UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

SECRETARÍA ACADÉMICA
DIRECCIÓN DE INVESTIGACIÓN

ACTIVIDADES DEL "BASTA NUMÉRICO" Y DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMO POTENCIADORAS DE ESTRATEGIAS EMERGENTES QUE DAN SIGNIFICADO AL ALGORITMO DE LA MULTIPLICACIÓN EN EL TERCER GRADO DE LA EDUCACIÓN PRIMARIA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
Maestro en Desarrollo Educativo
en la Línea de Especialización Educación Matemática

PRESENTA:
JOSÉ JUAN GARNICA RAMÍREZ

DIRECTORA DE TESIS

DRA. VERÓNICA HOYOS AGUILAR

ENERO 2003

ÍNDICE

PÁGINAS

INTRODUCCIÓN

CAPÍTULO I
EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1.Planteamiento del Problema 1

1.2.Justificación del Tema de Investigación 2

CAPÍTULO II
ANTECEDENTES DE INVESTIGACIÓN

2.1. Estrategias Matemáticas Emergentes de los Niños en la Escuela 5

2.2. Paso de la Adición a la Multiplicación 6

2.3. El Papel de las Estrategias en el Aprendizaje según Brousseau 7

2.4. Algoritmos que Inventan los Niños para los Problemas de Multiplicación con varios Dígitos 9
2.4.1.Estrategias de modelación directa 10
2.4.2.Estrategias de número completo 12
2.4.3.Estrategias de partición de números 12
2.4.4.Estrategia de compensación 14

2.5. Estrategias de Obtención de las Multiplicaciones Básicas 15

2.6. Niveles de Desarrollo Progresivo en las Estrategias Informales del Niño 17
2.6.1. Recuento Unitario 17
2.6.2. Doble Recuento 17
2.6.3. Recuento Transaccional 18
2.6.4. Estrategia Aditiva 18
2.6.5. Recuperación de Hechos Multiplicativos 18

CAPÍTULO III
MARCO TEORICO

3.1. Antecedentes Históricos 20
3.1.1. Sistema de numeración hindú arábigo 20
3.1.2. El sistema ruso 21
3.1.3. El algoritmo egipcio 22

3.2. Interacción Grupal y Cambio Cognitivo en la Escuela 23
3.2.1. Desarrollo por la Interacción maestro-alumno 23
3.2.2. Construcción de significado 23
3.2.3. El Conocimiento como resultado de la experiencia 24

3.3. El Algoritmo de la Multiplicación: su Enseñanza y Aprendizaje 26
3.3.1.Versiones del aprendizaje según Maza 27
3.3.2.Procedimiento usual para multiplicar 28

3.4. Dificultades Escolares en torno del Aprendizaje de la Multiplicación 28
3.4.1. Riesgos inherentes al uso del algoritmo 30

3.5. El Juego y el Aprendizaje Mediante el Juego 34
3.5.1. El juego en el niño 34
3.5.2. El juego interactivo en el desarrollo infantil 37
3.5.3. El juego como recurso didáctico en la enseñanza de las matemáticas 39
3.5.4. El juego es vital para el desarrollo infantil 40
3.5.5. El ejercicio, el símbolo y la regla 42

3.6. Matemática Realista y Tecnología 44
3.6.1. Matemática tecnología y realidad 44

3.7. Prácticas Basadas en la Experiencia del Docente 47
3.7.1. Experiencia del maestro como alumno 47
3.7.2. Concepciones sobre la enseñanza ligadas a la conducta 49

3.8. La Resolución de Problemas Matemáticos 55
3.8.1. Constructivismo y el papel de los problemas 55
3.8.2. La resolución de problemas 56
3.8.3. La resolución de problemas y sus conexiones con otras áreas del conocimiento 57
3.8.4. El papel del instructor en el salón de clase 59
3.8.5. Trabajo del estudiante con los problemas 60
3.8.6. Sugerencias en el trabajo con resolución de problemas 61
3.8.7. La evaluación en la resolución de problemas 62

CAPÍTULO IV
ESTRATEGIA METODOLÓGICA Y DE INVESTIGACIÓN

4.1.Metodología 69
4.1.1 El trabajo de Jae-Meen 69
4.1.2. Reseña del trabajo de McClain et. al. 69
4.1.3. Metodología utilizada en esta investigación 70

4.2.Actividades Propuestas para Abordar en Clase 74
4.2.1.Colecciones con la misma cantidad de objetos 74
4.2.2.Arreglos rectangulares 75
4.2.3.Combinaciones 76
4.2.4.Dilo con una cuenta 77
4.2.5.La pulga y las trampas 78
4.2.6.Basta numérico 79
4.2.7.Problemas que implican multiplicar 80
4.2.8.Los saltos de la ranita 81

CAPÍTULO V
ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DEL TRABAJO DE CAMPO

5.1.Estrategias que Emergieron al Interior de la Clase 82
5.1.1. Conteo exhaustivo de los elementos 82
5.1.2. Representaciones rectangulares 84
5.1.3. Identificación del producto 85
5.1.4. Trabajo con combinaciones 86
5.1.5. Las argumentaciones 86
5.1.6. Más combinaciones 87

5.1.7. Dilo con una cuenta 87
5.1.8. La pulga y las trampas 88
5.1.9. Aproximación a las multiplicaciones 89
5.1.10. Suma reiterada. 90
5.1.11. El error de la aplicación universal 91
5.1.12. Aplicación del Basta Numérico 91
5.1.13. Productos parciales 93
5.1.14. Suma del multiplicando 93
5.1.15. Multiplicar por 10 94

5.2. Análisis de la Resolución de Problemas 95
5.1.1. Primer problema.
5.2.1.1. Las imágenes como auxiliares 95
5.2.1.2. Materiales concretos 96
5.2.1.3. El razonamiento de Diana 97
5.2.2. Segundo problema.
5.2.2.1. La suma reiterada 97
5.2.2.2. La rapidez como fortaleza del algoritmo 98
5.2.3. Tercer problema.
5.2.3.1. El uso del algoritmo sin apoyo de dibujos 98
5.2.3.2. La imagen 98
5.2.3.3. La conmutatividad 98
5.2.3.4. Suma del multiplicando 99
5.2.3.5. Agregando un cero a la multiplicación por el diez 99
5.2.3.6. Separando unidades y decenas 100
5.2.3.7. La separación en decenas y suma reiterada de unidades 100
5.2.3.8. La resta del multiplicando 100
5.2.3.9. Sustracción reiterada 101
5.2.3.10. La aplicación diferenciada del algoritmo 101
5.2.3.11. Trabajar y disfrutar 101
5.2.4. Cuarto problema.
5.2.4.1. La discusión entre iguales 102
5.2.5. Quinto problema.
5.2.5.1. Trabajo con el diez 103
5.2.5.2. Del conteo exhaustivo a las seriaciones 103
5.2.5.3. Por mayoría ante la falta de argumentos 104
5.2.6. Sexto problema.
5.2.6.1. Problemas de proporcionalidad 104
5.2.6.2. El argumento fundamentado 105

5.2.7. Séptimo problema.
5.2.7.1. De la suma reiterada a la aplicación del algoritmo, con argumentos 105
5.2.8. Octavo problema.
5.2.8.1. Las combinaciones 105
5.2.9. Noveno problema.
5.2.9.1. La asociación entre suma reiterada y el algoritmo 106
5.2.10. Décimo problema.
5.2.10.1. La contextualización 107
5.2.11. Undécimo problema.
5.2.11.1. La afirmación del algoritmo sobre la suma reiterada 107
5.2.12. Duodécimo problema.
5.2.12.1. La discusión de iguales 108
5.2.12.2. La reflexión hacia el valor unitario 108

5.3. Entrevista con la Profesora 109

5.4. Entrevista con los Alumnos 111

CAPÍTULO VI
CONCLUSIONES

6.1. Conclusiones Derivadas del Análisis 113

6.2. Reflexiones Finales 118

6.3. Implicaciones Didácticas 119

BIBLIOGRAFÍA
Referencias Bibliográficas 121

ANEXOS
- Concentrado de Datos de los Niños Observados
- Registros de Observación

Introducción

Sin importar lo que pensemos y hagamos, resultará siempre sustantiva la participación del niño en torno de su propio aprendizaje, no existen recetas mágicas ni estrategias únicas, es el niño quien pondrá, a fin de cuentas la última pieza para otorgar un sentido a lo que él aprende.

Así consideramos que el significado de un conocimiento estará vinculado a la historia, la participación y el contexto en que se desarrolla el niño, y su aprendizaje dependerá de las estrategias que sean implementadas por el profesor con dicho fin y sobre todo de las propias estrategias que el niño implemente para solucionar las situaciones que le sean presentadas o a las que se enfrente.

Por décadas se ha buscado mejorar los métodos de enseñanza y se han realizado investigaciones y propuestas educativas que pretenden dar opciones que permitan elevar los niveles de aprendizaje en torno de las matemáticas, entre los cuales tenemos el partir de lo concreto a lo abstracto y actualmente el constructivismo.

En esta tesis se muestran los resultados de una investigación encaminada a retomar las estrategias que emergen del niño en su interrelación con al grupo, al realizar actividades como el Basta numérico y la Resolución de problemas matemáticos, en un contexto de aprendizaje del algoritmo de la multiplicación.

En el primer capítulo se presenta el planteamiento del problema y la justificación que motivó a trabajar el presente tema de investigación, el cual consiste en buscar las estrategias que el niño crea durante su participación dinámica al interior del grupo escolar, ya que consideramos que el niño en su participación dinámica escolar puede crear diversas estrategias para lograr resolver situaciones problemáticas en torno del aprendizaje del algoritmo de la multiplicación.

Dentro del segundo capítulo se hace un acercamiento a los antecedentes de investigación relativos a las aportaciones que sobre estrategias emergentes del niño han realizado algunos investigadores y que hemos de considerar ante el desarrollo de nuestra propia investigación.

El tercer capítulo inicia con la presentación de una reseña sobre algunos sistemas que sirven o se apoyan en la actividad de multiplicar como son el ruso y el egipcio, su inclusión pretende mostrar al lector los procesos que se aplican en

estos sistemas con la intención de darle a conocer algunas de las estrategias implementadas por el hombre en el trabajo con las multiplicaciones.

En seguida se resumen algunos de los puntos que consideramos como más relevantes relativos a la interacción entre el maestro y su alumno, en donde el lector podrá percatarse del proceso de apropiación o de construcción interactiva del conocimiento, a lo largo del cual el alumno se enfrenta a las dificultades que le son planteadas por el maestro, en torno de las tareas que implican la aplicación de la multiplicación.

Ahí también se muestra el conocimiento que ha aportado la investigación sobre el aprendizaje del algoritmo y el procedimiento que usualmente se enseña al estudiante para que lo aplique cuando trabaja en el tema de la multiplicación. Así mismo, se presentan al lector algunas de las dificultades y algunos riesgos de cometer errores en la enseñanza del algoritmo de la multiplicación. Además señalaremos algunas de las aportaciones de trabajos referentes a la participación del juego en la enseñanza así como algunos motivos que permiten la recomendación de que sea utilizado como una estrategia didáctica. También presentaremos algunas de las consideraciones respecto del aprendizaje del docente como alumno, y la relación que mantienen sus concepciones en su ejercicio frente a un grupo.

Finalmente en este capítulo se expone el trabajo que realizamos con la resolución de problemas como una de las posibles formas para llegar al conocimiento y dominio de la multiplicación de tal suerte que buscamos que el alumno participe, intercambie y socialice los nuevos dominios que adquiera. Además también se presentan sugerencias respecto del trabajo con la resolución de problemas.

Para el capítulo cuarto se presenta la estrategia metodológica de investigación, así como las actividades que sirvieron de base para realizar comparaciones con lo obtenido por otros autores. Aquí se analiza el surgimiento de estrategias a partir del trabajo de los niños, captadas de las observaciones. Además de la técnica de investigación instrumentada, también se habla de las dificultades que se hicieron presentes en el transcurso de nuestra indagación.

Finalmente en el capítulo cinco se presenta el análisis de los datos y se hace la exposición de los resultados obtenidos durante la investigación del trabajo de campo realizado, así como las conclusiones, donde resaltan algunas de las estrategias que son susceptibles de observar en la clase a lo largo del trabajo con

el basta numérico y la resolución de problemas, mismas actividades que desde nuestro punto de vista resultaron ser las más promisorias de entre las trabajadas en el camino hacia la creación de un algoritmo con significado.

En el presente trabajo nos hemos esforzado por rescatar el trabajo de los niños en torno a la creación de sus propias estrategias, con la intención de aportar al docente ideas y sobre todo inquietudes para seguir trabajando a partir de la actividad productiva del niño; considerando que el aprendizaje de los niños adquiere significado a partir de la dinámica de su participación en torno a la construcción de su propio conocimiento.

CAPÍTULO I
EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Planteamiento del problema

Entre los problemas que presenta la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria basada en la mecanización de las operaciones elementales se encuentra el relacionado con el aprendizaje y el uso del algoritmo de la multiplicación en el tercer grado, toda vez que los alumnos memorizan las tablas de multiplicar sin lograr el dominio ni la comprensión del algoritmo.

Algunos profesores comentan con frecuencia respecto de las grandes deficiencias de comprensión y manejo que observan en los pequeños en cuanto al dominio de las multiplicaciones. "Los niños resuelven operaciones y situaciones problemáticas que parecen ser correctas pero que al cuestionar a los niños dejan entrever que únicamente están operando sin comprender lo que realmente sucede" (Block *et. al*. 1993).

En el trabajo que aquí se presenta interesa retomar alternativas didácticas actuales basadas en la implementación de actividades en el salón de clase (actividades cercanas a la cotidianeidad del niño) para promover la construcción de un conocimiento matemático con más sentido que el proporcionado por la memorización o la mecanización.

En particular, interesa el estudio de las estrategias que surgen en la clase como medio para darle significado al algoritmo y conocer cuál es el impacto de la aplicación de alternativas de enseñanza basadas en otro tipo de actividades distintas de la práctica rutinaria de mecanizaciones. Asimismo, nos interesa saber

como responden los niños a la aplicación de algunos juegos matemáticos y a la solución de problemas utilizando ambos como auxiliares didácticos durante el proceso enseñanza-aprendizaje de la multiplicación.

Nuestra hipótesis de investigación consiste en que la aplicación de las alternativas didácticas mencionadas permitirá el estudio o la indagación sobre algunas de las estrategias matemáticas que implementan los niños del tercer grado de educación primaria como signos de comprensión sobre el tema de la multiplicación.

Tal vez ello derive en un mejor desarrollo en la comprensión de otros temas matemáticos, entre los cuales estarían posiblemente la proporcionalidad y el trabajo con perímetros y áreas.

1.2. Justificación del tema de investigación

El tema del conocimiento matemático es para muchos docentes de gran interés profesional puesto que las matemáticas has sido consideradas como una de las áreas básicas de formación en la escuela primaria.

A decir por Valiente (1998) y coincidiendo con su pensar, consideramos que las matemáticas deben de ser creadas partiendo de una necesidad surgida en el educando, y que deben formar parte de un grupo de herramientas que llegan a la mente del niño como producto del trabajo de análisis y comprensión de una serie de datos los cuales, al ser organizados y procesados llevarán a formar estructuras que servirán de base para resolver otros eventos similares y que también constituirán la base de nuevos procesos.

De acuerdo con Brousseau (1993), a lo largo de la educación primaria los pupilos enfrentan diariamente situaciones que les llevan al uso de operaciones, resolución de problemas y otras actividades, relacionadas directa o indirectamente con procesos matemáticos, de tal forma que requerimos el estudio de aquellas formas que son implementadas por el niño durante el proceso de resolución de los ejercicios y problemas que le son planteados, con la finalidad de lograr una comprensión y dominio real de estas herramientas (para la enseñanza) que nos están proporcionando los alumnos.

Hemos elegido algunas actividades a desarrollar en el salón de clase relacionadas con los juegos de mesa (o de anotaciones y respuestas por turno), como es el basta numérico, pues de acuerdo con Sánchez (1992), debemos tener en todo momento presente que el niño lleva en su persona un cúmulo de experiencias y que posee un interés singular por el juego.

En este sentido, tal vez resulte determinante encontrar los vínculos que el alumno establece entre este tipo de juegos, como el basta numérico con la multiplicación, para poder promover en la clase la comprensión de la misma.

En particular interesa aprovechar algunas actividades que favorezcan la participación del niño de manera más dinámica, pues de acuerdo con Arnold citado por Block (1994), no todos los juegos resultarían importantes desde el punto de vista matemático, ni todas las actividades que sirven para la enseñanza de las matemáticas son realmente juegos.

De la misma manera, no es claro cómo el maestro puede aprovechar la alternativa didáctica de la resolución de problemas para mejorar el rendimiento escolar de sus alumnos referente al cálculo aritmético, y en particular al de la multiplicación. Esto es, tradicionalmente la multiplicación se ha venido enseñando mediante la práctica repetida del algoritmo o de la memorización de las tablas de multiplicar. En dicho contexto, la resolución de problemas de multiplicación resulta más una aplicación de lo aprendido que una alternativa de construcción o de asignación de un significado a el algoritmo.

He aquí pues como aparece nuestra necesidad de indagar acerca de las posibilidades para que los alumnos lleguen a la comprensión del algoritmo, mismas que asemejen por un lado actividades que sean de interés para ellos como podría ser el basta numérico y por otro lado, explotar actividades problemáticas, mismas que deben implicar un reto para los niños al intentar darles solución.

CAPÍTULO II
ANTECEDENTES DE INVESTIGACIÓN

2.1. Estrategias Matemáticas Emergentes de los Niños en la Escuela

En particular en este apartado se muestran al lector algunas de las aportaciones realizadas por distintos autores en torno de las estrategias matemáticas emergentes en el salón de clase. Aquí exponemos algunas de las diferentes aportaciones realizadas por algunos investigadores, las cuales retomaremos en esta tesis para analizar los datos resultantes de nuestras observaciones empíricas, mismas que serán reseñadas en el capítulo cinco.

Uno de los trabajos más retomados en este trabajo de tesis es el de Brousseau (1993), investigador que señala que es posible el reconocer un aprendizaje en el sujeto que mediante la observación y el análisis de las estrategias que él genera, mismas que emergen en la adaptación a las nuevas situaciones a las que éste se enfrenta.

Por otro lado, Ávila (1998) refiere la conveniencia de tener presente que desde la escuela se pueden y deben ofrecer condiciones para ayudar a los niños a avanzar en sus procesos constructivos y no esperar simplemente a que éstos sucedan. Condiciones en torno de las cuales en esta tesis se pretende indagar mediante la implementación de las actividades del basta numérico y la resolución de problemas.

Como ya hemos señalado anteriormente, en esta tesis pretendemos apuntar hacia las estrategias emergentes de los niños cuando trabajan en contextos donde se propicie su participación dinámica, en la escuela. En particular cuando la maestra en el salón de clase dirige este tipo de actividades de juego y resolución de problemas hacia el aprendizaje del algoritmo de la multiplicación. Por ello es que más adelante en éste capítulo realizaremos una reseña de los resultados más relevantes en torno de las estrategias de los niños relacionadas con el producto.

Además, el maestro a través de un uso bien estructurado de estas actividades de juego y resolución de problemas quizás podría reconocer algunos rasgos de la personalidad del alumno, como el dinamismo y la autosuficiencia, para canalizar estas cualidades hacia un mejor rendimiento escolar, o mejor comprensión de los temas en estudio.

Finalmente señalaremos que en especial nos interesa rescatar en el capítulo tres parte del trabajo de algunos investigadores nacionales quienes, por haber realizado sus estudios con estudiantes mexicanos, muestran trabajos más apegados a las características propias de nuestros niños, diferentes a los que participan en investigaciones del extranjero, con otra cultura y diferencias históricas, tecnológicas y culturales. Este es el caso de Balbuena (1989), Fuenlabrada (1991), Valiente (1998); Block *et. al.* (1993); Carvajal (1996); Ávila (1998); y Hoyos (1998). Autores cuyos trabajos, además de los que estamos presentando en este capítulo, servirán de soporte a la presente investigación y que iremos aprovechando a lo largo de esta tesis, procurando ser sintéticos y rescatando especialmente aquellos elementos que se relacionen con nuestro tema.

2.2. Paso de la Adición a la Multiplicación.

Para dar inicio a nuestro trabajo cabe señalar que existen diferentes formas de abordar el algoritmo de la multiplicación, pero el más abordado parece ser el de retomar al producto como resultado de una suma abreviada.

En el trabajo de Moreno y Waldegg (1992), se reporta que de entre los primeros procedimientos numéricos para solucionar una situación de producto, aparece el sumar reiteradamente un número. Así mismo se observó que cuando los niños tuvieron la necesidad de verificar sus resultados de una multiplicación éstos recurrieron a realizar una suma reiterada.

Esto nos señala una situación que posiblemente podamos observar en los niños, ante la necesidad de verificar sus resultados y que quizás revela una característica identificada que antecede el paso a la multiplicación a visualizar en nuestras próximas observaciones empíricas.

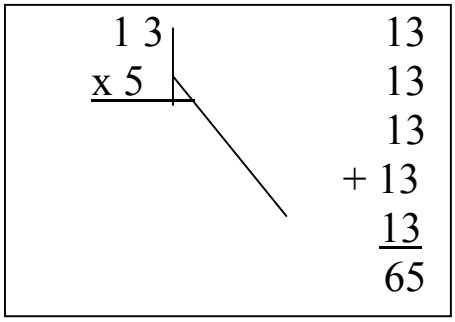


Fig.1. Estrategia posible del paso de la adición repetida a la multiplicación expuesta por Moreno y Waldegg.

2.3. El Papel de las Estrategias en el Aprendizaje Según Brousseau.

Brousseau ha sido uno de los primeros autores en privilegiar la resolución de problemas como forma de aprendizaje.

Desde el enfoque de Brousseau, el aprendizaje de los alumnos es visto como una adaptación a las situaciones que se le plantean. "Los problemas elegidos deben hacerlo obrar, hablar, reflexionar, evolucionar con su propio movimiento" (Brousseau, 1993).

De acuerdo con Brousseau, el maestro debe plantear obstáculos didácticos en actividades subsecuentes para desequilibrar las estrategias de base que el alumno ha establecido hasta el momento.

Así mismo, las contradicciones, dificultades y desequilibrios en la interacción con el medio y su adaptación a ellos prueban que el educando está aprendiendo.

El tipo de situaciones que maneja Brousseau permiten al sujeto considerar nuevos aspectos en otros problemas y construir una estrategia mejor que la que empleaba. De manera que el alumno usa una herramienta frente a situaciones nuevas "haciendo adaptaciones, transformaciones o integraciones con otros conocimientos" (Brousseau, 1993).

Lo cual implica que es posible reconocer un aprendizaje cuando podemos identificar en las estrategias de los alumnos la presencia de un conocimiento nuevo (una nueva manera de relacionar los datos, una propiedad no utilizada o la integración de conocimientos anteriores).

Sin embargo, hay que tomar en cuenta que el alumno no sólo aprende en las interacciones internas con la situación didáctica, sino también en contextos más ricos de la interacción social.

Al respecto, Brousseau dice: "Los conocimientos evolucionan según procesos complejos. Querer explicar esas evoluciones únicamente por las interacciones efectivas con el medio sería ciertamente un error, pues muy pronto los niños pueden interiorizar las situaciones que les interesan y operar con sus representaciones internas, experiencias mentales muy importantes... pero la interiorización de esas interacciones no cambia mucho la naturaleza, el diálogo

con un oponente interior es ciertamente menos fortificante que un diálogo verdadero, pero es un diálogo" (Brousseau, 1993).

Además, en este trabajo de Brousseau (1993), se reconoce que cuando los alumnos han logrado usar de manera implícita una nueva herramienta para resolver el problema que se les plantea, el proceso de adquisición del conocimiento en juego está sin embargo, lejos de haber concluido. Esto es, las nuevas herramientas deberán ser usadas de manera explícita si queremos obtener testimonios del aprendizaje en cuestión.

Brousseau (1993), distingue la existencia de diferentes interacciones del alumno con el medio, a lo largo de las cuales los conocimientos pasan de ser herramientas implícitas, a ser identificadas como objetos culturales, a conocer.

- Interacciones Iniciales.

Las interacciones iniciales con un problema son interacciones de acción concreta, corresponden a la construcción a nivel implícito de las herramientas en juego. Si de antemano el alumno no tiene una estrategia inicial segura, formulará hipótesis, las probará y discutirá con sus compañeros para construir una estrategia de base o inicial.

- Las interacciones de formulación.

Son aquellas en las que se propicia la explicitación de algunos aspectos de la herramienta que los alumnos construyen para solucionar un problema (los alumnos hacen explícitos aspectos que tuvieron en cuenta, los nombran, los explican, eventualmente en situaciones planeadas para ello, y empiezan a construir lenguajes más precisos).

- Las interacciones de validación o "prueba".

Son aquellas en las que los alumnos argumentan la validez o falsedad de sus aserciones sobre las distintas propiedades del conocimiento en juego.

Finalmente, con respecto al trabajo de Brousseau (1993), nos referiremos a las situaciones de "institucionalización", puesto que constituyen una fase esencial del proceso didáctico.

Las situaciones de institucionalización son aquellas en las que el maestro selecciona, de entre numerosos hallazgos de los alumnos, los que deben ser identificados con los saberes culturales que son objeto de enseñanza. "La consideración "oficial" del objeto de enseñanza por parte del alumno y del aprendizaje del alumno por parte del maestro, es un fenómeno social muy importante y una fase esencial del proceso didáctico: este doble reconocimiento constituye el objeto de la institucionalización" (Brousseau, 1993).

2.4. Algoritmos que Inventan los Niños para los Problemas de Multiplicación con Varios Dígitos.

Un amplio cuerpo de investigaciones realizados con niños escolares de tercero a quinto, mientras intentan resolver problemas de adición y sustracción relacionados con el producto, han puesto de manifiesto que los niños desarrollan estrategias y son capaces de inventar algoritmos para dar solución a varios tipos de problemas de la vida real Jae-Meen (1998).

Inicialmente cuando los alumnos son conducidos a inventar sus propios algoritmos, éstos modelan las situaciones empleado materiales concretos, como se mostrará mas tarde. Tan pronto como reflexionan y abstraen sus algoritmos, éstos se vuelven más sofisticados y dependen en menor grado de la manipulación de materiales concretos (Fuson *et. al.*, 1997).

De acuerdo con algunos señalamientos realizados por Jae-Meen (1998), resulta necesario el que los educandos desarrollen, por ellos mismos, su propio significado de lo que es la multiplicación y propone que lo realicen mediante la creación de algoritmos y procedimientos particulares, en torno de las operaciones elementales.

Las multiplicaciones resultan más complejas que la adición o la sustracción, por tanto es de esperarse que resulte más complejo elaborar algoritmos para éstas.

Actualmente según Jae-Meen (1998), la creación individual de los algoritmos se establece por la libertad del educando para determinar las formas propias para dar solución a los planteamientos que le son presentadas en la clase.

Inicialmente se plantean problemas a los alumnos y ellos los resuelven en pequeños equipos o individualmente. Después comparten los algoritmos que inventaron, discutiendo las similitudes o diferencias entre ellos.

Jae-Meen (1998), después de una observación de seis grupos de tercero a quinto de primaria, propone una clasificación de los algoritmos que inventaron algunos alumnos. Esta clasificación es en cuatro grupos a saber:

1) Modelación directa, 2) Estrategias de número completo, 3) Estrategias de partición de números, y 4) Estrategias de compensación.

De manera esquemática, se puede decir que la estrategia de modelación directa consiste en: Modelar cada uno de los grupos empleando manipulables concretos o dibujos. Cuando los estudiantes desarrollan su comprensión conceptual de la multiplicación, sus algoritmos se vuelven más sofisticados. Ellos comienzan a emplear, estrategias de número completo, estrategias de partición de números.

Así mismo, las estrategias de número completo consisten en realizar adiciones repetidas de los multiplicandos. Los niños inventaron procedimientos de adición más eficientes mediante la duplicación de multiplicandos.

Por otro lado, la estrategia de partición de números se define a partir de lo siguiente: Separar los multiplicadores o multiplicandos en dos o más números y dar origen a varios subproblemas con los que será más sencillo lidiar. Este procedimiento permite al niño reducir la complejidad del problema y emplear aspectos de la multiplicación que él domina.

Por último, la estrategia de compensación básicamente se caracteriza por: El estudiante ajustará multiplicador y multiplicando o uno de los dos basado en las características especiales de la combinación numérica para hacer el cálculo más sencillo, haciendo al final los ajustes necesarios de ser necesario.

En los siguientes cuatro pequeños apartados daremos ejemplos de estas estrategias.

2.4.1. Estrategias de Modelación Directa

Algunos niños requieren modelar el problema de forma completa y contar todos los objetos y otros sólo lo emplean como un auxiliar de referencia.

Jae-Meen (1998), identifica dos tipos de modelación directa: Por unidades y por decenas. Por ejemplo:

Si tenemos 4 grupos con 14 niños en cada una, ¿Cuántos niños hay en total?

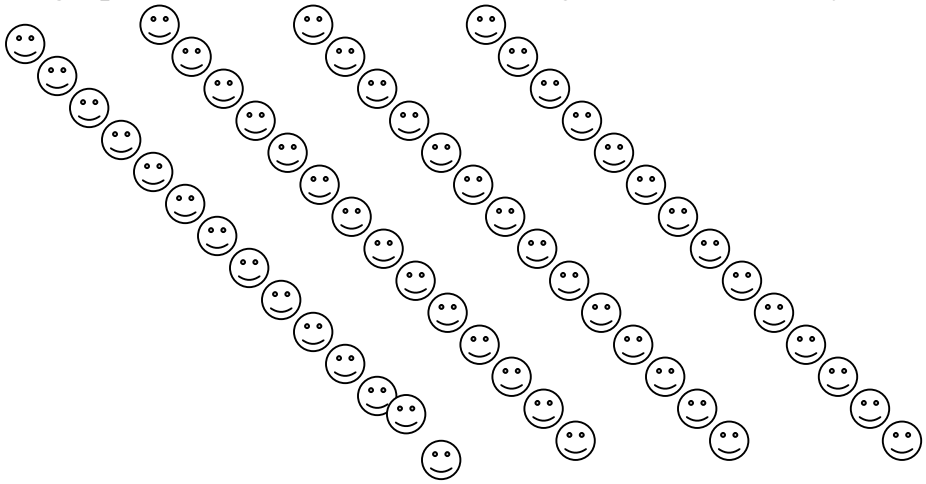


Fig.2. El niño forma cuatro filas con 14 niños cada una y las cuenta de uno en uno hasta agotar los elementos. Es decir emplea la *Estrategia de Modelación directa por Unidades.*

Los niños que emplean la estrategia de Modelación Directa por Decenas emplean sus conocimientos previos sobre la decena y la emplean para organizar sus elementos.

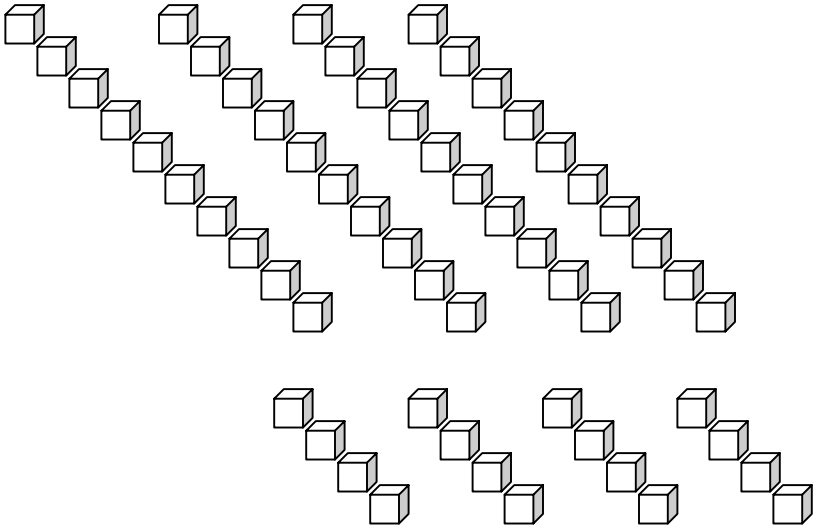


Fig.3. Estrategia de modelación directa por decenas,
las agrupaciones y conteos son por grupos de diez.

A partir de las Estrategias de modelación con materiales concretos es posible que el niño pueda inventar algoritmos más abstractos y sin depender de dichos materiales (Jae-Meen, 1998).

2.4.2. Estrategias de Número Completo.

Los niños que emplean esta estrategia suman los multiplicandos pero no parten el multiplicador o el multiplicando de ninguna forma particular, para realizarlo los niños emplean diferentes formas o estrategias, como una suma reiterada o por dobles.

$$\begin{array}{r} 14 \\ \underline{+\,14} \\ 28 \\ \underline{+\;\;14} \\ 42 \\ \underline{+\;\;14} \\ 56 \end{array}$$

Fig.4. Estrategia de suma reiterada

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 14 \\ 14 \end{array}\right\} 28 \\ \left.\begin{array}{l} 14 \\ 14 \end{array}\right\} 28 \end{array}\right\} 56 \end{array}$$

Fig.5. Estrategia de dobles o suma de pares

2.4.3. Estrategias de Partición de Números.

Jae-Meen (1998), señala cómo los estudiantes que emplean este tipo de estrategias, seccionan el multiplicando de la multiplicación, el multiplicador, o ambos en pequeños números, reconociendo principalmente dos formas diferentes de hacerlo; algunos estudiantes dividen el número (multiplicando o multiplicador) en números no múltiplos de diez; mientras que otros en agrupaciones o múltiplos de diez.

Ejemplo:

El profesor del grupo hace el siguiente planteamiento.

Profr: - “Si tenemos 15 cajas con 177 manzanas en cada una, ¿ Cuántas manzanas tenemos en total ?”

Ante este planteamiento mostraremos las formas con las cuales los estudiantes buscan, mediante diferentes estrategias, facilitarse la solución. A continuación veremos la estrategia empleada por un alumno, que intenta dar solución al planteamiento anterior, mismo que después de algunas reflexiones procede sin recurrir a formar grupos de diez:

A.- “Tres veces 177 son....531.Cinco veces 531..., hmm.” Puedo Sumar... primero cuatro veces...
(Algunas de las estrategias a realizar se pueden percibir con lo que el alumno dice)

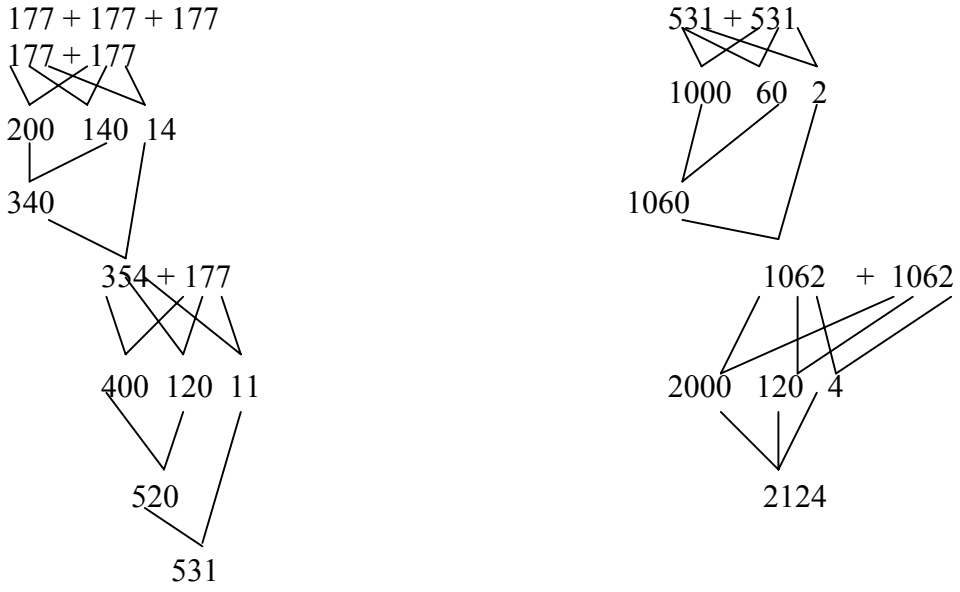


Fig.6. Las estrategias del niño señalan su proceder
Si bien 177 multiplicado 3 veces son 531, y 4 veces 531 son 2124; cinco veces 531 son 2124 más 531, el resultado es 2655.

En el siguiente caso es posible identificar como los alumnos van retomando algunos de los conocimientos previos que poseen y como los van articulando para dar respuesta al nuevo problema que les es presentado.

“Si tenemos 16 paquetes de goma de mascar con 5 piezas de esta en cada caja, ¿Cuántas piezas de goma de mascar tengo?

Kathy:- 12 x 5 son 60, entonces 13 x 5 son 60 +5 = 65, 14 x 5 son 70, 15 x 5 son 75, y 16 x 5 son 80; el resultado es 80.

Kathy partió el número multiplicador 16 en 12 + 1 + 1 + 1 + 1.

En este caso Kathy, emplea un múltiplo conocido por ella 12 x 5 = 60, y a partir de éste sumo de uno en uno el contenido total de cada paquete (5).

Otra estrategia que ha sido documentada por el autor es la de “Partición de los números en agrupaciones de diez” a saber:

“ Si en un edificio hay 33 pisos con 11 oficinas cada uno ¿Cuántas oficinas hay en el edificio?

11	11	11	
11	11	11	
11	11	11	
11	11	11	
11	11	11	
11	11	11	
11	11	11	
11	11	11	11
11	11	11	11
11 110	11 110	11 110	11 33

330 + 33 = 363

Fig.7. Estrategia sobre la agrupación en grupos de diez

La estrategia consiste en agrupar los números en decenas para hacer más sencillo su manejo.

Algunos estudiantes realizan este algoritmo mediante productos parciales:

Kathy resuelve 26 x 39 como:

20 x 30, 20 x 9, 6 x 30, y 6 x 9 por que 20 x 39 es 20 x 30 más 20 x 9 y 6 x 39 son 6 x 30 más 6 x 9 .

2.4.4. Estrategia de Compensación

En algunos problemas los estudiantes ajustan los factores sobre las bases de ciertas características de combinaciones numéricas; en algunas ocasiones, ajustan multiplicador y multiplicando y, en otras, sólo uno de éstos ya sea duplicándolos o sacando mitad para hacer más sencillos los cálculos, por ejemplo:

“Si tenemos 5 bolsas con 250 muñecas cada una, ¿Cuántas muñecas hay en total?”

Isaac: Desde que yo multiplico por 5, yo puedo doblar a la mitad 250 y multiplicarlo por 10, La mitad de 250 son 125, y 125 por 10 son 1250. Son 1250.

“Si tenemos 39 bolsas con 7 dulces cada una ¿Cuántos dulces tengo en total?”

Sandra: treinta y nueve bolsas, mmh, Yo puedo multiplicar 7 por 40 y luego le resto una de 7.

Así Sandra cambió el problemas para aplicar sus conocimientos de decena y sustraerle al total una bolsa de 7 dulces.

De acuerdo con Jae-Meen (1998), el análisis de la creación de estrategias, por parte de los estudiantes, proporciona evidencia de la posibilidad de inventar algoritmos para la solución de problemas multiplicativos de cifras multidígitos, ello cuando les es dada la posibilidad de realizarlo. Este análisis sugiere que los algoritmos que inventan los estudiantes permiten al profesor conocer cómo piensan sus alumnos respecto de la composición aditiva o multiplicativa de los números. Así, el autor concluye que los estudiantes incrementaron su desarrollo del sentido numérico en razón a la oportunidad que se les dió para desarrollar sus propios algoritmos.

2.5. Estrategias de Obtención de las Multiplicaciones Básicas

A decir por Ter Heege (1985, citado por Maza 1991), uno de los defensores del aprendizaje de la multiplicación mediante la actividad constructora de los alumnos, algunas de las estrategias que permiten al niño calcular las multiplicaciones básicas son las siguientes:

1) Propiedad conmutativa.

Señala la posibilidad de cambiar el orden de los factores, sin que ello altere el producto o resultado de la multiplicación.

Esta propiedad permite reducir el trabajo que implica el aprendizaje memorístico de manera considerable, lo cual permite al estudiante un mayor análisis y comprensión.

2) Multiplicación por 10.

La regla que permite a cada número al multiplicarlo por diez añadirle al mismo número un cero a la derecha es realmente sencilla de dominar, y permite establecer la base para el cálculo de la mitad.

3) Cálculo del doble.

A partir de ésta es posible deducir que la multiplicación del 2 y 4 sólo requieren de doblar el número anterior.

2 x 3 = 6	4 x 3 = 12
2 x 4 = 8	4 x 4 = 16
2 x 5 = 10	4 x 5 = 20

Doblando, las multiplicaciones por 4 se deducen, de igual forma que al multiplicar por el doble. La aplicación será igual al proceder con 3 y 6 .

4) Cálculo de la mitad.

Esta estrategia es posible encontrarla de 8 a 4, de 4 a 2 o de 6 a 3; sin embargo es más habitual de 10 a 5. Estos productos son considerablemente fáciles para los niños puesto que los resultados de multiplicar por 10 son útiles al hacerlo por 5.

10 x 3 = 30	5 x 3 = 15
10 x 4 = 40	5 x 4 = 20
10 x 5 = 50	5 x 5 = 25

5) Adición del multiplicando.

Apoyándose en la multiplicación de un número es posible obtener el resultado de multiplicar por el siguiente sin más que añadir una vez el multiplicando.

6 x 8 = 5 x 8 +8 = 40 + 8 = 48

6) Sustracción del multiplicando

Es similar al anterior, sólo que en vez de sumar se resta el multiplicando y generalmente es utilizado a partir del 10.

9 x 7 = 10 x 7 = 70 – 7 = 63

De acuerdo con Maza (1991), el hecho de que el alumno construya su aprendizaje a partir de la construcción de estrategias informales, habla de la posibilidad de aprender cada multiplicación de manera diferente a las demás. Situación que, posiblemente, permita al niño discriminar de entre varias opciones y le obligue a tomar decisiones de manera constante, permitiendo así un aprendizaje más significativo.

2.6. Niveles de Desarrollo Progresivo en las Estrategias Informales del Niño.

Según Luceño (1999), suelen distinguirse cinco niveles de desarrollo progresivo en las estrategias informales que el niño utiliza en la multiplicación, a saber:

2.6.1. Recuento Unitario.

En ella el niño requiere representar con material o con dibujos figurativos la situación matemática, Por ejemplo, en el problema de si "si tenemos tres bolsas y en cada una hay tres canicas ¿Cuántas canicas hay en total?

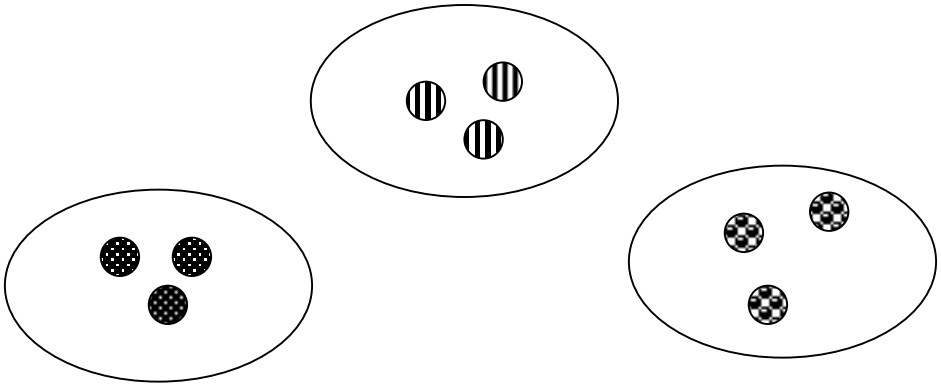


Fig.8.Conteo Unitario

El niño considera primero las tres bolsas y posteriormente, las tres canicas de cada bolsa. Finalmente, procederá a contar una a una todas las canicas.

2.6.2. Doble Recuento.

En este procedimiento el niño percibe claramente la regularidad de los recuentos y la repetición de los grupos de palabras. Así el procedimiento de multiplicar 4 x 3 =_____ constaría de las cuatro acciones sucesivas siguientes:

1) Se generan números sucesivos a partir de la serie numérica

1 2 3 4; 5 6 7 8; 9 10 11 12

2) Se lleva la cuenta de cada cuarto número contando

1 2 3 4 1 2 3 4 1 2 3 4

3) Se lleva la cuenta del número de grupos de 4

1 2 3

2.6.3. Recuento Transaccional.

Se aprecia por que el recuento se hace subvocalmente para concluir con la interiorización (supresión de la pronunciación) de las palabras que marcan el final del grupo. Por ejemplo, en 2 x 3 ___:

Uno (susurrando) 2 3 (susurrando) 4 5 (susurrando) 6

↓ ↓ ↓

2 4 6

2.6.4. Estrategia Aditiva.

El niño emplea sumas conocidas. Por ejemplo, en 4 x 3 =___ será 4 + 4 son 8 y 8 + 4 son 12.

2.6.5. Recuperación de Hechos Multiplicativos.

La estrategia aditiva deviene en el almacenamiento de los hechos multiplicativos básicos, siendo estos las multiplicaciones elementales de dos números.

De acuerdo con Luceño (1999), la estrategia psicopedagógica para la enseñanza o el aprendizaje del producto debiera seguir las siguientes fases:

1°) Partir de una situación real surgida en el aula o suscitada por el profesor (el profesor debe ser un diseñador de situaciones de aprendizaje).

2°) Las soluciones que se vayan ofreciendo / obteniendo se discuten, y, se seleccionan los mejores procedimientos para encontrar la o las soluciones correctas.

3°) Finalmente se procede a trabajar individualmente el procedimiento / algoritmo consensuado como el más apropiado.

Adición repetida:

$$\begin{array}{r} 34 \\ +34 \\ \dots \\ 34 \\ \underline{34} \\ 272 \end{array} \quad \text{(8 veces)} \qquad 34 \times 8 =$$

Adición repetida separando decenas y unidades:

$$\begin{array}{ll} 30 & 4 \\ 30 & 4 \\ \dots & \dots \\ 30 & 4 \\ \underline{30} & \underline{4} \\ 240 & 32 \end{array} \qquad \text{(8 veces)}$$

Cálculo de productos parciales

$$\begin{array}{r} 5 \times 34 = 170 \\ 3 \times 34 = 102 \\ \hline 272 \end{array}$$

Cálculos utilizando la multiplicación por diez.

$$\begin{array}{l} 8 \times 10 = 80 \\ 8 \times 10 = 80 \\ 8 \times 10 = 80 \\ \underline{8 \times 4 = 32} \\ 8 \times 34 = 272 \end{array}$$

Cálculo con dobles:

$$34 + 34 = 68$$

$$68 + 68 = 136$$

$$136 + 136 = 272$$

Ejemplo de otro tipo de estrategias

$$8 \times 34 = 10 \text{ X } 34 - 2 \times 34 = 340 - 68 = 272$$

Resumen del capítulo:

En este capítulo hemos privilegiado la presentación de los resultados de las investigaciones de diversos autores en torno de las estrategias utilizadas por los niños en la escuela. Los casos fueron abordados en distintos momentos o situaciones de instrucción, sin embargo todos ellos relacionados con el aprendizaje del algoritmo de la multiplicación. En particular, hemos señalado algunos de los diferentes elementos de dichas estrategias que especialmente nos servirán para detectar, describir y clarificar aquellas estrategias que aparecerán a lo largo de la fase empírica del trabajo de investigación, de la cual se hablará más tarde, a partir del capítulo cuatro de este documento.

CAPÍTULO III
MARCO TEÓRICO

En este capítulo se presentan algunas nociones teóricas sobre el aprendizaje del algoritmo de la multiplicación y algunos trabajos empíricos al respecto, los cuales fundamentan el desarrollo de la investigación que se presenta en esta tesis.

3.1. Antecedentes históricos

En esta primera parte se da inicio mencionado algunos aspectos históricos sobre el sistema de numeración de origen hindú arábigo y sus aportaciones al resto del mundo. También se refiere información sobre el algoritmo empleado por los rusos y sobre el sistema egipcio.

En la antigüedad ya existían algunos procedimientos que con la finalidad de realizar cálculos había creado el hombre, procedimientos que creemos, podrían mantener alguna lógica de desarrollo posible de identificar en las estrategias implementadas por los niños en la actualidad al promover que inventen sus propios algoritmos para multiplicar, sobre estos algoritmos se comenta en los siguientes apartados.

3.1.1. El sistema de numeración hindú arábigo

La necesidad de un sistema para escribir numerales y con registros escritos ha sido asunto central de las diferentes culturas en la historia del hombre.

En el caso del pueblo griego los números se representan con letras del alfabeto, en tanto que en los romanos es posible identificar un sistema de adición y sustracción distintiva donde a un numero se suma el siguiente si es menor o se resta si la posición del numeral menor antecede al mayor, por ejemplo:

Al 5 (V) se le suma 1 (I) si está después, formando así el número 6 (VI) y al mismo 5 (V) le restamos 1 (I) cuando le antecede y formamos así el 4 (IV).

Algunas de las aportaciones más importantes del sistema hindú arábigo son las siguientes a saber:

El lugar valor, con el uso de unidades, decenas, centenas, etc. El uso del cero como poseedor de lugar y el uso del sistema de numeración de base "10", desarrollado en la India y empleado por los babilonios.

El sistema hindú arábigo permitió el registro de cada paso del proceso de un algoritmo haciendo la verificación del resultado más sencilla que con la tabla de contar romana, anteriormente empleada.

Resulta indispensable mencionar que la actividad matemática no termina con el desarrollo de un nuevo algoritmo.

El método para verificar cálculos, conocido como "Eliminando los nueves" de origen hindú arábigo, fue una técnica utilizada de manera muy popular en Europa, conocida también como la empleada por los tenedores de libros para la verificación de cálculos.

3.1.2. El sistema ruso

Un sistema empleado en la resolución de multiplicaciones es el sistema ruso. Sistema que consiste en la duplicación del primer término y la división del segundo en mitades hasta llegar a la unidad, como se muestra a continuación.

Todos los resultados numéricos ubicados junto a los números pares se eliminan y se suman los ubicados junto a los números nones.

12 x 64 =	**12**	**64**
	24	**32**
	48	**16**
	96	**8**
	192	**4**
	384	**2**
	768	**1**

Del 64 al 2 todos son números pares.

El único número non es el uno; por lo tanto el resultando sería:

64 x 12 = 768

Fig.9.Aquí es posible observar que el sistema ruso tiene sus bases en la duplicación y el cálculo de mitades.

3.1.3. El algoritmo egipcio

El procedimiento empleado, para dividir, por el pueblo egipcio consiste en duplicar sistemáticamente el cociente, del uno en adelante, para posteriormente hacer combinaciones aditivas de aproximación.

En este sistema es posible observar que para el problema: Juan va a guardar 425 libros en cajas con 25 libros cada una. ¿Cuántas cajas necesita para guardarlos? El procedimiento de solución sería el siguiente:

Número de cajas	total de libros guardado	
Cociente buscado	dividendo	
1	**25**	**Se suma 25 y 400.**
2	**50**	
4	**100**	
8	**200**	
16	**400**	
32	**800 (Se Pasa)**	
17	**425 (se necesitan 17 cajas para guardarlos)**	

Fig.10.El algoritmo egipcio.

El procedimiento egipcio tiene la desventaja de volverse poco funcional cuando el cociente crece.

Quizás sería posible que algunas de las estrategias empleadas por los niños asemejen, en parte, a rasgos de los sistemas ruso y egipcio antes expuestos. Como sería, quizás, el caso de los productos parciales y las aproximaciones sucesivas que realizan los niños, en donde ellos van haciendo algunas multiplicaciones que les permiten irse aproximando al resultado a base del ensayo y el error.

Cabe aclarar que los sistemas ruso y egipcio son procesos muy elaborados para los niños y hacer una analogía con las estrategias de los pequeños podría resultar demasiado pretencioso.

3.2. Interacción grupal y cambio cognitivo en la escuela

3.2.1. Desarrollo por la interacción maestro-alumno

De acuerdo con el texto de Newman *et. al*. (1991), Vigotsky reportó la relación entre el nivel de dificultad de lo que los alumnos pueden resolver por sí solos de manera independiente y el nivel de dificultad de lo que pudiera resolver con ayuda del experto (quien domina el conocimiento), llamando al momento de esta relación zona de desarrollo próximo (ZDP), donde refiere también a un sistema interactivo en el que varias personas se ocupan de resolver algunos problemas, los cuales, no podrían resolver de manera individual.

Al parecer, Vigotsky acepta la idea fundamental, planteada por Piaget, de que los niños construyen de manera activa su conocimiento a través de su interacción con el medio, a la cual Leontiev hace una modificación reemplazando el concepto piagetano de "asimilación" por el de "apropiación"(Newman *et. al*. 1991).

A decir por Newman *et. al.* (1991), el mismo Leontiev señala que los objetos que existen en el mundo infantil tienen una historia y unas funciones sociales que no se descubren sin ayuda, ni únicamente a través de las exploraciones que el niño efectúa, y exponen como la acción constructivista que se produce tanto en la interacción entre el adulto y el niño como en los mismos procesos internos del sujeto.

De esta forma, los autores Newman *et. al*. (1991), llegan a la premisa que señala que la zona de construcción del conocimiento, es un espacio psicológico compartido entre el profesor y el niño, en donde es posible que el profesor construya ambientes para el desarrollo intelectual de sus alumnos y éstos construyan conocimientos más profundos que los del legado cultural establecido en la currícula escolar (*Ibíd*.).

3.2.2. Construcción de significado

En el trabajo de Hoyos (1998), se rescatan ideas de Newman *et. al*. (1991) quienes señalan que el desencadenamiento del proceso de resolución de un problema o de la actividad involucrada no depende únicamente de lo que el estudiante por sí mismo es capaz de generar, sino que es fundamentalmente en la interacción con el instructor que el estudiante puede aprender de manera reflexiva, lo que significan sus respuestas en el sistema o situación, la cual ha sido concebida inicialmente por el adulto.

Un papel importante en el trabajo de Hoyos (1998), es la idea de Schoenfeld (1985), que consiste en dejar a los jóvenes estudiantes experimentar, para permitirles el descubrir por sí mismos y tratar de que los alumnos expresen en voz alta lo que piensan del trabajo, con una intervención mínima del instructor (*Ibíd*.).

En el trabajo de Hoyos (1998), se reporta la creación de estrategias de los estudiantes para resolver problemas. Estrategias que fueron creadas en la interacción entre estudiante e instructor, donde la intervención del instructor se limitaba a cuestionar para propiciar que el estudiante avanzara hacia una conjetura y que argumentara la validez de su respuesta.

En dicho trabajo (con estudiantes entre 16-18 años de edad) se concluye que una revisión sobre las transformaciones del discurso que puede ser desarrollado entre estudiante y maestro, como el que se da en las situaciones de resolución conjunta de problemas complejos de matemáticas, nos permite percibir como tales transformaciones ponen de manifiesto, por parte del que aprende, una elaboración estratificada de representaciones matemáticas (*Ibíd*.).

Además, Hoyos (1998), señala que las representaciones referidas le dan coherencia a un sistema matemático de signos en construcción, y que el sujeto elige de entre los significados construidos uno que surgirá como nuevo y transformado para la aplicación deseada, ante un nuevo problema o situación que le sea planteada.

También en este trabajo Hoyos (1998), muestra que el papel del maestro es fundamental, pues será él quien contrastará o refutará las distintas posibilidades elegidas por el estudiante en el camino de una resolución conjunta (estudiante-maestro) del problema planteado. De manera que se pretende que el maestro posibilite el conocimiento, y tal vez el avance hacia otro nivel de abstracción del contenido matemático en estudio. Así, esta tesis podría explicar el papel central del maestro como mediador en la construcción del conocimiento del estudiante, cuando le cuestiona y solicita argumentar la validez de sus respuestas (*Ibíd*.).

3.2.3. El Conocimiento como resultado de la experiencia

En esta tesis interesa subrayar, a partir del trabajo de Crawford (1996), que el conocimiento es construido por los individuos como un resultado de la experiencia, producto de su actuar, en un contexto en donde los individuos

despliegan una cierta actividad como un resultado de la misma experiencia previa, incluso como observadores.

El trabajo de Crawford (1996), enfatiza el papel de la actividad en un contexto cultural, donde predomina la posición vigotskiana que enfoca la importancia de la interacción social o la "interacción entre niños y adultos" en la interiorización de significados y símbolos culturalmente aprobados y donde el aprendizaje significativo depende de los alumnos.

Crawford (1996), señala que Vigotsky estuvo particularmente interesado en el desarrollo de procesos que ocurren cuando los conceptos son gradualmente internalizados a través de la comunicación con otros (seres) significativos (padres, pares y maestros), lo cual es importante tener en cuenta al momento de elegir o de diseñar situaciones escolares que formen parte de su cotidianeidad.

Así, resulta que la motivación de los alumnos es de lo más importante para actuar matemáticamente y la calidad de sus matemáticas dependerá de su percepción personal del significado cultural que tengan sus acciones, de la significatividad cultural que tengan para ellos las formas matemáticas de pensar, así como el conocimiento que vayan adquiriendo de significados matemáticos y técnicas (*Ibíd*.).

En el trabajo de Crawford (1996), es posible observar cómo el estudiante encuentra diversas formas de obtener "la respuesta" a un problema matemático, entre las cuales se ubica el hacerlo copiándole a un amigo, trabajando a partir de principios iniciales o articulando la solución a partir de una experiencia previa. Todas ellas situaciones que pueden tener diferentes significados y que constituyen la pasada experiencia social del sujeto. Experiencia que aunada al papel que desarrolla el estudiante en la resolución de problemas, es uno de los factores que determinan los aspectos cualitativos de su actividad intelectual.

La misma Crawford (1996), señala que los estudiantes normalistas ingresan a los cursos de matemáticas abrazando fuertes creencias y actitudes, derivadas de su propia experiencia educativa, sobre cómo se aprenden las matemáticas y el papel del maestro.

Finalmente en este trabajo (Crawford, 1996), concluye que las experiencias culturales de los estudiantes, sus intenciones, necesidades, y las clases de actividad matemática que todos ellos experimentan moldean la calidad de

sus aprendizajes matemáticos y las maneras en que ellos posteriormente son capaces de sentir, actuar, y pensar matemáticamente.

3.3. El algoritmo de la multiplicación: su enseñanza y aprendizaje.

El algoritmo a decir de Maurer (1984), es el procedimiento que el alumno sigue para dar solución a un problema.

Para Luceño (1999), el algoritmo escrito es un procedimiento de resolución de problemas, no un fin en sí mismo. Constituye un recurso entre otros (dedos, palillos, ábaco, la acción misma,...) para solucionar problemas reales. Según este mismo autor, "las cuentas"(operaciones matemáticas, de suma, resta, etc.) son los algoritmos más o menos abreviados y pretenden ser los más económicos en esfuerzo y tiempo (*Ibíd*).

Por otro lado, de acuerdo con Usiskin (1998), solemos aplicar un algoritmo si únicamente vamos a responder una pregunta de un tipo en particular, cuando no nos interesa pensar en el procedimiento. Pero cuando un procedimiento sirve para responder a diferentes planteamientos o situaciones problemáticas, se vuelve útil aprenderlo; y una vez que identificamos sus pasos, se vuelve un algoritmo. Así mismo, de entre las razones expuestas por Usiskin que justifican su uso se encuentran las siguientes:

1. - Son poderosos, es decir que los algoritmos son generalizaciones que engloban. Su poder deriva de la amplitud de su aplicabilidad, y su dominio significa su utilización en toda operación similar.

2. - Son confiables: cuando es resuelto correctamente, siempre proporciona la respuesta correcta.

23	**145**	**1980**
x 45	**x 34**	**x 378**
____	____	_____

3. - Son exactos: Los mejores algoritmos son más exactos, y pueden indicar lo preciso de la respuesta. (Así son preferibles sobre las estimaciones).

4. - Son más veloces: Proporcionan una vía directa hacia la respuesta.

5. - Proporcionan un registro escrito: Permiten seguir la secuencia empleada para la resolución del problema por parte del alumno.

6. - Establecen una imagen mental: El registro escrito permite establecer una imagen mental que puede ser empleada para resolver los problemas sin uso de lápiz y papel.

7. - Son instructivos: Algunos dan señal en la interpelación entre la respuesta y le información proporcionada.

8. - Pueden ser utilizados en otros algoritmos: Un algoritmo empleado en una situación puede ser parte de uno mayor, aplicado en otro problema.

```
 1 2 3
x  2 3
_____
  3 6 9
2 4 6
-------
2 8 2 9
```

El algoritmo de la suma es parte del utilizado en la multiplicación

3.3.1. Versiones del aprendizaje según Maza (1991)

De acuerdo con Maza (1991), dentro del aprendizaje de las multiplicaciones es muy común el aprendizaje de tipo memorístico y según planteamientos de los maestros podemos clasificar diferentes versiones para lograrlo, las cuales son las siguientes:

A) Las multiplicaciones básicas se disponen en las consabidas tablas de multiplicar las cuales se van repitiendo, una a una en voz alta, tantas veces como sea necesario, un día una y al otro la siguiente, hasta completar del uno al nueve o diez. Repetición y práctica constituyen la base para la memorización de las tablas.

B) Los alumnos observan la ley de formación de las multiplicaciones, para ayudar a la memorización:

Por ejemplo en la tabla del dos hacen ver que las cantidades varían de dos en dos: 2, 4, 6, etc. Y en la del tres los resultados sucesivos se diferencian en intervalos de tres en tres: 3, 6, 9, etc.

En esta segunda versión se puede percibir una estrategia aditiva para deducir un resultado a partir de otros previos (Suma reiterada).

C) En la tercera versión las tablas son construidas por los alumnos por medio de estrategias informales. La primera forma más documentada es la propiedad conmutativa. Así, si el niño es capaz de realizar 3 x 8 no es necesario que memorice 8 x 3. Otra es la de formación de dobles (deduciendo que 4 x 7 es el doble de 2 x 7) o la utilización de mitades (5 x 6 es la mitad de 10 x 6).

Se puede ver que esta versión no pone énfasis en la memorización ordenada, sino en la deducción orientada a la solución de problemas

3.3.2. Procedimiento usual para multiplicar

Finalmente, señalemos que el procedimiento usual para multiplicar consiste en sumar los resultados de multiplicaciones. Se multiplican sólo números menores de diez, realizando al mismo tiempo las sumas:

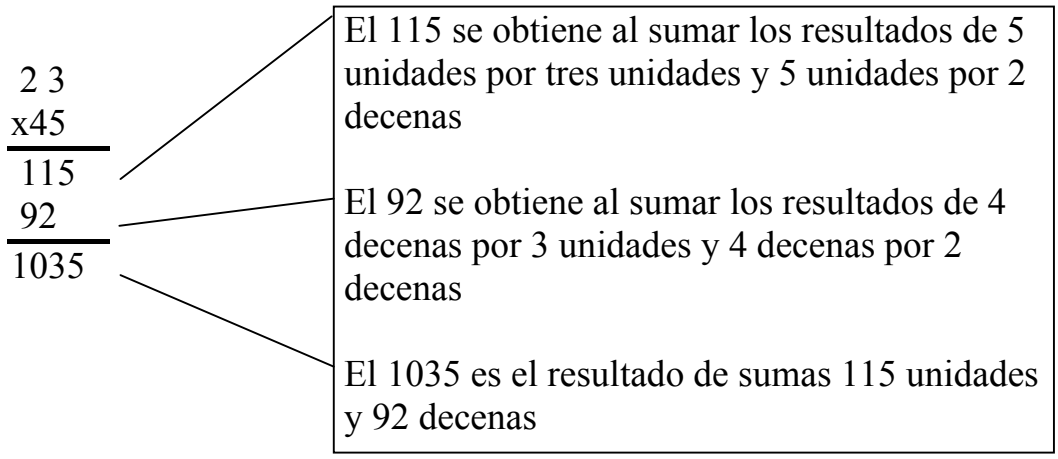


Fig.11. Tradicionalmente el mecanismo para multiplicar ha sido la aplicación del algoritmo convencional

3.4. Dificultades escolares en torno del aprendizaje de la multiplicación.

El algoritmo en la escuela es visto como una herramienta útil para dar solución a diversos problemas planteados en el aula, por ello el que se dé tanto énfasis a su enseñanza con la finalidad de que puedan hacer uso de ella en diversas situaciones problemáticas.

Los algoritmos son enseñados como un conocimiento acabado, como una mecánica a seguir, situación que descontextualiza, que se presenta como una mera técnica para solucionar problemas, se enseña la mecánica de las mismas: forma de acomodar los números, de operar con ellos, de representar los resultados. De tal manera que el papel de los problemas tiende a seguir siendo el de la aplicación de las mecanizaciones (Block, *et. al.*, 1993).

Una vez enseñados los algoritmos, se intenta que tomen sentido a través de su aplicación en la resolución de problemas. Así en el proceso de "dar significado" a las técnicas matemáticas, una práctica común consiste en mostrar a los discentes la forma de aplicarlas mediante el uso de problemas modelo. En cuya redacción se usan palabras "clave" para relacionar la operación requerida con su contexto (se tienen cuatro bolsas con 5 dulces cada una y se quiere saber el total de dulces); la pregunta también contiene palabras que sugieren la operación (¿Cuántos dulces se juntan en total?) (¿Cuánto es 4 veces 5?) (Block, *et. al.*, 1993).

De igual forma y concierta frecuencia, los problemas que siguen al primero que se planteó tienden a ser de igual tipo, variando únicamente el tamaño de los números y mínimamente el contexto y la dificultad para operarlos (de llevar o no y con o sin ceros intermedios); no así la estructura.

Los alumnos aprenden a identificar ciertos términos con una operación determinada (cuando se dice se quitó o perdió, la operación implica restar; cuando dice repartió, implica una división; al decir tantas veces, la operación a realizar, será una multiplicación), sin que ello signifique que se logre establecer una relación entre la trama y la operación a utilizar. De hecho dicha asociación es temporal, mientras se trabajan problemas de la misma familia, pero se pierde cuando se deja de tener el referente.

A decir de Saiz (1994), en esas actividades, los errores y dificultades de los niños son fácilmente identificables y dan pauta para trabajar más ejercicios, al dar por entendido que los alumnos: no entendieron el algoritmo, no acomodan los números correctamente, no multiplicaron bien o bien, se les olvidó el número "que se lleva".

Con cierta frecuencia es posible observar que cuando el maestro deja de dirigir las actividades, da inicio la manifestación de múltiples dificultades al intentar resolver las operaciones, ya que es en ese momento, cuando el alumno se enfrenta a la disyuntiva entre el uso de una operación u otra y la responsabilidad de usar los saberes aprendidos.

3.4.1. Riesgos inherentes al uso del algoritmo

El fracaso de los alumnos en el aprendizaje de los algoritmos y su utilización en la resolución de problemas se manifiesta a través de distintos tipos de error.

- Alterar un algoritmo.

Dado que una técnica enseñada constituye para los alumnos una sucesión de pasos, a veces sin un sentido claro, es fácil cambiar un paso por otro (sumar de izquierda a derecha, restar siempre la cifra menor a la mayor, aunque la primera se encuentre en el minuendo), o bien omitir alguno (no sumar los números que "se llevan ", omitir un cero) (Saiz, 1994).

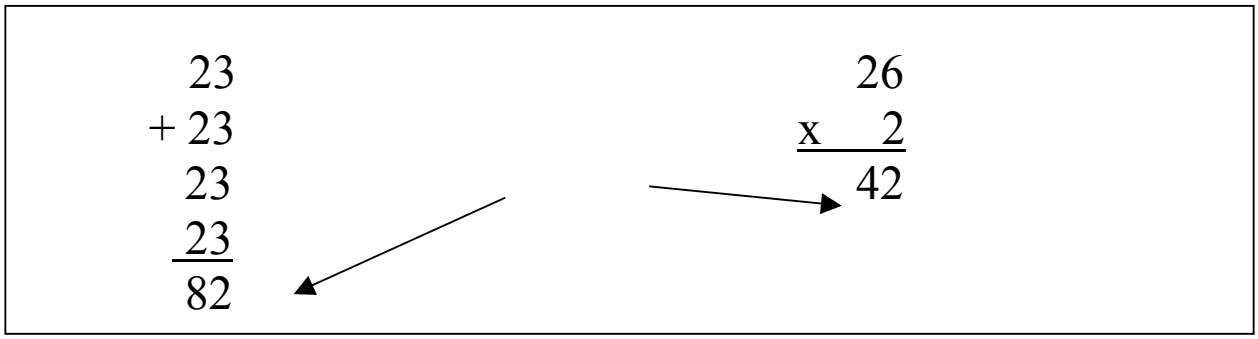


Fig. 12 La falta de un cálculo que aproxime al resultado puede generar un error por no prever ni controlar un resultado.

Al aplicar un algoritmo sin considerar el contexto del problema, no se puede observar la factibilidad de un resultado. Por ejemplo, si al multiplicar 13 x 6 un niño toma de manera independiente las unidades y las decenas del número 13 y obtiene 618 como resultado, no se percata de que el resultado es incorrecto. Pero si se le pregunta si es posible que al juntar 6 bolsas de dulces con 13 cada una se puedan tener 618, con seguridad dirá que no (Gómez-Granel, 1995).

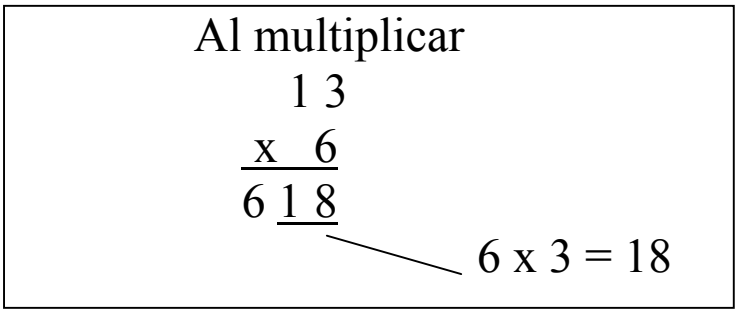


Fig.13. En ocasiones el estudiante anota de manera sistemática sin reflexionar

Seleccionar la operación equivocada.

Cuando transcurre el tiempo de la clase en la cual se enseñó la operación en juego para resolver un problema modelo, cuando se plantean problemas con términos distintos a los que se usaron como "pistas", y sobre todo cuando se usan otras estructuras semánticas para una misma operación, algunos alumnos no logran seleccionar la operación que se debe aplicar y con frecuencia escogen una al azar para no dejar de dar respuesta al problema planteado.

N°	x 2	x 3	+ 5
2	4	6	10

Fig.14.El niño repite el proceso sin analizar la situación planteada

Estos y otros errores constituyen algunas de las manifestaciones que hacen ver a los maestros que "algo anda mal" y con frecuencia lo atribuyen a la falta de razonamiento de los niños (Block *et. al*., 1993).

En las sesiones de trabajo es posible encontrar la muleta o ayuda proporcionada por el maestro, misma que al no hacer presencia ocasiona silencios e intentos de adivinar, lo que causa que el maestro ponga preguntas más fáciles o insinuando las respuesta, de esta forma, los conocimientos que los alumnos debían poner en juego tienden a desaparecer (Brousseau, 1993).

Cuantas veces cabe...? →	División
Si le quitamos...! →	Resta
Si le agregamos...! →	Suma
Tantas.. con...cada una...! →	Multiplicación

Fig.15 Muletillas que permiten al educando identificar la operación a realizar.

A continuación señalaremos otros de los riesgos inherentes a la aplicación de los algoritmos.

1. - Aceptación ciega del resultado: Su confiabilidad ante una correcta realización conduce a una aceptación ciega del resultado, dándolo por correcto, por lo que sería recomendable que los estudiantes verificaran sus resultados una segunda vez.

$$\begin{array}{r} 34 \\ \underline{\times\ 6} \\ 184 \end{array}$$

Fig.16. La operación realizada corresponde a 6 x 4 y 6 x 3, no así a 6 x 34.

2. - Aplicación recelosa: En su aplicación amplia existe una tendencia por aplicar los algoritmos de manera desmedida cuando un resultado podría ser aplicado de manera mental.

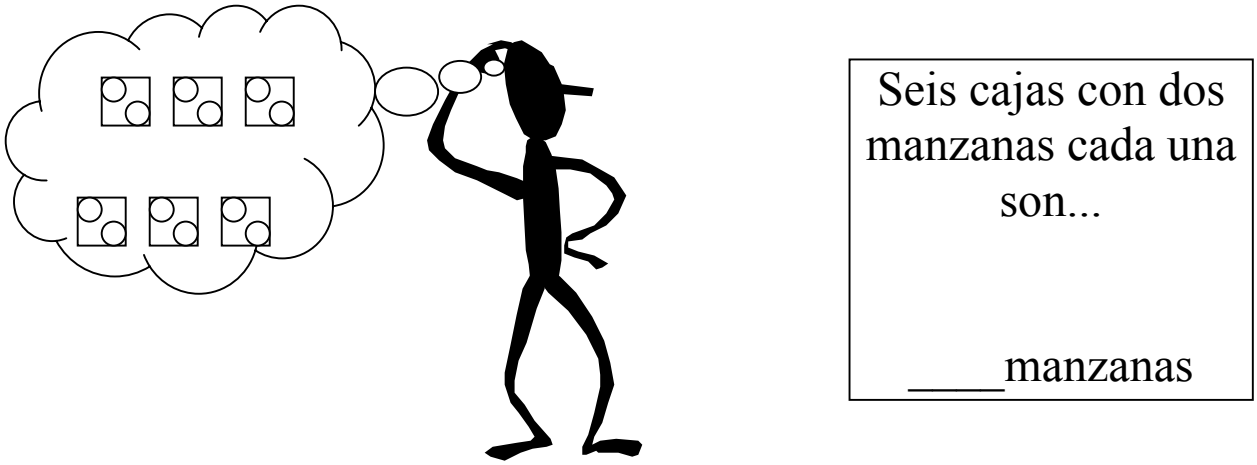


Fig.17 El uso del algoritmo no debe sustituir al razonamiento.

3. - Una creencia de que el algoritmo entrena la mente: No existe evidencia de que al ejercitar el algoritmo se entrene a la mente; por lo contrario el abuso en el ejercicio aleja a los estudiantes de las matemáticas.

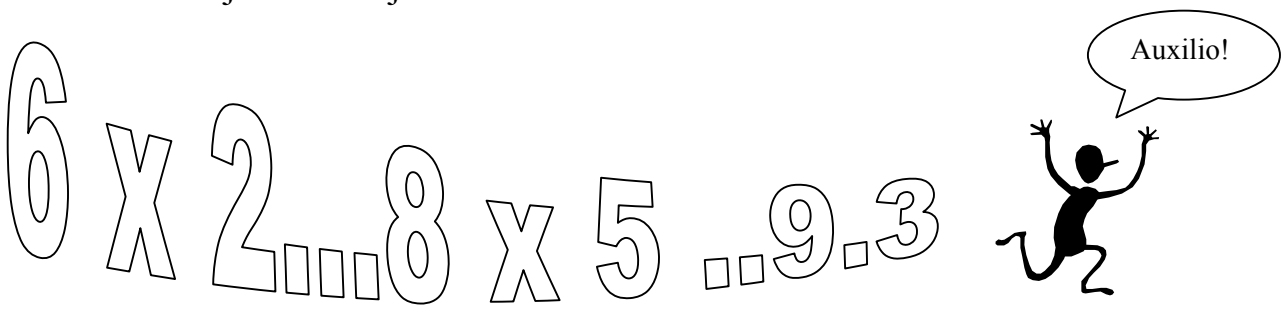


Fig.18 La repetición excesiva podría provocar fastidio en los alumnos

4. – Impotencia, cuando la tecnología para trabajar el algoritmo no está disponible: Cuando sólo hay papel y lápiz, y no se cuenta con una computadora o con una calculadora de bolsillo, el manejo del algoritmo puede ser un problema al no poder ejercerlo sin el material acostumbrado o cuando no se cuenta con el material habitual requerido.

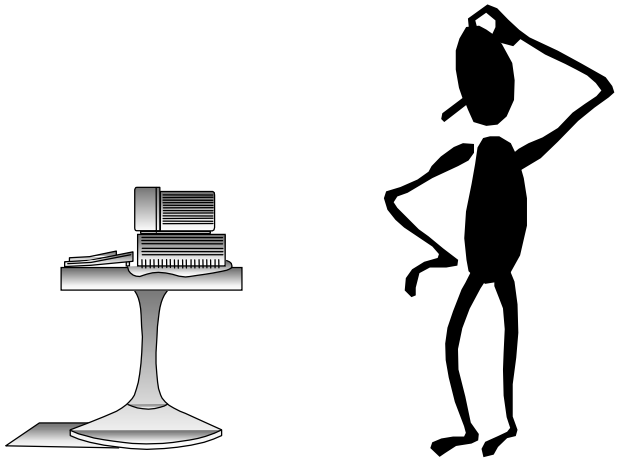


Fig.19 La dependencia creada por el uso de la tecnología en el trabajo con los algoritmos puede generar nuevos problemas al educando, cuando no cuenta con los equipos habituales de trabajo.

Brousseau (1993), señala que el algoritmo "constituye un instrumento de liberación y de solución a los conflictos didácticos, en el sentido en que permite momentáneamente una clara división de las responsabilidades. El maestro muestra el algoritmo, el alumno lo aprende y lo aplica correctamente: si no es así debe ejercitarse, pero su incertidumbre es casi nula. Se afirma que ante situaciones diferentes, existe una gran posibilidad que, el algoritmo de una solución correcta".

Sin embargo, el aprendizaje mecánico del uso del algoritmo puede ser desagradable para el niño e incluso "poco significativo". En cambio, la participación de los niños mediando con actividades lúdicas tiende a darse con mayor apertura y disposición, dejando de ver el trabajo realizado en el aula como una actividad obligada, lo cual podría resultar en volverse más participativos.

Tal vez los niños, al enfrentarse a diferentes ejercicios relacionados con una multiplicación, mientras más se vean con libertad para retomar alguna estrategia propia y dejar de lado el uso del algoritmo convencional, sus comentarios y respuestas estén más basados en la comprensión del problema, que en la aplicación de una operación mecanizada. Con ello quizás, sería posible lograr que los alumnos llegaran a tener una mejor comprensión de la multiplicación y en su momento de su algoritmo.

Las observaciones que nosotros pretendemos realizar en torno del aprendizaje de la multiplicación, posiblemente nos permitan decir que con ciertas situaciones los pequeños tienen una participación más dinámica, con menor sentimiento de presión sobre sus resultados y procedimientos y con la posibilidad de exponer sus propios argumentos. Tal vez dichos argumentos puedan basarse en la comprensión del planteamiento y no en la dinámica de un procedimiento preestablecido por el docente. Con ello, estaríamos dando cuenta de una construcción de las bases experienciales y matemáticas del algoritmo de manera más sólida.

Brousseau (1993), señala que el niño mantiene una relación directa con el juego, con la actividad lúdica y lo que ella implica; las reglas, los propósitos, y principalmente, lo que nos interesa, la idea de implementar una estrategia para lograr ganar; asumiendo las implicaciones en cuanto a la participación y toma de decisiones. Así en la medida en que el niño se vea involucrado con una actividad y asuma las relaciones de juego, esto le permitirá un desarrollo más productivo que el obtenido cuando se le dan instrucciones llanas sin un motivo que le invite a participar.

3.5. El Juego y el aprendizaje mediante el juego

3.5.1. El juego en el niño

En todos los tiempos, desde los más antiguos hasta los actuales, los niños han tenido la capacidad de jugar. Aunque los juegos no sean los mismos, los niños se las han ingeniado para jugar solos o con amigos, con juguetes o sin ellos. El juego es para los niños una necesidad, en él desarrollan no sólo la capacidad imaginativa, sino también un cúmulo de actividades corporales que influyen positivamente en su crecimiento. “El juego es tendencia, concurso y fuerza de instintos, base del desarrollo físico y mental del niño”, (Jiménez y Coria 1976).

Generalmente al ser mencionada la palabra juego, se piensa inmediatamente en una actividad agradable, lo que no ocurre al hacer referencia al trabajo. El trabajo, a diferencia del juego tiene un fin determinado, es realizado por la persona no sólo por que le guste, sino debido a una necesidad impuesta por la vida cotidiana. El juego no persigue un fin exterior, como el trabajo. La finalidad del juego es en sí mismo, es una actividad cuya finalidad es la recreación. Aunque se han citado diferencias entre juego y trabajo, con frecuencia se encuentran relacionados. Entre dichas relaciones tenemos el trabajo de los jugadores de béisbol profesional donde a la vez que realizan un juego obtienen

remuneración, puesto que es su trabajo. Así vemos como en un juego de fútbol los niños tienen que realizar un trabajo previo, el cual puede ser el acomodo de porterías y delinear el espacio en que ha de realizarse el juego.

La teoría psicogenética considera al juego como la expresión y la condición para el desarrollo del niño.

El juego cumple un rol esencial en la formación de la personalidad del niño como lo investigó Wallon y es de gran importancia para el desarrollo de la inteligencia, como lo demostró Piaget, (Zapata,1988).

Algunos pedagogos están de acuerdo en que la mejor situación para aprender, resulta ser aquella en donde la actividad es tan agradable y satisfactoria para el educando, que éste no la puede diferenciar del juego (*Ibíd*.).

De acuerdo con Zapata (1988), Piaget considera al juego como una actividad que permite la construcción del conocimiento en el niño, teniendo valor para el aprendizaje en cualquier etapa. Sin embargo, debido a la diferencia excluyente entre trabajo y juego, los maestros pierden con ello una herramienta didáctica esencial para el desarrollo de la infancia.

La psicología genética ha demostrado que el juego espontáneo de la infancia es el medio que posibilita que se ejercite la iniciativa y se desarrolle la inteligencia, en una situación donde los niños están naturalmente motivados por el juego (*Ibíd.*).

Los juegos de los niños persisten en la vida adulta, teniendo preferencia por los juegos con normas, a lo que Piaget llama: “ La actividad lúdica del ser socializado ”

Para ejemplificar lo anterior usaremos una evolución del juego de las canicas:

- ☞ De 2 –3 años, se observa una manipulación motriz sin secuencia en alguna de las reglas de juego.

- ☞ De 4 – 5 años los niños tratan de limitar las reglas del juego, pero su egocentrismo se presenta e impide seguirlas.

- ☞ De 7 – 8 años, los niños se vuelven más conscientes de las reglas que rigen el juego. Estas normas eran observadas como "sagradas e inmutables". Impuestas por los adultos o niños mayores.

- ☞ A los 10 años, se observa que dejan de ser sagradas las reglas impuestas por los adultos, para convertirse en acuerdos determinados por los niños que juegan.

De tal manera que las normas dependen de las costumbres locales y del acuerdo entre los jugadores y podrán modificarse a voluntad por medio del acuerdo mutuo.

Esto es, como se ha podido mostrar, el juego como medio socializador favorece el desarrollo del niño de la siguiente manera:

a) Le hace participativo;
b) Permite aflorar el espíritu de liderazgo;
c) Ayuda a ampliar y perfeccionar su lenguaje;
d) Le da la seguridad de pertenencia a un grupo al participar dentro del mismo, aprendiendo a respetar las reglas establecidas.

Por otro lado, de acuerdo con Piaget (citado por Zapata, 1988), resulta importante mencionar que el juego tiene las siguientes características:

1) Ayuda a desarrollar habilidades motrices.
2) Aporta experiencias de aprendizaje, y
3) Es un estabilizador emocional.

En conclusión, Piaget (citado por Zapata, 1988), en sus investigaciones brindó una concepción del juego y de lo que éste implica, en el desarrollo del niño.

Por último, podríamos señalar que si el juego es la actividad más importante para los niños, y siendo éste su medio de aprendizaje y socialización, cuando hablamos de la educación del niño, quizás sería necesario tomar en cuenta sus intereses lúdicos, ya que como ser social, éstos podrían manifestar los gustos, tendencias, valores, creencias y costumbres de la cultura del niño, es decir: su contexto social histórico.

3.5.2. El juego interactivo en el desarrollo infantil

"El juego es una parte importante en la vida de los niños y debe aprovecharse parea favorecer el aprendizaje. Todos los juegos exigen a los participantes, por una parte, conocer lar reglas y por otra construir estrategias para ganar sistemáticamente", (SEP, 1994).

De acuerdo con Carrasco (1998), Vygotsky considera al juego como una forma particular de acción y afirma que el individuo actúa movido por circunstancias articuladas con una sucesiva maduración de necesidades. Afirma que el juego se presenta como actividad en la cual el niño se desarrolla y aprende.

El mismo autor señala que considerar al placer como una característica definitoria del juego es una definición incorrecta, porque existen otras actividades que pueden proporcionar al pequeño mayor placer, además existe juegos en los que la actividad no es placentera en sí misma.

Las necesidades del niño, así como los incentivos que lo mueven a actuar, marcan su progreso de un estadio evolutivo a otro, porque todo avance esta relacionado con un profundo cambio respecto a los estímulos, inclinaciones e incentivos. De tal forma que no podemos ignorar el hecho de que el niño satisface ciertas necesidades a través del juego (*Ibíd*).

El desarrollo del juego con reglas comienza al final del periodo preescolar y se extiende a lo largo de la edad escolar. El juego que comporta una situación imaginaria, es de hecho, el juego provisto de reglas. La situación imaginaria de cualquier tipo de juego contiene ya en sí ciertas reglas de conducta, aunque éstas no se formulen por adelantado.

El juego brinda al niño una nueva forma de deseo, le enseña a seleccionar sus deseos con un "Yo Ficticio", a asumir su papel en el juego y las reglas del mismo. De este modo se realizan en esta actividad los mayores logros del niño, logros que mañana se convertirán en su nivel básico de acción real y de moralidad (*Ibíd*).

La estricta subordinación a las reglas es imposible en la vida real; sin embargo, en el juego resulta factible, de este modo a través del juego se crea una zona de desarrollo próximo en el niño. Durante el mismo el niño está generalmente por encima de su edad promedio y de su conducta diaria.

En la relación juego-desarrollo, la acción se ubica en la esfera imaginativa, en una situación imaginaria, la creación de propósitos voluntarios y la forma de planes de vida reales aparecen a lo largo del juego.

Por su estructura psicológica, el juego hace deseada la actividad de la cual se toma plena conciencia, tal es el caso que del mismo juego se va a las formas superiores de la actividad humana: pensamiento abstracto, creatividad, imaginación y lenguaje, (Cabrera, 1995).

El juego influye desde temprana edad en el desarrollo de la orientación, el espacio y el tiempo, pues el niño aprende a distinguir la situación espacial de los objetos, aunque no está capacitado para establecer las relaciones espaciales entre ellos.

En un principio los pequeños estudian las direcciones del espacio en relación con su propio cuerpo como centro y punto de partida. Cuando es auxiliado por un adulto, aprende a distinguir nociones de espacio y tiempo. El niño asimila la idea de tránsito de tiempo con base en sus propias experiencias o acciones.

Algunas investigaciones nos advierten que los niños tienden a manifestar diversas formas cognitivas y sociales en sus juegos, en condiciones interiores y exteriores. Es por eso que de manera predecible podemos decir que los juegos internos se dan en un espacio reducido, como el aula, dándose de una forma constructiva. En cambio los juegos externos se caracterizan por ser juegos libres, (Carrasco, 1998).

Para contribuir al desarrollo educativo de los infantes, las oportunidades del juego interactivo, deben ser apropiadas y retadoras. Para que la participación del adulto sea apropiada y efectiva debe:

- ☞ Observar detenidamente para determinar los intereses y las destrezas de los niños.

- ☞ Unirse a jugar con los niños.

- ☞ Alejarse en el momento adecuado y observar nuevamente (*Ibíd*).

De acuerdo con Cabrera (1995), a través de la práctica ha sido posible percibir algunas causas que originan el que los padres de familia y los maestros no se involucren en los juegos de los educandos, las cuales se enumeran a continuación:

- El tiempo condiciona, se da prioridad a las actividades laborales del adulto y al tiempo de clase formal en el aula.

- Con cierta regularidad, para el adulto, el juego no es considerado como importante sino como perjudicial.

- Los adultos se avergüenzan de jugar con los pequeños.

- Existe una gran falta de interés para elaborar material para los juegos educativos.

3.5.3. El juego como recurso didáctico en la enseñanza de las matemáticas

A decir de Fuenlabrada *et. al*. (1991), a través de los juegos matemáticos los alumnos amplían sus conocimientos y desarrollan ciertas capacidades y habilidades básicas como son:

- Construir estrategias.

- Expresar y argumentar sus ideas.

- Realizar cuentas mentalmente para calcular resultados aproximados.

- Identificar y clasificar figuras geométricas.

En múltiples ocasiones los maestros preferimos proponer a los alumnos aquellos juegos que abordan los mismos contenidos temáticos que se están desarrollando en clase, sin embargo, esto no tiene que ser siempre así, por que los juegos, por la manera en que están diseñados, pueden jugarse prácticamente en cualquier momento, (Block *et. al.,* 1993).

Debemos tomar en cuenta, que cuando lo niños tratan de descubrir una estrategia para ganar un juego no se espera que la encuentre en un tiempo predeterminado, de hecho, es recomendable que lo jueguen mientras les resulte interesante.

Es frecuente que los juegos involucren varios contenidos temáticos, a fin de profundizar sobre ellos, o bien, favorezcan el desarrollo de ciertas habilidades matemáticas importantes como el cálculo mental, la estimación

de magnitudes, la memorización de las relaciones aritméticas de los primeros números que se requieren en la operatoria con los números grandes, el desarrollo de la percepción geométrica (*Ibíd*.).

En el desarrollo de los juegos, el papel del maestro se reduce prácticamente a explicar las reglas del juego y observar, sin embargo, mientras los niños juegan deberá señalar si es necesario alguna regla que no fue interpretada correctamente, plantear nuevos obstáculos a los niños que terminan rápido y confrontar los hallazgos de los niños (*Ibíd*.).

El juego interactivo no solo significa avances en la creatividad, sino también en la situación de otras perspectivas en el desarrollo y riqueza del lenguaje, así como en el logro de la cooperación y el control de los impulsos, (Cabrera, 1995).

Se debe reconocer que dentro de la situación educativa el juego es un auténtico medio de aprendizaje y además permite que el docente adquiera conocimientos sobre los niños y sus necesidades. En el contexto escolar esto significa que debemos tener la capacidad de analizar en qué niveles de aprendizaje se encuentran los alumnos, lo cual indica el punto de partida para la promoción de nuevos aprendizajes cognoscitivos y afectivo-sociales (*Ibíd*.).

3.5.4. El juego es vital para el desarrollo infantil

Para la teoría psicogenética, el desarrollo de un individuo consiste en la construcción de estructuras progresivamente más equilibradas; o sea, que el sujeto logra un mayor grado de adaptación a su medio ambiente *(Ibíd.)*.

La teoría psicogenética considera al juego como condición y expresión del desarrollo infantil, cada etapa evolutiva está indisolublemente ligada a cierto tipo de juegos. Como lo podemos ver en el cuadro siguiente.

AUTORES	J.PIAGET	H.WALLOW	JUEGOS
Nacimiento		Vida intrauterina	
Mes 1 Mes 2 Mes 3	Periodo de los reflejos Primeras tendencias y primeras emociones (0-3 meses aprox.)	1er estadio impulsivo (0-6)meses aprox.)	
Mes 4 Mes 5 Mes 6 Mes 7 Mes 8 Mes 9 Mes 10	Periodo de Primeros Hábitos Motores y Primeras Percepciones organizadas (3-6 meses y 8-10 meses aprox.)	2º estadio emocional (6-10, 12 meses aprox.)	JUEGO EJERCICIO
Mes 11 Primer año Mes 13 Mes 14 Mes 15 Mes 16 Mes 17 Mes 18 Mes 19 Mes 20 Mes 21 Mes 22 Mes 23 2º Año	Periodo del lactante Periodo de la Inteligencia Sensorio. Motriz o Práctica. (8-10 meses a 1.5-2 años aprox.)	3º Estadio Sensorio-Motor. (1 año a 3 años aprox.)	
3er. Año 4º Año 5º Año 6º Año 7º Año	Periodo de la inteligencia intuitiva o periodo representativo pre-operatorio. (2-7 años aprox.)	Estadio de las personalidades intercambiables (transición entre 3º y 4º estadio). 4º. Estadio Personalista. (3-6 años aprox.)	JUEGO SIMBÓLICO
8º Año 9º Año 10º Año 11º Año	Periodo de las Operaciones Concretas (7-11,12 años aprox..)	5º Estadio de la edad escolar (6-11,12 años aprox.)	JUEGO REGLADO
12º Año Adolescencia	Periodo de las Operaciones Intelectuales Formales (11-12 años en adelante)	6º. Pubertad Adolescencia (11-12 años en adelante)	DEPORTES

Fig.20 Cuadro comparativo de las etapas del juego y el desarrollo infantil, Cabrera (1995).

El juego es función, estímulo y formación del desarrollo infantil; por que para el niño es un instrumento de afirmación de sí mismo, que le permite

ejercitar sus capacidades físicas e intelectuales, pero también le ayuda a plantear y resolver sus problemas cotidianos de desarrollo y convivencia.

"El juego siempre se relaciona con la proeza presente, con él el niño conforma la base de la futura personalidad y a la vez, como también lo demostró Freud, es el mejor elemento de equilibrio psíquico en la infancia", (Cabrera, 1995).

A decir por Cabrera (1995), Piaget encuentra en los juegos infantiles tres tipos de estructuras, que permiten clasificarlos y caracterizarlos (el ejercicio, el símbolo y la regla).

3.5.5. El ejercicio, el símbolo y la regla.

Aunque no utilizaremos en nuestro análisis la relación del juego respecto del ejercicio o actividad física, se trata este aspecto en el párrafo siguiente a fin de dar cuenta de una revisión exhaustiva acerca de las diferentes relaciones con el juego, la utilización de reglas y la adopción de estrategias para ganar.

A decir por Cabrera (1995), la diferencia entre el juego y el acto intelectual está en su finalidad. Mientras el acto intelectual busca un objetivo externo, el juego, por el contrario tiene un fin en sí mismo. Los esquemas sensoriales y motores se ejercitan sin otro fin que el placer (tocar, oler, correr, etc.).

Los juegos ejercicio.

El niño se ejercita por el placer lúdico que se genera. Siempre que se tiene contacto con un material nuevo: juegos o juguetes educativos, bloques, cubos, sistemas para ensartar, etc., tienen lugar los juegos ejercicios.

En la etapa escolar, el juego ejercicio se puede realizar por medio de la técnica didáctica denominada formas jugadas. Su característica principal es que el niño lo hace por placer motor: correr, saltar, lanzar, patear, trepar, arrastrarse y gatear, etc. Abarca toda acción que el ser humano incorpora naturalmente y qué más tarde realiza en su vida cotidiana en el trabajo o el deporte; mismos que ya no son juegos en el sentido estricto, pero que gracias al sentido didáctico que da el profesor brindan alegría y juego *(Ibíd.)*.

Los juegos ejercicio tienden hacia tres alternativas: quizá se integren con la imaginación representativa y se transformen hacia el juego simbólico; o se socialicen y entonces se orienten hacia los juegos reglados y la tercera posibilidad es que deriven hacia la inteligencia práctica, permitan adaptaciones reales y se excluyan en los dominios del juego.

Juegos simbólicos.

El niño imita acciones modelo como si fueran sus propias acciones; imita las respuestas que ya percibió o que puede oír y ver. Poco a poco, puede reproducir un modelo ausente, por medio de la memoria, Piaget lo llama imitación diferida, (Cabrera, 1995).

El juego reglado.

Es la actividad lúdica de los seres socializados e incorpora en su estructura al juego ejercicio y al juego simbólico. El juego reglado es la culminación de los procesos lúdicos y se consolida progresivamente durante el periodo del pensamiento lógico concreto y logra su máxima expresión en el del pensamiento formal abstracto, este tipo de juego se continúa durante toda la vida en forma de deportes.

Por medio del juego el niño puede llegar a unificar dos necesidades que antes vivía como antagónicas: el beneficio personal y la socialización que impone el grupo. Ahora comprende que ambos se condicionan y que se puede lograr tanto o más beneficio de su conducta, cuanto más sociable sea su actitud.

Los juegos evolucionan por el aumento de reglas y por su cumplimiento de parte del niño, así como por una división del trabajo más especializada y con mayor diferenciación.

Por último, presentamos dos citas que mencionan la importancia de retomar el juego con relación al trabajo educativo.

"Desde hace muchos años, los pedagogos coinciden en que los niños pueden aprender a través del movimiento y del juego de una forma mucho más eficaz y agradable", (Fourestier, 1940).

"La educación por medio del juego, permite responder a una didáctica activa que privilegia la experiencia del niño, respetando sus auténticas necesidades e intereses, dentro de un contexto educativo que asume la

espontaneidad, la alegría infantil, el sentido de libertad y sus posibilidades de auto afirmación y que en lo grupal, recupera la cooperación y el equilibrio afectivo del niño en el grupo de pares", (Lagache cit. por Begler, 1979).

3.6. Matemática Realista y Tecnología.

Algunos investigadores han presentado interés por explorar alternativas para la enseñanza. Gravemeijer ,Van den Heuvel y Streefland (1990), de la escuela holandesa, han desarrollado un enfoque didáctico llamado "matemática realista", que consiste en trabajar las matemáticas a partir de situaciones de resolución de problemas. El principio fundamental es adaptar las situaciones de enseñanza a las estrategias informales de los alumnos en la resolución de problemas, propiciando la discusión e interacción entre los alumnos y llevarlo poco a poco al nivel de la abstracción.

Gravemeijer, *et. al.* (1990), En su trabajo plantean problemas y describen someramente algunos de los procedimientos informales de los alumnos y proporcionan también sugerencias para favorecer su evolución. Se espera que el maestro pueda desarrollar actividades similares para conducir a los alumnos a formalizar ciertos conocimientos matemáticos.

3.6.1. Matemáticas, tecnología y realidad.

Es muy importante que los alumnos aprendan a usar diferentes aparatos en tiempos cortos y transferir sus conocimientos a diversas situaciones y contextos.

En la actualidad nos encontramos con que en países como Estados Unidos, Canadá y recientemente en México, se recomienda explícitamente la resolución de problemas como actividad central en el estudio de las matemáticas *(Ibíd.)*.

Los cursos de matemáticas se ven como un medio para presentar resultados y métodos ya establecidos, sin embargo es más importante ayudar a los estudiantes a que desarrollen herramientas no sólo para entender contenidos matemáticos, sino para que ellos mismos participen en la actividad de desarrollar matemáticas. Con esta idea, la concepción del curriculum ya no se centra en la selección de contenidos; sino en actividades o tendencias del pensamiento matemático que ayuden a los estudiantes a incursionar y

experimentar el quehacer matemático, independientemente del contenido particular.

El desarrollo de la tecnología ha estado transformando las relaciones en aspectos tan importantes como la industria, los negocios y las ciencias.

El papel de las instituciones educativas en la era industrial se centraba en dos aspectos: preparar a los estudiantes para trabajar en el campo, la industria o talleres y desarrollar una serie de habilidades que incluían la lectura, la escritura y la aritmética. La realidad del trabajador actual ya no se reduce a desarrollar una rutina, sino responder constantemente a cambios en líneas de producción y diseño.

Algunas fuentes de trabajo requieren que el empleado coordine actividades, proponga métodos de solución, tome decisiones y comunique resultados.

De acuerdo con Wenzelburger (1992), la resolución de problemas debe ser un aspecto central en el aprendizaje de los estudiantes ya que al resolver problemas desarrollarán habilidades y estrategias que le permitan proponer y examinar conjeturas, usar estrategias cognitivas, evaluar constantemente el proceso de solución, y desarrollar activamente nuevos conocimientos dentro y fuera de las instituciones educativas.

"Durante el estudio de las matemáticas el alumno mostrará un razonamiento (no algorítmico), pues no existe un camino determinado que garantice la solución de un problema; se tiende a generar soluciones múltiples, se analizan sus consistencias y contradicciones y el mismo estudiante toma decisiones importantes tanto para seleccionar la estrategia, o avanzar en la implementación y uso de recursos", (Wenzelburger, 1992).

El desfase existente entre el aprendizaje de un cierto conocimiento y sus usos pueden ser producto de las prácticas y estructuras tradicionales del sistema educativo.

Se puede afirmar que las situaciones o vivencias cotidianas pueden coproducir conocimiento a través de la actividad realizada en la cotidianeidad; así la actividad diaria, los conceptos del sujeto y la cultura del mismo están totalmente interconectados.

Si los estudiantes tienen la oportunidad de observar y practicar las actividades que muestran los miembros de una cultura matemática, entonces entrarán en contacto con las diversas formas de utilizar el

lenguaje, podrán imitar el comportamiento de los expertos de la disciplina, y comenzarán gradualmente a actuar de acuerdo con las normas, (Wenzelburger, 1992).
La idea de relacionar el campo laboral con el desarrollo de la educación y ligado a competencias se basa en ayudar al estudiante a asimilar las prácticas del experto.

Wenzelburger (1992), presenta un cuadro resultante de las investigaciones de Brown, Collins, y Duguid (1989), donde éstos comparan las actividades que realizan los estudiantes, la gente común y los expertos durante la fase de aprender o resolver algún problema.

	Gente común	Estudiantes	Expertos
Razonan con	Eventos causales	Leyes	Modelos causales
Actúan sobre	Situaciones	Símbolos	Situaciones conceptuales
Resuelven o interactúan con	Problemas emergentes y dilemas	Problemas bien definidos	Problemas mal definidos
Intentar producir	Un significado negociable y un entendimiento socialmente construido	Un significado fijo y conceptos inmutables	Un significado negociable y un entendimiento socialmente construido

Fig. 21 Se observa que existe gran similitud entre las actividades emprendidas por la gente común y los expertos, lo cual implica que ello podría ser más apropiado en la enseñanza escolar .

Así el aprendizaje de la matemáticas u otra ciencia puede verse como una práctica que se desarrolla dentro de una comunidad en constante interacción. Además debe desarrollarse la disposición de los estudiantes a realizar actividades que incluyan la formulación y evaluación de preguntas, problemas, conjeturas, argumentos y explicaciones, con aspectos de una práctica social, así como la de encontrar el sentido de las ideas matemáticas y las conexiones entre ellas.

A decir de Polya (1945), en el estudio de las matemáticas y otros campos es necesario que el estudiante represente la información de algún concepto o problema, que reformule el problema o recurra a problemas similares para avanzar propuestas de solución; que use tablas o diagramas, o que descomponga el problema en casos más simples. Estas estrategias no son solamente importantes en la fase de entendimiento del problema, sino también en el diseño de un plan de ataque y su implantación.

Entonces, resulta importante tener en cuenta que:

- Las experiencias en el salón de clases deben considerar tanto la historia individual del estudiante como el ambiente cultural de donde proviene (experiencias previas).

- El aprendizaje ocurre en el contexto de un proyecto amplio que interese al estudiante.

- El aprendizaje se da dentro de un contexto de cooperación.

Así, resulta sustantivo el hecho de aprovechar cualquier aportación para mejorar la instrucción matemática, a fin de mejorar los resultados de su enseñanza; por ejemplo: Polya (1945), introduce al campo del aprendizaje de las matemáticas dos componentes:

1.- Trabajo con problemas matemáticos: Lo que implica que es importante entender los problemas y que lo que requiere el estudiante es diseñar un plan de solución, implantarlo, haciendo una visión retrospectiva para evaluar no sólo resultados sino además de éstos los procesos.

2.- La importancia de la aplicación de métodos heurísticos en la resolución de problemas: Como son el uso de diagramas, tablas u otras representaciones, o el descomponer un problema en partes más simples, empleando casos particulares, y buscando patrones.

El mismo Polya (1945), señala que los problemas deben concebirse como puntos de partida para buscar generalizaciones o especializaciones, establecer conexiones entre otros dominios matemáticos, y formular nuevos problemas; poniendo atención no sólo a los resultados sino también a las explicaciones de cómo surgen y el porque.

3.7. Prácticas basadas en la experiencia del docente

3.7.1. Experiencia del maestro como alumno

Es importante el reconocer que los docentes presentan cierta disposición o resistencia hacia el cambio en la forma de realizar sus prácticas, situación que podría ser un indicador del ¿por qué? habiendo recomendaciones basadas en estudios, estas no se aplican, lo cual expondremos a continuación:

Peltier (1998), señala que existen vínculos y rupturas entre las concepciones teóricas de los estudiantes normalistas y las decisiones que toman en las clases de matemáticas durante sus prácticas como profesores de escuela.

Hablando de representaciones, según Abric (citado por Peltier 1998), éstas son un sistema coherente y jerarquizado, organizado alrededor del núcleo de imágenes. La representación es una visión del mundo y permite al sujeto comprender la realidad a través de su propio sistema de referencia, y desarrollar una actividad de asimilación y de apropiación de esta realidad.

Así, cualquier transformación de uno de los elementos de la relación sujeto-entorno trae consigo una transformación de la representación, en el sentido del restablecimiento del equilibrio así comprometido. Por esto cualquier transformación de la representación se referirá prioritariamente a la transformación de los elementos periféricos, sin que el núcleo central sea puesto nuevamente en cuestión; ya que, volver a poner en tela de juicio al núcleo central traería una transformación completa de todo el sistema, un trastrocamiento completo del universo de opiniones del sujeto.

La transformación real y efectiva de una representación sólo operará cuando los elementos del núcleo central sean los que vuelvan a ponerse en tela de juicio y no puedan mantenerse.

"El grado de desestabilización será el que permita la modificación de esquemas preconcebidos y su aceptación o rechazo; así los estudiantes normalistas que piensan en la formación en términos de acompañamiento buscan reproducir el modelo del maestro de prácticas o del titular de la clase donde las realizan. No ponen en tela de juicio sus propias concepciones de la enseñanza. Para ellos, sólo practicar es formador", (Peltier 1998).

Los estudiantes normalistas que no sólo esperan mucho de la formación, sino que además están preparados para "jugar el juego", no dudan al intentar poner en práctica la pedagogía aprendida en el IUFM (Institutos Universitarios de Formación de Maestros de Francia)", (*Ibíd.*).

Las diferencias al nivel de práctica de clase según parece están ligadas, entonces, a por los menos dos factores: al nivel de dominio en matemáticas del estudiante y al tipo de clase en la que se desarrolla la práctica.

Es importante el señalar que las cuestiones de gestión de grupo y de mantenimiento del orden se vuelven prioritarias, Entonces muchos estudiantes eligen aplicar una pedagogía "ultratradicional".

En el discurso los practicantes han abandonado el concepto tradicional. Pero en realidad, el impacto de la formación sobre las concepciones "ocultas" de los estudiantes normalistas es menor, (Peltier 1998). Con frecuencia los docentes reproducen una forma de enseñanza relativamente poco alejada de la que vivieron cuando ellos eran niños.

De acuerdo con Peltier (1998), Brousseau desarrolla la tesis según la cual los conocimientos se construyen unos contra otros, de los cuales los constitutivos del conocimiento representan el papel de obstáculos. Así, una de las finalidades de la didáctica es intentar crear situaciones que permitan al niño enfrentarse a estos obstáculos para superarlos.

Un gran número de practicantes duda en aplicar las formas de enseñanza que les son propuestas, debido a la "comodidad" del equilibrio en las estructuras y paradigmas que poseen o posiblemente por la falta de dominio de la disciplina a enseñar, por la insuficiente duración de la formación o la legitimidad del discurso, donde sus profesores no están verdaderamente seguros sobre la necesidad de transmitir la didáctica y transmiten más herramientas para el análisis, que herramientas para su enseñanza, (Peltier, 1998).

3.7.2. Concepciones sobre la enseñanza ligadas a la conducta

Robert y Robinet (1989), afirman que existe una relación directa entre las concepciones que mantienen los profesores sobre matemáticas y la manera de aprenderlas (y de hacer que sus alumnos las aprendan).

Por lo anterior es posible percibir la existencia de "malentendidos" los cuales parecen ubicarse en el nivel de concepciones, mismas que al ser bastante estables ofrecen resistencia a ciertos cambios, por lo que podemos decir que corresponden algunas veces a convicciones[1], probablemente reforzadas por el simple hecho de ser compartidas por muchos enseñantes, y por la precariedad de la situación en que se encuentran los que van contra la corriente.

[1] Por convicciones las autoras Robert y Robinet entienden: "Las concepciones eventualmente implícitas no percibidas como respuestas a preguntas pero sobre todo admitidas sin que haya conciencia del fenómeno o sin que puedan ser argumentadas"

Así lo que es convicción para uno puede ser "representación" argumentada para otro. Donde la representación es el producto y el proceso de una actividad mental por la cual un individuo o un grupo de individuos reconstituye la realidad a la que es confrontado y le atribuye una significación específica (*Ibíd*).

Toda representación está constituida de tres elementos fundamentales: un nudo central, un conjunto de informaciones, de actitudes y creencias organizado alrededor de ese nudo central, y un sistema de categorización, (Abric cit. por Robert y Robinet, 1989).

Según Robert y Robinet (1989), se pueden distinguir dos dimensiones fundamentales en ese nudo central:

Una dimensión funcional; que, si es preponderante, privilegia la representación de los elementos directamente percibidos como pertinentes para la eficacia de la acción

Una dimensión normativa; susceptible de privilegiar juicios, estereotipos, opiniones admitidas por el sujeto o grupo de sujetos en el que se inserta.

Entonces, la función central de la categorización es permitir el descubrimiento, la comprensión y la organización de la realidad. La primera función de la categorización es la reducción; misma que permite una sistematización del ambiente.

En la medida en que las representaciones son estados organizados, estables y relativamente equilibrados, toda transformación de uno de los elementos de la relación sujeto-ambiente entraña una transformación de la representación en el sentido de restablecimiento del equilibrio así comprometido.

Robert y Robinet (1989), plantean las siguientes entradas para analizar las representaciones docentes a través de sus declaraciones:

Entradas Epistemológicas. Por ejemplo. ¿De qué conocimiento se está hablando?, ¿Qué matemática se quiere se quiere transmitir a los niños?.

Entrada pedagógica. ¿Cómo se puede lograr que los alumnos aprendan matemática?.

Entrada psico-afectiva. Respuesta en las que es evocada la motivación, el gusto, el desagrado por parte de los niños y la relación con el profesor.

Entrada Psicológica. Respuestas que evocan la atención, la reflexión, el rigor y las actitudes de los alumnos.

Entrada cognitiva. (Nivel individual), caracteriza las respuestas que evocan cómo se supone que los niños aprendan individualmente.

Entrada pedagógica. (Nivel general), respuestas que evocan una teoría general del aprendizaje, como por ejemplo el aprendizaje a través de la resolución de problemas.

Entrada social. Respuestas que evocan factores sociales, por ejemplo el origen social de los alumnos, o incluso el rol social del enseñante en relación con la selección social, o bien el hecho de que todo el mundo puede o no aprender.

Desde el punto de vista social, Robert y Robinet (1989), encontraron que hay dos tipos de concepciones sociales encontradas:

Los que sostienen que todo el mundo debe pasar la escuela, al menos en los tres primeros grados. Contra la que dice que un papel que la escuela cumple es el de la selección social.

A decir de las autoras, toda representación es parcialmente social; aún el profesor está sujeto a determinantes sociales muy fuertes, está solo en clase, es libre de decir lo que quiere y, sin embargo, muchísimas determinantes pesan sobre él.

Más allá de las determinantes percibidas, tales como programas, padres, administradores, alumnos, hay determinantes más sutiles como la apreciación que tienen los profesores de los estudiantes a quienes van a dar la clase durante el año, pero hay otras aún más ocultas: son las determinantes económicas y sociales que hacen suponer que no todos los alumnos pueden pasar la clase superior.

De esta forma las convicciones de los profesores basadas sobre implícitos tendrán muchas dificultades para ser quebrantadas.

Si se admite que es sobre el nudo central de las representaciones que hay que actuar, (particularmente en el momento de la formación) y si se admite

que ese nudo tiene un componente personal y social inaccesible para nosotros, no queda más que intervenir sobre los componentes epistemológico y pedagógico.

Existe pues por un lado una institucionalización de tipo didáctico después de la experiencia y por otro una prueba de lo que suponemos: que los estudiantes que han recibido una enseñanza "clásica" la mayor parte de las veces la reproducen.

Es indispensable que se dé un mayor énfasis a las experiencias significativas en matemáticas y se reproduzca la práctica repetida de algoritmos. Así es necesaria una reconceptualización de las prácticas y métodos tradicionales de enseñanza.

Se ha manejado el argumento de que materiales de calidad conducen a una práctica docente de calidad, sin embargo, la historia nos ha mostrado que el desfile de materiales educativos innovadores no cambia significativamente la práctica escolar.

Los conocimientos sobre contenidos y sobre contenidos pedagógicos de los docentes influencian la manera en que enseñan y evalúan los contenidos.

Manouchehri y Goodman (1998), reportan haber realizado algunas investigaciones que les han permitido hacer comparaciones entre maestros tradicionales y maestros innovadores, a saber:

- ☞ Detectaron que los profesores tradicionalistas ocupan un 60-70% del tiempo para exponer y discutir.

- ☞ También, que los profesores innovadores usan hojas de trabajo que incluyen problemas y ejercicios para tareas en casa como complemento.

- ☞ Las preguntas de los tradicionales son de respuestas dicotómicas sí/no, mientras los innovadores plantean porqués, qué-s, cómo-s y que-tal-si´s.

- ☞ Ante preguntas de los alumnos los tradicionales responden correctamente, en tanto que los innovadores plantean al grupo la pregunta y dan sugerencias en lugar de las respuestas correctas.

- ☞ Los tradicionales forman equipos al azar mientras que los innovadores seleccionan a los integrantes y deambulan por el grupo.

- ☞ Los tradicionales exponen el resultado final de problemas en tanto que los innovadores preguntan y cuestionan los procesos para la obtención de éstos.

- ☞ Los tradicionales exponen y repiten los mismos ejemplos, los innovadores alientan a nuevos ejemplos y piden explicaciones a los alumnos sobre lo que no entienden.

- ☞ Los tradicionales plantean toda la semana, siguiendo itinerarios; los innovadores toman los acontecimientos diarios de sus clases, modifican espontáneamente sus clases.

Manouchehri y Goodman (1998), señalan también, que los maestros familiarizados con las prácticas constructivistas de enseñanza muestran mayor entusiasmo sobre el uso de los materiales y la evaluación de su impacto sobre el aprendizaje de los alumnos.

Se observó que entre más experiencia tienen los maestros enseñando con prácticas tradicionales, más cuestionaban el valor y relevancia de los programas (*Ibíd*.).

Los maestros novatos cuya preparación puso énfasis en el enfoque constructivista, aceptan con toda confianza los materiales curriculares, les preocupa qué y cómo impartir la lección o la actividad del día siguiente. Sin embargo, están altamente comprometidos al uso de los materiales basados en estándares (*Ibíd*.).

Los maestros tradicionales tienden a adornar los salones con los materiales, mismos que resultan irrelevantes a los alumnos para su aprendizaje matemático. Los maestros cuyo ambiente de trabajo enfatiza en el aprendizaje activo y la filosofía constructivista utilizan el material persistentemente, con ansia por aprender formas alternativas de conducir investigaciones, formas en que los materiales son usados por otros maestros (*Ibíd*.).

La influencia de colegas escépticos y la presión que la administración escolar ejerce para aplicar test y evaluaciones estandarizadas, en ocasiones, obliga a los novatos a emplear las prácticas tradicionales.

Así el apoyo y liderazgo provisto por el coordinador de matemáticas o el director de la escuela impacta visiblemente en el trabajo y desarrollo de los novatos o con poca experiencia en el nivel de la escuela media (*Ibíd*.).

Uno de los mayores retos para los maestros lo representa la falta de tiempo suficiente para planear y organizar sus clases, pues cada vez es más evidente la necesidad de mayor tiempo para diseñar lecciones, conducir actividades en el aula, evaluar el avance de los alumnos, planear actividades adicionales, etc. Ante lo cual muchos maestros optan por no utilizar los materiales en clase o hacerlo, sólo ocasionalmente.

Asignar una calificación resulta un gran problema, mismo que no es objeto en la presente pero que en algún momento se debe abordar.

Haciendo un alto y rescatando un poco de lo referido, sería posible decir, que las actividades que se sugieren tienen por objetivo el que los niños:

- Utilicen los conocimientos para resolver problemas de manera creativa y flexible.

- Practique el cálculo mental.

- Sea capaz de explicar sus propias estrategias para resolver situaciones problemáticas.

- Exponga y verifique sus procedimientos y estrategias.

- Aprenda de manera más significativa y agradable.

Para ello, será determinante que los alumnos aprendan para qué sirven las multiplicaciones y qué tipo de situaciones es posible resolver con ellas.Y entre algunos de los problemas que será posible resolver con la multiplicación están los siguientes:

- Cálculo de áreas y volúmenes.

- Problemas sobre velocidad, tiempo y distancia.

- Problemas de proporcionalidad.

- Combinaciones (Total de parejas diferentes que se pueden hacer con los elementos de varios conjuntos)

- Problemas de cálculo de promedios, etc...

Actualmente se cuenta con las calculadoras que permiten dar menor importancia al aprendizaje de los procedimientos algorítmicos convencionales y la atención puede ser canalizada a la comprensión y desarrollo creativo del alumno para resolver las situaciones problemáticas.

De esta forma será necesario que los alumnos primero se enfrenten a situaciones problemáticas y posteriormente adquieran el conocimiento de los algoritmos convencionales.

Toda esta revisión acerca forma de pensar y de actuar del docente será aprovecharemos más tarde, en el análisis de las entrevistas que se llevaron a cabo con la maestra del grupo, al finalizar las sesiones del trabajo en observación.

3.8. La resolución de problemas matemáticos

3.8.1. Constructivismo y el papel de los problemas

La recuperación de algunos sentidos básicos de los conceptos que se enseñan en la escuela primaria exige un proceso de "recontextualización y repersonalización" de los conocimientos. Este es uno de los propósitos que caracterizan los estudios contemporáneos a nivel mundial en Didáctica de las Matemáticas, (Moreno y Waldegg, 1992).

Algunas corrientes se caracterizan por cuestionar que los problemas constituyan sólo la aplicación de los conocimientos previamente enseñados, y aquí, de manera explícita, se plantea una postura epistemológica bajo la cual el conocimiento no es algo externo al sujeto y susceptible de ser "comunicado", sino algo que el sujeto construye al interactuar con su medio. "El conocimiento desde la perspectiva constructivista, es siempre contextual y nunca separado del sujeto; en el proceso de conocer, el sujeto va asignando al objeto una serie de significados, cuya multiplicidad determina conceptualmente al objeto" (*Ibíd*.).

El conocimiento es construido en primer lugar como una herramienta, al principio se encuentra implícito, en la resolución de determinado tipo de problemas y no es sino más adelante, y a través de todo un proceso, que se hace explícito, se descontextualiza, se formaliza y se convierte así en objeto cultural (Douady, 1987). Así, bajo este enfoque los problemas constituyen el motor de la construcción de los conocimientos, por lo tanto se asume que

éstos se aprenden al resolver cierto tipo de problemas y no sólo para resolver cierto tipo de problemas.
De esta forma, si los alumnos deben construir su conocimiento al interactuar con su medio, un reto fundamental de la didáctica es la organización y el estudio de ese medio, "problematizador" y específico de cada conocimiento.

Así, el componente principal a retomar es el problema matemático con el que el alumno interactúa. Un problema que realmente constituya un obstáculo didáctico y que haga al educando actuar, reflexionar y evolucionar en sus procesos. Es necesario que los alumnos se enfrenten primero al problema y tomen decisiones, guiados por el deseo de llegar a la meta y no por la llana idea del contrato didáctico. Brousseau (1993), define el contrato como la relación de expectativas del maestro hacia el alumno y viceversa.

3.8.2. La resolución de problemas.

De acuerdo con el nuevo enfoque de las matemáticas en la escuela primaria en México, resulta indispensable que los estudiantes conozcan las estrategias que les permitirán dar solución a los diverso problemas, que se le presenten en el aprendizaje de las matemáticas, y también que desarrollen habilidades que les permitan identificar en qué situaciones utilizarlas. De acuerdo con Schoenfeld (1985), es importante que en el proceso de aprender matemáticas, el estudiante se desenvuelva en un medio similar al de los matemáticos, cuando trabajan con las ideas matemáticas. Es decir, aprender matemáticas, significa que el estudiante identifique, seleccione, y utilice las estrategias que comúnmente son usadas por los matemáticos al resolver problemas.

Existen evidencias, las cuales establecen que los estudiantes aprenden matemáticas sólo cuando construyen activamente sus conceptos. Lo cual expone que para que los estudiantes entiendan lo que aprenden, deben examinar, representar, transformar, resolver, aplicar, probar, y comunicar; en breve, interactuar e interrelacionarse con y por medio de los contenidos (*Ibíd*.).

Polya (1962), define "problema" como la necesidad de buscar conscientemente alguna acción apropiada para lograr una meta claramente concebida, pero que su alcance no es inmediato. Y para ello primeramente se debe: estar consciente de que existe una dificultad, también debe tener deseos de resolverla y no debe existir un camino inmediato para resolverlo.

En la resolución de problemas se requiere el desarrollo de habilidades de carácter estratégico las cuales implican tomar decisiones acerca de un plan para resolver el problema; Por el contrario, cuando el estudiante tiene acceso a un procedimiento rutinario, por lo general ya no implica el tomar decisiones estratégicas.

Santos (1996), señala algunas estrategias que pueden ser importantes en el proceso de entendimiento de un problema o para avanzar hacia su solución, a saber:

- Trabajar con problemas auxiliares
- Descomponer o combinar algunos elementos del problema
- Dibujar figuras
- Variar el problema
- Trabajar con casos específicos.

Al parecer no es suficiente que el alumno conozca las diversas estrategias sino que es importante que participe en experiencias relacionadas con el cuándo y cómo utilizarlas.

Schoenfeld (1985), ilustra que una estrategia heurística (de tanteos sucesivos) genera otras subestrategias que se aplican en diferente forma, de donde surge la necesidad de considerar submetas. Es decir, si no se puede resolver un problema, es aconsejable identificar algunas submetas que incluyan condiciones parciales.

3.8.3. La resolución de problemas y sus conexiones con otras áreas de conocimiento.

Un aspecto esencial en el entendimiento de cómo el individuo resuelve problemas, para los investigadores, ha sido el observar, codificar y analizar los procesos utilizados por los expertos de determinada área al resolver problemas.

Schoenfeld (1987), por su parte mencionó que para entender el proceso llevado a cabo por quienes resuelven problemas matemáticos y poder proponer líneas a seguir en la instrucción matemática, es importante la incorporación del conocimiento de los matemáticos, profesores de matemáticas, educadores, y especialistas de las ciencias cognitivas.

En cuanto a los matemáticos, para ellos es importante considerar la información acerca del tipo de estrategias que los estudiantes utilizan

inicialmente al resolver un problema, los cambios que ocurren durante el proceso de resolución, los aspectos metacognitivos, y la evaluación continua del proceso de solución.

A decir por Schoenfeld (1985), la resolución de problemas podría definirse de la siguiente manera:

- ☞ Los problemas deben ser analizados como un vehículo para lograr algunas metas curriculares.

- ☞ La resolución de problemas es considerada como una de tantas habilidades que deben estar presentes en el currículo y

- ☞ La resolución de problemas es vista como un arte en el sentido de simular la actividad matemática dentro del salón de clases.

Una de las tareas a realizar en el trabajo con la resolución de problemas en matemáticas, consiste en lograr que los profesores y alumnos analicen de manera crítica el trabajo con dicha resolución.

Como con frecuencia, las personas adoptan una estrategia propia para dar solución a las situaciones problemáticas, consideramos óptimo el socializarlas, propiciar una participación activa de toda la clase, y para ayudar a los estudiantes a explotar lo que ellos saben y usar sus conocimientos en forma efectiva se sugieren actividades como:

- Que el maestro resuelva periódicamente problemas nuevos,

- Mostrar videos de otros alumnos resolviendo problemas.(para criticar y evaluar)

- Que el maestro actúe como moderador mientras los estudiantes discuten problemas.

- Discutir con los estudiantes problemas que involucren el uso de varios métodos de solución o varias soluciones.

- Que los estudiantes participen el proceso de formular o rediseñar problemas.

Lograr la participación de los estudiantes, requiere de ayuda, por parte del profesor del grupo, para que con ella, desarrollen habilidades y estrategias

que usen en su estudio de las matemáticas, y el que logren hacerlo independientemente del maestro debe ser un objetivo esencial de la escuela.

El estudiante debe argumentar sus respuestas y tener en cuenta que "para aceptar algún argumento matemático, dicho argumento, debe inicialmente convencerle a sí mismo, debe convencer a un amigo y finalmente, convencer a un enemigo", Santos (1996).

He aquí el valor de las estrategias, habilidades y procesos, ya que éstos favorecen en el estudiante una forma flexible e independiente de pensar, por serle propias al haberlas establecido en su interacción con las situaciones problemáticas.

La discusión y presentación de las ideas entre los estudiantes y el maestro resultan ser ingredientes fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas.

Las discusiones, realizadas en grupos pequeños de estudiantes son muy recomendables, pues le permiten intervenir inmediatamente y son de pronta interacción. Situación que no es igual en los grupos numerosos, donde se interviene, en la mayoría de los casos, hasta que hay un producto terminado.

Las discusiones grupales, por su parte, permiten evaluar el potencial de varias alternativas así como la oportunidad de trabajar en colaboración y desarrollar estrategias para defender sus ideas matemáticas.

3.8.4. El papel del instructor en el salón de clase

En las clases cotidianamente encontramos al profesor que dirige la clase y proporciona los términos, definiciones y las fórmulas a seguir.

En el trabajo con la resolución de problemas Santos (1996), señala que la actitud del profesor debe ser diferente, ya de por sí, el tiempo que el profesor habla no se ve ni mucho menos alcanzado por lo que habla el grupo en su totalidad, luego es necesario que el estudiante tenga una mayor participación en la construcción de su propio conocimiento.

Así es necesario el señalar algunas de las formas en que el profesor debe participar el trabajo en la resolución de problemas:

- El profesor debe ayudar a los estudiantes a que acepten los retos de resolver problemas.

- Construir en la clase diaria, una atmósfera que dé confianza al estudiante.

- Permitir al estudiante, y motivarlo en la selección e implementación de sus propios caminos de solución.

A decir de Santos (1996), los estudiantes aprenden más efectivamente cuando el maestro pone atención explícitamente a las estrategias y al proceso que se muestra alrededor del problema.

3.8.5. Trabajo del estudiante con los problemas.

Durante el aprendizaje de las matemáticas los estudiantes tienen que desarrollar cierta disposición hacia el estudio de esta disciplina y hacia algunas de las ideas esenciales en el estudio de contenidos como en el tratamiento de problemas en general, el papel de las definiciones en matemáticas, la importancia del uso de las estrategias heurísticas y el papel de sus construcciones.

El papel de las definiciones en matemáticas

Es clásico el trabajo del estudiante con las definiciones, en donde se les enfrenta a la memorización de conceptos, que en la mayoría de los casos, no tienen un sentido claro para él, las definiciones son dadas por el profesor o el libro y podrían permanecer en él sin afectar, ni poner en crisis al niño.

Así, se pretende que con la resolución de problemas el alumno desarrolle habilidades y estrategias que le sean de utilidad y le permitan participar en el desarrollo de nuevas ideas matemáticas y también, puedan evaluar los alcances y limitaciones de las definiciones (*Ibíd*).

Es importante que las estrategias empleadas por el profesor, permitan al chico utilizar argumentos matemáticos y refinar las ideas existentes, que el estudiante se vea en la necesidad de establecer sus propios conceptos, y hacer que éstos se puedan manejar en un intercambio comunicativo, con el resto de la clase y el profesor, empleando los términos de manera que resulten claros y comprendan las reglas matemáticas necesarias para presentar argumentos sólidos.

Definir un rectángulo y cuadrado

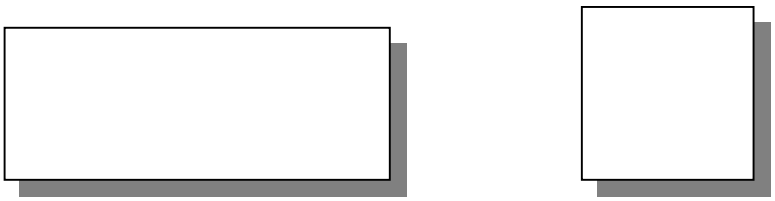


Fig. 22 Este tipo de tareas pretenden enriquecer el lenguaje matemático del estudiante, mediante el uso de explicaciones yargumentaciones.

Ante una definición el estudiante debe tomar en consideración que el conjunto de datos que se inserten, permita hacer, perfectamente claro, aquello a lo que se está refiriendo, descartando los elementos que puedan crear confusión, y agregando los que puedan hacer más detallada la descripción.

Uso de las estrategias heurísticas

Las Estrategias heurísticas, son las aproximaciones a la resolución de problemas mediante tanteos sucesivos. Éstas juegan un papel importante en la resolución de problemas. Schoenfeld (1985), remarca el papel que juegan en el proceso de resolución de los problemas.

Un aspecto importante en el trabajo con problemas es fomentar en el estudiante el trabajo con estrategias heurísticas, para que perciba que en ocasiones es posible el trabajo de un problema grande, seccionándolo u organizando pequeños problemas parciales que han de facilitar la solución del problema principal.

Schoenfeld (1985) , también señala que el establecer submetas o resultados parciales permite avanzar en la resolución de problemas.

Además de ilustrar el potencial del uso de varias heurísticas, un aspecto importante en el desarrollo de la clase es que los problemas pueden tener varias soluciones y resolver un problema es solamente el punto inicial del quehacer matemático.

3.8.6. Sugerencias en el trabajo con resolución de problemas

En el trabajo con problemas, Santos (1996), hace algunas recomendaciones que son de importancia y que pueden llevarnos a mejorar los resultados de aprendizaje con los estudiantes dentro de las matemáticas.

- ☞ El estudiante debe participar activamente en la construcción del conocimiento.

- ☞ Plantear preguntas que impliquen una búsqueda constante de conexiones entre los métodos de resolución y el contenido de los problemas.

- ☞ Participación de los estudiantes en grupos pequeños y de todo el grupo debe ser frecuente en el proceso de instrucción.

- ☞ Que los problemas de clase no puedan ser abordados en una sola sesión y se procure que los estudiantes, también los aborden fuera del aula.

- ☞ Es importante que el estudiante, reporte periódicamente, por escrito y verbalmente, los avances de sus intentos de solución.

- ☞ Que los estudiantes vivan en un ambiente similar al que viven los matemáticos al trabajar o desarrollar las ideas en esta disciplina.

3.8.7. La evaluación en la resolución de problemas.

Una preocupación importante en la resolución de problemas es la forma de evaluar el trabajo de los estudiantes, destacando de manera importante el proceso de la resolución y la forma de evaluarlo.

Las formas en que un estudiante puede resolver un problema son:

- Usar métodos algebraicos.

- Descomponer el problema en otros más simples.

- El uso de diagramas, tablas o gráficas.

- Transportar el problema a otro contexto (geométrico o numérico).

- Es importante que la evaluación del proceso proporcione información relacionada con las diversas actividades que el estudiante desarrolla al resolver el problema.

Para analizar e intentar evaluar el proceso utilizado por los estudiante, sería recomendable considerar los siguientes puntos:

- ☞ El entendimiento del problema, donde el estudiante debe mostrar que ha comprendido el problema, posiblemente expresarlo con sus propias palabras o resolverlo empleando diversos caminos y que juzgue cuándo es o no posible darle solución.

- ☞ La habilidad del estudiante para seleccionar y usar estrategias de solución, así como presentar un plan y llevarlo a cabo.

- ☞ Es importante el revisar los aspectos relacionados con lo razonable de la solución y la extensión del problema.

De acuerdo con (Davis, 1986 citado por Santos, 1996), la entrevista es una herramienta útil cuando se pretende evaluar y capturar la información de momentos identificados en el modelo de resolución. Esta puede variar en grado de profundidad y materiales proporcionados al estudiantado.

También señala que si pretendemos la obtención de información sustantiva de una entrevista, es recomendable considerar que los problemas a trabajar:

- Sean un reto, difíciles pero accesibles.

- Que demanden un plan y una reflexión.

- Que permitan diferentes métodos (estrategias) de solución.

- Que algunos incluyan varias soluciones.

- Que incluyan una variedad de procesos matemáticos y operaciones pero no en formas obvias o rutinarias.

- Que cuando los estudiantes las resuelvan, debe ser posible identificar los procesos y operaciones empleadas; así como, el plan para resolverlos y las estrategias empleadas.

Al seleccionar los problemas y realizar las entrevistas, el reporte de las cualidades mostradas por los estudiantes debe discutirse alrededor de los siguientes puntos:

- El nivel de desarrollo de las fases de entendimiento, diseño de un plan y su implantación, y de la visión retrospectiva.

- El tipo de estrategias utilizadas en la resolución del problema.

- La presencia de conceptos y procedimientos matemáticos.

- El tipo de control y automonitoreo mostrado por el estudiante al resolver el problema.

- La participación del entrevistador (tipo de intervenciones y efectos producidos en el trabajo del estudiante).

Finalmente debe reportarse si el estudiante obtuvo la respuesta correcta .

En el proceso de evaluación se pueden identificar algunos indicadores asociados con la solución del problema, el desarrollo de la solución, y con respecto a identificar las estrategias principales empleadas en cada solución Santos (1996).

Solución	Desarrollo	Estrategias usadas
Correctas Incorrectas Indeterminada En blanco	Completo Incompleto No requerido Sin conteo Sin desarrollo Sin unidades	Operaciones numéricas Uso del álgebra Lista sistemática, tabla o diagrama Ensayo y error Búsqueda de patrones Casos simples Indeterminada

Fig.23Indicadores identificables en la solución de problemas.

Los instrumentos pueden ser ajustados por el instructor de acuerdo a los tipos de problemas que considere en la evaluación (*Ibíd*).

Puntos	**Trabajo mostrado por los estudiantes**
0-1	Nada de trabajo o ideas sin relación
2 a 3	Identifica datos pero sin procedimiento alguno
4 a 5	Usa los datos pero la estrategia no es clara
	o es pobremente implementado
6 a 7	Introduce un plan apropiado pero este es incompleto
	en los cálculos o la respuesta es incorrecta
8 a 9	Existe un plan claro y apropiado pero hay un error
10	Solución completa y clara

Fig.24 Posible tabla de evaluación de la solución de problemas.

Resultaría importante que al presentar un problema se cuente con varias soluciones anticipadas para propiciar entender el trabajo de los estudiantes.

Santos (1996), presenta un concentrado sobre los métodos posibles a utilizar por el estudiante ante la resolución de problemas.

Método pictórico
Empleando dibujos , figuras o diagramas para solucionar el problema

Método de ensayo y error
Puede incluir varias direcciones de acuerdo con el tipo de ensayo que se seleccione.

- Por intercambio (entre los elementos del problemas)
- Por conteo (de las posibles referentes numéricas)
- Construcción de una tabla (anotando las diversas combinaciones)

Método de correspondencia
Con la interrelación de los datos proporcionados

Método semi-algebraico
Sin utilizar operaciones algebraicas de manera rutinaria

Método algebraico
Con operaciones rutinarias algebraicas

Método gráfico
Por medio del plano cartesiano

Fig.23 Tabla de las posibles métodos de solución empleadas en la resolución de problemas.

Otras recomendaciones importantes de Santos (1996), que se podrían considerar en el trabajo con la resolución de problemas son:

- La participación del estudiante en el diseño de problemas proyecto.
- La escritura de un diario personal, en el cual se anotaran las formas estratégicas de solucionar los problemas.
- Que el estudiante formule problemas dentro y fuera de la institución.
- Que se le dé un problema y en base al enunciado formule un problema similar y que lo resuelva.
- Se le proporcione una información incompleta, que la complete, formule un problema y lo resuelva.

- ☞ Que diseñe sus propios problemas.

- ☞ Se les den problemas con un exceso de información y se les pide que identifiquen y reestructuren el problema y lo resuelvan.

- ☞ Se procure un espacio dentro del aula para 2 o 3 problemas y que los estudiantes los resuelvan (puede ser en equipo) con espacios en clase para discusión.

- ☞ Se proporcione un problema resuelto (con error conceptual o de procedimiento) para que identifique el error y lo resuelva correctamente Santos (1996).

Otras recomendaciones que podrían servir para que los niños mejoren sus procedimientos para solucionar los problemas son:

- La resolución de problemas con cierta frecuencia.

- Formular ascendencia en grado de dificultad.

- Observar y difundir las estrategias que se van creando.

- Señalar aquellas formas de abreviar los procedimientos que surjan o sugerirlas.
- Fomentar el cálculo aproximado de los resultados.(Aproximaciones)

- Fomentar el trabajo en pareja o equipo.

- Presentar problemas semejantes a los "difíciles" con cantidades chicas y auxiliarse de dibujos o materiales.

- Propiciar la revisión en grupo y la identificación de aciertos y errores.

- Finalmente enseñar las formas más usuales simplemente como una más.

Con lo anterior se pretende que el niño implemente elementos que le hagan más eficiente su propia forma de dar solución a las situaciones problemáticas que se le presentan. Ya que al hacerlo de la manera tradicional se inhibe su creatividad, llegando a la elección de alguna de las operaciones básicas hasta ver cual se le califica como la correcta.

Situaciones no recomendables en el trabajo con la resolución de problemas:

- El uso de palabras clave, por que pueden condicionarlos y al no encontrarlas crear confusión y frustración.

- Dar situaciones "modelo".

- Exigir el modelo "Datos, operaciones y resultado".

- Aplicar situaciones completamente ajenas a su entorno.

- Emplear la memoria como vía de aprendizaje.

- Usar los problemas y multiplicaciones como forma de castigo *(Ibíd)*.

Características a considerar en el trabajo con situaciones problemáticas:

- Los problemas deben ser interesantes para el alumno: problemas cotidianos, de fantasía, y juego.

- Deben presentar un desafío, pero acorde a la edad.

- De presentarse varias veces el problemas debe tener cierta dificultad para que siga siendo interesante.

- Variar la presentación del problema:
  - Texto (tradicional).
  - Dibujo.
  - Gráfica.
  - Tabla de datos.
  - Material concreto, etc.

- Plantear problemas sin preguntas para que ellos las elaboren o definan las posibles interrogantes.

- Presentar problemas sin información completa, para que determinen cuándo cuentan con los elementos necesarios y cuándo no (*Ibíd*).

Resumen de capítulo

En este capítulo se hizo una reseña de los principales aspectos teóricos y empíricos que guiarán la investigación que en esta tesis se presenta. Se inicia con la presentación de algunos sistemas de numeración como el hindú arábigo, los algoritmos: egipcio y ruso, mismas que dan cuenta de una investigación amplia, vislumbrando una posible convergencia respecto del trabajo que realizan los niños al implementar sus propias estrategias.

Se paso a bosquejar los principales elementos teóricos que sustentarán nuestro análisis posterior a la actividad de los niños, la interacción grupal y la construcción cognitiva, también basada en la experiencia y en contextos culturalmente significativos para los alumnos.

También, se mencionan las dificultades y riesgos inherentes al trabajo con el algoritmo de la multiplicación, retomando algunas delas consideraciones respecto del juego en la enseñanza y su recomendación para ser utilizado como una estrategia didáctica.

Hacia finalizar el capítulo se presentan algunas de las consideraciones respecto del docente, su aprendizaje y las concepciones del mismo relacionadas con el propio ejercicio, aspectos que posteriormente se reflejarán en las entrevistas que realizamos al término de las sesiones a la maestra del grupo observado.

Finalmente exponemos el trabajo con la resolución de problemas como una de las posibles formas para llegar al conocimiento y dominio de la multiplicación, para lo cual tomamos en consideración algunas sugerencias técnicas y empíricas que sustanciarán la instrumentación del trabajo de campo que en esta tesis se realizó, (ver cap. IV y V.).

CAPÍTULO IV
ESTRATEGIA METODOLÓGICA DE INVESTIGACIÓN

4.1. Metodología
4.1.1. Reseña del trabajo de Jae-Meen

Un antecedente directo en cuanto a la metodología de investigación instrumentada en esta tesis es el trabajo de Jae-Meen (1998), en donde señala cómo los niños son capaces de inventar algoritmos para dar solución a problemas de la vida diaria, cómo los niños inicialmente modelan situaciones problemáticas empleando materiales concretos y cómo estos procesos tienden a volverse más sofisticados con la práctica.

El trabajo de investigación de Jae-Meen, (1998) está basado en la observación de clases de 3º a 5º grado donde los maestros impulsan a sus alumnos al desarrollo de algoritmos y a resolver problemas mediante diferentes formas.

En las clases observadas por Jae-Meen (1998), se proporcionaban problemas a los niños para que los resolvieran de manera individual o en grupos pequeños. Posteriormente los niños exponían los algoritmos inventados y discutían las similitudes y diferencias que existían entre ellos. Dichas sesiones fueron grabadas por los observadores, quienes clasificaron las diferentes estrategias según sus esquemas principales en:

Estrategias de modelación directa, de número completo, de partición de número, y de compensación, mismas que expusimos en el cap. II.

4.1.2. Reseña del trabajo de McClain et al.

También encontramos elementos metodológicos para nuestra indagación en la investigación llevada a cabo por McClain *et. al.* (1998), quienes muestran un trabajo, sobre una enseñanza experimental, realizado durante nueve semanas en un aula de tercer grado de primaria. Cabe señalar que todos los autores del documento fueron miembros del equipo de investigación; de hecho MacClain fue el maestro del grupo observado.

Uno de los objetivos de dicha investigación fue desarrollar una secuencia instruccional para el 3er. Grado que soportara la construcción creciente y sofisticada del concepto de lugar-valor.

Al igual que en el trabajo empírico desarrollado en esta tesis, en la indagación de McClain (1998) se montó una serie de secuencias instruccionales y de resolución de problemas. Un bosquejo de dichas secuencias es el siguiente:

Primero maestro y alumnos discutieron un planteamiento (sobre el empacamiento de dulces en cajas y paquetitos) hecho por el profesor y con base en ello siguieron las subsecuentes actividades.

Se trabajó con arreglos rectangulares, haciendo estimaciones sobre el número de columnas de "x" elementos posibles.

Se trabajó empacando y desempacando los dulces en grupos de diez.

Se realizaron planteamientos (situaciones problemáticas) para ayudar a los niños a encontrarle un sentido útil a la actividad realizada.

Se solicitó que los alumnos realizaran dibujos u otras actividades que permitieran simbolizar las actividades realizadas.

Se solicitó a los estudiantes hacer la actividad anterior utilizando números, y hacia el final de ésta se trabajó con un formato vertical para representar sumas y restas.

Finalmente en la novena semana se planteó un problema y se solicitó que los alumnos expusieran sus estrategias para resolverlo y que las justificaran.

Se realizaron entrevistas con los niños antes y después del trabajo señalado y se compararon, encontrando que todos mostraban progresos significativos en su razonamiento (Bowers, 1996, cit. Por McClain *et. al.* 1998). De este trabajo se concluye considerando que resulta de gran importancia la discusión donde los alumnos expliquen y justifiquen su pensamiento.

4.1.3. Metodología utilizada en este trabajo de investigación.

En el presente caso la investigación se encaminó hacia la indagación de las estrategias emergentes en el proceso de significación del algoritmo de la multiplicación mediante actividades, como las que generan los juegos de mesa y la resolución de problemas, en el tercer año de educación primaria.

Se realizaron observaciones al interior del trabajo de un grupo de tercer grado, en su salón de clase, en torno de la actividad que realizan los niños, puestos a jugar con algunas actividades, propuestas a la maestra, como el basta numérico o la resolución de problemas. Nuestra hipótesis fue que en estas situaciones probablemente emergerían, en los niños, estrategias de solución, mismas que constituirían bases de significación para el algoritmo de la multiplicación.

Una investigación se puede definir como la serie de pasos que dan respuesta a una pregunta específica y puede ser realizada con fines diversos como: ”Conocer únicamente las relaciones existentes de algunos fenómenos, tratar de encontrar respuesta satisfactoria a ciertos hechos y lograr con el conocimiento y la explicación de fenómenos proyecciones significativas” (Baena, 1994). Así, de la presente investigación se obtuvieron datos (los que más adelante se expondrán) mediante observaciones de campo que se realizaron en la Escuela Primaria pública “Juan Escutia”, turno matutino, con clave 41-197-47-VIII-x de la DGSEI, donde los alumnos, preponderantemente de la unidad militar SEDENA, pertenecen a un nivel socioeconómico medio.

También se realizaron entrevistas, con la maestra responsable del grupo, sobre el trabajo realizado, éstas se llevaron a cabo al finalizar el periodo de trabajo. De igual forma se entrevistó, al finalizar el trabajo, a ocho alumnos del grupo, seleccionados por la propia maestra bajo la denominación de ser los de mayor dinamismo, con edad promedio entre 8 y 9 años cumplidos, los cuales expusieron en cada sesión sus formas de dar solución a los diferentes planteamientos o situaciones problemáticas.

Las observaciones se llevaron a cabo a lo largo de dos sesiones a la semana, cada sesión era de aproximadamente cincuenta minutos, los cuales eran destinados exclusivamente al trabajo propuesto, durante cinco meses a lo largo del curso del ciclo escolar 2001-2002.

Las actividades propuestas a la maestra del grupo eran aplicadas por ella, sin la menor intervención, ella determinaba si anotaba en hojas o en el pizarrón las actividades o incluso, si únicamente las leía o dictaba, y el trabajo de observación, se realizaba seleccionando posiciones en la parte posterior del aula, aunque con movimiento hacia los equipos que mostraban alguna estrategia nueva, con la intención de video grabarla.

En las sesiones de trabajo se observó y registró lo sucedido, en los primeros días, se realizaron anotaciones, posteriormente, los registros fueron apoyados en grabaciones de video, grabando lo que hacían y comentaban los niños al interior del grupo y equipo, durante la clase. Así mismo, al finalizar cada sesión, se revisaron los cuadernos y se video grabaron las explicaciones con la participación de cada niño. Todos estos registros constituyen el cuerpo de datos empíricos del presente trabajo de tesis.

Al finalizar cada sesión se registraron los fenómenos ocurridos y las deducciones que los alumnos habían logrado durante la misma, tomando nota de lo observado y solicitando que cada niño explicara en qué consistían las estrategias que emplearon para solucionar las situaciones planteadas en clase. También se consideró que la actuación del niño en clase se ve influida por el grado de confianza que los alumnos sienten. Por ello en las sesiones no se señalaron errores a los niños, sino que se fijó la atención en lo que éstos decían y hacían para valorar el grado de avance y las estrategias que surgían, siempre haciendo los registros pertinentes.

Para instrumentar las actividades en el salón de clase, cuyo grupo constaba de 30 alumnos, se organizaron equipos de cinco integrantes cada uno, coordinados por la maestra, procurando que los integrantes de cada equipo fueran lo más heterogéneos posible.

Las diferentes actividades, propuestas a la maestra, que se instrumentaron fueron las siguientes:

- Colecciones de objetos.
- Arreglos rectangulares.
- Los escudos.
- Dilo con una cuenta.
- La pulga y las trampas.
- Basta numérico.
- Problemas de que implican multiplicaciones.

- Competencias con multiplicaciones, etc.

Algunas de estas actividades provienen del libro "Juega y aprende matemáticas" de Fuenlabrada *et. al.* (1991), que surge como una propuesta para que los niños trabajen y se diviertan en el aula y nuestra intención fue aplicarlas como actividades potenciadoras de la implementación de estrategias, por parte de los niños, en torno del trabajo con el algoritmo de la multiplicación. El resultado de la aplicación o instrumentación de las mismas lo describiremos posteriormente (cap. V).

En la primera página de los anexos presentaremos el cuadro de observación que se empleó en la primera parte de las visitas para determinar el nivel de conocimiento de los niños respecto de las multiplicaciones y la forma en que se dio el primer acercamiento del niño con ellas.

4.2. Actividades propuestas para abordar en clase

4.2.1. Colecciones con la misma cantidad de objetos

Una de las actividades propuestas para aplicar en el trabajo dentro del aula fue la siguiente:

Solicitar a los niños realizar diferentes agrupaciones a partir de un puñado, indeterminado, de sopas u otros objetos, que les sea proporcionado por la maestra del grupo.

La finalidad de dicha actividad, consiste en observar sus formas de hacer las agrupaciones, el cálculo del total de sopas y detectar sus aproximaciones hacia las multiplicaciones.

Se pretende observar y registrar, cómo los niños agrupan colecciones pequeñas, sin determinarles el número de elementos de cada conjunto, pero señalando que cada conjunto debe contar con el mismo número de objetos, para que posteriormente calcule el total de objetos, a partir del número de grupos formado y los elementos contenidos en cada uno.

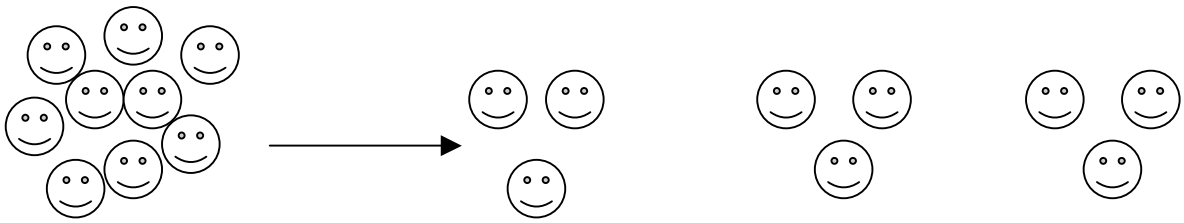


Fig.25 Del puñado de objetos a la formación de conjuntos.

Cabe señalar que ante actividades similares, es posible que algunos niños hagan cálculos mentales, otros cuenten o sumen y otros más hagan uso de la manipulación para auxiliarse al resolver las situaciones planteadas; sin embargo la participación del docente podría ser determinante en cada caso.

4.2.2. Arreglos rectangulares

Otra de las actividades propuestas a la maestra del grupo, consiste en solicitar que los niños realicen agrupaciones, en las cuales deben ordenar los elementos que les son solicitados en columnas de "n" número de objetos.

Una de las finalidades es comenzar el trabajo con arreglaos rectangulares, pretendiendo así, que los educandos logren definir lo que son los arreglos rectangulares, la otra sería observar si el estudiante se aproxima a la forma (5 x 3) del producto.

Una definición posible para "arreglos rectangulares" sería, que estos son colecciones de elementos colocados en varias columnas del mismo tamaño.

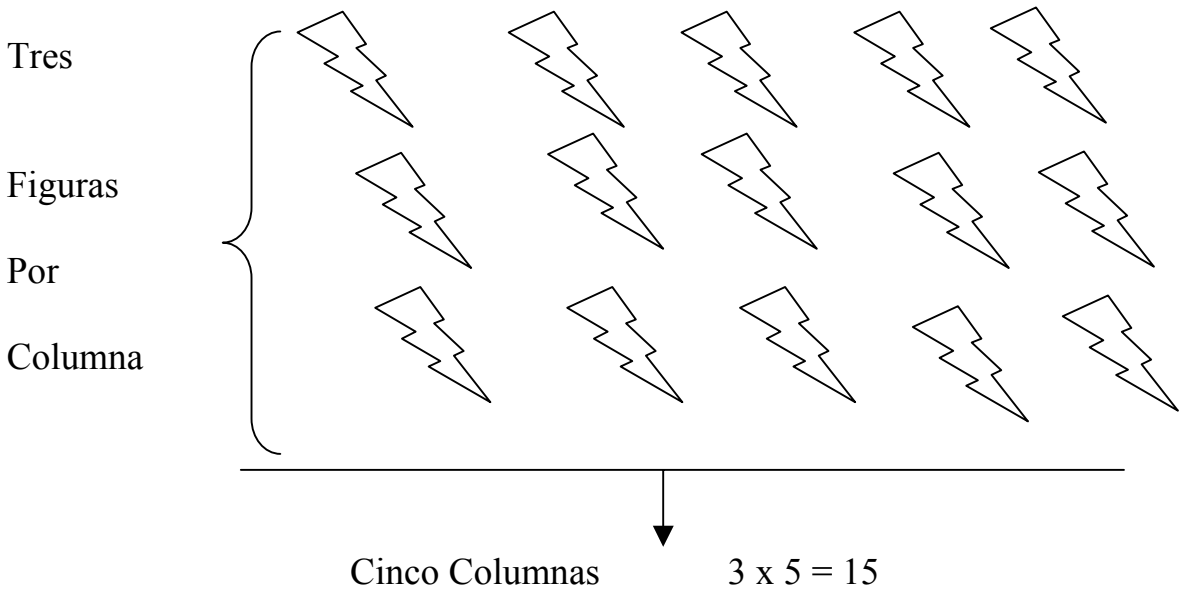


Fig.26 El arreglo consta de 3 elementos por columna y 5 Columnas = 15 elementos

Aquí se pretende un acercamiento hacia la comprensión de la forma de anotar una multiplicación en donde 5 x 3 implican cinco filas de tres elementos en cada una de ellas.

4.2.3. Combinaciones

La actividad consiste en lograr que el educando determine el número de combinaciones que es posible formar, a partir de dos conjuntos que le son presentados.

El trabajo con las combinaciones pretende lograr que los niños experimenten otra forma de utilizar las multiplicaciones, una utilidad diferente y que les permitirá ir conociendo las posibles formas de integrar elementos para hacer variaciones en la forma de agrupar los elementos con que se cuenta.

El planteamiento consiste en elaborar el número de escudos posibles mediante la combinación de la forma del escudo y el sello del mismo.

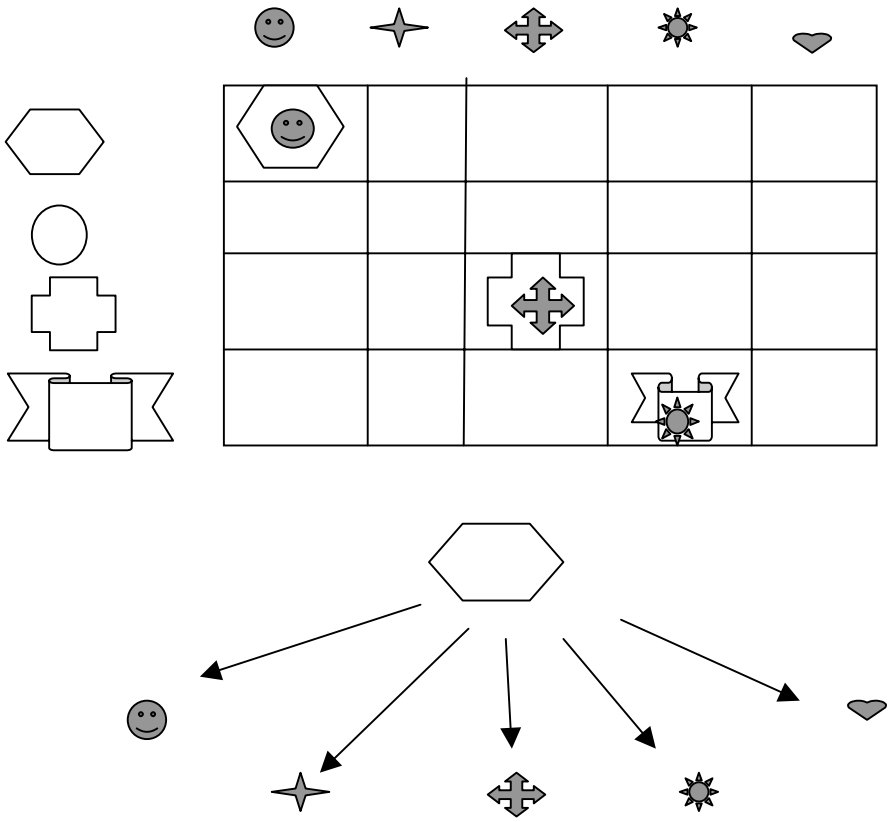


Fig.27 Combinación de los elementos de la columna con los de cada renglón.

En esta actividad el niño esta apoyado por los dibujos, lo cual, podría resultar en una mayor facilidad de comprensión de la actividad.

4.2.4. Dilo con una cuenta

La actividad consiste en solicitar a los estudiantes que expresen una cantidad, por medio de operaciones que tengan por resultado dicha cantidad.

Con esta actividad, posiblemente, los niños reafirmarán sus conocimientos sobre la suma, resta y multiplicación, buscando encontrar diferentes opciones para obtener la misma cantidad.

Material a utilizar :Un juego de tarjetas de números y signos de suma resta y multiplicación, para cada equipo de niños.

1.- El reto es que cada pareja llegue a obtener todos los números del 1 al 20.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	+	-	x

2.-Es necesario indicar a los pequeños que si se pretende utilizar el signo de multiplicar este debe ser el primer signo a utilizar, y que resolverán las operaciones en el orden en que aparecen. Por ejemplo: para obtener el número 18, colocarán las tarjetas como se muestra.

3	x	4	+	6

De donde se debe entender, tres por cuatro, doce, más seis igual a dieciocho.

Debe aclararse que de poner primero la suma el resultado será incorrecto por que en estas operaciones de suma, reta y multiplicación, primero se debe realizar la multiplicación y posteriormente las otras .

4	+	6	x	3

← Incorrecto

Por ello se pide que cuando los niños utilicen el signo de la multiplicación, lo pongan antes que los otros signos.

3 x 5 + 2 = 17
3 x 5 + 4 = 19
3 x 5 + 6 = 21
3 x 5 + 8 = 23
3 x 5 - 2 = 13

Fig. 28 Ejemplos de dilo con una cuenta.

4.2.5. La pulga y las trampas

El juego pretende desarrollar las habilidades de contar de dos en dos, tres en tres. hasta contar de nueve en nueve (seriaciones). También pretende favorece la noción de múltiplo.

Material a utilizar:

- Corcholatas o huesitos de chabacano, por equipo (20 aprox.).
- Tres clips.
- Un metro de papel o madera.

Primero se utiliza una tira numerada del 1 al 20 y posteriormente se incrementan según el grado de avance. El metro puede ser dibujado sobre cartoncillo o en el piso.

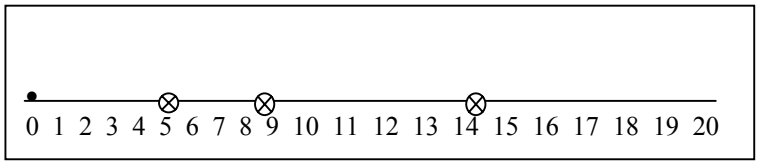


Fig. 29 El signo ⊗ representa las trampas.

Indicaciones

- Un niño pondrá los clips "trampas" sobre el número que determine, representando las trampas.
- El primer jugador decidirá si salta de dos en dos o tres en tres, y saltará.
- El que caiga en la trampa no podrá seguir.
- Cuando un jugador logra vencer la trampa y finaliza el recorrido conserva las fichas que estaban atoradas en las trampas.
- Cuando todos logran vencer el recorrido se cambiará la trampa de lugar.
- El juego termina cuando cada niño ha puesto la trampa dos veces.
- El niño que pone las trampas tiene la posibilidad de ganar todas las fichas, según la colocación de las trampas.

Los alumnos desarrollan poco a poco una estrategia que permite encontrar los números que están contenidos en varias series a la vez.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 .100

Fig.30. Recta utilizada para el juego.

4.2.6. Basta numérico

Esta actividad es similar a el basta numérico utilizado de manera habitual en español, con nombres de personas, animales, cosa, etc.

El objetivo es que los alumnos sean más ágiles al hacer cálculos puesto que se ejercita el cálculo mental.

En este juego los niños tratan de resolver lo más rápidamente posible varias operaciones, utilizando los estrategias propias.

Instrucciones:

- Se forman equipos de dos a cinco niños.
- Cada niño dibuja su tablero con las operaciones que se indican.
- El iniciador del juego menciona un número, que será colocado en la primera casilla del segundo renglón.
- En cada casilla del mismo renglón se escribe el número que resulta de resolver la operación del mismo número respecto del que está arriba de esa casilla.

	+ 2	x 4	x 5	Aciertos
5	7	20	25	3
7	14	28	35	2

Fig.31. Juego del basta numérico.

Con el uso de esta actividad es posible practicar las operaciones que se quiera; sin embargo para efectos del presente trabajo de investigación, se utiliza la modalidad de multiplicación.

4.2.7. Problemas que implican multiplicar

La siguiente secuencia de problemas fue entregada a la profesora del grupo a fin de que ella fuera quien dispusiera la forma de aplicarlos, ya fuese por medio de hojas que las contuvieran, dictándolas o anotándolas en el pizarrón.

Las preguntas pretenden una posible secuencia, basada en el grado de dificultad, a consideración propia, sin embargo, la profesora podría asignar el orden y la cantidad de ellos, a trabajar en cada sesión.

1. Lupita tiene dos cajas con tres muñecas cada una. ¿Cuántas muñecas tiene en total?

2. Juanito tiene cinco cajas con canicas; si cada caja contiene 20 canicas. ¿Cuántas canicas tiene?

3. La mamá de Pablo le pidió que comprara tres rejas de huevo, cada reja contiene 12 huevos y no sabe cuántos le tendrán que dar.

4. Laura va a organizar un baile y quiere saber cuántos sándwiches tiene que preparar, ella sabe que habrán quince parejas y que cada niño come dos sándwiches.

5. La maestra pidió 10 pesos a sus alumnos y quiere saber lo que juntarán sus 25 alumnos.

6. Hace poco fue el cumpleaños de Fabiola y sus mamá va a preparar un pastel, se encontró una receta de pastel para 5 personas, y como van a asistir 15 personas, quiere saber cuánto necesita para 15 personas.

7. Luis compró tres paquetes de chicles, cada uno le costó $ 25.00. ¿Cuánto ha pagado en total?

8. En un baile hay tres chicos y dos chicas. ¿Cuántas parejas distintas pueden formar?

9. Si hay 5 chicles en un paquete pequeño y uno grande contiene tres veces lo que uno pequeño. ¿Cuántos chicles tiene un paquete grande?

10. María recibe el fin de semana 25 pesetas. Su hermana Soledad que es mayor recibe 4 veces más. ¿Cuánto recibe Soledad?

11. Compramos 8 bolsas, cada una de las cuales tiene 34 caramelos. ¿Cuántos caramelos tendremos en total?

12. Hugo corre 12 Km. en 2 días, Paco los recorre en tres días y Luis los recorre en cuatro días. ¿Cuántos Km. recorrerá cada uno en un mes de 30 días?

La resolución de problemas en sí misma no es vista como una estrategia de juego. Sin embargo, al presentarse a manera de competencias entre equipos, al parecer, resultaría grato el participar y podrían resultar en experiencias lúdicas para los niños.

4.2.8. Los saltos de la ranita

Esta actividad pretende el trabajo con seriaciones, aun que, resulta una situación más compleja por implicar un conteo asociado a una situación problemática a resolver.

Hugo, Paco, Luis y Rosita juegan con sus ranitas y quieren saber hasta donde saltó cada una; la de Hugo saltó 12 veces, la de Paco 6, la de Luis 24 y la de Rosita 8.

Si cada salto era de tres centímetros ¿Cuál fue la distancia que saltó en total cada ranita?

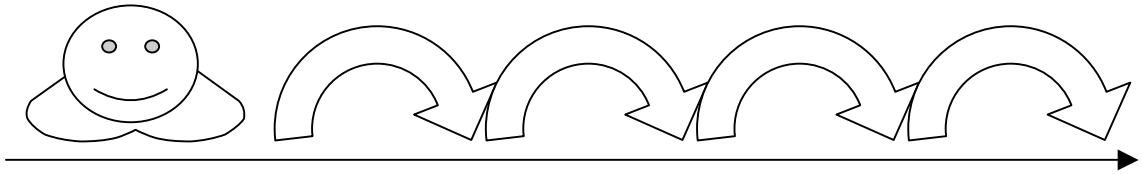


Fig. 31. Las seriaciones son una de las formas más asociadas al producto.

CAPÍTULO V
ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DEL TRABAJO DE CAMPO

En el presente capítulo se presenta el análisis de las observaciones realizadas durante el ciclo escolar 2001-2002 de un grupo de 3er año de educación primaria (Para más detalles ver capítulo III de metodología). En particular se presentan las estrategias de los niños que fueron seleccionadas por haberlas considerado importantes dentro del proceso de significación de la multiplicación.

Cabe señalar que algunas de las estrategias que se presentan han sido reseñadas, también, por investigadores como Luceño (1999), Maza (1991) y Santos (1996). Sin embargo, ello se mencionará más adelante, en el momento oportuno.

5.1. Estrategias que emergieron al interior de la clase

El trabajo en el grupo se realiza, en un primer momento con el apoyo de materiales como son sopitas, papelitos y los que se sugieren en el libro de texto del tercer grado y después sin ellos, con la intención de aprovechar la utilidad que se obtiene de su manipulación como lo señala Szendrei (1996), que dice que el uso de manipulables, representa una buena herramienta en la comprensión de algunas situaciones problemáticas (*Ibíd*.).

5.1.1. Conteo exhaustivo de los elementos

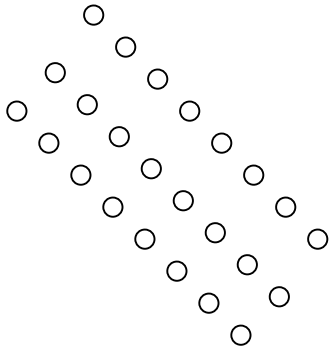
En lo primeros ejercicios los niños formaban conjuntos y los contaban de uno en uno de manera exhaustiva dando lugar a lo que se reconoce con el nombre de modelación directa, Jae-Meen (1998).

En el desarrollo de esta actividad de conteo Zoé comienza a dar visos de emplear una nueva forma de actuar, pues al estar formando los conjuntos solicitados por la profesora del grupo, contando los elementos, recuenta en voz baja pero perceptible de cinco en cinco -"cinco, diez, quince..."

Aquí, es posible identificar, en esta forma de contar del niño, un recuento de manera seriada, como una forma de avanzar con mayor rapidez en el conteo.

Por otro lado, en esta misma sesión, Carlos, en su propio lugar, comenzó a realizar formaciones con las sopas, tomando en cuenta los números señalados por la maestra, pero lo hace utilizando arreglos rectangulares.

Cuando la maestra da la instrucción, de formar tres grupitos de ocho sopitas cada uno, Carlos las forma de la siguiente manera:



De acuerdo al trabajo de Block (1994), el trabajo con arreglos rectangulares, al parecer, permite a los niños identificar una forma para el conteo rápido de los elementos, por presentar los mismos de manera ordenada en columnas con igual número de elementos cada una.

Haciendo notar que Carlos y Zoé trabajan en el mismo equipo, sucede que Zoé, al ver el acomodo de las sopitas por parte de su compañero, hace lo propio (lo imita) y sigue contando los elementos en voz baja, como concentrado -"cuatro, ocho, doce, dieciséis..."

Esta nueva situación corresponde a lo que Luceño (1999), nos señala como doble recuento, esto es, el niño realiza las operaciones que le son señaladas usando una doble estrategia, la seriación y los arreglos rectangulares.

Al solicitar la maestra al equipo de Zoé –"A ver el equipo de Zoé -¿Cuántos son 10 grupitos de seis?". Zoé cuenta de uno en uno cada conjunto.

> Uno...(cuenta susurrando) 6... (susurrando) 12...(susurrando) 18...
>
> Zoé finalmente dice en voz alta –sesenta...!"la profesora con una sonrisa solicita, "– Demuéstramelo...!" y Zoé forma cada grupo y los cuenta de uno en uno, hasta completar el conteo de los diez grupos.

Aquí identificamos lo que Luceño (1999), denomina "recuento transaccional" lo cual es posible apreciar por el recuento subvocal, que realiza Zoé, con una supresión de la pronunciación de algunas palabras y la interiorización de las que marcan el final del grupo (uno, seis, doce...), (ver pág.17 de esta tesis).

En particular, los cambios de estrategia manifestados por Zoé al moverse de un conteo unitario exhaustivo al recuento transaccional o por series demuestra las aseveraciones de (Brousseau, citado por Peltier, 1999), quien señala cómo una vez que se hace más complejo el planteamiento o el problema mismo, se

vuelve necesario, para el alumno, implementar una nueva forma de solucionar lo problemas, una que resulte más apropiada para el propio sujeto.

Así mismo, en este segmento se muestra que el alumno Zoé ha dado una modificación a su primera estrategia haciéndola quizás más eficiente. Por otro lado, tal vez podríamos decir que el alumno que comprende el proceso y función de la adición tendrá la posibilidad de echar mano de ella para auxiliarse y con ello poder aprender de manera exitosa las multiplicaciones y darles uso en los diversos contextos en que le sean presentados. Esta situación es posible observarla en el trabajo de Jae-Meen (1998, ver pág. 81).

Por otro lado, tenemos la discusión y presentación de ideas entre los estudiantes y el maestro, situaciones que resultan ser ingredientes fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas. A decir por Hoyos (1998), el papel del maestro es fundamental, ya que es éste quien auxilia a los alumnos en las situaciones de resolución de problemas, contrastando o refutando las distintas posibilidades que el estudiante elige en el camino de una resolución conjunta (estudiante-maestro) del problema planteado.

De manera que es en la acción e interacción con el estudiante que, probablemente, el maestro posibilite el conocimiento, y tal vez, el avance hacia otro nivel de abstracción, del contenido matemático en estudio. De tal forma que el papel del maestro es el de mediador, en la construcción del conocimiento (*Ibíd*.).

Finalmente, con respecto al papel del trabajo en equipos, Santos (1996), menciona que las discusiones grupales permiten evaluar el potencial de varias alternativas, y que la oportunidad de trabajar en colaboración, permite desarrollar estrategias para defender las ideas matemáticas propias.

Así mismo, resulta importante, para la construcción de nociones y procedimientos matemáticos, la explicación de sus procesos, toda vez que, en ocasiones, resulta para el niño más fácil comprender los procesos explicados desde su propia perspectiva de estudiantes, escuchando los procesos de un compañero, pues a decir por Vigotsky (1978), la interrelación de los sujetos propicia las experiencias de aprendizaje, o como también afirma Brousseau (1993), la necesidad de explicar sus procesos y la práctica de hacerlo, permite al individuo mejorar su lenguaje matemático, haciéndolo más preciso.

5.1.2. Representaciones rectangulares

En otra de las sesiones grabadas, cada equipo está formado por cuatro integrantes, pero trabajan en parejas y cada niño toma un puñado de sopas; la

maestra señala que, al ser todos los puñitos de sopitas diferentes, cada niño debe acomodar sus sopas como pueda, pero en grupos iguales, y los niños lo hacen utilizando una estrategia generalizada, de arreglos rectangulares:

Lupita dice: -“ yo tengo 8 sopas”. Y las acomoda así:

☺ ☺ ☺ ☺
☺ ☺ ☺ ☺

Rubí Acomoda 7 columnas de dos sopas cada una

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺
☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

Ximena forma 5 columnas de 4 sopas c/u., y cuenta de uno en uno en voz alta.

☺ ☺ ☺ ☺ ☺
☺ ☺ ☺ ☺ ☺
☺ ☺ ☺ ☺ ☺
☺ ☺ ☺ ☺ ☺

Se observa que el trabajo en subgrupos o grupos pequeños permite el intercambio comunicativo o pequeñas discusiones con una mayor participación de los niños, ya que ellos pueden intervenir inmediatamente, es decir, al hacerlo en equipos de dos integrantes, se activa la interacción más prontamente.

Cuando le preguntamos a Ximena sobre lo que ella está haciendo y para qué cree que es, ella responde: -“al hacer agrupaciones se aprende a hacer multiplicaciones”. Esta situación, nos podría dar cuenta que ella identifica a la representación rectangular con la operación o procedimiento de multiplicación.

5.1.3. Identificación del producto

Pudimos observar que algunos niños identifican la intención de las actividades 5.1.1. y la 5.1.2; puesto que, posterior al ejercicio, realizamos una entrevista a Diana, misma que nos expone lo que hacía, ya que no podíamos observar a simple vista. Ahí al preguntarle a Diana ¿Qué estuvimos haciendo? Ésta respondió:

Diana- Estuvimos multiplicando
E- ¿Cómo sabes?

Diana- Por que la maestra nos ponía los números y yo contaba en mi mente...yo decía 8 x 5 cuarenta y por eso...

Esto podría ser un indicio de que la pequeña asocia las actividades con el producto.

5.1.4. Trabajo con combinaciones

Posteriormente en otra sesión realizamos trabajo con combinaciones y en el trabajo con algunos problemas, de este tipo, se podía observar el avance en la comprensión del producto, por parte de los niños, pues ya en un primer momento éstos señalan la posibilidad de resolver el problema con una multiplicación, aunque sus explicaciones son poco sostenibles.

La maestra cuestiona a Diana –Haber explícanos "¿Por qué de dos sopas y tres guisados nos da seis combinaciones...Diana?"
Diana –"Por que 3 x 2 son seis...".
Mtra. al grupo –"Y bien...?" y algunos responden, entre la "bola"
–"Deben ser seis..."

Zoé levanta la voz –"yo digo que deben ser 5 dos sopas más tres comidas son 5..."
Diana corrige –"Son seis..."

Mtra. a Diana –"Pon ahí la multiplicación".
Diana apunta un dos y un tres arriba de los dibujos "2 x 3 = 6"

Más adelante, veremos cómo es que ante un planteamiento similar los argumentos de Sandra, otra compañera del grupo, son de mayor solidez y demuestran un mejor lenguaje para justificar sus afirmaciones.

5.1.5. Las argumentaciones

La actividad realizada con las combinaciones continúa y se hicieron cuestionamientos al grupo, con el objeto de escuchar las formas en que los niños exponían o justificaban sus respuestas, por ejemplo, la explicación de Carlos, permite ver la falta de argumentos para justificar sus procesos, cuando éste señala:

–"Estuvimos haciendo combinaciones, combinamos la ropa, y me sirvió para saber lo que nos conviene comprar o comer...la podía resolver con

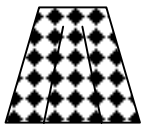
una multiplicación y lo supe por que de un lado había 2 y del otro 3... y supe que era una multiplicación".

Ante esto Santos (1996), hace algunos señalamientos, por ejemplo, "El estudiante debe tener en cuenta que para aceptar algún argumento matemático, dicho argumento debe inicialmente convencerle a sí mismo, debe convencer a un amigo y, finalmente, debe convencer a un enemigo."

5.1.6. Más combinaciones

En una segunda sesión se trabajaron nuevamente combinaciones y observamos que los alumnos ya identificaban las relaciones de ambos eventos, dando solución mediante una multiplicación, en la cual identificaban correctamente los elementos que les eran solicitados, sin mayor dificultad.

3	x	5	=	15
blusas		faldas		combinaciones



Los resultados observados en esta segunda sesión, con el mismo tema, tal vez, nos permitan señalar que, posiblemente, sería recomendable que el trabajo con un tema sea abordado en más de una sesión, de tal suerte que ello permita madurar los conceptos y retomarlos para lograr su comprensión y dominio.

5.1.7. Dilo con una cuenta

En otra sesión se trabajó con la actividad llamada "dilo con una cuenta", (ver pág. 77), en la cual se obtuvieron los siguientes resultados:

Los niños se desenvolvieron al parecer sin gran problema y fue posible observar cómo algunos niños llegaban a la conmutabilidad, (Ver Pág. 14).

Cuando la profesora del grupo cuestionó a Ximena sobre cuál sería la combinación de números que haría para obtener 20, ésta señaló:

Ximena- 4 x 5 son veinte...!
Mtra.- Bien...!

> Ximena, con una expresión de emoción agregó - 5 x 4 también, la única diferencia es el orden de los números, en las dos sale el mismo resultado...!

Y la misma alumna al final de la clase cuando la entrevistamos sobre los que hicimos en la sesión comentó:

> Ximena- Trabajamos con problemas por equipo, para aprender a resolver problemas con signos; aprendíamos las cuentas que no nos sabíamos bien y las repasábamos.

Lo que tal vez, sería posible observar en esta actividad en particular es que se da un repaso de las operaciones y que dicho repaso posiblemente permite a los niños hacer algunas reflexiones en torno al sentido de lo que implica cada una de las operaciones trabajadas, (poner, quitar, multiplicar).

5.1.8. La pulga y las trampas

En otra sesión, en el trabajo con la actividad llamada "la pulga y las trampas", (ver pág.78), sugerida por Fuenlabrada *et. al*. (1991), en un primer momento se trabaja con tiras de un metro, dividido en centímetros, esta situación al parecer hace complejo el trabajo de intentar obstruir el camino de las pulgas (En ella se salta en intervalos iguales para no caer en alguna trampa, ejemplo: de dos en dos, tres en tres, etc.), sin embargo, algunos niños intentan con ahínco ubicar las mejores formas de colocar las trampas.

Las actividades desarrolladas señalan la dificultad para poder implementar una estrategia, al parecer los alumnos se agobian ante la longitud de la cinta, que va del uno al cien. Sin embargo, al finalizar la actividad, los niños comentan que las multiplicaciones servirán como herramienta en la realización de esta actividad, al parecer éstos logran identificar algunos múltiplos del 2 y del 3.

Se intentó una segunda sesión, con esta misma actividad y en este caso la tira de "La pulga y las trampas" se recorta a treinta números.

Los niños comienzan colocando las trampas al azar, y de igual forma escogen el número para saltar, posteriormente Ximena inicia poniendo a prueba diferentes tipos de saltos (ensayo-error) para determinar con cual no caerá en las trampas, da señales de saber cuándo alguna de las opciones de sus compañeras no es la adecuada, cuenta "mentalmente" antes de decidir sus saltos y va señalando cuáles números le hacen caer en las trampas.

Algo que fue posible observar en esta actividad es que, al parecer, los niños tienden a imitar a quién logra vencer las trampas, igualando sus estrategias. Resulta importante el señalar que el acondicionar los números al grado de dominio de los niños permitirá un mejor trabajo, pues si los números son muy grandes o demasiado pequeños, pronto, los niños terminarán por aburrirse o perder el interés por realizar las actividades, aunque éstas sean juegos.

Al finalizar la actividad y platicar con Ximena, la pequeña señala una relación de la situación practicada con sumas y seriaciones. -"Estuvimos jugando a las pulgas y podemos aprender las series y las sumas". Y explica:

–"Serie,... es poniendo 2 + 2 = 4 y así podemos ir numerando, me gustó más al treinta por que había más trampa, podíamos hacer más trampas."

5.1.9. Aproximación a las multiplicaciones

En la misma actividad, al analizar el trabajo que desarrollan los niños en el intento por dominarla, pudimos observar que algunos niños, en la búsqueda de estrategias para salvar las trampas, asocian el juego con las tablas de multiplicar, es decir, parece que van aproximándose a las multiplicaciones, de manera menos abrupta que la de memorización y repetición del algoritmo.

El aprendizaje dado en estas condiciones, de memoria y repetición, pueden dar como resultado una serie de problemas, como el que los niños olviden algún paso del proceso, como se observó con Diana ante una multiplicación.

Diana al resolver una multiplicación, la resuelve así:

$$\begin{array}{r} 1\ 3 \\ \underline{\times\ \ 4} \\ 4\ 12 \end{array}$$

Lo que implica que posiblemente Diana aísla cada multiplicación por un dígito, esta situación es reportada por Gómez – Granel (1995), cuando señala el riesgo de aplicar el algoritmo sin considerar el contexto del problema y la factibilidad del resultado, (ver pág.30).

5.1.10. Suma reiterada

En el trabajo cotidiano, realizado durante las primeras sesiones con el grupo, pudimos observar que cuando el niño consideraba que una estrategia ya no le era útil, éste buscaba la aplicación o implementación de otra. Sin embargo, también pudimos constatar que ante situaciones que implican tener la certeza del resultado y cuando los niños sienten incertidumbre por desconocimiento de la forma de solucionar el problema o ante la falta de familiaridad con una estrategia nueva, los niños tienden a retomar aquella estrategia que les resultó satisfactoria, en un primer momento, y la adoptan como más segura de aplicar.

En una de las sesiones fue posible observar lo anterior, cuando la maestra les señaló que su resultado no era el correcto, entonces, algunos alumnos recurrieron a la suma reiterada, anotándola de forma horizontal o vertical, pero al fin suma reiterada, ejemplo:

Ante la multiplicación de 5 x 12 =

$$\begin{array}{r} 12 \\ 12 \\ 12 \\ .+\ 12 \\ \underline{12} \\ 60 \end{array}$$

Ximena recurre a la suma vertical

Zoé ante la misma operación de 5 x 12 por su parte lo hace en una operación horizontal.

Zoé aplica la suma horizontal

5 +5 + 5+ 5+ 5+ 5+ 5+ 5+ 5+ 5+ 5+ 5 = 60

El mismo Zoé ante otra multiplicación ahora 4 x 5 ha ce la siguiente suma:

$$\begin{array}{r} 4 \\ \underline{+4} \\ 8 \\ \underline{+4} \\ 12 \\ \underline{+4} \\ 16 \\ \underline{+4} \\ \mathbf{20} \end{array}$$

Zoé 4 x 5 =

Jae-Meen (1998), refiere esta suma reiterada empleada por Zoé, (ver pág. 12).

5.1.11. El error de la aplicación universal

Durante el trabajo con el grupo fue posible observar que existen otras situaciones por considerar, como el riesgo de que los niños al identificar el algoritmo utilizado, esperen que su aplicación sea universal, obligatoria y a manera de fórmulas, en donde para cada problema exista un algoritmo diferente.

Es el caso de Carlos que supone que por saber de memoria las tablas, es la única forma que utiliza para resolver las multiplicaciones, suponiendo que debe saber de memoria todas aquellas que le sean preguntadas o estén implícitas en un problema.

Así cuando se enfrenta a una multiplicación por doce el niño responde:

Carlos- Es que la tabla del 12, no nos la sabemos...!

5.1.12. Aplicación del Basta Numérico

Otra de las actividades planteadas a trabajar en el grupo fue el basta numérico, (ver pág. 79), que es una actividad en la que los niños suman, restan o multiplican, según les sea señalado en el encabezado de la tabla y que les será calificado, por ellos mismos, asignando un punto por cada acierto. Esta actividad, también sugerida por Fuenlabrada *et. al.* (1991), permitió reportar los siguientes datos.

El basta numérico parece ser una de las actividades más promisorias en la creación de estrategias, por los alumnos, para dar solución a los eventos que se presentan.

Número	*9	*5	*6	Puntos

La maestra da inicio a la actividad señalando las reglas del juego y ensayando con el grupo para dejar claro el proceso, situación que recomiendan, Block *et. al.* (1993).

La maestra señala –"vamos a contar del 1 al 20... listos...? Ya tienen sus líneas... ustedes se organizan para ver quien empieza...uno...dos..."

En un equipo Ximena cuenta hasta cinco... y podemos observar como algunos niños en el producto de "5 x 9" suman nueve veces cinco o cinco veces nueve. Esta situación implica el reconocimiento de la propiedad conmutativa, (ver pág. 15).

En otro juego, el número es veinte y Ximena suma 5 veces 20 y para el "20 x 6" suma 20 al resultante de 20 x 5.

$$\begin{array}{r} 20 \\ 20 \\ +20 \\ 20 \\ \underline{20} \\ 100 \end{array} \qquad 20 \times 5 = 100 \qquad\qquad 20 \times 6 = 100 + 20 = 120$$

Esto es nombrado por Maza (1991) Adición del multiplicando y señala: "Apoyándose en la multiplicación de un número es posible obtener el resultado de multiplicar por el siguiente sin más que añadir una vez el multiplicando", (ver pág. 16).

Sandra, ubicada en otro equipo, aplica una estrategia empleando la propiedad de multiplicar por diez, (ver pág. 19), misma que se observa en su razonamiento, cuando hace la multiplicación de 20 x 6 = como 2 x 6 = 12 y le agrega un cero.

20 x 6 = **120**

2 x 6 = 12 → 20 x 6 = 12 más un cero = 120

Ximena aplica la suma reiterada, aplicando el algoritmo de la suma y al multiplicar 13 por cinco, realiza lo siguiente:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 13 \\ 13 \\ +13 \\ 13 \\ \underline{13} \\ 65 \end{array}$$

lleva uno

3+3+3+3+3 = 15 Ximena

apunta el cinco

En el caso de Ximena podemos observar lo señalado por Maurer (1984), quien señala -"El dominio de un algoritmo puede permitir su aplicación en la resolución de varios problemas, incluso puede facilitar el aprendizaje de otros algoritmos o la construcción de uno mediante la combinación o complemento de otros".

5.1.13. Productos parciales

En el mismo trabajo con el basta numérico, encontramos que en la multiplicación 6 x 13, Sandra separa las decenas de las unidades, mismas que multiplica por separado, para sumar los resultados parciales al final. A lo que podemos agregar que, según Luceño (1999), se suelen distinguir niveles de desarrollo progresivo en las estrategias informales que el niño suele utilizar en la multiplicación. Uno de ellos implica la multiplicación mediante productos parciales, (ver pág. 19), situación que observamos en el proceso empleado por Sandra:

6 x 10 = 60 60
13 x 6 = 6 x 3 = 18 + 18

78

5.1.14.Suma del multiplicando

Las estrategias identificadas se repiten en varios casos, unos por imitación y otros por casualidad, como el siguiente, en donde vemos la adición del multiplicando referida por Maza (1991), (ver pag. 16).

Zoé al resultado de 14 x 5 le suma otros 14 para llegar a 14 x 6.

14 X 5 = 70

70 + 14 = 84

14 X 6 = **84**

Sandra ante una situación similar que implica realizar la multiplicación de 15 x 5, parte el número 15 en los números 10 y 5, y realiza la multiplicación de 5 x 10 para sumar, al resultado de ésta, (cinco veces) de 5 en 5 de forma reiterada.

15 x 5 = 15 x 10 = **50** + 5 VECES 5

50	+ 5	+ 5	+ 5	+ 5	+ 5
	55	60	65	70	**75**

5.1.15. Multiplicar por 10

Finalmente podríamos hacer también algunas inferencias, por ejemplo, ante multiplicaciones por diez, no se presenta problema alguno, al parecer es relativamente sencillo el trabajo con este número y ante la multiplicación de 19 x 5, varios niños trabajaron con 20 x 5 y restaron una vez el 5. Así en varios casos cuando se manejan cantidades próximas a los múltiplos de 10 los alumnos prefirieron llegar a ellas y restar.

A lo anterior Maza (1991), le llamó sustracción del multiplicando, en donde en vez de sumar, como en el caso de la adición del multiplicando, se resta.

Sandra multiplica 5 x 20 y le resta 5 unidades al resultado, (ver pág.16).

5 x 19 = → 5 x 20 = 100
- **5**
95

Del análisis realizado en las secciones 5.1.1. a la 5.1.15. podemos afirmar que detrás de cada estrategia existe una meta y en cada proceso es posible percibir que para hacer o establecer un nuevo proceso, el alumno basa su acción en sus conocimientos previos, por ello dichos conocimientos deben estar claros para el chico, pues sobre éstos establece sus seguridades y generalmente recurre a esos mismos conocimientos cuando trata de establecer sus propias aseveraciones.

5.2. Análisis de la resolución de problemas.

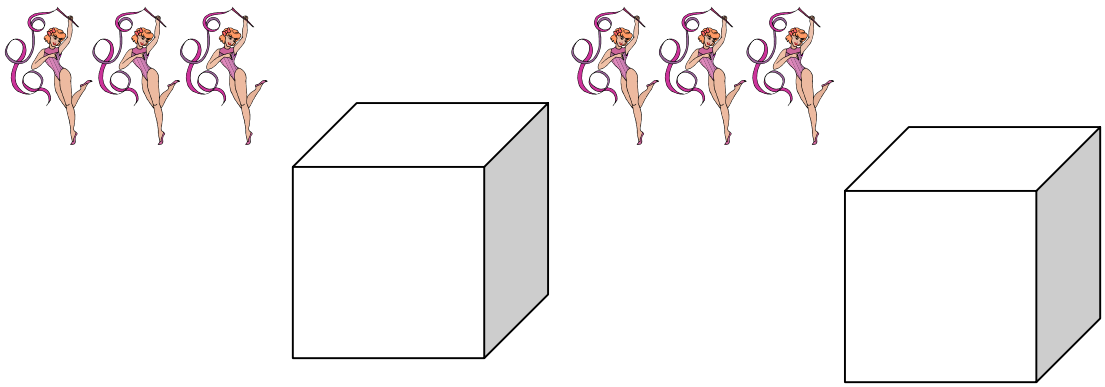
En una segunda etapa, se realizó el trabajo con problemas retomamos el trabajo de Gravemeijer *et.al.* (1990), quienes han desarrollado un enfoque didáctico que consiste en trabajar las matemáticas a partir de situaciones de resolución de problemas cuyo principio fundamental es adaptar las situaciones de enseñanza a las estrategias informales de los alumnos, en la resolución de problemas, propiciando la discusión e interacción entre los alumnos y llevarlo poco a poco al nivel de la abstracción, posibilitando realizar importantes anotaciones para el presente trabajo de tesis.

A continuación se presentan los resultados que arrojaron las observaciones, en cuanto a la mencionada resolución de problemas, así como las estrategias que emergieron a lo largo de tal resolución:

5.2.1. Problema 1: Lupita tienen dos cajas con tres muñecas cada una ¿Cuántas muñecas tiene en total?

5.2.1.1. Las imágenes como auxiliares

Ante este primer problema Sandra recurre al dibujo de dos cajas y al lado de cada una tres muñecas.



La aplicación de dibujos para comprender el problema permite a la alumna, en este caso, observar de manera directa la relación que permanece entre los elementos referidos en el planteamiento y al parecer le facilitan la comprensión y la solución.

5.2.1.2. Materiales concretos

Durante la investigación de campo, se observó que los niños, con cierta frecuencia, principalmente en las primeras sesiones de trabajo con problemas a resolver, recurrían al uso de materiales para modelar las situaciones problemáticas.

Fuson *et. al.* (1997), afirman que cuando les es permitido inventar libremente sus propios algoritmos, es posible observar que los alumnos, inicialmente modelan las situaciones empleado materiales concretos y que tan pronto como reflexionan y abstraen sus algoritmos, los algoritmos se vuelven más sofisticados, y los niños dependen en menor grado de la manipulación de materiales concretos.

En la primera sesión de ésta etapa la maestra observa que un alumno da señales, levantando la mano, de que ya terminó y le solicita:

Mtra:- Noé pasa y resuélvelo en el pizarrón

Noé suma el número 2 correspondiente a las dos cajas y el 3 correspondiente a las tres muñecas de cada caja y obtiene cinco; podríamos decir que el niño únicamente opera con los números que se le presentan y que no está analizando el contexto planteado por el problema.

$$2 + 3 = 5$$

Así, podríamos señalar que uno de los problemas que aquejan los profesores, es la falta de comprensión o razonamiento de los procedimientos por parte de los niños. Tal vez, ante el trabajo mecanizado, apoyado únicamente por la ejercitación sin reflexión se llega a la operación sin comprensión de los planteamientos.

Por generaciones los algoritmos han sido enseñados como un conocimiento acabado, como una mecánica a seguir, situación que descontextualiza al estudiante y que se le presenta como una mera técnica para solucionar problemas, pues únicamente se enseña la mecánica y forma de operar con ellos (Block *et. al.,* 1993).

Es necesario que comencemos a reflexionar sobre la forma de trabajar con los niños y veamos la importancia de lograr que estos lean, analicen y comprendan la información que se les presenta en el planteamiento de los problemas que tendrán que solucionar.

5.2.1.3. El razonamiento de Diana

Diana ante el planteamiento del problema, suma tres más tres y señala, con seguridad, que son tres muñecas de cada caja y por lo tanto seis muñecas.

$$3 + 3 = 6$$

De acuerdo con Moreno y Waldegg (1992), los primeros procedimientos numéricos, como el sumar reiteradamente un número, aparecieron cuando los niños tuvieron la necesidad de verificar sus resultados. Así, "la necesidad de verificar, se reveló como una característica adecuada para propiciar la significación de la multiplicación"

Zoé multiplica 2 x 3 refiriendo dos cajas y tres muñecas en cada una.

$$2 \times 3 = 6$$

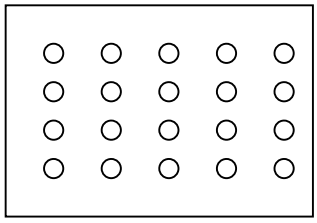
Las estrategias empleadas por Sandra muestran una comprensión importante de la información, situación que demuestra con su explicación, apoyada por el dibujo de las muñecas y las cajas. Sin embargo, en el siguiente problema, Zoé comienza a dar visos de no requerir dibujar todos los eventos para explicar sus procesos y la lógica de sus respuestas.

5.2.2. Problema 2: Juanito tiene cinco cajas con canicas. Sí cada caja contiene 20 canicas. ¿Cuántas canicas tiene?

5.2.2.1. La suma reiterada

Como ya lo habíamos mencionado una de las primeras formas empleadas en el trabajo con la multiplicación es la suma reiterada.

Zoé dibuja una caja con veinte canicas y suma cinco veces veinte.



$$\begin{array}{r} 20 \\ 20 \\ +\ 20 \\ 20 \\ \underline{20} \\ 100 \end{array}$$

Al parecer, Zoé ya no requiere dibujar las cinco cajas con veinte canicas en cada una y el dibujar una sola le es suficiente para comprender la información, podríamos decir que depende en menor grado de este tipo de apoyos.

5.2.2.2. La rapidez como fortaleza del algoritmo

Una de las ventajas del uso del algoritmo es la rapidez que permite para su aplicación como se observa en el caso de Pablo, quien hace la multiplicación de 5 x 20 y la señala como la forma más rápida, mientras otros niños siguen trabajando con sumas reiteradas.

$$20 \times 5 = 100$$

Entre las razones que justifican el uso de los algoritmos, Usiskin (1998) señala que la aplicación de ellos demuestra que permiten ser más veloces, ya que proporcionan una vía directa hacia la respuesta. Esta situación es ejemplificada por Pablo que la pone de manifiesto como una justificación para preferirla a la suma reiterada de varios elementos.

5.2.3. Problema 3: La mamá de Pablo le pidió tres rejas de huevo, él sabe que cada reja contiene 12 huevos y desconoce cuántos huevos le tendrán que dar.

5.2.3.1. El uso del algoritmo sin apoyo de dibujos

Una vez que el niño encuentra las estrategias que le resultan más útiles las adopta y usa con regularidad. Así ante el problema un niño pasa y resuelve el problema con una multiplicación. Al parecer de manera muy natural.

$$\begin{array}{r} 12 \\ \underline{\times\ 3} \\ 36 \end{array}$$

Cabe señalar que para algunos niños, en este momento, ya no hace falta el uso de imágenes para explicar el planteamiento.

5.2.3.2. La imagen gráfica

Algunos niños recurren a la imagen para auxiliarse modelando las situaciones, como Zoé, quien pasa y dibuja las 3 canastillas con los 12 huevos cada una.

En este caso es posible percibir como el alumno Zoé busca confirmar mediante el dibujo la efectividad del resultado obtenido.

5.2.3.3. La conmutatividad

Haciendo algunas multiplicaciones Ximena al multiplicar 8 x 6 dice:

Ximena- Ocho veces seis son cuarenta y ocho, y seis veces ocho también

8 veces 6 = 48 igual que 6 veces 8 = 48

Esta situación implica el reconocimiento de la conmutatividad de los factores de la multiplicación situación que podría resultar una herramienta útil en cuanto a el trabajo con las tablas de multiplicar y aún, en el supuesto de la memorización, reduce el esfuerzo a la mitad. Estará ahorrando esfuerzo y contribuyendo al análisis de las propiedades de la multiplicación.

5.2.3.4. Suma del multiplicando

Para resolver la multiplicación anterior (de 8 x 6) Ximena, también, suma de seis en seis, ocho veces, y al pasar a una nueva multiplicación; es decir, 9 x 6 únicamente agrega otros seis al resultado anterior de 8 x 6.

$$8 \times 6 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 48$$

$$9 \times 6 = 8 \times 6 + 6 = 48 + 6 = 54$$

Se puede ver que los estudiantes en el desarrollo de nuevas estrategias retoman algunos conocimientos previos y los reestructuran a fin de hacerlos más eficaces para los nuevos eventos. El alumno usa una herramienta frente a situaciones nuevas "haciendo adaptaciones, transformaciones o integraciones con otros conocimientos" (Brousseau, 1993).

5.2.3.5. Agregando un cero a la multiplicación por el diez o por sus múltiplos

Otro ejemplo de la forma como los alumnos asocian conocimientos previos y los adaptan a nuevos planteamientos es el siguiente.

Sandra al multiplicar 6 x 20 lo hace multiplicando 6 x 2 y agrega un cero.

6 x 20 = 6 x 2 = 12
y le Agrega un cero = 120

Esta estrategia se basa en la propiedad que se aplica a los números multiplicados por diez, cien o mil; en donde es posible únicamente agregar los ceros al número multiplicado por diez o sus múltiplos.

5.2.3.6. Separando unidades y decenas

Otra estrategia no menos interesante es la aplicada por Sandra al multiplicar 6 x 13, en donde ella multiplica 6 x 10 = 60 y luego le agrega 6 x 3 = 18 y suma los dos resultados.

6 x 13 =

6 x 10 = 60 más 6 x 3 = 18

= 60 + 18 = 78

Aquí podemos observar como la niña separa el número 13 en una decena y tres unidades, es una descomposición del número 13 en una decena y tres unidades.

Las operaciones tienden a volverse más complejas, como sería de esperarse en un curso ordinario y podemos identificar nuevas estrategias.

5.2.3.7. La separación en decenas y suma reiterada de unidades

Cuando multiplicamos 14 x 5 Sandra multiplica 5 x 10 y le suma cuatro veces cinco.-

14 x 5 =

5 x 10 = 50 + 5 + 5 + 5 + 5 = 70

Aquí observamos una estrategia compuesta de varias partes, la primera es en donde descompone al 14 en 10 y 4 para posteriormente aplicar la propiedad de multiplicar por 10 y sumar de manera reiterada cuatro veces cinco.

5.2.3.8. La resta del multiplicando

También encontramos estrategias en donde se aplican los conocimientos de la sustracción como en el siguiente.

Al multiplicar 19 x 5 Sandra señala:

Sandra -me voy a cinco por veinte y le resto cinco.

5 x 19 = 5 x 20 - 5 100 – 5 = 95

Al parecer multiplicar con múltiplos de diez les presentan menor dificultad y les brindan la oportunidad de emplearlos como herramienta.

5.2.3.9. Sustracción reiterada

En 16 x 6 Sandra se va a 6 x 20 y le va restando de seis en seis cuatro veces.

$$6 \times 16 = 6 \times 20 - (\text{cuatro veces } 6)$$

$$120 - 6 = 114 - 6 - 6 - 6$$

Al igual que en el problema anterior, quizás por la proximidad al 20, la niña concibe como más fácil, multiplicar por dos y agregar un cero, como lo hizo en ocasiones previas, para finalmente restar seis unidades al resultado, muy parecido a lo que Maza (1991), llama sustracción del multiplicando, aunque aquí Sandra resta cuatro veces el multiplicando.

5.2.3.10. La aplicación diferenciada del algoritmo

Zoé al multiplicar 14 x 5 realiza el algoritmo convencional y al multiplicar 14 x 6 también lo vuelve a aplicar.

$$\begin{array}{r} 14 \\ \underline{\times\ 5} \\ 70 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 14 \\ \underline{\times\ 6} \\ 84 \end{array}$$

En tanto que Sandra al multiplicar 16 x 5 lo resuelve aplicando el algoritmo y al cambiar al 16 x 6, sólo suma otros 16 al resultado anterior.

$$16 \times 6 = 16 \times 5 + 16$$

$$80 + 16 = 96$$

Este proceso empleado por la alumna es reconocido por Maza (1991), como adición del multiplicando.

5.2.3.11. Trabajar y disfrutar

Al parecer Sandra disfruta realizando actividades como las anteriores, pues

al preguntarle ¿Qué actividades realizamos y qué opinas de ellas? esta misma refiere:

> Sandra- Estuvimos jugando a hacer multiplicaciones y…Me gustó jugar a hacer multiplicaciones.

Algunos pedagogos están de acuerdo en que la mejor situación para aprender, resulta ser aquella en donde la actividad es tan agradable y satisfactoria para el aprendiz, que éste no la puede diferenciar del juego, (Zapata,1988).

5.2.4. Problema 4: Laura va a organizar una fiesta y quiere saber cuántos sándwiches tiene que preparar, sabe que habrán quince parejas y que cada niño se come dos sándwiches.

5.2.4.1. La discusión entre iguales

Ante este nuevo problema, sin mayor mediación de la maestra, el grupo comienza una discusión para determinar primero cuántos elementos habrá en la fiesta.

Es importante observar que ahora ya existe una discusión para analizar primero el planteamiento, antes de intentar resolverlo.

Zoé, por su parte, determina que 15 x 2 nos darán el número de elementos que asistirán a la fiesta y que 30 x 2 servirá para conocer el número de sándwiches a preparar.

Otros niños requieren hacer dibujos para poder identificar a las parejas y el número de sándwiches y lo hacen a manera de un esquema.

Así, cada que se complica un ejercicio, algunos niños recurren a la representación por dibujos.

La representación gráfica o más objetiva, se torna un elemento importante cuando surgen dificultades en la comprensión del problema y los niños recurren a estos auxiliares para retomar el camino hacia la solución del problema planteado.

El dibujar figuras es una de las estrategias importantes para el entendimiento del problema y permite al alumno avanzar hacia la solución del mismo, (Santos, 1996).

Ante otros problemas encontramos otro tipo de situaciones como las siguientes:

5.2.5. Problema 5: La maestra pidió $10.00 a sus alumnos y quiere saber lo que juntarán sus 25 alumnos.

5.2.5.1. Trabajo con el diez

Como observamos con anterioridad el trabajo de planteamientos relacionados con el diez o sus múltiplos resulta más o menos sencillo para los niños.

Ximena en una suma apunta 10 veces 25 y la resuelve así.

25 +25 +25 +25 +25 +25 +25 +25 +25 +25 = 250

Por otro lado Ricardo multiplica 20 x 10 y lo suma con el resultado de 5 x 10:

$$\begin{array}{r} 20 \\ \underline{\times\ 10} \\ 200 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5 \\ \underline{\times\ 10} \\ 50 \end{array}$$

200 + 50 = 250

Otro niño suma de manera reiterada de 10 en 10, veinticinco veces.

10 +10 +10 +10 +10 +10 +10 +10 +10 +10 +10 +10 +10 +10 +10 +10 +10 +10 +10 +10 +10 +10 +10 +10 +10 = 250

5.2.5.2. Del conteo exhaustivo a las seriaciones

En las primeras estrategias presentadas en este capítulo observamos como el niño agrupaba y realizaba el conteo exhaustivo de uno en uno, situación que, a este momento, ha sido superada por el conteo a manera de series y que ha permitido abandonar el conteo exhaustivo.

Al parecer, el conteo unitario se ve desplazado por el conteo en series cuando el estudiante ya tiene el dominio de éste último.

El obtener el dominio de alguna herramienta permite al niño sostener con argumentos la elección o proceso que éste haya determinado ante algún planteamiento determinado.

5.2.5.3. Por mayoría ante la falta de argumentos

Durante una sesión, en un problema que implica definir lo que es una hilera y una fila, Zoé propone que para determinar quién tiene la razón se ponga a votación.

Esta es una de las manifestaciones observadas, con frecuencia, en las primeras sesiones de trabajo con el grupo, en donde es posible percibir como los niños, ante la falta de argumentos o por la forma de trabajo con el profesor, validan las respuestas por aprobación directa del profesor o por mayoría. Situación que va desapareciendo conforme los niños obtienen los elementos que permiten argumentar sus afirmaciones, y cuando éstos se ven en la necesidad de soportar o justificar sus respuestas ante el grueso de la clase.

5.2.6. Problema 6: Hace poco fue el cumpleaños de Fabiola y sus mamá va a preparar un pastel, pero se encontró una receta de pastel para 5 personas y como iban a ir 15 personas ahora quiere ver cuánto necesita para ese número de personas.

5 personas	10 personas	15 personas
1 Kg de harina		
8 huevos		
1 ½ litro de leche		
250 gr. Mantequilla		
2 tasas de azúcar		

5.2.6.1. Problemas de proporcionalidad

El problema de proporcionalidad presentado parece no haber implicado mayor dificultad, posiblemente por el tipo de números empleado, (sencillos de manejar y de uso cotidiano), los intercambios comunicativos con los compañeros son mayores y sus respuestas son argumentadas con mayor solidez y con un vocabulario más completo.

Los intercambios en equipo y las justificaciones ante el grupo y maestra obligan al niño a dar explicaciones más razonadas para justificar sus resultados.

Las experiencias obtenidas, producto de las actividades realizadas, han permitido a algunos niños contar con elementos y formas de comunicación que pueden compartir con sus otros compañeros, chicos que se encuentran, hasta

ahora, en posición de desventaja por no haber logrado los mismos dominios que los primeros.
Al parecer el trabajo con la proporcionalidad les hace pensar en las relaciones entre las cifras de diferentes formas y permite algunas reflexiones que servirán de base para sus conocimientos futuros.

5.2.6.2. El argumento fundamentado

Diana muestra en la sesión de trabajo con recetas el dominio de la información y hace una reflexión al grupo.

Con seguridad y en una actitud reflexiva, señala - "Si en cinco personas hay un Kg de harina en diez hay dos."

La explicación que da Diana aunque no hace expreso "el doble" muestra la consideración de lo que se implica.

5.2.7. Problema 7: Luis compra tres paquetes de chicles, cada uno le cuesta $ 25.00 ¿Cuánto ha pagado en total?

5.2.7.1. De la suma reiterada a la aplicación del algoritmo, con argumentos

Ante el problema planteado es posible observar como los alumnos ya prefieren la aplicación del algoritmo por ser más rápido.

Diana hace la suma de 25 + 25 + 25 = 75

Eduardo apunta en el pizarrón 25 x 3 = 75 y afirma.

– ¡Es más rápido así ¡

En este momento, es posible identificar la consideración del grupo de las dos operaciones (suma y multiplicación), como adecuadas para resolver el problema y dan la prioridad a la multiplicación como la forma más rápida para resolver los problemas, (Usiskin, 1998).

5.2.8. Problema 8: En un baile hay tres chicos y dos chicas ¿Cuántas parejas distintas pueden formar?

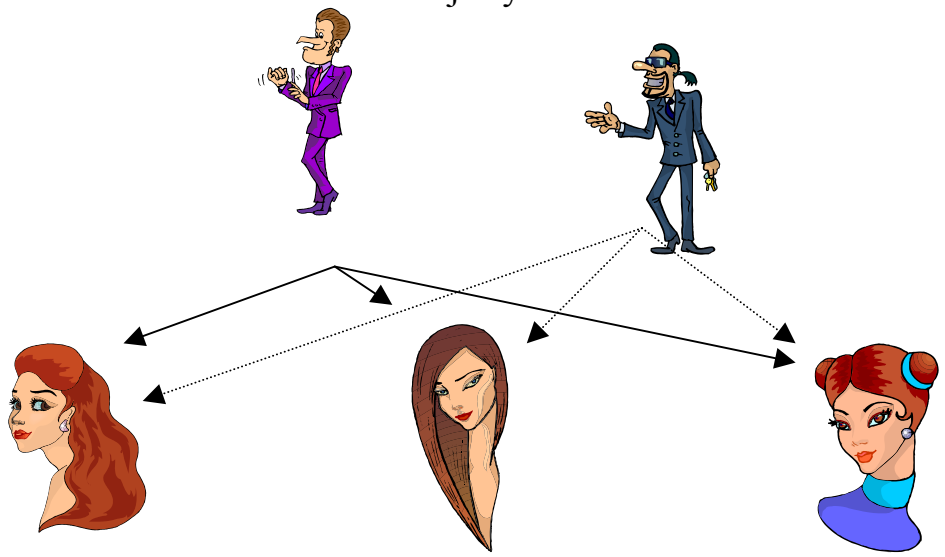
5.2.8.1. Las combinaciones

Este problema corresponde al tema de combinaciones y cuando se trabaja con el grupo parece no generar mayor problema.

Sandra – anota que 2 x 3 y 3 x 2 = 6 y ése es el resultado.

Lo que se observa en Sandra es una certeza de la propiedad conmutativa en la multiplicación.

Mientras tanto Diana hace los dibujos y señala con líneas las combinaciones:



A decir por Santos (1996), el dibujar figuras es una de las estrategias importantes para el entendimiento del problema y permite al alumno avanzar hacia la solución de un problema.

5.2.9. Problema 9: Sí hay 5 chicles en un paquete pequeño y uno grande contiene tres veces lo que el pequeño. ¿Cuántos chicles tiene un paquete grande?

5.2.9.1. La asociación entre suma reiterada y el algoritmo

En el trabajo fue posible observar como los niños con cierta regularidad resolvían el problema con una suma y junto a ella anotaban la multiplicación.

$$\begin{array}{r} 5 \\ +\,5 \\ \underline{5} \\ 15 \end{array} \qquad\qquad 3 \times 5 = 15$$

Al parecer la mayoría del grupo ha identificado una relación directa entre la suma reiterada y las multiplicaciones, pues aplican ambas operaciones a la solución de cada problema.

Con el tiempo y el trabajo realizado los niños parecen argumentar de forma más consistente sus respuestas a los problemas.

5.2.10. Problema 10: María recibe el fin de semana 25 pesetas. Su hermana Soledad que es mayor recibe 4 veces más. ¿Cuánto recibe Soledad?

5.2.10.1. La contextualización

Ante este problema es posible observar cómo el alumno Zoé da señales certeras de una comprensión del contexto y por ello argumenta de forma determinante.

Zoé anota:

$$\begin{array}{r} 25 \\ \underline{\times\ 4} \\ 100 \end{array}$$

> Zoé- (muy seguro en sus afirmaciones) –Así es por que Soledad recibe 4 veces más, por eso son 25 x 4 = 100

Aquí, podemos observar que existe una explicación lógica basada en la información que nos presenta el planteamiento.

Los niños del grupo, en general, también lo asocian con la suma de 4 veces 25 y justifican la multiplicación como un ahorro de tiempo.

5.2.11. Problema 11: Compramos 8 bolsas, cada una de las cuales tiene 34 caramelos. ¿Cuántos caramelos tendremos en total?

5.2.11.1. La afirmación del algoritmo sobre la suma reiterada

Enrique multiplica: 34 x 8 = 272

En tanto que Luis suma ocho veces 34,

34 +34 +34 +34 +34 +34 +34 +34 =

Algunas expresiones de desagrado, por parte del grupo nos señalan que al parecer ahora ya no se aprueba la suma reiterada para resolver un problema, el argumento es que no es la forma adecuada por ser muy larga.

El haberse encontrado con una operación de suma de iguales “larga” parece empujar al niño a preferir la multiplicación para solucionar el problema.

Tal vez, el complejizar los problemas desestabiliza la forma habitual de resolución y empuja al chico a buscar nuevas estrategias que resulten más prácticas.

5.2.12. Problema 12: Hugo corre 12 Km. en 2 días, Paco los recorre en tres días y Luis los recorre en cuatro días ¿Cuántos Km. recorrerá cada uno en un mes de 30 días?

5.2.12.1. La discusión de iguales

Los niños analizan la información recibida y la discuten en pares o al interior del equipo, sus explicaciones ya poseen argumentos sólidos basados en el análisis de la información; los compañeros escuchan con atención al expositor e intervienen cuando se sienten con posibilidad de argumentar.

Al parecer, el haber encontrado el resultado permite, a algunos niños el ir a los demás equipos, por iniciativa propia, para ayudar a sus compañeros. Quizás, podríamos decir que aquí comienza a darse una socialización del conocimiento dominado hasta el momento.

5.2.12.2. La reflexión hacia el valor unitario

Diana- (Señala a la profesora del grupo) Es una multiplicación.
Mtra- ¿Por qué? Y ¿Qué vas a multiplicar?

Diana.- En dos días, este Hugo recorre 12 Km, y en un día corre seis…
Mtra.- ¿Por qué? ¿Cómo lo sabes?

Diana.-(Haciendo una reflexión y mostrándose con seguridad) -Por que es también la multiplicación de seis por dos, que son doce o sumo dos veces seis, y entonces tengo que multiplicar seis por treinta, por que un mes tiene treinta días. Entonces multiplico treinta por seis, (y lo anota en el pizarrón).

$$30 \times 6 = 180$$

Mtra.- Entonces, Hugo ¿Cuántos Kms. Recorre en un mes?
Diana.- Ciento ochenta kilómetros.

La resolución de este problema, es realizada por los niños buscando primero el valor unitario, posiblemente podríamos hablar de un nivel de comprensión mayor respecto del planteamiento del problema y el manejo de la información.

Los chicos comienzan a experimentar una nueva forma de dar solución a los problemas, ahora recurriendo a la búsqueda del valor unitario antes de llegar a la aplicación del algoritmo.

Resumen del apartado

En este apartado ha sido posible el observar diferentes formas de trabajo en la implementación de estrategias para aproximarse al uso del algoritmo de la multiplicación de forma que éste les resulte de mayor significado.

Los niños han partido de la suma reiterada y la muestra de una argumentación casi nula, hasta el señalar que la aplicación del algoritmo es mejor por ser más rápido el llegar al resultado.

También se ha observado una argumentación más sólida por parte de los niños respecto de la información y contexto de los problemas y se ha hecho una aproximación al trabajo con las combinaciones y la proporcionalidad en donde los niños han recurrido al valor unitario para trabajar con este en la multiplicación que los lleva al resultado del problema planteado.

5.3. Entrevista con la profesora: (E: entrevistador; Mtra: maestra del grupo que se observó)

Hacia el final del trabajo con el grupo decidimos entrevistar a la profesora del grupo con la intención de conocer sus impresiones respecto del trabajo realizado con su grupo, escuchar si encontró algún elemento que le resultara sustantivo para su trabajo cotidiano o si ella misma podía señalar alguna situación no grata o incomoda en el trabajo que se llevó a cabo y esto fue lo que obtuvimos.

E-¿Qué cambios percibió en el grupo?

Mtra.- Bueno en el aprendizaje de las matemáticas venían un poquito mecanizados y primero que nada fueron actividades muy divertidas para ellos, me ayudó a integrar a los compañeros que tenían dificultad para socializarse, me ayudo a realizar actividades divertidas, que a ellos les agradaban, me ayudó a avanzar un poquito más rápido a lograr que ellos aprendieran el proceso de la multiplicación, según se sabían las tablas por que ya las habían trabajado en segundo año.

E-¿Cuáles son los objetivos que percibió se perseguían en esta propuesta.?

Mtra.- En un principio quería saber cómo esa propuesta podía ayudar, primero, para aprender y para ver como podía yo ayudar a los niños, mis propósitos cambiaron y sobre todo a rescatar los conocimientos que ya poseen de antes. Según dominaban las operaciones básicas pero ví que habían deficiencias. Este trabajo es totalmente diferente.

Mtra.- Los padres decían que denotaban un cambio en sus niños…

E- Su organización anterior a esta forma de trabajo implicaba la organización en equipos?

Mtra. El mobiliario que poseo no me favorece mucho y el movimiento de bancas me preocupaba por que los niños se podían lastimar, pero no tengo la organización por filas ni me gusta clasificar a los niños en filas de buenos y malos.

Mra.-Se busca primero que se integren como quieran pero después los integramos para que se puedan socializar. En español, educ. física sí los trabajaba.

E- Beneficios que considera se obtuvieron con esta modificación al trabajo.

Mtra.- Umh….ahora que estamos empezando con esto me ayuda a ver que necesitan algo tangible, necesitamos estrategias…

E- ¿Cree que el trabajar con actividades lúdicas realmente crea un beneficio.?

Mtra.- pues incluso los niños lo tomaron así como una hora de jugar…. Para ellos era como un descanso, como la hora de jugar. Nos facilitaba muchas cosas y nos ayudaba a pensar.

E- ¿Qué inconvenientes le encuentra al trabajo realizado.?

Mtra.- …Bueno…primera me hubiera gustado conocer todos los problemas desde el inicio…ellos hablaban muy bien del trabajo de usted y… pedían problemas similares…problemas que les hicieran pensar… hubiera sido muy padre el contar con más material concreto en algunos problemas como lo de los chicles tuvimos que comprar chicles y meterlos en cajitas para comprobar lo que habíamos trabajado en clase.

E- ¿Qué modificaciones hubiera realizado a las actividades?

Mtra.- Bueno… la primera... ¿Cuál sería…? Utilizar más material tangible... por que les gustan… nos gusta…los problemas me parecieron formidables, por que son problemas que ellos viven…en cuanto manejo con el libro…habían lecciones atrasadas que …movíamos para trabajar con usted ese tema.

E- Comentarios que desee manifestar...

Mtra.- …se trata de aprender y de tomar nuevas propuestas,… eso lo vamos a reflejar en el grupo…los niños llevan otra visión y eso me ayuda a cambiar mi forma de pensar…como se les puede ayudar para que sean mejores en los grados posteriores…era agradable cuando los niños pedían más o actividades como las que Ud. realizaba para que los niños no lo extrañaran ni al trabajo…nos sirvió y ayudó mucho…

La percepción que la profesora señala sobre la actitud de su grupo, para el trabajo que se realizó, nos deja ver que los niños, y ella misma. asocian las actividades con juegos y consideran importante el manejo de materiales concretos, manejarlos con la finalidad de obtener las certezas sobre los resultados, mediante la visualización de los resultados numéricos comparándolos con eventos físicamente perceptibles.

Posterior a la entrevista con la profesora decidimos retomar también una entrevista con sus alumnos para contrastar las opiniones y señalamientos que se nos habían hecho por parte de la profesora.

5.4. Entrevista con los niños (E: entrevistador; Als.: alumnos entrevistados)

E- ¿Qué les pareció el trabajo?

Als.-
Lo SENTIMOS como juegos
Nos gustó trabajar en equipo por que antes no lo hacíamos y nos gustó.
Los problemas ahora son más fáciles
Nos gustaba pasar al pizarrón.

E- ¿Creen que se mejoró su forma de explicarse?

Als.- Sí

E- ¿por qué?

Als.- Antes sólo trabajábamos en el cuaderno

Nos daba pena con la cámara al principio nos sentíamos raras.
La multiplicación y cualquier operación nos sirve para resolver problemas.

E- ¿Qué juego les gustó más?

Als.- El basta numérico y el de las pulgas, por que aprendíamos mientras jugábamos…Nos hubieran gustado más juegos.

Los niños expresan en propia voz lo que les parecieron las actividades, quedando de manifiesto el considerar las actividades como juegos, también expresan el que las multiplicaciones les permiten resolver situaciones problemáticas, misma conceptualización que extienden para con las otras operaciones.

Reconocen un cambio en su forma de trabajo y expresan que ahora les resultan más sencillos los problemas así como el explicarlos y darse a entender. Las experiencias previas y las oportunidad de comunicación entre los integrantes de un grupo permite a los estudiantes el desarrollo de su lenguaje y la comprensión matemática de tareas semánticamente complejas (Crawford, 1996).

La congruencia existente entre la forma de percibir el trabajo por parte de los alumnos y la maestra permitirá hacer algunas aseveraciones que posteriormente expondremos.

CAPÍTULO VI
CONCLUSIONES

6.1. Conclusiones derivadas del análisis

Del análisis de los trabajos de diferentes investigadores y de las observaciones que realizamos en el grupo de tercero, anteriormente mencionadas, concluimos lo siguiente:

- Comencemos por señalar que una situación que la profesora del grupo indica que es importante es la del uso de materiales para auxiliar el trabajo de la resolución de problemas; también notamos que el mismo libro de matemáticas de tercer grado hace uso de dichos materiales y de imágenes gráficas que auxilian a los niños a comprender y dar solución a las diferentes situaciones problemáticas. Este tipo de observaciones nos refieren a la forma de trabajar en el grupo, en donde primero los niños trabajaban con sopitas, y que la profesora nos refiere en su entrevista, en donde señala que le hubiera gustado trabajar más con materiales concretos, como cuando tuvo que comprar cajitas de chicles para comprobar a los niños el resultado de uno de los problemas.
Así podríamos retomar lo dicho por Szendrei (1996), "cuando se permite a los alumnos inventar sus propios algoritmos, éstos generalmente al inicio modelan las situaciones empleado manipulables, dibujos o diagramas". Estos materiales, al parecer, permiten a los niños auxiliarse y controlar las situaciones que se plantean en los problemas, les dan una visión más objetiva, aunque dichos manipulables llámense materiales educativos o herramientas comunes, tienen en sí sus propias bondades y limitantes.

El trabajo de materiales como las sopitas es modificado por Sandra cuando dibuja los elementos que le son presentados en un problema, como en el caso del problema de las combinaciones, en donde dibuja a las personas.

- Por otro lado, a lo largo de las observaciones que realizamos en el grupo de tercero pudimos observar que, de acuerdo con Fuson *et. al.* (1997), los algoritmos son la forma secuencial de pasos mediante la cual se resuelve un problema o realiza una actividad. Así, tan pronto como los niños reflexionan y abstraen sus algoritmos, éstos se vuelven más sofisticados y los niños dependen en menor grado de la manipulación de materiales. Situaciones que pudimos observar en el tiempo que trabajamos con el grupo.

- Al igual que sucedió en el trabajo de Moreno y Waldegg (1992), se observó que los primeros procedimientos numéricos, como el sumar reiteradamente un

número, aparecieron cuando los niños tuvieron la necesidad de verificar sus resultados. Así la necesidad de verificar se reveló como una característica adecuada para dar significado a la multiplicación, asociándole a la suma reiterada, es el caso de varios niños que posterior al resultado obtenido mediante la multiplicación anexaban la suma reiterada, (ver pág.106).

- Entre las razones que justifican el uso de los algoritmos una es que la aplicación de ellos demuestra que son más veloces, ya que proporcionan una vía directa hacia la respuesta a decir por Usiskin (1998). Esta situación es percibida por Pablo (el alumno que señala que con la multiplicación es más rápido, (ver pág. 105) y la deja de manifiesto por la rapidez de su aplicación como una justificación para preferirla a la suma reiterada de varios elementos.

- Del trabajo aquí reportado es posible inferir que los contextos de actividad en los que los niños participaron fueron favorables para que se involucraran en la solución de los problemas que se les plantearon, al parecer los convida a una participación más dinámica y de manera voluntaria, permitiendo captar su atención e incrementar su esfuerzo por dar solución al planteamiento realizado. La escolaridad es únicamente una pequeña parte de la experiencia cultural del niño, con respecto a acciones comunitarias compartidas que dirigen su atención a categorías culturalmente significativas (Crawford, 1996), como la colaboración entre pares para alcanzar una meta común, (ver pág. 108).

- Es importante el señalar que en el grupo observado el vocabulario y la forma de explicar de los alumnos son mejores conforme practican al pasar al pizarrón y al exponer sus propias estrategias, sosteniéndolas con argumentos como por ejemplo, cuando Diana expone el procedimiento para solucionar el problema, (ver pág.108). Esto refleja la importancia de la negociación entre expertos y novatos, constituyendo culturalmente formas significativa de conocimiento, (*Ibíd*).

- En particular, dentro de esta investigación observamos que la actividad del basta numérico parece ser una de las más promisorias en la creación de estrategias por parte de los alumnos, para dar solución a los eventos que se les presentaron, pues fue en su aplicación que los niños desarrollaron el mayor número de estrategias, como lo son las reportadas en las páginas 91-94 de esta tesis.

En el trabajo con el basta numérico, pudimos observar que los niños, están en posibilidad de complejizar el grado de dificultad de las cifras, partiendo de sus propios dominios, es una actividad de juego y les hace participar de manera

más entusiasta, permitiendo la comunicación entre ellos para justificar sus estrategias.

- Aquí se ha observado que el alumno pretende resolver las situaciones que le son planteadas mediante formas que le son particulares, mismas que le han servido en su momento y que al parecer son abandonadas conforme surgen otras nuevas que sean de mayor utilidad, como es el caso de Zoé al cambiar la suma exhaustiva por la suma seriada. Así dentro de las estrategias y su evolución vimos como el conteo unitario se ve desplazado por el conteo en series cuando el estudiante ya tiene el dominio de éste último, (ver pág. 103).

- Según lo observado en las sesiones de trabajo con el grupo, las bases de la multiplicación quedan establecidas sobre el dominio de la suma reiterada y su algoritmo, así podríamos decir que el alumno que comprende el proceso y función de la adición tendrá la posibilidad de echar mano de ella para auxiliarse y con ello poder aprender de manera exitosa las multiplicaciones, en un primer tiempo, y darles uso en los diversos contextos en que le sean presentadas.

- Resulta no menos importante el mencionar que la enseñanza de las multiplicaciones no es sólo hablar de sumas reiteradas, sino que éstas tienen otras implicaciones que las hacen de mayor dificultad para el educando; entre ellas esta la relación multívoca entre varios datos.

- Es importante considerar los elementos que pueden hacer de la clase algo más enriquecedor, como es el caso de la discusión y presentación de las ideas entre los estudiantes y el maestro, donde los argumentos respectivos, resultan ser ingredientes sustantivos en el aprendizaje de las matemáticas, situación que pudimos ver cuando comparamos las primeras explicaciones de los procedimientos que los niños emplearon y las formas de comunicación que utilizan en las últimas sesiones registradas, en las cuales ya utilizan un lenguaje más preciso y argumentos sólidos, situación reportada también por Brousseau (1993).

- También observamos que ante las dificultades de comprensión o de argumentación de un niño hacia el grupo la representación gráfica o con dibujos se torna un elemento importante en el trabajo con los problemas. Con cierta frecuencia algunos niños recurren a estos auxiliares para retomar el camino hacia la solución del problema planteado o para sostener sus propios argumentos, como lo vimos con Sandra y con Diana en varias ocasiones, (ver pág.105).

- Según lo observado en el grupo, al parecer el trabajo con la proporcionalidad hace pensar de diferentes formas a los alumnos en las relaciones entre las cifras, como lo son el buscar el valor unitario, la duplicación o la posibilidad de trabajar con diferentes tipos de números, y posiblemente, también posibiliten algunas reflexiones que sirvan de base para sus conocimientos futuros sobre proporcionalidad y otros temas matemáticos.

- Hemos observado que los niños tienden a imitar a quién logra vencer las trampas, mejorar sus procesos de solución o hacerlos más precisos, igualando sus estrategias, como ocurrió en el caso de Zoé que al ver que otro niño sumaba en series, lo imita, (ver pág.90).

- De igual forma, se ha reportado que la participación del niño se ve influida por la forma en que le son presentadas las actividades, ya que cuando son actividades de su interés, la forma en que se aproximan a ellas tiende a ser más dinámica, más activa y participativa, que cuando sólo se le ponen como tareas a realizar.

- También se ha mostrado cómo el sujeto construye sus conocimientos a través de sus experiencias, como algunas actividades sin ser propiamente juegos, les hacen participar con mayor entusiasmo cuando les hacen parte del contexto de la actividad, pues cuando el problema tiene algún nombre o referencia del grupo o un miembro del mismo la dinámica tiende a ser mayor que cuando no es así como en el problema de la mamá de Pablo (nombre de un integrante del grupo), (ver pág.98).

- Resulta importante el señalar como antes otros autores como Avila (1998), han expuesto que el acondicionar los números al grado de dominio de los niños permitirá un mejor trabajo, pues observamos que si los números son muy grandes o demasiado pequeños pronto terminarán los niños por aburrirse o perder el interés por realizar las actividades, aunque éstas sean juegos, como se vio en la actividad de las pulgas y las trampas, donde por ser demasiado largas las tiras se dificulta a los niños poner las trampas de manera estratégica, (ver pág. 88)

- Algunas de las estrategias empleadas por los niños asemejan partes de los sistemas ruso y egipcio expuestos, por ejemplo:

Los productos parciales y las aproximaciones sucesivas, en donde los niños van haciendo algunas multiplicaciones que les permiten irse aproximando al resultado a base del ensayo y el error .

Cabe aclarar que los sistemas ruso y egipcio son procesos muy elaborados para los niños y hacer una analogía con las estrategias de los pequeños podría parecer demasiado pretencioso.

- Por otro lado el trabajo con la resolución de problemas representó una herramienta muy útil en la creación de estrategias, y consideramos conveniente el agregar elementos que hagan más interesante la participación del estudiante, como imágenes y recursos manipulables. Como resultó en el caso del problema número 1, (ver pág. 82).

- En general, las observaciones realizadas nos permiten decir que con el tipo de actividades instrumentadas los pequeños, tienen una participación más dinámica, con menor sentimiento de presión sobre sus resultados y procedimientos, y con la posibilidad de exponer sus propios argumentos los cuales, se basan en la comprensión del planteamiento y no en la dinámica de un procedimiento preestablecido por el docente.

- El trabajo que aquí se ha desarrollado ha tratado de mostrar al aprendizaje de la matemáticas como una práctica que se desarrolla dentro de una comunidad en constante interacción. Por ello estamos convencidos de que es necesario desarrollar la disposición de los estudiantes a realizar actividades que incluyan la formulación y evaluación de preguntas, problemas, conjeturas, argumentos y explicaciones, así como la de encontrar el sentido de las ideas matemáticas y las conexiones entre ellas, como han sido los esfuerzos de las clases aquí instrumentadas.

Es posible que el cambio de forma de trabajo que permita una clase más dinámica y participativa, encaminada según el nuevo enfoque a construir el conocimiento, situación puede verse obstruida por las propias concepciones del profesor, las cuales según Robert y Robinet (1989), están ligadas a las formas vivenciales de su etapa escolar, y reforzadas por las vividas en su preparación normalista que, en la mayoría de los casos, está desfasada del discurso constructivista.

- Finalmente, tenemos que reconocer que el trabajo sugerido por el nuevo enfoque SEP (1993), encaminado al constructivismo, dista de las formas “tradicionales” que ponderan de manera superlativa una clase “ordenada” sin cuestionamientos a los conceptos y algoritmos, y donde los maestros ocupan el tiempo con sus propias exposiciones y planteamientos.

Es en este sentido que el presente trabajo ha tratado de aportar algunos elementos a considerar para fomentar la participación de los niños en su

aprendizaje, basándolo en la implementación de estrategias informales por parte del estudiante que le permitan un conocimiento con mayor significado y fomentando su participación activa. Para lo anterior es importante invitar a los maestros a modificar sus formas de trabajo permitiendo a los alumnos construir y reflexionar sobre los algoritmos a dominar. Tal vez esta sería una forma más adecuada de realizar su práctica educativa.

- Además ante actividades similares a las realizadas, algunos niños realizan cálculos mentales, otros cuentan o suman y otros más hacen uso de la manipulación para auxiliarse al resolver las multiplicaciones. Sin embargo, la participación del docente será determinante en cada caso, particularmente si atendemos a la zona de construcción del conocimiento, ese espacio psicológico compartido entre el profesor y el niño, en donde es posible que el profesor construya ambientes para el desarrollo intelectual de sus alumnos y estos construyan conocimientos más profundos.

5.6. Reflexiones finales

En la investigación de campo el trabajo de observación y transcripción tiene un papel muy importante así como la interpretación y el análisis de lo observado, puesto que los resultados de que se habla en las conclusiones, sobre la enseñanza del algoritmo en la escuela, proporcionan bases más sólidas para reflexionar y opinar sobre lo que sucede sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en el salón de clase.

A continuación enlistamos las reflexiones motivadas por este trabajo y que consideramos son las más importantes:

1. La participación del niño en las tareas que le son encomendadas se vuelve más dinámica cuando dichas tareas mantienen alguna relación directa con sus intereses y a decir por Fourestier (1940). “Desde hace muchos años, los pedagogos coinciden en que los niños pueden aprender a través del movimiento y del juego haciéndolo de una forma mucho más eficaz y agradable.”

2. Los niños, al considerar que una estrategia ya no les es útil, buscan la aplicación de otra; sin embargo, ante situaciones que implican la duda en la certeza del resultado y que sienten incertidumbre por el desconocimiento de la validez de una estrategia nueva, tienden a retomar aquella que les resultó en un primer momento como más segura de aplicar.

3. Aunque algunas actividades parecían más promisorias para la creación de estrategias como las de “dilo con una cuenta” o “las pulgas y las trampas”, ello no fue así. Es posible que el momento en que se presentaron no fuese el más adecuado o quizás la forma; sin embargo, la gran cantidad de estrategias que emergieron hizo patente un alto grado de satisfacción por parte de los niños por haberlas obtenido. Los niños parecían disfrutar con librar los obstáculos que implicaban las actividades o situaciones planteadas, pues exponían con agrado y satisfacción la forma en que lo habían hecho.

4. En cuanto a la metodología de la investigación que aquí se utilizó (ver capítulo respectivo) hemos experimentado como el uso de nuevas técnicas en la investigación conlleva a la utilización de equipos o aditamentos más sofisticados, como la grabadora y la video, donde la aplicación de nuevas técnicas no está exenta de nuevas implicaciones y puede presentar nuevos problemas implícitos. Los avances metodológicos en la investigación de campo pueden conllevar sus propias limitantes o dificultades, como los problemas de transcripciones que resultan complejas o la pérdida de elementos que están ubicados fuera del foco de la cámara y que por ello no alcanzamos a rescatar.

5.7. Implicaciones Didácticas

1. Este trabajo ha sido una muestra de la importancia de considerar la participación de los niños como un punto de donde partir para el aprendizaje de las matemáticas, tomando en consideración que nuestros alumnos son seres con un gran potencial y un cúmulo de conocimientos e intereses, que debemos tomar en cuenta al planear nuestro trabajo docente y al desarrollarlo en el aula.
2. El texto de matemáticas de tercero contiene como parte de su formato, planteamientos que invitan a actividades como las que aquí planteamos a los niños, también incluyen el uso de materiales algunos de los cuales están en la parte final del mismo, en los recortables, y mantienen secuencias graduales de la dificultad y magnitud de las cifras en un orden ascendente, a retomar.

Algunas de las actividades predominantes en el libro respecto de las multiplicaciones están relacionadas con el trabajo con los arreglos rectangulares, la proporcionalidad y la resolución de problemas, con la inserción de dibujos que en su mayoría representan a niños. En este sentido, el trabajo que aquí se realizó retoma parte de las secuencias que presenta el libro en cuanto a trabajar con materiales, imágenes y algunos temas, como el de arreglos rectangulares.

3. Los niños del grupo observado y la maestra coinciden en que las actividades realizadas fueron agradables por considerarse un tiempo para jugar y que les

hubiera gustado tener más trabajo con materiales concretos para trabajar, como cuando la maestra compró chicles para comprobar uno de los problemas.

4. Es necesario tomar muy en cuenta el contexto de los niños para que el trabajo escolar no sea ajeno a su historia e intereses, como cuando trabajamos con el nombre de Pablo en uno de los problemas o cuando les señalamos que ellos iban a realizar la receta del pastel.

5. Es importante el invitar e incitar a los alumnos a reflexionar sobre su forma de trabajo con los problemas y que el docente reconozca la importancia de lograr que los alumnos lean, analicen y comprendan la información que se presenta en el planteamiento de cada problema.

6. Por último, queremos hacer notar que ante el ejercicio "El desfile", del libro de texto de tercer grado, pág.74, sobre arreglos rectangulares, las estrategias que emergieron en el grupo, para resolverlo se presentaron en el siguiente orden:

Conteo exhaustivo de uno en uno
Conteo en series
Multiplicación de los elementos (número de columnas por número de integrantes de cada columna)
Se identifica la conmutación de los factores de la multiplicación.

Las formas alcanzadas en cada intento de solución son las mismas que hemos podido identificar a lo largo del trabajo con las multiplicaciones y la construcción de su algoritmo, así podríamos afirmar que éstas constituyen un primer orden dentro del proceso de construcción del algoritmo de la multiplicación, y cabría el tenerlas muy presentes en su enseñanza.

Algunas de las situaciones percibidas como más sobresalientes en este trabajo son la importancia de buscar trabajar con actividades que resulten atractivas para los niños, como las de orden lúdico. También resulta necesario resaltar que el poder incrementar el grado de dificultad, faculta al niño en el avance sobre sus propias estrategias y conocimientos, y que el trabajo en grupos pequeños y el intercambio de argumentos les impulsan en la construcción de sus conocimientos de manera significativa para establecer sus propios constructos.

BIBLIOGRAFÍA

1. Avila, A. (1998.). *Los niños también cuentan*. "Resolución de problemas y construcción de la aritmética en la escuela". (Versión para una segunda edición en la colección de Libros del Rincón. SEP. México.)
2. Baena, P., G. (1994). *Instrumentos de investigación.* 12ª Ed. México. Edit. Mexicanos Unidos. p. 124.
3. Balbuena, H. (1989). *La Multiplicación.* Laboratorio de Psicomatemáticas. *DIE / CINVESTAV / IPN. Contenido 4*. México.
4. Block, D., Balbuena, H., Carvajal, A., Dávila, M., Martínez, P. (1993). *Estudio didáctico sobre la noción de división y fracción en la escuela primaria*. DIE-CINVESTAV-IPN.
5. Block, D. (1993*). Matemática, Cuaderno de actualización*. México. P. 47.
6. Block, D. (1994). *Lo que cuentan las cuentas de multiplicar y dividir.* SEP. CONAFE. México.
7. Brousseau, G. (1993). "Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemáticas" En: Sánchez, E. y Zubieta, G. *Didáctica de las matemáticas*. Escuela Francesa. México. DME. p. 1-67.
8. Burns, M. (1994). Aritmetic, *The last holdout.* Ph, Delta Kappa. p. 471-476.
9. Cabrera, A. (1995). *El juego en educación preescolar*. UPN. México. Colección.
10. Carrasco, A. (1998). *El niño aprendizaje y desarrollo.* UPN. México. 139 p.
11. Carvajal, A. (1996). "Una mirada a las matemáticas en la escuela". En: *El uso del nuevo libro de texto de primer grado.* "Conferencia de matemáticas: Encuentros y desencuentros". p. 15-20.
12. C*o*ll, C. (1997). *Constructivismo en el aula.* 6ª Edición. Ed. Barcelona.
13. Chevallard, Y. (1983). "Le passage de l'arithmetique a l'algebrique dans l'enseignement del mathamatique au college". En: *Petit X.* Núm. 5. p. 51-94.
14. Crawford, K. (1996). "Cultural processes and learning, expectationes, actions and outcomes". Chap. 9. In: *Theories of mathematical learning*. Steffe, Nesher, Cobb, Goldin, Greer (eds.). New Jersey. LEA.
15. Douady, R. (1987). "Jeux de cadres et dialectique outil-objet". En: R*echearches en didactique del mathematiques. V*ol. 7. Núm. 2.

16. Flavel, J. (1976). *El desarrollo cognitivo. Ed. Visor. España.*
17. Fourestier, M.(1940). *Las experiencias escolares de Vanves*. Folleto editado por El Ministerio de Educación y Justicia. Folleto II. Dirección General de Educación Física. Argentina. p. 5.
18. Fuenlabrada, I., Block, D., Balbuena, H., Carvajal, A. (1991). *Juega Y aprende matemáticas.* SEP. Libros del Rincón. México. P. 96.
19. Fuson, K. C., Wearne, J. H., Hanlie, G., Murray, P. G., Human, A I., Olivier, T., Carpenter and Fennema, E. (1997). "Childrens conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit adition and sustraction." *Journal for research in mathematics education.* 28: p. 130-62.
20. Gómez-Granell, C. (1995). "La adquisición del lenguaje matemático: símbolo y significado". En: A. Teberosky y L. Toplchinsky, *Más allá de la alfabetización el conocimiento fonológico, la ortografía, la composición de textos, la notación matemática y el aprendizaje.* Santillana. Buenos Aires. p. 285-325.
21. Gravemeijer, K. M., Van den Heuvel y L. Streefland. (1990). *Contexs free productions tests and geometry in realistic mathematics education.* Netherland.
22. Heine B. J. (1993). *Historia breve del algoritmo en matemática*. p. 69-77
23. Hoyos, V. (1998). "Revisando la construcción de significado en torno de las ecuaciones lineales con dos incógnitas: Observaciones empíricas con estudiantes de 16-18 años de edad". En: *Educación matemática educativa II.* 1998. Centro de Postgrado de la UPN. Edit. Iberoamérica. México. p. 343-362.
24. Jae-Meen B. (1998). "Children's invented algorithms for multidigit multiplication problems". En: *Yearbook National Council of Teachers of Mathematics.* University of Chicago. p. 151-169.
25. Jimenez L. y Coria. (1976). *Organización escolar.* 15ª Edic. México. Fernández Editores. 119 p.
26. Lagache, citado por Begler (1979). En: *Psicología de la conducta*. Ed. Paidós. Buenos Aires. p. 29.
27. Leyf, J. y Delay, J. (1968). *Psicología y educación del niño*. Ed. Kapelusz. Buenos Aires. P. 96.
28. Luceño C., J. L. (1999). *La resolución de problemas aritméticos en el aula.* Edic. Aljibe. 118 p.
29. Mancera, E. (1992). "Estrategias didácticas y el enfoque de solución de problemas". *Educación Matemática*. Vol.4. Núm. 2. Grupo Ed. Iberoamérica. p. 3.

30. Mancera, E. (1993). “Problemas, maestros, solución de problemas. Estrategias didácticas y el enfoque de solución de problemas.” *Educación Matemática.* Vol. 5. Núm. 3. Grupo Ed. Iberoamérica. p. 81.
31. Manouchehri, A. y Goodman. (1998). “Mathematics curriculum, reform and teachers: Understanding the connections”. *The Journal of Educational Research*. Vol. 92. Núm. 1. Estudio de 1995-1997 en nivel medio. Estado de Missouri. p. 27-41
32. Maza, C. (1991). *Multiplicar y dividir a través de la resolución de problemas”*. Ed. Visor. Madrid.
33. Maurer, S. B. (1984). “Two meanings of algoritmic mathematics”. *Mathematics teacher.* p. 430-435.
34. McClain, K; Cobb. P. & Bowers, J. (1998). “A contextual investigation of three-digit addition and sustraction”. En: *Yearbook National Council of Teachers of Mathematics*. University of Chicago. p. 141-150.
35. McConnell, J.W. (1995). “Forging links with projects in mathematics in connecting mathematics across the curriculum”. *Yearbook of the NCTM.* Edited by Peggy A. House. p. 198-209.
36. Moreno, L. y Waldegg, G. (1992). “Constructivismo y educación matemática”. En: *Educación Matemática*. Vol. 4. Núm. 2. p. 7-15.
37. Nelson, D., George G. J., and Williams, J. (1993). *Multicultural mathematics.* Oxford.
38. Nesher, P. (1987). “Multiplicative school word problems: theoretical approaches and empirical findings”. En: J. Herbert y M. Behr (eds). *Number concepts and operations in the middle grades.* New York, NCTM. Vol.2. p. 19-39.
39. Newman, D., Griffin, P., Cole, M. (1991). *La zona de Construcción del Conocimiento.* Ed. Morata. Madrid.
40. Peltier M-L. (1998). “Representaciones de los profesores de la escuela primaria sobre las matemática y su enseñanza”. En: *Educación matemática.* Vol. II. Núm. 3 Diciembre 1999. p. 5-24.
41. Polya, G. (1945). *How to solve it.* Princeton University Press Princeton. (Ed. En castellano: Cómo plantear y resolver problemas. Edit. Trillas. México. 1965).
42. Polya, G. (1962). *Mathematical discovery*. Ed. Wiley and Sons. New York.
43. Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares.* Ed. Síntesis. Madrid.

44. Robert, A. y Robinet, J. (1989). "Representaciones de los profesores de matemáticas sobre las matemáticas y su enseñanza." (*Cuadernos del DIRIREM. Núm. 1)*. IREM. Universidad de París VII.
45. Rojano, T. (1996). *La lecto escritura algebraica*. México.
46. Saiz, I. (1994). "Dividir con dificultad o la dificultad de dividir". En: Parra, C. y Saiz, I. *Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones.* Buenos Aires. Paidós Educador. p. 185-217.
47. Sánchez, F. R. (1992). *El juego como auxiliar didáctico en la escuela primaria, en apoyo a la tarea docente*. México. p. 15-21
48. Santos, L. M. (1996). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas.* México. Grupo Ed. Iberoamérica. p. 1-114
49. Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving.* Academic Press. New York.
50. Schoenfeld, A. H. (1987). *Cognitive science and mathematics education.* Lawrence Erlbaum. Hillsdale; New Jersey.
51. Schwartz, J. (1987). "Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations". En : *Number concepts and operations in the middle grades.* New York. NCTM. Vol. 2. p. 41-52
52. SEP. (1994). *Libro para el maestro, matemáticas 3°.* México. p. 295.
53. SEP. (1993). *Plan y programas de estudio*. SEP. México.
54. Stephen, A., (1996). *International handbook of mathematics education*. Bishop et. al. (Eds). Klower. Academic Publishers. Netherlands. p. 701-753
55. Szendrei, J. (1996). "Concrete materials in the classroom". In I*nternational handbook of mathematics education*. Bishop et. al. (Eds). Dordrecht Klower. Academic Publishers. Netherlands.
56. Usiskin, Z. (1998). "The teaching and learning of algorithms in school mathematics". *Yearbook National Council of teachers of Mathematics.* University of Chicago.
57. Valiente, S. (1998). "Matemáticas vacías y matemáticas significativas". *Educación matemática*. Vol. 10. N°. 2. Grupo Editorial Ibero América. p. 145.
58. Vernaud, G. (1985). *El niño, las matemáticas y la realidad.* Ed. Trillas. 1a. Edic. español. 1991.
59. Vernaud, G. (1991). "Multiplicative structures". En: N*umber concepts and operations in the middle grades.* Hiebert y M. Behr (Eds). NCTM. Vol. 2. New York. p. 141-161.

60. Wenzelburger, G. E. (1992). "Participación mexicana en el tercer estudio internacional de matemática y ciencia (TIMSS) de la IEA". *Educación matemática*. Vol. 4. Núm. 2. Agosto, 1992. México. p. 105-109.
61. Zapata, O. A. (1988). "El aprendizaje por el juego en la escuela primaria". *Trascrito del boletín de la Dirección de Educación Física de la provincia de Buenos aires*. Año 1. Núm. 2. Junio, 1988. Argentina. p. 13-16.

Tesis de Maestría Revisadas

1. Montejano V., L. M. (1992). *El algoritmo de la multiplicación*. UPN. México.

2. Suárez O., M. E. (1992). *Los juegos de mesa como recurso didáctico para la utilización de las operaciones fundamentales por el alumno de 5º grado de educación primaria.* UPN. Chihuahua.

3. Molina M., J. (1994). *La multiplicación en el 5º grado.* UPN. México.

4. Mendoza R., L. (1992). *La multiplicación como operación fundamental en nuestra sociedad.* UPN. Chihuahua.

5. Serrano V. P. (1998). *Estrategias que ayudan a comprender la aplicación del algoritmo de la multiplicación en los problemas matemáticos.* UPN. Chihuahua.

6. Martínez F., N. P. (1997). *Desarrollo de procedimientos para dividir*. Un Estudio Didáctico. CINVESTAV. México.

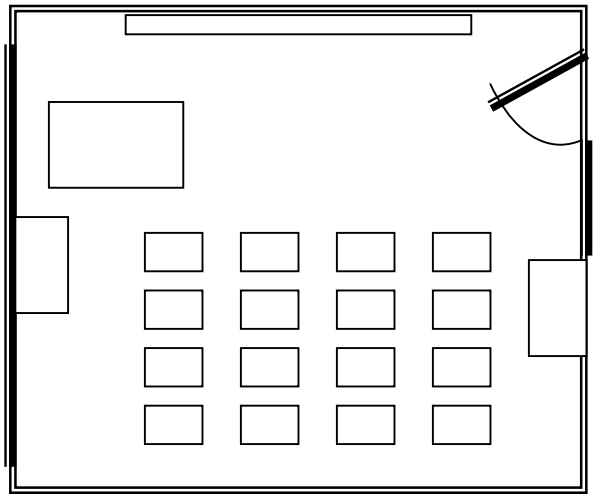
ANEXOS

ALUMNOS ENTREVISTADOS						
NOMBRE Y EDAD	OCUPACIÓN Y EDAD		**DEFINE MULTIPLIUCAR ?**	**SABE LAS TABLAS**	**CONOCE LAS APLICACIONES DE LA MULTIPLICACIÓN?**	**OBSERVACIONES**
	PADRE	**MADRE**				
DIANA JACQUELINE 8 AÑOS	MILITAR 35 AÑOS	HOGAR 31 AÑOS	COMO LAS TABLAS	SÍ (POR SERIACIONES)	MULTIPLICAR O RESOLVER ALGÚN PROBLEMA QUE PONE Y SEÑALA SU PAPÁ	HACÍAN ENUMERACIONES DE 2 EN 2 ETC. IDENTIFICA LAS MULTIPLICACIONES POR LA PALABRA "MULTIPLICAR"
XIMENA SARAHI 8 AÑOS	PALETERO 32 AÑOS	AYUDANTE DE TAPICERO 30 AÑOS	COMO SUMAS REITERADAS	UN POQUITO ENSEÑO PAPÁ Y MAMÁ	NO (TABLA PITAGORICA)	IDENTIFICA LAS MULTIPLICACIONES POR EL SIGNO "x"
ZOÉ ARTURO 8 AÑOS	ARCHIVISTA MILITAR 28 AÑOS	HOGAR 27 AÑOS	APRENDER LAS TABLAS	SÍ DESDE 2° GRADO	PARA RESOLVER LOS EXÁMENES	IDENTIFICA LAS MULTIPLICACIONES POR EL SIGNO "x"
RUBÍ 8 AÑOS	CAPTURISTA DE "SABRITAS" 33 AÑOS	MAESTRA 40 AÑOS	LAS TABLAS	ALGUNAS (DICE)	NO	APRENDIÓ LAS TABLAS CON LOS DEDOS IDENTIFICA EL "TACHECITO"
SANDRA 8 AÑOS	MILITAR 38 AÑOS	HOGAR 36 AÑOS	MULTIPLICAR	CONOCE LAS DEL 2,5,10.	REFIERE LA SOLUCIÓN DE MULTIPLICACIONES EN LOS EXÁMENES	IDENTIFICA LAS MULTIPLICACIONES POR EL SIGNO "x" Y POR LA PALABRA MULTIPLICACIÓN
CARLOS CRISTIAN 8 AÑOS	SOLDADO 47 AÑOS	MAESTRA 40 AÑOS	APLICAR LAS TABLAS	LA DEL 5 Y LA DEL 10	PARA RESOLVER PROBLEMAS DE LA TIENDA (ABREBIAR CUENTAS) Y PARA ESTUDIAR	UBICA EL SIGNO "POR" "x" LAS OCUPA EN LA TIENDA DE SU ABUELITA

Visitas y registros

Descripción del espacio

El trabajo del profesor con el grupo se realiza en un aula, ubicada en un primer piso al lado norte de la escalera, sus dimensiones son de 6 metros de ancho por 7 metros de largo con un pizarrón al frente (norte) y un escritorio colocado a un extremo del mismo, las bancas binarias de los alumnos se encuentran ordenadas en cuatro filas de cuatro bancas cada una. El grupo consta de treinta alumnos de los cuales la mitad son varones y la mitad niñas y se encuentran sentados por parejas hombre-mujer.



El trabajo de las clases de matemáticas, a observar, se realiza los días lunes y viernes a las 9:00 am y con la integración en equipos, los cuales constan de cinco o seis niños por equipo y en los cuales se pretende tener siempre los mismos integrantes. Además los alumnos considerados con mejores niveles de rendimiento, a criterio de la profesora, están intercalados en los diferentes equipos; cabe aclarar que en la presente observación los niños a observar han sido señalados como los más dinámicos o participativos por parte de la profesora del grupo a conocer:

Zoé, Ximena, Diana, Carlos, Sandra y Rubí.

Estrategias de Zoé

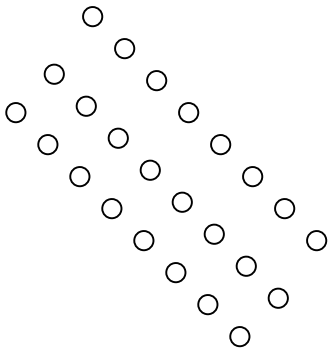
Primera sesión: Trabajo Con Colecciones De Objetos
9:00 am
La maestra, después de formar cinco equipos de seis niños cada uno y repartir un puño de sopas a cada equipo, solicita formar, sobre sus mesas 5 grupos de 4 sopas cada uno. En esta primera parte Zoé forma 4 grupos de 4 sopas en lugar de las solicitadas por la maestra.

Alejandro se dirige a Zoé y le dice– "Zoé la maestra dijo 5 grupitos no 4"(haciéndole la observación a Zoé para que éste corrija). La maestra no se percata de la situación que se presenta con el alumno y continúa... – "Ahora hacemos tres de dos". Una niña grita, "seis.." y se repite a coro en el grupo "seis.." Mientras tanto Zoé integra sus tres grupos de dos sopas cada uno, y el equipo al que pertenece lo aprueba cuando todos cotejan sus agrupaciones y la maestra ve que la mayoría lo ha hecho bien da otra instrucción) – "Ahora 4 grupitos de 5 elementos." ***Zoé los forma y recuenta los elementos (recuenta en voz baja pero perceptible de cinco en cinco- "cinco, diez, quince..." - está contando mediante seriaciones)***

La maestra se dirige al grupo y pregunta -"¿Cuánto es?" y el grupo responde –"Veinte", (A coro.)
Maestra– "Ahora vamos a hacer dos de dos" (parece satisfecha de la rapidez con que se expresan los resultados)
Alumnos. – "ya!..ya!..cuatro! ... cuatro!" la mayoría de los niños gritan los resultados, casi de inmediato, (eufóricos como felices por el dominio de las situaciones que se les plantean.)
Zoé dice en voz alta– "¿cuatro qué?..." (en tono de desconcierto); sin embargo ha formado, sobre la mesa, los grupos que fueron solicitados por la maestra, - "¿dijo dos o dijo cuatro?..."(sigue cuestionando como esperando que alguien le aclare la situación; sin embargo nadie le presta atención y continúan)

Maestra – "Ahora 6 grupitos de 3 sopitas" , en este momento la maestra requiere elevar su tono de voz ante los gritos y el ruido. Zoé cuenta en voz alta "uno, dos, tres", del primer grupo y se sigue contando en serie, "tres, seis, nueve, doce...," hasta el total y grita "dieciocho...!"
Maestra – "¡bien!" (con tono de alegría)
9:20

Carlos en su propio lugar comienza a realizar formaciones con las sopas tomando en cuenta los números señalados por la maestra, y lo hace a manera de ***arreglos rectangulares.***
Maestra –"Formen tres grupitos de ocho sopitas cada uno" y Carlos las forma de la siguiente manera:



La maestra pregunta al grupo " - ¿Cuánto es?" y el grupo contesta en coro. "– veinticuatro!"

En ese momento la maestra cambia la dinámica y ahora lo apunta en el pizarrón:

3 veces 3 =

Los alumnos gritan solicitando ser los que den a conocer su resultado "- yaa! ... yaaa! Nueve!...nueve!" y la maestra gritando más fuerte "- sin gritar! .. sin gritar!" y expone un nuevo planteamiento "- Haber ahora..." y apunta 4 veces 4 = ; en el pizarrón.

Los alumnos nuevamente y casi de inmediato "- yaa!...yaaa!...doce!...." **(Al parecer cuando responden al 4 x 4 lo que algunos hacen corresponde a 3 x 4 y por ello gritan "12")** la maestra dirigiéndose a Luis; (quien ya gritaba el resultado con anterioridad) -"Haber Luis ¿Cuánto es?" y éste sólo repite una vez más "- dieciséis"

Maestra .- (Al grupo) ¿ Cuánto dijimos que era?...
Grupo.- ¡Dieciséis..! (A coro)
9:35
Finalmente pregunta a equipos en particular "- Equipo de Pablo, ¿7 equipos de cuatro?". Pablo, forma los grupos y contando de uno en uno, responde

“son veintisiete” y la maestra lo cuestiona “- ¿Seguro que son 27...?” a lo que el equipo completo responde “-Veintiocho...”

Zoé desde su lugar contaba, en voz baja, como concentrado “**cuatro, ocho, doce, dieciséis...”**

María grita “- treinta y seis..” y la maestra al escucharla se dirige a ella “- ¿Por qué?” (mientras le ayuda, le señala que había formado un grupo de más y que había contado mal.

Mtra: “- Haber tienes, 1,2,3,4,5,6,7, te sobra un grupito; hiciste uno de más...-¿Cuántos son Pablo?”. (Se apoya en el compañero de María) éste responde “- Son 28...maestra”

Maestra “- Haber el equipo de Zoé ¿Cuántos son 10 equipos de seis?”. Zoé cuenta de uno en uno cada conjunto y al hacerlo pierde la cuenta... Y la maestra repite “- diez de seis...¿Cuántos son?”...

Zoé: “- sesenta...!”la profesora con una sonrisa solicita, “- Demuéstramelo...!” y Zoé forma cada grupo y los cuenta, de uno en uno, hasta completar los diez grupos...(Al parecer cuando se enfrenta ante la necesidad de comprobar su dicho abandona la estrategia de conteo seriado y vuelve al de modelación directa por unidades.)

De esta forma el caso presenta dos manifestaciones de estrategia con las cuales el alumno pretende resolver las situaciones que le son planteadas, mediante formas particulares de uso, una de las cuales es el *conteo mediante seriaciones* y el otro mediante *el sistema de arreglos rectangulares.*

El uso del conteo seriado refiere a la suma de números iguales y por ello podemos aseverar que algunas de las bases de la multiplicación quedan establecidas sobre el dominio de la suma, así podríamos decir que el alumno que comprende el proceso y función de la adición tendrá la posibilidad de echar mano de ella para poder aprender de manera exitosa las multiplicaciones y darles uso en los diversos contextos en que le sean presentadas.

Las formas de resolver los planteamientos que emergieron en las situaciones donde los niños tenían que hacer agrupaciones ha permitido a Zoé establecer un mecanismo de *conteo seriado* que permitirá corroborar sus resultados en la realización de las multiplicaciones según lo menciona el trabajo de Moreno (1992)

En tanto que el trabajo realizado por Carlos se anticipa a el de "Arreglos Rectangulares" que se presenta en apartado anterior y que es aplicado y sugerido por Block (1994).

<u>Entrevista posterior a la 1ª. clase</u>

Diana
-¿Qué hicimos?
Diana- Estuvimos multiplicando
- ¿Cómo sabes?
Diana- Por que la maestra nos ponía los números y yo contaba en mi mente y yo decía 8 x 5 cuarenta y por eso...
- ¿Para qué te sirvió?
Diana- Para aprender más cosas, para problemas que la maestra nos dicta...
- ¿Como qué cosas?
Diana- Si se me olvidó alguna multiplicación lo puedo hacer más rápido y contar en mi mente...

14-09-2001
9:10

Mtra. -"cada quién tome un montoncito de sopitas y las agrupa como quieran pero sin que sobren sopitas sueltas". Mientras proporciona un puño de sopas a cada equipo.

Hace mención del trabajo de la clase anterior sobre las agrupaciones.

Incidentalmente Ximena describe a las matemáticas como la materia más difícil.

Noé. (Comenta) –"repetir varias veces las tablas es un buen castigo para los niños que se portan mal, y así se las aprenden

En esta sesión cada equipo está formado por cuatro integrantes, pero trabajan en parejas y cada niño toma un puñado de sopas; al ser todos diferentes cada uno debe acomodar sus sopas como pueda y lo hacen de la siguiente manera:

Lupita-“ yo tengo 8 sopas”. Y las acomoda de hecho, en un arreglo rectangular:

☺☺ ☺☺
☺☺ ☺☺

-Rubí Acomoda 7 columnas de dos sopas cada una

☺☺☺☺☺☺☺
☺☺☺☺☺☺☺

Ximena forma 5 columnas de 4 sopas c/u., y cuenta de uno en uno en voz alta.

☺☺☺☺☺
☺☺☺☺☺
☺☺☺☺☺
☺☺☺☺☺

Ximena está formando grupos pero los cuenta como un **como un todo,** de uno en uno. Lo que desde nuestro punto de vista apela a una estrategia de Modelación directa por unidades, de acuerdo con Jae-Meen (1998), la cual se explica en al capítulo anterior.

9:25
La maestra se acerca a Ximena, que agrupa a manera de arreglos rectangulares y cuenta sus grupos de sopas.

Mtra. -“catorce grupos de 2... son...entonces...?” y se queda esperando la respuesta... “¿Cuántas tienes?”... repite a Ximena.
Ximena. después de contar de uno en uno, dudosa -“¿veintiocho..?
Mtra. al resto del equipo -“¿Cuántas tienen?”.
Als. al unísono -“ veintiocho...!”.

Mtra. –“ahora deben juntar todas las sopas y cada equipo decide cuántos elementos tendrá cada grupo de sopas”.

El equipo de Ximena decide hacerlo de cinco elementos cada grupo.

La maestra Trabaja de equipo en equipo , mientras los niños lo hacen sin mayor problema.

Mtra. pregunta a un equipo –“¿Cuántos grupos tienen en total?” “si tienen 10 grupitos de cinco elementos cada uno -¿Cuántas tienen?”
Pablo -“cincuenta”.La maestra asienta con la cabeza y apunta en el pizarrón.

10 grupos de 5 elementos =

Pasa con otro equipo y señalando al equipo apunta,

6 grupos de 6 elementos =

Mtra. en voz alta al grupo -“ellos tienen 6 grupos de 6 elementos”...-“¿Cuántos son?!” . Luis grita -“sesenta...!” pero la maestra no lo atiende y se dirige a Ximena
Ximena -“ treinta y seis...!”

Es frecuente observar que algunos profesores prestan mayor atención a los niños que dan la respuesta correcta, a los planteamientos realizados por el profesor del grupo, y sería aconsejable el que se hiciera también con aquellos que dan las respuestas erróneas, pues son quienes requieren de mayor apoyo del profesor del grupo.

Al finalizar la sesión de trabajo y platicar con Ximena, ella comenta que al hacer agrupaciones se aprende a hacer multiplicaciones.(Dice que para saber más rápido la respuesta se hace una multiplicación).

Podemos observar, también cómo la estrategia empleada en un primer momento (de contar de manera seriada, en el caso de Zoé) se ve abandonada y es sustituida por la agrupación de los conjuntos y conteo a manera de un "todo". Así una vez que se hace más complejo el planteamiento o el problema mismo, se vuelve necesario, para el alumno, implementar una nueva forma de solucionar los problemas, una que resulte más apropiada a seguir por el estudiante, situación que es referida por Brousseau citado por Peltier (1998)

18-09-2001
9:45

Arreglos Rectangulares

La maestra, después de formar cinco equipos de seis niños cada equipo, reparte cuadrados de colores de 10 x10 cm., uno a cada niño, (cabe aclarar que ya se ha trabajado con doblado de papel anteriormente.)

Mtra. al grupo -"Doblen el papel a la mitad y lo desdoblan para hacerlo también del otro lado". Y pregunta. "¿En cuántas partes está doblado?"
Als. A coro –" cuatro.."

La maestra dobla su papel en octavos.
Mtra. - "Ahora, ¿Cuantas partes tiene?"
Als. - " ocho..!".
Mtra. - "¿Quién me dice como formar 16?" y sin dar respuesta, el grupo lo hace.
Mtra. al grupo "- ¿Cuántos son?, Tengo 4 arriba y 4 en la columna, ¿Cuántos son?."

Als –"dieciséis.."

Mtra. -"Ahora lo doblamos nuevamente y ¿Cuántos nos dan?"
Carlos se pone de pié -"Treinta y dos.."
Mtra. mientras levanta la hoja hacia el centro del salón -"¿Cuántos cuadritos hay arriba?"
Als. -a coro -"ocho.."
Mtra. Desdobla el papel y señala un lado del papel -"¿Y a lo alto?"
Als. en igual tono al anterior " Cuatro..."

Mtra. mientras levanta el papel de frente al grupo -"¿Cuántos son 8 x 4?" Y cuenta de uno en uno en voz alta, hasta 32. En ese momento: Carlos grita -"son 32...32..."
Mtra. - "Volvemos a doblar y veremos sise puede"
Carlos responde alegre –" Sí se puede..."
Mtra. - "Carlos ¿Cuántos son?"
C.- "No sé... voy a ver"...Así Carlos comienza a contar y cuenta de uno en uno..en voz baja –" Son 65..."

Mtra. –"Para que Carlos reflexione" -"Vamos a ver...si tengo 16 y 16". Lo apunta cuatro veces en el pizarrón -"¿Cuántos son?" Y lo resuelve en el pizarrón y apunta "64"...A lo cual Carlos también responde –" Sí, son 64..."

La maestra reparte otro cuadrado a cada niño.
Mtra. en voz alta al grupo -"Lo doblo a la...?" Guarda silencio como esperando respuesta.
Als. A coro –"Mitad...!"
Mtra. –"Lo desdoblo y lo doblo a la...?"
Als. A coro –"Mitad...!"

Mtra. –"Cristian... tengo 2 arriba y 2 abajo...¿Tengo...?" Y guarda silencio en espera de la frase faltante.
Christian –"Cuatro..."

Posteriormente se dirige a otro alumno.
Mtra. –"Tengo 4 arriba y 2 abajo...Zoé...?"
Zoé –"Ocho..."

Mtra. –"¿Cuántos arriba...?¿Pablo...?"
Pablo –"cuatro..."
Mtra. Dirigiéndose a otro alumno –"Y ¿cuántos abajo...?"
A. –"16..."

Mtra. –"Ya tengo 16 cuadritos, ahora... vamos a hacer una figura..." La clase termina con la formación de un rehilete.

Comentarios al término de la clase

Carlos
Jugamos papiroflexia, para poder hacer sumas, sobretodo las que no podemos hacer rápido, por que hay personas que no las podías hacer rápido, Yo primero las escribía y las sumaba rápido, las hacía a veces con los dedos y luego con la mente,... lo que hacíamos no eran multiplicaciones por que lo hacíamos con los cuadrados y nada más era para sumar...

Rubí
Lo que estábamos haciendo era un rehilete y un palito, yo creo que nada más para contar los cuadritos, para hacer el rehilete,..y... creo que hicimos multiplicaciones por que la maestra lo apuntó en el pizarrón.

Ante la actividad los niños identifican la realización de sumas, es posible ver como Carlos señala el que existen niños que realizan las mismas de manera más rápida, aunque no sabe cómo, y que Rubí se percata de las multiplicaciones por lo que la maestra apunta en el pizarrón.

Lo anterior nos permitirá ver más delante cómo el conocimiento de algunos se va socializando.

21-09-01
9:00AM

Combinaciones

La maestra se dirige al grupo para dar inicio al trabajo con un planteamiento
Mtra.–"María tiene 3 blusas y cinco faldas ¿Cuántos cambios de ropa puede hacer?".
Als. –"tres y le sobran 2"
Mtra.–"Fabi ¿Qué combina con qué?"
Fabi -"falda azul y blusa azul"
Mtra.–"Pablo dime otra diferente...?"
Pablo –"Falda rosa y blusa roja"
Mtra. –"¿Cuántos cambios podremos hacer?"

Mientras la maestra apunta las posibles combinaciones en el pisaron el grupo sigue intentando, y una vez agotadas las posibilidades repite varios ya existentes, anotados en el pizarrón.

Mtra. al grupo –"No que nada más tres...¿Cuántos llevamos?" y comienza a contar; el grupo cuenta en voz alta con ella y... siguen los intentos...Al parecer, la maestra no ha notado que las combinaciones ya se han agotado y el grupo sigue repitiendo...hasta que...
Zoé grita –"Ya están todas..."
Mtra.–"Haber Zoé ¿Cuántas combinaciones dijiste, al principio, que tenía María.?"
Zoé -"No sé...!"
M- "¿Cuántas son en total?..." Se hace un silencio y después los murmullos y la gritería.

La maestra irrumpe y pone un nuevo ejemplo, apunta y dibuja en el pizarrón dos tipos sopas y tres de guisado y los niños copian en sus cuadernos...(*La actividad anterior no se ve culminada con la respuesta correcta)*

Mtra. –"Fíjense bien...!...ahora viene otro problema...Me van a ayudar a resolver un problema....El día domingo fui a comer a una fonda y me dieron un papelito que decía que podía escoger" (en ese momento señala lo escrito en el pizarrón) –"entonces...¿Cuántas combinaciones pude haber hecho? Y ¿Cómo puedo saberlo más rápido...?...Haber Paola..."
Zoé irrumpe en tono de juego –"Toda la lista..:"

Los niños comienzan a repetir todas las combinaciones una por una, en forma desordenada.
Jorge grita... –"seis..." situación que retoma la profesora
Mtra. –"Según Jorge son 6 ¿Cómo puedo hacer para saber más rápido? ¿Lo puedo hacer con una operación?"
Marco –"sumando..."
Mtra. –"¿Qué sumaríamos...?"
Marco exclama –"umh...?"
Armando –"tres por tres..."
Mtra. –"Haber...Armando ¿Por qué tres por tres...?"
Pablo –" 3 x 2..."
Mtra. a una alumna –"¿Por qué ...Diana?"
Diana –"Por que 3 x 2 son seis...".
Mtra. al grupo –"Y bien...?" y algunos responden, entre la "bola" –"Deben ser seis..."

Zoé levanta la voz –"yo digo que deben ser 5 dos sopas más tres comidas son 5..."

Diana corrige –“Son seis...”
Mtra. a Diana –“Pon ahí la multiplicación”.
Diana apunta un dos y un tres arriba de los dibujos “2 x 3 = 6”
Zoé A manera de no descartar su anterior afirmación –“hay seis combinaciones y 5 comidas”

Comentarios al término de la clase

Sandra procede de otra escuela y dice que ya le habían enseñado las multiplicaciones. (Refiriéndose a las tablas de multiplicar)

Sandra –“Estuvimos haciendo multiplicaciones, problemas para enseñarnos a multiplicar, lo sé; por que ahí mismo decía en los dibujos que nos hacía la maestra, me dí cuenta que en un lado había dos dibujos y en el otro 5 y medí cuenta de que era “2 x 5 ” ya lo había hecho en la otra escuela, lo que más me gustó es que hicimos multiplicaciones y me enseñan diferente a la otra escuela, aquí me enseñan mejor.”

Carlos –“Estuvimos haciendo combinaciones, combinamos la ropa, me sirvió para saber que nos conviene comprar o comer, para ponernos ropa bonita en una fiesta, se podía resolver con una multiplicación y supe por que de un lado había 2 y del otro 3 y supe que era una multiplicación.”

- (En la siguiente sesión se trabajaron nuevamente combinaciones y los alumnos identificaban las relaciones de ambos eventos, dando solución mediante una multiplicación, en la cual identificaban correctamente los elementos que les eran solicitados. sin mayor dificultad)

3	x	5	=	15
blusas		faldas		combinaciones

24-09-01
9:00

DÍLO CON UNA CUENTA

La sesión comienza cuando la maestra reparte tarjetas con números y signos y solicita describan el contenido de éstas.
Mtra. –"Van a acomodar las fichas de manera que utilicen signos y que como resultado tengamos 20; por ejemplo..." Y apunta en el pizarrón:

3 x 5 +__=20

Ella misma señala –"No se puede, por que nada más tenemos una tarjeta con un 5 Entonces..." Apunta y cambia los números.

0 x 6 + 2 = 20

Mtra.– Señala al grupo una de las reglas –"Recuerden que no podemos repetir números ni signos"

Ximena levanta la mano –" 4 x 5 son veinte..." Y la maestra asienta con la cabeza.
Mtra. –"bien...!"

Ximena hace una observación –"Maestra 5 x 4 también, la diferencia es el orden... sale el mismo resultado...". La maestra solicita encuentren las diferentes formas de obtener 20 y las que se registran son las siguientes:

10 x 2 = 20	3 x 6 +2 = 20	6 x 3 +2 = 20
20 x 1 = 20	6 x 5 – 10 = 20	

Comentarios al terminar la clase

Ximena

- Trabajamos con problemas por equipo, para aprender a resolver problemas con signos; aprendíamos las cuentas que no nos sabíamos bien y las **repasábamos.**

Lo que observo en esta actividad en particular es que se da un repaso de las operaciones y algunas reflexiones en torno al sentido de lo que implica cada una de ellas, (poner, quitar, multiplicar).

28-09-01
9:00

La Pulga y las Trampas

La maestra reparte tiras de papel (metros) a los equipos y da las instrucciones.
Mtra. –"Haber cada equipo toma una tira y tres clips, los clips van a se las trampas y el que caiga en una allí se queda, van a saltar de dos en dos o tres en tres o del tamaño en que cada uno quiera y el que logre pasar sin caer en las trampas se queda con las sopitas que estén en la trampas."
El primer equipo coloca las trampas en los números10,50 y 100.

Valeria salta de 2 en 2 y cae al 10, mientras Ximena lo hace de 3 en 3. Todos cuentan en voz alta –"Tres, seis, nueve, doce..." y logra terminar. Ahora al cambiar de turno Ximena coloca un clip en la casilla 95 (Ella pretendía hacerlo en la 96, por que vio que al brincar de 3 en 3 se tenía que detener en éste; al parecer se equivocó)

Belem, salta de 4 en 4 y sus compañeras la acompañan contando de 4 en 4 en voz alta
(21, 50,83) y escogen saltar de 4 en 4, de 3 en 3 y todas logran pasar sin caer en las trampas.

(Las actividades desarrolladas señalan la dificultad para poder implementar una estrategia; pues los alumnos se agobian ante la longitud de la cinta; que va de uno al cien. Sin embargo los niños mencionan el hecho de que las multiplicaciones servirán como herramienta en la realización de esta actividad, pues identificaban algunos múltiplos del 2 y del 3.)

01-10-01
9:00

Para esta segunda sesión con "La pulga y las trampas" la regleta se redujo a treinta números, se divide a cada equipo en dos equipos, que competirían y cuando la maestra reparte las tira.
Carlos. En voz alta –" Parece una regla...!"

Mtra. -"Ajah...! tienen que buscar la manera en que el equipo de enfrente no pueda avanzar. "

Los niños comienzan colocando las trampas al azar, y de igual forma escogen el número para saltar, posteriormente Ximena inicia poniendo a prueba diferentes tipos de saltos para determinar con cual no caerá en las trampas, da señales de saber cuándo alguna de las opciones de sus compañeras no es la adecuada, cuenta antes de decidir sus saltos y va señalando cuáles números le hacen caer en las trampas.

Comentarios al fin de la clase

Ximena -"Estuvimos jugando a las pulgas y podemos aprender las **series y las sumas."**
Y explica –"**Serie**,... es poniendo 2 + 2 = 4 y así podemos ir numerando, me gustó más al treinta por que había más trampa, podíamos hacer más trampas."

Es importante señalar como la niña identifica y expone lo que para ella es una serie y cómo su lenguaje matemático va conformándose más completo al explicar o dar sus propios conceptos.

06-01-01
9:00

Basta Numérico

Se forman equipos de cinco personas cada uno y la maestra explica un ejemplo.

Se formula una tabla y se acuerda que al terminar el primero se contará hasta veinte para que todos dejen de escribir y se revisen los resultados.; los primeros se hacen de manera grupal y se anotan en el pizarrón.

Basta Numérico				
N°	+2	x 4	x 5	Aciertos
4	6	24	20	2

Observaciones en los equipos:

- Una pequeña cuenta con los dedos y al encontrarse con 11 x 5 lo resuelve como 11 + 5.
- Otros alumnos repiten una a una las tablas hasta llegar a la que puede resolver el problema en cuestión.

Diana apunta la multiplicación y la resuelve así:

$$\begin{array}{r} 1\ \ 3 \\ \underline{\times\ \ 4} \\ 4\ 12 \end{array}$$

Lo que implica el que aísla cada multiplicación por un dígito.

Cuando se les señala que su resultado. no es el correcto, algunos recurren a la ***suma iterada***, ejemplo:

5 x 12 =

Ximena

$$\begin{array}{r} 12 \\ 12 \\ .+\ 12 \\ 12 \\ \underline{12} \\ 60 \end{array}$$

Zoé

5 +5 + 5+ 5+ 5+ 5+ 5+ 5+ 5+ 5+ 5+ 5 =

$$\begin{array}{r} 4 \\ \underline{+\ 4} \\ 8 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8 \\ \underline{+\ 4} \\ 12 \\ \underline{+4} \\ 16 \\ \underline{+4} \\ \mathbf{20} \end{array}$$

Zoé 4 x 5 =

- Carlos- Es que la tabla del 12 no nos la sabemos...!

Aquí podemos observar uno de los riesgos inherentes al uso inconsciente de los algoritmos, en donde sin importar el signo "+" la niña sigue multiplicando y otro en donde Diana multiplica 4 x 13 y le da 412.

15-10-01
9:00

Aplicación del Basta Numérico

Número	*9	*5	*6	Puntos

Mtra –"vamos a contar del 1 Al 20... listos...? Ya tienen sus líneas... ustedes se organizan para ver quien empieza...uno...dos..."
Ximena cuenta hasta cinco... algunos niños en "9 x 5" suman nueve veces cinco o cinco veces nueve-

- Da inicio uno nuevo y ahora el número es veinte.
- Ximena suma 5 veces 20 y para el "20 x 6" suma 20 al resultante de 9 x 5 .

20 20 x 5= 100 20 x 6 = 100 + 20 = 120

$$\begin{array}{r} 20 \\ 20 \\ +20 \\ 20 \\ \underline{20} \\ 100 \end{array}$$

- Sandra hace la multiplicación de 20 x 6 = como 2 x 6 = 12 y le agrega un cero

20 x 6 = **120**

2 x 6 = 12 → 20x 6 = 12 más un cero = 120

Al multiplicar 13 por cinco, Ximena realiza lo siguiente:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 13 \\ 13 \\ +13 \\ 13 \\ \underline{13} \\ 65 \end{array}$$

lleva uno

3+3+3+3+3 = 1 5

apunta el cinco

En la multiplicación 6 x 13 Sandra hace una separación de las decenas y las unidades para sumarlas al final.

13 x 6 =

6 x 10 = 60 60
6 x 3 = 18 + 18

78

Zoé al resultado de 14 x 5 le suma otros 14 para llegar a 14 x 6.

14 X 5 = 70

70 + 14 = 84

14 X 6 = **84**

Sandra ante 15 x 5 parte el 15 en 10 y 5, y suma al resultado de 10 x 5 de 5 en 5 de forma iterada.

15 x 5 = 15 x 10 = **50** + 5 VECES 5

50 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5

55 60 65 70 **75**

Ante multiplicaciones por diez no parecer haber problema alguno y ante la multiplicación de 19 x 5 :

Sandra multiplica 5 x 20 y le resta 5 unidades al resultado.

5 x 19 = 95

5 x 20 = 100

- 5

95

El juego del basta numérico parece ser el más promisorio en la creación de estrategias en los alumnos para dar solución a los eventos que se presentan a los alumnos.