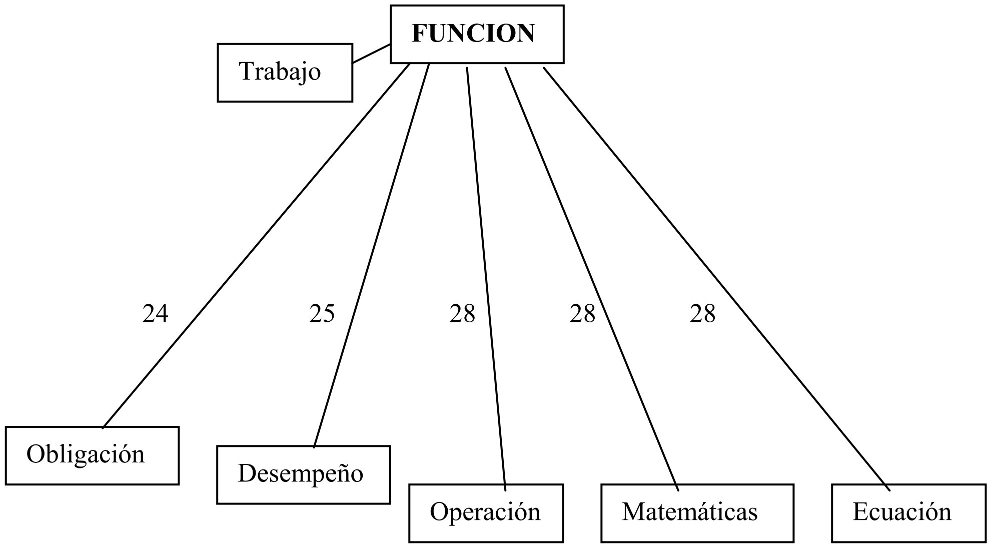
A continuación se presentan los núcleos y las redes semánticas de las palabras "función" y "exponencial".

Total de alumnos 39
Total de definidoras = 107
La muestra estuvo integrada por 17 mujeres y 22 hombres.

NUCLEO DE LA RED SEMANTICA DE LA PALABRA
"FUNCION"

NÚM.	DEFINIDORAS	PS	DS	DS %
1	Trabajo	47	0	100
2	Obligación	23	24	48.93
3	Desempeño	22	1	46.8
4	Operación	19	3	40.42
5	Matemáticas	19	0	40.42
6	Ecuación	19	0	40.42

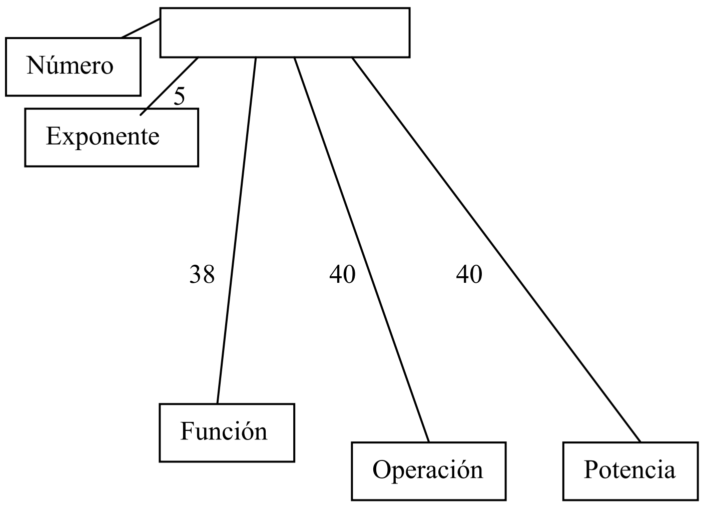
RED SEMANTICA



NUCLEO DE LA RED SEMANTICA DE LA PALABRA "EXPONENCIAL"

DEFINIDORAS	PS	DS	DS %
1. Número(s)	68	0	100
2. Exponente(s)	63	5	92.64
3. Función	30	33	44.11
4. Operación(es)	28	2	41.17
5. Potencia(s)	28	0	41.17

RED SEMANTICA



Los resultados de la red semántica de la palabra “función” son desalentadores en el sentido de que la mayoría de definidoras determinadas por los alumnos no tienen relación con el concepto matemático de función. Es decir, las concepciones de los alumnos, casi todas ellas están en un contexto extra escolar, por lo tanto no resulta fácil utilizar las definidoras de la red semántica para proponer una práctica educativa a la par de las concepciones de los alumnos.

Se observa que las seis concepciones con mayor peso semántico son: trabajo, obligación, desempeño, operación, matemáticas y ecuación. Tal vez se pueda utilizar que para evaluar una función hay necesidad de realizar una serie de operaciones establecidas por la regla de correspondencia y posiblemente los alumnos dicen que es una ecuación porque aparece el símbolo “=”.

Comparando el número total de definidoras (107) entre el total de estudiantes (39) se obtiene 2.74, por lo que redondeando se puede concluir que en promedio cada alumno utiliza tres concepciones diferentes para el concepto de “función”.

Con respecto a la red semántica de la palabra “exponencial” se obtuvieron en total 94 definidoras diferentes que divididas entre el número total de alumnos (40) nos da 2.35, que redondeando nos da en promedio dos concepciones diferentes por cada estudiante para la palabra exponencial. El núcleo de la red está integrado por las siguientes cinco concepciones: número, exponente, función, operación y potencia.

Se observa que en tercer lugar aparece la palabra función, pero ésta no es confiable, ya que los resultados obtenidos en la red semántica de función indican que los alumnos no tienen ni la menor idea de que es una “función”. Nuevamente vuelve a aparecer la palabra operación. Tal vez podrían rescatarse para la propuesta de la práctica educativa las concepciones de “exponente” y “potencia” aunque con sus reservas, ya que en los resultados de la evaluación diagnóstica los alumnos demostraron sólo tener cierto “dominio” para los exponentes con números naturales y base numero natural, porque de 34 alumnos 25 lo contestaron bien. Pero en el caso de exponente número natural y base número racional sólo 15 lo contestaron bien y 19 mal.

Los anteriores fueron los puntajes más altos, ya que tratándose de exponente número entero con base natural o racional hay muchas confusiones.

4.2 RESULTADOS DE LA EVALUACION DIAGNOSTICA

DESCRIPCION DE LA MUESTRA

La evaluación diagnóstica se aplicó al grupo 201 de Matemáticas II, turno matutino del Plantel 13 “Xochimilco-Tepepan” del Colegio de Bachilleres. El promedio del grupo fue de 39.61 puntos de un total de 100.

A continuación se presenta un cuadro con las características generales de la muestra (34 alumnos en total).

CARACTERISTICA	FRECUENCIA	PORCENTAJE
Hombre	22	64.70
Mujer	12	35.29
16 años	12	35.29
17 años	9	26.47
18 años	5	14.70
19 años	3	8.82
20 años	3	8.82
22 años	2	5.88
Trabaja	11	32.35
No trabaja	23	67.64
Soltero	29	85.29
Casado	5	14.70
Aprobó Matemáticas II	28	82.35
Reprobó Matemáticas II	6	17.64

4.2.1 EVALUACION CUANTITATIVA DE LA EVALUACION DIAGNOSTICA

A continuación se incluye un cuadro donde se presentan los datos cuantitativos de cada uno de los nueve reactivos que integran la evaluación diagnóstica, los resultados a considerar son la frecuencia con que los alumnos contestaron correcta o incorrectamente la pregunta, también el número de alumnos que dejaron en blanco la respuesta y que no la contestaron.

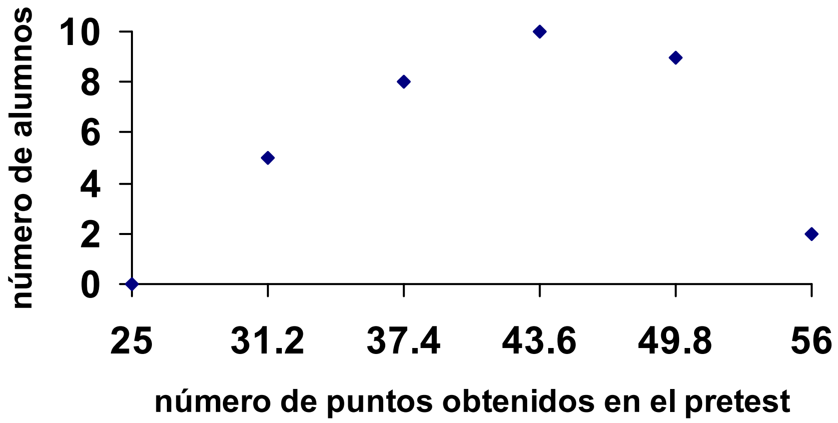
El criterio que se tomo en cuenta fue el siguiente: Las preguntas que se ubicaron dentro de una respuesta correcta fueron aquellas que alcanzaron el puntaje máximo previamente establecido. Para decidir que la pregunta fue contestada en forma regular se contabilizó al número de alumnos cuyos puntajes sobrepasaban el cincuenta por ciento del peso asignado a la pregunta. Para determinar que la pregunta está mal contestada se consideró el número de alumnos cuyo puntaje fue menor del cincuenta por ciento del peso asignado a la pregunta.

REACTIVO	**CONTESTO Correctamente**	**CONTESTO Regular**	**CONTESTO Incorrectamente**	**NO CONTESTO**
1	23		9	2
2 a)	3		24	7
2 b)			25	9
3	3		29 18 nada 11 algunas bien	2
4	20		6 - 5 puntos 3 - 4 puntos 1 - 3 puntos 1 - 0 puntos	3
4 A	29		1	4
4 B	27		4	3
4 C	26		5	3
4 D	30			4
4 E	29		1	4
4 F	24		6	4
5	3	10	12	9
5 a)	8		17	9
5 b)	12		13	9
5 c)	11		14	9
5 d)	12		8	14
6	4		26	4
6 a)	2		24	8
6 b)	5		21	8
6 c)	15		8	11
6 d)	25		4	5
6 e)	2		17	15
6 f)	19		2	13
7			12	22
8	18	8	7	1
8 a)	30		3	1
8 b)	18		13	3
8 c)	26	3	3	2
8 d)	28		3	3
9 a)	34			
9 b)	34			
9 c)	10	21	3	
9 d)	17	14	3	
9 e)	34			
9 f)	5	1	26	2
9 g)			17	17
9 h)			16	18

De los 34 alumnos que se presentaron a la evaluación diagnóstica ninguno alcanzo más de sesenta puntos de los cien establecidos.

A continuación se muestra una representación tabular de los datos con cinco intervalos de clase cuya amplitud es de 6.2. Se observa que el mínimo de puntos alcanzados por los alumnos fue de 25 y el máximo de 56.

Número de intervalo	**Frontera inferior**	**Frontera superior**	**Frecuencia absoluta**	**Frecuencia relativa**
1	25	31.2	5	14.7%
2	31.2	37.4	8	23.52%
3	37.4	43.6	10	29.41%
4	43.6	49.8	9	26.47%
5	49.8	56	2	5.88%



El total de puntos que debería alcanzar un alumno es de 100, pero ninguno llegó al cincuenta por ciento. Es importante tener el panorama de la situación actual de los estudiantes en los conocimientos y habilidades que son prerrequisito para cubrir el tema “Planteamiento de problemas que conduzcan a una función exponencial y su representación gráfica”.

Promedio alcanzado por el grupo = 1347/ 34 = 39.61

Con base en la evaluación cuantitativa se concluye que el grupo en general tiene muchas “lagunas” en los conocimientos previos.

4.2.2 ANALISIS CUALITATIVO DE LA EVALUACION DIAGNOSTICA

PREGUNTA 1

En la primera pregunta, de los nueve alumnos que no contestaron correctamente, tres de ellos consideran a la vertical como una función y el argumento que usan es que, corresponde a una línea recta. Entonces para estos estudiantes lo importante es que sea una línea recta. Pero no se detienen a pensar (o no saben) que un valor de "x" esta relacionado con una infinidad de valores de "y" y que por lo tanto no corresponde a una función.

Otros dos alumnos identifican a la parábola horizontal como la función porque es la gráfica que pasa por el origen, por lo que no conocen el concepto de función, puesto que para ellos necesariamente toda función debe pasar por el origen.

Los otros cuatro alumnos dan argumentos diferentes, incluso uno de ellos utiliza el trazo de una vertical en la parábola horizontal explicando que pasa por dos puntos de la parábola y con lo anterior afirma que es una función. Un alumno dice que cada una de las gráficas representa una función, porque cada trazo de cada gráfica pasa por una infinidad de puntos, interpretando su respuesta parece ser, que para él, sólo se tiene una función cuando el dominio en infinito, por lo que quedan descartadas las funciones con dominio finito.

También un estudiante identifica a la vertical como una función porque divide al plano en dos partes, su argumento no es consistente porque las otras gráficas también dividen al plano.

En conclusión los nueve alumnos por el tipo de respuesta que proporcionan, dan la impresión que no tienen idea sobre el concepto de función.

Analizando las respuestas de los 23 alumnos que acertaron en el inciso correcto, se asegura que ninguno de ellos tiene claro el concepto de función, ya que aparentemente sus argumentos nada tienen que ver con la función, por lo tanto adivinaron el inciso, seguramente por la parábola, pero no saben porque es una función.

PREGUNTA 2

a) Los 24 alumnos que no contestaron correctamente dan 12 respuestas muy variadas, algunas de ellas están relacionadas con una función, por lo tanto se percibe que los estudiantes están familiarizados con algunas funciones, pero definitivamente no saben que es el dominio. Los conceptos que utilizaron para dar respuesta a la pregunta son los siguientes: razón de cambio, abscisa, variable independiente, variable, función de x, independiente, incógnita, dependiente, imagen, contradominio, ordenada y variable dependiente. Es importante hacer notar que la mayoría de los conceptos están directamente relacionados con la variable "y", por lo que los alumnos no tienen claridad sobre los mismos.

b) Este inciso ningún alumno lo contestó correctamente y sus respuestas están relacionadas con el tema de función, pero reflejan que no manejan el concepto de imagen de la función, ni siquiera tienen la idea de que es, las respuestas que dan de contradominio, ordenada o variable dependiente, reflejan que algunos de ellos recuerdan que éstos conceptos tienen que ver con el eje "y", pero no tienen precisión sobre las imágenes.

PREGUNTA 3

De los tres alumnos que alcanzaron 6 puntos de un total de 8 en esta pregunta el error que presentaron fue que en la ecuación $y=6x-3y$ consideraron a "x" o a "y" como variables dependiente e independiente, lo cual confirma que no tienen totalmente comprendidos dichos conceptos, ya que en dicha ecuación ninguna de las variables es dependiente o independiente.

Hay alumnos que sin importar de que ecuación se trate invariablemente consideran a “x” como variable independiente y la otra variable como dependiente. Tal vez haciendo referencia al plano cartesiano. Otros alumnos indicaron el primer término de cada binomio como la variable dependiente y el segundo término como la variable independiente. Algunos determinaron el miembro derecho de la ecuación como la variable independiente y el miembro izquierdo como la dependiente lo cual no en todas las ecuaciones resulta correcto.

Otro porcentaje de alumnos consistentemente identifica a las letras como las variables independientes y a las constantes como las dependientes o viceversa y los restantes separan indiscriminadamente diferentes partes de las ecuaciones como variables dependientes e independientes.

En conclusión los estudiantes no manejan los conceptos de variables independientes y dependientes.

PREGUNTA 4

Todos los puntos (6) fueron identificados correctamente por veinte alumnos. Cinco puntos por seis alumnos. Cuatro puntos por tres alumnos y Tres puntos por un alumno y un alumno no identificó ninguno.

Las concepciones que tienen los alumnos respecto a las coordenadas rectangulares de los puntos son las siguientes:

Algunos alumnos (6) invirtieron el orden de las coordenadas, ubicando en el eje vertical la primera coordenada y en el eje horizontal la segunda coordenada, pero no lo hicieron consistentemente en todos los puntos, sino arbitrariamente en uno o dos puntos. Lo que implica descuido por parte de los alumnos.

Muy pocos estudiantes (2) invirtieron los signos de la ordenada de negativo a positivo, pero no lo hicieron en todos los puntos sólo en algunos.

Sólo un estudiante invirtió los signos de las abscisas de negativos a positivos, esta situación no fue consistente porque no lo hizo en todos los puntos.

Algunos alumnos (3) no saben identificar las coordenadas rectangulares de los puntos en el plano o no entendieron la pregunta, porque dejaron sin contestar el reactivo. Uno de ellos después de la aplicación de la evaluación comentó que si sabía cuales eran las coordenadas de un punto, pero que no estaban en un rectángulo.

En general se puede concluir que un alto porcentaje de alumnos no tiene dificultades para identificar las coordenadas de un punto en el plano cartesiano.

PREGUNTA 5

Algunos alumnos (11) sustituyen correctamente el valor numérico en la función, pero no incluyeron el procedimiento y su resultado es incorrecto.

Dos alumnos sustituyeron bien, pero no identificaron el orden de las operaciones, indiscriminadamente resuelven las operaciones en el orden de aparición, no saben (o no recuerdan) que primeramente deben realizar las multiplicaciones y posteriormente las sumas y restas.

Algunos (3) sustituyen bien pero indiscriminadamente realizan las operaciones sin respetar las establecidas por el modelo, intercambian por ejemplo una resta por una multiplicación, o realizan una suma en lugar de una multiplicación.

Cinco estudiantes no entendieron la pregunta y sólo interpretaron que sé tenia que sustituir los valores numéricos o literales, pero no realizaron ningún cálculo.

Se percibe que algunos (4) no dominan las operaciones básicas, en particular la suma de números enteros cuando se tiene un número positivo y otro negativo que es mayor que el primero.

Uno no recuerda que cuando se suma un número entero positivo con otro negativo el resultado conserva el signo del número con mayor valor absoluto, principalmente cuando éste tiene signo negativo.

Otros indiscriminadamente suman los valores absolutos de los números enteros independientemente de los signos que tengan.

Al sustituir (6) los números enteros negativos arbitrariamente sustituyen con signo positivo o negativo, es decir, en ocasiones se les olvida el signo negativo.

Se observa que existe un obstáculo epistemológico más que didáctico en la operación de números enteros negativos, el manejo de éstos presenta mayor dificultad para los alumnos. Cuando se trata de evaluar un entero negativo hay alumnos que consistentemente no toman en cuenta el signo negativo y evalúan el inverso aditivo con signo positivo.

No tienen (3) un manejo ágil de la ley de los signos para la multiplicación (-) (-) = (+).

No sustituyen (4) correctamente en la función el valor numérico, ya que, alteran las operaciones establecidas por la regla de correspondencia.

Cuando (2) se tiene una potencia el exponente lo multiplican por la base en lugar de considerar la base como factor, tantas veces según el exponente.

En el inciso d) como no se les dio un valor numérico, ya que tenían que sustituir un valor literal, un alumno le dio un valor particular (numérico) y así realizó el cálculo.

Al sustituir la literal se obtiene a^2-a-2, entonces cinco alumnos suman los términos en “a” aunque no sean semejantes.

Dos alumnos no supieron sustituir la literal en la función.

PREGUNTA 6

a) Muchos alumnos (12) multiplicaron la base por el exponente, cuando éste es negativo.

Cuando el exponente es negativo cinco alumnos realizaron el procedimiento como si éste fuera positivo y al resultado le antepusieron el signo negativo.

Seis estudiantes obviaron el signo negativo del exponente y lo resolvieron como si fuera positivo.

El signo negativo (8) se lo asignaron a la base para multiplicarla por sí misma.

Uno multiplicó la base por el exponente y obvio el signo negativo.

Consideraron (3) que al elevar la base a un exponente negativo el resultado es cero.

En 8^{-2}=.08 un alumno confundió la notación con exponente negativo con la notación científica, ya que expreso que el menos dos del exponente indica que el punto decimal se recorre dos lugares a la izquierda.

b) Toda base (5) con exponente cero da como resultado cero, ya que cualquier número multiplicado por cero da cero.

Como el exponente es cero (16), entonces sólo se quitan los paréntesis y la base queda igual, ya que el exponente indica que no se tiene que multiplicar ninguna vez.

Un alumno indicó que no se puede multiplicar cero veces la base.

c) Multiplicaron (6) la base por el exponente cuando éste es positivo, incluso algunos obtuvieron que $(3/5)^1=3/5$ porque el número multiplicado por 1 queda igual.

No falto un alumno que expresara que el exponente nos dice cuantas veces hay que sumar el mismo número.

En los otros incisos se dieron algunos de los argumentos que ya se han mencionado en esta pregunta dentro de los incisos a), b) y c).

PREGUNTA 7

Muy pocos fueron los alumnos que justificaron su respuesta, algunas de las argumentaciones que dieron son: porque en la raíz cuadrada no se pueden tener valores negativos, en el dominio puede estar cualquier número real para poder obtener la raíz, también consideraron los números 1,2,3,4,5y 6 porque la persona le da los valores que quiere a la x, otros anotaron los números –3,-2,-1,1,2, y 3.

Con base en las respuestas de los alumnos, es posible determinar que no tienen idea de cómo identificar el dominio de la función, ya sea de la función racional o la raíz cuadrada.

PREGUNTA 8

a) Presenta dificultades para localizar las fracciones decimales negativas.

Cambio (10) arbitrario (no lo cambian en todos los puntos) del signo de alguna coordenada, principalmente cuando el signo es negativo lo localizan en el eje positivo (la ordenada negativa la localizan positiva). Se presenta con mayor frecuencia el cambio de signo de la ordenada.

Otros (3) presentan el cambio de signo en la ordenada de positivo a negativo consistentemente en todos los puntos.

En forma arbitraria (7) localizan la ordenada positiva en negativa, algunos también localizan las abscisas negativas en las abscisas positivas.

b) Descuido en la lectura (5) de los pares ordenados en lugar de leer (-2.2,1) lo intercambian por (-2,2.1).

Localización incorrecta de las coordenadas negativas, un alumno al localizar –1.6 localizó –0.4, es decir, a –1 le sumo 0.6 y localizó –1 en el eje "x" y después 0.6 a la derecha del –1 sobre el eje "x".

c) Inversión (4) arbitraria de coordenadas, localizan la primera coordenada sobre el eje vertical y la segunda coordenada en el eje horizontal, pero no son consistentes con la inversión en todos los puntos.

En lugar de considerar –2.5 sobre el eje "y" lo localizan en –1.5, es decir, primero ubican –2 y luego le suman hacia arriba 0.5.

Cambio de signo (5) arbitrario en ambas coordenadas, un sólo alumno fue consistente en dicho cambio.

PREGUNTA 9

En el inciso c) el alumno tenía que dar dos datos como respuesta y la mayoría sólo contesto uno, es decir, no observaron con detenimiento la gráfica para identificar que había dos segmentos decrecientes que representan la disminución de participantes. Y sólo identificaron el año donde hubo mayor disminución de participantes. O tal vez lo confundieron con el valor menor de participantes.

Tres alumnos en lugar de contestar los años donde disminuyó el número de participantes, lo interpretaron como los años con valor menor de participantes e incluso determinaron que uno de ellos era el año 1990 cuando iniciaron los concursos con 20 alumnos.

d) Sólo contestaron (6) los años en que permaneció estable el número de participantes, pero se les olvido anotar la cantidad.

A pesar de que existen dos períodos en los que permaneció estable el número de participantes los alumnos sólo identificaron uno. Es posible que en la pregunta no le den importancia a la letra “s” entre paréntesis y por eso pasen por alto la posibilidad de que la respuesta sea uno o más años.

Veintiséis alumnos confundieron el mayor incremento con el valor máximo, lo que implica que realmente no saben interpretar la gráfica, ya que no identifican el incremento de un año a otro y por lo tanto cuando se trata del mayor incremento los estudiantes buscan en la representación gráfica el máximo valor de la ordenada.

Un alumno contestó los años tanto con mayor crecimiento de participantes, como con mayor decrecimiento por lo tanto entendió parcialmente la pregunta. Otro contestó algunos años que ni siquiera se presentan en la gráfica.

g) Uno que otro alumno contestó que el dominio de la función es el último año del concurso. Tres alumnos dijeron que el dominio son los 180 alumnos que aparecen en el eje “y”. Cuatro alumnos mas sin mencionar cantidades determinaron que el dominio está integrado por el número de alumnos, otro par de estudiantes también sin considerar números señalaron que el dominio es el que corresponde al eje “y”. Sólo cinco estudiantes tienen la información de que el dominio de la función está relacionado con los valores del eje “x”, aunque ninguno de ellos dio valores, sólo se limitaron a identificar el eje que contiene el dominio de la función.

La pregunta (3) no se entendió porque en sus respuestas contestaron que la gráfica es una quebrada, posiblemente entendieron que ¿cómo es la gráfica? y entonces tratan de describirla con conceptos no matemáticos. Otros (3) consideran que el eje “x” corresponde a la imagen y uno de ellos explícita que el año depende del número de alumnos, entonces se deduce que no hay claridad de lo que son las variables dependientes e independientes. Sólo dos estudiantes determinaron que el eje “y” es la imagen, pero ninguno explícito los valores. En conclusión ningún alumno sabe que es la imagen de una función.

Con base en las evaluaciones cuantitativa y cualitativa nos damos cuenta que los alumnos presentan diversas dificultades en el dominio de los contenidos y habilidades prerrequisito para abordar el tema de función exponencial.

4.3 RESULTADOS DE LAS BITACORAS

La propuesta didáctica para mejorar el aprendizaje del "Planteamiento de problemas que conduzcan a una función exponencial y su representación gráfica" se puso en práctica con 12 alumnos del grupo 201 de Matemáticas II del plantel número 13 "Xochimilco - Tepepan" del Colegio de Bachilleres que presentaron la evaluación diagnóstica. Fueron cuatro estudiantes con los puntajes más altos (A), cuatro con los puntajes intermedios (I) y cuatro con los puntajes más bajos (B). Se formaron tres equipos y en cada uno se distribuyeron a los alumnos de tal forma que hubo al menos uno de alto, intermedio y bajo puntaje, cada equipo estuvo integrado por cuatro alumnos.

A continuación se presenta la distribución de los equipos.

		A	B	A	B
		I	B	I	A
Equipo 1		Equipo 2		Equipo 3	

No se aplicó la estrategia con todos los alumnos del grupo 201, ya que no hubo posibilidades de reunir al grupo completo.

4.3.1 BITACORA DE LA PRIMERA SESION

Fecha: 13 de noviembre de 1988. Horario: 13.00 a 15.15 hrs.

La mayoría de las actividades se fueron realizando conforme a la planeación, realmente no fue posible escribir la bitácora en la sesión porque o se dedica el maestro a coordinar o a ser un observador pero los dos roles no son compatibles en todo momento, en la puesta en común no es posible escribir y moderar las participaciones simultáneamente.

Los tiempos planeados resultaron insuficientes, no hay duda que cuando se trabaja en equipo y se realiza la puesta en común las horas se hacen muy cortas. El problema 2 debía iniciarse a las 13.25 hrs, pero los equipos empezaron a las 13.40 hrs, con 15 minutos de retraso porque no quisieron suspender antes la resolución del problema 1, realmente se veían todos interesados y cada uno en sus equipos hacían propuestas y las argumentaban dé acuerdo con sus posibilidades. La puesta en común inició a las 14.10 hrs.

Durante la resolución del problema "El chisme" hubo participaciones en el equipo 3 de que la solución se obtenía aplicando las proporciones e hicieron un intento. Mientras que en el equipo 1 se afirmó que "la solución incluye el tiempo como factor" y anotaron la siguiente expresión (4)(4)(30)(3), donde 30 son los minutos transcurridos, 3 corresponde a la tercera media hora y (4)(4) que cada persona informa la noticia a otras 4.

PROBLEMA 1 “EL CHISME”

Las participaciones de los equipos fueron muy breves porque los equipos no avanzaron mucho. La puesta en común inició con el equipo 2, su razonamiento fue el siguiente:

Si 64 conocían la noticia en 1 ½ hrs., entonces

2(64) conocían la noticia en 2(1 ½) hrs., entonces

se concluye que 4(x) es un modelo para obtener la solución.

Posteriormente el equipo 3 mencionó que hicieron una tabla para presentar información y escribieron en el pizarrón lo siguiente:

½ → 4
1 → 16
1 ½ → 64
2 → 256
2 ½ → 1024
3 → 4096
3 ½ →16384

A continuación presentaron una expresión que obtuvieron como modelo matemático.

$(\text{ número de horas } (4)\ )^2$

por lo tanto $(\quad 20 \quad (4)\ )^2 = 6400$, donde 20 corresponde a 20 medias horas, entonces 6400 es el número de personas enteradas en la vigésima media hora.

Tocó su turno al equipo 1, comentaron que ellos sólo enriquecerían los procedimientos de los otros dos equipos y que los anteriores omitieron la suma de las personas enteradas en ese instante pero se les olvida las que se enteraron antes, es decir, después de 1 ½ horas el número de gentes que ya conocían la noticia se obtiene con la suma 4+16+64.

PROBLEMA 2 “LOS TATARABUELOS”

Equipo 1. Hicieron en el pizarrón el siguiente árbol:

S
P M
P M P M
P M P M P M P M
PM PM PM PM P M PM PM PM

Afirmaron que Susana tuvo 2 padres, 4 abuelos, 8 bisabuelos y 16 tatarabuelos, entonces la expresión para obtener el número de tatarabuelos es: (1 + 4 (3)) 2 donde,

1 representa a Susana
4 representa el número de abuelos
3 representa el número de generaciones y
2 representa el número de padres.

Se invitó al grupo a hacer observaciones de la expresión anterior, pero nadie hizo comentarios.

El equipo 2 en su presentación dijo que ellos habían elaborado una tabla porque resulta más fácil y escribieron en el pizarrón lo siguiente:

Sí 1,2,3 y 4 son el número de generaciones entonces,

$$1(4)=4$$
$$2(4)=8$$
$$3(4)=12$$
$$4(4)=16$$

Explicaron que se tiene que multiplicar por 4, porque por cada generación que pasa hay 4 abuelos. Por lo tanto la generación "n" se obtiene con $n = x\,(4)$.

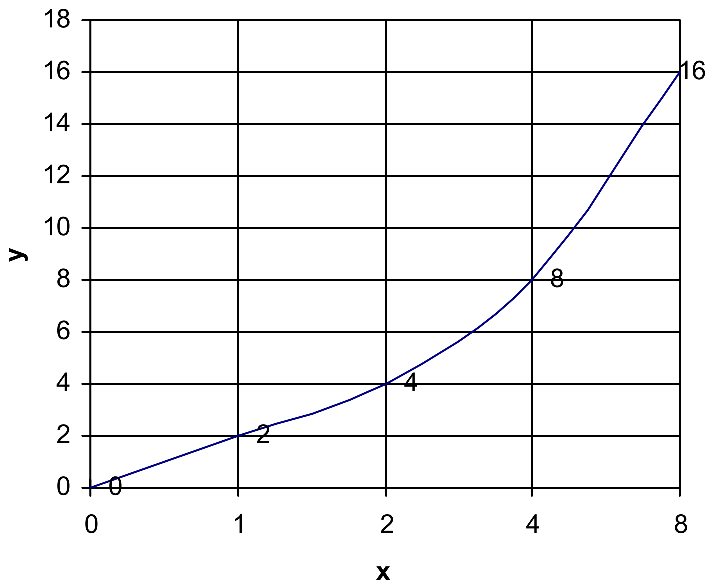
Por último le tocó su turno al equipo 3, ellos informaron que elaboraron un árbol genealógico muy parecido al equipo 1 y que no tenía caso repetirlo en el pizarrón. El equipo afirmó que para llegar a los tatarabuelos sólo se requieren 3 generaciones antes de Susana que son los padres, abuelos y bisabuelos. También obtuvieron una representación algebraica para calcular el número de ascendientes en la n-ésima generación, fue la siguiente:

" 2n siendo "n" el número de generaciones y
2 son los padres".

La tabla que elaboraron se presenta a continuación.

Generación N	1	2	4	8
Padres	2	4	8	16

Su representación gráfica fueron puntos "sobre una recta", lo anterior lo afirmó el equipo.



La puesta en común terminó con observaciones de los demás equipos.

De las 14.40 a 15.15 hrs se explicitaron los contenidos relacionados con los problemas, destacándose los conceptos siguientes: dominio, imagen de un elemento, imagen de la función, exponente, regla de correspondencia y representación tabular. En esta actividad fue determinante la actitud de los alumnos, pues aunque estaban muy cansados aun mostraron interés.

Los alumnos reflexionaron sobre la importancia de comprender la representación en lenguaje común de los problemas, porque no es posible intentar la resolución de los mismos cuando no se ha comprendido el problema. Una vez que se van obteniendo los pares ordenados es conveniente organizar la información a través de una tabla, es necesario tener iniciativa para observar los valores en la tabla y deducir algunas características de la función. Los alumnos mencionaron que están más familiarizados a las tablas que a los problemas en lenguaje común porque les cuesta trabajo entenderlo y comprenderlo.

Al término de la sesión los alumnos se ven algo cansados porque llevan 8 horas de clase seguidos y tal vez algunos ni siquiera desayunaron.

Es importante aclarar que la última media hora de la sesión fue imposible tomar nota, porque el profesor se dedicó a moderar la participación de los alumnos a través de lluvia de ideas y preguntas dirigidas, se trato de seguir en la medida de lo posible lo planeado, lo importante es que los conceptos básicos se incluyeron en esta sesión.

La sesión concluyó agradeciendo la participación de los alumnos e invitándolos a estar puntuales en la siguiente sesión.

4.3.2 BITACORA DE LA SEGUNDA SESION

Fecha: 16 de noviembre de 1998.
Horario: 13.00 a 15.30 hrs.

En general las actividades se realizaron conforme a lo planeado sólo se hicieron algunos ajustes.

La distribución de los equipos tuvo cambios porque a las 13.00 hrs. Sólo llegaron 7 alumnos de un total de 12 entonces se formó el equipo 1 tal y como se había previsto con dos alumnos de alto, otro de bajo y un cuarto estudiante de puntaje intermedio (en la evaluación diagnóstica).

Del equipo núm. 3 sólo estaba una alumna y del equipo núm. 2 sólo se presentaron puntualmente dos alumnos, por lo que no fue posible mantener el equipo 2 con los mismos integrantes. Para iniciar el trabajo fue necesario reunir a los alumnos presentes de los equipos 2 y 3.

Después de 30 minutos de haber iniciado la sesión llegaron 4 alumnos más, de los cuales uno se incorporó al equipo 2 y los otros 3 integraron el equipo 3. Sólo una alumna no asistió a la sesión.

Equipo 1: Cornejo Becerra Rubén
Nava Casas María Isabel
Juárez Solares Ulises
Alvirde Rangel Adriana Guadalupe

Equipo 2: Sánchez González Alicia

Rangel Escobar Tomas
Tinoco Contreras Cristian
García Palacios Alberto
Equipo 3: Bonilla Hernández Manuel
Monroy Salcedo Javier
Leyte Muñoz Erika

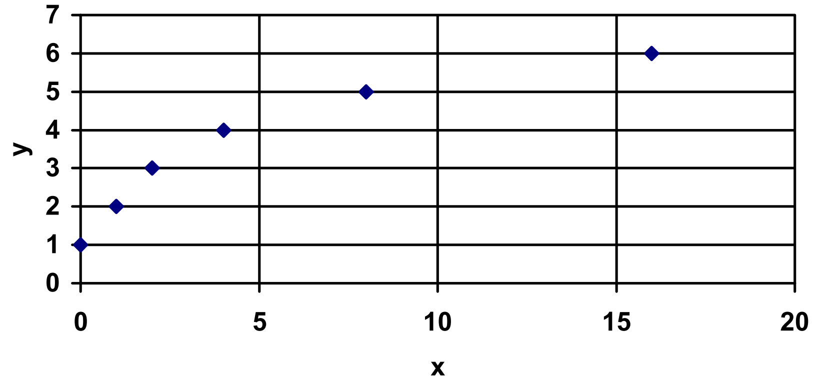
Los tiempos programados no fue posible respetarlos, porque para la resolución del problema se plantearon 40 minutos pero los alumnos no quisieron interrumpir el trabajo y continuaron por lo que fue necesario ocupar otros 20 minutos para la resolución del problema. Se observa que los alumnos se entusiasmaron al trabajar en equipos y no se sienten satisfechos cuando su actividad se queda inconclusa, al contrario demandan más tiempo para trabajar en equipo, los mismos alumnos hicieron la observación que la hora (13.20 a 14.20 hrs.) que utilizaron para resolver el problema se les fue sin sentirla.

Los tres equipos le pusieron mucho interés a la solución del problema casi todos participaron en sus equipos para proponer el procedimiento a seguir. Dos de los equipos sintieron necesidad de calcular con exactitud 2^{63} y otro equipo 2^{64}, uno de ellos lo realizó en la calculadora y otro equipo realizó los cálculos a “pie”.

Los treinta minutos destinados para la exposición de dos equipos no fueron necesarios. El equipo núm. 3 de 14.22 a 14.31 hrs., en su presentación enfatizaron que la clave era duplicar el número anterior de granos de trigo para obtener el número posterior, este equipo explicó que para calcular el número de granos de trigo en la casilla 64 multiplicó el número 2 sesenta y cuatro veces y obtuvo como resultado 9,223392,037000,000000 granos de trigo.

De 14.33 a 14.43 hrs. Presentó su trabajo el equipo 2. Ellos mencionaron que no era necesario multiplicar el número 2 sesenta y cuatro veces sino sólo bastaba con sesenta y tres veces, pero que no hicieron el cálculo porque perderían mucho tiempo y sólo dejaron expresado que es 2^{63}. Respecto a la expresión general para calcular el número de granos de trigo que hay que colocar en el n-ésimo cuadro obtuvieron $2^n/2$ e incluso le asignaron la simbología $f(n)=2^n/2$, en la exposición ningún alumno de los otros equipos observó que el denominador se puede simplificar con un factor del numerador y por lo tanto también se puede expresar como $f(n)=2^{n-1}$.

Respecto a las variables afirmaron que la única variable es el número de granos de trigo, ya que los cuadros del tablero son 64 y el número de cuadros no puede cambiar, es decir, 64 no puede cambiar. Este equipo explicó que llegó hasta la representación gráfica de la función e hicieron la siguiente representación.



Se solicitó que los otros equipos hicieran observaciones, al respecto comentaron que los valores del eje “x” y “y” estaban intercambiados porque 1,2,4,8,16 y 32 van en la vertical mientras que 1,2,3,4,… van en la horizontal. Ningún alumno hizo comentarios sobre la escala. Al equipo sólo le sorprendió que la representación gráfica fuera una línea recta pero no reflexionó sobre la causa de la misma. Un alumno mencionó que en la exposición del primer equipo se dio cuenta que tendría que ser el modelo 2^{n-1}, pero que le dio pena decirlo.

El equipo 1 presentó sus resultados de 14.43 a 14.53 hrs. Desde en inciso a) se dieron cuenta que correspondía a potencias de 2 y plantearon la serie $2^0,2^1,2^2,2^3,\ldots,2^7y2^8$ obteniendo 256 granos de trigo en la casilla 8 pero no se percataron que 256 corresponde a la casilla número 9. Con ese mismo razonamiento su propuesta es que en la casilla “n” el número de granos de trigo es 2^n y elevaron al cuadrado el número 4294,967296 a “pie” obteniendo 18,446744,069665,189580. Los otros equipos hicieron notar que los resultados de este último equipo son el doble de los resultados de los otros equipos. La única variable que identificaron fue el exponente de la base 2, es decir, el número de casillas. Su representación gráfica también son puntos sobre una línea ya que no eligieron una unidad para el eje “y” y directamente anotaron los números 2,4,16,32 y 256. Comentaron que dejaron los puntos aislados porque no se pueden contar medios granos.

Finalmente el grupo hizo una recapitulación de los contenidos programáticos incluidos en la resolución del problema. De 14.55.a.15.30 hrs. El profesor coordinó dicha actividad a través de lluvia de ideas y de interrogatorio dirigido, cubriéndose así satisfactoriamente la última actividad de la sesión.

Se observó que los alumnos ponen más interés en el interrogatorio dirigido porque ya tienen como antecedente la experiencia de la solución del problema y los contenidos no se ven aisladamente, sino por el contrario se hace una revisión dentro del contexto del problema.

4.3.3 BITACORA DE LA TERCERA SESION

Fecha: 18 de noviembre de 1998-11-22
Horario: 13.00 a 15.30 hrs.

El salón estaba ocupado por alumnos de 6º semestre, pero se platicó con ellos y accedieron a desocupar el espacio. El material estuvo al alcance de los alumnos. El equipo número dos permaneció con los cuatro integrantes del primer día. Mientras que los equipos 1 y 3 se integraron conforme a lo planeado a excepción de la alumna Alvirde Rangel Adriana integrante del equipo 3 que no se presentó a la sesión.

13.00 hrs. Se solicitó a los alumnos que ocuparan el lugar correspondiente en su equipo, paralelamente se distribuyeron hojas blancas, calculadoras, plumones y lápices. Se comentó con los estudiantes la orden del día consistente en:

13.04-13.07 hrs. Explicar los objetivos de la sesión.

13.10-13.40 hrs. Trabajo colectivo para la resolución del problema 4 “Bacterias”.

13.40-14.10 hrs. Presentación del trabajo realizado por los equipos.

14.10-15.00 hrs. Explicitación de los contenidos incluidos en los objetivos planteados para la sesión.

A continuación se explicaron los objetivos a cubrir durante la sesión, los alumnos hicieron preguntas y éstas fueron contestadas. Se distribuyó a cada alumno una fotocopia del problema 4 “Bacterias” el cual leyeron antes de contabilizar el tiempo de resolución del mismo, se explicitó que describieran con detalle los procedimientos realizados y en caso de cambiar de opinión no borrar y hacer un recuadro indicando que no fue valido.

A las 13.12 hrs. Se dio por iniciado el trabajo colectivo de los equipos para dar solución al problema 4 “Bacterias”, al azar se determinó el equipo en que el profesor estaría permanentemente como observador y le tocó aleatoriamente al equipo 3 de tres integrantes, ya que no asistió la alumna Adriana. El observador sólo se ausentó del equipo cuando los otros equipos hacían alguna pregunta.

El equipo observador fue el número 3 integrado por Nava Casas Isabel, Bonilla Hernández Manuel y Monroy Salcedo Javier. Los dos alumnos desde el inicio estuvieron muy interesados por obtener las respuestas del problema, pero la alumna parecía sin motivación hacia la tarea del equipo, en varias ocasiones se le invitó a dar su opinión a sus compañeros, pero permaneció todo el tiempo callada. Por lo que la resolución del problema estuvo a cargo de los dos alumnos.

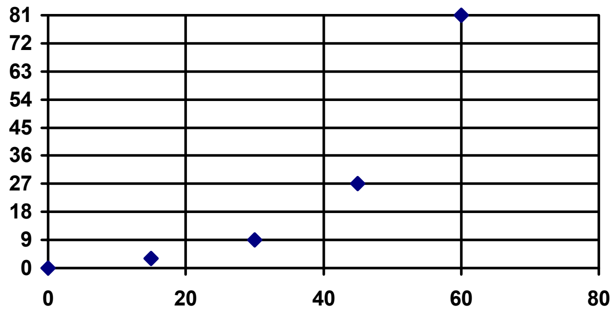
En la elaboración de la tabla primero propusieron una columna correspondiente al número de bacterias y la otra a los minutos, la relación que establecieron fue la siguiente:

núm. Bacterias	minutos
1	0
3	15
18	30
5832	45

Según los alumnos la tabla se obtuvo triplicando el número de bacterias que corresponde a la operación de elevar al cubo, estuvieron unos minutos checando sus resultados y llegaron a la conclusión de que tenían un error, pues si duplicar es el doble y tenemos que multiplicar por dos, entonces triplicar significa tres veces, es decir, 3x. Otro alumno explícito “el problema no dice 3 al cubo” es decir “no dice x^3” entonces la tabla “no nos sirve”. Comentaron la posibilidad de obtener la tabla de otra manera, aunque mantuvieron las mismas variables; número de bacterias y minutos, el segundo intento quedó explícito en la siguiente tabla:

núm. Bacterias	minutos
1000000	0
3000000	15
9000000	30
27000000	45
81000000	60

Para elaborar la tabla anterior fueron multiplicando el número de bacterias del renglón anterior por 3. Hasta aquí los alumnos se veían convencidos de la tabla que elaboraron y procedieron a realizar la gráfica poniendo en el eje “x” una escala cuya unidad es de 5 y sobre el eje “y” una escala cuya unidad es de 9. En cada uno de los ejes sólo pusieron números y no explicitaron que representaban dichos números. Los dos alumnos estuvieron muy activos al hacer propuestas para solucionar el problema, se invitó a la alumna a opinar sobre lo que estaban haciendo sus compañeros y permaneció callada. En su gráfica dejaron los puntos aislados y no hicieron ningún comentario del por qué dejarlos separados o la posibilidad de unirlos.



Un alumno dijo que la gráfica era una parábola, ya que “quedan parábolas cuando son cuadráticas o cuando aparece un exponente”. A partir de este momento intentaron obtener la representación algebraica, al respecto un estudiante dijo que necesitaban buscar un modelo matemático que se cumpla para todos los períodos. Intentaron multiplicar el número de bacterias por los minutos, pero un alumno dijo que no se podían multiplicar. Observaron que 3 por 3 igual 9 y 9 por 3 igual a 27 pero no encontraron ninguna relación, después argumentaron que 3 por 14 es igual a 12 y que 12 por 3 igual a 36, al darse cuenta que no podían plantear la representación algebraica volvieron a leer el inciso c) y un alumno se percató que “x” es el número de períodos y entonces dijo que “x” tomaba valores de 1,2,3,4,… a su vez comentó que el número de minutos al parecer no importa mucho sino el número de períodos.

Un alumno propuso “hay que regresarnos a la forma de obtener las bacterias y seguramente vamos a obtener el modelo” al respecto comentaron que:

“Parece ser que 3 por 3 igual a 9

$3^3=27$

y $4^3=27$”

“Parece ser que el número de períodos hay que elevarlo al cubo” entonces:

$1^3=1$

$2^3=8$

$3^3=$

$4^3=$

Es importante hacer notar que los alumnos del equipo 3 mostraron mucho interés en el trabajo, pero también mucha pereza para escribir lo que comentaban.

Hasta aquí terminan las observaciones realizadas en el equipo 3, en el que estuvo el profesor como observador.

La resolución del problema estaba planteada de 13.10 a 13.40 hrs. , se fue el tiempo y se dio por terminado el trabajo de los equipos, el cual se prolongó hasta las 13.52 hrs.

13.53 hrs. Se recogieron los reportes de los equipos y se invitó a los alumnos a acomodar el mobiliario para tener visibilidad hacia el pizarrón. La selección de los equipos para presentar su trabajo no se realizó en la forma planeada, ya que ninguno de los tres obtuvo la representación algebraica y el avance en sus razonamientos fue análogo, por lo tanto ellos mismos propusieron el orden de participación.

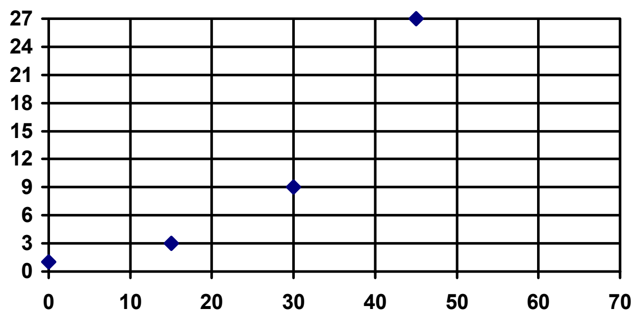
Se tenía planeado 30 minutos para la exposición de los equipos, pero cada uno ocupo en promedio 6 minutos, Inició el equipo núm. 2 de 13.55 a 14.00 hrs. Anotaron una tabla en el pizarrón con una columna con los minutos y otra con el número de bacterias, en ningún momento mencionaron que el número de bacterias correspondía a millones.

minutos	núm. De bacterias
0	1
15	3
30	9
45	27
60	81

Después explicaron que se cumple la siguiente relación:
0=1 en cero minutos hay un millón de bacterias.
15=3 en 15 minutos hay 3 millones de bacterias.
30=9 en 30 minutos hay 9 millones de bacterias.
45=27 en 45 minutos hay 37 millones de bacterias.
60=81 en 60 minutos hay 81 millones de bacterias.

Se observa que el razonamiento de los alumnos es correcto pero la sintaxis de los símbolos escritos es incorrecta, ejemplo 15=3, en su explicación aparentemente los alumnos no se dan cuenta que 15=3 no se cumple.

La representación gráfica que hicieron fue la siguiente:



Comentaron que los puntos no se unen porque 16,17,18,… no interesa que pasa en esos minutos, tampoco explicaron las variables en cada eje, pero se puede observar que en la horizontal consideraron los minutos y en la vertical el número de bacterias, pero no anotaron que el número representa millones de bacterias.

En conclusión el modelo es: $y(15)=3x$ donde "y" es el número de períodos y "x" es el número de bacterias, entonces el modelo se obtiene multiplicando el número de períodos por 15 y eso es igual a 3 multiplicado por el número de bacterias, entonces:

$$y(15)=3x$$
$$2(15)=3(3)$$
$$30=9$$

Ningún alumno se dio cuenta o al menos no se hizo ningún comentario en voz alta sobre la conclusión del equipo, respecto a que 30=9. Se pidió a los demás equipos hacer observaciones pero todos quedaron en silencio.

14.03 a 14.10 hrs. El equipo número 1 presentó su trabajo. Ya no hicieron la tabla en el pizarrón porque dijeron que es igualita a la del equipo anterior y que su gráfica tampoco tenía caso construirla porque era idéntica a la del equipo anterior. Mencionaron que utilizaron la simbología siguiente:

x = períodos ← número

b = bacterias ← número

n = minutos ← número

Entonces el modelo se obtiene multiplicando el número de períodos por los minutos y es igual al triple de las bacterias, por lo tanto: $xn = 3b$ al sustituir se cumple que:

$$1(15) = 3(1000000)$$

$$15 = 3000000$$

Un alumno de otro equipo dijo que las propuestas de los dos equipos sobre el modelo son las mismas, es decir, cuenta con los mismos elementos.

14.10-14.17 hrs Presentación de los resultados del equipo 3. En este equipo el profesor permaneció de observador durante el trabajo colectivo para resolver el problema y las observaciones ya han sido comentadas en la bitácora de la sesión 3. Comentaron que la tabla fue casi igual y lo único diferente es que ellos si le pusieron en el número de bacterias millones para que quedara exacta. En la gráfica hubo una pequeña diferencia, en el eje "x" se eligió una unidad de 5 y sobre el eje "y" la unidad es de 9. Los puntos localizados los dejaron aislados y no los unieron, pero no explicaron porque. Se puede observar que los tres equipos en el eje "x" pusieron el número de minutos y sobre el eje "y" el número de bacterias.

Al término de las exposiciones de los tres equipos se preguntó si alguien quería hacer un comentario o si tenía alguna duda y un alumno dijo "creo que ya tengo una idea del modelo" si consideramos a x=número de períodos entonces en el primer período es 3^1

Segundo período es $3^2=9$ y

Tercer período es $3^3=27$ entonces el modelo es 3^x.

Sus compañeros afirmaron que tenía razón porque si se cumple. No se hizo hincapié en que 3,9 y 27 corresponde a millones.

Se concluye que durante el tiempo de resolución del problema ningún equipo logró obtener la representación algebraica, pero al final de las presentaciones de los equipos un alumno logró plantear un razonamiento correcto para la obtención de dicha representación.

14.22-15.22 hrs. A través de las técnicas de lluvia de ideas y de interrogatorio dirigido se explicitaron los contenidos previamente planeados. También los alumnos pasaron al pizarrón y realizaron actividades por parejas. Por lo tanto las actividades planeadas de 14.20 a 15.00 hrs. se llevaron a cabo tal y como se pensaron previamente lo que no fue posible respetar fue el tiempo de 40 minutos, ya que se ocupo una hora.

En conclusión en esta sesión los objetivos establecidos se cubrieron satisfactoriamente, aunque el tiempo siempre es la limitante, ya que con la experiencia vivida en estas tres sesiones y con el trabajo realizado en los grupos nos damos cuenta que se ocupa mucho tiempo cuando los alumnos tienen que construir su conocimiento y confrontar sus ideas con las del grupo a través de una puesta en común.

Es importante aclarar que los estudiantes en el horario en que se trabajó estaban algo cansados, ya que inician sus clases desde las 7.00 hrs. y terminan a las 13.00 hrs. por lo tanto quedarse todavía de 13.00 a 15.00 o a 15.30 hrs. representó para ellos un doble esfuerzo.

4.4 ANALISIS DE LOS REPORTES ENTREGADOS POR LOS EQUIPOS

4.4.1 PROBLEMA 1. "EL CHISME"

Equipo 1. Bonilla Hernández Manuel
Juárez Solares Ulises
Nava Casas María Isabel
Sánchez González Alicia

Para calcular cuantas personas conocían la noticia en la tercera media hora propusieron dos procedimientos porque el equipo no logró ponerse de acuerdo. En una solución mencionaron que es una relación de proporcionalidad porque el número de personas depende de cada 30 minutos que pasan. Los alumnos tienen claridad que el número de personas depende del tiempo transcurrido, pero al hacer sus cálculos dijeron que la solución incluye al tiempo como factor y propusieron x=(4)(4)(30)(3)=1440 donde (4)(4) significa que cada persona informa a otras 4, 30 indica que el tiempo es de cada 30 minutos y 3 que corresponde a la tercera media hora. El otro procedimiento que siguieron fue correcto nada más que tienen errores de sintaxis en su representación aritmética. Lo importante es que lograron comprender el problema. También trataron de elaborar la representación tabular, pero no la concluyeron porque en el encabezado de una columna anotaron y=30 min. Y a partir de lo anterior no supieron como llenarla. En forma análoga obtuvieron el resultado para 3 ½ horas.

Equipo 2. De Anda Belli Arely
García Palacios Alberto
Rangel Escobar Tomas
Tinoco Contreras Cristian

Presentan en el inciso a) la respuesta de 84, pero realmente no aparece alguna justificación adecuada, presentan la suma siguiente:

4	Concluyen que 84=1.30 min. Interpretándolo 84
+ 16	personas conocen la noticia en 1.30 hrs., pero los
<u>32</u>	alumnos caen en errores de sintaxis y, además, las
<u>64</u>	unidades de minutos no son adecuadas en dicha
84	expresión.

Para calcular en 3 ½ horas resuelven:

84	Como 84=1.30 entonces da la impresión que
<u>x 2</u>	duplicaron el número de personas ((84)(2)=168)
168	para obtener la cantidad en el doble de 1.30 horas
+ <u>28</u>	(3 horas) y después sumaron 28 porque 7(4)=28
196	y 3 ½ horas corresponde a la 7º media hora.

Da la impresión que intentaron dibujar el plano cartesiano porque incluyen dos segmentos aparentemente perpendiculares y se observa que reflexionaron sobre las variables en cada eje y la conclusión a la que llegaron es congruente con el problema. En el eje "x" escribieron la cantidad de ½ horas transcurridas, en el eje "y" cantidad de personas enteradas, pero no supieron que números poner sobre los ejes. Llegan a la conclusión que para obtener el resultado hay que cuadruplicar el valor "x", por lo tanto c(x)=x(4).

Equipo 3. Alvirde Rangel Adriana
Cornejo Becerra Rubén
Leyte Muñoz Erika
Monroy Salcedo Javier

Presentan una tabla donde incluyen "hora" con una escala de ½ hasta 3 ½ y el otro renglón "n" con los valores de las personas que se enteraron en ese instante, el razonamiento hasta aquí es correcto, aunque les faltó completarlo realizando la suma de las personas que hasta ese momento ya se habían enterado. En los resultados de su tabla se dan cuenta que para obtener un valor hay que multiplicar por cuatro el valor anterior y así sucesivamente, entonces tratan de generalizar con la expresión $n=(hrs(4))^2$ y por lo tanto para saber cuantas personas conocen la noticia en la vigésima media hora se sustituye el número 20 en lugar de las horas y queda $(20(4))^2=6400$. Es obvio que el razonamiento correcto aplicado en la tabla no supieron como generalizarlo, porque es más elevado el nivel de abstracción que requieren y se les dificulta mucho.

OBSERVACIONES.

Analizando los reportes de los equipos nos damos cuenta que las respuestas y soluciones son independientes del nivel que obtuvieron los alumnos en la evaluación diagnóstica. Comparando los reportes de los equipos 1 y 3 integrados por dos alumnos de nivel intermedio y dos de nivel alto respectivamente, podemos concluir que son muy equivalentes porque ambos lograron comprender el problema, obtuvieron resultados correctos al calcular el número de personas enteradas hasta 3 ½ horas y no obtuvieron la expresión algebraica. El reporte del equipo 2 con dos alumnos de nivel bajo fue menos satisfactorio, ya que no lograron comprender el problema.

4.4.2 PROBLEMA 2. "LOS TATARABUELOS"

Equipo 1. Bonilla Hernández Manuel
Juárez Solares Ulises
Nava Casas María Isabel
Sánchez González Alicia

Para calcular el número de tatarabuelos hicieron un árbol en el que observaron que Susana tuvo 16 tatarabuelos y que para llegar a dicho resultado es necesario darse cuenta que corresponde a la cuarta generación. Además, intentaron una representación numérica para justificar el número 16 y en ese intento plantearon que:

$f(x)=1+4(3)=15+1=16$ Lucubrando se puede decir que el 1
$(1+4(3))(2)=$ representa a Susana, el 4 que Susana
$(16)(2)=32$ tiene 4 abuelos (a partir de lo que comentaron),

el 3 por la tercera generación, entonces el 15 fue el resultado de la operación 1+4(3), ya que todavía algunos suman 1+4=5 y el resultado lo multiplican por 3 y seguramente le aumentaron 1 para obtener 16. Así quedaron convencidos que "cuadraba" su propuesta e hicieron un intento por generalizar con $f(n)=((1+4)(n))(2)$. Nos damos cuenta que no tienen habilidades para abstraer y por eso se les dificulta generalizar.

Equipo 2. De Anda Belli Arely

García Palacios Alberto
Rangel Escobar Tomas
Tinoco Contreras Cristian

El equipo discutió con entusiasmo hasta que se pusieron de acuerdo que los tatarabuelos son los abuelos de los abuelos y como Susana tuvo 4 abuelos y cada uno a su vez tuvo otros 4 abuelos entonces son 4(4)=16 tatarabuelos. Consideraron que es necesario retomar 3 generaciones antes de Susana para llegar a los tatarabuelos e incluyen una tabla para justificar su resultado donde 1,2,3 y 4 es el número de abuelos y 4 representa que cada abuelo tiene 4 abuelos.

$$1(4)=4$$
$$2(4)=8$$
$$3(4)=12$$
$$4(4)=16$$

En su intento por generalizar proponen $n=x(4)$, pero no explícitan nada. Se observa que no comprenden completamente el problema, lo que seguramente dificulta su generalización.

Equipo 3. Alvirde Rangel Adriana
Cornejo Becerra Rubén
Leyte Muñoz Erika
Monroy Salcedo Javier

Los estudiantes hicieron un árbol y obtuvieron 16 tatarabuelos considerando según ellos tres generaciones antes de Susana, presentaron la siguiente tabla:

N				
P a d r e s				

Donde n = generación,

Se observa que la tabla no corresponde a los valores propuestos con base en el árbol, el equipo propuso que con 2n se obtiene el número de tatarabuelos, donde "n" es el número de generación y 2 son los padres. Elaboraron la representación gráfica en la que se percibe que no tienen el concepto de unidad para la escala sobre los ejes, ya que consecutivamente colocaron los puntos 1,2,4 y 8 sobre el eje "x". Al unir los puntos obtuvieron una curva, pero ellos explicitaron que es una recta.

Nos damos cuenta que los alumnos tienen muchas "lagunas" y por lo tanto no comprendieron el problema.

OBSERVACIONES.

Los resultados de los tres equipos independientemente de sus integrantes fueron muy similares porque da la impresión que no comprendieron muy bien el problema, sólo el equipo 1 logró comprenderlo. Todos los equipos dijeron que Susana tuvo 16 tatarabuelos pero ninguno justificó correctamente su respuesta con las operaciones que realizaron, por lo tanto no pudieron concretizar el modelo algebraico.

4.4.3 PROBLEMA 3 “TABLERO”

Equipo 1. Alvirde Rangel Adriana
Cornejo Becerra Rubén
Juárez Solares Ulises
Nava Casas María Isabel

Al parecer fácilmente comprendieron el problema porque de entrada propusieron la sucesión $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8$, para obtener el valor de 2^8 realizaron las siguientes operaciones:

(2) (2) (2) (2) (2) (2) (2) (2)

(4) (4) (4) (4)

(16) (16)

256

Resulta interesante darse cuenta que los alumnos tenían mucho interés de saber con exactitud cuanto es 2^{64} porque realizaron un procedimiento a “pie” para llegar al siguiente resultado:

256 256 256 256 256 256 256 256

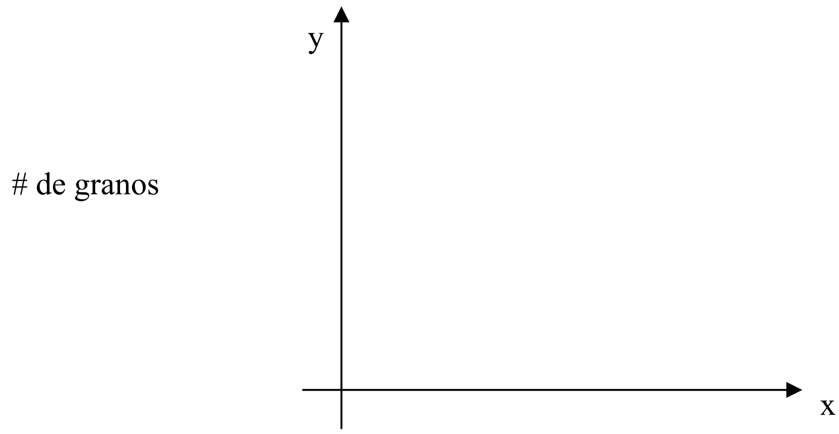
65536 65536 65536 65536

4294967296 4294967296

18,446744,069665,189580

El procedimiento que siguieron los estudiantes para llegar a 2^{64} realmente acorta el camino, aunque la última multiplicación requirió del entusiasmo de todo el equipo para concluirla. Los alumnos acordaron que 2^n es la expresión correcta con n=número de casilla y elaboraron una tabla y una gráfica que a continuación se presentan:

x	y
N=# de casilla	**# de granos**
2^0	1
2^1	2
2^2	4
…2^{64}	18,446744,069665,189580
2^n	N



El procedimiento que utilizaron tuvo un pequeño error porque consideraron 1 grano de trigo en la casilla 0, 2 granos de trigo en la casilla 1,… por eso llegaron a la expresión 2^n en lugar de 2^{n-1}. Hay otras imprecisiones en su representación gráfica como el poner consecutivamente sobre el eje "y" 2,4,16,32, y 256 sin considerar una unidad. Acordaron que los puntos no se unen, ya que no se pueden contar medios granos, entonces da la impresión que el equipo conoce el concepto de función discreta, a pesar de las dificultades a las que se enfrentaron el trabajo que realizaron es satisfactorio.

Equipo 2. García Palacios Alberto
Rangel Escobar Tomas
Sánchez González Alicia
Tinoco Contreras Cristian

Los estudiantes obtuvieron la representación algebraica $f(n)=2^n/2$, analizando la resolución de los siguientes valores:

1-1 ---------- 2^0
2-2 ---------- 2^1
3-4 ---------- 2^2
4-8 ---------- 2^3
5-16 -------- 2^4
6-32 -------- 2^5
7-64 -------- 2^6
8-128 ------ 2^7

N	$f(n)=2^n/2$
1	1
2	2
3	4
4	8
5	16
6	32
7	64
8	128

Se puede concluir que comprendieron el problema, porque con un procedimiento directamente obtuvieron la representación algebraica, consideran como variable al número de granos y no hacen ninguna referencia respecto al número de cuadros, también este equipo incluye un plano cartesiano donde consecutivamente anota los números 1,2,4,8,16,y 32 sobre el eje "x" sin reflexionar sobre una unidad.

EQUIPO 3. Bonilla Hernández Manuel
Leyte Muñoz Erika
Monroy Salcedo Javier

Los alumnos se pusieron de acuerdo sobre las variables a considerar en cada columna de la tabla y anotaron las casillas y granos, su representación tabular es igual a la del equipo 2. Observaron que "hay que duplicar el número de granos por cada casilla avanzada" hasta llegar al cuadro 64 donde se obtiene $9.223372037(10^{18})$=9,223372,034000,00000. Hicieron intentos por generalizar y llegaron al acuerdo que n=(x)2. Es obvio que tienen claridad en que hay que duplicar el número de granos de trigo de una casilla para saber cuantos hay en la casilla siguiente, pero no les fue posible hacer la abstracción para el caso de la casilla "x".

4.4.4 PROBLEMA 4. "BACTERIAS"

Equipo 1. Cornejo Becerra Rubén
Juárez Solares Ulises
Leyte Muñoz Erika

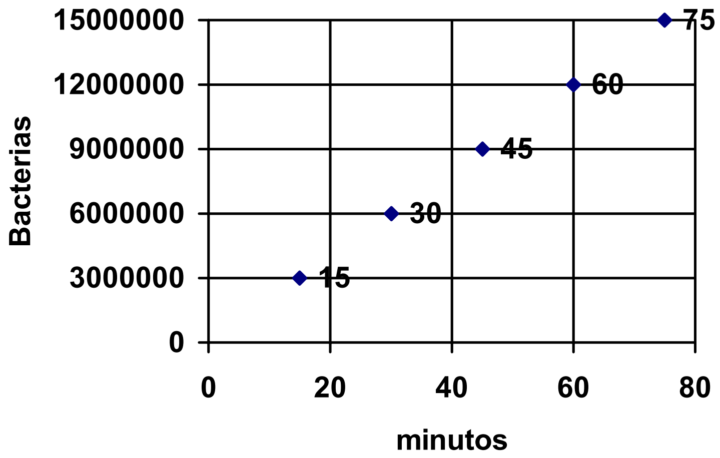
Basándose en la información que en 0 minutos hay 1 millón de bacterias, entonces se obtiene la tabla siguiente:

t	Bacterias
0 min	1 millón
15 min	3 millones
30 min	9 millones
45 min	27 millones
n min	$n=B^3$

Aparte de la tabla proponen una expresión en la que tienen claridad que para obtener el número de bacterias en cierto período en necesario triplicar el número de bacterias en el período anterior, pero no supieron como abstraer o generalizar la acumulación de las cantidades triples, por último presentan una gráfica con puntos aislados. Es obvio que al igual que a sus compañeros se les dificulta generalizar.

Equipo 2. De Anda Belli Arely
García Palacios Alberto
Rangel Escobar Tomas
Tinoco Contreras Cristian

Al igual que el otro equipo elaboraron una tabla hasta 60 minutos triplicando el número de bacterias en los 15 minutos anteriores, pero pasando a la representación gráfica los puntos localizados no coinciden con los de la tabla, ya que la gráfica fue la siguiente:



Y escriben y(15)=3x, pero no explícitan nada. Analizando su gráfica y relacionándola con su expresión, podemos lucubrar que 3(x) indica el triple, pero no precisamente de los valores sobre el eje "x", sino el triple de 1,2,3,4 y 5 millones para obtener las imágenes correspondientes. Mientras que y(15) seguramente lo relacionan con los 15 minutos transcurridos de una reproducción de bacterias a otra.

Equipo 3. Bonilla Hernández Manuel
Monroy Salcedo Javier
Nava Casas María Isabel

Este equipo en su reporte tiene muy poco desarrollo, entonces hay que remitirse a la bitácora de la tercera sesión donde se describe detalladamente por el profesor (observador) el trabajo realizado por los estudiantes.

4.5 RESULTADOS DE LA APLICACION DEL POSTEST

Después de poner en práctica la propuesta didáctica se aplicó el postest con la finalidad de conocer el impacto que tuvo en los estudiantes.

De los doce alumnos que asistieron a la práctica educativa sólo 11 se presentaron a la aplicación del postest.

CARACTERISTICAS GENERALES DE LA MUESTRA DONDE SE APLICO LA PROPUESTA DIDACTICA Y EL POSTEST

Total de alumnos =11

CARACTERISTICA	FRECUENCIA	PORCENTAJE
Hombre	7	63.63
Mujer	4	36.36
No trabaja	11	100
Soltero	10	90.9
Casado	1	9.09
Edad promedio	16.81 años	

Después de la aplicación del postest se realizó un análisis análogo al del pretest. Obteniéndose un cuadro donde se concentran los resultados cuantitativos del número de alumnos que contestaron la pregunta correctamente, incorrectamente, regular y que no contestaron (dejaron en blanco el espacio). También se obtuvo otro cuadro con base en el análisis cualitativo de cada respuesta de los alumnos por reactivo, en el que se destaca lo que tuvo mayor relevancia. Y por último se hacen algunas observaciones sobre las participaciones de tres alumnos.

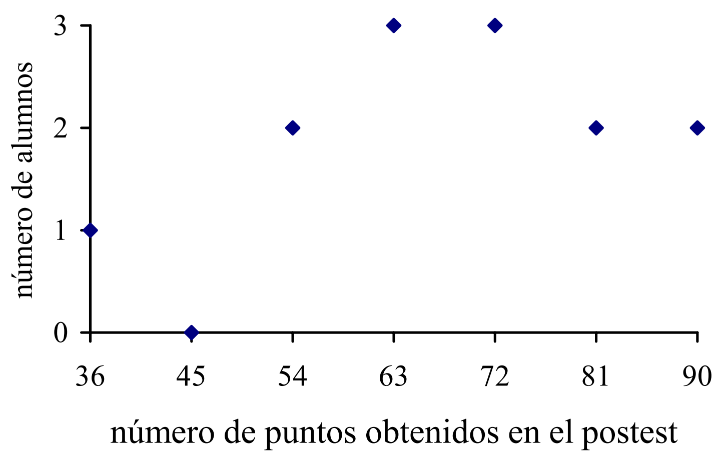
A continuación se presenta un cuadro donde se comparan los puntajes que obtuvieron los alumnos en el pretest y postest con la finalidad de facilitar la comparación entre ambos resultados.

4.5.1 CUADRO COMPARATIVO CORRESPONDIENTE A LAS APLICACIÓNES DEL PRETEST Y POSTEST

NÚM.	**NOMBRE**	**PUNTOS PRETEST**	**PUNTOS POSTEST**	**DIFERENCIA DE PUNTOS**
1	Alvirde Rangel Adriana	47	No-presentó	
2	Bonilla Hernández Manuel	40	70	30
3	Cornejo Becerra Rubén	42	90	48
4	De Anda Belli Arely	31	55	24
5	García Palacios Alberto	40	67	27
6	Juárez Solares Ulises	54	79	25
7	Leyte Muñoz Erika	30	63	33
8	Monroy Salcedo Javier	48	84	36
9	Nava Casas M. Isabel	25	66	41
10	Rangel Escobar Tomas	31	36	5
11	Sánchez González Alicia	38	76	38
12	Tinoco Contreras Cristian	56	81	25
	PROMEDIO GENERAL	40	69.72	30.36

De los 11 alumnos que se presentaron al postest alcanzaron puntajes que van desde 36 hasta 90 puntos de un total de 100.

A continuación se muestran los resultados a través de una representación gráfica.



4.5.2 EVALUACION CUANTITATIVA DEL POSTEST

NUMERO REACTIVO	**CONTENTO Correctamente**	**CONTESTO Incorrectamente**	**CONTESTO Regular**	**NO Contesto**
1	7	3		1
2 a)	10	1		
2 b)	10	1		
3 a)	8	3		
3 b)	8	3		
3 c)	8	3		
3 d)	8	3		
4 A	11			
4 B	11			
4 C	7	4		
4 D	10	1		
4 E	10	1		
4 F	11			
5 a)	7	4		
5 b)	8	3		
5 c)	8	3		
5 d)	9	1		1
6 a)	8	2		1
6 b)	10	1		
6 c)	11			
6 d)	9	2		
6 e)	7	2		2
6 f)	11			
7 a)	9	1		1
7 b)	4		1	2
8 a)	10	1		
8 b)	2	8		1
8 c)	11			
8 d)	8	3		
9 a)	11			
9 b)	11			
9 c)	3	8		
9 d)	8	3		
9 e)	11			
9 f)	4	7		
9 g)	2	9		
9 h)	4	7		

4.5.3 EVALUACION CUALITATIVA DEL POSTEST

NUMERO DE REACTIVO	NUMERO DE ALUMNOS	OBSERVACIONES
1	1	Existe la creencia que una función debe pasar por el origen.
2 a)	1	Creencia que "independiente" es el conjunto de valores para los cuales está definida una función.
2 b)	1	Creencia que "dependiente" es el conjunto de valores que efectivamente toma "y" en una función.
3	2	Identifican bien la variable dependiente, pero tiene la creencia que toda la expresión del otro miembro de la igualdad corresponde a la variable independiente.
	2	Todavía no han comprendido los conceptos de variable dependiente e independiente.
	1	Tiene la creencia que el miembro izquierdo de cualquier ecuación es la variable dependiente, mientras que el miembro derecho es la variable independiente.
4 c	1	Invierte las coordenadas, el avance sobre la vertical lo pone como primera coordenada y el avance horizontal como segunda coordenada.
	2	Consideró los avances horizontales y verticales en valor absoluto, ya que no tuvo cuidado del sentido (hacia abajo) para asignar el signo correspondiente
4 e)	1	Inversión arbitraria de las coordenadas rectangulares de un punto.
5 a)	1	No realizó las operaciones en el orden adecuado, primero suma y después multiplica, 5-3(25)=2(25).
	1	Al sumar un número positivo con un negativo hace la resta de ambos, pero no da importancia al signo que le corresponde al resultado, 5-75=70.
	1	Aun no discrimina la operación a realizar, confunde una resta con una multiplicación, $5-3(5)^2=-15+25$.
5b)	2	Sustituyeron incorrectamente el valor numérico.
5 c)	1	Cuando aparece una multiplicación con un paréntesis la convierte en una suma.
	1	No realizó las operaciones en el orden adecuado, primero restó y luego multiplicó, 343-2(49)=341(49).
6 a)	1	Confunde el exponente negativo con la notación científica y recorre el punto decimal dos cifras a la izquierda, $8^{-2}=0.08$
6 b)	1	$(3/5)^0=3/5$ se deja igual porque su exponente es cero.
6 d)	1	Confunde el exponente con un factor porque multiplica la base por el exponente, $6^3=18$.
	1	Tal vez confundió el exponente, lo consideró con signo negativo y realizó el cociente de la unidad entre el número, $6^3=1/6^3=1/216$.
6 e)	1	Al parecer no le dio importancia al signo negativo del exponente porque dejó igual la base, $(4/3)^{-1}=4/3$.

7 a)	6	Da la impresión de que entendió ¿para qué subradicales es posible obtener la raíz cuadrada en los números reales?, porque su respuesta es “para todos los números positivos, para que no sean imaginarios”, otros sólo contestaron que “números mayores de cero” porque la raíz no se puede resolver con números negativos.
	3	No han comprendido los conceptos mayor o menor, ya que consideran que con los números menores que 3 se obtiene un subradical positivo y por lo tanto se evitan los números negativos en la raíz.
7 b)	1	No comprende el concepto de división y considera que x/0 tiene un valor específico como resultado, no ha asimilado que x/0 no está definido.
	1	Considera que sólo es posible sustituir en x valores naturales, al parecer no ha captado que en el denominador también puede haber números racionales.
8 a)	1	Invierte arbitrariamente las coordenadas de un punto cuando éstas son negativas.
	1	Localiza –0.2 en lugar de la abscisa –0.8, al parecer empieza a contar desde –1 a la derecha en lugar de partir del origen a la izquierda, y análogamente con –0.8 como ordenada.
8 b)	5	Confundieron el punto (-2.2,1) con (-2,2.1).
	1	Invirtió consistentemente en los tres puntos las coordenadas, localizó la abscisa como desplazamiento vertical y la ordenada como avance horizontal.
	1	El punto –1.6 como abscisa no lo empieza a localizar desde el origen, sino que primero localiza el punto –1 (hacia la izquierda) y posteriormente avanza 0.6 hacia la derecha, obteniéndose como punto de llegada –0.4.
8 c)	2	Cambiaron de signo a la ordenada negativa en lugar de desplazarse hacia abajo sobre la vertical localizaron los puntos hacia arriba, sólo cambiaron los signos de la ordenada en algunos puntos, ya que otros puntos están bien localizados.
	1	En los 4 puntos invirtió las coordenadas.
9 c)	7	Confunden el concepto de disminuir con el menor valor.
	1	Consideró un intervalo de tiempo en el que disminuyeron los participantes, pero incluyó un año en el que permaneció constante.
9 f)	2	Tal vez confundieron la expresión “mayor incremento” con “a partir de cuando hubo mayor incremento”.
	5	Confundieron el concepto “mayor incremento” con “valor máximo”.
9 g)	8	Sólo mencionaron que el dominio de la función corresponde al número de años sobre el eje “x”, pero no explicitaron el intervalo.
9 h)	1	Confundió el dominio con el valor máximo de participantes.
	4	Afirman que la imagen de la función corresponde al número de participantes ubicado en el eje “y”, pero no explicitaron los valores.
	1	Confundió la imagen de la función con el valor mínimo de las imágenes.

	1	Sólo dijo que la imagen es el eje “y”. Pero no explícito los valores.

OBSERVACIONES PARTICULARES

De los 34 alumnos que presentaron el pretest la puntuación más baja (25) corresponde a Nava Casas María Isabel y es la única que reportó en el postest ser casada, en éste obtuvo 66 puntos, por lo tanto la diferencia en ambas evaluaciones fue de 41 puntos. En términos globales fue de las últimas puntuaciones en el postest, sin embargo, coincide con los de mayor diferencia de puntos, lo que podría ser interpretado como “que en ella repercutió positivamente la propuesta didáctica”.

El estudiante García Palacios Alberto obtuvo nivel intermedio en las aplicaciones del pretest y postest, obteniendo 40 y 67 puntos respectivamente, la diferencia en ambos puntajes es significativa. Con sus respuestas superó a muchos de sus compañeros en la evaluación diagnóstica. En las sesiones se destacó como un alumno muy participativo, siempre que tenía una idea de cómo resolver el problema la manifestaba. En algunas ocasiones en la puesta en común de los demás equipos Alberto lograba anticipar los resultados correctos.

El alumno Rangel Escobar Tomas obtuvo una de las puntuaciones más bajas en el pretest (31) y en el postest fue la más baja (36), por lo tanto la diferencia corresponde a 5 puntos. En las sesiones de trabajo su actitud fue pasiva, por lo regular escuchó las propuestas de sus compañeros y permaneció callado. Los demás integrantes de su equipo lo invitaban a participar pero él se mantuvo en silencio. Es necesario canalizar a este alumno al servicio de orientación escolar para ver si tiene algún bloqueo emocional. Al comparar sus dos exámenes el único cambio que manifestó Tomas fue identificar la variable dependiente en una ecuación. Tal vez haya aprendido más cosas que a través del postest no fue posible identificar.

Con los resultados obtenidos se puede concluir en general que los estudiantes que se involucran en la clase aportando sus ideas y proponiendo procedimientos para resolver los problemas son los que logran aprender, mientras que aquellos que no participan activamente en el equipo obtienen resultados menos satisfactorios.

LOGROS SIGNIFICATIVOS

En los resultados del postest se observó que los alumnos demostraron un manejo adecuado de los conceptos dominio e imagen de una función, lograron identificar cuándo una variable depende de otra. También mejoraron en la evaluación numérica de una función, aunque algunos siguen realizando las operaciones en el orden en que aparecen y/u otros no saben sumar números enteros. Además, hicieron un manejo adecuado de las potencias con exponente cero y entero negativo.

Hubo avances en la determinación del dominio de una función, pero aun hay dificultades para identificar los valores para los cuales está definida, principalmente se confunden con los conceptos de mayor, menor, mayor o igual que y menor o igual que. Aumentó el porcentaje de estudiantes que tienen mayor dominio en la localización de pares ordenados con coordenadas no enteras, pero las fracciones decimales negativas siguen siendo un problema para ellos.

Los alumnos comprenden muy bien el doble, triple, etc., y lo asocian con las expresiones 2x, 3x, etc., respectivamente, pero la multiplicación reiterativa del doble no la relacionan con el exponente. En la representación gráfica de las funciones exponenciales ya no tienen dificultad, además, lograron identificar las características fundamentales de la misma. Con respecto a los objetivos generales de la propuesta didáctica se observó que los estudiantes tienen dificultad para generalizar y determinar la representación algebraica.

5. CONCLUSIONES

En general los resultados fueron satisfactorios, a pesar de que la mayoría de las concepciones que los estudiantes manifestaron con respecto a las palabras “función” y “exponencial” al parecer no tienen nada que ver con su contexto matemático.

Las concepciones con mayor peso semántico fueron “operación” y “exponente” las cuales se delimitaron con los siguientes conocimientos previos identificados en el pretest:

Los alumnos no recuerdan el concepto de dominio y contradominio de una función, no manejan los conceptos de variables dependiente e independiente, en general un alto porcentaje de estudiantes logran identificar las coordenadas de un punto en el plano cartesiano.

La mayoría sabe sustituir el valor numérico en una función, pero las operaciones las realizan en el orden de aparición y no dominan las operaciones con números enteros.

En las potencias multiplican la base por el exponente, por lo tanto no conocen el concepto de exponente positivo y menos de exponente negativo o cero.

Casi todos tienen dificultad al localizar pares ordenados cuyas coordenadas son fracciones decimales, con frecuencia: invierten las coordenadas de los puntos, cambian los signos de las coordenadas, localizan incorrectamente las coordenadas negativas.

La mayoría “lee” correctamente los datos en la gráfica, pero tienen problemas para interpretarlos.

Sin duda el modelo de enseñanza establecido en la propuesta didáctica tiene sus bondades, ya que se dio un cambio favorable en los conocimientos de los alumnos, el cual fue originado por el enriquecimiento que tuvieron éstos al reflexionar los problemas en lenguaje natural, pues éste es el medio “natural” de que dispone el hombre para comunicarse con los demás.

Los integrantes de cada equipo tuvieron la oportunidad de analizar el planteamiento de los problemas representados en lenguaje común con el fin de comprenderlos. Después mostraron la información en representación tabular con la idea de que todos los compañeros la entendieran y a partir de ésta se construyó una imagen visual (representación gráfica) con el propósito de tener más elementos para su interpretación y por último se establecieron los símbolos (representación algebraica) que permiten identificar la función exponencial.

Para alcanzar mejores resultados es necesario disponer de más horas de clase para el tema, ya que el tiempo fue limitado para llevar a cabo la propuesta didáctica tal y como se planeo.

Además, sería indispensable seguir el mismo modelo de enseñanza en el programa de asignatura de matemáticas II para las funciones: lineal, cuadrática y polinomiales de grado mayor que dos. De tal manera que los estudiantes se familiaricen y tengan la necesidad de construir su conocimiento en el tema de “funciones”.

Ahora queda un trabajo pendiente, con base en la experiencia adquirida hasta este momento existe la necesidad de modificar y/o adecuar la planeación de las tres sesiones de la propuesta didáctica para aplicaciones posteriores.

BIBLIOGRAFIA

Alvárez Gómez María del Carmen, *Estrategias para el aprendizaje eficiente*. Didáctica 2: Antologías [s.f, s.l.].

Alvarez Gómez María del Carmen, *Intervención Pedagógica*, Concepción y características. Antología, [s.f.].

Arriola Miranda Angelina, Martínez Pérez Angélica y Suárez Téllez Liliana, *Taller de producción y evaluación II: Conocimiento matemático*. Antología, [s.f.]. 61-75 pp.

Azcárate Giménez y Deulofeu Piquet, *Funciones y Gráficas*, España: Ed. Sintesis, Cap. 2. 1990. 173 pp.

Baldor Aurelio. *Algebra*, España: Ed. Edime organización gráfica, Cap. XX, XXI, XXII, [s.f.], 576 pp.

Barnett, *Algebra*, México: Ed. Mc. Graw Hill, Cap. 12, 1984. 494 pp.

Benedicto, César y Negro, Adolfo. *Matemáticas 2º BUP*, España: Ed. Alhambra, Cap.5, 211pp.

Beristáin Campos, *Relaciones y Funciones*, México: Ed. Mc. Graw Hill, Cap. 6. 1978. 64 pp.

Bosch, Carlos y Gómez, Claudia, *Algebra*, México: Ed. Santillana, Unid. 13. 1998. 341 pp.

Brousseau, Guy, *Proceso de Matematización*, Universidad de Bourdeaux, Francia, [s.f. s.l.], 1-10 pp.

Brousseau, Guy. *Utilidad e interés de la didáctica para un profesor de colegio*. I.R.E.M. de Bordeaux. [s.f.].

Calter Paul, *Fundamentos de Matemáticas I*, México: Ed. Mc. Graw Hill, Cap. 7, 1983. 251 pp.

Calter Paul, *Fundamentos de Matemáticas II*. Colombia: Ed. Mc. Graw Hill, Cap. 7, 1980. 261 pp.

Castañeda, López, Arriola, Martínez, *Enseñanza Estratégica: Tecnología instruccional para el desarrollo cognitivo y el modelamiento de la pericia*. Facultad de Psicología U.N.A.M. [s.f.].

Colegio de Bachilleres, Secretaria Académica, *Programa de la asignatura Matemáticas II*, México, D.F. 1993.

Douady, Régine. *La Didáctica de las Matemáticas en la Hora Actual*, Tomado de Cahier de didactique des matehematiques No. 6. IREM, Universite Paris VII. [s.f.].

Dykstra, Dewey I. *Ensayo Sobre un Punto de Vista Constructivista de la Educación*. Boise State University. 1989, 12 pp.

Godino, Juan D. y Batanero, M.Carmen. *Significado institucional y personal de los objetos matemáticos*, [s.f. s.l.] 31 pp.

Gordon, Water y Henry, *Algebra Universitaria*, México: Ed. Cecsa, Cap. 16, 1986. 423 pp.

Laborde, Vergnaud, *Aprendizajes y Didácticas: ¿Qué hay de nuevo?*. Buenos Aires: 1994, 61-104 pp.

Lehmann, Charles. *Algebra*, México: Ed. Noriega Limusa, Cap. 16 y 17, 1990. 445 pp.

Lovaglia, *Algebra*, México: Ed. Harla, Cap. 13, 1980. 383 pp.

Martínez, Angélica y Arriola, Angelina. *Planeación de la Enseñanza. Enseñanza Estratégica: Innovación tecnológica en la construcción del conocimiento*. Antología, [s.l. s.f.].

Martínez, Angélica y Arriola, Angelina. *Evaluación de la enseñanza, Modelos de evaluación*, Antología, [s.f.].

Negro Fernández Adolfo y Pérez Cacho Santiago, *Matemáticas BUP 1º*, España: Ed. Alhambra, Cap. Leer y Pensar, 1985. 350 pp.
Negro Fernández Adolfo y Pérez Cacho Santiago, *Matemáticas, BUP 2º*, España: Ed. Alhambra, Cap. 2. 1985. 269 pp.
Ortiz Campos, *Matemáticas-2, Algebra y funciones*, México: Ed. Publicaciones Cultural, Cap. 4, 1996. 275 pp.
Pulido Chiunti Antonio, *Matemáticas I*, México: Ed. Nueva Imagen, Unid. IV. 1994, 253 pp.
Pulido Chiunti Antonio, *Matemáticas II*, México: Ed. Nueva Imagen, Unid. III, 1998. 260 pp.
Ramírez Rogríguez, López Bracho, *Matemáticas 9*, México: Ed. Cecsa, Unid. I, 1978. 155 pp.
Reyes Lagunes Isabel, *Redes semánticas para la construcción de instrumentos*. Revista de Psicología Social y Personalidad, Vol. IX, No. 1. 1993, 81-97 pp.
Rodríguez Moreno, *Aprendizaje y cambio conceptual*, Buenos Aires: [s.f.].
Salcido Ríos Tenochtitlán, Benavides Zavala Alejandro y Santillán Nieto Marcela. *Matemáticas II*, Sistema de educación a distancia de la Universidad Pedagógica Nacional, Volumen 2, México 1988.
Seymour, Lipschutz, *Teoría de conjuntos y temas afines*. Colombia: Ed. Mc. Graw Hill, Cap. 4, 1973. 233 pp.
Swokowski, *Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica*, México: Ed. Iberoamérica, Cap. 5. 1990. 639 pp.
Vergnaud, Gérard. *Representaciones Matemáticas: Malas relaciones significados/ significantes. ¿Podemos mejorarlas?*. [s.f.].
Willerding y Hoffman, *álgebra*, México: Ed. Limusa, Cap. 5, 1976. 431 pp.

COLEGIO DE BACHILLERES

PLANTEL No.13 “XOCHIMILCO-TEPEPAN”

EVALUACION DIAGNOSTICA

“PLANTEAMIENTO DE PROBLEMAS QUE CONDUZCAN A UNA FUNCION EXPONENCIAL Y SU REPRESENTACION GRAFICA”

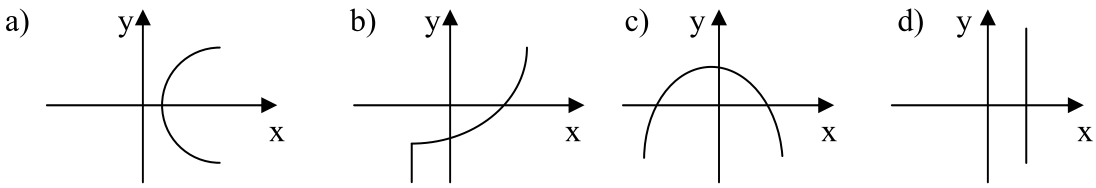
MATEMATICAS II

NOMBRE:____________________________ Grupo:_______

INSTRUCCIONES GENERALES: Leer cuidadosamente las instrucciones específicas que aparecen en cada bloque de reactivos. Resolver las preguntas tomando en cuenta dichas indicaciones. Si tienes alguna duda coméntala con tu profesor.

INSTRUCCIONES: Escribir dentro del paréntesis la letra que corresponda a la opción correcta.

1. (   ) ¿Cuál de las siguientes gráficas representa una función?



¿Por qué? ____

INSTRUCCIONES: Escribir la(s) palabra(s) que complete(n) adecuadamente las siguientes proposiciones:

2. a) Al conjunto de valores de x para los cuales está definida una función se le llama ________________________.

b) Al conjunto de valores que efectivamente toma y en una función se le llama _______________________.

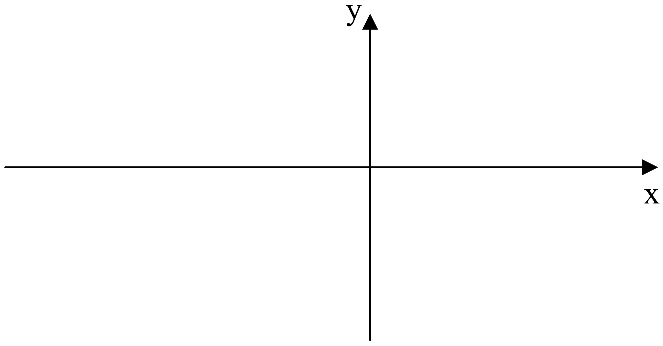
INSTRUCCIONES: Escribir en la raya la respuesta que consideres adecuada.

3. En las siguientes ecuaciones ¿ Cuál es la variable dependiente y cuál la independiente?

Ecuaciones	V. Independiente	V. Dependiente
$y = 8x - 2$	_____________	_____________
$x = z^3 - 4z$	_____________	_____________
$y = 6x - 3y$	_____________	_____________
$w^2 + 3w = x$	_____________	_____________

4. ¿Cuáles son las coordenadas rectangulares de los puntos en el plano cartesiano?

A ___________
B ___________
C ___________
D ___________
E ___________
F ___________



INSTRUCCIONES: Evaluar las siguientes funciones para los valores indicados.

5. Calcular f(5) sí $f(c) = c–3c^2+4$

Calcular f(-3) sí $f(p) = p-8p$

Calcular f(7) sí $f(x) = x^3-2x^2+x-5$

Calcular f(a) sí $f(x) = x^2+x-2$

INSTRUCCIONES: En los siguientes reactivos realizar el procedimiento que te lleve al resultado correcto.

6. Usar las leyes de los exponentes que correspondan para obtener el resultado de las operaciones:

a) $8^{-2} =$ ¿Por qué___________________________________

____

b) $(3/5)^0 =$ ¿Por qué? ___________________________________

____

c) $(1/2)^3 =$ ¿Por qué? ___________________________________

____

d) $6^3 =$ ¿Por qué? ___________________________________

____

e) $(4/3)^{-1} =$ ¿Por qué? ___________________________________

____

f) $(3/5)^1 =$ ¿Por qué? ___________________________________

____

7. En las siguientes funciones ¿Qué valores de x están permitidos en el dominio?

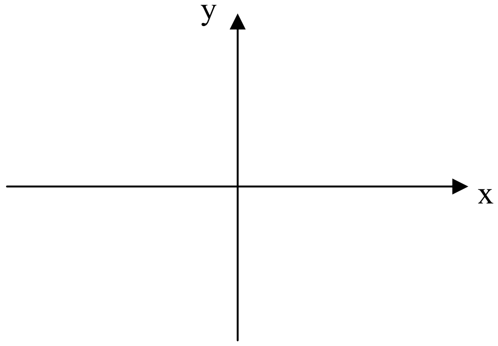
a) f(x) = x-3 ___________________ ¿Por qué? ___________________________

____

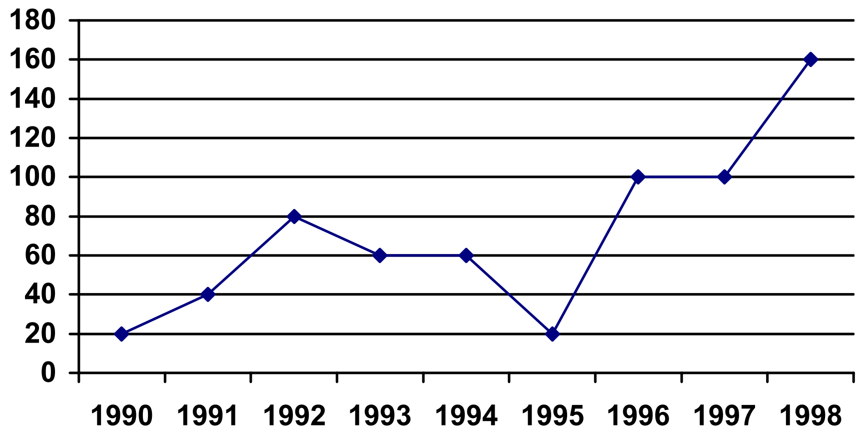
b) f(x) = 4/(2+x) _______________________ ¿Por qué? _____________________

____

8. Para cada inciso localizar los siguientes puntos en el plano cartesiano y unirlos.
   a) (-2,-1), (-0.8,-0.8), (-1.3,-2.3) y (-2.5,-2.5).
   b) (-1.6,2.8), (-2.2,1) y (-1,1).
   c) (2,-0.5), (3,-1.5), (1.5,-3) y (0.5,-2).
   d) (0.7,2.1), (2.3,2.1), (2.3,0.5) y (0.7,0.5).



9. INSTRUCCIONES: Contestar cada una de las siguientes preguntas con base en la representación gráfica:



a) ¿En qué año se inició el concurso? ________________________________

b) ¿Cuántos alumnos participaron en el primer concurso? ____________________

c) ¿En qué año(s) disminuyó el número de participantes? ____________________

d) ¿En qué año(s) permaneció estable el número de participantes y cuántos alumnos participaron? ____

e) ¿Cuántos alumnos participaron en el último concurso? ____________________

f) ¿En qué año hubo mayor incremento de participantes? ____________________

g) ¿Cuál es el dominio de la función? ________________________________

h) ¿Cuál es la imagen de la función? ________________________________

ANEXO 3

RED SEMANTICA DE LA PALABRA "FUNCION"

	Ponderación	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**	
DEFINIDORA	**ORDEN**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**Peso Semántico**
Teatral		1-5				1-1	6
Desarrollo		1-5	2-8		1-2	1-1	16
Proceso		2-10		1-3	1-2		15
Operación		2-10	1-4		2-4	1-1	19
Agrupación					1-2	1-1	3
Realización		1-5		1-3	2-4		12
Orden			2-8				8
Acción		1-5		2-6		1-1	12
Término				1-3		1-1	4
Exposición		1-5					5
Acontecimiento			1-4				4
Exhibición					1-2		2
Planteamiento		1-5					5
Organización			1-4	2-6			10
Conjunto				1-3	1-2		5
Desempeño(ar)		1-5	1-4	3-9	1-2	2-2	22
Activo(a)		1-5				1-1	6
Signos			1-4		1-2		6
Letras				2-6			6
Números				2-6	1-2		8
Razonamiento						1-1	1
Organizar		1-5					5
Planeación			1-4				4
Actividad			1-4	2-6	1-2		12
Actuar						1-1	1
Importante		1-5	1-4				9
Característica			1-4	1-3			7
Palabra					1-2		2
Sistema				1-3			3
Facultad					1-2		2
Obra					1-2	2-2	4
Plano		1-5	1-4				9
Cartesiano			1-4				4
Problema				1-3			3
Andando					1-2		2
Caminando						2-2	2
Trabajo		6-30	1-4	2-6	2-4	3-3	47
Servir			1-4	1-3			7
Cuaderno				1-3			3
Tinta					1-2		2
Costo						1-1	1
Escritorio			1-4				4
Computadora				1-3			3
Pluma					1-2		2
Hoja						1-1	1
Multiplicación		1-5					5
Paréntesis			1-4			2-2	6
Matemática		1-5	2-8	2-6			19
Representación					1-2		2
Funciona						1-1	1

Posición		1-5					5
Principal			1-4				4
Agrupar					1-2		2
Ecuación		3-15	1-4				19
Obligación		3-15	2-8				23
Ocupación		1-5	2-4	1-3			16
Quehacer				1-3	1-2		5
Distracción						1-1	1
Espectáculo			1-4				4
Evento				1-3			3
Acto			1-4		1-2		6
Objeto					1-2		2
Indispensable						1-1	1
Capacidad			1-4				4
Nociones						1-1	1
Mandato					1-2		2
Realizar				1-3		1-1	4
Objetivo		1-5		1-3			8
Realización					1-2		2
Trabajando		1-5					5
Servible			1-4				4
Estable				1-3			3
Manejable					1-2		2
Nombre						1-1	1
Funcionamiento					1-2	1-1	3
Uso					1-2	1-1	3
Deber		1-5					5
Hacer					1-2		2
Específica				1-3			3
Unión					1-2		2
Separación						1-1	1
Lineal		1-5	1-4		1-2		11
Despejes				1-3			3
Describir				1-3		1-1	4
Sirve		1-5				1-1	6
Cine			1-4				4
Taquilla					1-2		2
Numeración						1-1	1
Comprobar			1-4				4
Racional						1-1	1
Cargo		1-5					5
Labor				1-3			3
Ejercicio					1-2		2
Ayuda			1-4				4
Grupos						1-1	1
Hábil			1-4				4
Especial					1-2		2
Buena						1-1	1
Util(ización)		1-5	1-4				9
Método						1-1	1
Parábola				1-3			3
Incógnita					1-2		2
Manejo			1-4				4
Equitativa		1-5					5
Estructural			1-4				4
Poética				1-3			3
Fática					1-2		2

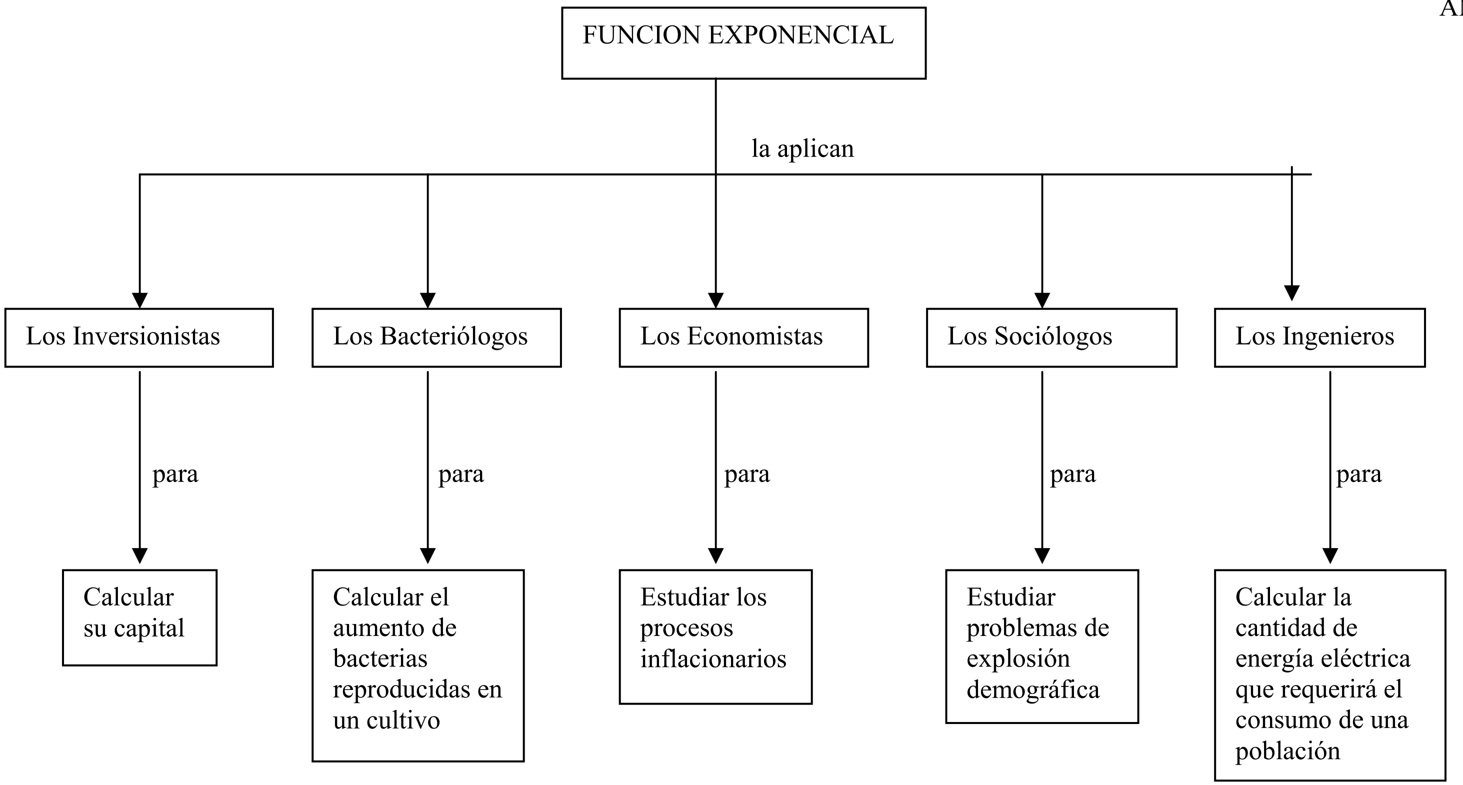
ANEXO 4

RED SEMANTICA DE LA PALABRA "EXPONENCIAL"

	Ponderación	5	4	3	2	1	
	Orden	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	
DENINIDORA							**Peso semántico**
Brillante		1-5					5
Sorprendente			1-4				4
Único				1-3			3
Superior					1-2		2
Muchos						1-1	1
Importante		3-15					15
Básicamente			1-4				4
Dispensable				1-3			3
Matemáticas		1-5	1-4		1-2	1-1	12
Exponente(s)		9-45	3-12	1-3	1-2	1-1	63
Método		1-5		1-3			8
Sistema			1-4				4
Operaciones		1-5	2-8	3-9	2-4	2-2	28
Ejercicio				1-3		1-1	4
Expresión		2-10	1-4			1-1	15
Exposición		2-10	2-8			1-1	19
Orden				3-9			9
Explicación					1-2		2
Material(es)						2-2	2
Multiplicación		1-5			3-6		11
Número		3-15	11-44	1-3	1-2	4-4	68
Problema				1-3			3
Expone(r)				2-6	4-8	1-1	15
Función		3-15	2-8	1-3	2-4		30
Sumar					1-2		2
Restar						1-1	1
Exponible		1-5					5
Accesible						1-1	1
Empresa		1-5					5
Proyecto			1-4				4
Prototipo				1-3			3
Esquema					1-2		2
Representar		1-5		1-3			8
Presentar			1-4		1-2		6
Aplicar				1-3			3
Múltiplo					1-2		2
Potencia(s)		3-15	2-8	1-3	1-2		28
Potencial			3-12				12
Aclaramiento				1-3			3
Descripciones					1-2		2
Especificar						1-1	1
Multiplicativo		1-5					5
Base			1-4			1-1	5
Ecuación				2-6		1-1	7
Resolver						1-1	1
Signo		1-5		1-3			8
Proceso				1-3			3

Regla					1-2		2
Desarrollo				1-3	2-4	1-1	8
Valor		1-5		1-3	1-2		10
Elemento					1-2		2
Lugar						1-1	1
Procedimiento			1-4				4
Exacto					1-2		2
Solución						2-2	2
Dígito			1-4				4
Elevación				1-3			3
Cifra(s)				2-6			6
Complicado					1-2		2
Difícil						1-1	1
Leyes		1-5					5
Grado				1-3			3
Numeración					2-4		4
Ejemplo						1-1	1
Indica		1-5		1-3			8
Cantidad				1-3	2-4		7
Pequeño						1-1	1
Indicación			1-4				4
Potenciación				1-3			3
Elevar(do)			1-4	1-3	2-4	1-1	12
Inteligencia			1-4				4
Habilidad				1-3			3
Rapidez					1-2		2
Peligroso						1-1	1
Distribución					1-2		2
Divisivo			1-4				4
Dividido				1-3			3
Expositor		1-5			1-2		8
Extracto						1-1	1
Simbología						1-1	1
Cosa						2-2	2
Resultado						1-1	1
Equivalencia				1-3			3
Cuadrado				1-3			3
Variable				1-3			3
Coordenadas					1-2		2
Fácil						1-1	1
Diferencia		1-5					5
Muestra						1-1	1
Cualidad					1-2		2
Objeto						1-1	1
Escrito						1-1	1
Ejerce			1-4				4
Letra						1-1	1

ANEXO 5



Elaborado con base en la información de Ramírez y López, Matemáticas 9 (1978).

DESARROLLO DEL CONTENIDO CORRESPONDIENTE AL TEMA "FUNCION EXPONENCIAL"

Las funciones más sencillas son las algebraicas y por lo tanto se estudian primero en éstas se utilizan los polinomios, los cocientes de polinomios y las raíces cuadradas, las operaciones incluidas en una función algebraica son básicas como: adición, sustracción, multiplicación, división, potencias y raíces. El estudio de las funciones algebraicas no es suficiente, resulta necesario conocer y aprender otro tipo de funciones que son de gran importancia en la matemática pura y aplicada, corresponde su turno a las funciones no algebraicas, es decir, a las funciones trascendentes. Al considerar la función $f(x)=3^x$, nótese que la variable x aparece en el exponente, entonces no es una función algebraica, por lo tanto es una función trascendente, como la variable aparece en el exponente se le da el nombre de función exponencial.

La función $f(x)=3^x$ está definida para valores de x en el conjunto de los números reales al número 3 se le llama base, entonces la función se llama función exponencial de base 3. El dominio es el conjunto de valores posibles para x, es decir, el conjunto de valores que pueden ser sustituidos en el exponente y la imagen de la función es el conjunto de los números reales positivos, ya que independientemente de que x tome valores negativos, positivos o cero las imágenes son números reales positivos.

Definición. La función exponencial es una función (trascendente) donde si a es un número real positivo y distinto de cero, entonces x también es un número real y su regla de correspondencia es $f(x)=a^x$. En matemáticas el lenguaje simbólico es fundamental. La función exponencial se define como: $f:R\rightarrow R^+$ (función real de variable real), tal que, $f(x)=a^x$ con a, $x \in R$, $a>0$, $a\neq 1$, [$a\in (0,1)$ o $a\in (1,\infty)$], donde a es la base y x el exponente. También la ecuación $y=a^x$ determina la función exponencial.

Ejemplos de funciones exponenciales:

$f(x)=2^x$, $f(x)=18^x$, $f(x)=(1/2)^x$,
$f(x)=(7/5)^x$, $f(x)=3^{-x}$, $f(x)=(4/3)^{-x}$,
$f(x)=3^{2x+1}$, $f(x)=e^x$, $f(x)=P(1+r/n)^{nt.}$

Si se considera $f(x)=3^x$ entonces:

$f(-3)=3^{-3}$, $f(-2/3)=3^{-2/3}$, $f(0)=3^0$, $f(-1)=3^{-1}$,
$f(6)=3^6$, $f(5/6)=3^{5/6}$ y $f(-1/3)=3^{-1/3}$.

Al aparecer la variable x en el exponente, se necesita estar muy familiarizado con las leyes de los exponentes, por ello a continuación se hará un repaso de las mismas.

$3^4=3(3)(3)(3)=81$
3 se llama base
4 se llama exponente
3^4 se llama potencia y
81 es el resultado de la potencia

En este caso como el exponente es un número natural indica cuantos factores iguales a la base deben considerarse para obtener la potencia, es decir, representa el número de veces que la base se multiplica por sí misma.

EXPONENTES NATURALES.

Sí $a \in R$, $a \neq 0$ y $m \in N$, entonces:
$a^m = a.a.a \ldots a$
m factores a

EXPRESION	BASE	EXPONENTE	DESARROLLO
a^1	a	1	a
$4x^3$	x	3	4(x x x)
$(-3)^5$	-3	5	(-3)(-3)(-3)(-3)(-3)
$(z/3)^4$	z/3	4	(z/3)(z/3)(z/3)(z/3)

LEYES DE LOS EXPONENTES

- Sí $a \in R$, $a \neq 0$ y $n,m \in N$ entonces $a^n a^m = a^{n+m}$
  $a^n a^m = \underbrace{aaa \ldots a}_{\text{n factores } a} \; \underbrace{aaa \ldots a}_{\text{m factores } a} = a^{n+m}$
- Sí $a \in R$, $a \neq 0$, $n,m \in N$ entonces $(a^n)^m = a^{nm}$
  $(a^n)^m = \underbrace{a^n a^n a^n \ldots a^n}_{\text{m factores } a^n}$, pero $a^n = \underbrace{aaa \ldots a}_{\text{n factores } a}$
  entonces
  $(a^n)^m = \underbrace{aaa \ldots a}_{\text{mn factores } a} = a^{mn} = a^{nm}$
- Sí $a,b \in R$, $a,b \neq 0$ y $n \in N$ entonces $(ab)^n = a^n b^n$
  $(ab)^n = \underbrace{(ab)(ab)(ab) \ldots (ab)}_{\text{n factores } ab} = \underbrace{aaa \ldots a}_{\text{n factores } a} \; \underbrace{bbb \ldots b}_{\text{n factores } b} = a^n b^n$
- Definición de Inverso multiplicativo de a^n,
  Sí $\mathbf{a} \in R$, $\mathbf{a} \neq 0$ y $n \in N$, entonces $1/\mathbf{a}^n = \mathbf{a}^{-n}$
- Sí $\boldsymbol{a} \in R$, $a \neq 0$ y $m,n \in N$, entonces

$$a^m/a^n = \begin{cases} 1 & \text{cuando } m=n \\ a^{m-n} & \text{cuando } m>n \\ 1/a^{n-m} & \text{cuando } n>m \end{cases}$$

Primer caso. Cuando m=n.
Entonces, $a^m = a^n$, entonces $a^m / a^n = a^n / a^n = 1$.

Segundo caso. Cuando m>n.
Si m>n, entonces el entero m-n es positivo y se puede escribir m=n+(m-n),
entonces, $a^m / a^n = a^{n+(m-n)} / a^n = a^n \; a^{m-n} / a^n = (a^n / a^n)(a^{m-n}) = 1 \, (a^{m-n}) = a^{m-n}$.

Tercer caso. Cuando n>m.
Si n>m, entonces el entero n-m es positivo y se puede escribir n=m+(n-m),
entonces, $a^m / a^n = a^m / a^{m+(n-m)} = a^m / a^m \, a^{n-m} = (a^m / a^m)(1/a^{n-m}) = 1 \, (1/a^{n-m}) = 1/a^{n-m}$.

A continuación se presentan algunas definiciones importantes cuyo dominio permite un manejo ágil de los exponentes.

- Definición. Para todo $a \in R$, $a \neq 0$, $a^0 = 1$.
- Definición sí $a \in R^+$, $b \in R$ entonces $\sqrt{\ } a = b$ sí $b^2 = a$.
- Definición sí $a, b \in R$, $\sqrt{\ } a = b$ sí $b^3 = a$.
- Definición sí $a, b \in R^+$ y $n \in Z^+$, entonces

  $\sqrt{\ } a = b$ sí $b^n = a$.

EXPONENTES RACIONALES

Para tener mayor claridad en la siguiente definición consideremos $\sqrt{\ }$ radical; n el índice del radical o de la raíz y al radicando o cantidad subradical, $\sqrt{\ } a$.

* Definición $\sqrt{\ } a = a^{1/n}$ si $\sqrt{\ } a$ y $a^{1/n}$ están definidos.

Por lo tanto, sí $a \in R^+$ y $n,m \in Z$ con $m>0$ sin factores comunes (primos entre sí) entonces $a^{n/m} = \sqrt{\ } a^n$

EXPONENTES IRRACIONALES

Definición. Sea $a \in R^+$ $b \in I = Q$ entonces:

$a^b = \text{lím}\ (a^b, a^b, a^b, \ldots, a^b, \ldots)$ donde b es un número irracional y $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ es una sucesión de números racionales cuyo límite es b.

Ejemplo. Consideremos $\sqrt{\ } 2$ un número irracional entonces $\sqrt{\ } 2 = 1.41421356\ldots$ y el límite de la sucesión $2^1, 2^{1.4}, 2^{1..41}, 2^{1.414}, 2^{1.4142}, \ldots$ es $\sqrt{2}$, donde

$2^1 = 2$

$2^{1.4} = 2^{14/10} = \sqrt{\ } 2^{14}$

$2^{1.41} = 2^{141/100} = \sqrt{\ } 2^{141}$

$2^{1.414} = 2^{1414/1000} = \sqrt{\ } 2^{1414}$

$2^{1.4142} = 2^{14142/10000} = \sqrt{\ } 2^{14142}$.

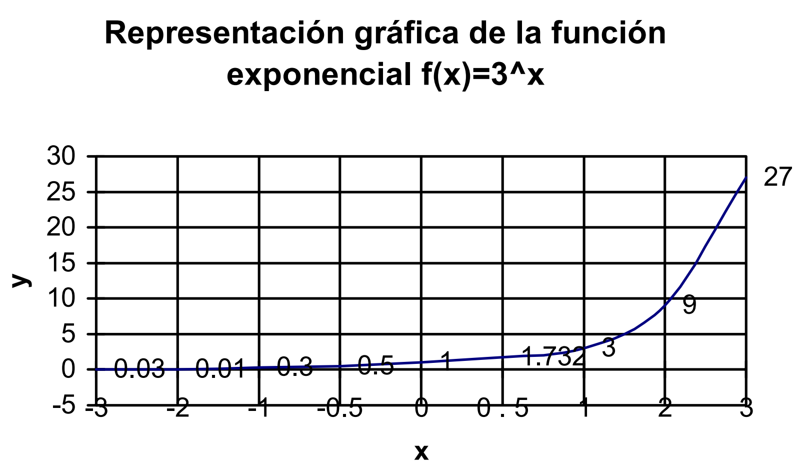
En “Cálculo” hay una función exponencial muy importante y especial, llamada simplemente “función exponencial” cuya base es e y su regla de correspondencia es $f(x)=e^x$. “El número e fue descubierto por el gran matemático y físico Leonhard Euler (1707-1783). La letra **e** se usa en honor de este matemático de la misma manera que la letra π se usa en honor de los matemáticos griegos. Ambos números son irracionales y una aproximación a e con nueve cifras decimales es: $e \approx 2.718281828$” (Bosch, Gómez, 1998, pág.310).

REPRESENTACIONES DE LAS FUNCIONES EXPONENCIALES
POR MEDIO DE TABLAS Y GRAFICAS

Sea $a \in N$, si $f(x)=3^x$ (con $a>1$), función exponencial de base 3, entonces su representación a través de una tabla es:

x	**$f(x)=3^x$**	**(x,f(x))**
-3	$f(-3)=3^{-3}=1/3^3=1/27$	(-3,1/27)
-2	$f(-2)=3^{-2}=1/3^2=1/9$	(-2,1/9)
-1	$f(-1)=3^{-1}=1/3$	(-1,1/3)
- ½	$f(-½)=3^{-1/2}=1/3^{1/2}=1/\sqrt{3}=1/1.732$	(-1/2,1/1.732)
0	$f(0)=3^0=1$	(0,1)
½	$f(1/2)=3^{1/2}=\sqrt{3}=1.732$	(1/2,1.732)
1	$f(1)=3^1=3$	(1,3)
2	$f(2)=3^2=9$	(2,9)
3	$f(3)=3^3=27$	(3,27)

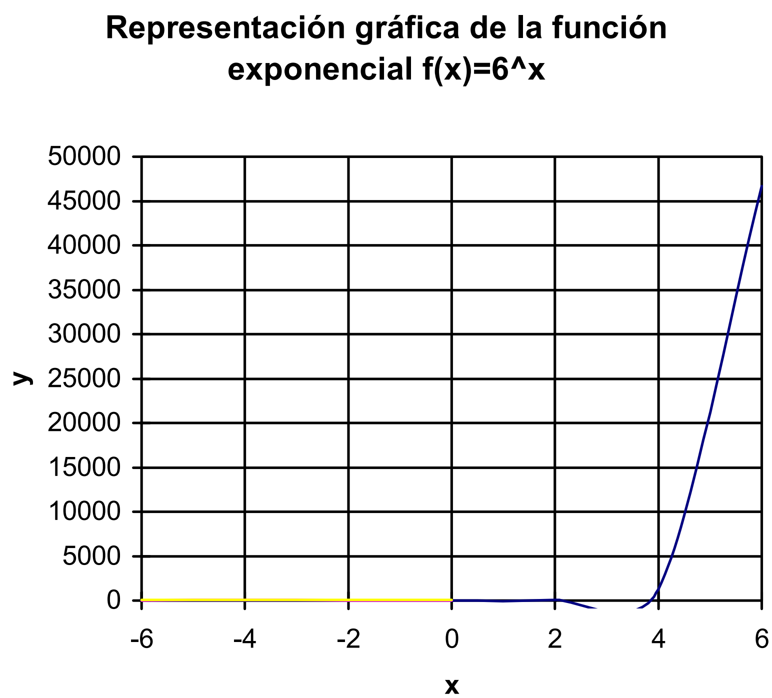
En la tabla se observa que a medida que el valor de x va aumentando entonces el valor de $f(x)=3^x$ también va aumentando, esto implica que la imagen de la función siempre es un número real positivo.



Dominio=[-3,3]
Imagen=[1/27,27]

Consideremos la función exponencial de base 6, es decir, $f(x)=6^x$ (con $a>1$). A continuación se incluye su representación a través de una tabla:

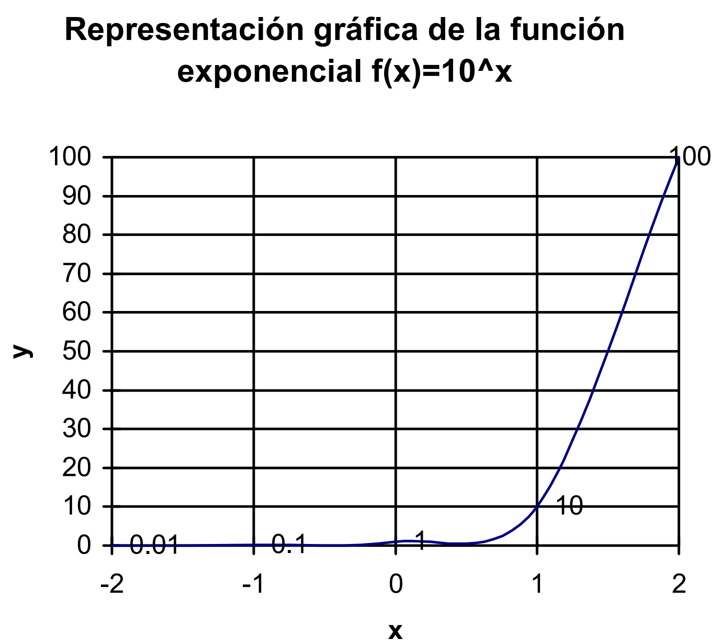
x	f(x)=6^x	(x,y)
-6	f(-6)=6^{-6}=1/46656=0.00002	(-6,0.00002)
-4	f(-4)=6^{-4}= ^{1}/1296=0.0007	(-4,0.0007)
-2	f(-2)=6^{-2}=1/36=0.02	(-2,0.02)
0	f(0)=6^0=1	(0,1)
2	f(2)=6^2=36	(2,36)
4	f(4)=6^4=1296	(4,1296)
6	f(6)=6^6=46656	(6,46656)



- Dominio=[-6,6]
- Imagen=[0.00002,46656]
- La intersección con el eje "y" es el par ordenado (0,1).
- Si "x" decrece indefinidamente, f(x) tiende al valor cero, es decir, $x \to -\infty$, $f(x) \to 0$, y por lo tanto el eje x es una asíntota de la función. Calculemos f(x) para x=-1000, entonces el valor de f(x) es: $f(-1000)=6^{-1000}=1/6^{1000}$ es una cantidad muy pequeña.
- Si "x" crece indefinidamente, entonces f(x) también crece indefinidamente, es decir, si $x \to +\infty$, $f(x) \to +\infty$, por lo tanto la función es creciente.

El sistema de numeración que utilizamos actualmente es de base 10, por lo tanto la función exponencial de base 10 es muy importante en matemáticas, su representación a través de una tabla se presenta a continuación:

x	**$f(x)=10^x$**
-3	$f(-3)=10^{-3}=1/1000=0.001$
-2	$f(-2)=10^{-2}=1/100=0.01$
-1	$f(-1)=10^{-1}=1/10=0.1$
0	$f(0)=10^0=1$
1	$f(1)=10^1=10$
2	$f(2)=10^2=100$
3	$f(3)=10^3=1000$



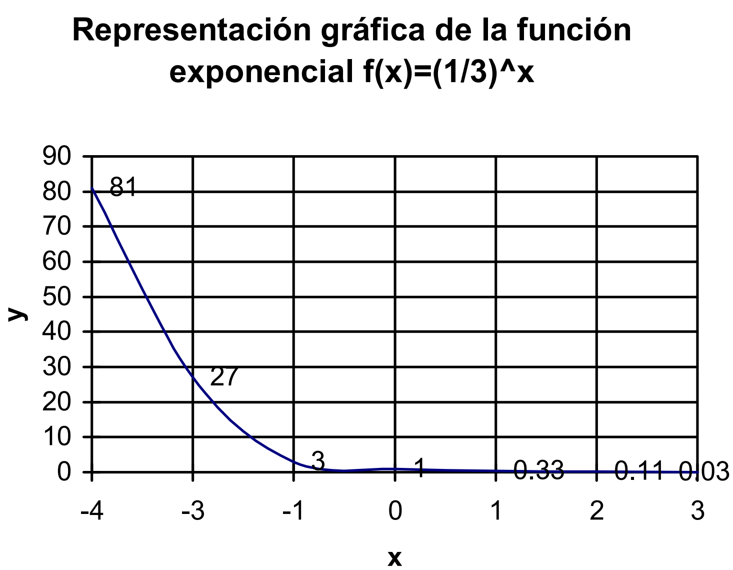
- Dominio=[-3,3]
- Imagen=[0.001,1000]
- Conforme “x” decrece, f(x) tiende a cero.
- Conforme “x” crece, f(x) también crece.
- La gráfica intersecta en y=1.

CONCLUSIONES: Todas las gráficas de las funciones $y=a^x$ con $a>1$, presentan las mismas características que $y=3^x$.

OBSERVACION: Por comodidad al elaborar la tabla se restringe la elección de los valores de “x” únicamente a números enteros y a números racionales, entonces la gráfica que obtenemos si la pudiésemos ver con un aparato muy potente lograríamos observar una infinidad de “agujeros”, cada agujero de la gráfica corresponde a cada uno de los valores irracionales de x, por lo tanto la gráfica de $f(x)=10^x$ nunca sería la curva suave de la figura anterior. Para que la gráfica sea continua hay que considerar todos los valores de "x" reales, sean racionales o irracionales y hacer corresponder a los puntos de la curva $f(x)=10^x$ (ordenada) con su respectivo valor x.

Ahora consideraremos otro tipo de números para la base de la función exponencial, por lo tanto sea $a \in (0,1)$, por ejemplo $a=1/3$, entonces la función tiene base 1/3 y su regla de correspondencia es $f(x)=(1/3)^x$, a continuación tenemos su representación a través de la tabla, considerando el dominio=[-4,3].

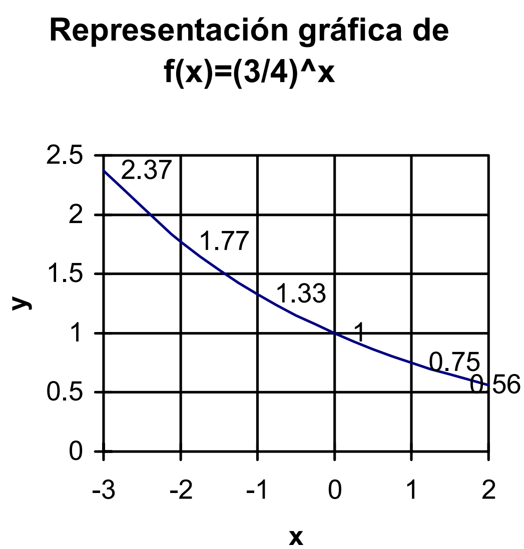
x	**$f(x)=(1/3)^x$**	**(x,y)**
-4	$f(-4)=(1/3)^{-4}=3^4=81$	(-4,81)
-3	$f(-3)=(1/3)^{-3}=3^3=27$	(-3,27)
-1	$f(-1)=(1/3)^{-1}=3^1=3$	(-1,3)
0	$f(0)= (1/3)^0=1$	(0,1)
1	$f(1)=(1/3)^1=0.33$	(1,0.33)
2	$f(2)=(1/3)^2=1/9=0.11$	(2,0.11)
3	$f(3)=(1/3)^3=1/27=0.03$	(3,0.03)



- Imagen = [0.03,81]
- Conforme x decrece, f(x) crece y conforme x crece, f(x) tiende a cero. Por lo tanto la gráfica es decreciente.

Consideremos ¾ $\in(0,1)$ entonces la regla de correspondencia de la función exponencial es $f(x)=(3/4)^x$ y su representación tabular para los valores de x en el dominio = [-3,2] es:

x	f(x)=(3/4)^x	(x, y)
-3	$f(-3)=(3/4)^{-3}=(4/3)^3=64/27=2.37$	(-3,2.37)
-2	$f(-2)=(3/4)^{-2}=(4/3)^2=16/9=1.77$	(-2,1.77)
-1	$f(-1)=(3/4)^{-1}=4/3=1.33$	(-1,1.33)
0	$f(0)=(3/4)^0=1$	(0,1)
1	$f(1)=(3/4)^1=3/4=0.75$	(1,0.75)
2	$f(2)=(3/4)^2=9/16=0.56$	(2,0.56)



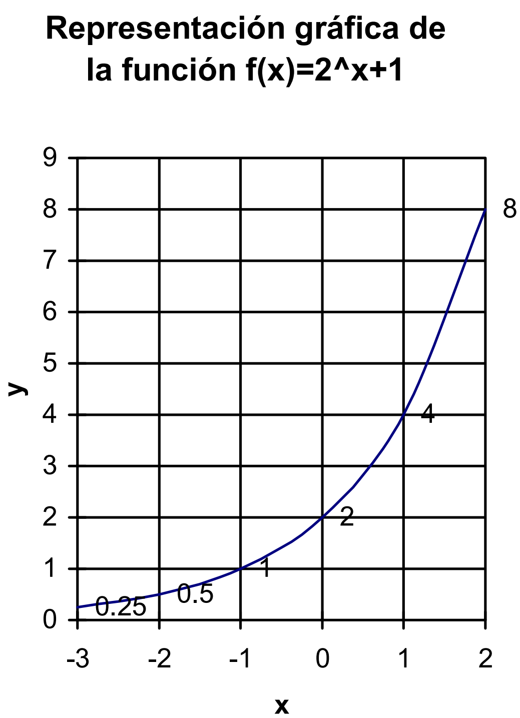
- Imagen = [0.56, 2.37]
- Conforme x decrece f(x) crece, y conforme x crece f(x) tiende a cero. Entonces la gráfica es decreciente.

CONCLUSION: Todas las gráficas de las funciones $y=a^x$ con $a\in(0,1)$ presentan las mismas características que $y=(1/3)^x$.

Con anterioridad se mencionó que la regla de correspondencia de toda función exponencial tiene la característica que la variable independiente "x" aparece en el exponente, pero no necesariamente sola, también puede presentarse a través de una expresión algebraica, como por ejemplo $f(x)=2^{x+1}$, cuyas representaciones tabulares y gráficas son las siguientes para valores de x en el dominio [-3,2].

x	$f(x)=2^{x+1}$	(x,y)
-3	$f(-3)=2^{-3+1}=2^{-2}=1/2^2=1/4=0.25$	(-3,0.25)
-2	$f(-2)=2^{-2+1}=2^{-1}=1/2=0.5$	(-2,0.5)
-1	$f(-1)=2^{-1+1}=2^0=1$	(-1.1)
0	$f(0)=2^{0+1}=2$	(0,2)
1	$f(1)=2^{1+1}=2^2=4$	(1,4)
2	$f(2)=2^{2+1}=2^3=8$	(2,8)

- Imagen=[0.25,8]

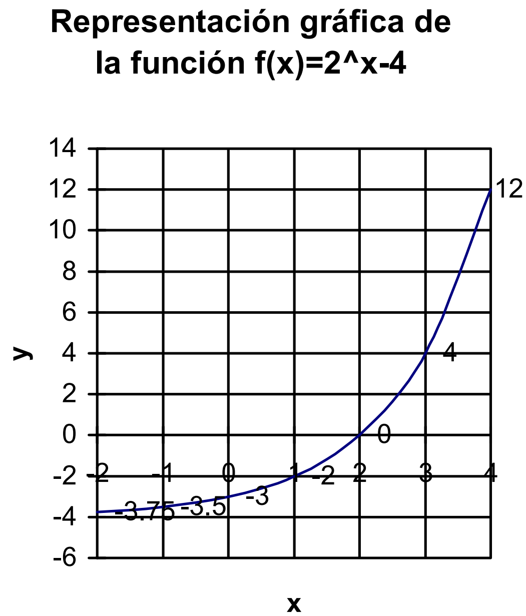


La representación gráfica es creciente porque cuando x decrece f(x) decrece y cuando x crece f(x) también crece.

La regla de correspondencia de la función exponencial no necesariamente es un monomio, también puede ser un binomio como en el ejemplo siguiente:

x	$f(x)=2^x-4$	(x,y)
-2	$f(-2)=2^{-2}-4=1/2^2-4=1/4-4=-15/4=-3.75$	(-2,-3.75)
-1	$f(-1)=2^{-1}-4=1/2-4=-7/2=-3.5$	(-1,-3.5)
0	$f(0)=2^0-4=1-4=-3$	(0,-3)
1	$f(1)=2^1-4=2-4=-2$	(1,-2)
2	$f(2)=2^2-4=4-4=0$	(2,,0)
3	$f(3)=2^3-4=8-4=4$	(3,4)
4	$f(4)=2^4-4=16-4=12$	(4,12)

- Dominio=[-2,4]
- Imagen=[-3.75,12]

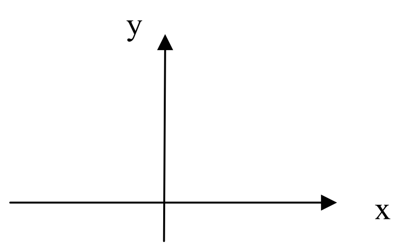


- Cuando “x” crece indefinidamente ($x\rightarrow+\infty$), entonces f(x) también crece indefinidamente ($f(x)\rightarrow+\infty$), ya que si se evalúan valores para “x” de mayor valor, entonces $f(x)=2^x-4$ es una cantidad muy grande.

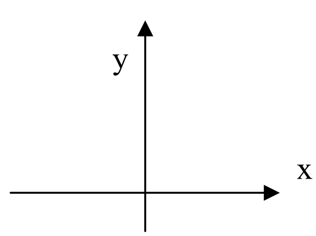
- Cuando “x” decrece indefinidamente, entonces f(x) tiende a adoptar el valor de –4 (sí $x\rightarrow-\infty$, $f(x)\rightarrow-4$).

Ejemplo, si “x” tiene un valor de –1000, entonces el valor de f(x) es: $f(-1000)=2^{-1000}-4=1/2^{1000}-4=0-4=-4$, porque la expresión $1/2^{1000}$ es una cantidad muy cercana al valor de cero; por lo tanto la recta horizontal de ecuación y=-4 es una asíntota de la función.

En conclusión se observa que la gráfica de las funciones exponenciales $y=a^x$, con $a>1$ es de la forma:



Y cuando $0<a<1$ de la forma:



Todas las gráficas de $y=a^x$ tienen en común el punto (0,1), ya que cualquiera que sea $a>0$, se tiene que $a^0=1$.

OBSERVACION: La representación gráfica de una ecuación que define una función y la representación gráfica de la función son idénticas.

PROPIEDADES GENERALES DE LA FUNCION
EXPONENCIAL DE LA FORMA $f(x)=a^x$

- La función existe para todo $a>0$.
- Dominio=R (El dominio de la función son los números reales).
- Contradominio=R.
- Imagen=R^+ (La imagen consiste en todos los números positivos, sí $a\neq 1$).
- El punto (0,1) pertenece a la representación gráfica de cualquier función exponencial, porque $a^0=1$ para toda a (siempre intersecta al eje "y" en el punto (0,1)).
- f(x) es creciente cuando $a>1$, es decir, sí $x_1<x_2$ entonces $a^x < a^x$. La gráfica crece de izquierda a derecha; es decir, a medida que x crece, f(x) también crece.
- f(x) es decreciente sí $0<a<1$, es decir, sí $x_1<x_2$ entonces $a^x > a^x$. La gráfica decrece de izquierda a derecha, es decir, el valor de la función decrece conforme x crece.
- Es continua en todo R (ya que $\lim_{x\to x_0} a^x = a^x$ para todo $x_0\in R$).
- El eje x es una asíntota horizontal para la gráfica, ya que si $a>1$, entonces al ir decreciendo "x" y tomando valores negativos, la gráfica se aproxima al eje x sin llegar a cortarlo, ya que $a^x>0$ para todo x.
- También el eje x es asíntota horizontal de la función cuando $0<a<1$, ya que al ir creciendo "x" y tomando valores positivos, la gráfica se aproxima al eje x sin llegar a tocarlo, ya que $a^x>0$ para todo x.
- Si $a=1$ no resulta interesante, ya que $y=1^x=1$ y la gráfica es una recta horizontal.

DEMOSTRACION: De que $f(x)=a^x$ es creciente cuando $a>1$.
Si $a>1$ debemos de probar que si x_1,x_2 son números reales tales que $x_1\leq x_2$, entonces $a^x \leq a^x$, es decir, $f(x_1)\leq f(x_2)$.
Si $a>1$, también se cumple que $a^x>1^x=1$, para todo valor de $x\geq 0$ (por la ley de monotonía del producto de números reales).
Entonces $a^x / a^x = a^{x-x} \geq 1$, ya que $x_2-x_1\geq 0$ porque $x_2\geq x_1$ por lo tanto $a^x \geq a^x$.

DEMOSTRACION: De que $f(x)=a^x$ es decreciente sí $a<1$.
Si $a<1$ debemos de probar que si x_1,x_2 son números reales tales que $x_1\leq x_2$, entonces $a^x \geq a^x$.
Sí $a<1$ entonces $a^x<1^x=1$, para todo $x\geq 0$.
Entonces $a^x / a^x = a^{x-x} \leq 1$, ya que $x_2-x_1\geq 0$ porque $x_2\geq x_1$, por lo tanto $a^x \leq a^x$.

OBSERVACIONES:

- En la función exponencial se excluye el valor de $a=0$, ya que la función $y=0^x$, no tiene imágenes para valores de x negativos.
  Ejemplo, $f(-2)=0^{-2}=1/0^2$, expresión que no tiene sentido.
- En la función exponencial se excluyen los valores de $a<0$ (negativos), porque la función no

tiene imágenes reales.

Ejemplo, si *a*=-4, entonces $y=(-4)^x$ no tiene imágenes reales para valores de “x” fraccionarios con denominador par. Por ejemplo $f(1/2)=(-4)^{1/2}=\sqrt{-4} \notin R$.

APLICACIONES DE LA FUNCION EXPONENCIAL

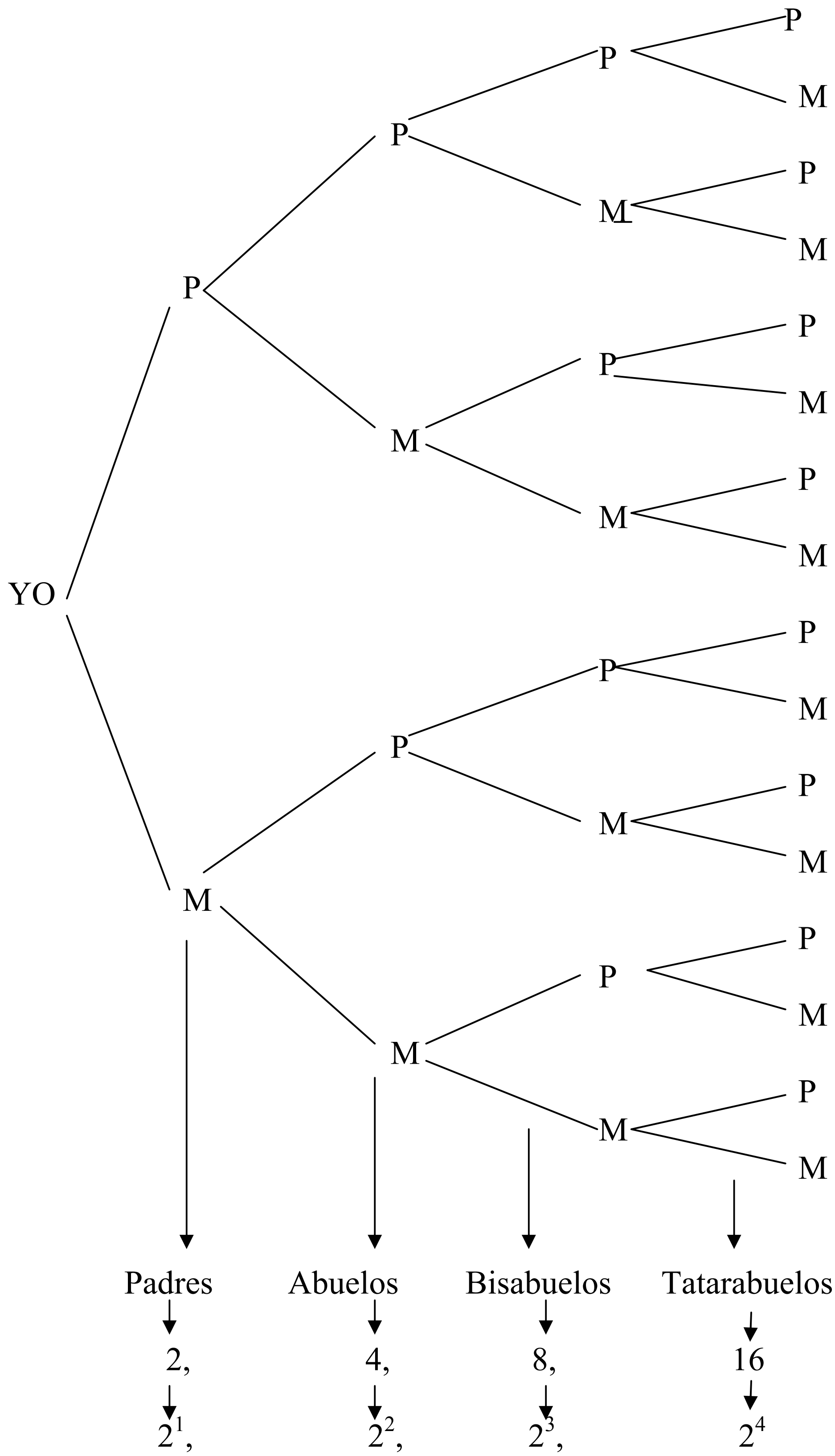
Las funciones exponenciales tienen diversas aplicaciones, éstas funciones son muy importantes, ya que se “utilizan para describir el crecimiento de las poblaciones de humanos, animales y bacterias, la desintegración radiactiva (crecimiento negativo), el crecimiento de una sustancia química en una reacción química; la elevación o descenso de la temperatura de una sustancia, cuando la calentamos o enfriamos; el incremento del dinero invertido a cierto interés compuesto; la absorción de la luz (crecimiento negativo) cuando atraviesa el aire, el agua o el vidrio; el descenso de la presión atmosférica, conforme aumenta la altitud, el incremento del aprendizaje de una habilidad, como nadar o escribir en máquina, en relación con la práctica.” (Barnett,1984, pág. 368).

PROBLEMA.

Si deseamos conocer el número de ascendientes de una persona en determinadas generaciones es necesario aplicar la función exponencial.

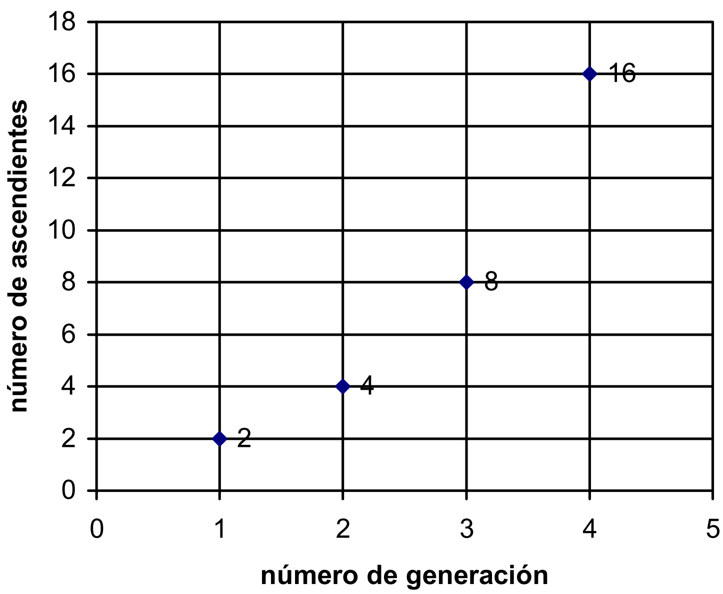
Para activar los conocimientos previos, basta hacernos la siguiente pregunta ¿Cuántos tatarabuelos tuviste? La respuesta es muy simple, pero dependiendo la edad del alumno podría ser incluso una pregunta difícil. Para resolverla hay que recordar cuantas generaciones hay que recorrer hacia atrás, es decir, para que existas “tú” fue necesaria la existencia de tú papá y tú mamá, para que tú papá existiera fue necesaria la existencia de tus abuelos paternos, lo mismo en el caso de tú mamá los dos abuelos maternos por lo tanto tuviste 4 abuelos.

Haciendo un razonamiento análogo se induce que tuviste 4(2)=8 bisabuelos y en consecuencia 8(2)=16 tatarabuelos. A continuación se presentan los datos a través de un esquema fácil de asimilar.


YO
P
M
P
M
P
M
P
M
P
M
P
M
P
M
P
M
P
M
P
M
P
M
P
M
P
M
Padres
Abuelos
Bisabuelos
Tatarabuelos
2,
4,
8,
16
2^1,
2^2,
2^3,
2^4

Los resultados anteriores muestran el comportamiento que tiene el número de ascendientes en cada generación. El papá y la mamá (padres) son la primera generación antes del sujeto, los abuelos son la segunda generación antes del sujeto y el número de abuelos se calcula con la operación $2^2=4$. Mientras que los bisabuelos son la tercera generación antes del sujeto y la cantidad de éstos se calcula con la operación $2^3=8$. En forma análoga se calcula el número de ascendientes en la n-ésima generación anterior al sujeto con 2^n. El dominio está integrado por el número de generaciones anteriores al sujeto, por lo tanto Dominio={1,2,3,4,…,n,…}. La imagen está integrada por el número de ascendientes en cada generación por lo tanto Imagen=$\{2^1,2^2,2^3,2^4,\ldots,2^n,\ldots\}$, se tiene una función $f(n)=2^n$ donde $f:\{1,2,3,4,\ldots,n,\ldots\}\rightarrow\{2^1,2^2,2^3,2^4,\ldots,2^n,\ldots\}$, cuyas representaciones tabulares y gráfica son las siguientes:

Número de generación n	**Número de ascendientes $f(n)=2^n$**	**Pares ordenados (n,f(n))**
1	$f(1)=2^1=2$	(1,2)
2	$f(2)=2^2=4$	(2,4)
3	$f(3)=2^3=8$	(3,8)
4	$F(4)=2^4=16$	(4,16)
…	…	…



La función exponencial también es posible aplicarla en problemas de comunicación social, como en el siguiente:

PROBLEMA.

A las 9 de la mañana, del 24 de enero de 1998, llegó a Celestum, Mérida un vecino del Distrito Federal, llevando una nueva noticia de interés general; comunicó la noticia a cuatro vecinos del pueblo, haciéndolo en media hora. Conocida la noticia, cada uno de estos 4 vecinos la comentó a otros 4, empleando media hora en hacerlo. Cada uno de los nuevos conocedores, la comunicó a otros 4 ciudadanos, y así sucesivamente.

a) ¿Cuántas personas conocían la noticia después de 60 minutos?
b) ¿Cuántas personas conocieron la noticia a las 2 ½ horas después de haber llegado ésta?
c) Si el pueblo tenía 21831 habitantes. ¿En qué tiempo estuvo todo el pueblo enterado?
d) ¿Cuántas personas podrían conocer la noticia en la vigésima media hora?

En la primera media hora conocieron la noticia 4 habitantes.
“ “ segunda “ “ “ “ “ $4(4)=4^2=16$
“ “ tercera “ “ “ “ “ $4(4^2)=4^3=64$
“ “ cuarta “ “ “ “ “ $4(4^3)=4^4=256$
“ “ quinta “ “ “ “ “ $4(4^4)=4^5=1024$
“ “ n-ésima “ “ “ “ “ 4^n

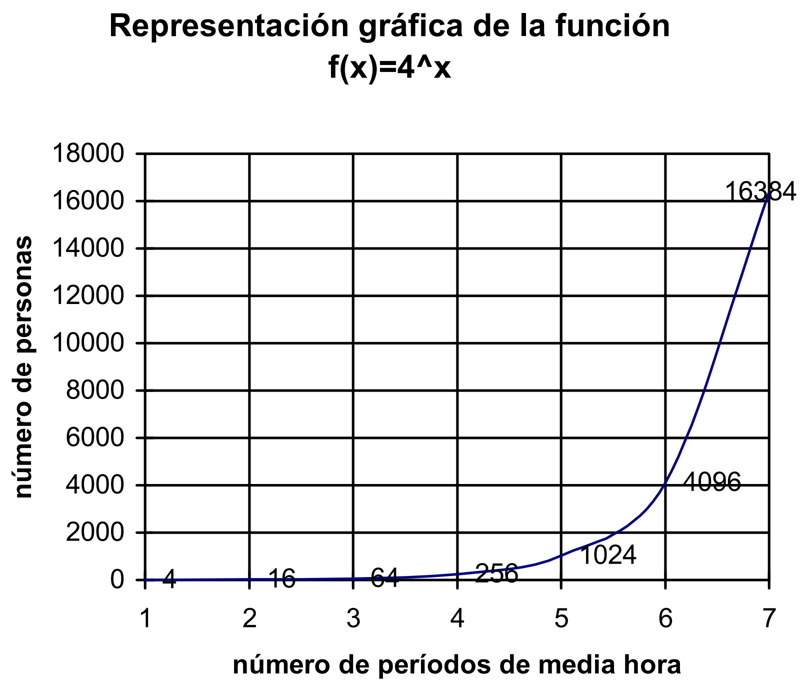
a) Para calcular cuantas personas conocían la noticia después de 60 minutos es necesario considerar hasta la segunda media hora, es decir, 4+16=20 personas.
b) Por lo tanto en la quinta media hora conocieron la noticia 1024 habitantes, que sumados a los demás habitantes que ya conocían la noticia, hicieron un total de: 4+16+64+256+1024=1364. Es decir, después de dos horas y media 1364 habitantes ya estaban enterados.

En la sexta media hora conocieron la noticia $4^5(4)=4^6=4096$
“ “ séptima “ “ “ “ “ $4^6(4)=4^7=16384$.

c) En la séptima media hora, es decir, a las 3 horas y media el número de habitantes de Celestum que ya estaban enterados de la noticia fueron: 4+16+64+256+1024+4096+16384=21844 cantidad que supera el número total de habitantes del pueblo. Por lo tanto en 3 ½ horas todo el pueblo conocía la noticia.

d) El dominio de la función corresponde al número “x” de medias horas transcurridas, entonces Dominio={1,2,3,…} y el contradominio es el número de habitantes que se enteran de la noticia, representado por los números naturales. Si utilizamos el símbolo “f” para la función, entonces $f:\{1,2,3,\ldots\}\rightarrow N$ donde $f(x)=4^x$, es decir, el número de habitantes enterados de la noticia después de haber transcurrido “x” medias horas es 4^x.

Con base en la regla de correspondencia de la función se puede calcular el número de personas que conocerán la noticia en la vigésima media hora con $f(20)=4^{20}$.



La gráfica corresponde a una función exponencial creciente.

PROBLEMA.

La función exponencial también la aplica el bacteriólogo para calcular el aumento de bacterias reproducidas en un cultivo como el problema siguiente:

En un cultivo de cierta bacteria hay una concentración de 1 millón de bacterias por cada mililitro, si la población de las bacterias se triplica cada 15 minutos, suponiendo que se da el caso ideal en que no mueran bacterias, se tienen las siguientes interrogantes:

a) ¿Qué cantidad de bacterias habrá después de 1 ½ horas?
b) ¿Cuántas bacterias habrá en 25 minutos?
c) ¿Cuántas bacterias habrá en 27 minutos?

a) 1000000 de bacterias hay en un mililitro

Después de 15 minutos hay 1000000+1000000+1000000 = 3000000

Después de otros 15 minutos(30 minutos en total) hay 3000000+3000000+3000000=9000000.

Después de otros 15 minutos (45 minutos en total) hay 9000000+9000000+9000000=27000000.

Después de otros 15 minutos (60 minutos en total) hay 27000000+27000000+27000000=81000000.

Después de 75 minutos hay 3(81000000)=243000000.

Después de 90 minutos (1 ½ horas) hay 3(243000000)=729000000.

Por lo tanto el número de bacterias en 1½ horas, es de 64000000.

Observemos que:

$3000000=3(10^6)=3^1(10^6)=3^x(10^6)$ para x=1 periodo de 15 min.

$9000000=9(10^6)=3^2(10^6)=3^x(10^6)$ para x=2 periodos de 15 min.

$27000000=27(10^6)=3^3(10^6)=3^x(10^6)$ para x=3 periodos de 15 min.

$81000000=81(10^6)=3^4(10^6)=3^x(10^6)$ para x=4 periodos de 15 min.
$243000000=243(10^6)=3^5(10^6)=3^x(10^6)$ para x=5 periodos de 15 min.
$729000000=729(10^6)=3^6(10^6)=3^x(10^6)$ para x=6 periodos de 15 min.

En consecuencia el número de bacterias en x periodos de 15 minutos es $3^x(10^6)$. Por lo tanto $f(x)=3^x(10^6)$ donde x es el número de periodos de 15 minutos.

El dominio está integrado por los valores que puede tomar el número de periodos de 15 minutos. Y la imagen por los valores que toma el número de bacterias.

b) ¿Cuántas bacterias habrá en 25 minutos?

Observamos que 25 minutos es igual a un periodo de 15 minutos más dos terceras partes de otro periodo de 15 minutos, es decir, x=1+2/3=5/3 de periodo de 15 minutos.

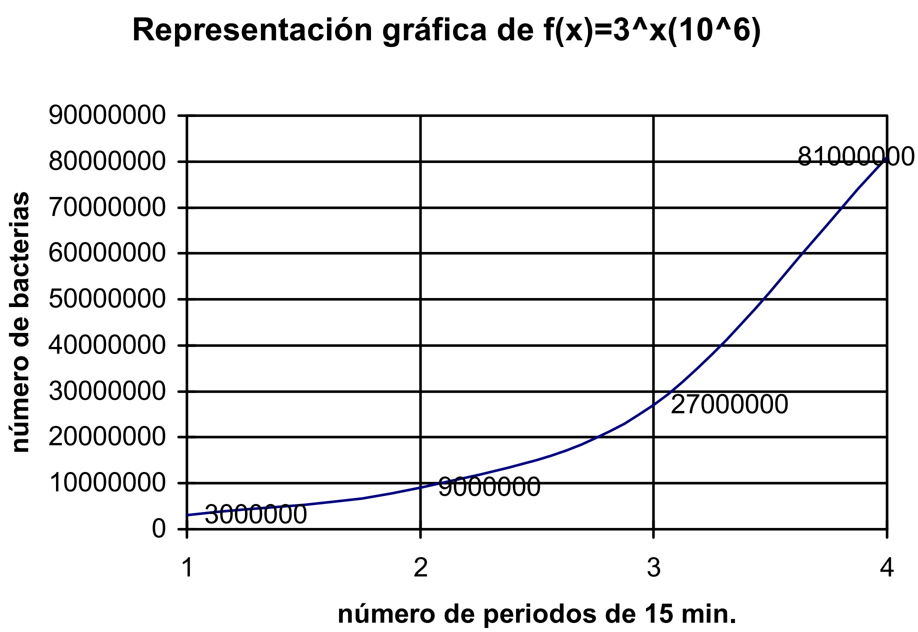
Por lo tanto $f(5/3)=3^{5/3}(10^6)=\sqrt{3^5}\ (10^6)=\sqrt{243}\ (10^6)$.

c) ¿Cuántas bacterias habrá en 27 minutos?

15 minutos es 1 periodo de 15 min.
12 minutos es 4/5 periodo de 15 min.

Entonces 27 minutos equivale 1 4/5 de periodo de 15 min.
Además, 1 4/5=9/5.

Por lo tanto $f(9/5)=3^{9/5}(10^6)$.

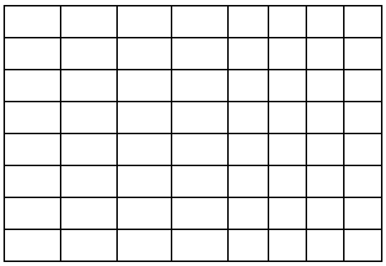


PROBLEMA.

De acuerdo con una vieja leyenda, el rey Hindú Shirhman concedió a su gran ministro Sissa Ben Dahir una dádiva por haberle enseñado el juego del ajedrez, que como es sabido se juega sobre un tablero de 64 cuadros. Sissa le pidió al rey que le diera un grano de trigo para colocarlo en el primer cuadro; dos granos para el segundo, cuatro para el tercero, y así sucesivamente hasta cubrir el tablero; a lo que el rey accedió sorprendido de que pidiera tan poca cosa (Ramírez, López, 1978, pág. 17).

a) ¿Cuál es la cantidad de granos de trigo que pidió el ministro?
b) Si el metro cúbico contiene aproximadamente 15 millones de granos de trigo. Y si el granero tuviera 2m. de ancho y 2m. de alto. ¿Cuál debería ser su longitud?

Tablero



Número de granos de trigo en cada cuadro

1	2	4	8	16	32	64	128
256	512	1024	2048	4096	8192	16384	Etc.
…	…	…	…	…	…	…	…

Tabla para representar los datos

Número de cuadro del tablero	**Número de granos de trigo**	**Número de granos de trigo**
1	1	2^0
2	2	2^1
3	4	2^2
4	8	2^3
5	16	2^4
6	32	2^5
7	64	2^6
8	128	2^7
9	256	2^8
10	512	2^9
11	1024	2^{10}
12	2048	2^{11}
13	4096	2^{12}
14	8192	2^{13}
15	16384	2^{14}
…	…	…

20		2^{19}
33		2^{32}
47		2^{46}
55		2^{54}
63		2^{62}
64		2^{63}
x		2^{x-1}

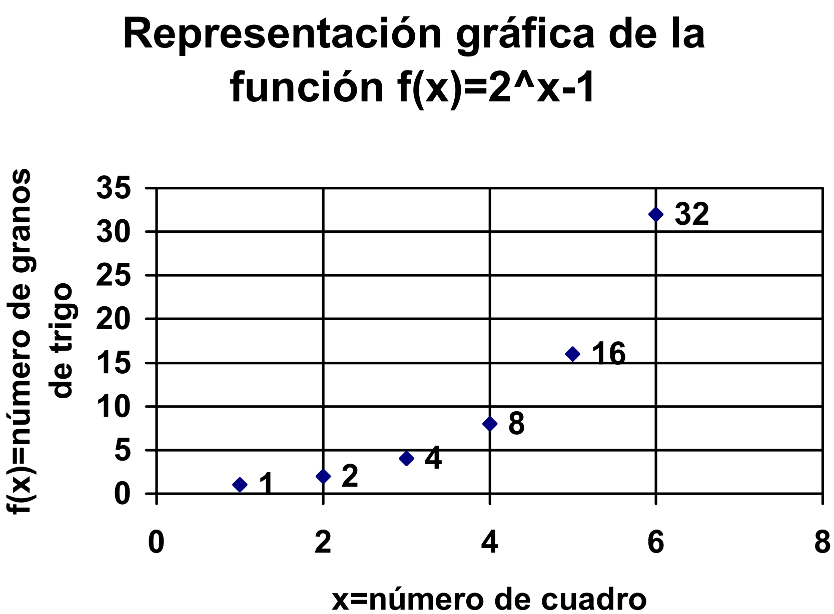
a) La cantidad de granos de trigo que pidió el ministro es igual a la suma total de los granos en cada cuadro.

$1+2+4+8+16+32+\ldots$

$2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5+\ldots+2^{62}+2^{63}$

Se observa que el número de granos de trigo depende del cuadro al que corresponda, por lo tanto se puede establecer una función entre las dos variables donde:

- x corresponde al número de cuadro (variable independiente).
- f(x) corresponde al número de granos de trigo en el cuadro x, por lo tanto $f(x)=2^{x-1}$.



Dominio={ 1,2,3,4,5,…,64}

Contradominio=N

Realizando el cálculo de 2^{63} en una computadora se obtiene que:

2^{63} = 9 223 372 036 854 775 808 número de trigos en el cuadro 64 (último cuadro).

También se puede sumar el número total de granos de trigo en los 64 cuadros y se obtiene:

$2^0+2^1+2^2+2^3+\ldots+2^{63}$ = 18 446 744 073 709 551 615.

b) $2^{63}/15(10^7)= 600000(10^6)\ m^3 = 600\ km^3$

Haciendo más cálculos se llega a que con las dimensiones establecidas del granero, éste debería tener una longitud de 150 millones de km (distancia que hay de la tierra al sol).

Resulta muy interesante consultar el libro de Matemáticas II, volumen 2 del sistema de educación a distancia de la Universidad Pedagógica Nacional, cuyos autores son: Alejandro Benavides Zavala, Tenochtitlán Salcido Ríos y Marcela Santillán Nieto, donde se presentan problemas de aplicación de la función exponencial en contextos diferentes a los presentados aquí. Los problemas no son los típicos que aparecen de libro en libro, sino que resultan muy interesantes y motivadores, en particular para el profesor, ya que, muestran un panorama más amplio de la aplicación de las funciones exponenciales que el profesor está obligado a conocer, además, la profundidad y amplitud de los contenidos está al nivel del profesor. Desgraciadamente en el Colegio de Bachilleres sólo se cuenta con seis horas de clase aproximadamente para cubrir el tema de función exponencial, lo cual es una limitante para que el profesor amplíe y profundice con problemas tan interesantes como los presentados en dicho libro. El profesor está obligado a tener un panorama más amplio, más profundo y más complejo de lo que pretende enseñar, para que este preparado ante cualquier pregunta de los estudiantes y para que pueda recomendar bibliografía a los alumnos interesados en el tema. Por lo tanto el libro antes mencionado se recomienda ampliamente para el profesor.