UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

SECRETARÍA ACADÉMICA

DIRECCIÓN DE INVESTIGACIÓN

ESTUDIO SOBRE PROCESOS INTERACTIVOS EN LA FORMACIÓN DEL CONCEPTO DE FRACCIÓN.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRA EN DESARROLLO EDUCATIVO

EN LA LÍNEA DE ESPECIALIZACIÓN:

INFORMÁTICA Y EDUCACIÓN

PRESENTA:

IRMA AVALOS TENORIO.

DIRECTORA DE TESIS:

DRA. SANTA SOLEDAD RODRÍGUEZ DE ITA

MÉXICO, D.F. 2001

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

CAPÍTULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

CAPÍTULO II

IMPLICACIONES DE LA FORMACIÓN DEL CONCEPTO DE FRACCIÓN.

CAPÍTULO III

BASES TEÓRICAS Y METODOLÓGICAS.

Si lo uno existe, participa del ser; y por consiguiente hay en él dos cosas, es decir, dos partes: lo uno y el ser; cada una de estas partes es y es una; encierra dos partes, de las cuales encierran también otras dos, y así en un progreso infinito; de suerte que lo uno, que existe, es una multitud infinita. Al mismo resultado tiene que llegarse, demostrando, que si el ser existe el número existe; de donde se sigue que el ser tiene una infinidad de partes, y de aquí lo uno tiene una infinidad de partes.- Si lo uno tiene partes, es un todo; y si es un todo, esta limitado.- Si lo uno es un todo, tiene un principio, un medio y un fin; y si tiene un principio, un medio y un fin, tiene una forma, ya circular, ya recta, ya mixta (CUENCA en PLATÓN, Argumento: 225).

INTRODUCCIÓN.

La idea de una unidad múltiple conduce a pensar en la existencia de una parte o partes de esa unidad que juntas forman un todo. Esta idea expresada en la introducción del Parménides de Platón es desarrollada en dicho libro con la intensión, entre otras ideas, de reflexionar alrededor de la idea suprema, considerada así por Platón, la idea de unidad. La idea de unidad que se puede observar en el párrafo introductorio representa un problema filosófico que permite tener noción del problema que significa la concepción cuantitativa de la unidad múltiple y la relación entre sus partes y el todo como contenido en la escuela primaria, mismo que involucra sólo una parte de la enseñanza de las fracciones.

La enseñanza de las fracciones es un tema que históricamente ha resultado difícil de aprender y en consecuencia difícil de enseñar; por ejemplo, en 1585 Stevin publicó su obra “La Disme” donde introdujo las fracciones decimales como parte de un proyecto para unificar el sistema total de medidas sobre una base decimal (*Vid*, STRUIK: 127), pero a la vez hizo una propuesta didáctica para sustituir a las fracciones por los números decimales con relación a los cálculos numéricos. Por los años de 1700 John Kersey en el libro “Wingate’s Arithmetic” considerado uno de los mejores textos de la época, en Inglaterra donde el sistema monetario utilizaba las fracciones, afirmó que si el sistema monetario y de medida fuera decimal, la aritmética se enseñaría de manera más expedita (*Vid*, FIGUERAS 1988: 4). Estos dos ejemplos dan una idea del problema que ha representado la enseñanza de las fracciones.

Es cierto que el conocimiento de las fracciones, por un lado, es útil en la vida práctica; y por el otro, representa una herramienta aritmética que interviene en la formación de conocimientos más complejos como los algebraicos

Al trabajar con la parte, el todo y la fracción, ésta puede ser interpretada como un numeral[1] que describe la relación de fractura o bien como un numeral que indica o dice como actuar sobre el todo. Motivo por el cual, se intenta establecer un vínculo entre el significado de una relación de fractura como resultado de un reparto, y el operador fracturante.

Para explorar este vínculo en el desarrollo de la presente investigación se diseñaron actividades, unas para trabajar en equipo con manipulativos, y otras para trabajar en forma individual con la computadora, las cuales integran un programa interactivo. Ambas fueron puestas en práctica en una secuencia, con la intención de explorar los procedimientos de alumnos de 4o. grado de educación primaria, para resolver problemas con estos materiales en el proceso de la formación del concepto de fracción.

La puesta en práctica de estas actividades aportó información al respecto para, en un momento dado, adecuar el diseño de la secuencia en general y, en particular, del programa interactivo, de manera que pueda constituirse éste en un recurso que medie la interacción del aula entre compañeros y maestros y el conocimiento personal. A fin de documentar la experiencia adquirida en el desarrollo de la investigación, brevemente esbozada, se presenta este escrito dividido en cuatro capítulos:

El capítulo I presenta cuatro apartados que contextualizan el problema. En el primero se reúnen resultados de investigaciones que dan muestra de las dificultades que representa la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones. En el segundo, se exponen los diferentes significados que acepta la fracción con el fin de tener un panorama general de éstos y ubicar el significado que se trabajó en la presente investigación. En la tercera parte se describe y comenta el resultado de

---

[1] En este documento se hará referencia como numeral de la fracción, a la expresión numérica formada por el par a/b, "Las abstracciones mismas son llamadas *números*, y los nombres o símbolos que se les asignan se llaman *numerales" (*PETERSON: 72-73).

una revisión de las lecciones relacionadas con el significado parte-todo en los libros vigentes, con la finalidad de conocer los antecedentes a las actividades propuestas así como los ejercicios que deben dar continuación a las mismas. En el cuarto y último apartado de este capítulo han quedado establecidos los propósitos de este estudio.

Como parte de esta tesis se realizó una breve investigación documental sobre las implicaciones que tiene la formación del concepto de fracción. El resultado de ésta ha quedado asentada en el Capítulo II. Conocer la evolución que ha tenido la fracción desde la concepción en las culturas antiguas puede ayudar a entender los procesos que los alumnos siguen en el conocimiento de este contenido; por esto, en el primer apartado de este capítulo se citan sus antecedentes históricos. En el segundo, se puntualiza la interpretación de fracción que se pretende propiciar con las actividades que se proponen. En el tercero se describe el proceso de formación de los conceptos matemáticos así como los aspectos fundamentales que se consideran en la formación del concepto de fracción. Finalmente, se describen los obstáculos que impiden la formación de este concepto en el niño.

En el Capítulo III se presentan las bases teóricas y metodológicas de este trabajo. Enseguida, se describe el diseño del mismo. Posteriormente se aborda el enfoque pedagógico que se consideró en el diseño de las actividades. Se exponen además las razones por las que se decidió incluir el uso de la computadora en las actividades ya citadas. Por último, se incluye en este capítulo el manual del programa computacional "Francciones. exe", con el fin de dar a conocer el modo de instalación, el funcionamiento y una descripción de las actividades que contiene.

El capítulo IV contiene la planeación, el desarrollo y la evaluación de cada una de las actividades que conforman la secuencia diseñada para este estudio. En la planeación, se incluye los propósitos, la descripción de la actividad y las consideraciones previas, en la que se exponen las características generales de la misma y los procedimientos de los alumnos que se esperaban para resolver el problema. En el desarrollo, se describe la puesta en práctica de dichas actividades y en la evaluación se confrontan los resultados obtenidos contra lo que se había previsto.

En la última parte de este escrito se presentan las conclusiones, en las que se contrastan los propósitos de la investigación, con los logros alcanzados. Se incorporan también aspectos que originalmente no fueron contemplados, pero que resultaron relevantes en el desarrollo de la investigación.

CAPÍTULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Dificultades en el aprendizaje y enseñanza de las fracciones.

Es sabido que la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones no ha resultado fácil. Freudenthal (*Vid,:*8) atribuye al trato diferenciado que se le da a las fracciones con relación a los números naturales. Los números naturales se trabajan desde diferentes perspectivas, en tato que al iniciar el tratamiento con las fracciones se da por hecho que el alumno está preparado para hacerlo bajo un mismo enfoque, de manera que se pasa abruptamente a operar con éstas. Hiebert refiriéndose a la misma idea, destaca la dificultad que implica en el aprendizaje de las fracciones el cambio en la naturaleza de la unidad. En el aprendizaje de los números naturales los niños desarrollan la habilidad para contar, en donde asocian a cada objeto concreto un número como unidad, en tanto que con las fracciones, un grupo o una entidad compuesta, ahora debe ser concebida como unidad, es decir como uno (*Vid*, HIEBERT: 3-4).

Mancera (*Vid*, MANCERA:30-32), en su artículo: "Significados y significantes relativos a las fracciones", cita resultados de investigaciones como los de Streefland, Kieren y Hart, entre otros, que contextualizan el problema de enseñanza y el aprendizaje de las fracciones. Streefland, hizo una revisión a más de cien artículos sobre el tema de fracciones publicados en la revista “The Arithmetic Teacher” desde 1954, en esta revisión encontró que en el curso de algunos años se ha puesto poca atención a la relación de las fracciones con otros conceptos afines. En las propuestas didácticas de fines de los sesenta se encuentra como innovación la inclusión de juegos, mismos que pretendían la ejercitación de las fracciones y no contribuían a su desarrollo conceptual.

El reporte comentado por Hart acerca de un estudio realizado en Inglaterra señala que los niños, cuando inician el estudio de las fracciones, por lo común aplican las reglas de los números naturales. También se puede apreciar que los problemas que las involucran, son resueltos con más facilidad que sus algoritmos y que además las fracciones, en muchos casos no son vistas como una relación sino como un par de números independientes que pueden manejar por separado (*Vid, Ibid.:*30-53).

En la Guía para Maestros se señala como posibles causas de la dificultad que tienen los alumnos para comprender la noción de fracción las siguientes (*Vid*, FIGUERAS *et al.* 1992: 7).

a) La pobreza de los significados de la fracción que se manejan en la escuela.
a) La tendencia de los niños de atribuir a los números fraccionarios las propiedades de los enteros, y
b) La introducción prematura de la noción de fracción, del lenguaje simbólico y sus algoritmos.

La propuesta metodológica sobre la enseñanza de las fracciones en educación básica de Giménez (*Vid*,1992: 4-9) representada en un modelo multidimensional, contempla la problemática que implica la enseñanza de este contenido, ya que advierte los diferentes aspectos que se deben considerar simultáneamente como son: aspectos matemáticos (distintos significados de la fracción); la variable perceptual, es decir los modelos mediante los cuales se puede representar la fracción, como los modelos discreto, continuo y contable; el manejo de representaciones con modelos manipulables, pictóricos y simbólicos; los lenguajes oral y escrito tanto en su uso formal como informal. También considera el tratamiento de las fracciones tanto en situaciones reales como en situaciones del micromundo, además de incluir las etapas de modelo intuitivo de Kieren.

1.2 La fracción, un símbolo que acepta varios significados.

Como se mencionó, un problema más a considerar en el aprendizaje de las fracciones, se encuentra en que el símbolo *a/b, donde a y b son números enteros y* $b \neq 0$, está asociado a varios significados.

El concepto de fracción, como cualquier otro concepto matemático, puede verse como un modelo abstracto, generador de múltiples situaciones concretas o interpretaciones que lo involucran, cada una de manera específica.

Este concepto involucra un símbolo, mismo que como cualquier otro implica: significantes[1] y significados [2], además un modo de significar o relacionar ambos (*Vid,* GUIRAUD: 35); el vínculo entre el significante y el significado de la fracción depende de la interpretación que se haga de ésta. Para Freudenthal, la fracción puede ser interpretada como *fracturador* o como *comparador* (*Vid*, FREUDENTHAL: 14 – 32).

La fracción como *fracturador* da la idea de romper o fracturar algo, es decir, un todo se subdivide de acuerdo a cierto número especificado por la situación. Esta subdivisión puede ser irreversible, reversible o simbólica. Kieren (*Vid,*1976: 102) al referirse a las diversas interpretaciones que aportan variedad de experiencias para la formación del concepto del número racional, inicia con la interpretación de fracción como fraccionamiento de la unidad. En esta interpretación, la fracción describe la relación cuantitativa entre un todo y sus partes. La fracción ***a/b***, donde *a* y *b* son enteros y *b* es distinto de cero, referida a una unidad, significa dividir la unidad en ***b*** partes iguales y tomar ***a*** de esas partes.

[1] Representaciones susceptibles a asignar un significado.
[2] Concepto que como tal o asociado con determinadas connotaciones, se une al significante para constituir un signo (*Vid,* REAL ACADEMIA ESPAÑOLA: 1878).

En la interpretación de la fracción como *comparador* se cuenta con dos “todos” diferentes, representados por cantidades o valores de magnitudes y se pretende hacer una comparación cuantitativa de ellos.

Mochón (*Vid*: 8-24), a partir de la amplia clasificación que Freudenthal hace de la interpretación de la fracción, como fracturador y como comparador o ambas, señala los vínculos y dependencias existentes entre éstos. Desprendiendo de esta primera clasificación y apoyándose en la clasificación de Kieren, nombra los distintos significados que la fracción adquiere de acuerdo a la interpretación que de ella se haga

a. Parte – todo.

En este significado un todo es subdividido en partes equivalentes[3] y como resultado se tiene un número determinado de ellas.

La fracción ***2/3*** significa que el entero ha sido dividido en 3 partes equivalentes y se toman 2 de esas partes.

En la relación N/D (numerador, denominador).

N = número de partes equivalentes que se va a tomar o en la que se va a poner atención.

D = número de partes equivalentes en que ha sido dividido el todo.

El todo puede ser discreto o continuo. En términos conceptuales, las magnitudes [4] discretas son aquéllas que pueden dividirse un número finito de veces, cuyo límite de división es la unidad. A diferencia de las magnitudes continuas que pueden dividirse indefinidamente sin que con ello pierdan su esencia. Vergnaud (1991: 105)

---

[3] Se prefiere hablar de partes equivalentes para incluir en éstas las partes que se obtienen en los distintos modelos de representación. Al hacer un reparto equitativo utilizando el modelo discreto las partes resultan idénticas, mientras que en el modelo continuo y en la representación con unidades contables, las partes pueden ser idénticas o equivalentes. Un ejemplo de las unidades contables puede darse al operar con billetes o monedas de distinta denominación, dos billetes de veinte pesos más una moneda de diez pesos resulta equivalente a un billete de cincuenta pesos.

[4] Los conceptos abstractos como tiempo, temperatura superficie, reciben el nombre de *magnitudes.* Los casos específicos o concretos como: el tiempo de una jornada de trabajo, el peso de un libro o la temperatura de un determinado cuerpo, reciben el nombre de *cantidades* (*Vid,* BALDOR: 8).

refiriéndose a los conjuntos, da una explicación para precisar las diferencias entre los conceptos discreto y continuo:

> Pero las estaturas forman un conjunto continuo en el cual para dos estaturas *a* y *b*, próximas una de la otra siempre se puede encontrar un punto intermedio *c* que estará separado de *a* por un intervalo más pequeño. Mientras que dos equipos posibles forman un conjunto discreto en el cual dos equipos pueden estar próximos y ser distintos, el primero y el segundo, por ejemplo, sin que ningún equipo intermedio pueda ser colocado entre los dos.

Freudenthal, refiriéndose a la interpretación que el sujeto hace del objeto que se le presenta o a dónde dirija éste su atención dice: “hay transiciones entre discreto y continuo: las partículas pueden ser tan pequeñas que el todo parezca continuo. En un todo discreto, se puede construir una conexión sobre relaciones de vecindad” (FREUDENTHAL: 15).

El todo puede ser definido o indefinido. Por ejemplo: los días de la semana representan un todo definido y además discreto; en cambio, el aire, resulta un todo indefinido y además continuo.

El todo puede presentarse de manera estructurada o sin estructura; por ejemplo, un conjunto de perlas sueltas se considera sin estructura, mientras que el mismo conjunto de perlas puestas en un collar representa un todo con una organización o estructura.

b. Medida.

Este significado se da en situaciones donde se tiene una cantidad mensurable o contable y una unidad de medida. Se requiere entonces determinar el número de veces que cabe la unidad en la cantidad que se va a medir. Se comparan dos cantidades; una de ellas se toma como unidad de referencia para medir o contar a la otra.

La expresión ***2/3*** de unidad significa que la cantidad mesurable representa dos de las tres partes en que ha sido dividida la unidad de referencia (m., kg., cm^3). Donde se observa que el significado de medida está fundamentado sobre la idea de parte–todo.

El símbolo N/D representa la relación entre la cantidad mensurable y la unidad de medida.

N = número de partes en que ha sido dividida la unidad de medida, ocupadas por la cantidad mensurable o contable.

D = número total de partes en que ha sido dividida la unidad de referencia.

c. Cociente.

La fracción como cociente[5] en situaciones de reparto es interpretada como fracturador, "el todo es subdividido en partes equivalentes, el número de las cuales está determinado por la cantidad de objetos a los cuales se les va a hacer la repartición" (MOCHÓN:14). La diferencia con la relación parte–todo estriba en que en el significado de cociente existe una unidad interna diferente del todo.

La fracción ***2/3*** significa por ejemplo, que dos chocolates son repartidos entre tres personas. La unidad interna es un chocolate.

El símbolo N/D representa un cociente partitivo donde...

N = cantidad que se va a repartir

D = número de raciones requeridas.

El valor de la fracción representa la cantidad que cada una de las partes recibe.

d. Operador.

La fracción como operador "funge el papel de transformador multiplicativo de un conjunto hacia otro "similar". Se puede pensar en esta transformación como una amplificación o una reducción de valores de un conjunto" (MOCHÓN:17).

[5] El cociente es el resultado de la división ***a : b,*** *es decir el número que multiplicado por* ***b*** *da* ***a****.*

La fracción como operador puede aparecer como un comparador entre dos conjuntos similares, en forma de relación entre dos cantidades diferentes con el mismo tipo de medida, con diferente tipo de medida o como un transformador en forma muy similar al fracturador.

Cuando se aplica la fracción ***2/3*** como operador a una cantidad equivale a aplicar sucesivamente los operadores ***(:3) (X2),*** si se aplican estos operadores en distinto orden se obtiene el mismo resultado. Ejemplo:

2/3 de 60 Km. = [60 Km (2)] : (3)

ó

2/3 de 60 Km. = (60 Km : 3) (2)

En ambos casos el resultado es de 40Km.

El símbolo N/D representa un transformador multiplicativo.

La representación a escala da lugar al uso de la fracción como operador multiplicativo. En la "Guía Roji" se utiliza la escala 1/100000. En esta escala 1 unidad representa 100000 unidades de la distancia real.

e. Razón.

Una razón es una comparación numérica entre dos cantidades de la forma a/b.

"La diferencia esencial cuando se trabaja con los pares ordenados como razones y con los pares ordenados como números racionales es que los últimos se suman, se multiplican, se restan y se dividen" (PETERSON: 232).

La expresión **2/3** como razón, puede representar que por cada 2 pesos, dan 3 chocolates.

N/D= Representa la relación que se establece entre las dos cantidades.

N = valor numérico de una primera cantidad que entra en comparación con el valor numérico de una segunda cantidad.

D = valor numérico de la segunda cantidad.

Los significados de medida, operador, razón y cociente representan cuatro ideas que le permiten a una persona resolver cuatro tipos de fenómenos modelados por los números racionales. El[6] lenguaje de los pares ordenados de los números racionales está basado en un quinto significado, la relación parte-todo. Este significado puede relacionarse con cada uno de los otros cuatro significados por medio de la identificación de una unidad apropiada a cada circunstancia (*Vid* KIEREN, 1983:2).

Si se pretende que el alumno forme un concepto amplio de la fracción, es preciso propiciar la experiencia con los distintos significados de ésta, con el fin de que pueda crear diferentes estructuras que le permitan resolver problemas relacionados con los cuatro fenómenos que se mencionaron anteriormente.

El significado parte–todo ocupa un lugar preponderante. Sin embargo, si este significado es el único acercamiento que el estudiante tiene a la realidad, su concepto de fracción sería limitado, como se manifestó en la investigación realizada con 293 niños al finalizar su educación primaria (*Vid* ÁVILA,1985), la cual reporta las dificultades que tienen los alumnos al enfrentarse a la fracción como una expresión numérica. El 44% de ellos, logró interpretar a la fracción de manera adecuada, pero refiriéndose sólo al significado parte-todo y no a los distintos significados, además se observó que en sus interpretaciones predomina la referencia a la representación del modelo del pastel.

Por otro lado, este significado ha sido calificado por estudiosos del problema de la enseñanza y el aprendizaje de la fracción, como la piedra angular u origen para la comprensión de otros significados. Tanto en los esquemas utilizados para explicar la relación y dependencia de los distintos significados de fracción que menciona Behr *et al* (*Vid,* LLINARES: 75). como el de Mochón (*Vid,* MOCHÓN: 26), el significado parte–todo es el punto de partida y unión de los otros significados. Por lo anterior, interesa conocer la manera en que se sugiere trabajar la fracción con el significado parte–todo en los libros de texto vigentes.

1.3 Las fracciones como parte-todo en los libros y programas de estudio de 1993 de educación básica.

En México, a partir del ciclo escolar 1993 –1994, entra en vigencia el nuevo Plan y Programas de Estudio. En estos uno de los aspectos que se destaca, con relación al tratamiento de los números fraccionarios, es su introducción hasta el tercer grado de primaria y se traslada a la secundaria las operaciones de multiplicación y división con estos números.

El enfoque que se propone en los nuevos programas, se plasma en los contenidos y organización de las actividades de los libros de texto. El tratamiento de las fracciones se presenta en variados contextos que involucran los significados de: reparto, medida, cociente, razón, operador y parte–todo (*Vid* SEP, a: 60, 62, 65, 67 y 68).

Las situaciones relacionadas con las fracciones en los libros de 3º, 4º, 5º y 6º, procuran iniciar su estudio paulatinamente y siempre relacionados con algún contexto. Se introduce mediante los numerales 1/4 y 1/2. Poco a poco se avanza en este estudio mediante situaciones que ponen en práctica la partición equitativa y exhaustiva, la equivalencia, la ordenación de un grupo de fracciones mediante la localización de éstas en la recta numérica y la resolución de problemas que implica el uso de las operaciones de suma y resta.

Referente a las situaciones relacionadas con el significado de parte–todo se encuentran dos actividades en el libro de 3er. grado, en la lección "Paseo en el zoológico"

En una de ellas, se comenta el reparto del jugo contenido en un envase entre cuatro vasos. Este reparto aparece apoyado por imágenes y se les pregunta por la parte que le tocó a cada vaso. En la segunda actividad se pide dibuje un pastel y una barra de chocolate para que lo divida en partes iguales y a cada niño, de los cuatro que aparecen, le toque lo mismo.

La introducción formal de este significado se hace en 4º grado (V*id*, SEP c: 35).

En la lección "El día de la ONU" se presentan rectángulos divididos de diferente forma, que representan banderas de varios países, para que el alumno identifique cuáles están divididos de manera equitativa y los clasifique con sus nombres de acuerdo al número de partes que se forman por la partición. Enseguida, mediante preguntas conduce la atención del alumno a una parte de alguna de las banderas para que los alumnos anoten como resultado la fracción. Al finalizar esa misma lección se menciona la interpretación de la fracción 1/4 como fracturador.

En la lección "Tarjetas de papel" del libro de 4o. grado hay dos preguntas en donde el todo está dividido equitativamente y se indica la parte para que se anote la fracción. En este ejercicio se utiliza el modelo de áreas rectangulares que representan tarjetas de papel.

En la lección 20 del Bloque 2, hay un ejercicio en el que se presentan tres rectángulos divididos en nueve partes iguales cada uno, y se pide ilumine 1/3 de tres maneras diferentes.

La lección "La vuelta al mundo en 360 grados" relaciona las fracciones con los ángulos de giro. Presenta un círculo dividido en ocho partes iguales, las líneas divisorias representan los lados de los ángulos centrales. Dentro de las preguntas que aparecen, se pide que anote la fracción de vuelta que se giró para formar un ángulo determinado. Hay otra pregunta en la que el alumno tiene que identificar la parte una vez que se determina la fracción, precisando los lados del ángulo al que tiene que dirigir su atención. Más adelante realiza conversiones de fracciones de ángulos a grados y viceversa.

En la lección 14 del libro de 5o. grado, en la que se ubican fracciones en la recta como un recurso para el estudio de la ordenación y la equivalencia de las fracciones, dividen el segmento de acuerdo a una instrucción implícita, en "x" número de partes, para esta actividad se utiliza la hoja rayada, procedimiento basado en el teorema de Thales. Por medio de preguntas se conduce la atención del alumno hacia una parte de este segmento para que anote la fracción correspondiente y a la vez ubique esa fracción en el punto límite de esa parte.

Las lecciones 33, 53 y 70 del libro de 5o. grado que están relacionadas con fracciones requieren de la interpretación de la fracción como operador, para que el alumno realice cálculos numéricos como: En un circuito de 12 Km. calcula la distancia recorrida en 3/4 de vuelta.

En el libro de 6o. grado en la lección "Las recetas de la tía" hay una actividad en la que se trabaja con representaciones de la relación parte–todo. Aparecen círculos que simbolizan pasteles con divisiones equitativas e iluminadas algunas de ellas, a fin de mostrar partes equivalentes. En la segunda parte de la actividad se pretende que el alumno sombree cuatro octavos en un círculo dividido previamente en ocho partes, enseguida tiene que escribir en lenguaje común la fracción iluminada en círculos divididos en "x" número de partes. En esta misma lección hay un ejercicio relacionado con la escritura simbólica de la fracción para que el alumno traduzca del lenguaje aritmético al común y viceversa.

En la lección "Los papalotes" del mismo libro, hay un ejercicio que se ilustra por medio de un papalote, representado por un octágono dividido por sus ejes de simetría en triángulos congruentes y está iluminado uno de estos triángulos para que el alumno anote la fracción que está iluminada. Posteriormente se le pide ilumine 1/4 de rojo y 1/2 de azul. Este ejercicio sirve de preámbulo para trabajar la equivalencia de fracciones y la suma de éstas con distinto denominador.

En la lección "Papirolas ", presentan las fracciones a partir de los dobleces de una hoja y conducen a la reflexión para que el alumno anote la fracción iluminada, las particiones equitativas son señaladas por los dobleces. Más adelante el alumno debe anotar en una tabla el número de dobleces al lado de las partes que obtiene con el fin de establecer la relación entre estos dos datos. Conforme describe los pasos para realizar la papirola se le pregunta por la fracción que representa distintas partes de dicha construcción. En esta actividad, aunque existe el apoyo con la imagen de los dobleces que se van haciendo, el alumno debe tener presente el tamaño del todo para determinar la fracción. Estas actividades en las que el alumno establece fracciones por medio de la idea parte-todo, sirven de introducción para el trabajo de equivalencia, determinación de la fracción mayor o menor y la suma y resta de fracciones con diferente denominador.

En la lección "Hilados y tejidos" se introduce el procedimiento para obtener fracciones equivalentes por medio de la representación parte–todo. En esta introducción se requiere que el alumno identifique la fracción en un modelo continuo representado por un rectángulo que simboliza un tapete tejido. Este tapete tejido está previamente dividido en partes iguales e iluminado en dos colores para distinguir partes diferentes.

Más adelante, hay una lección titulada "Los tapetes de doña Hortensia" en la que trabajan la conversión de fracciones mixtas a impropias. En este estudio se apoyan de la representación parte–todo en un modelo continuo mediante un rectángulo previamente equidividido.

En la lección "Una línea del tiempo", los alumnos hacen conversiones entre las unidades de tiempo. Se ilustra con carátulas de relojes en las que se sombrea el tiempo al que se hace referencia para convertir ese transcurso de tiempo a una fracción de la unidad superior, a fin de que el alumno establezca fracciones con denominador sesenta.

Como se observa en el trabajo de la fracción con el significado parte–todo que se realiza en los últimos cuatro años de la escuela primaria, predomina la representación en modelos continuos, siempre relacionados a algún contexto y representados con variadas figuras geométricas. Generalmente los todos permanecen constantes dentro de la misma actividad, de tal manera que no se brinda la oportunidad de comprender la relatividad de la fracción en función del tamaño de la unidad.

Por otro lado, prevalecen las actividades en las que la equidivisión ya está hecha; la partición la realizan los alumnos cuando aparece una instrucción de reparto equitativo o de una división. En el Libro para el maestro de Matemáticas Cuarto grado se menciona la necesidad de que el alumno le dé significado al numerador y al denominador y para esto plantea el trabajo de la noción de fracción como resultado de un reparto (*Vid*, SEP c: 33). Sin embargo, no se encuentran situaciones en las que se conozca el significado que el alumno le da al numerador y al denominador para saber en qué reparto está pensando. Es preciso señalar que la partición sin una instrucción de reparto de por medio, se encuentra en situaciones de medición, donde es preciso que el alumno interprete la fracción expresada por el numeral para resolver el problema.

Con relación al trabajo de las fracciones en contexto de reparto, es importante que el alumno interprete la fracción como la relación del entero con cada una de sus partes, pero además que comprenda que la unión de los pedazos resultantes debe formar nuevamente ese entero. Esta experiencia no se propicia en las situaciones que se plantean en los libros correspondientes a los grados en los que se estudia este contenido con este significado.

El trabajo con las fracciones en 4º grado se amplía enfatizando su uso en situaciones relacionadas con la medición de longitudes, el peso de objetos, la capacidad de recipientes además de las situaciones de reparto (*Vid,* SEP a: 62 – 63). En 5º grado, en el programa de estudios, se sugiere trabajar las fracciones en los contextos de reparto y medición y se introducen otros significados como razón y cociente, además del cálculo de porcentajes mediante diversos procedimientos (*Vid*, SEP a: 65).

Por tal motivo se quiso explorar el trabajo que realizan los alumnos al resolver situaciones en las que relacionaran la parte con el todo mediante la fracción con cantidades discretas. Para lo que se diseñaron actividades en las que los alumnos realizaron particiones y fue posible observar los procedimientos que siguieron y las dificultades que tuvieron al trasladar sus experiencias adquiridas en el trabajo de la fracción en otros contextos, especialmente, la experiencia en situaciones de reparto a situaciones en las que dicho reparto no se hizo explícito, sino más bien requirió la interpretación de la fracción expresada por un numeral. De igual manera experimentó con actividades en la que conociendo sólo una parte integró el todo.

1.4 Propósitos de la investigación.

- Explorar las formas en que los alumnos que cursan el 4º grado de educación primaria resuelven problemas de reparto con la instrucción explícita y mediante la interpretación que hacen de la fracción expresada por el numeral, a partir de sus experiencias sobre este contenido tratado en otros contextos, utilizando cantidades discretas.

- Estudiar la posibilidad de favorecer la evolución de los procedimientos iniciales de los alumnos, mediante una secuencia didáctica específica que combina la interacción en equipo, utilizando material manipulable, con el uso del programa interactivo "Fracciones. exe", diseñado por quien suscribe para dicho fin.

- Identificar las dificultades que enfrentan los alumnos en el desarrollo de esta secuencia, con la finalidad de aportar elementos para el diseño de una propuesta didáctica que incluya un programa interactivo como un recurso que favorezca la reflexión en el alumno acerca del significado parte–todo de la fracción.

El estudio se realiza mediante una experiencia de Ingeniería Didáctica, esto es, se ha diseñado una secuencia de actividades que se han puesto en práctica en el aula y se han analizado los resultados obtenidos. Para realizar este trabajo fue preciso conocer los aspectos que envuelven la formación del concepto de fracción en el niño.

CAPÍTULO II

IMPLICACIONES DE LA FORMACIÓN DEL CONCEPTO DE FRACCIÓN.

2.1 Un poco de historia acerca de la fracción.

Reflexionar acerca del aprendizaje de las fracciones sin duda lleva a pensar sobre la evolución de este conocimiento; la necesidad que tuvieron en las culturas antiguas de cuantificar fracciones de unidad, en problemas de medición y de reparto está vinculada con la aparición de los números racionales. Al parecer, las fracciones hacen su aparición con el surgimiento de las culturas babilónica y egipcia.

Hacia 1700 a.c., los egipcios desarrollaron un sistema de fracciones que constaba, en primer lugar, de un número limitado de "fracciones naturales": 2/3, 1/3, 1/6, 1/12, 1 /24 y 1/2, 1/4, 1/8 1/16, 1/32. Estas fueron las más utilizadas en su vida diaria y fueron designadas con nombres propios. Las demás fracciones las obtuvieron a partir de éstas utilizando dos principios: por desdoblamiento o por adición para incluir únicamente fracciones unitarias[7]. En virtud de esto, una característica de las fracciones fue que su escritura la representaran con un solo número natural, precedido de un símbolo que significa parte; En el sistema hierático el símbolo es ⬭ ,mientras que en el jeroglífico es sustituido por ●. de esta manera para escribir 1/10 = $\overset{\circ}{\cap}$ En este sistema egipcio no existían las fracciones formadas por dos enteros, numerador y denominador, tal y como los conocemos hoy en día, pero podemos apreciar el significado parte-todo con el que surgieron las fracciones en esta civilización.

Así, cualquiera de las fracciones no unitarias es escrita por los egipcios como sumas de fracciones unitarias: por ejemplo,

---

[7] Fracción cuyo numerador es 1.

Ahmes transforma 2/7, y obtiene 1/28 + 1/4
¿Cómo lo consigue?
Desdoblamos 2/7, tenemos 2/7 = 1/7 +1/7
Desdoblamos 1/7, tenemos 1/14 + 1/14
Desdoblamos 1 /14, tenemos 1/28 + 1/28
Asi:
2/7 = 1/7 + 1/7
= 1/14 + 1/14 + 1/7
= 1/28 + 1/ 28 + 1/14 + 1/7
= 1/28 + [1/28 + 1/14 + 1/7]
= 1/28 + 1/4 (COLLETE: 46).

No utilizar numeradores hizo, en muchos casos, muy difíciles los cálculos. Por ejemplo, para obtener el doble de una fracción, como 1/6, bastaba con reducir el denominador a la mitad: 1/3. Pero si el denominador era impar, como 1/5, se preocuparon por encontrar la suma de fracciones unitarias cuyo resultado fuera igual a 2/5.

La escritura de la aritmética egipcia está basada en dos principios operacionales, multiplicar y dividir por 2, y en calcular los 2/3 de cualquier número entero o fraccionario. La fracción 2/3 se destaca en su utilización debido a que aparece como operador en las multiplicaciones y divisiones. En el papiro de Rhind se estipula la regla egipcia para calcular los 2/3 de cualquier fracción unitaria impar (denominador impar) o par: “Los dos tercios de cualquier fracción impar (o par) es igual a dos veces el denominador de la fracción más seis veces el denominador de la fracción.” (*Ibid.*: 50), ejemplo:

2/3 de 1/5= 1/10 + 1/30= 3+1/30=4/30=2/15.

En el mismo papiro mencionado anteriormente se encuentra tablas que contienen fracciones del tipo 2/n, de n= 3 a n = 101, las cuales son utilizadas para simplificar las operaciones para la reducción de cualquier fracción no unitaria a una suma de fracciones unitarias. Del mismo modo se conoce la existencia de problemas relacionados con el cálculo de la “seqt” de diversas pirámides. Con esta palabra es designada la razón entre la base horizontal de la pirámide y su altura.

De hecho, los egipcios de esa época resolvieron cálculos muy complejos con sus fracciones, algunos de los cuales constan en el “papiro de Rhind”, escrito por el escriba Ahmes, el “papiro de Moscú”, el rollo de cuero de las matemáticas egipcias y otros que se han deducido de las construcciones piramidales que realizaron.

En la interpretación de fraccionamiento de unidad que prevalece en la civilización egipcia, el número racional describe la relación cuantitativa entre un todo y sus partes.

En la civilización babilónica se conoce un sistema de numeración mixto de base 10, utilizado mayormente al principio, y otro de base 60, con uso de un valor posicional; se sabe que en los primeros escritos los babilónicos empleaban un espacio en blanco para representar el cero y más tarde se utilizó un símbolo para sustituirlo (*Vid,* STRUIK: 35).

En esta civilización destaca la utilización de las fracciones en el uso tan frecuente de los números inversos. Se conocen tablas de inversos de $1/n$ para diferentes valores de n expresado en sistema sexagesimal, que les permite reducir la operación de división a una operación de multiplicación. Así el inverso del número 8 lo podemos encontrar como 0; 7, 30, es decir $7/60 + 30/60^2 = 1/8$ (*Vid,* COLLETTE: 25). Es decir, ellos expresaban o aproximaban fracciones de unidad mediante divisiones de la unidad en potencias sucesivas de la base de su sistema.

Los griegos usaron fracciones unitarias egipcias y fracciones sexagesimales babilónicas, sin embargo vale la pena mencionar el significado de fracción que prevalece entre los pitagóricos. Ellos unieron la música con las matemáticas mediante las cuerdas vibrantes; notaron que si se fijaba uno de los extremos de la cuerda tensa y se hacía vibrar, emitía un sonido de un tono. Si se hacía vibrar la mitad de la cuerda, el tono aumentaba un octavo y si vibraban los dos tercios de la cuerda, el tono estaría un quinto por encima del que producía la cuerda entera. De esta manera la relación entre la porción vibrante de una cuerda y la cuerda entera fue expresada en términos de razones. Para Pitágoras los sonidos más armoniosos eran producidos por razones expresadas como números enteros, y cuanto más sencilla era la razón, es decir cuando más pequeños eran los números que la expresaban, mejor era la armonía (*Vid, Ibid.*: 76 –77).

En 1202 Leonardo de Pisa, conocido como Fibonacci, escribió su obra "Liber abaci" (Libro del ábaco). En esta obra conjuga las experiencias de sus estudios realizados con un maestro árabe y las experiencias obtenidas en sus viajes por Egipto, Siria, Grecia y Sicilia. En estos viajes pudo conocer los métodos indios de cálculo. Fibonacci dedicó dos capítulos de esta obra a las fracciones. En ellos, además de utilizar fracciones unitarias y sexagesimales aparecen las fracciones comunes en una forma más apegada a la que se conocen actualmente, por ejemplo: la expresión 24 5/12, Fibonacci la escribe en este orden 5/12 24 y en lugar de escribir 11 5/6 utiliza una yuxtaposición de fracciones unitarias como en la cultura egipcia y enteros 1/3 1/2 11 (*Vid*, *Ibid*: 230–232).

2.2 Aspecto matemático de la fracción.

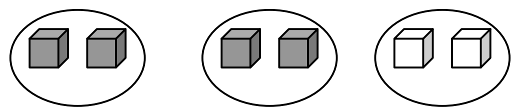
Sobra decir que las fracciones, desde el punto de vista matemático, forman parte del conjunto de los números racionales; los que se definen como un conjunto de parejas de la forma a/b, donde a y b son números enteros con $b \neq 0$, en el que se definen dos operaciones (+),(*). De tal manera que se cumplen las propiedades de cerradura, asociativa, conmutativa, elemento inverso, neutro y distributiva con respecto a la suma (*Vid,* TOMBER: 39-60). Freudenthal estudia estas propiedades en relación con el producto (*), considerándolas como un operador razón u operador multiplicativo, además detalla sus argumentos y puntualiza algunas consideraciones didácticas al respecto (*Vid*, Anexo 1).

Por otra parte, como ya se mencionó, el significado de fracción ***parte–todo*** corresponde a la interpretación como fracturador. Freudenthal al referirse a este significado, destaca la diferencia entre lo que significa *una relación* y un *operador*.

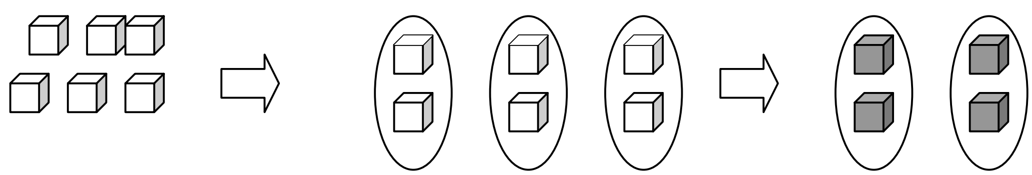
Menciona que: “En la medida en que el énfasis mental esté en algo dinámico o estático la fracción aparece en un *operador* o en una *relación*, partiendo por la mitad contra la mitad de grande” (FREUDENTHAL.: 23). Hace la siguiente diferenciación:

Al relacionar el todo con la parte mediante la fracción, ésta aparece como:

a. *Relación de fractura*: En este caso el todo ya está fracturado y la parte se señala de alguna manera. Por lo tanto, sólo se establece la relación entre ambos mediante la fracción. Por ejemplo: La parte iluminada representa 2/3



b. *Operador fracturante:* En este caso el todo aún no ha sido fracturado y la fracción aparece como el indicador de la acción de partir y tomar la parte. Por ejemplo: "Tomar 2/3". Significa que reparto en 3 grupos el todo y tomo 2 de esos grupos.



En el significado parte–todo, el todo es la unidad de referencia, es decir:

- El todo es igual a 1, en consecuencia...
- La fracción es igual o menor que 1.

El significado parte–todo subyace en varias aplicaciones como son:

- Resultados de situaciones de reparto.
- Situaciones de medida.
- Al señalar partes de un conjunto que cumplen con determinada característica.
- Al representar con diagramas la multiplicación de fracciones (se sustituye “por” con “de”).

- Al comparar dos fracciones.
- Al comprobar dos fracciones equivalentes (si se utiliza una unidad fija de referencia).
- Al sumar dos fracciones con una unidad fija de referencia.
- En algunos casos de la representación de la fracción en la recta numérica.

La formación del concepto de fracción con todas sus relaciones, es un proceso a largo plazo y requiere de múltiples experiencias. La variedad de los significados de las fracciones implica variedad en estructuras cognitivas, indispensables para la comprensión operativa del número racional; comprensión que representa un apoyo para que las operaciones algebraicas sean representativas.

2.3 La formación del concepto de fracción.

Un concepto puede ser definido como una generalización a partir de datos relacionados producidos en la experiencia de interacción con el objeto o acontecimiento. El proceso de formación de conceptos sucede en el siguiente orden (*Vid,* LOVELL: 25):

Percepción → Abstracción → Generalización.

En el proceso de la formación de conceptos la percepción entendida como; el resultado del refuerzo de sensaciones con experiencias anteriores, ideas, imágenes, expectación y actitud, tiene un lugar preponderante. Pues es a partir de la experiencia sensorial que el niño puede discriminar y clasificar para generalizar (*Vid, Ibid.*: 24).

Mediante la abstracción el niño distingue propiedades del objeto y aprecia cualidades comunes y diferentes de éste, a partir de esta base puede realizar una clasificación.

> *Abstraer* es una actividad por la cual nos hacemos conscientes de similitudes (en el sentido cotidiano, no en el matemático)) entre nuestras experiencias. *Clasificar* significa reunir nuestras experiencias sobre la

> base de estas similitudes. Una abstracción es cierto tipo de cambio mental duradero, el resultado de abstraer, que nos capacita para reconocer nuevas experiencias como poseedoras de similitudes con una clase ya formada (SKEMP:26).
>
> Cuando el niño forma un concepto, ha de ser capaz de discriminar o diferenciar las propiedades de los objetos o los acontecimientos que están frente a él y de generalizar sus descubrimientos respecto de cualquier rasgo común que haya encontrado (LOVELL:24).

El niño tiene un número reducido de categorías, que son cada una de ellas muy amplias para realizar clasificaciones. Por tal motivo, los conceptos en la edad escolar pueden ser considerados como fragmentarios, limitados o parcialmente definidos, pues parte del trabajo de la formación de los conceptos consiste precisamente en probar en otras situaciones las relaciones que ha podido establecer anteriormente. En este sentido los conceptos se ensanchan y profundizan a lo largo de la vida, en la medida que progresa el desarrollo intelectual acompañado de experiencias y en consecuencia aumentan las discriminaciones. Las categorías pueden hacerse más concretas y reducidas, se está en mejores condiciones para realizar abstracciones y en consecuencia de generalizar (*Vid, Ibid*: 26–27).

Cuando el ser humano es capaz de evocar dicha generalización, relacionarla con un objeto o fenómeno por tan sólo haber escuchado el nombre, ver el símbolo o encontrar una situación similar, puede decirse que posee su concepto.

2.3.1 Formación de conceptos matemáticos.

Para Piaget los conceptos matemáticos tienen su origen en los actos que el niño lleva a cabo con los objetos y no en los objetos mismos. El desarrollo conceptual obedece a la evolución de los esquemas[8] de acción en los que la percepción juega una parte importante (*Vid* LOVELL: 30).

[8] Los esquemas son considerados las secuencias de acción en la mente (*Vid,* LOVELL: 32).

Los conceptos matemáticos son “generalizaciones sobre relaciones entre ciertas clases de datos” (LOVELL: 33). El tipo de concepto que desarrolla el niño depende de la abstracción o disociación de la que sea capaz de hacer, así como de la calidad de esquemas o secuencias de acciones mentales que pueda elaborar.

Alrededor de los siete años el niño es capaz de comprender las secuencias de acción de su mente, reflexionar sobre las mismas y ordenar su experiencia. Esto hace posible la construcción de conceptos que se derivan del contacto con la realidad (*Vid, Ibid.*: 32).

Para contribuir a la formación de conceptos matemáticos en el niño es preciso enseñarle su lenguaje y símbolos. Esta acción implica una negociación, que se traduce en propiciar acciones que llenen de significado ese símbolo.

Los conceptos de orden superior a aquéllos que una persona posee no pueden comunicarse mediante la definición sino sólo mediante situaciones adecuadas para que el sujeto experimente, pero “... antes de que intentemos comunicar un nuevo concepto debemos encontrar cuáles son sus conceptos contributorios hasta que alcancemos los conceptos primarios o experiencias que suponemos como dadas” (SKEMP: 30). Con relación a este aspecto Piaget realizó estudios específicos que involucran la división de áreas y la noción de fracción. En ellos investiga a fondo la construcción de relaciones parte-todo con los que precisa características de la fracción.

2.3.2. Aspectos fundamentales a considerar en la formación del concepto de fracción.

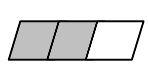
Holloway señala que para Piaget una parte, es en principio un simple pedazo sacado del todo, y no un elemento incluido en el todo que permanece ligado en el pensamiento al todo, aún después de haber sido separado (*Vid,* HOLLOWAY: 84-87).

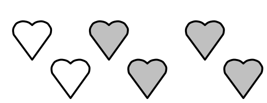
Estas relaciones fundamentales entre parte y todo y entre las partes de un mismo todo comparadas con la primera en su magnitud, son las que determinan el conjunto de caracteres de la noción de fracción que a continuación se mencionan:

1. Para que haya fracción es necesario que exista una totalidad divisible, un todo compuesto de elementos separables.
2. La noción de fracción representa un número determinado de partes.
3. Es necesario que el todo se reparta enteramente, para que un pedazo cualquiera pueda ser considerado una fracción determinada de ese todo.
4. El partir un continuo en fracciones supone una cierta relación entre el número de partes y el número de cortes que hay que hacer.
5. Para que haya fracciones y no solamente partición cualitativa es necesario que las partes sean iguales.
6. Cada fracción a pesar de constituir una parte del todo, constituye un todo ella misma y por lo tanto es susceptible de nuevas divisiones.
7. La suma de las fracciones construidas es igual a la superficie total inicial.

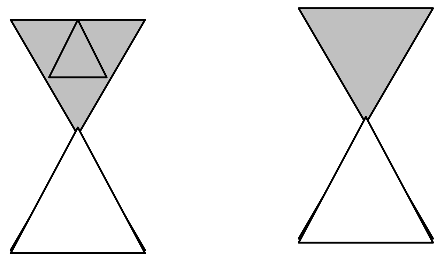
Payne amplía estos atributos, con los que considera como necesarios para el aprendizaje inicial (*Vid,* PAYNE citado por LLINARES: 81):

- Control simbólico de las fracciones. Se refiere al manejo de los símbolos relacionados con las fracciones, tanto los nombres en lenguaje común como la expresión numérica de la forma a/b.
- Las relaciones parte–todo en contextos continuos y discretos. Por ejemplo: 2/3





- Las fracciones mayores que la unidad. Se refiere a incluir desde las primeras situaciones no sólo fracciones menores e iguales a la unidad sino también mayores que ésta.
- Subdivisiones equivalentes. Se refiere a la habilidad de reconocer cuando distintas partes de un mismo todo obtenidas con diferentes divisiones, dan la misma parte de la totalidad.



Los estadios observados por Piaget en el estudio mencionado anteriormente fueron:

Estadio1 (hasta los 4;6) el niño tiene gran dificultad en partir por la mitad, la parte simplemente en pedazos sin detenerse en dos; o bien dejan un resto no empleado, o se confunden en el número de partes y cortes necesarios.

Estadio 2 A (entre los 5 y 6 años de edad). Ya se adquiere la dicotomía por lo menos para formas regulares, pero tiene aún dificultades en formas irregulares o para dos dicotomías sucesivas.

La partición en tres da origen a dos tipos de reacciones: o una partición en tres pedazos, dejando de lado un pedazo sin repartir o una doble dicotomía, abandonando el último cuarto.

Al final de este estadio, la suma de las partes distribuidas no se concibe igual al todo repartido.

Estadio 2 B (entre los 6 y 7 años) la dicotomía ya no representa dificultades y se logra la partición en tercios. La partición en cinco presenta aún dificultades, y el sujeto logra intuitivamente la conservación.

Estadio 3 A (entre los 6;6 y 8 años). La partición en tres se efectúa en virtud de un esquema anticipatorio, poniendo en relación las particiones a cortar con la totalidad, por lo tanto se concibe esa totalidad como idéntica a la suma de sus partes.

Estadio 3 B (entre los 9 y los 10 años). La partición en cinco y en seis se logra según el mismo método. Aunque es natural pensar que si ya están en posesión de un esquema anticipador de división o de articulaciones intuitivas casi operatorias, sus acciones de operaciones se acompañen de una reversabilidad suficiente para implicar la existencia de las invariantes de las cuales la identidad está afirmada en forma muy explícita.

En el análisis de reportes de investigación realizado por Nunez relacionado con la comprensión de los números racionales, llega a precisar bases o antecedentes a la comprensión de estos números, especialmente en la relación parte-todo.

La comprensión de la relación parte-todo debe estar precedida por la comprensión parte – parte. Las relaciones "más grande/pequeño que" e "igual a" son relaciones utilizadas en los inicios de la cuantificación de fracciones. Además, dado que las fracciones son generadas mediante divisiones, es preciso buscar el origen de la comprensión infantil de los números racionales en las situaciones de división, ya en la acción de dividir o de repartir, y la comprensión de la división comienza cuando los niños entienden el significado de repartir (*Vid,* NUNEZ*: 230 –271*).

Hay una distinción entre los problemas de reparto y los problemas de división. La acción de hacer repartos se considera una actividad donde se realiza una correspondencia biunívoca entre los conjuntos a repartir, ya que se dan partes iguales a cada receptor y se requiere poca anticipación, pues la acción se realiza como si los receptores estuvieran presentes. Diferente es la tarea que implica la resolución de los problemas de división. Ahí se requiere considerar las relaciones entre los objetos que se van a repartir y el número de participantes que van a recibirlos, así como el número de objetos que cada uno recibe como resultado de la división. Este tipo de problemas propicia realizar una anticipación, pero requiere de la comprensión de la relación inversa entre el número de receptores y el tamaño de la porción.

Los resultados obtenidos en las investigaciones de los autores antes mencionados, hacen suponer que toma más tiempo comprender la relación inversa entre cociente y divisor en los problemas de cociente, que comprender esta misma relación en los problemas de particiones.

Otra de las nociones que destaca Nunez (*Vid, Ibid: 254*) es la de la línea media o mitad. Esta noción en los inicios de la cuantificación de las fracciones, representa el punto de referencia o de apoyo para advertir resultados de un reparto o bien para sustentar sus hipótesis, parece ser el vínculo entre las relaciones parte–parte y parte-todo.

Kieren precisa que para que el niño comprenda el concepto de fracción requiere de ciertas habilidades llamadas por él "mecanismos mentales". Además de los mecanismos de desarrollo como son: la conservación de cantidad, la conservación del todo, la identidad y la reversabilidad de pensamiento; hace referencia a los mecanismos de construcción sobre los cuales la enseñanza ejerce su influencia (*Vid,* KIEREN: 1983: 4–11).

Dentro de los mecanismos de construcción, además del concepto de número entero y sus operaciones se encuentran:

- La equivalencia. La habilidad para comprender los diferentes criterios que una igualdad entre fracciones implica. Esta habilidad, además, le permitirá relacionar las partes que provienen de particiones distintas.

- Partición. La habilidad para realizar la equidivisión de una cantidad continua o discreta en un número indicado de partes.

- Unidades divisibles. Es la habilidad para concebir a la unidad como divisible y a la vez ver a las partes obtenidas como nuevas unidades susceptibles a ser divididas.

2.3.3 Aspectos fundamentales en el trabajo con el significado parte–todo.

La idea parte-todo implica un cambio en la concepción de la unidad. Este cambio en la concepción de la unidad de ningún modo ha resultado cosa fácil para el hombre. En el diálogo de "Parménides o de las ideas" de Platón el autor inicia su teoría de las ideas y hace entrever algunas dificultades que ella suscita; afirma y niega éstas como método que propone para salir de esas dificultades, pero además aplica éste método a la idea suprema: la idea de unidad.

El siguiente párrafo corresponde a un fragmento en el que Platón (PLATÓN: 238-239) pone en boca de Sócrates la dificultad que representa el cambio de concepción de una unidad simple a una unidad compuesta:

> ... Ciertamente, si se me demostrase lo semejante haciéndose desemejante, o lo desemejante haciéndose semejante, esto sí que me parecería prodigioso. Pero que cosas, que participan de estas dos ideas, tengan sus caracteres respectivos; esto, mi querido Zenón, de ninguna manera me parecería absurdo; como no me parecería, si se me demostrase, que todo es uno por participar de la unidad y al mismo tiempo múltiple por participar de la multiplicidad. *Pero probar que la unidad misma es multiplicidad, y la multiplicidad unidad, he aquí lo que sería una cosa extraña*.

Esta reflexión filosófica permite vislumbrar la dificultad que esta concepción representa para cualquier persona, especialmente para el niño que inicia el estudio cuantitativo de la idea parte-todo en la que subyace una nueva concepción de unidad.

Los resultados de investigaciones muestran (*Vid,* HIEBERT: 3) que la adquisición de una conceptualización madura de la unidad es un proceso cognitivo que requiere tiempo acompañado de múltiples experiencias. Para el trabajo con fracciones como una relación parte–todo, se requiere de un cambio fundamental en la concepción de la naturaleza de la unidad. Mientras con el trabajo de los números naturales se opera con unidades unitarias, al trabajar con fracciones se requiere de una unidad compuesta, ya que ahora las unidades se subdividen y el numeral representa sólo parte de la unidad. “La unidad es el contexto que proporciona significado a la cantidad” (HIEBERT: 4); este cambio en la naturaleza de la unidad representa un cambio en la concepción del número, es decir un cambio a la entidad más básica de la aritmética.

Además de la necesidad de los cambios en la concepción de la unidad, se requiere de una anticipación de la estructura de la misma; ya que para resolver situaciones problema es necesario anticipar la estructura de la unidad involucrada en dicha situación: “Es como si el proceso de solución se revelase al anticipar la unidad apropiada” (HIEBERT: 6).

En los siguientes fragmentos del Parménides se plasma la importancia que representa para el hombre esta concepción de la unidad como parte-todo:

> ...Parménides.- Pero el todo es necesariamente una unidad formada con muchas cosas, y cuyas partes son lo que llamamos partes; porque cada una de las partes es la parte, no de muchas cosas, sino de un todo...
> Aristóteles.- ¿Cómo?
> ...Parménides.- La parte no forma parte, ni de muchas cosas, ni de todas, sino de una cierta idea y de una cierta unidad, que llamamos un todo; unidad perfecta, compuesta de la reunión de todas las partes. La parte de este todo es verdaderamente la que es una parte.
> Aristóteles.- Perfectamente
> Parménides.- Luego si las otras cosas tienen parte, participan del todo y de lo uno.
> Aristóteles.- Ciertamente.
> Parménides.- Luego las cosas otras que lo uno, teniendo partes, forman necesariamente un todo uno y perfecto.

... Parménides.-Si lo uno no existe, nada entre las otras cosas será concebido como uno, ni como muchos. Porque es imposible concebir la pluralidad sin la unidad.
Aristóteles.- Imposible
Parménides.- Si lo uno no existe, las otras cosas no existen; ni son concebidas como uno, ni como muchos.
Aristóteles.- No, a lo que parece.
Parménides.- Ni como semejantes, ni desemejantes.
Aristóteles.- Tampoco.
Parménides.- Ni como los mismos, ni como otros; ni en contacto, ni separados; y si lo uno no existe, ellas no son ni parecen nada de lo que nos parecieron ser antes.
Aristóteles.- Es cierto
Parménides.- Si, por tanto, dijésemos, resumiendo: si lo uno no existe, nada existe, ¿no diríamos verdad? (PLATÓN: 308).

Los datos estudiados muestran que las ideas de fracciones presuponen una subestructura cualitativa. Las partes deben comprenderse primero como partes integrales de un todo que se puede tanto dividir como volver a reunir, antes de poder igualarse mutuamente y así transformarse en fracciones. Este proceso de igualación de las partes, una vez captado como tal, es mucho más fácil de dominar que las operaciones de subdivisión, y por consiguiente el concepto de fracción sigue de cerca el de parte. Por medio del proceso de poner las partes en mutua relación surge la idea de que están subordinadas al todo.

Figueras precisa que en el establecimiento de la relación parte-todo, mediante la fracción expresada por el numeral, existen aspectos fundamentales a considerar como son:

- La consideración exhaustiva del todo.
- La igualdad de las partes.
- La correspondencia del número de subdivisiones del todo con el denominador.
- La vinculación entre la parte y el numerador.
- La asociación de la fracción con relación entre las partes y el todo (*Vid,* FIGUERAS 1988: 44).

Además para la comprensión operativa de este significado se requiere el desarrollo de algunas habilidades como:

- Tener interiorizada la noción de inclusión de clases, presupone la capacidad para pensar simultáneamente en el conjunto que representa la parte en relación con el conjunto que representa el todo, al establecer una comparación sobre todo cuando se trabaja con modelos discretos (*Vid,* PIAGET: 113–114).
- La identificación de la unidad. Distinguir qué entero es el que se considera como unidad en cada caso concreto.
- Habilidad para realizar divisiones de manera que el todo se conserve.
- Manejar la idea de área, para el caso de las representaciones con modelos continuos.

2.3.4 Obstáculos que impiden la formación del concepto de fracción común en el niño.

En la formación del concepto de fracción es preciso tener presente obstáculos que pueden presentarse en este proceso, Kieren señala que la ausencia de cualquiera de los mecanismos mentales mencionados anteriormente representa precisamente un obstáculo en su aprendizaje.

Brousseau menciona que cuando un alumno se enfrenta a un conocimiento nuevo puede toparse con obstáculos que clasifica en epistemológicos y didácticos. Los obstáculos epistemológicos son los que provienen de aplicar a un conocimiento nuevo, nociones y reglas adquiridas en un conocimiento anterior, mientras que los obstáculos didácticos son los producidos por un problema de enseñanza (*Vid*, DÁVILA:133–140).

Con relación a las fracciones, es frecuente encontrar la tendencia de parte de los alumnos de aplicar las nociones de número entero a las fracciones, obstáculo que se refleja en la dificultad de comprender que el producto de dos fracciones pueda ser menor que cualquiera de los factores, o que el cociente sea menor que el divisor o adjudicar el mayor valor a aquel decimal que más cifras tenga. Errores como la dificultad para reconocer que un todo puede estar formado por más de una unidad o asemejar la imposibilidad de sumar tercios con cuartos con la imposibilidad de sumar peras con manzanas, pueden ser resultado de una forma de enseñanza particular.

El trabajo de Figueras (1988) está inscrito en la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de los números racionales. Rastrea el desarrollo del concepto de número racional, a través de los diversos significados que éste tiene según en la situación en la que subyace. Realizó un contraste entre dos categorías de representación de fracciones: el modelo continuo y el modelo discreto.

En el estudio, hace una tipificación de los errores presentados en las respuestas de los alumnos, la cual hace posible contemplar la problemática subyacente en los procesos de adquisición de los conceptos.

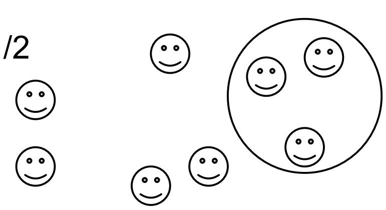
Dentro del catálogo de errores se observan cuatro categorías que se presentan tanto en el modelo discreto como en el continuo:

1. La no consideración del todo.

Esta clase incluye las situaciones en las que el denominador identificado por el estudiante, difiere de aquéllos que están vinculados con el todo definido a través de la imagen, como son:

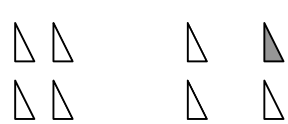
- Se restringe la lectura a una parte de la imagen.

Ejemplo: Encierra 1/2



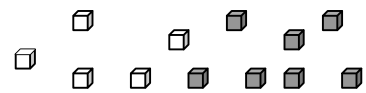
- Se centra la fracción de la parte sin conexión a la relación parte-todo.

Ejemplo: Ilumina 1/4



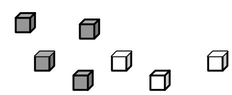
- Se asocia la cardinalidad del todo con el denominador y la parte con el numerador.

Ejemplo: Ilumina 1/7



- Se asocia el denominador con la cardinalidad del complemento de la parte.

Ejemplo: Anota qué fracción está iluminada.



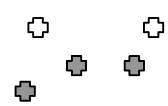
4/3

2. El predominio de la cardinalidad de la parte.

En este grupo se reúnen las situaciones en las que se advierte una disociación de los elementos constitutivos del numeral o de la relación parte–todo y una tendencia a asignarle al numerador o a la parte una posición de privilegio. Bajo estas circunstancias, el alumno posterga, sustituye u omite la relación que el numerador tiene con el denominador o que el todo tiene con la parte. Dentro de estas situaciones se encuentran las siguientes:

- Se asigna el numerador a la cardinalidad de la parte y se relega u omite el denominador.

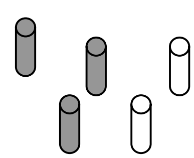
Ejemplo: ¿Qué parte está iluminada?



3

- Se asigna a la parte el papel del todo.

Ejemplo: ¿Qué parte está iluminada?



5/3

- Se asigna al numerador la cardinalidad de una parte, haciendo caso omiso de la relación parte–todo.

- Asigna el número de partes que constituyen la fracción al denominador.

3. El predominio del denominador.

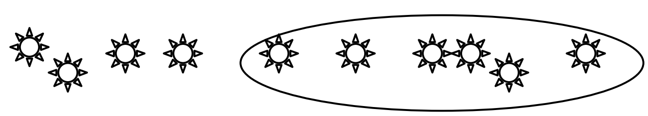
En esta caracterización están contempladas las situaciones en las que se observa una disociación de los elementos que forman el numeral que expresa la relación parte–todo y una tendencia a otorgarle al denominador un lugar relevante y relega la relación que éste tiene con el numerador. Las situaciones presentadas son:

- Asigna el denominador a la cardinalidad de la parte.
- Asigna el denominador al número de grupos, haciendo caso omiso del numerador.
- Asigna el denominador al número de grupos relegando la relación con el numerador.
- Parte la colección en subgrupos cuya cardinalidad coincide con el numerador.
- Completa grupos cuya cardinalidad coincide con el denominador.

4. Errores de conteo.

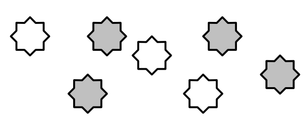
Las situaciones que pertenecen a esta clase se caracterizaron por errores en los procesos de conteo de los objetos que intervienen en la imagen.

- Existen errores en la cardinalidad de la parte.



5/10

- Existen errores en la cardinalidad del todo.



4/6

Los errores que se presentaron exclusivamente en el modelo discreto fueron:

- Dificultades de codificación y decodificación del lenguaje matemático.
- Dificultades para establecer las conexiones entre los elementos.

Los errores que se presentaron sólo en el modelo continuo fueron:

- Dificultades asociadas con problemas de partición de las figuras planas.

- Dificultades asociadas con problemas de recuperación del todo.
- Los significados asociados al concepto de fracción.

CAPITULO III

BASES TEÓRICAS Y METODOLÓGICAS

3.1 INGENIERÍA DIDÁCTICA.

3.1.1 Objeto de la Ingeniería Didáctica.

Quien suscribe considera que a raíz del avance tecnológico, fundamentalmente en lo relativo al lanzamiento de los cohetes espaciales, se provocó una revisión de los currículos de matemáticas en varios países. Como consecuencia de esta crisis en los currículos se propuso atender a las estructuras matemáticas, es decir, a los principios y conceptos que le dan coherencia; revolucionando así, la didáctica tradicional.

En ese momento el objetivo se convirtió en dotar a los alumnos de herramientas potentes y generales para que pudieran aplicarlas a un sistema diferente, respetando el rigor matemático; es decir, con menos axiomas que enunciar sería más fácil lograr la comprensión en los alumnos.

Se introdujo una serie de nociones nuevas que generó la necesidad de capacitación a profesores en matemáticas. Para atender las nuevas exigencias del curriculum.

Era necesario...

- una aproximación científica a los problemas generados por la comunicación del saber matemático;
- diseñar proyectos de investigación de tipo experimental que formularan hipótesis, diseñaran experiencias y construyeran herramientas;

En los años ochenta se empezó a manejar en Francia el término de "Ingeniería Didáctica" en la didáctica de las matemáticas. La Ingeniería Didáctica tiene como sustento teórico la Teoría de las Situaciones Didácticas. El Término “ingeniería”, (*Vid,* ARTIGUE: 33) se retoma precisamente del campo de los ingenieros, en el sentido del empleo de conocimientos científicos de la propia área para abordar problemas reales y complejos, haciendo uso de una metodología específica, es decir, acepta someterse a un control científico de sus acciones para comprender la realidad y actuar sobre ella.

El objetivo de la Ingeniería Didáctica es el de abordar problemas pertinentes a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas con el empleo de los conocimientos científicos que en este campo se producen, mediante determinadas técnicas para conocer y, en algunos casos, intervenir en este campo de las matemáticas.

Desde esa década, la Ingeniería Didáctica optó por el desarrollo de investigaciones desligadas de las relaciones tan fuertes que se habían establecido en la investigación y la acción por la tendencia a “innovar” constantemente la enseñanza. Se propone, por un lado, “una acción racional sobre el sistema, con base en los conocimientos didácticos preestablecidos” (ARTIGUE*:* 36) y con la recurrencia, si es necesario, a metodologías externas. Por otro lado, intenta que las actividades didácticas en la clase puedan efectuarse como prácticas de investigación que contribuyan al desarrollo teórico del campo. Esta es la doble función de la Ingeniería Didáctica: afirmar la posibilidad de una acción racional sobre el sistema a partir de los conocimientos didácticos establecidos y resaltar la importancia de las “realizaciones didácticas” en clase como prácticas de investigación.

3.1.2 Características de la Ingeniería Didáctica.

La Ingeniería Didáctica, en tanto metodología de investigación, puede estar al servicio de investigaciones cuyos objetivos pueden ser distintos; por lo tanto, lo que distingue a la Ingeniería Didáctica no es un conjunto limitado de objetos de estudio, sino las características propias de su metodología. Ésta se identifica por su esquema experimental, el cual está basado en la concepción, experimentación, observación y análisis de secuencias didácticas. Se apoya en el registro de estudios de caso, y la validación se da de manera interna a través de la confrontación de los análisis a priori y a-posteriori de la situación diseñada.

Artigue distingue las siguientes fases en el desarrollo de un proceso experimental, aunque hay que tener en cuenta que en una investigación específica no es indispensable que estén todos los elementos ni que tengan la misma importancia:

a) Análisis preliminares. Son aspectos importantes a contemplar durante la fase de concepción de una investigación de ingeniería didáctica. Algunos de ellos son:

- Análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza.
- El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos.
- El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución.
- El análisis del campo de restricciones donde se va a situar la actividad didáctica efectiva. Este análisis se realiza considerando tres situaciones: la dimensión epistemológica (características del saber en juego), la dimensión cognitiva (características cognitivas de los alumnos), la dimensión didáctica (características del funcionamiento del sistema de enseñanza).

b) La concepción y análisis a priori. Esta fase puede entenderse como un análisis de control de significados La teoría de las situaciones didácticas propone constituirse en una teoría de control de las relaciones entre el significado y las situaciones. El objetivo del análisis a priori entonces, es determinar en qué medida las selecciones hechas permiten controlar el comportamiento de los estudiantes y su significado. Es por ello que el análisis a priori está basado en un conjunto de hipótesis, las cuales se verán confirmadas o refutadas en el momento en que se confronten los análisis a priori y a posteriori.

El análisis a priori está constituido por una parte descriptiva y otra predictiva.

- Se describen las selecciones del nivel local y las características de la actividad didáctica que de ella se desprenden.
- En función de las posibilidades de acción, selección, decisión y validación del estudiante, se analiza qué es lo que podría estar en juego una vez que la actividad se pone en práctica sin la intervención del profesor.
- Se prevén los comportamientos posibles y se trata de demostrar cómo el análisis permitirá controlar los significados así como el hecho de que los comportamientos deseados son resultado del aprendizaje obtenido.

Después de la puesta en práctica de las actividades diseñadas, la confrontación entre el análisis a posteriori, constituye el proceso de validación por excelencia de las hipótesis formuladas.

3.2 Características metodológicas de este estudio

1. Análisis preliminar.

Se realizó la investigación documental sobre la formación de conceptos en general y de conceptos matemáticos así como la formación del concepto de fracción (*Vid. Supra*. Cap.II).

Se revisaron las investigaciones relacionadas con la fracción de Figueras (1988), Block(1986), Solares (1998) y los reportes de Nunez y Bryant (1997), entre otros.

Se hizo una revisión de las actividades que se proponen en los libros de texto vigentes relacionadas con la fracción en general, y en particular con el significado parte-todo (*Vid. Supra*. Cap.I).

Por otro lado, se realizó una primera visita a la escuela en el mes de noviembre de 1999, en la que se recabó la siguiente información: la escuela es particular y su población es de clase media. Cuenta con dos grupos de preescolar y con un grupo en cada grado de primaria, los grupos tienen entre ocho y quince alumnos. Tiene un salón con cinco computadoras al que los alumnos asisten a clase de computación una vez por semana.

Se analizó y determinó el grado de primaria conveniente para llevar a cabo la experimentación. Posteriormente se realizó una segunda visita para observar la forma de trabajo del grupo, así como la interacción entre la maestra y los alumnos. En entrevista con la maestra del grupo, informó que el libro de matemáticas generalmente lo contestaban de manera conjunta en el salón de clases. Con relación al trabajo con fracciones comentó, que los alumnos habían resuelto situaciones de reparto utilizando hojas de papel. En sus cuadernos se observó la representación de algunas fracciones en modelos de figuras geométricas con partes iluminadas así como sumas y restas de fracciones de igual denominador y sumas entre medios, cuartos y octavos.

2. Análisis a priori.

Se decidió aplicar las actividades en el último trimestre de 4º grado debido a que es en este grado donde se inicia el estudio formal de la fracción con el significado parte-todo (*Vid*, SEP c:35), después de que los alumnos han tenido experiencias relacionadas con la resolución de problemas que involucran este significado mediante cantidades continuas. Se consideró conveniente observar esta secuencia antes de que los alumnos iniciaran el trabajo del significado de operador y del trabajo con porcentaje que aparece en el libro de 5o. grado.

Se optó trabajar con cantidades discretas tomando en cuenta que:

a. Los alumnos de 4o. grado han trabajado la representación de fracciones en figuras geométricas planas y mediante dobleces de hojas de papel.

b. En las actividades de los libros de texto de 3o. y 4o. grado predomina el trabajo con cantidades continuas.

c. En los resultados de la investigación de Figueras (1988:196) se observa que el desempeño de los alumnos al resolver reactivos que involucran la representación de las fracciones mediante el modelo discreto, es menor con relación al mostrado en reactivos del modelo continuo de figuras planas.

d. Se deseó conocer la posibilidad de vincular los procedimientos que utilizan los alumnos al hacer repartos con representaciones de cantidades continuas, con los repartos de cantidades discretas mediante el uso de bloques "lego" como material manipulable. Este material tiene la característica de poderse ensamblar, por lo que el alumno puede proceder a hacer un reparto de la misma manera como lo hace con cantidades continuas y se puede observar en qué momento y qué alumnos optan por manejarlo como una cantidad discreta.

Con la utilización de contextos discretos, se fuerza a que el niño amplíe su esquema de la relación parte-todo ya que, en este caso, cuando se usa un conjunto de objetos discretos como canicas y se quiere representar 3/5, el conjunto se divide en cinco partes y se toman tres, pero los subconjuntos que resultan también están formados por varios objetos cada uno (*Vid,* LLINARES: 57).

Cuando se utiliza la relación parte–todo en contextos discretos, las situaciones numéricas pueden conducirnos a la idea de operador, de cociente o de razón. Por esto el trabajo con conjuntos discretos en la relación parte–todo puede significar un vínculo con los otros significados.

Para el aprendizaje de los números naturales se realizan actividades como seriar y hacer correspondencias uno a uno; para el aprendizaje de las fracciones estas actividades no se pueden realizar; es preciso además de los mecanismos constructivos antes mencionados, el uso de imágenes en el sentido de lo físico, gráfico y mental; y el uso del lenguaje en situaciones donde surja de manera natural. Estos tres aspectos relacionan lo conductual, visual y simbólico del pensamiento–acción de la construcción del conocimiento matemático (*Vid,* KIEREN 1988: 167-168).

Con el fin de utilizar imágenes en el sentido de lo físico y gráfico, se decidió incluir en la secuencia de actividades, situaciones de trabajo en equipo con material manipulable en la búsqueda de soluciones a problemas en el aula, y situaciones de trabajo individual en la interacción con un programa computacional educativo. También se consideró de interés conocer si el uso de este programa computacional favorece la reflexión del alumno acerca de la relación parte–todo.

Al diseñar la secuencia se deseó observar los procedimientos que utilizaron al resolver problemas en distintas condiciones.

a. Dado que interesó explorar las formas en que los alumnos resuelven problemas de reparto con la instrucción explícita y mediante la interpretación que hacen de la fracción expresada numéricamente, se incluyeron problemas cuya resolución implica el establecimiento de la relación de fractura, y problemas que requieren de la interpretación de la fracción como el operador fracturante.

b. Se incluyeron actividades para resolver con objetos físicos (bloques “lego”), y actividades en el programa computacional con imágenes que aceptan movimiento y otras fijas.

c. Al relacionar la parte y el todo numéricamente, el dato desconocido puede ser la parte, el todo o la fracción, dichas posibilidades se consideraron en las actividades.

A continuación se presenta una tabla con las características generales de cada una de las actividades de la secuencia:

	SIGNIFICADO DE FRACCIÓN		VARIABLE PERCEPTUAL		DATO DESCONOCIDO EN EL PROBLEMA		
ACTIVIDAD	RELACIÓN DE FRACTURA	OPERADOR FRACTURANTE	MANIPULATIVOS	PROGRAMA COMPUTACIONAL	PARTE	FRACCIÓN	TODO
1	✔		✔			✔	
2	✔			✔		✔	
3	✔		✔		✔		
4	✔			✔		✔	
5	✔		✔		✔		
6		✔		✔	✔		
7		✔	✔		✔		
8		✔	✔				✔
9		✔		✔			✔

Se realizó un análisis previo de cada una de las actividades, en el que se señalaron las características, los propósitos, la organización del grupo para su realización y las consignas. Se expusieron los procedimientos que se esperaba realizaran los alumnos y se advirtieron posibles dificultades. Lo anterior quedó asentado dentro de la planeación de las actividades y se presenta antes del desarrollo de cada una, para facilitar la lectura (*Vid, Infra.* Cap. IV).

La investigación de Figueras (1988), antes mencionada (*Vid, Supra: 32-35)*, reporta que la distribución de las imágenes de las cantidades discretas, representa una variable determinante en el acierto que los estudiantes tienen en los reactivos. Los arreglos rectangulares resultan ser más claros para la lectura; sin embargo, las respuestas que los estudiantes hacen mediante dibujos no tienen esa disposición. Esta experiencia ha sido tomada en cuenta al diseñar el programa interactivo, ya que ofrece la ventaja al usuario de agrupar y acomodar las imágenes a su propia necesidad mediante la acción de arrastrar; se considera la posibilidad de que esta experiencia contribuya a que el alumno pueda hacer posteriormente dichas transformaciones mentalmente.

En una de las situaciones que se trabajan en el programa interactivo se utilizan las imágenes de los bloques que manipulan en el trabajo en equipo. Las imágenes aparecen en el monitor con movimiento y se colocan ante la vista de usuario unas arriba de otras y otras atrás, de manera que el usuario imagine la parte que no está a la vista, pero si lo requiere, puede mover cada una de estas imágenes para cambiar este acomodo a fin de distinguir el material con el que cuenta. Se pretende que estas acciones en el programa interactivo representen un vínculo para la interpretación de material impreso tan utilizado en la enseñanza.

Tanto en el trabajo en equipo como en las situaciones que se plantean en el programa interactivo, se pide al alumno una respuesta anticipada como producto de una estimación, enseguida se le da la instrucción para que realice las actividades que lo lleven a probar o disprobar dicha estimación.

3. Experimentación.

Para la selección de la escuela primaria en la que experimentó se tomó en cuenta el tamaño de los grupos, los equipos de cómputo con los que cuenta la escuela y la disposición de sus autoridades para realizar estas prácticas.

La secuencia de actividades se realizó en un grupo de 4º grado, formado por un total de nueve alumnos de entre nueve y diez años de edad. En la decisión de trabajar con todos los alumnos de ese grupo se vieron dos ventajas, por un lado, se pudo controlar la observación de la puesta en práctica de las actividades y por otro, se afectó en menor grado la dinámica de interacción propia del grupo. Además, el grupo contó con experiencia en el manejo de la computadora pues en sus clases se incluye una hora como taller de cómputo, con esto se evitó un posible distractor como podía ser la operación con la computadora.

La secuencia comprende nueve actividades, mismas que se pusieron en práctica en seis sesiones de sesenta minutos cada una, realizando tres sesiones por semana. Al término de cada actividad se hizo un primer análisis de lo ocurrido con la finalidad de tomar decisiones sobre la continuación de la secuencia.

Las sesiones fueron conducidas por la que suscribe y los datos fueron recabados con ayuda de una grabadora y cintas de audio, mismas que se transcribieron para contar con el registro de observación.

4. Análisis a posteriori y evaluación.

Se analizaron los datos recabados, principalmente contrastando el análisis previo de las actividades con los procedimientos de los alumnos observados durante la puesta en práctica de éstas. Con ello se realizó su evaluación en la que se señalaron las circunstancias que favorecieron el alcance de los propósitos de las actividades, así como las dificultades que se presentaron en cada una de ellas y los cambios que se proponen tanto en el diseño de las actividades como en el programa interactivo. También se analizó de manera global la secuencia y se obtuvieron conclusiones. Se presenta el informe de resultados del estudio (*Vid. Infra*. Cap. IV).

3.3 Enfoque pedagógico que se consideró en el diseño de la secuencia de las actividades.

Existen varias teorías que tratan de explicar los procesos de aprendizaje del sujeto. La obra de Jean Piaget ha constituido un importante impulso en el desarrollo de las teorías cognitivas al concebir al aprendizaje como un proceso en el que el sujeto construye el conocimiento a partir de las acciones que ejerce sobre el objeto.

A partir de los años cincuenta, se inicia un periodo generalizado por los enfoques conceptuales de la enseñanza de las matemáticas, se ponen en marcha proyectos especiales a fin de determinar cuál era la mejor manera de propiciar en los niños el aprendizaje de los conceptos y principios que dan coherencia al contenido matemático. Los partidarios de los enfoques conceptuales, coinciden en fomentar en el niño una sólida comprensión intuitiva de las estructuras subyacentes de las matemáticas (*Vid,* RESNICK:125–131).

Esta preocupación por enfocar la enseñanza de las matemáticas hacia la comprensión de sus estructuras provoca cambios en los currículos, pues ahora se trata de abordar los contenidos a partir de la comprensión más básica y continuar en años posteriores con los mismos temas pero con tratamientos cada vez menos intuitivos, es decir currículos en espiral. Surge una búsqueda por crear materiales y métodos que sustituyan los ejercicios de práctica por aprendizajes con comprensión es decir, que promuevan el desarrollo significativo de los conceptos. Dentro de esta corriente se crean teorías de la enseñanza orientadas hacia la comprensión de estructuras, entre las cuales se encuentra la teoría de Bruner.

3.3.1 La teoría de Bruner.

La tesis fundamental de la teoría de la instrucción de Bruner dice: " Si la superioridad intelectual del hombre es la mayor de las aptitudes, también es un hecho que lo que le es más personal es lo que ha descubierto por sí mismo" (BRUNER citado en CHADWICK: 39). Para el autor el descubrimiento cobra una especial importancia ya que la búsqueda creativa favorece el desarrollo mental; el descubrimiento de un principio o de una relación, hecho por un niño, es esencialmente idéntico al que un científico hace en su laboratorio; este descubrimiento consiste en transformar o reorganizar la evidencia de tal manera que le permita ver más allá de ella.

Existen dos aspectos por considerar en el curso del desarrollo cognitivo según Bruner (*Vid,* CHADWICK: 40-41), ya que para él, el crecimiento intelectual depende del dominio de ciertas técnicas por parte del individuo y no puede ser entendido sin hacer referencia a esas técnicas: el primero es el que se refiere a la maduración; el desarrollo del organismo y de sus capacidades permite que el individuo represente el mundo de estímulos que lo rodea en tres dimensiones progresivamente perfeccionadas, a través de las diferentes etapas del crecimiento, que son la acción, la imagen y el lenguaje simbólico. El segundo aspecto de la adquisición de técnicas para el dominio de la naturaleza consiste en la integración, o sea, la utilización de grandes cantidades de información para resolver problemas, una especie de orquestación de esas componentes en una secuencia integrada

> Es preciso representar las regularidades con las que entramos en contacto, para poder hacer generalizaciones. Estas representaciones dependen de la memoria, entendiendo por memoria no solamente el almacenamiento de la experiencia pasada sino la capacidad para recuperar lo relevante en una forma utilizable, esta forma de memoria depende del modo en que la información haya sido procesada y codificada. El producto final de este sistema de codificación y procesamiento es lo que conocemos como <u>representación.</u>
>
> ... A las tres modalidades de representación las denominaré representación enactiva, representación icónica y representación simbólica. Su aparición en la vida del niño sigue este mismo orden y la evolución de cada una depende de aquella que le precede, aún cuando todas siguen un curso más o menos invariable durante toda la vida, si exceptuamos accidentes tempranos como la ceguera, la sordera o las lesiones corticales (BRUNER: 47).

Los niños, en su etapa de desarrollo, pasan por tres modos de representación del mundo: enactivo, icónico y simbólico. El modo de representación enactivo significa básicamente que la representación del mundo se hace a través de la respuesta motriz. El modo icónico “codifica los acontecimientos mediante la organización selectiva de los perceptos y las imágenes, y mediante las estructuras espaciales, temporales y cualitativas del campo perceptivo y sus imágenes trasformadas” (BRUNER, 1998: 48). Bruner, al explicar este tipo de representación, también hace notar lo que aún falta por investigar cuando expresa:

> “No se sabe mucho acerca de las condiciones necesarias para el desarrollo de la representación imaginística o icónica, o en qué medida dicha representación se ve afectada por la intervención de los padres o del entorno en los primeros años de la vida. Al parecer, en el aprendizaje corriente de adultos, cierto nivel de destreza o práctica motora es condición previa necesaria para el desarrollo de una imagen simultánea a la acción que represente la secuencia de actos pertenecientes a una determinada conducta. Según MANDLER (1962), cuando se indica a un adulto que elija un camino a través de una compleja red de interruptores eléctricos el sujeto no se forma una imagen de dicho camino hasta haber practicado exhaustivamente y dominado la tarea mediante manipulación sucesiva (BRUNER: 49).

Como podemos ver la representación icónica depende de una cierta cantidad de respuestas y habilidades motrices, así como de ejercicios paralelos al desarrollo de imágenes, que permiten a los niños percibir el ambiente y transformarlo en imágenes.

En la representación simbólica el niño representa internamente el ambiente, es decir que los objetos del ambiente no necesitan estar presentes en su campo perceptivo ni estar en un orden determinado; esta manera de capturar las experiencias en la memoria se posibilita sobre todo por la aparición de la competencia lingüística.

Esta representación está antecedida por experiencias que se han registrado como manipulaciones físicas o como imágenes mentales de las manipulaciones

En relación con la enseñanza, “Bruner afirmó que si el intelecto se desarrollaba en el orden enactivo-icónico-simbólico, entonces lo lógico era enseñar los conceptos en dicho orden. Partía de la base de que el desarrollo conceptual seguía un curso paralelo a la teoría general del desarrollo intelectual” (RESNICK: 140).

La principal preocupación de Bruner es inducir una participación activa del aprendiz en el proceso de aprendizaje y respecto a la enseñanza de conceptos básicos. Él recomienda ayudar a los niños a pasar, progresivamente, de un pensamiento concreto a un estadio de representación conceptual y simbólico más adecuado al pensamiento. Esto se logra si se les ofrece la posibilidad de practicar con múltiples materiales que puedan manipular por sí mismos con el fin de crear un fondo rico de imágenes mentales.

Los contenidos de la enseñanza tienen que ser percibidos por el alumno como un conjunto de problemas que él debe de resolver, a fin de que éste considere al aprendizaje significativo e importante. Para Bruner, la única manera de aprender por medio del descubrimiento es mediante la ejercitación en la solución de problemas y el esfuerzo de descubrir. Por otro lado, señala que el material debe ser organizado por el propio estudiante ya que el modo de representación, el ritmo y el estilo de captación de una idea son diferentes para cada alumno (*Vid,* CHADWICK: 44)

En relación con matemáticas, Bruner contempla la posibilidad de contribuir a formar las estructuras en la mente de los estudiantes, a base de proporcionarles experiencias que permitan desarrollar las representaciones enactivas, icónicas y simbólicas de los conceptos (*Vid,* RESNICK: 138).

Dienes, quien trabajó al lado de Bruner, destaca la importancia del uso de los materiales en la enseñanza de las matemáticas, dado que los niños son constructivistas más que analíticos requieren de las experiencias con los objetos del mundo para poder formarse una imagen de la realidad. Destaca que la transición a la representación simbólica debe permitir que las imágenes se lleguen a evocar por los símbolos matemáticos que se asocian a las mismas, ya que las experiencias matemáticas se liberan de sus referentes concretos y se convierten en herramientas susceptibles a nuevas manipulaciones mentales, pero advierte que se puede tender a manipular los símbolos sin hacer referencia a la “realidad” que simbolizan, si no “se aplica un repaso de vez en cuando". Recomienda que los niños deben “volver a pasar” por la fase de manipulaciones concretas, o por lo menos, recibir imágenes de la misma, en cualquier momento, para que el simbolismo siga conectado de forma vital con sus experiencias concretas (*Vid, Ibid.*: 150 - 162)

Bruner divide a la instrucción en tres clases básicas: experiencia directa o contingente, aprendizaje por observación y empleo de sistemas simbólicos, incluyendo el lenguaje natural. Las tres categorías se encuentran interrelacionadas y dependen de sus modelos de representación. Para el caso de las experiencias directas, las realizaciones tecnológicas que sugiere son: ambientes estructurados, experiencias de laboratorio, simulación, juegos educativos e incluso máquinas de enseñanza. El aprendizaje por observación lo divide en observación propiamente dicha y en modelaje; para el primero los medios que sugiere son filmes y proyecciones, mientras que para el modelaje sugiere las demostraciones y el propio desempeño de los modelos. En cuanto a los sistemas simbólicos, las innovaciones tecnológicas consideradas apropiadas son: medios impresos, diseños, diagramas, modelos, gráficos y mapas. Sin embargo afirma que lo importante en la utilización de los medios de instrucción no son las tecnologías de transmisión sino los sistemas simbólicos escogidos (*Vid,* CHADWICK: 167–170).

3.3.2 Las etapas de Bruner en la secuencia de actividades propuestas.

En las actividades que se sugieren, el alumno puede operar sobre los objetos o imágenes que representan el todo o la parte, o bien simplemente establecer una relación entre estos y asociarla con el numeral, o formar dicho numeral integrando los elementos de la fracción.

En este sentido las actividades se desarrollan predominantemente en la representación enactiva. Atendiendo a las acciones que implican la resolución de los problemas hemos hecho la siguiente clasificación:

¿Qué tipo de acciones se deben hacer sobre el todo o sobre la parte?

1. Enactiva.

a) Distribución del todo de acuerdo a una instrucción de reparto equitativo, mediante:

- Material concreto
- Imágenes

Ejemplo: Un equipo está formado por cinco personas, reparte de las estrellas de manera que a todos les toque lo mismo y no sobre nada.

☆ ☆☆ ☆ ☆ ☆☆ ☆ ☆ ☆ ☆

b) Subdivisión del todo en número de partes iguales a través de la relación parte-todo expresada por:

- Un numeral
- Lenguaje oral
- Lenguaje común escrito

c) Selección de la unidad de acuerdo al número de subgrupos que lo integran, mediante la representación:

- Material concreto
- Imágenes

d) Reconstrucción del todo representado mediante:

- Material concreto
- Imágenes

2. Icónica

a) Reconocimiento de la parte a través de la relación parte-todo en una representación:

- Objetiva
- Gráfica

b) Identificación de la unidad una vez que se conoce la fracción (expresada en lenguaje verbal, lenguaje común escrito o lenguaje aritmético) representada mediante:

- Material concreto
- Imágenes

2B. Icónica - Simbólica

(En este tipo de respuesta estuvo presente el material concreto o las imágenes de éste).

a) Representación simbólica de la fracción caracterizada por:

- Lenguaje verbal
- Lenguaje común escrito
- Lenguaje aritmético

Antecedida por:

- Identificación de la parte expresada mediante: lenguaje oral o material concreto.
- Obtención de la parte representada con: material concreto o gráfico.

3. Simbólica.

a) Representación simbólica de la fracción caracterizada por:

- Lenguaje verbal.
- Lenguaje común escrito.
- Lenguaje aritmético.

Antecedida por:

- Identificación de la parte expresada mediante lenguaje oral.
- Obtención de la parte expresada en lenguaje oral o escrito.

Ejemplo: En una bolsa hay 15 canicas de las cuales 3 son verdes ¿Qué fracción representan las canicas verdes?.

3.4 ¿Por qué se incluyó el uso de la computadora en la secuencia didáctica?.

Para dar respuesta a esta interrogante, se tomaron en cuenta básicamente, tres aspectos que justifican la razón de incluir un programa interactivo computacional, dentro de las actividades de la secuencia que se pusieron en práctica. Uno de estos aspectos fue el observar los procedimientos que los alumnos siguieron al resolver los problemas tanto con material manipulable como con imágenes en la pantalla (variable perceptual) y que se trató anteriormente.

Otro aspecto que se consideró, es la influencia que ha tenido en la vida de la sociedad las nuevas tecnologías de la información y comunicación; la escuela como institución, puede aprovechar las ventajas de estas tecnologías. Estudiosos de la enseñanza han señalado ventajas, de manera general, de la utilización de la computadora como recurso didáctico. Por lo que interesó detectar en particular, tanto los elementos que tiene el programa interactivo, como aportaciones para su rediseño, de manera que contribuyan a hacer de la computadora ese recurso.

Por otro lado, se consideraron las demandas y preferencias de los estudiantes que, de manera general, tienen por el uso de la computadora; por lo que se deseó constatar si mediante el uso del programa que se incluyó, esta preferencia se mantenía. La puesta en práctica aportó elementos de juicio para hacer modificaciones.

Estos son los aspectos que han influido en la decisión de incluir en las actividades el uso de un programa interactivo y sobre ellos se habla a continuación.

La tesis fundamental de la evolución de las tecnologías de la información y la comunicación es que los cambios tecnológicos han dado lugar a cambios radicales en la organización del conocimiento y en la propia cognición humana, esencialmente en la subjetividad (*Vid,* MORENO citado en ADELL). El primero de estos cambios o revoluciones ocurrió con el lenguaje oral: éste permitió la referencia de objetos no presentes y expresar estados internos de la conciencia, de esta manera los individuos pueden enterarse del conocimiento acumulado de la sociedad; el segundo de estos cambios fue la escritura, que aunque más lenta que el habla, de menor audiencia y menos interactiva, hace que el discurso se haga más reflexivo, deliberado y estructurado. El tercero lo constituyó la imprenta cuya influencia es decisiva en las transformaciones políticas, económicas y sociales que han configurado el mundo tal y como es ahora. La cuarta revolución se refiere a los medios electrónicos y la digitalización, cuyo origen se puede situar desde 1844 cuando Samuel Morse envió el primer mensaje por telégrafo y la información viajó a la velocidad de la luz; la evolución continuó con la máquina analítica, la ENIAC. El rápido desarrollo de las aplicaciones analógicas migra hacia la digitalización que se caracteriza por las capacidades interactivas entre emisor y receptor y por el procesamiento y manipulación de la información. Los cambios ligados a esta evolución de la tecnología dependen de numerosos factores sociales y económicos, no sólo tecnológicos; "el cambio tecnológico sólo puede ser comprendido en el contexto de la estructura social dentro del cual ocurre" (CASTELLS citado en ADELL).

Es común constatar que el mundo cambia y con esto evidentemente, las mentalidades y las estructuras sociales se encuentran desprevenidas ante los cambios bruscos impuestos por esta nueva "revolución industrial". Los efectos de las nuevas tecnologías modifican incluso las formas de pensamiento y su influencia sobrepasa el campo científico para ocupar el papel central en la actividad económica, y en las formas de organización con su respectivo impacto en el aspecto político, social y cultural (*Vid,* CALDERON: 236).

Las nuevas tecnologías también han influido en la educación, "La revolución de la información tendrá un efecto profundo y permanente en la forma en que aprendemos" (BEEKMAN: 259). En esta revolución que incide en la educación mediante la transmisión electrónica de la información y la interacción del estudiante con ésta, se constituye una posibilidad de provocar en el estudiante una nueva actitud ante el objeto a conocer como se ilustra en el siguiente párrafo:

> "Esto nos hace pensar que la computadora, como el libro en su tiempo, producirá una profunda revolución educativa. Existen razones para pensar así, ya que con esta nueva metodología educativa es posible presentar no sólo imágenes en movimiento en lugar de los diagramas estáticos de los libros, sino también permitir al estudiante interactuar activamente con los programas" (CALDERON: 237).

El cambio provocado por la transmisión electrónica de los mensajes, se asemeja al cambio provocado por la actividad de la escritura, la preparación de libros, y el desarrollo de la industria de la impresión, que constituye el factor central de la revolución educativa en un periodo de cuatro siglos, en los que se amplía el acceso al conocimiento a un número cada vez mayor de personas en tiempos más reducidos.

Sin duda la escuela ha evolucionado, pero no con la rapidez suficiente para mantener el paso de esta cuarta revolución a la que se refiere Moreno. Para hacer énfasis a las tareas que hoy se imponen a los sistemas educativos se intenta contribuir en la exploración de formas para integrar las técnicas audiovisuales en la enseñanza.

En México en el año de 1996, se dio a conocer el Proyecto de Informática Educativa 1995-2000, inspirado en las experiencias previas obtenidas con el Programa COEEBASEP. El diseño del Proyecto partió de la necesidad de crear nuevas estrategias en el proceso irreversible de la introducción a la computadora en las aulas escolares.

El Proyecto considera tres aspectos: La evaluación y las nuevas estrategias de introducción de la computadora como herramienta didáctica, la enseñanza de la informática tanto a profesores como a educandos y la creación de una cultura computacional que haga eficiente las labores administrativas que se realizan en las escuelas.

Se pretende el aprovechamiento de los recursos computacionales de las escuelas mediante: 1) el seguimiento y la proposición de estrategias para las "Aulas de Apoyo Didáctico" equipadas con una computadora, 2) la formación, o el mejoramiento de los talleres de computación de las escuelas, y 3) la creación de Laboratorios de Informática Educativa en el nivel de secundaria, equipados con cinco o más equipos. Esto tiene como propósitos entre otros:

- Brindar al docente, por medio del Aula de Apoyo Didáctico, un medio personal que permita conducir la enseñanza de su asignatura hacia mejores logros y

- Elevar la calidad de la educación al permitir que los alumnos realimenten sus conocimientos mediante la interacción con equipos computacionales, especialmente en la modalidad del Laboratorio de Informática Educativa.

En el nivel de primaria, en los últimos años se ha incrementado hasta veinte el número de escuelas en el Distrito Federal que han sido incluidas en el Proyecto de Red Escolar coordinado por el Instituto Latinoamericano de Comunicación Educativa (ILCE). Estas escuelas cuentan con cinco computadoras multimedia y por lo menos un profesor, quien coordina las actividades de la clase de computación para los alumnos de los últimos cuatro grados. En esta clase se familiarizan con el equipo, navegan por la Internet, mantienen comunicación con niños de otros estados de la República por medio de correo electrónico, trabajan con el procesador de textos y utilizan un número muy reducido de programas interactivos que apoyan contenidos programáticos.

Por otro lado, existe el gusto e interés que los alumnos muestran por los vídeo-juegos y la computadora, Albano nos hace reflexionar ante este hecho:

> En lo que concierne al vídeo-juego tal como lo señala Negroponte, los adultos creemos que esta actividad es nociva y una pérdida de tiempo, Sin embargo este niño mientras juega está tomando decisiones a partir de los resultados que ha obtenido en el proceso del juego. Ha podido desarrollar una estrategia de acción y luego ha sabido traducir al terreno táctico y aplicarla. Ha aprendido también a establecer ciertos cálculos probabilísticos ya que al activar una función sabe que ocurrirá algo determinado y gracias a una destreza adquirida en el mismo entorno del juego, sabrá cómo preverlas y organizarlas. Lo que ha ocurrido aquí es que este escenario virtual ha servido al mismo tiempo como un laboratorio estratégico y lo que ha aprendido servirá para aplicarlo luego en su desarrollo (ALBANO: 2).

El comportamiento de los niños ante los vídeo-juegos muestra que pueden manejar herramientas del pensamiento estratégico y aplicarlas con éxito aunque no sean conscientes de ello, es decir poseen la capacidad aunque pueden carecer del conocimiento. Esta es precisamente la brecha que se considera podría llenar adecuadamente la escuela.

La utilización de la computadora como un instrumento motivacional, a través de la presentación de escenarios que se relacionan con su mundo y que al mismo tiempo son capaces de propiciarle conocimiento constituye el esquema más importante y capaz de revolucionar la educación básica (*Vid,* CALDERÓN: 242).

En este contexto se diseñaron para la presente investigación actividades que formaron parte de un programa interactivo multimedia. El término multimedia "se refiere al uso de una combinación de textos, gráficos animación, vídeo, música y efectos de sonido para comunicarse" (BEEKMAN 1995: 173). El programa multimedia merece su nombre porque proporciona información a través de varios medios. Además de textos, hipertexto y gráficos el programa titulado "Fracciones" contiene animaciones, información en audio, música y efectos de sonido. De esta manera, el programa interactivo forma parte de los recursos didácticos utilizados en la secuencia de actividades puestas en práctica.

Para hablar de los recursos didácticos es preciso contextualizar con el enfoque desde el que se considera el aprendizaje, cuando se concibe el aprendizaje como un proceso complejo, que implica la reflexión y la acción del sujeto cognoscente ante el objeto de conocimiento "...un recurso didáctico se convertirá en recurso para el aprendizaje sólo cuando propicie la interacción del educando con el objeto de conocimiento" (SEP-CONAFE: 87).

García (*Vid*, GARCÍA *et al*: 22), al referirse al uso de programas interactivos en la enseñanza de matemáticas, destaca algunas ventajas como:

- Desde un punto de vista efectivo, se puede dedicar menos tiempo a la realización de cálculos rutinarios dando paso a la reflexión y el análisis de los resultados. Las posibilidades gráficas mejoran la comprensión de muchos conceptos.

- Permiten un trabajo más autónomo del estudiante, adecuando su ritmo de trabajo a su situación personal y pueden favorecer el trabajo en equipo.
- Resulta sumamente gratificante ver cómo estudiantes encuentran atractivo y divertido el trabajo matemático ante las posibilidades del sistema, que eliminan la labor rutinaria y potencian la parte creativa.

La computadora puede ayudar primero, como herramienta en la formación del concepto y después, como generadora de problemas y ejercicios con creciente complejidad que refuerzan lo aprendido y/o muestran el obstáculo que aún no ha sido superado (*Vid,* PAPACOSTAS: 5).

Actualmente, existen programas computacionales educativos, simuladores interactivos que se convierten en laboratorios de experimentación para todas las ciencias, sintetizadores y mecanos que ejercitan a los estudiantes en las tareas de diseño y construcción, trátese de maquinarias, edificios, piezas musicales o de composición literaria; se conocen las posibilidades de creación de escenarios que permiten al estudiante participar e intervenir en procesos en los cuales anteriormente sólo lo hacía como espectador. Pero, ¿cuántos de los programas antes mencionados, se encuentran al alcance de la educación pública en México?

En otras palabras, en materia de creación de programas computacionales educativos aún falta mucho por hacer, experimentar y aprender, del mismo modo que en la tarea de la elaboración de libros de texto no se ha agotado el tema. En México estamos en el inicio de esta revolución; se coincide con Calderón cuando dice:

> Mucho tenemos que hacer para reescribir, apenas en su primera versión, los materiales relacionados con los programas de estudio de los diferentes niveles educativos...Se requiere de pequeños grupos de hombres y mujeres visionarios dispuestos al sacrificio, al riesgo del fracaso, a tener que iniciar y reiniciar cada proyecto, debido a los

> avances tecnológicos y las evidencias de la experimentación (CALDERÓN: 248).

Porque para conocer algo es preciso ensayar, analizar lo que ocurre en diversas situaciones y, en definitiva, experimentar. Por esto se incluye el uso del programa computacional en las actividades de la secuencia.

3.5 Manual del programa computacional "Fracciones.exe"

Introducción

Como contenido programático específico, las fracciones se encuentran a partir de 3 er. grado y están presentes en el tratamiento de expresiones algebraicas, como coeficientes o exponentes, valor de variables, fórmulas, etc. Tener un concepto amplio de fracción contribuye a resolver múltiples y variados problemas. De este modo las fracciones son un recurso que permiten resolver situaciones en el ámbito científico, técnico, artístico y en la vida cotidiana.

"Fracciones. exe" es un programa desarrollado en la Línea: Informática y Educación de la Maestría en Desarrollo Educativo de la Universidad Pedagógica Nacional, Unidad Ajusco.

El programa corresponde al tema de las fracciones con el significado parte–todo mediante el trabajo con conjuntos discretos. Concebido como un programa que constituya a la computadora en un recurso para el descubrimiento de esta relación.

Características.

- Su interfaz es de manejo sencillo, con base en el empleo del ratón para realizar los procedimientos de arrastrar o hacer clic.

- Las preguntas que el programa hace en ocasiones requieren respuestas abiertas o cerradas y corresponden a frases o numerales. La escritura de estos numerales involucra la escritura de los números naturales o de las fracciones mediante el signo "/".
- Da un trato personal al usuario y respeta su tiempo de respuesta.
- Admite respuestas abiertas y cerradas.
- Conduce al usuario mediante instrucciones en forma oral y escrita.
- Proporciona un ambiente donde el usuario simula la manipulación de objetos para apoyar su razonamiento.
- Guarda en un archivo externo las respuestas de los usuarios.

Requisitos mínimos del sistema.

El programa está diseñado para trabajar en un ambiente multimedia de sistema operativo Windows 95 o superior.
CPU 486 DX/75Mhz
Memoria RAM 16 Mb
Monitor con resolución de 800 x 600 pixeles, y 256 colores.
Espacio mínimo en disco duro: 21 Mb.
Fuente: Comic Sans MS

Instalación del programa.

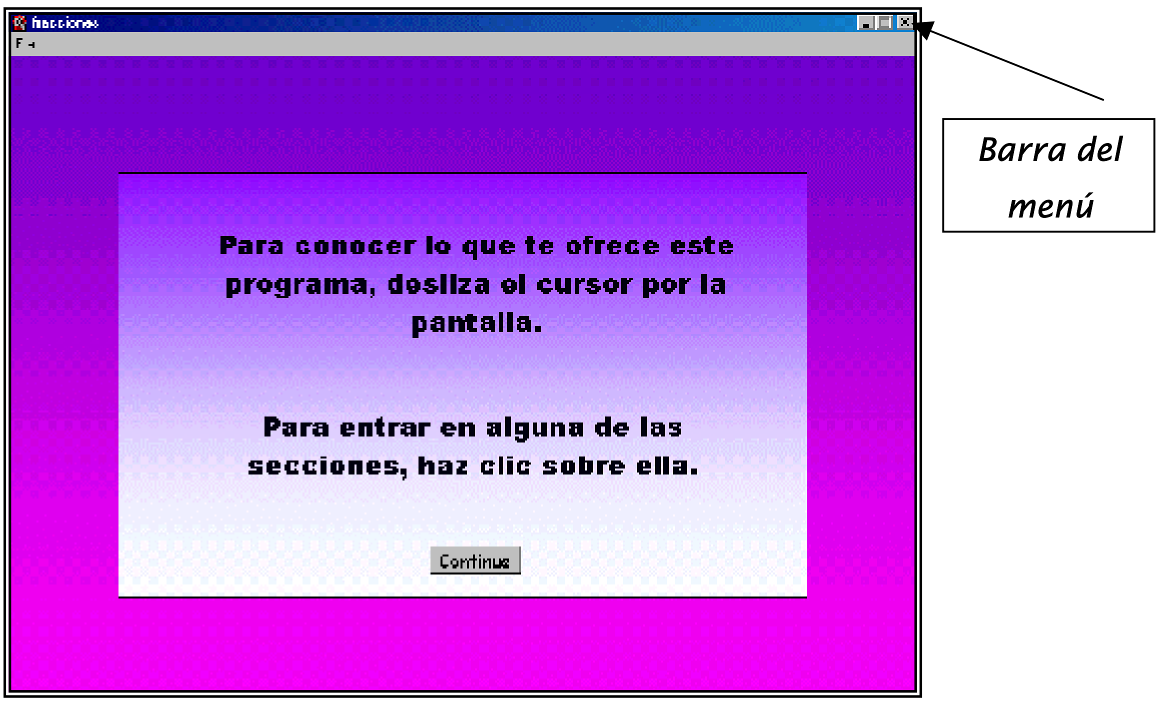
El programa viene en un CD-ROM y es preciso copiarlo previamente en el disco duro de su computadora siguiendo los siguientes pasos:

1. Se inserta el CD- ROM con el programa “Fracciones” en la unidad de CD de la computadora.
2. Se hace doble clic en Mi PC.
3. Se hace doble clic en la unidad correspondiente al CD–ROM.
4. Se hace clic en la carpeta “Fracción” con el botón derecho del ratón, del menú que despliega esta acción, se selecciona la acción de "copiar".

5. Se hace clic con el botón derecho del ratón sobre la unidad correspondiente al disco duro, del menú que despliega se selecciona la acción de "pegar".
6. Se localiza el archivo “Fracciones. exe” y se hace doble clic en él para empezar a trabajar.

7. Si se desea capturar las respuestas de los usuarios de este programa, se coloca un disco de 3 ½ en la unidad A.

Funcionamiento.



El programa inicia con las instrucciones de navegación para conocer el menú principal.

Durante el desarrollo de todo el programa se encuentra en la barra del menú principal la opción para salir, minimizar o restaurar este programa en cualquier momento. Si se desplaza el puntero por la pantalla, se conoce el Menú principal que consta de: Ejercicios, Problemas y Juegos.

Hacer clic en cualquiera de estos puntos lleva a conocer el contenido del submenú.

El programa contiene cuatro actividades mediante las cuales se trabajan diferentes tipos de problemas que se presentan con el significado de la fracción como parte–todo.

1. Se presenta el *todo*, en una situación de reparto y el usuario obtiene la *parte* y la representa mediante una *fracción*.
2. Se presenta el *todo* y la *parte* para que se busque la *fracción*.
3. Se presenta el *todo y la fracción* para que forme la *parte.*
4. Se presenta la *parte* y la *fracción* para que forme el *todo*.

Dentro de la parte de Ejercicios, al igual que en cada uno de los submenús, se encuentran las opciones para salir del programa, regresar al menú principal o en este caso el ejercicio titulado “Blanca Nieves y los 7”

En la parte de Problemas se encuentran dos actividades tituladas: “Acertijo” y “Bloques”.

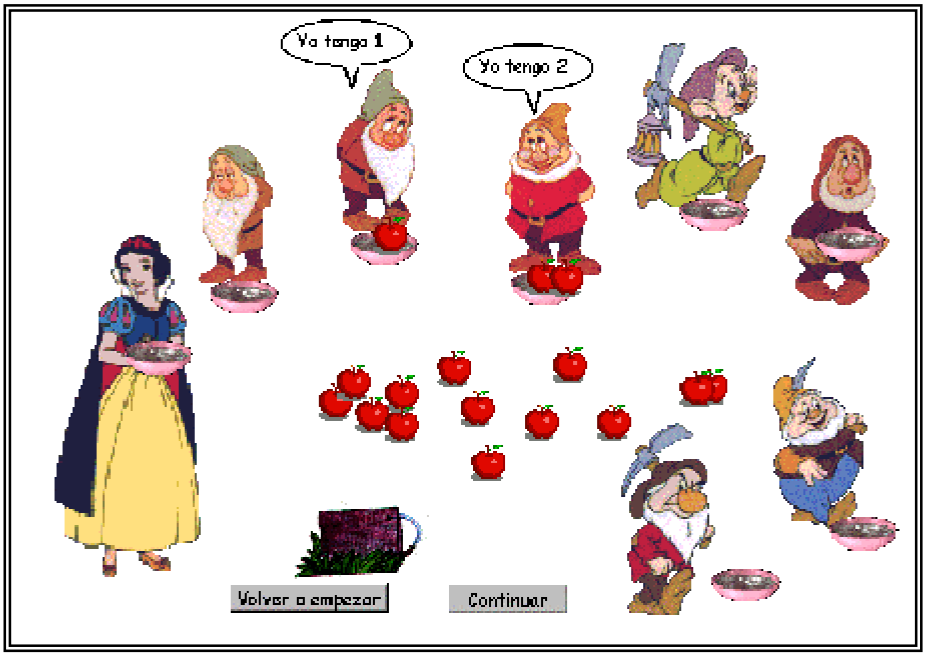
Y en la parte que corresponde a Juego se encuentra el juego titulado “Te digo la parte y me indicas el entero”

“BLANCA NIEVES Y LOS 7”

Esta actividad presenta el tipo de problemas en el que se presenta el todo en situación de reparto para obtener la parte. Tiene el propósito de que el usuario utilice la relación n – d (numerador – denominador) en su respuesta. El usuario cuenta con instrucciones escritas y orales, así como información en la imagen. La respuesta es una fracción no unitaria pero requiere de la comprensión de información implícita en la pregunta.

El programa da la bienvenida al usuario y solicita teclee su nombre para que, posteriormente, se refiera a él por medio de éste. Para contextualizar el problema, se introduce la actividad con una versión del cuento de “Blanca Nieves” modificada. Una vez que aparecen todos los personajes en la pantalla, se le solicita al usuario realice un reparto de manzanas de manera que a todos les toque lo mismo y no sobre nada. En esta parte, el programa da las instrucciones para que mediante la acción de arrastrar y hacer clic el usuario pueda mover a cualquier parte de la pantalla los objetos que reparta, cuando las manzanas son depositadas en el plato de alguno de los personajes que aparecen, quedan inmovilizadas y se muestra con un hipertexto en forma de burbuja la expresión del personaje que lleva su recuento de lo que le ha repartido.

En esta pantalla el usuario cuenta con la opción de “volver a empezar” en caso de que su procedimiento anterior no le haya satisfecho.



Después de terminar el reparto, una vez que el usuario presiona el botón para continuar, el programa le pregunta si el reparto que realizó ha sido equitativo. Cualquiera que sea su respuesta, se le pide explique por qué lo considera así y concluye solicitándole la fracción que le tocó a un conjunto de los personajes.

Si el usuario acierta a la respuesta correcta el programa concluye la rutina solicitando comente el procedimiento que ha seguido y, posteriormente, da las gracias por su participación. De lo contrario, lo invita a realizar nuevamente el reparto paso a paso, proporcionándole ayuda mediante gráficos que enfatizan el número de grupos que se forman y el número de grupos que dan respuesta a la pregunta.

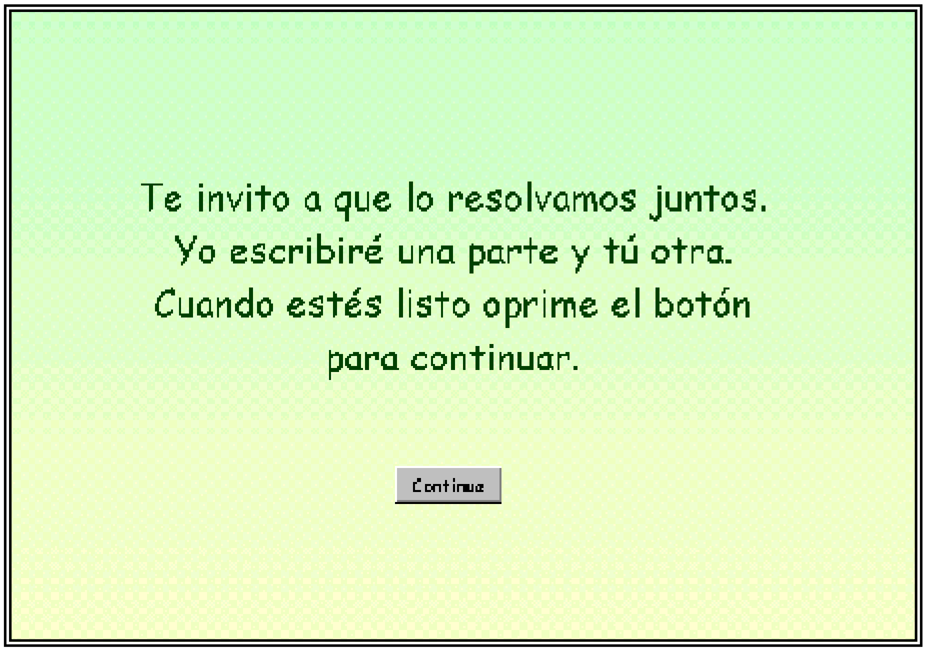
En esta parte aparece la pregunta: “¿Cuántos grupos se forman en total?”, la raya de fracción con los signos de interrogación en el numerador y en el denominador. Una vez que el usuario emite una respuesta, el programa se encarga de acomodarla en el lugar del denominador. Enseguida aparece otra pregunta: “¿Cuántos de esos subgrupos pertenecen sólo a los enanos?” El programa escribe en el lugar del numerador la respuesta del usuario. Finalmente el programa hace nuevamente la pregunta inicial: “Entonces ¿qué parte le tocó a los enanos?”. La respuesta que emita el usuario es capturada, al igual que las anteriores en un archivo externo.

Una vez concluida esta actividad, el programa regresa a la pantalla del menú de ejercicios, donde el usuario tiene la opción de volver al menú principal, entrar nuevamente a este ejercicio o salir del programa.

“ACERTIJO”

En esta actividad se plantea un problema en forma de acertijo, el grado de dificultad estriba en que el todo y la parte no se dan en forma explícita. En la pantalla sólo está parte de la imagen que describe el acertijo. Deja a la imaginación la parte que se debe traducir a la fracción que da solución al mismo.

Una vez que el usuario emite su respuesta, cualquiera que esta sea, el programa le pide que explique su procedimiento. Si la respuesta numérica es incorrecta el programa lo conduce para que lo hagan paso a paso. En esta rutina el usuario cuenta con el apoyo de gráficos que contribuyen a dar más información.



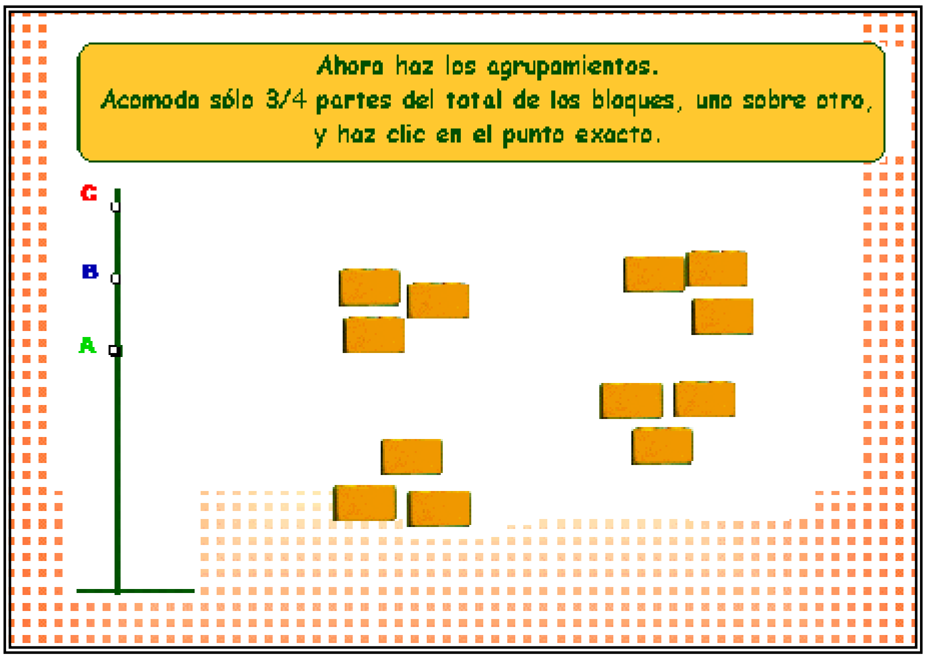
"BLOQUES"

Esta actividad se presenta el todo y la fracción para que el usuario elija la parte. Consta de tres situaciones del mismo tipo. Se trata de seleccionar de un conjunto de "Bloques Lego" que aparecen en pantalla, la parte que las instrucciones dictan. En los tres ejercicios se le pide que haga una estimación como primer paso; luego se le solicita que proceda a realizarlo.

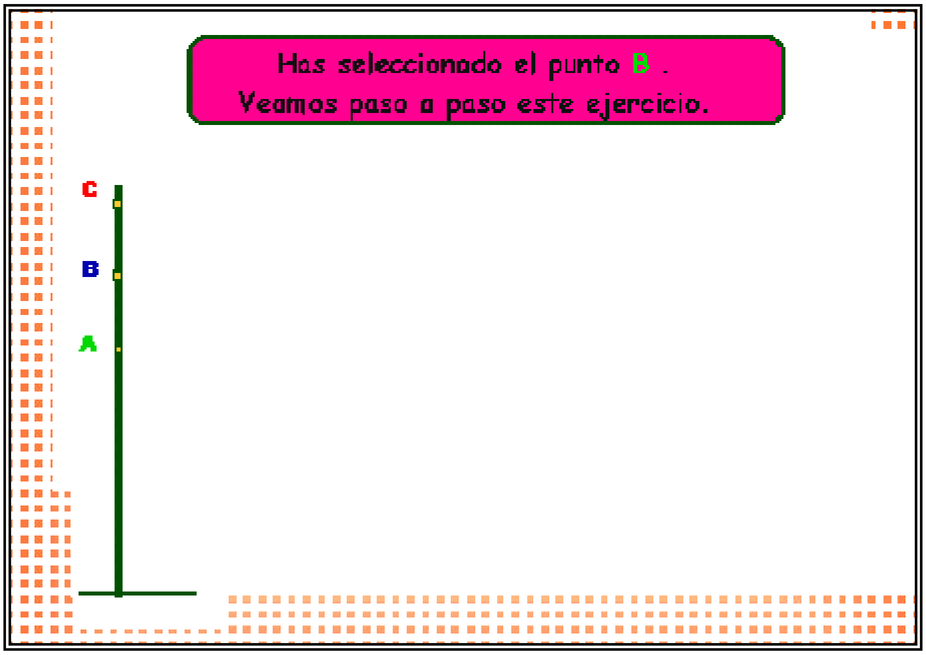
El primer problema dice: "Si construyes una torre con 3/4 del total de piezas que ves, ¿hasta qué punto alcanzaría esa torre? Haz clic en el punto exacto".

Cuando se le pide al usuario, haga una estimación en relación con el punto que alcanza con la parte de bloques que le dice la fracción, los bloques aparecen en pantalla separados, acomodados en un arreglo rectangular, pero las imágenes son fijas, el usuario no puede desplazarlas a ningún lugar.

Una vez que se da la instrucción para que lleve a cabo la construcción de la torre, aparecen en la pantalla los bloques uno por uno desplazándose hasta acomodarse de manera superpuesta. En la pantalla también se puede ver una columna con tres puntos, cada uno a diferente altura y señalados con las letras A, B y C. A partir de este momento el usuario puede arrastrar las imágenes de los bloques para hacer sus agrupamientos o bien para formar la torre. El punto que presione como respuesta es capturada en el archivo externo.



Después de que emite su respuesta en los tres ejercicios, cualquiera que ésta sea, el programa le dice el punto que ha seleccionado y le pide escriba la manera en que lo ha resuelto. En el primer problema el programa muestra un procedimiento de solución, después de que el usuario ha dado su respuesta. En el segundo y tercer ejercicio el usuario simplemente hace una estimación del resultado, resuelve el ejercicio y emite su respuesta.



"TE DIGO LA PARTE Y ME INDICAS EL ENTERO"

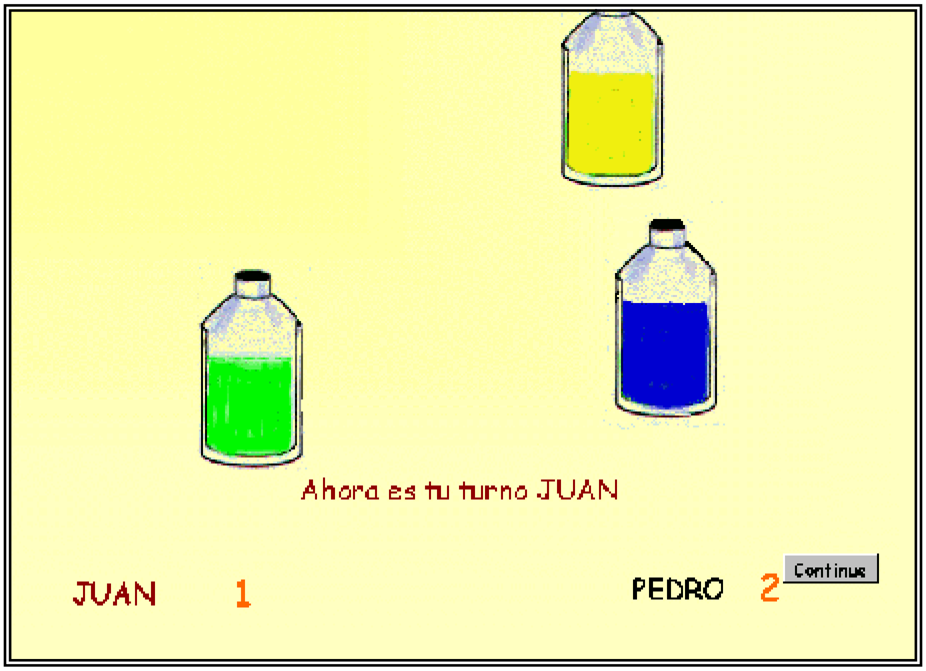
Esta situación se trata de integrar el entero una vez que se conoce la parte y la fracción que ésta representa, es decir, tiene el propósito de que el usuario utilice la relación entero–número de partes que lo forman, para resolver el problema.

El juego se realiza entre dos personas. Tiene ocho jugadas en total que resuelven de manera alternada por lo que le corresponden cuatro a cada jugador.

En cada jugada se simula la caída en forma simultánea de tres botellas que contienen un número diferente de canicas. Las instrucciones, que aparecen en forma escrita y oral, indican que las canicas que aparecen fuera de las botellas representan la parte que la fracción muestra. El problema consiste en seleccionar aquella botella de la que se han salido, es decir la botella que contiene el complemento para formar el entero de acuerdo a la parte que se conoce.

Una vez que el usuario da su respuesta, el programa la evalúa y la contabiliza para colocar en un marcador la puntuación de los dos jugadores.

Una vez que los dos contrincantes han participado en sus cuatro jugadas, el programa emite el resultado final y vuelve a la pantalla donde el usuario tiene la opción de volver a entrar al juego, ir al menú principal o salir del programa.



CAPÍTULO IV

PLANEACIÓN, DESARROLLO Y EVALUACIÓN DE LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS.

SESIÓN 1.

ACTIVIDAD 1

Planeación:

Propósitos:

- Propiciar un acercamiento de los alumnos a los materiales que van a manejar para representar cantidades discretas.
- Realizar repartos equitativos y exhaustivos cuando el número de bloques que se reparten permanece constante y varía el número de participantes.
- Familiarizar al estudiante con la forma en que se nombran a los resultados de los repartos.
- Distinguir los repartos que son posibles de los que no lo son.
- Observar la forma de representar las fracciones de manera objetiva con conjuntos discretos.

Material para el alumno:

- Una bolsa con 12 bloques de plástico “Lego” por equipo.
- Tarjetas 1 y 2

Material para el maestro:

- Las tarjetas 1 y 2 de tamaño de papel bond extendido.

Las instrucciones para los dos repartos aparecen en las tarjetas 1 y 2.

Esta actividad se hace en equipo. Se reparte una bolsa con 12 bloques de plástico entre supuestos grupos que tienen diferente número de integrantes, el registro de estos repartos lo hacen en la tarjeta 1 que a continuación se presenta.

TARJETA 1

Se va a repartir una bolsa con bloques de plástico entre varios equipos que tienen diferente número de integrantes; el reparto deberá ser equitativo, es decir de manera que a todos les toque lo mismo y no sobre nada.

Iindicar qué parte le toca a cada integrante en la siguiente tabla:

EQUIPO	NÚMERO DE BOLSAS QUE SE REPARTEN	INTERGRANTES DEL EQUIPO	PARTE QUE LES TOCA
A	1	2	
B	1	3	
C	1	5	

¿Cómo lo resolvieron?

____

____

____

Después se reparte la misma bolsa con 12 bloques entre otros equipos, y registran sus resultados de los repartos en la tabla de la tarjeta 2. Estos repartos varían en el número de integrantes de los equipos del reparto anterior y ahora registran como resultados la parte que le toca a más de un integrante.

TARJETA 2

Se va a repartir la misma bolsa con bloques entre otros equipos, registra en la tabla los resultados de estos repartos.

EQUIPO	NÚMERO DE BOLSAS QUE SE REPARTES	INTEGRANTES DEL EQUIPO	PARTE QUE LE TOCA A **1** INTERGRANTE	PARTE QUE LE TOCA A **2** INTERGRANTE	PARTE QUE LE TOCA A **3** INTERGRANTE	PARTE QUE LE TOCA A **4** INTERGRANTES
D	1	4				
E	1	6				
F	1	7				
G	1	12				

Mapa descriptivo de la actividad 1.

ACTIVIDAD	*CONTENIDO*	***PLANTEAMIENTO***
1. 1	Realización de repartos entre 2, 3, y 5 integrantes.	1.1.1 Por equipos hacen el reparto equitativo y exhaustivo del equipo A, que aparece en la tarjeta 1. 1.1.2 Se pide a los equipos que nombren a un integrante para que muestre ante el grupo su resultado. El grupo juzga si el reparto es correcto y, en su caso, se hace la confrontación. 1.1.3 Se registra en el pizarrón el resultado de dicho reparto. 1.1.4 Se solicita a los equipos que realicen el reparto del equipo B de la tarjeta 1, se pide que estimen la parte que le toca y el tamaño de los subgrupos que se forman y que registren su conjetura. 1.1.5 Se pide comenten el resultado obtenido y que argumenten dicho resultado. 1.1.6 Se pide realicen el reparto correspondiente al equipo C. 1.1.7 Se da a conocer el resultado y se discute por qué no fue posible hacer ese reparto. 1.1.8 Se pide comenten los resultados, si no hay comentarios el maestro realiza las siguientes preguntas: ¿En qué equipo los integrantes obtienen más bloques?, En el equipo donde cada integrante obtiene 1/3, ¿cuántos subgrupos se forman?, ¿cuántos subgrupos le toca a cada integrante?.
1.2.	Realización de repartos entre 6, 7 y 12 integrantes y determinación de la parte que le tocó a X número de integrantes	1.2.1 El maestro entrega la tarjeta 2 y pide a los alumnos que lean lo que se plantea en la tarjeta 2, estimen los resultados de la parte que le toca a un integrante y entreguen en un papel el resultado de su estimación. 1.2.2 Solicita a los alumnos que hagan los repartos y registren en la tarjeta los resultados. 1.2.3 Un integrante de cada equipo da a conocer los resultados ante el grupo. En caso de que existan diferencias entre los resultados de los equipos se solicita que comprueben su resultado.

Consideraciones previas.

Las situaciones que se plantean en la actividad 1, pertenecen al tipo de problemas donde se conoce un todo que está definido, se da una instrucción de reparto una vez que se conoce el número de participantes entre quienes se va a repartir y se solicita conocer la parte que le corresponde a “x” número de integrantes. En este caso el todo permanece constante (12 bloques) y la variable está representada por el número de participantes (2, 3, 5 y 4, 6, 7, 12) entre quienes se realiza el reparto.

Los problemas de reparto con materiales que representan cantidades discretas requieren poca anticipación por parte del alumno para su solución. Se decide iniciar las actividades con un reparto entre dos personas para que el alumno vincule el resultado con la noción de mitad, en virtud del apoyo que ésta representa en los inicios de la cuantificación de las fracciones (*Vid, Supra:*27*).* La dificultad del problema estribaba en la concepción de la unidad con cantidades discretas (*Vid, Supra:* 29*)*, en este caso el entero está representado por 12 bloques, y el resultado al problema debe responder a la pregunta: ¿qué parte ..?

Para dar respuesta a la interrogante del problema se requiere que el alumno asocie con el denominador el total de subgrupos que forman después de hacer el reparto, y poner atención en el número de subgrupos que pertenecen a los integrantes de la pregunta para asociarlo con el numerador sin importarle el número de bloques que forman el subgrupo. O bien que tome en cuenta el número de elementos que forman la parte y establezca la relación con el total de elementos que reparte. Por tal motivo en la primera parte de la actividad que corresponde a los repartos de la Tarjeta 1, sólo se pide la parte que le corresponde a 1 integrante del equipo, cuyo resultado es siempre una fracción unitaria. Posteriormente, se trabaja con repartos de la Tarjeta 2, donde el resultado implica la suma de las fracciones unitarias obtenidas mediante los procedimientos utilizados anteriormente.

La instrucción de los repartos aparece en forma escrita y una vez que es leída por los alumnos en cada equipo, el maestro debe verificar que ésta se haya entendido. El registro del resultado en la tarjeta puede hacerse con lenguaje común o bien con lenguaje aritmético; de cualquier modo, emitir la respuesta implica: primero, hacer una interpretación de su trabajo realizado con los bloques y segundo, traducir la representación objetiva a la simbólica. Es decir la respuesta no requiere simplemente hacer un doble conteo (número de grupos que se forman y número de grupos sombreados o señalados de alguna manera), ni resulta obvia con el material que se ocupa.

Para que los alumnos puedan observar la variación que sufre el denominador y el numerador de la fracción, el registro de los resultados se debe hacer tanto en las tarjetas de cada equipo como en la lámina de la maestra. Al terminar de resolver los repartos de la Tarjeta 1, se hace una pregunta que se refería a la descripción del procedimiento que utilizan, que significa un ejercicio de reflexión sobre la actividad realizada además de que de esta manera se cuenta con la posibilidad de conocer diferencias y similitudes de los procedimientos que siguen los equipos.

En esta misma actividad, al variar el número de integrantes entre quienes hacen las distribuciones, se incluyen repartos que no cumplen con la equidad o la exhaustividad y por lo tanto no es posible realizar, a fin de que algunos alumnos sean capaces de advertir esta limitante.

¿Qué procedimientos se esperan?

- Que distribuyan los bloques uno por uno entre los supuestos integrantes.
- Que hagan una primera distribución aproximada y posteriormente realicen una compensación para igualar las partes.
- Que ensamblen el total de los bloques y con esta columna hagan particiones.
- Que cuenten el total de bloques, lo dividan entre el número de participantes de dicho reparto para que obtengan un cociente que constituya el número de bloques de cada subgrupo.

Desarrollo.

Como se anticipó, hacer el reparto con los bloques no representó problema alguno, el problema consistió precisamente en describir su respuesta en términos de fracción.

En el primer reparto, dos de los tres equipos (equipo 1 y 3) recurrieron a ensamblar los bloques para manejarlos como una magnitud continua e hicieron particiones. El otro equipo hizo el reparto por medio de una aproximación y después efectuó una compensación para igualar las partes.

A continuación presentamos un cuadro con las respuestas emitidas en forma oral durante el desarrollo de esta actividad. Para mostrar un panorama de ellas se han anotado en lenguaje aritmético. Las respuestas que aparecen separadas mediante una "coma" fueron emitidas inmediatamente después de la primera respuesta.

Alumno	Reparto de una bolsa que contiene 12 bloques								
	2 integrantes	3 integrantes		5 integrantes	4 integrantes			6 integrantes	7 integrantes
	Parte que le toca a 1 integrante	Parte que le toca a 1 integrante		Parte que le toca a 1 integrante	Parte que le toca			Parte que le toca a 1 integrante	
					1 i	2i	3 i		
		1ª.	2ª.						
D	1/2		3/8			1/2	3/4	1/6	
A	1/2								
Jes	6							1/2, 1/6	
J		4/2	3/4, 1/3		3/4, 1/4		3/9, 3/4		
JC		1/4	1/3	Respuesta anticipada: No se puede					
K		1/4	1/3			1/2			
E						2/4	3/4	1/2, 1/6	
Equipo 3	1/2	1/4							No se puede
Equipo 2				1/5					

Como se observa en la segunda columna del cuadro, el primer reparto que se hizo entre dos integrantes es advertido por dos alumnos que inmediatamente emitieron la respuesta de 1/2 sin operar con los bloques. Cuando se les pidió que mostraran su respuesta los tres equipos presentaron el mismo número de bloques ensamblados y ante la pregunta: ¿Qué parte le tocó a un integrante?. Todos los niños gritaron que 1/2 excepto una niña que dijo 6, es decir ella puso su atención en el número de bloques que forma la parte (cardinalidad de la parte), sin relacionar con el total de bloque que repartió; interpretó el resultado de ese reparto como el cociente de la fracción.

El siguiente reparto, que aparece en la tercera columna del cuadro de respuestas, se observó que los tres equipos encontraron como estrategia, ensamblar el total de bloques y realizar una partición. Sólo en uno de los equipos un niño inició el reparto uno a uno, pero el resto del equipo empezó a ensamblar los bloques y él abandonó el reparto que había iniciado.

Cuando distribuyeron el mismo conjunto de bloques entre tres integrantes, puso de manifiesto el conflicto de nombrar al subgrupo resultante mediante una fracción que mostrara la relación parte–todo. Los tres equipos coincidieron cuando mostraron la parte resultante, las diferencias se apreciaron al asignar la fracción a su resultado, como es posible apreciar en el cuadro de respuestas (tercera columna). El niño que la nombró con 4/2 estableció como numerador la cardinalidad del subgrupo que formó la parte y como denominador la palabra medios por lo que es de suponerse que ésta la utilizó como sinónimo de la palabra “parte de”. Fueron 4 niños quienes coincidieron en nombrarla 1/4, establecieron como numerador el número de grupos que tomaron y como denominador la cardinalidad del subgrupo resultante. En virtud de que los tres equipos dieron la misma respuesta la maestra intervino con la pregunta: ¿En cuántas partes quedó dividido el entero?. Después de que todos contestaron que en tres partes, los alumnos trataron de corregir su respuesta. Uno de los niños respondió que 3/8, colocó en el numerador el número de grupos que resultaron del reparto y como denominador se supone que atendió a la cardinalidad de la suma de dos de los subgrupos que integran el conjunto complemento. Otro niño dijo: 3/4. Asoció al numerador el número de grupos resultante y como denominador la cardinalidad de cada uno de esos subgrupos, después de que observó la parte que tenía en la mano y la que quedó en la mesa corrigió su resultado y dijo 1/3. Cuando la maestra le preguntó por qué dio ese resultado, él explicó: "Porque son tres tercios, son tres partes".

El siguiente reparto lo hicieron entre cinco integrantes (aparece en la quinta columna), fue posible escuchar que uno de los niños advirtió que éste no se podía y en otro equipo se escuchó a un niño que dio la instrucción a sus compañeros diciendo: "tenemos que hacer 5 partes". Dos de los equipos antes de terminar de operar con los bloques, ya que el reparto que intentaban hacer no cumplía con las características de equidad o exhaustividad, dieron como respuesta 1/5. El otro equipo le dio a la maestra la siguiente explicación:

Equipo 1: Mire, a tres les toca de a dos y a dos les toca de a tres.

Después de que la maestra les hizo notar las condiciones del reparto, los equipos respondieron que entonces no se podía.

El siguiente reparto se realizó entre cuatro integrantes (las respuestas se anotaron en la sexta columna del cuadro). Los tres equipos habían tomado como estrategia ensamblar los bloques y hacer particiones tomando el conjunto de bloques como la representación de una magnitud continua. Compararon cada una de las partes que obtuvieron y en caso necesario hicieron una compensación para que las partes quedaran del mismo tamaño.

Después de operar con los bloques los representantes de los equipos mostraron la parte que le correspondió a un integrante formada por 3 bloques ensamblados. A la pregunta: ¿Qué parte le tocó a un integrante?, Uno de los niños contestó que 3/4 y enseguida corrigió: “no, no un cuarto”. Él se refirió a la cardinalidad del conjunto que forma la parte y la colocó como parte, y como todo tomó en cuenta el número de subgrupos que se formaron. En su segunda respuesta integró la fracción con el número de subgrupos que forman la parte seleccionada y la colocó en el numerador y el total de subgrupos formados con el todo como denominador.

Ante la petición de la maestra de que mostraran lo que le había tocado a dos integrantes las respuestas fueron:

> Ma: ¿Qué parte es?
> K: Un medio.
> D: También un medio. Porque se están uniendo dos cuartos.
> E: Si, dos cuartos.

Quizá por la familiaridad que ya tenían con las fracciones 1/4 y 1/2, cuando las respuestas tuvieron que ver con éstas fracciones se mostraron más seguros e incluso de manera natural manejaron la equivalencia entre ellas.

Enseguida se les pidió que mostraran la parte que le tocó a 3 integrantes. Aunque todos presentaron el mismo número de bloques, las respuestas para nombrar esta parte difirieron:

> J: Tres novenos.
> E: Tres cuartos.
> D: Tres cuartos, porque dijo tres integrantes, a cada integrante un cuarto.
> Ma: Javier, ¿porqué tres novenos?
> J: Por que son tres integrantes y son nueve bloques.

Dos de los representantes de los equipos que emitieron la respuesta 3/4 formaron la fracción con el número de subgrupos que integran la parte solicitada, para asignar a la parte y con el total de subgrupos que se forman para asignar al todo. Uno de ellos además explicó su razonamiento, integró la fracción con la suma de las fracciones unitarias. Como se aprecia, otro de los niños (J) integró la fracción que dio como respuesta con el número de subgrupos que forman la parte para referirse efectivamente a la parte, y con la suma de la cardinalidad de los subgrupos de la parte para referirse al todo. Cuando la maestra le solicitó que le diera la parte que le correspondió a un integrante, el niño le mostró uno de los subgrupos al que nombró con la fracción un cuarto y enseguida continuó el conteo de los grupos hasta llegar a integrar los tres cuartos que representaron la respuesta. En el cuadro de respuestas (*Supra:*81) se puede ver que es el mismo niño que en dos ocasiones anteriores asignó al todo la cardinalidad de la parte.

Para integrar la fracción correctamente en sus dos primeras respuesta, él tuvo que distinguir cuál era la parte y cuál era el todo.

Al realizar el reparto entre seis integrantes (las respuestas aparecen en la sexta columna de la tabla), se observa mayor habilidad para integrar los subgrupos. Para dar la respuesta, uno de los tres representantes de los equipos, integró correctamente la fracción y dos confundieron la cardinalidad de la parte con el todo aunque enseguida hicieron la corrección.

En esta actividad la validación de las respuestas se hizo comparando los bloques obtenidos por cada uno de los equipos, pero faltó una forma para que validaran el nombre de la fracción en lenguaje aritmético o en lenguaje común.

A la pregunta relacionada con la descripción de sus procedimientos, uno de los equipos respondió de manera escueta simplemente refiriéndose a la formación de subgrupos, otro se refirió a las características de colaboración de los integrantes del equipo y el otro hizo la siguiente descripción:

> "Nosotros formamos una línea recta con los bloques y luego dividimos los subgrupos entre los integrantes de los equipos".

Por falta de tiempo no fue posible concluir la actividad con la observación de los resultados en la tabla 2, para que los alumnos pudieran percatarse de las modificaciones que sufre el denominador y el numerador en cada uno de los repartos.

Evaluación:

Con relación a los procedimientos utilizados por los alumnos, es de considerarse que el número de bloques tiene que ver para que opten por ensamblarlos y manejarlos como una magnitud continua. Si se aumenta el número de éstos se podría ver mayor variedad de procedimientos para efectuar los repartos.

En general los propósitos de la actividad se cumplen. Se nota que algunos alumnos toman como estrategia de solución, integrar la fracción interpretando el resultado del reparto en donde asignan al denominador el total de subgrupos y como numerador el número de subgrupos de la parte; a la vez éste último lo integran con la suma de las fracciones unitarias. Sin embargo se observa la dificultad que enfrentan otros niños para relacionar parte-todo debido al predominio de la cardinalidad del conjunto que forma la parte en sus respuestas. Por lo que es de asumirse como conveniente trabajar con la pregunta: ¿Cuántos bloques le toca a cada uno? (significado de cociente de la fracción), al lado de la pregunta: ¿Qué parte le toca a cada uno?, o ¿qué fracción le toca a cada uno? (parte-todo) con el fin de que los alumnos establezcan la diferencia. También se pueden aprovechar los resultados que hacen referencia al número de bloques del conjunto que forma la parte, siempre y cuando se propicie que establezcan la relación con el total de bloques y a partir de los resultados diferentes hacer la confrontación para trabajar equivalencia de fracciones.

SESIÓN 2.

ACTIVIDAD 2

Planeación.

Propósitos:

- Conocer la forma de navegar y operar el programa computacional.
- Interpretar la información gráfica que aparece en pantalla.
- Resolver un problema de reparto cuyo resultado es una fracción no unitaria.
- Utilizar la relación n, d (numerador, denominador) en sus respuestas.

Esta actividad la realizan en forma individual con el programa "Fracción.exe" (*Vid, Supra:* 65), consiste en hacer repartos de manzanas entre los personajes que aparecen en pantalla mediante la acción de arrastrar. Al finalizar el programa hace preguntas que se refieren a la equidad del reparto y el resultado de éste. El planteamiento del problema dice:

"Después de unos meses, la bruja del cuento de Blanca Nieves se arrepintió de lo que había hecho y quiso hacer la pases con los enanos y la bella joven llevándoles una canasta de ricas y saludables manzanas. Haz el reparto de las manzanas de manera equitativa". "¿Qué parte les tocó a los enanos?"

Mapa descriptivo de la actividad 2.

ACTIVIDAD	***CONTENIDO***	***PLANTEAMIENTO***
2	Resolución de un problema de reparto planteado en el programa interactivo.	2.1 La maestra explica el uso del programa: - su forma de navegar - forma de salir - el significado de hacer clic - el significado de "arrastrar" - uso de los botones que aparecen en la pantalla y - forma de escribir en el teclado una fracción. 2.2 Los alumnos resuelven en forma individual la actividad 2 planteada en el programa donde se pide hagan un reparto equitativo y escriban la fracción correspondiente a la parte de "x" número de integrantes.

Consideraciones previas.

Esta actividad corresponde al tipo de enseñanza directa y nuevamente se trabaja con el tipo de problema en donde se conoce el todo y la parte para determinar la fracción. Tanto el todo como la parte permanecen constantes.

En este caso el todo está definido pero la parte, aunque también definida no se encuentra de manera explícita, ya que el alumno tiene que interpretar la frase de la pregunta para hacer explícita la parte y enseguida expresar en forma de fracción la respuesta.

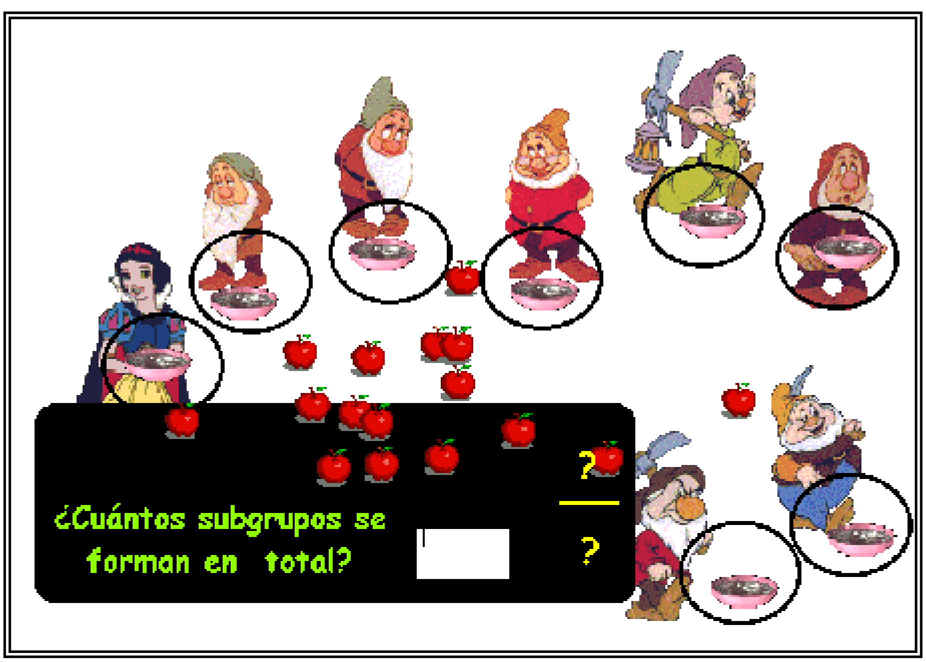
Dar la respuesta en esta actividad implica fundamentalmente tres acciones: Realizar la distribución del todo de acuerdo a una instrucción de reparto equitativo mediante imágenes, reconocer la parte a través de la relación parte-todo en una representación gráfica y representar simbólicamente la fracción caracterizada por lenguaje común o lenguaje aritmético.

Como es posible apreciar el resultado de este reparto requiere que el alumno tenga presente las partes en que divide el total de las manzanas y, enseguida, considere sólo las partes que reúnen los enanos. O bien que considere cada manzana como una parte y que tome en cuenta el número de manzanas que reciben los enanos.

Ahora, los alumnos se enfrentan a varias modificaciones con relación a la actividad anterior ya que en esta ocasión, el trabajo lo realizan en forma individual y en la computadora, con el material no es posible hacer particiones como con las cantidades continuas, mueven imágenes y la parte no está explícita.

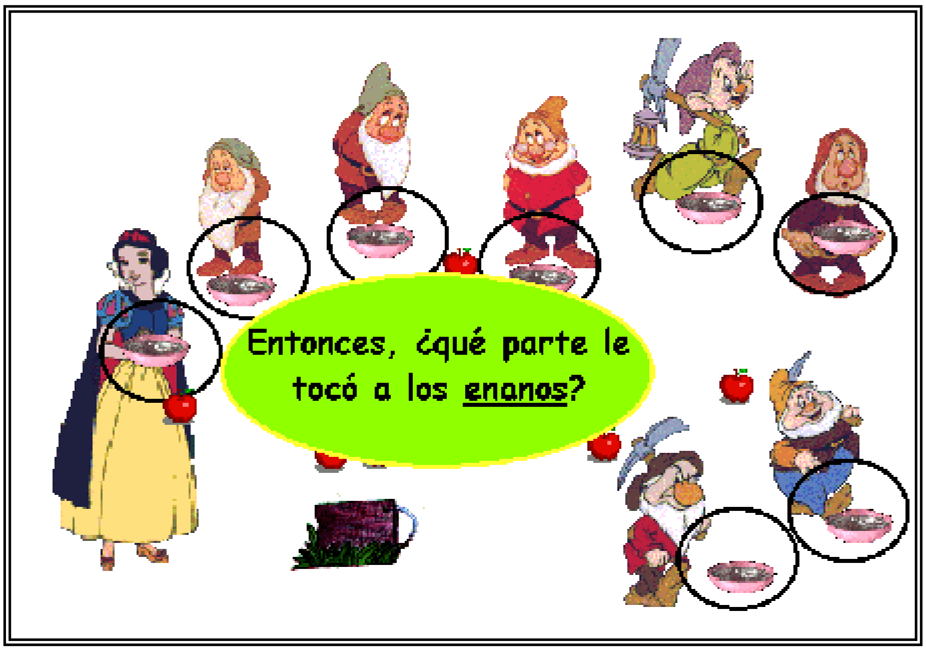
El programa cuenta con una segunda parte a la que tienen acceso aquellos niños cuya primera respuesta no ha sido correcta. Esta parte del programa tiene la intención de brindar un apoyo para que el alumno traslade la experiencia de la actividad anterior a la formación de la fracción correspondiente a la respuesta.

En esta segunda parte se solicita al usuario que haga nuevamente el reparto. Enseguida aparece en la pantalla cada uno de los platos de los personajes encerrados mediante óvalos con lo que se pretende dar la idea de grupo.



El programa continúa con pregunta: "¿Cuántos grupos se forman en total?". Esta pregunta tiene la intención de conducir la atención del alumno al total de grupos que se forman. Enseguida se señalan aquellos grupos que pertenecen a los enanos.

Por último le preguntan nuevamente "¿Qué parte le tocó a los enanos?", con la finalidad de notar si el apoyo le ha sido significativo al alumno.



Desarrollo.

El día que se trabajó con esta parte del programa interactivo, en ninguna de las computadoras se activó el sonido, por lo que fue imposible escuchar las explicaciones e instrucciones con las que cuenta el programa, éstas estuvieron a la disposición de los alumnos sólo es forma escrita.

En cada sesión del programa se solicitó al usuario su nombre, mismo que fue utilizado para identificar al emisor de las respuestas en el archivo externo, pero también para que el programa se refiriera al usuario de manera personalizada, esto llamó la atención a todos los alumnos, e incluso a algunos hasta les sorprendió.

Para tener una visión general de las respuestas emitidas por los alumnos en esta actividad se realiza el siguiente cuadro:

Alumno	¿Qué parte le tocó a los enanos?	¿Cuántos grupos se forman en total?	¿Cuántos grupos pertenecen sólo a los enanos?	Entonces ¿Qué parte le tocó a los enanos?
F	1/2	2/1	8/2	1/2
J	2	16	8	14/16
K	2			
JC	1/2	8/2	1/2	1/2
D	7/8	* [9]	*	*
A	2 manzanas	7	14	1 subgrupo
Jes	2	8	7	7
E	8	7	7	7

En el programa cuando el usuario teclea su respuesta y oprime la tecla "enter", se realizan dos acciones: una, le indica al programa que el usuario ha terminado de dar su respuesta y por lo tanto puede continuar, y otra da la instrucción para que guarde ésta en el archivo externo; éste pudo ser el motivo de que se encuentren algunas respuestas incompletas.

A continuación aparecen las respuestas que se concentraron en el cuadro anterior, en letras negritas para diferenciar la parte que el alumno escribió, se muestran tal como fueron capturadas en el archivo externo. Las preguntas que el programa hace a cada usuario se presentan en letra cursiva y enseguida aparece el estudio que se realiza de ellas.

NOMBRE: ***Franco***

¿Has hecho un reparto equitativo?: ***si***

[9] Cuando el alumno teclea la respuesta correcta el programa omite las siguientes preguntas, por este motivo estas respuestas no aparecen en el archivo.

¿Por qué?: ***poq***

¿Qué parte le tocó a los enanos?: ***1/2***

A la pregunta, Franco respondió con una fracción que formó con el número de grupos correspondiente a un integrante y la cardinalidad del subgrupo que forma esa parte.

¿Cuántos grupos se forman en total?: ***2/1***

No interpretó correctamente la pregunta e insistió en dar una respuesta en forma de fracción que ordenó de manera contraria a su respuesta de la primera pregunta.

¿Cuántos de esos grupos pertenecen sólo a los enanos?: ***8/2***

Tuvo dificultad para interpretar la pregunta y el apoyo visual no fue significativo (los círculos marcados), ya que tomó en cuenta todos los grupos, no los seleccionados, y los asignó como numerador, y con la cardinalidad de cada uno de esos subgrupos representó al denominador.

Entonces, ¿qué parte le tocó a los enanos?: ***1/2***

Repitió su respuesta inicial; en donde se supone, se refirió a uno de los subgrupos resultantes del reparto cuya cardinalidad es 2. Lo que muestra que de manera intuitiva supo lo que significó la fracción 1/2, sin embargo se nota que trató de integrar los elementos de la fracción pero en su respuesta predominó la cardinalidad de la parte.

NOMBRE: ***JJAAVVIIEERR***

¿Has hecho un reparto equitativo?: ***si***

¿Por qué?: ***porque eran 16 manzanas 7 enanitos y1 blancaniebes y no sobro niguna manzanañ***

La explicación que brindó Javier se refiere al significado de exhaustividad, y no de equidad.

¿Qué parte le tocó a los enanos?: ***2***

Puso su atención en el número de elementos que entregó a cada personaje. La pregunta no la relacionó con una fracción, o bien predominó la cardinalidad de uno de los grupos que forman la parte.

¿Cuántos grupos se forman en total?: ***16***

No tomó en cuenta los grupos que se formaron, tampoco le significaron los círculos que el programa dibujó para representar cada subgrupo. Interpretó cada una de las manzanas como una parte.

*¿Cuántos de esos grupos pertenecen sólo a los enanos?:**8***

En esta parte, el programa marcó con una cruz cada subgrupo seleccionado. Posiblemente, estas marcas que hizo el programa atrajeron la atención de Javier para entender a qué se refería la pregunta anterior o bien él contó el total de círculos.

*Entonces, ¿qué parte le tocó a los enanos?: **14/16***

Cuando por segunda vez le preguntaron: ¿qué parte le tocó a los enanos? Se observa que volvió a contar las manzanas, en este caso sólo las que le tocaron a los enanos y escribió su respuesta. El apoyo visual que se pretendió dar mediante el programa a él le resultó significativo no para modificar la idea de grupo pero sí para establecer la relación parte-todo. Tomó cada una de las manzanas como un subgrupo y lo mismo hizo al contar los subgrupos que formaron la parte.

*NOMBRE**: kristofer***

*¿Has hecho un reparto equitativo?: **si***

*¿Por qué?: **porquelas reparto igual***

*¿Qué parte le tocó a los enanos?: **2***

Kristofer también se refirió al número de elementos que entregó a cada personaje. La pregunta: ¿Qué parte..?, no la asoció con el significado de fracción, o bien asignó el numerador a la cardinalidad de una parte y omitió el todo.

*NOMBRE: **juan***

*¿Has hecho un reparto equitativo?: **si***

*¿Por qué?:**: por que lesdi lo mismo***

Su respuesta correspondió a una correcta interpretación del significado de equidad.

*¿Qué parte le tocó a los enanos?:**1/2***

Nuevamente se presentó esta respuesta que mostró el predominio de la cardinalidad de uno de los subgrupos que forman la parte.

*¿Cuántos grupos se forman en total?: **8/2***

No interpretó correctamente la pregunta y quiso dar una respuesta en forma de fracción. Asignó al numerador el total de grupos resultantes del reparto y al denominador la cardinalidad de uno de los subgrupos que forman la parte.

¿Cuántos de esos grupos pertenecen sólo a los enanos?: ***1/2***

Al igual que en la anterior, dio una fracción como respuesta. Al parecer la pregunta la relacionó con la primera y optó por escribir la misma respuesta.

Entonces, ¿qué parte le tocó a los enanos?: ***1/2***

En la segunda ocasión que se le preguntó por la parte que le tocó a los enanos, nuevamente evocó el número de manzanas que entregó a un personaje y lo asignó al numerador y la cardinalidad de ese grupo la asignó al denominador.

NOMBRE: ***DIEGO***

¿Has hecho un reparto equitativo?: ***SI***

¿Por qué?: ***POR QUE REPARTI LO MISMO***

¿Qué parte le tocó a los enanos?: ***7/8***

Antes de teclear esta respuesta la maestra le preguntó a Diego ¿Qué era lo que le preguntaban?. Él repitió textualmente la pregunta que aparecía en la pantalla. Hizo una expresión como si entendiera a qué se refería la misma, y enseguida anotó el resultado. Esto hace pensar que quizá las instrucciones en forma oral con las que cuenta el programa, hubieran modificado en alguna medida el resultado.

Se pudo apreciar que la intervención de la maestra fue determinante en este resultado aunque se observa que en los últimos tres repartos de la actividad 1 Diego estableció correctamente la relación parte-todo.

NOMBRE: ***axel***

¿Has hecho un reparto equitativo?: ***si***

¿Por qué?: ***porque a todos les toco igual***

¿Qué parte le tocó a los enanos?: ***2 manzana***

Anota como resultado el cociente del total de las manzanas entre todos los personajes.

¿Cuántos grupos se forman en total?: ***7***

Es posible que haya hecho una lectura parcial de la imagen o que haya interpretado mal la pregunta, porque su respuesta corresponde al número de grupos que pertenecen a los enanos.

*¿Cuántos de esos grupos pertenecen sólo a los enanos?:**14***

Después de que el programa marcó con cruces los grupos seleccionados, no tomó en cuenta las agrupaciones, pero contó las manzanas que efectivamente le tocaron a los enanos.

*Entonces, ¿qué parte le tocó a los enanos?: **un subgrupo***

Esta segunda respuesta confirma que él entendió que la primera pregunta se refería a la parte que le tocó a uno de los enanos y no estableció la relación en forma numérica.

*NOMBRE: **jessika***

*¿Has hecho un reparto equitativo?: **si***

*¿Por qué?: **porque asi***

*¿Qué parte le tocó a los enanos?: **2***

Aquí se presentó el cuarto caso del predominio de la cardinalidad de uno de los subgrupos que forman la parte.

*¿Cuántos grupos se forman en total?: **8***

Hizo una correcta interpretación de la pregunta y del gráfico.

*¿Cuántos de esos grupos pertenecen sólo a los enanos?:**7***

Sus respuestas muestran que con la segunda parte del programa ella pudo hacer explícita la parte que en la pregunta apareció como implícita, sin embargo al dar su respuesta final no logró establecer la relación parte-todo ya que anotó correctamente la parte y omitió el todo.

*Entonces, ¿qué parte le tocó a los enanos?: **7***

*NOMBRE: **erika***

*¿Has hecho un reparto equitativo?: **si***

*¿Por qué?: **por que selo reparti a todos***

Aquí no expresó el significado de equidad, seguramente porque no lo tenía claro.

*¿Qué parte le tocó a los enanos?: **8***

*¿Cuántos grupos se forman en total?: **7***

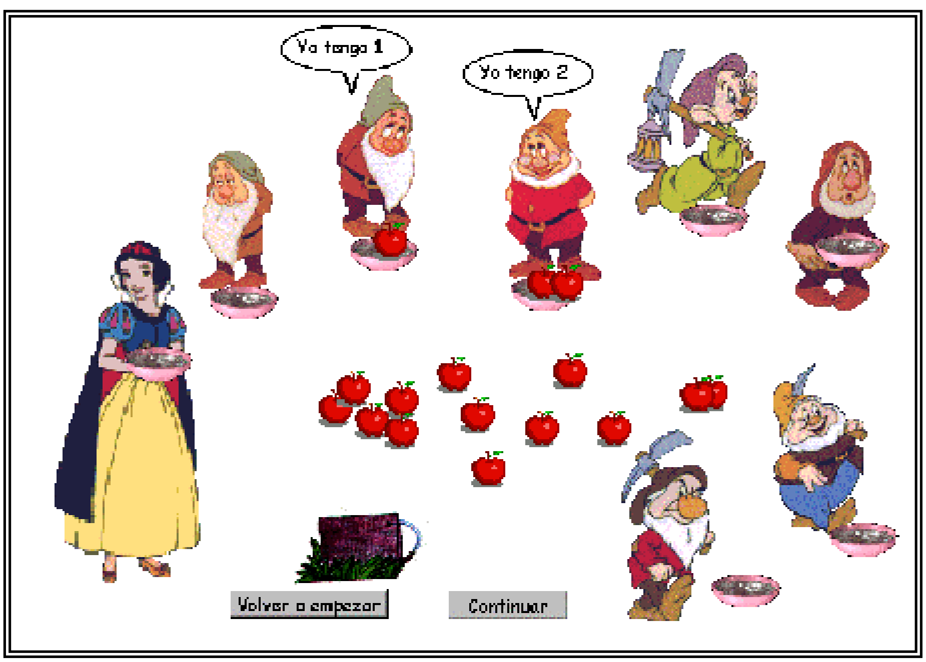
*¿Cuántos de esos grupos pertenecen sólo a los enanos?: **7***

Entonces, ¿qué parte le tocó a los enanos?: ***7***

Vale la pena comentar, que Érika se encontraba cerca de su compañera cuando Jéssica trabajaba con el programa, es posible que esto haya influido en sus respuestas, por que las dos primeras no corresponden a lo que se le estaba preguntando y las dos últimas coinciden con las de su compañera

Al principio, uno de los niños preguntó la forma de teclear la fracción, por lo que se les explicó a todos cómo hacerlo; es posible que esto haya influido en las respuestas de algunos niños que contestaron con número fraccionario, cuando la pregunta se refería a la cardinalidad del grupo.

Expresar de manera implícita la parte en la pregunta, no contribuyó a la integración de los elementos de la fracción que relacionaran la parte con el todo; por el contrario, significó una dificultad más en la resolución del problema.



Varias de las respuestas de los alumnos reflejan la influencia ejercida por los mensajes que emitían los personajes cada vez que les depositaban una de las manzanas en su plato. Es posible que el recuento de los objetos no haya representado un apoyo sino más bien un distractor.

En esta actividad los alumnos no tuvieron forma de validar sus respuestas y tampoco se destinó un tiempo para el comentario de sus resultados, esto hubiera enriquecido sus experiencias y por lo tanto la investigación.

Se puso en evidencia la diferencia que representó para varios niños de este grupo, la información en forma oral con relación a la escrita.

Evaluación.

Los alumnos se mostraron interesados al trabajar con el programa. Los propósitos de esta actividad se lograron sólo en parte, pero se obtuvo información relevante para hacer modificaciones al programa interactivo.

Esta primera actividad que realizan con el programa permite conocer el desempeño individual de los alumnos y en buena medida su forma de percibir la información que contiene.

Esta actividad pone de manifiesto que la acción debe de acompañarse de preguntas mediante las cuales obtengan particiones aditivas. Es decir la sustitución de la pregunta: ¿Qué parte le tocó a los enanos?, por preguntas como: ¿Qué parte le tocó a Blanca Nieves?, ¿Qué parte pueden reunir Estornudo Gruñón y Dormilón?, representa una modificación necesaria en el programa interactivo y de este modo, los niños tendrán la oportunidad de observar las modificaciones que sufre el numerador.

Definitivamente no conviene que aparezcan los mensajes donde cada personaje cuenta las manzanas que le entregan, contribuye precisamente, a que los alumnos pongan más atención a la cardinalidad de cada parte e influye en sus respuestas. Sería provechoso si el mensaje sólo quedase en el archivo externo para que el maestro conociera si el reparto fue equitativo y exhaustivo; ésta es otra modificación que se hará al programa.

De las tres acciones que implican la solución de este problema, se aprecia que la distribución del todo de acuerdo a una instrucción de reparto equitativo y exhaustivo representado con imágenes, fue realizada con éxito por todos los alumnos. La forma de hacer la pregunta provoca confusión en el reconocimiento de la parte; este reconocimiento de la parte sólo se refleja en tres respuestas. La representación simbólica de la fracción caracterizada por lenguaje aritmético, se encuentra en dos respuestas; una de ellas, emitida en la segunda ocasión que en el programa aparece la pregunta, y la otra, fue emitida después de que la maestra le pidió que le dijera qué era lo que le preguntaban.

El predominio de la cardinalidad de los subgrupos que forma la parte que reflejan las respuestas, inhibe la concepción de una relación parte–todo, ésta es sustituida por un número natural que corresponde a la cardinalidad del subgrupo resultante.

SESIÓN 3

ACTIVIDAD 3

Planeación.

Propósitos:

- Relacionar el nombre de los subgrupos de acuerdo al número de grupos en que se encuentra dividida la unidad.
- Comparar porciones diferentes que representan la misma fracción debido al tamaño de la unidad.
- Dividir una unidad en el número de subgrupos que indique la fracción.

El juego "Simón dice" consiste en seleccionar la unidad que está dividida en el número de partes que Simón dice. En forma rotativa los equipos toman turno para desempeñar el papel de Simón.

En la segunda parte del juego, se trata de dividir los bloques contenidos en una bolsa en las partes que Simón diga.

Material por equipo:

- Para la primera parte de esta actividad: Diez bolsas de plástico que contienen diferente número de bloques ensamblados que representan subgrupos uniformes para la misma bolsa.
- Para la segunda parte: Una bolsa con 27 bloques sueltos.

Mapa descriptivo de la actividad 3.

ACTI-VIDAD	CONTENIDO	PLANTEAMIENTO
3.	3.1 Identificación del entero de acuerdo al número de partes en que se encuentra dividido.	3.1.1 La maestra explica en qué consiste la primera parte del juego "Simón dice" y entrega el material a cada equipo. 3.1.2 Uno de los equipos toma la voz de Simón y determina qué entero deben encontrar los equipos participantes, de acuerdo al número de partes en que éste está dividido, por ejemplo: quintos. 3.1.3 En cada participación los equipos muestran su resultado y discuten en relación con éste en caso de que no haya consenso.
	3.2 División del entero en el número de subgrupos que dicte la fracción.	3.2.1 La maestra explica en qué consiste la segunda parte del juego "Simón dice" y entrega el material a cada equipo. 3.2.2 Uno de los equipos hace el papel de Simón y dicta la fracción que diga en cuántas partes divide el entero. 3.2.3 Uno de los representantes del equipo que funge como Simón, valida los resultados que presenten los otros dos equipos.

Consideraciones previas.

La actividad 3 se plantea de manera emergente para que los alumnos pongan a prueba sus hipótesis formuladas al integrar los elementos de la fracción, en virtud de que en la mayoría de las respuestas, se refleja un predominio de la cardinalidad del subgrupo que forma la parte.

Dentro de la clasificación de Bruner, la actividad pertenece al tipo de enseñanza directa por considerarse un juego educativo. Mientras que en la primera parte de la actividad los alumnos trabajan con el significado de la relación de fractura, en la segunda parte lo hacen con el operador fracturante *(Vid, Supra:* 20*)*

En la primera parte de la actividad el alumno cuenta con una fracción definida, un conjunto de unidades que varían en el número de particiones, éstas también definidas, para que seleccione aquella unidad que cumple con la fracción solicitada. Cada una de las unidades está representada de manera estructurada, las partes se encuentran desconectadas formadas por conjuntos de bloques ensamblados (*Vid, Supra:* 5).

Dar respuesta en esta primera parte de la actividad, requiere que el alumno seleccione, entre diez unidades diferentes, la unidad de acuerdo al número de subgrupos que la integran mediante la representación de material concreto. En la actividad subyace la habilidad para decodificar la expresión en lenguaje común en forma oral, y relacionarla con alguna de las distintas representaciones que se presentan de manera objetiva.

En el material de cada uno de los equipos se colocó el mismo número de subgrupos uniformes entre sí, pero con diferente número de bloques, es decir los cuartos de un equipo varían en el número de bloques de los cuartos de los otros equipos. Se espera que en la confrontación de resultados tengan la oportunidad de ver medios, tercios, cuartos etc., de diferente cardinalidad y de esta manera puedan establecer la relación directa de la porción de la fracción con el tamaño de la unidad.

Para aquellos niños que asignan al denominador la cardinalidad del subgrupo que forma la parte, la actividad exige decidir entre seleccionar la unidad cuya cardinalidad de las partes coincida con el denominador, o aquella unidad cuyo número de subgrupos correspondiera al denominador de la fracción solicitada. Por ejemplo, en la fracción cinco quintos la disyuntiva está en seleccionar la bolsa que tenga cinco grupos de "x" número de bloques o "x" grupos de cinco bloques cada uno. También se espera que la confrontación al interior del equipo contribuya a la aclaración de esta duda.

En la segunda parte de la actividad, los alumnos cuentan con un todo definido y una fracción, para dividir la unidad en el número de partes que dicta la fracción, esta distribución de la unidad no se da una instrucción de reparto de manera explícita. El todo permanece constante mientras que la fracción se varía en cada instrucción.

En esta sección de la actividad se requiere que los alumnos dividan el todo representado con material concreto de acuerdo a una fracción dada. Esta acción implica hacer una interpretación de la fracción expresada en lenguaje común en forma oral, para realizar una distribución equitativa y exhaustiva de la unidad que se le presenta.

Al dividir este todo se espera observar si las características de equidad y exhaustividad permanecen presentes en sus subdivisiones, dado que no se dan de manera explícita en la instrucción. También se puede observar si hacen el traslado de los procedimientos utilizados en los contextos de reparto anteriores, donde se expresa explícitamente el reparto, y si se observa alguna modificación a éstos.

Desarrollo.

Se presenta en esta tabla las respuestas que se dieron en la primera parte de esta actividad:

Equipo / Simón dice..	Cuatro cuartos	Tercios	Quintos	Sextos	Novenos	Séptimos
E1	Dijo la fracción	Quintos de 3 bloques.	Quintos de 3 bloques.	Dijo la fracción	No hay novenos.	Séptimos de 3 bloques.
E 2	Tercios de 4 bloques.	Dijo la fracción	Quintos de 2 bloques.	Sextos de 4 bloques	Dijo la fracción	Dijo la fracción
E3	Cuartos de 2 bloques.	Tercios de 4 bloques.	Dijo la fracción	Sextos de 1 bloque	No hay novenos.	Séptimos de 2 bloques.

Como se aprecia en el cuadro de respuestas en las dos primeras instrucciones correspondientes a la primera parte de la actividad, se presentó como se presuponía, el caso de confusión entre la unidad que contuvo el número de subgrupos igual al denominador y la unidad formada por subgrupos cuya cardinalidad coincidió con el denominador.

En la segunda instrucción, cuando se les pidió la unidad dividida en tercios, el niño al que le tocó revisar las respuestas de sus compañeros, atravesó por esta confusión:

> A: Es que ésta tiene 3 subgrupos de cuatro bloques cada una y ésta tiene cinco grupos de tres bloques cada una.
> Ma: ¿Y cuál es la correcta?, o ¿las dos son correctas?, ¿por qué?
> D: Esta tiene tres figuras.
> A: Esta tiene 3 subgrupos y ésta tiene cinco, entonces la de 3 es la buena.

A partir de la tercera instrucción la selección de la unidad la hicieron con más rapidez y seguridad, se detectó que los integrantes de los equipos que validaron los resultados y emitieron su justificación, pusieron su atención en el número de subgrupos que presentó cada equipo sin importar el número de bloques de cada parte.

Cuando uno de los equipos propuso que buscaran la unidad dividida en novenos, los equipos participantes buscaron bolsa por bolsa, la que los contuviera. Se notó que revisaron en dos ocasiones éstas. Uno de los integrantes trató de subdividir los agrupamientos de una de las bolsas a través de la misma sin abrirla, pero al ver que los agrupamientos no le quedaron iguales desistió; entonces se atrevió a reportar que no había novenos.

En la segunda parte de la actividad las instrucciones que dieron los equipos para realizar las particiones fueron: séptimos, octavos, nueve novenos y décimos. Se pudo apreciar que en ambos ejercicios algunos integrantes de los equipos mencionaron de manera natural la fracción con numerador y denominador, mientras que otros lo hicieron solamente con el denominador.

Se observó que en la primera partición solicitada, dos de los equipos hicieron la distribución de los bloques uno por uno para formar los cuatro subgrupos, después trataron de compensar para lograr la equidad entre ellos, hasta que comprobaron que ésta no era posible dieron su respuesta. El otro equipo trató de ensamblar el total de bloques pero como esta actividad se llevaba mucho tiempo optó por ensamblar grupitos e igualarlos mediante la compensación. Después de comprobar que no se podía dio su reporte.

En las siguientes particiones en ninguno de los equipos ensamblaron los bloques, sino simplemente formaron agrupaciones que se distinguieron por la distancia que dispusieron entre cada uno; se notó que se interesaron por dar su respuesta con mayor prontitud pero hicieron la comprobación de su resultado. En una ocasión se apreció que una niña hizo el cálculo mentalmente y advirtió a su equipo que no iba a poder realizarse la partición.

En las cuatro particiones sugeridas, estuvieron presentes las características de equidad y exhaustividad sin que se hiciera mención de ellas como un requisito. Debido a estas características de los repartos, sólo una de las cuatro particiones fue posible realizar, aunque los alumnos probaron la pertinencia de las tres restantes.

El procedimiento para verificar sus resultados lo hicieron por medio de la visualización del número de partes que obtuvieron.

Evaluación.

Los propósitos en esta actividad se cumplen. Los alumnos, cuyas respuestas reflejan el predominio de la cardinalidad del subgrupo que forma la parte en la actividad 1 y 2, en esta actividad cuentan con la posibilidad de distinguir entre atender al número de partes en que la unidad se divide o atender al número de bloques que contiene cada parte.

Ejercicios como los que se trabajan en esta actividad pueden incluirse en la actividad 1, con el fin de que el alumno maneje en forma reversible el proceso de reparto. Es decir una vez que da como resultado la parte que le toca a uno, dos o "x" número de integrantes, se puede plantear como problema: "Si a cada integrante le toca 1/7, ¿cuántas personas tiene ese equipo?".

La inclusión de actividades en las que operan con unidades de diferente tamaño, permite obtener partes que reciben el mismo nombre pero su porción varía debido al tamaño de la unidad, lo que favorece el establecimiento de la relación que hay entre el tamaño de la parte y el tamaño de la unidad.

Propiciar el trabajo con el significado de la relación de fractura y posteriormente con el significado del operador fracturante, en esta actividad, no representa problema debido a que la misma actividad se resuelve al formar fracciones unitarias y con ella se atiende únicamente al denominador de la fracción.

En la sección donde realizan particiones podemos observar que al principio reproducen los mismos procedimientos utilizados para hacer los repartos. Con el incremento del número de bloques se nota la evolución de los mismos, además de que tienen más claridad en lo que persiguen.

ACTIVIDAD 4

Planeación.

Propósito:

- Resolver problemas en donde identifiquen el todo y la parte para relacionarlos mediante la fracción.

Esta actividad forma parte del programa computacional, se lleva a cabo en forma individual. Consiste en resolver el siguiente acertijo:

En este cuarto en cada esquina hay un gato, ¿qué parte del total de gatos presentes en este cuarto, es la que un gato ve?

Mapa descriptivo de la actividad 4.

ACTI-VIDAD	*CONTENIDO*	***PLANTEAMIENTO***
4.	Resolución de problemas donde identifiquen el entero, la parte y los relacionen mediante una fracción.	4.1 En forma individual resuelven el acertijo en el programa interactivo.

Consideraciones previas.

Esta actividad en la secuencia original es la última en la que el problema se plantea una vez que se presenta un todo, se conoce la parte y el alumno los relaciona mediante la fracción.

Con ella se pretende que el alumno haga la representación simbólica de la fracción caracterizada por lenguaje común escrito o lenguaje aritmético. A esta acción, le antecede la identificación de la parte expresada mediante lenguaje común.

Aunque la actividad pertenece al programa interactivo y se presenta con imágenes, la respuesta no depende de la interpretación de éstas ya que sólo muestra parte del escenario mencionado en el acertijo. Se pretende conocer si tan sólo una parte de la imagen puede despertar la imaginación del alumno.

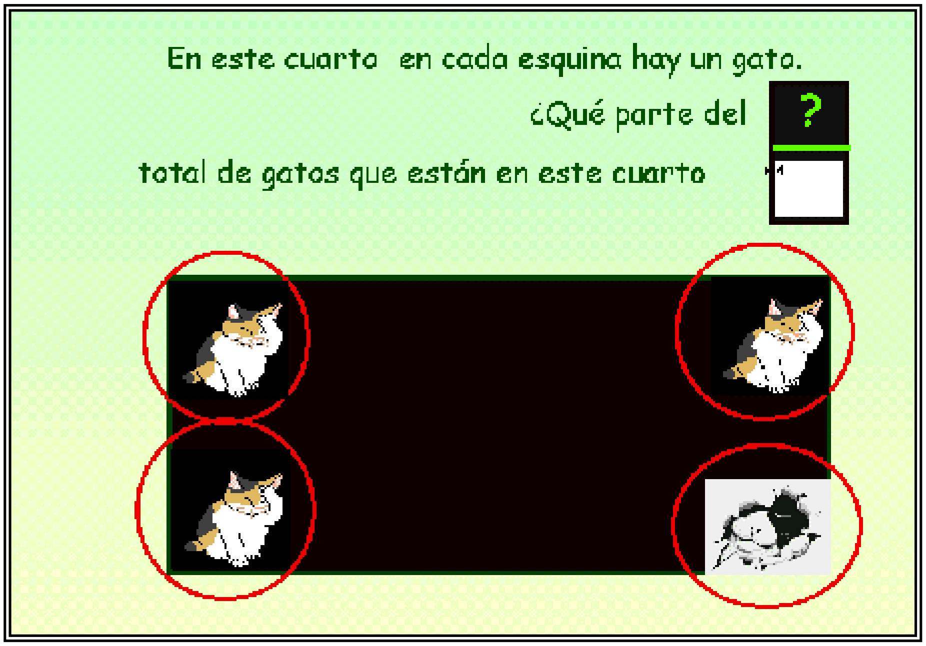
El planteamiento del problema por medio de un acertijo lo hace más difícil. El todo está definido pero expresado al igual que la parte de manera implícita, entonces la solución comprende varias acciones como:

- hacer una interpretación de cada una de las frases que integran el acertijo para..
- hacer explícito el todo,
- hacer explícita la parte,

- integrar los elementos que forman la fracción, en la que subyace la comprensión de la relación parte-todo para..
- expresarla por el numeral.

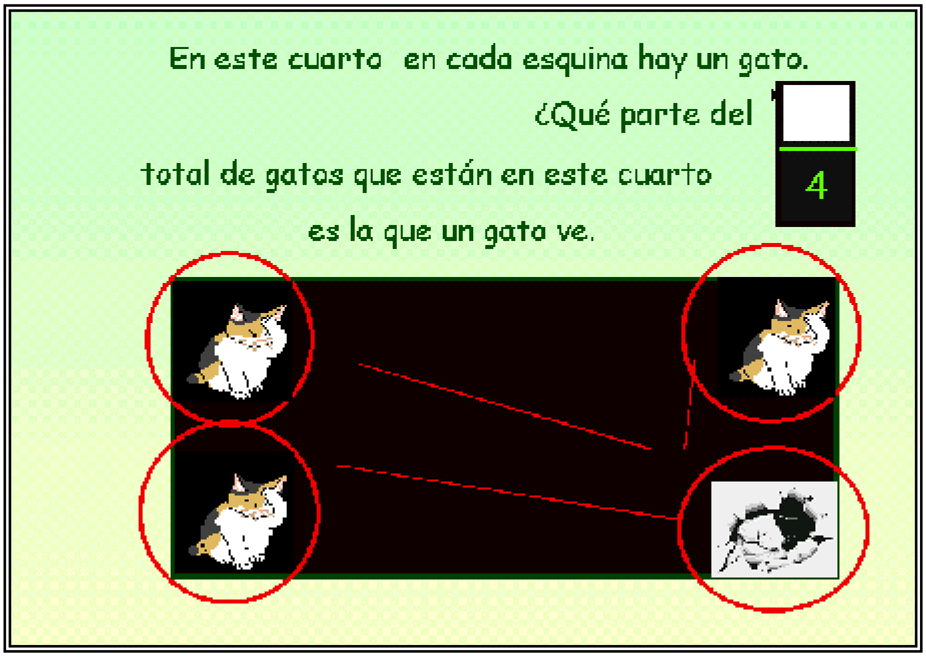
La actividad se complica aún más pues se resuelve en forma individual.

En la primera parte del programa se hace una invitación para que lea cuidadosamente y resuelva un acertijo. Enseguida aparece en forma oral y escrita el acertijo acompañado por la imagen de una de las esquinas de una habitación en la que está un gato. Entonces el usuario puede tomarse el tiempo que sea necesario para pensar y teclear su respuesta. En cuanto oprime la tecla "enter", la respuesta se guarda en un archivo externo, al usuario le ratifica ésta y le solicita describir su procedimiento, con el fin de que reflexione sobre su proceso de resolución y haga una práctica al expresarlo. Al mismo tiempo se obtienen datos relacionados con su proceso de resolución.



La segunda parte del programa pertenece a la representación icónica, en virtud de que la respuesta que solicita al usuario depende de la interpretación que haga de la información que las imágenes proporcionan. A esta sección tiene acceso el alumno cuya primera respuesta es incorrecta, con la que se pretende brindar un apoyo visual que contribuya al desciframiento del acertijo frase por frase, e incluso como un medio para evaluar su resultado. En ella aparece por frases el acertijo y al mismo tiempo la imagen que pretende contribuir a la comprensión de la misma.

También se presenta la raya de fracción con un signo de interrogación en el numerador cuando la frase se refiere a la parte, y con un recuadro de respuesta para que el alumno escriba un numeral cuando la frase se refiera al todo. Se considera que esta parte del programa pueda resultar significativa para los alumnos cuya dificultad se encuentre sólo en el desciframiento del acertijo.



Desarrollo.

Esta actividad en efecto, resultó demasiado complicada para los alumnos. Aunque se realizó en el programa y eso les entusiasmó a varios de ellos, no bastó para superar las dificultades.

A continuación presentamos un concentrado de las respuestas de los alumnos y a partir de éstas se analiza la actividad.

Alumno	Respuesta al acertijo.	¿Cómo lo pensaste?	¿Qué parte del ... es la que un gato ve?	total de gatos presentes en este cuarto
E	1	Porque vi el dibujo	2	4
Jes	2	Viendo el dibujo	2	4
A	4 cuartos	Conte las esquinas donde están los gatos	1	4
F	4	Contando los gatos	1	4
JC	Uno	Por que lo vi	4	4
I	1	Por que lo vi	4	4
J	1	Con el cerebro	4	4
K	4	Muy facil		

Como se mencionó anteriormente, la segunda y la tercera columna contienen las respuestas correspondientes a la primera parte del programa, en la que se trabaja en la representación simbólica. La cuarta y quinta, concentran las respuestas de la segunda parte del programa correspondiente a la representación icónica.

En las respuestas al acertijo, se observa que sólo un niño la dio en forma de fracción en la que predominó el total de las partes, debido a que concentró su atención en el desciframiento de la frase: "En este cuarto en cada esquina hay un gato" y esto les impidió descifrar la parte.

Otros dos niños dieron como respuesta 4; al parecer la frase del acertijo que hizo referencia a la parte, pasó inadvertida para ellos, pues la frase que hace referencia al todo ocupó su atención.

Tres de cuatro niños que emitieron como respuesta 1 y una niña cuya respuesta fue 2; argumentaron que lo vieron en el dibujo, lo cual hace pensar que la imagen en estos casos resultó ser un distractor, pues al menos cuatro de ellos tomaron la información de ésta dado que su respuesta correspondió precisamente a lo que apareció en la imagen; aunque también es probable que la misma dificultad en el planteamiento del problema los hizo abandonarlo y responder sólo con la información que apareció a su vista.

En la cuarta columna se puede apreciar el principal problema; ninguno de los alumnos logró descifrar la frase del acertijo: "¿Qué parte es la que un gato ve?". Aunque en esta segunda parte del programa el alumno contó con una escena donde aparecieron tres rayos que pretendieron representar la dirección de la mirada del gato, este apoyo no les fue significativo debido a que pasó inadvertido. Aún en la representación icónica, ninguno de los alumnos logró hacer explícita la parte. Es posible que la pregunta no se haya entendido porque apareció separada por la frase que se refiere al total de partes o simplemente resultó ambigua.

En la quinta columna que concentra las respuestas que contaron con apoyo visual, podemos ver que todos los niños contestaron correctamente, excepto uno quien prefirió dar por terminado la actividad.

De las acciones previstas, se puede apreciar que el total de alumnos lograron hacer explícita la frase que se refiere al todo en la representación icónica, pero al no hacer explícita la frase correspondiente a la parte la relación entre estos no pudo ser establecida.

Durante la resolución del acertijo se observa que los alumnos se detuvieron a pensar para tratar de comprender lo que el programa les pedía, pero no superar el primer reto les causó desánimo. Resultó un error hacer el planteamiento del problema mediante un acertijo.

En esta actividad tampoco se dispuso de un tiempo para que los alumnos hicieran sus comentarios relacionados con la actividad, esta acción al menos hubiera ayudado a entender lo que con el programa no se aclaró, ya que éste carece de un recurso para que los alumnos validen sus resultados.

Evaluación.

El propósito en esta actividad no se cumple. Aunque son muchas las variables que se concentran en la misma y resulta difícil hacer una evaluación de cada una de ellas, se considera que el mayor problema es la manera de hacer el planteamiento del problema, pues aún cuando en la segunda parte del programa se trata de contribuir a que el alumno lo descifre, esto no contribuye para quitar el desánimo causado desde el principio. El programa concluye con un agradecimiento y una invitación para que los alumnos intenten resolverlo nuevamente. En esta ocasión dicha invitación no fue atendida por ninguno de los alumnos.

Algunas interrogantes quedan pendientes pues podríamos hacer modificaciones al planteamiento del problema, a la forma de representación, trabajar el mismo acertijo mediante una experiencia directa, posponer la actividad para realizarla después de otras experiencias, o simplemente organizar el trabajo en parejas. Es muy probable que con una de estas modificaciones se obtengan mejores resultados.

SESIÓN 4

ACTIVIDAD 5

Planeación.

Propósito:

- Utilizar la relación *n, d* (numerador, denominador) para identificar la parte, una vez que se conoce la fracción y el entero.

La actividad "Dame la parte que te solicito" se inicia con el trabajo en equipo. Consiste en seleccionar parte de los bloques que representen la fracción establecida previamente.

Material por equipo:

- Una bolsa que contiene 36 bloques "lego".

Con los bloques que tiene la bolsa harán repartos entre el número de personas que les diga. Después me entregarán la parte que les solicite.

Mapa descriptivo de la actividad 5.

ACTI-VIDAD	***CONTENIDO***	***PLANTEAMIENTO***
5	Identificación de la parte en situaciones donde se conoce el entero y la fracción.	5.1 La maestra reparte una bolsa con 36 bloques a cada uno de los equipos y da las instrucciones de la actividad. 5.2 La maestra dice la parte que desea que tomen de los bloques que tienen en su mesa. Se parte de fracciones unitarias y posteriormente se pasa a fracciones no unitarias. 5.3 Los equipos, en cada una de sus participaciones muestran el resultado obtenido y en caso necesario confrontan para validar su respuesta.

Consideraciones previas.

La actividad corresponde al tipo de enseñanza por experiencia directa. En ella se plantea un problema donde se busca la parte una vez que se conoce el todo y la fracción. El todo está definido, y en este caso permanece constante. En cada instrucción la fracción cambia y en consecuencia la parte también cambia.

En este caso nuevamente los alumnos trabajan con el significado de la relación de fractura, dado que se parte de un contexto de reparto con la instrucción que dice de manera explícita el número de personas entre quienes se hace el reparto, para que efectúen la partición y como un segundo paso, procedan a tomar la parte que se les indica.

Para dar respuesta a esta actividad, se requiere que los alumnos distribuyan un todo de acuerdo a una instrucción de reparto con material concreto; enseguida, reconozcan la parte en una representación objetiva.

Después de la instrucción de reparto la maestra hace la solicitud de la parte que deben entregarle mencionando la fracción. Debido a que la solicitud se hace en forma oral, los alumnos deben interpretar la fracción expresada en lenguaje común, e identificar la parte. Para esta acción se espera que el procedimiento utilizado lo realicen mediante una suma de fracciones unitarias, dado que el entero para este momento, ya se encuentra dividido en partes iguales.

El reparto que los alumnos hacen en realidad pretende facilitar la identificación de la parte. Esta actividad es similar a la que han realizado en la segunda parte de la actividad 3, pero en aquella ocasión se trabaja sólo con fracciones equivalentes a la unidad. En esta ocasión se solicita en el inicio una fracción unitaria para continuar con fracciones no unitarias, menores e iguales a la unidad.

Desarrollo.

Esta actividad no representó mayor problema. En el contexto de reparto identificar la parte resultó tarea sencilla.

Con la primera instrucción de reparto entre 2 personas, se observa que dos de los tres equipos contaron el total de las piezas, en uno de ellos efectuaron una división y en el otro estimaron el resultado. El otro equipo nuevamente ensambló el total de las piezas e hizo la partición como si ésta representara una cantidad continua. A uno de los equipos se le solicitó 1/2 y a los otros dos equipos, 2/2. Los tres equipos cumplieron correctamente con la solicitud y sin ningún problema.

El siguiente reparto lo hicieron entre 3 personas y pudimos ver que los equipos repitieron sus procedimientos utilizados en la instrucción anterior. Cuando a uno de los equipos se le preguntó acerca de su estrategia explicó: "contamos los cubitos y vimos que a cada uno le tocaron 12 cubitos y formamos los grupos". A la solicitud de entregar 2/3, uno de los niños de un equipo se mostró dudoso en su proceder, cuando vio a otro compañero que contó los subgrupos que ya estaban formados, él hizo lo mismo.

En la siguiente instrucción la maestra cambió la estrategia, pues no dio una indicación de reparto sino les pidió que dividieran el total de los bloques en cuartos. Se pudo apreciar que en esta ocasión actuaron mucho más rápido, pues encontraron una estrategia y en cada uno de los equipos asumieron el procedimiento como el más adecuado, en esta ocasión no se escuchó que hablaran para ponerse de acuerdo sino que en conjunto participaron en la partición. En un equipo al terminar de hacer sus agrupamientos hicieron el conteo señalando cada uno de los subgrupos obtenidos: "un cuarto, dos cuartos, tres cuartos, cuatro cuartos". A cada uno de los equipos la maestra le solicitó diferente fracción: 3/4, 2/4. Llama la atención la respuesta que dio uno de los equipos ante la solicitud que hizo la maestra de 5/4. El niño empezó contando al mismo tiempo que entregaba los grupos de bloques:

> N: "un cuarto, dos cuartos, tres cuartos, cuatro cuartos.."
> Obs: dirigiéndose a otro equipo dijo:
> N: "préstenme un cuarto".

La asignación de la representación objetiva a la fracción dicha en lenguaje común, la hizo con el apoyo de un reconocimiento de grupos y un conteo directo.

Nuevamente, la siguiente instrucción fue de reparto, en este caso, entre seis personas. Enseguida la maestra les preguntó el nombre de los grupos y les pidió entregaran 5/6. Después de que el equipo seleccionó correctamente la parte, la maestra les preguntó: ¿Qué fracción no sería posible entregar?. Como respuesta, un niño dijo inmediatamente 7/6 y los compañeros del equipo continuaron mencionando a coro otras fracciones mayores que la unidad.

Evaluación.

En esta actividad se aprecia que el contexto de reparto definido por el número de personas entre quienes se realiza éste, el trabajo en equipo y la representación objetiva, favorecen al cumplimiento de los propósitos. En estas condiciones, a los alumnos se les facilita seleccionar la parte, pues les resulta claro el todo, hay de por medio una instrucción de reparto o de división para hacer la partición y realizar un conteo o suma de fracciones unitarias para integrar la parte.

Sus respuestas muestran que logran advertir las fracciones que son menores, iguales y mayores que la unidad. La característica de equidad, aunque en el trabajo con cantidades discretas obedece a un criterio numérico y por lo tanto es considerado de menor dificultad para el niño, está presente al igual que la exhaustividad en todas sus distribuciones.

Para que esta actividad resulte con mayor interés para los alumnos a la vez que se enfrenten a la dificultad de asignar una fracción a un grupo de bloques e interpretar dicha expresión numérica, conviene plantearla a manera de juego. En este juego, parte de un equipo recibe por conducto del maestro una instrucción de reparto. El maestro puede construir una torre con una fracción de un número de bloques y conservar dicha torre, lejos de la vista del resto del equipo. Los alumnos que presencien la parte que el maestro tome, deben elaborar un mensaje para que la otra parte del equipo, que debe contar con un mismo número de bloques, interprete el mensaje y construya la torre. De esta manera la forma de validar sus resultados es más interesante y se trabaja con el lenguaje aritmético que consideramos necesario en esta etapa.

ACTIVIDAD 6

Planeación.

Propósito:

- Interpretar la fracción como operador fracturante para obtener la parte, una vez que se conoce el conjunto que representa la unidad.

Esta actividad se realiza en forma individual en el programa interactivo. Consiste en resolver tres problemas planteados en donde se da a conocer el total de bloques que forman el todo y se pide tomen "x" parte de esos bloques para construir una torre. En cada uno de los tres problemas se le pide al usuario haga una primera estimación de la altura que alcanza la torre, con la finalidad de contribuir al desarrollo de un esquema anticipatorio en el alumno; posteriormente se le solicita efectúe la construcción de esa torre con la parte representada con la fracción expresada por un numeral, y que marque el punto que alcanza dicha torre.

A continuación se presentan las dos instrucciones que se dan en cada problema. La primera se da para que el alumno haga una estimación; la segunda instrucción corresponde a la ejecución de la acción.

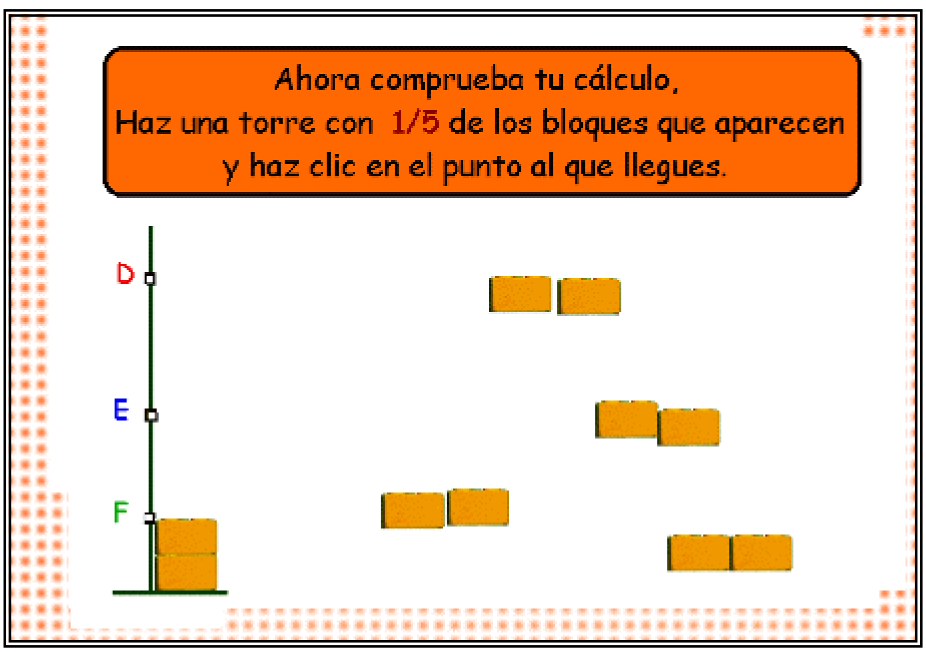
1. Aparece en pantalla un total de 12 bloques.

- *Si construyes una torre con 3/4 del total de piezas que ves, ¿hasta qué punto alcanzaría esa torre?. Haz clic en ese punto que tú calculaste.*
- *Acomoda sólo 3/4 partes del total de los bloques, uno sobre otro, y haz clic en el punto exacto.*

2. El total está formado por 10 bloques.

- *Calcula hasta qué punto alcanzaría una torre construida con 1/5 de los bloques que aparecen.*

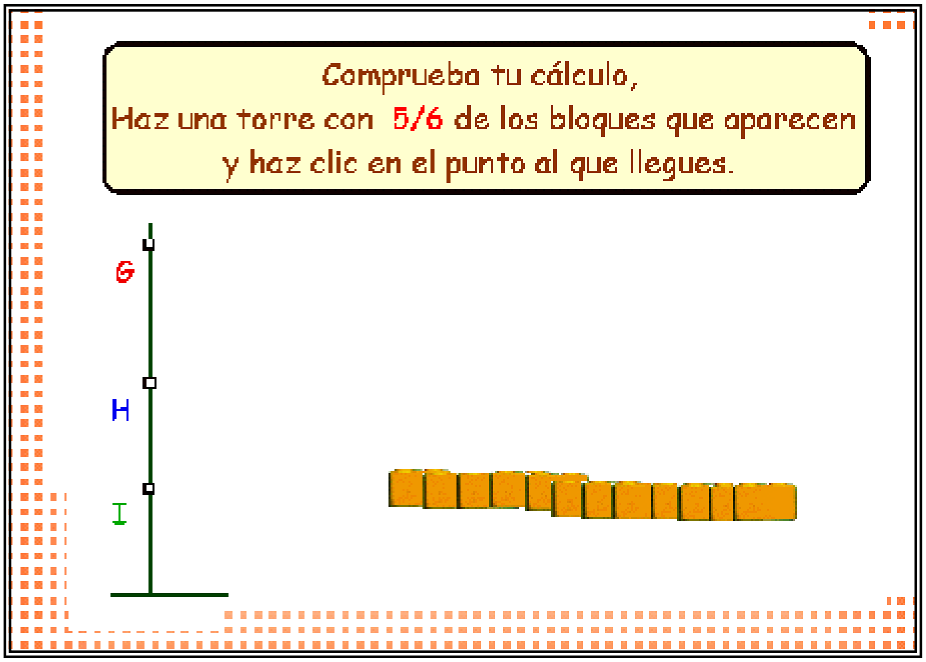
\- *Haz una torre con 1/5 de los bloques que aparecen y haz clic en el punto al que llegues.*



3. Ahora el total esta formado por 12 bloques.

- *Calcula hasta qué punto alcanzaría una torre construida con 5/6 de los bloques que aparecen.*

- *Haz una torre con 5/6 de los bloques que aparecen y haz clic en el punto al que llegues.*



Mapa descriptivo de la actividad 6

ACTI-VIDAD	***CONTENIDO***	***PLANTEAMIENTO***
6	Identificación de la parte en situaciones donde se conoce el entero y la fracción.	6.1 Resuelven la actividad titulada "Bloques" en forma individual en el programa interactivo, en donde se requiere obtengan de un conjunto de bloques considerado como entero, la parte que aparece en forma de fracción y determinan la altura formada por los bloques ensamblados que forman la parte.

Consideraciones previas.

En esta actividad se presenta nuevamente el tipo de problema en el que se obtiene la parte una vez que se establece una fracción y se conoce el conjunto de objetos que forman la unidad.

Debido a que en esta actividad no se da una instrucción de reparto explícitamente para hacer la distribución del todo, sino que aparece simplemente la instrucción de la parte que se debe obtener indicada con una fracción, expresada ésta en lenguaje aritmético y apoyado con la expresión oral, se propicia que el alumno interprete a la fracción como un operador fracturante.

La actividad comprende la resolución de tres problemas similares en donde se presenta un todo definido para cada uno de ellos. En cada problema se establece una fracción diferente para que el alumno obtenga la parte correspondiente.

Esta es una actividad en la que la respuesta no depende de la interpretación de la imagen, sino que es preciso realizar ciertas acciones sobre las imágenes que aparecen para encontrar la solución. Aunque al igual que en la actividad anterior, se desarrolla en la representación enactiva, la falta de una instrucción de reparto explícita marca la diferencia. Se pretende que el alumno haga una subdivisión del todo en partes iguales e identifique la parte interpretando la fracción expresada por un numeral como parte–todo. Esta acción implica que el alumno:

- Separe los elementos que forman la fracción, interpretando el denominador como el número de grupos en que debe subdividir el todo, e

- Interprete el numerador como el número de grupos que debe tomar.

Se pretende observar si el procedimiento utilizado en la actividad anterior al hacer sus repartos con el material manipulable, contribuye para operar sobre el todo que se presenta y es reproducido ahora mediante el programa, pues las imágenes de los bloques que aparecen, pueden desplazarlas a cualquier parte de la pantalla.

Precisamente el ejercicio consiste en arrastrar una parte del total de los bloques que se muestran para construir una torre.

La actividad consta de tres problemas. En el primer problema se le pide que construyan una torre con 3/4 partes de un total de 12 bloques, e indiquen el punto que la torre alcanza. Con esa fracción de bloques el punto al que debe llegar es el punto B. Después de que el usuario emite su respuesta, cualquiera que esta sea, el programa muestra un procedimiento de resolución a fin de que conozca si su respuesta es correcta o no, y quizá sirva para superar deficiencias en la instrucción.

En el segundo problema se le pide que construya otra torre ocupando sólo 1/5 parte de un total de los bloques que ve (10). El punto al que debe llegar es el señalado con la letra F.

En el tercer problema el usuario debe construir la torre ocupando 5/6 del total de los bloques que aparecen. El punto al que debe llegar está señalado con la letra G. Tanto en el segundo, como en el tercer problema de la actividad, el usuario no cuenta con la posibilidad de comprobar sus respuestas en el programa.

En esta actividad son varias las variables que se modifican con relación a la anterior, con el fin de que el alumno ponga en juego sus experiencias anteriores. El trabajo se realiza individualmente y en el programa interactivo, donde ya no manipula objetos sino imágenes. Además requiere la interpretación de la fracción expresada por un numeral, como un operador fracturante que contiene dos instrucciones; una de ellas, que le indica en cuántas partes debe dividir el conjunto original; y la otra, que le dice los subgrupos que debe tomar.

Desarrollo.

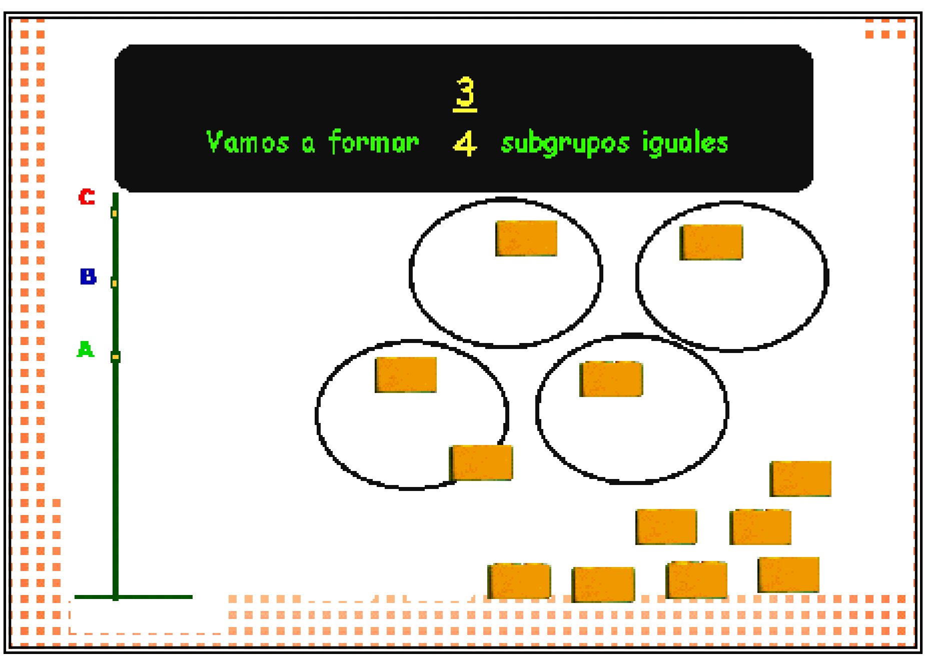
Al igual que en la actividad 4 las respuestas de los alumnos fueron capturadas en un archivo externo. Sólo en la captura del resultado del primer problema el programa presentó una falla que impidió que las respuestas quedaran asentadas en el archivo. A continuación se presenta un cuadro con el concentrado de éstas, se ha destacado en letra negrita el punto correspondiente a la respuesta correcta:

	3/4 de 12 bloques			Respuesta después de mostrar el procedimiento	2/5 de 10 bloques			5/6 de 12 bloques		
Opciones con el número de bloques	A= 7	**B= 9**	C= 11		D= 9	E= 5	**F=2**	I= 3	H= 6	**G= 10**
ALUMNO										
F				B	X					X
A				B	X					X
JC				B		X			X	
J				B	X					X
E				B		X				X
I				B		X			X	
Jes				B			X			X
K				B		X			X	

La actividad fue recibida con agrado por parte de los alumnos ya que siempre les causó expectación trabajar en la computadora, sin embargo, en el desarrollo de la misma se observó que resultó difícil, al parecer la mayor dificultad representó hacer la interpretación de la fracción, para resolver los problemas. También la instrucción representó una dificultad para algunos alumnos. La frase: “coloca uno sobre otro” provocó confusión, pues al principio dos niños traslaparon las imágenes.

Fue frecuente observar que cuando el programa les pidió que hicieran una estimación de la altura, los alumnos se esforzaron para calcular mentalmente el número de bloques que tenían que mover, pues el programa en esta parte no les permitió mover las piezas con la finalidad de que realmente significara una estimación. Sin embargo se considera que esta acción también pudo influir en la ejecución de la segunda instrucción, pues se notó que algunos niños actuaron con cierta timidez al mover los bloques.

En lo que se refiere a las respuestas de los alumnos, se observó que el procedimiento que el programa mostró después de que el usuario resolvió el primer problema, fue significativo al menos para una alumna, aunque todos emitieron la respuesta correcta inmediatamente después de verlo, consideramos que esto pudo significar que interpretaron adecuadamente dicho procedimiento o que simplemente asentaron el resultado de la lectura del punto que la respuesta mostró. Sin embargo se constató que una de las alumnas después de ver este procedimiento hizo una expresión de que había entendido, posiblemente con la demostración superó la falta de claridad en la instrucción, o bien la demostración le ayudó a interpretar la fracción como una relación, pues en la solución de los siguientes problemas ella procedió formando agrupaciones equitativas y construyendo la torre con el número de subgrupos que el numerador le marcó.



En el segundo problema, tres de los alumnos dieron como respuesta el punto D, que nos indicó que tomaron 9 de los 10 bloques presentes. Este resultado no tiene relación alguna con ninguno de los componentes de la fracción. Cuatro alumnos seleccionaron el punto E que correspondió a 5 de los 10 bloques que presentó este ejercicio, lo que mostró que no se percataron que en realidad tomaron 1/2 del total de los bloques, fracción con la que mostraron en ocasiones anteriores estar familiarizados, pero la cardinalidad de la parte que tomaron coincide con el denominador de la fracción indicada, es decir asignaron al denominador la cardinalidad de la parte. Una de las explicaciones que uno de estos alumnos dio, hizo evidente esta asignación al denominador porque él explicó su procedimiento con la siguiente expresión: “acomodando 5”. Como se aprecia en el cuadro, una de las respuestas marcó el punto correspondiente a la fracción exacta de bloques, esta respuesta corresponde a la alumna a la que nos referimos en el párrafo anterior, ella anotó como justificación: “me fijé como era”.

En las respuestas correspondientes al problema 3, se nota que tres de los alumnos optaron por el punto H. A este punto llegaron con 6 de los 12 bloques proporcionados, esta parte en realidad correspondió a la fracción 1/2, pero el número de bloques seleccionados nuevamente coincidió con el denominador. Estas respuestas correspondieron a tres de los cuatro niños que en la respuesta del problema 2 predominó el denominador en la selección de la parte; lo que confirma que en la interpretación que hicieron de la fracción asignaron al denominador la cardinalidad del subgrupo de la parte. Por otro lado se observa que cuatro alumnos optaron por seleccionar el punto G, correspondiente a la fracción indicada, al cual se llegó ensamblando 10 bloques. Una de estas respuestas la dio la niña cuyo procedimiento se observó y que se explica anteriormente. Con otros tres niños no se conoció el procedimiento que siguieron y por lo tanto tampoco se conoció la interpretación de la fracción que hicieron, pues además la descripción que dieron de su procedimiento no aporta elementos significativos, simplemente dan una muestra de la libertad con la que se expresan ante la computadora y que difiere de la que se pudo observar en su desempeño frente a la maestra.

Otro de los procedimientos que se observó fue el de Isaías (I), quien en el primer problema traslapó los bloques y simplemente presionó el punto más cercano a los que dispuso en la base. Después de ver el procedimiento que el programa mostró, se notó que dispuso los bloques en el número de agrupaciones equitativas que el denominador le marcó en los siguientes dos problemas, sin embargo cuando optó por tomar la parte en sus dos respuestas siguientes, no tomó en cuenta los subgrupos sino que colocó el número de bloques que coincidió con el denominador. Es decir no interpretó la fracción como una relación, sino que su atención la concentró en el denominador y omitió la parte.

Mientras unos niños actuaron en la computadora, la maestra puso algunos problemas a los alumnos que esperaban turno para trabajar con el programa. Se observó el procedimiento que encontró Erika (E) para resolver este tipo de actividades, a quien se le solicitó 3/4 de un total de bloques que contenía una bolsa (36). Ella expresó que primero contó los bloques y dividió 36 entre 4, luego formó los grupos y entregó 3 de esos grupos. En el renglón correspondiente a las soluciones que dio en el programa, acertó a una de las dos que se registraron, la justificación que anotó como procedimiento dice: “dividí y vi el dibujo”. Se pudo apreciar que su desempeño con el material concreto fue mejor que el que mostró al operar con las imágenes. Del mismo modo se observa que la descripción hecha en el programa fue más escueta que la que proporcionó oralmente. Probablemente la diferencia en experiencia que tiene al operar en uno y otro medio sea la principal causa de esta desigualdad en su proceder.

También se conoció el procedimiento que siguió Diego al operar con material concreto. Cuando se le solicitó 5/6 de los bloques de otra bolsa. Él separó en seis partes el total de bloques, revisó cuidadosamente que cada parte tuviera el mismo número de piezas y enseguida tomó cinco de esos grupos. Desgraciadamente no se observó el procedimiento que siguió con el programa y tampoco fueron capturadas sus respuestas en virtud de que la unidad A de la computadora donde él trabajó falló.

En esta actividad el programa no contó con algún recurso para que el alumno validara sus resultados y tampoco se dispuso desde la planeación de un tiempo para que el alumno comentara sus impresiones sobre la misma. Estrategia que hubiera subsanado las carencias del programa. La verificación de la igualdad de las partes en esta actividad, apeló a la visualización

Evaluación.

Como la práctica muestra, la mayor dificultad en esta actividad estriba en interpretar la fracción. La solución requiere la disociación de los elementos constitutivos del numeral y la traducción de esa interpretación a la representación gráfica que dé cuenta de que los elementos constitutivos han sido asociados nuevamente como parte–todo.

Se considera que de las variantes con las que se opera en esta actividad en relación con la anterior, la mayor dificultad representa interpretar la fracción como un operador fracturante sin el apoyo de una instrucción de reparto. Se puede ver que al menos, una niña logra hacer dicha interpretación actuando en el programa y que varios alumnos más, lo hacen actuando con material concreto y ante la presión o aliento que la maestra representa. Se procuró que durante el trabajo que realizaron los alumnos frente a la computadora, actuaran sin la presión de la maestra u observador. Esta diferencia de condiciones también permite conocer el interés que representó para el alumno el problema planteado. Se considera que si el problema fuera más interesante para el alumno se haría responsable de su resolución a pesar de estar solo frente a la máquina.

Debido a esta situación se considera pertinente hacer las siguientes modificaciones al programa:

- En virtud de que el alumno resuelve individualmente el problema, conviene partir nuevamente de una instrucción explícita de reparto. A partir del resultado de este reparto se le pide que reúna “x” fracción para terminar alguna construcción, una fachada, por ejemplo. Una vez seleccionada la parte de los bloques que aparecen, se presenta en una siguiente escena, la construcción sin terminar con la parte faltante. Si el alumno toma el número correspondiente a la fracción indicada, puede concluir la construcción sin que le sobre nada. De esta manera cuenta con el recurso para validar por él mismo su respuesta a fin de que ésta le sea significativa.

- Para el siguiente problema, se propone incluir en la instrucción la fracción sin instrucción explícita de reparto. Conviene incluir en el segundo problema una fracción cuyo denominador corresponda a un número de bloques con el fin de conocer cómo resuelve este tipo de situaciones. Por ejemplo, la fracción 11/15 en un grupo de 15 bloques.

- También conviene observar la situación en la que mediante la programación se establezca una relación entre las acciones que ejecuta el alumno y la escritura que el programa hace de la fracción. Es decir que el número de agrupaciones que el estudiante hace se vea reflejado en la escritura del denominador y el número de estas agrupaciones que tome determinen la escritura del numerador. Esta acción puede contribuir a que el alumno observe las modificaciones que los elementos constitutivos de la fracción sufren y que a la vez le ayude a integrarla y entenderla como parte–todo.

SESIÓN 5.

ACTIVIDAD 7

Planeación.

Propósitos:

- Interpretar la fracción como operador fracturante para representar con material objetivo la parte en situaciones donde el tamaño del entero cambia.

- Interpretar fracciones iguales a 1.

- Interpretar fracciones mayores que 1.

La actividad corresponde a un juego que practican en equipo, se trata de lanzar por turnos un dado que está marcado en sus seis caras con las fracciones: 1/2, 1/9, 5/4, 2/3, 1/4 y 3/3 El jugador en turno debe tomar, del total de bloques que aparece en el centro de la mesa, la parte que la cara del dado muestre. Una vez que el jugador sustrae los bloques correspondientes a la fracción indicada por el dado, el número de bloques que quedan al centro de la mesa se ve reducido, por lo que el siguiente jugador trabaja con un entero redefinido. Es muy probable que en este juego, los alumnos se enfrenten a situaciones en las que no es posible tomar la fracción que el dado marca, y en tal caso, deben ceder el turno al siguiente jugador.

La tarjeta con las instrucciones del juego dice:

TARJETA 3

Juego: "Toma la parte que indique el dado"

Instrucciones: Se forman equipos de tres personas, a cada equipo se le entregan 2 bolsas de bloques de plástico y un dado que tiene marcado en las caras alguna fracción. Vaciarán el contenido de una de las bolsas y cada jugador tomará un turno para tirar el dado, tomará la parte de los bloques que indique el dado.

Reglas:

1. En cada tirada el jugador tomará la parte que indique el dado del total de bloques que se encuentren al centro.

2. Si las partes que indique el dado no es posible formarlas cederá su turno y continuará el siguiente jugador.

3. Sólo se tomará otro entero de la segunda bolsa cuando falte un subgrupo igual a los formados en el centro.

4. Cuando se haya agotado el contenido de la primera bolsa, se podrá tomar el contenido de la segunda bolsa.

5. Gana el jugador que al final tenga más bloques.

Mapa descriptivo de la actividad 7

ACTI-VIDAD	*CONTENIDO*	***PLANTEAMIENTO***
7	Identificación de la parte en situaciones donde se conoce el entero y la fracción.	7.1 El maestro organiza al grupo en equipos de tres integrantes, explica en qué consiste el juego que se describe en la actividad 7 y proporciona las tarjetas 3 donde se dan a conocer las reglas del mismo. 7.2 El maestro solicita que lean y comenten en el equipo el contenido de la tarjeta. 7.3 Pide a los equipos que comenten en el grupo las reglas del juego para verificar que éstas se hayan comprendido. 7.4 El maestro proporciona el material e inician el juego.

Consideraciones previas.

Esta actividad no está en la planeación inicial, se planteó dada la dificultad que se observa en la actividad anterior. En este caso, al igual que en la anterior, el alumno debe enfrentarse a interpretar la fracción como un operador fracturante ahora mediante una experiencia directa, que es presentada mediante un juego en el que debe actuar sobre un conjunto de objetos que representan el todo.

Se pretende que el alumno haga una subdivisión del entero en partes iguales e identifique la parte interpretando la fracción expresada por un numeral como un operador fracturante. Ahora el entero se redefine ante sus ojos y esto hace que el alumno tenga la oportunidad de observar nuevamente, que a un mismo numeral puede corresponder distinto tamaño de una misma parte pues ésta depende del tamaño del entero. Esta acción implica que el alumno:

- Separe los elementos que forman la fracción, interprete el denominador como el número de grupos en que debe subdividir el entero, e

- interprete el numerador como el número de grupos que debe tomar.

Se espera que con la confrontación al interior del equipo los alumnos logren interpretar la fracción para seleccionar la parte. La validación se debe hacer de manera empírica y por todos los integrantes del equipo, pues en cada tirada un niño toma la parte que indica la cara del dado, pero los demás participantes aceptan o rechazan esa decisión.

Desarrollo.

La actividad reflejó un grado de dificultad al alcance del grupo, pues interpretar la fracción como un operador fracturante con material concreto y en equipo contribuyó para que alumnos que emitieron resultados en los que se notó un predominio del denominador en la actividad anterior, probaran su hipótesis en este juego validado por sus compañeros.

En el juego del equipo 3, la primera fracción que marcó el dado fue 3/3; entonces el niño separó en tres partes el total de los bloques, se llevó las tres partes y eso hizo que se desanimaran los otros integrantes del equipo y perdieran interés, pues fueron capaces de darse cuenta que aunque les tocara una fracción mayor no podían ganarle a su compañero. En este equipo predominó la estrategia de ensamblar los bloques para comprobar que las distribuciones fueran equitativas, pues aunque se les sugirió que no era necesario que así lo hicieran, persistieron en este procedimiento, esto retardó cada tirada y se perdió el interés. Uno de los integrantes de este equipo cuando pasó a trabajar con el equipo 2, donde ya tenían otra estrategia para hacer los agrupamientos, continuó con la técnica de ensamblar los bloques para verificar la igualdad entre ellos.

En el equipo 2, en donde les tocaron las primeras fracciones con numerador 1, se notó mayor interés y una sistematización en repartir el número de bloques entre el número de grupos que indicó el denominador. En la primera tirada a uno de los integrantes le tocó la fracción 1/4 y tomó cuatro bloques, es decir no interpretó la fracción como una relación sino que predominó el denominador como figura central. Otro compañero le dijo: “No, tienes que tomar un cuarto”; fue así como ensambló en cuatro tantos iguales el total de bloques y tomó una de esas partes. La maestra les comentó que no era necesario que ensamblaran los bloques, que podían simplemente hacer los grupos. Después de esta observación, Franco se detuvo a pensar, colocó cuatro bloques separados e hizo la distribución uno a uno, fue la primera vez que se observó que esta estrategia fuera utilizada por este grupo de niños, pues los demás integrantes la adoptaron y se agilizó el juego.

En las siguientes tiradas, como se menciona anteriormente, se pudo apreciar una sistematización en la estrategia que siguieron para distribuir los bloques y tomar el número de agrupamientos que indicó el numerador, es decir procedieron haciendo una correcta interpretación de la fracción. Cuando el dado indicó una fracción que no fue posible formar con el número de piezas que se encontraron en la mesa, uno de los compañeros advirtió que no se podía y que por lo tanto el turno le correspondía a él que era el siguiente jugador. Del mismo modo, cuando el dado cayó en la fracción 5/4, el niño participante formó los cuartos con los bloques existentes y tomó de la segunda bolsa el mismo número de bloques que correspondían a un cuarto.

En el equipo 1, las fracciones que les marcó el dado fueron 5/4 y 3/3, por lo tanto terminaron el contenido de las dos bolsas en esas dos tiradas.

Evaluación.

La actividad cumple con los propósitos. En esta ocasión el juego interesa al principio. Los hechos que hicieron que los alumnos se desanimaran, reflejan las predicciones que un número mayor de alumnos son capaces de hacer, basados en aspectos relacionados con la formación del concepto de fracción.

Los aspectos que están presentes en sus procedimientos son: la igualdad de las partes, la división exhaustiva del entero y la comprensión de la relación expresada por un numeral. Del mismo modo son capaces de advertir cuando no es posible hacer una distribución, reconocen cuando la fracción es mayor e igual al entero y estiman la posibilidad que tienen de ganar porque tienen presente el tamaño de la parte en relación con el tamaño del entero.

Una de las modificaciones que conviene hacer en esta actividad es anteponer esta actividad a la descrita como número 5. También conviene proporcionar un dado con fracciones cuyo numerador sea uno, en un primer momento de la actividad, y posteriormente aumentar el grado de dificultad cambiando el dado con fracciones cuyo numerador sea diferente de uno. Otra modificación pertinente es que el todo en este juego esté representado por cinco enteros, es decir, cinco bolsas con el mismo número de bloques, una para realizar el juego y cuatro de reserva, a fin de mantener más tiempo el interés por el mismo.

SESIÓN 6.

ACTIVIDAD 8

Planeación.

Propósitos:

- Utilizar la relación: entero y número de subgrupos que lo forman para resolver problemas.

- Construir el entero a partir de la parte que se conoce y la fracción que ésta representa.

La actividad consiste en resolver dos problemas. En el primero se les proporciona una bolsa con un número de bloques que representan una fracción unitaria; se les solicita calculen los bloques que faltan para integrar un entero. El segundo problema es similar, sólo que ahora trabajan con una fracción de numerador diferente a uno. Las instrucciones son:

En esta bolsa sólo hay 1/3 del total que había; el resto se salió. Calculen el número de bloques que había originalmente y formen el entero, tomen de esta caja los bloques que faltan.

En esta bolsa rosa sólo hay 2/5 del total que había; el resto se salió. Calculen el número de bloques que había originalmente y formen el entero, tomen de esta caja los bloques que faltan.

Mapa descriptivo de la actividad 8

ACTI-VIDAD	CONTENIDO	PLANTEAMIENTO
8	Construir el entero en situaciones donde se conoce la fracción y la parte.	8.1 El maestro plantea el primer problema descrito en la actividad 8 en el que solicita construyan el entero una vez que se conoce la fracción y la parte. 8.2 Distribuye el material a los equipos y solicita que antes de resolverlo estimen el tamaño del entero. 8.3 Resuelven en equipo el problema. 8.4 Se nombra a un integrante por equipo para que presente ante el grupo el tamaño del entero. Se establece la discusión en el grupo y en su caso se pide la demostración de alguna de las respuestas. 8.5 Ahora con la secuencia anterior resuelven el segundo problema de la actividad 8.

Consideraciones previas.

La actividad se realiza mediante una experiencia directa y en ella se aborda el tipo de problema en el que se conoce la fracción y la parte que ésta representa para que ahora se forme el entero correspondiente a dicha parte.

Es la primera ocasión que resuelven un problema donde se les pide que hagan la reconstrucción del entero representado con material concreto. La solución exige que el alumno interprete la fracción como parte–todo, relacione ésta con el material que le proporcionan, e integre la parte faltante, para lo que es preciso que tenga en cuenta las partes que forman el entero.

Los alumnos resuelven dos problemas; en el primero se da una fracción unitaria que la maestra debe mencionar pero además aparece el numeral escrito en la etiqueta de la bolsa que contiene el material que representa la fracción. El segundo problema, es del mismo tipo sólo que involucra una fracción con denominador diferente de 1.

Aunque la actividad se realiza en equipo y con material manipulable, su dificultad estriba en habilidades promovidas mediante las experiencias anteriores como: interpretar la fracción expresada verbalmente o mediante el numeral, representarlo con objetos, seleccionar una parte, mantener la igualdad de las partes y considerar el número de partes que forman el entero en cada caso.

A cada uno de los equipos se le entrega una bolsa que coincide en la fracción que llevan escrita en una etiqueta, pero la porción de la parte en cada uno de los equipos varía. Los bloques se presentan ensamblados.

La validación se prevé de tipo semántica, pues ellos tienen que dar argumentos a sus compañeros y maestra que justifiquen sus resultados.

Desarrollo.

La maestra repartió el material y dio la instrucción, después indagó para conocer lo que los alumnos entendieron el problema. Ella preguntó:

> Ma: ¿Qué tienen que hacer?
> J: Ver las piezas que falten, completar el entero.

En el equipo 3 se escuchó que uno de los integrantes comentó a sus compañeros que tenían que formar tres tercios, otro compañero le contestó que efectivamente pero tenían que formar el entero. Entonces vieron las piezas, las contaron y formaron cuatro grupos iguales a los que tenía la bolsa e informaron a la maestra que habían encontrado la respuesta.

> Ma: ¿Cuánto tenían en la bolsa?
> J: un tercio.
> Ma: Entonces ¿cuánto le faltaba?.

Franco, otro niño del equipo, se dio cuenta que su resultado no era correcto y tapó con su brazo dos de esos subgrupos que formaron para corregir inmediatamente la respuesta sin que se notara y argumentó:

F: Mire maestra tienen que ser tres tercios, aquí está uno (señala los subgrupos), dos y el que está en la bolsa, tres.
Ma: Entonces cuánto faltaba
Equipo 3: dos tercios.

Se observó que en este equipo, al menos un integrante fue capaz de advertir la solución numéricamente, pero para disponer el material de manera que representara la fracción faltante fue preciso propiciar la reflexión sobre su procedimiento.

En el equipo 2, no tomaron en cuenta la parte como integrante del entero. Ellos formaron 3/3 con el total de bloques que contenía la caja, de la cual sólo debieron tomar el faltante. Fue preciso que la maestra los remitiera a la pregunta inicial para que reflexionaran sobre el problema. De igual manera en el equipo 1, se notó que no les quedó claro el problema y por lo tanto no se pusieron de acuerdo sobre lo que tenían que hacer para buscar la solución, simplemente empezaron a formar grupos. La argumentación del equipo 3 sirvió como explicación para los otros equipos. Para ver si ésta se había comprendido la maestra les puso otro problema similar a los equipos 1 y 2.

A uno de los equipos le dio cinco bloques y le indicó que esa parte representaba 1/3, al otro equipo le dio 2 bloques y le señaló que representaba 1/5 del total de los que había en la bolsa. Los dos equipos procedieron a formar grupos iguales, y en ambos casos, contaron para verificar que el entero tuviera los tres tercios y el que estuvo formado por quintos tuviera cinco. Cuando se les preguntó qué parte faltaba, contaron los subgrupos que se encontraban fuera de la bolsa y dieron su respuesta mediante una fracción en la que asocian al denominador el total de los grupos y al numerador el número de grupos que se encuentran fuera de la bolsa.

En el segundo problema se pidió que buscaran el complemento de material que representa la fracción 2/5. A diferencia del problema 1, la fracción que se les dio no era unitaria, sin embargo no representó mayor dificultad pues reprodujeron el procedimiento utilizado en los problemas anteriores y no perdieron de vista que la porción en este caso, representó dos subgrupos. Se observó que al dar la respuesta en el problema 1 los alumnos se apoyaron en el conteo de los subgrupos en voz alta y en la respuesta al problema 2, este conteo lo hicieron mentalmente.

Evaluación.

La actividad cumple con los propósitos planteados. Se observa que al principio representa una dificultad, pero una vez que se comprende el problema, los alumnos son capaces de emitir la respuesta en forma de fracción y de operar con la fracción no unitaria.

Operar con la fracción no unitaria pone a prueba la interpretación que hacen de ésta expresada por el numeral, pues aunque en los dos problemas planteados originalmente, se entrega la parte de manera estructurada, es decir cada grupo está especificado con los bloques ensamblados, y esto puede significar una ayuda, también se puede ver que en el problema que se plantea de manera emergente, se le entrega al equipo un conjunto de bloques sin ensamblar y son los alumnos los que dan la estructura a la parte o bien la parte la manejan como medida y efectúan un proceso de conmesuración para encontrar la medida del entero, lo que nos indica que establecen la relación: grupos que tengo como parte y grupos que debe tener el entero.

Los alumnos en esta actividad en equipo logran reconstruir el entero representado con material concreto. Interpretan la fracción como parte–todo, la relacionan con el material proporcionado, e integran la parte faltante. Durante este proceso disocian las partes que constituyen la fracción, pero al emitir su respuesta en forma de fracción se nota la integración de estos elementos mediante la relación parte–todo.

Se considera que esta actividad no requiere modificaciones, sin embargo se puede mejorar si la validación que se hace en el segundo problema se realiza cotejando la parte que ellos determinen, con la parte que la maestra conserve como respuesta en otro lugar, pues resulta significativo para los alumnos comprobar que efectivamente obtienen la parte correspondiente. Para la validación de la respuesta al primer problema, conviene conservar la actividad que se propone originalmente, pues el proceso de verbalización que realizan durante la justificación que dan de su resultado, hace que pongan en acción lo que ellos han acumulado como experiencia y reconsideren su respuesta.

ACTIVIDAD 9

Planeación.

Propósitos:

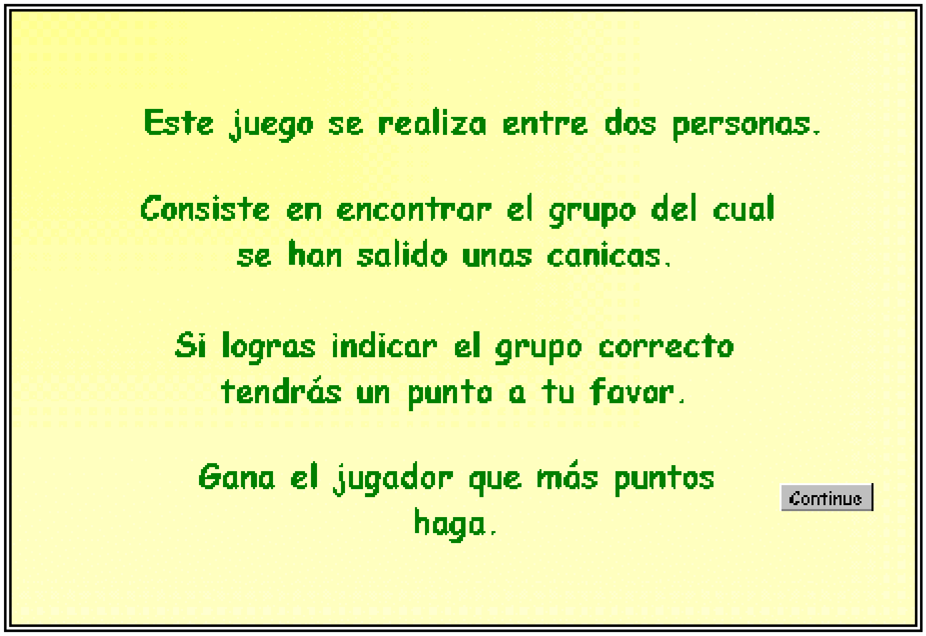
- Utilizar la relación: entero y número de subgrupos que lo forman para resolver problemas en forma individual.

- Seleccionar el entero a partir de la parte que se conoce y la fracción que ésta representa.

Juego: "Te doy la parte y me indicas el entero"

El juego pertenece al programa interactivo. Se juega entre dos personas. Se presenta la parte gráficamente y la fracción que ésta representa mediante un numeral. El jugador en turno debe seleccionar, entre tres conjuntos, el entero al que pertenece esa parte.

Gana el jugador que al final haya obtenido más puntos.



Mapa descriptivo de la actividad 9

ACTI-VIDAD	*CONTENIDO*	***PLANTEAMIENTO***
9	Seleccionar entre varios conjuntos, aquel conjunto que representa el entero, en situaciones donde se da a conocer la fracción con su escritura simbólica, y la parte representada mediante imágenes.	9.1 Se organiza el grupo en parejas para participar en el juego. 9.2 Participan en el juego "Te digo la parte y me indicas el entero" en el programa interactivo, donde seleccionan de entre tres conjuntos, aquel que represente el entero de la parte que se señala. Cada jugador deberá participar en cuatro jugadas.

Consideraciones previas.

El juego se relaciona al igual que la actividad 8, con el tipo de problemas en el que se le pide al alumno forme el todo estableciendo la relación entre el material que se le da a conocer y la fracción que se le dice representa esa parte.

A diferencia de la actividad anterior, en esta ocasión el alumno tiene que hacer esta identificación del todo de manera individual, pues aunque el juego se realiza en parejas, en la práctica son contrincantes.

Otra diferencia significativa la da la representación en la que resuelve el problema, pues a diferencia de las actividades en las que han participado en el programa anteriormente, ésta tiene aún más dificultad que la que presenta un gráfico impreso, ya que las imágenes sobre las que el usuario tiene que actuar que representan la parte, se le muestran sin estructura y el alumno no tiene la oportunidad de darle dicha estructura pues son inamovibles. Además sobre los agrupamientos que él dispone no puede dejar señal alguna, como se puede hacer con un lápiz. Esta dificultad da oportunidad de observar los procedimientos que hacen en la pantalla.

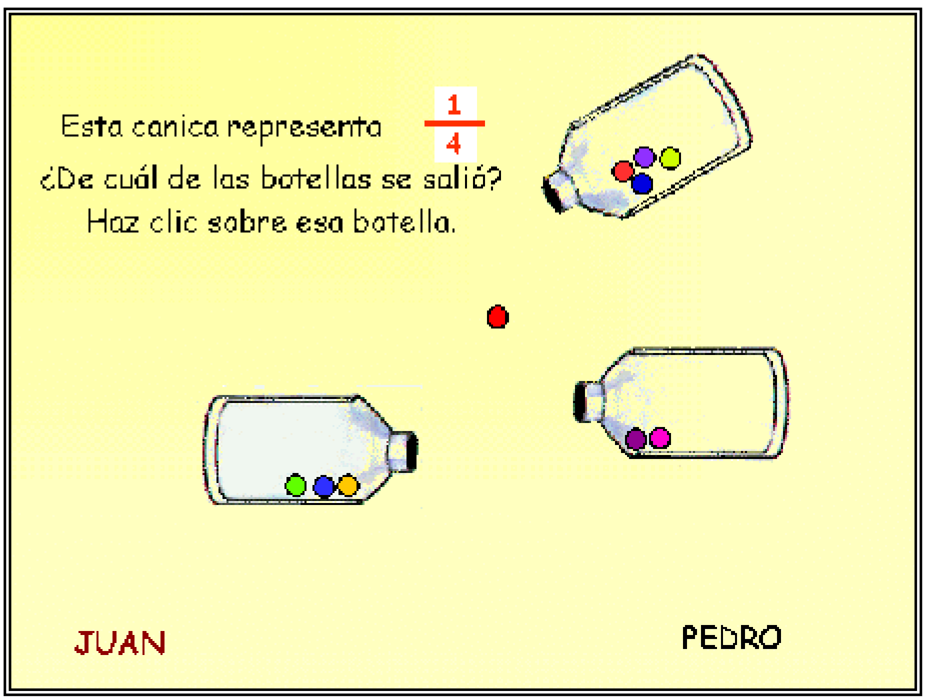
La solución en cada una de las jugadas exige que el alumno interprete la fracción como una relación parte–todo, relacione ésta con un conjunto representado en la imagen, y seleccione de entre tres conjuntos, aquel que contiene la parte faltante. Para realizar estas acciones es preciso que tenga en cuenta las partes que deben formar el entero.

Esta actividad se considera la más importante de la secuencia debido a que su solución conjuga varias acciones promovidas en las actividades anteriores como: interpretar la fracción expresada verbalmente o mediante el numeral, traducir este lenguaje al gráfico, hacer subgrupos en los que se mantenga la igualdad de las partes, considerar el número de partes que forman el entero en cada caso y distinguir la opción que represente la parte que complete el entero.

Cada jugador tiene cuatro participaciones. En el cuadro que a continuación se presenta muestra los detalles de cada jugada.

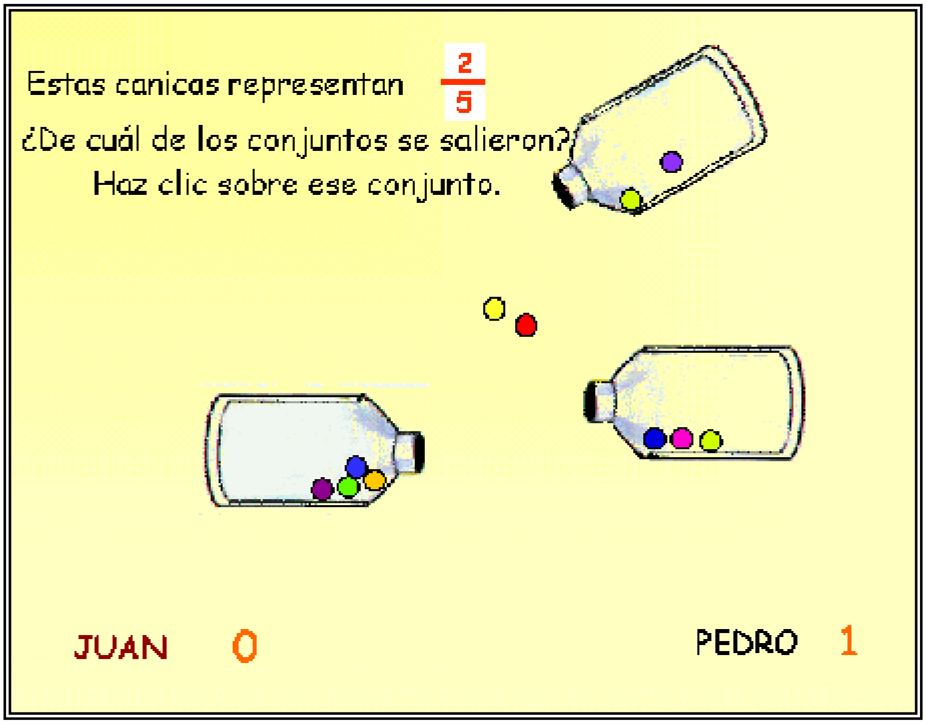
Tirada	Jugador	Número de canicas que salen de alguna de las botellas	Fracción	Opciones		
				Botella A	Botella B	Botella C
1	1	1	1/4	✓ 3	2	4
2	2	3	3/8	3	✓ 5	4
3	1	2	2/5	4	✓ 3	2
4	2	4	2/4	3	5	✓ 4
5	1	7	7/10	4	5	✓ 3
6	2	4	2/3	5	✓ 2	5
7	1	3	1/3	✓ 6	5	3
8	2	4	2/2	✓ 0	4	5

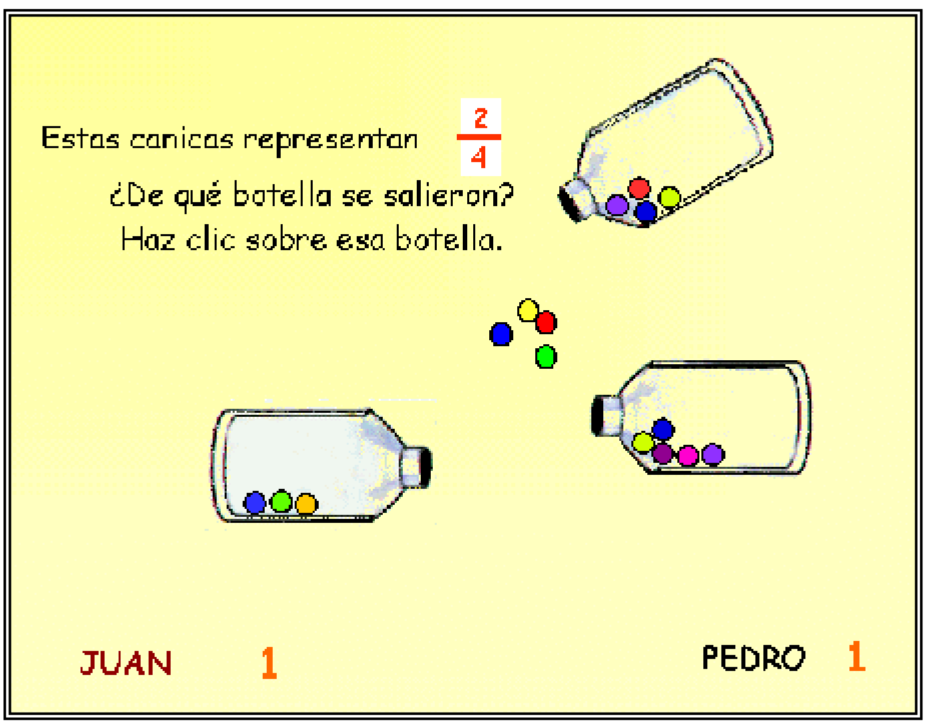
✓ Opción correcta.

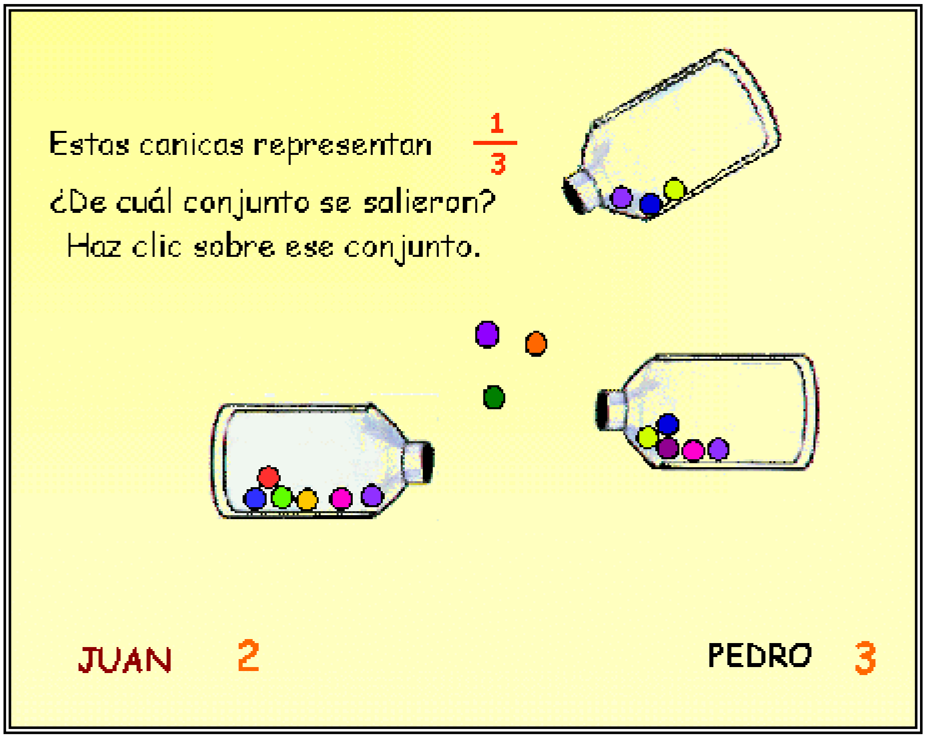


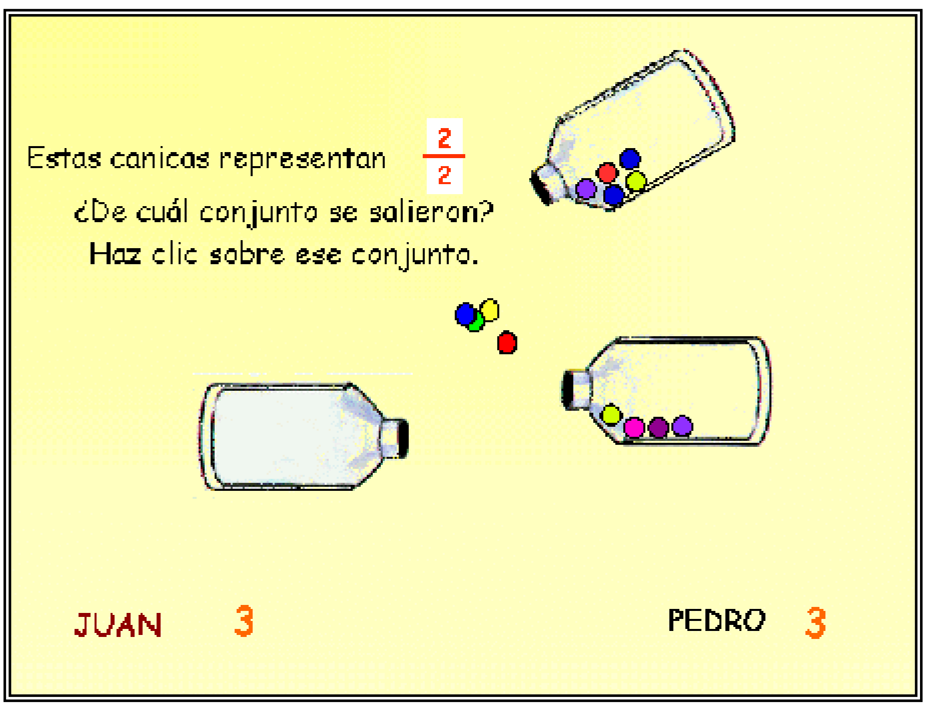
Al participar como jugador 1, tiene tres de cuatro jugadas donde la cardinalidad de cada subgrupo es uno, y dentro de las fracciones que le toca interpretar hay dos unitarias. Como jugador 2, todas las fracciones que debe interpretar no son unitarias, y sólo en una de cuatro jugadas, la cardinalidad de los subgrupos que debe formar es uno.

En esta actividad el programa no cuenta con una opción en la que el alumno pueda comprobar su respuesta, pero sí le brinda cierta información al respecto, dado que la evalúa e inmediatamente aparece registrada en el marcador.


Estas canicas representan $\frac{2}{5}$
¿De cuál de los conjuntos se salieron?
Haz clic sobre ese conjunto.
JUAN 0
PEDRO 1


Estas canicas representan $\frac{2}{4}$
¿De qué botella se salieron?
Haz clic sobre esa botella.
JUAN 1
PEDRO 1


Estas canicas representan
1
3
¿De cuál conjunto se salieron?
Haz clic sobre ese conjunto.
JUAN 2
PEDRO 3


Estas canicas representan
2
2
¿De cuál conjunto se salieron?
Haz clic sobre ese conjunto.
JUAN 3
PEDRO 3

Desarrollo.

La actividad resultó grata para los alumnos y se mostraron motivados por participar en ella. Durante el desarrollo de ésta se apreciaron manifestaciones de júbilo y de interés por establecer la relación que les permitiera aumentar su puntuación. Se observaron actitudes de reflexión ante la pantalla, las respuestas no eran emitidas de manera rápida, en la mayoría de los casos, se pudo apreciar que contaron e hicieron agrupaciones con las imágenes de las canicas.

A continuación se presenta un cuadro con los marcadores obtenidos en cada juego y enseguida algunos de los procedimientos

JUGADOR 1	PUNTUACIÓN	JUGADOR 2	PUNTUACIÓN
E	3	Jess	1
F	3	J	1
J	4	D	1
Jess	3	E	2
K	3	I	2
A	3	F	4

Desde la primera jugada dos alumnos manifestaron la imposibilidad de mover las canicas para hacer un acomodo que les facilitara el trabajo, sin embargo ante la pregunta de la maestra que los remitió a considerar si era indispensable que las canicas se movieran, adecuaron su estrategia a esta limitante y se pudo observar que sus intentos por agrupar los objetos los hicieron mediante una simulación de encierro con el puntero del ratón o superponiendo sus dedos en la pantalla.

Como se anticipó, los puntajes para el jugador 1 resultaron más altos pues se advierte menor dificultad en estas participaciones.

Jéssica y Érica participaron en dos ocasiones en el juego intercambiando los lugares como jugador. En sus resultados se notó que en ambos casos lograron acertar a las jugadas donde los subgrupos que formaron resultaron con un elemento, pero se les dificultó formar subgrupos de más de un elemento. Atrajo la atención que después de haber participado en dos juegos estas alumnas, se mostraron interesadas en seguir la participación que sus compañeros hacían en el juego, observaron cuidadosamente el procedimiento que sus compañeros siguieron, desde lejos, contaban las canicas de cada botella para resolver cada jugada nuevamente.

En la primera ocasión que jugó Franco, participó como jugador 1 y Javier como jugador 2, en esta ocasión su marcador fue de 3 a 1 a favor de Franco. En un segundo juego en el que participó Axel con Franco, éste como jugador 2, se desempeñó más seguro y dio muestras de la alegría que causa hacer un descubrimiento, al grado que se observó que en la tercera jugada de su contrincante, no dudó en ayudarle para que su compañero obtuviera el punto. Cuando la maestra le preguntó si le estaba diciendo a su compañero él lo afirmó, mostrándose muy seguro del dominio que había logrado en el juego. El marcador en este caso fue: Axel 3 puntos, Franco 4. En esta actividad se notó que a Axel se le dificultó concebir que 3 canicas representaran 1/3, pues cuando le tocó esta jugada exclamó: "¿1/3?, ¡no puede ser!". Esto puede explicar la insistencia de este alumno en ensamblar los bloques cada vez que obtenía un resultado en el equipo, quizá él contempló al conjunto de bloques como cantidad continua, en el caso de las imágenes de las canicas, éstas no pueden formar una continuidad y por lo tanto le resultó difícil entender una parte formada por 3 objetos.

En la segunda ocasión en la que Javier participó, lo hizo como jugador 1 y obtuvo los cuatro aciertos, claro que en este conjunto de jugadas, como ya se señaló anteriormente, sólo en una de ellas es preciso hacer agrupaciones de más de un elemento.

En la actividad 8, Isaías operó sobre el material objetivo con desenvolvimiento formando la parte faltante mediante la relación parte–todo, sin embargo en esta actividad no fue así. En la primera jugada que le tocó seleccionar la botella que le faltaba 1/4 representado por una canica, contó las canicas de cada botella y optó por la que tenía 4 canicas. En este caso no tomó a la parte (la canica que se encontraba afuera) como parte del todo. La evaluación que el programa hizo de ese resultado y que apareció en el marcador, provocó que reconsiderara la relación que estableció en esa jugada, pues durante la segunda participación hizo una expresión manifestando que le había entendido al juego y, tanto él como su compañero Kristofer, acertaron a las dos siguientes jugadas.

Diego, en actividades anteriores, se mostró como líder en el equipo, en el juego en la computadora obtuvo un punto. Su rostro mostró extrañeza y frustración. Él dijo estar seguro que le había entendido al juego y lo desconcertaba el resultado.

Cuando en entrevista se le preguntó cómo resolvió cada una de las jugadas dio sus explicaciones al mismo tiempo que resolvió cada jugada en el programa. Entonces se pudo apreciar que no repartió el total de elementos entre el número de grupos que quiso formar, sino que por ensayo y error hizo agrupaciones de dos elementos, de tres, hasta que el número de elementos con los que forma el subgrupo fue suficiente para formar el número de grupos, que en este caso, el numerador representó. En las ocho tiradas asoció al denominador con el total de subgrupos que formó, considerando los de afuera y los de dentro de la botella, y al numerador con el número de subgrupos que formó con las canicas que se encontraron fuera. Mostró que por ensayo y error, formó los grupos que el numerador le indicó con todas las canicas que aparecieron fuera. Cuidó siempre que los grupos fueran iguales, enseguida buscó la botella que tuviera las canicas con las que se pudieran formar los grupos faltantes que completaran lo que el denominador indicaba y que además fueran iguales a los que tenía fuera. Acertó a 7, de las 8 tiradas que resolvió en esta ocasión. Además en cada una de las jugadas justificó la razón por la que no escogió las otras dos opciones. Por ejemplo, cuando resolvió la octava tirada donde salieron 4 canicas y la fracción indicó 2/2, inmediatamente optó por la botella vacía; explicó que en la segunda opción la fracción debería ser 1/2 y en la tercera opción no se podría formar pues no serían iguales los grupos, en cambio en la que seleccionó se salieron todas las canicas o sea 2/2 que formaron el entero. Manifestó especial gusto cuando apareció una fracción unitaria y expresó que éstas eran más fáciles de solucionar; sin embargo notamos que la única tirada que no acertó fue la tirada siete, donde salen 3 canicas que estuvieron representadas por la fracción 1/3, es decir cada subgrupo se debió formar con 3 canicas.

Al parecer, el proceso de verbalización contribuyó para que viera detenidamente cada una de las instrucciones y reflexionara sobre cada una de sus respuestas, pues mostró gran habilidad incluso, para determinar la fracción de las opciones que no seleccionó.

Evaluación.

La evaluación que se hace de esta actividad resulta satisfactoria pues cumple con los propósitos establecidos. El juego provoca que los alumnos se interesen por establecer la relación que les permita acertar en su resultado.

La capacidad para relacionar la parte con el todo mediante la fracción en esta actividad se pone a prueba en otra representación, la cual es superada por al menos dos alumnos. Se aprecia una diferencia en el desempeño en la representación icónica, pues algunos alumnos son capaces de hacerlo operativamente con material objetivo y en esta representación se les dificulta formar agrupaciones con más de un elemento. Se pudo observar que sólo dos alumnos recurren a dividir el número de canicas que aparecen fuera de la botella entre el número de grupos que indica el numerador. En otros casos se observa que colocan sus dedos sobre las imágenes que aparecen en el monitor y repiten el proceso hasta formar la agrupación que satisface la opción que buscan, lo que hace suponer que no recurren a la división del total de elementos de la parte seleccionada entre el número de grupos que el numerador presenta, esto con la finalidad de descubrir la cardinalidad de la parte y mantener esta cardinalidad constante en la búsqueda de la parte que falta, sino que esa agrupación la realizan por ensayo y error, quizá porque la operación de dividir aún no la realizan mentalmente.

Se considera que comentar sus procedimientos encontrados durante el juego enriquece la actividad, además de que brinda la oportunidad de que evolucionen estos.

CONCLUSIONES

Los propósitos de esta investigación fueron:

1. Explorar las formas en que los alumnos que cursan el 4º grado de educación primaria resuelven problemas de reparto con la instrucción explícita y mediante la interpretación que hacen de la fracción expresada por el numeral, a partir de sus experiencias sobre este contenido tratado en otros contextos, utilizando cantidades discretas.

2. Estudiar la posibilidad de favorecer la evolución de los procedimientos iniciales de los alumnos, mediante una secuencia didáctica específica que combina la interacción en equipo, utilizando material manipulable, con el uso del programa interactivo “Fracciones. exe”, diseñado por quien suscribe para dicho fin.

3. Identificar las dificultades que enfrentan los alumnos en el desarrollo de esta secuencia, con la finalidad de aportar elementos para el diseño de una propuesta didáctica que incluya un programa interactivo como un recurso que favorezca la reflexión en el alumno acerca del significado parte–todo de la fracción.

1. Con relación a la exploración de las formas en que los alumnos resuelven los problemas de reparto, se puede decir que:

Al resolver situaciones con manipulativos o gráficos con una instrucción de reparto explícita e identificar previamente de alguna manera la parte a la que se hace referencia, la fracción funge como una relación de fractura. En cambio, si la instrucción en estas situaciones incluye a la fracción mediante el numeral, implica que el alumno interprete ésta como un operador fracturante, pues pide actuar sobre los objetos rompiéndolos en partes equivalentes (*Vid,* FREUDENTHAL: 23-25).

- Por lo anterior, al iniciar la secuencia de las actividades, se abordan problemas en los que los alumnos establecen solamente la relación de fractura mediante la fracción. Problemas con los que están más familiarizados. La dificultad de nombrar a la fracción mediante un numeral para relacionar la parte con el todo se debe principalmente, a la falta de experiencia para representar a la fracción mediante cantidades discretas.

- Al principio la pregunta ¿qué parte?, no la asocian con la noción de fracción como parte-todo, debido a que la cardinalidad de los subgrupos que obtienen de la partición atrae su atención y provoca confusión en la relación de los elementos de la fracción. Los alumnos no observan el total de subgrupos provocados por la partición, sino que dirigen su atención al número de elementos que constituye una parte. Sin embargo, a lo largo del desarrollo de la secuencia esta dificultad es superada y pueden establecer la relación de los elementos de la fracción al interpretar el resultado de un reparto.

- Realizar repartos para obtener fracciones unitarias y después contar éstas, significa un punto de apoyo en la solución a los problemas tanto para obtener la parte que se les pide, como para construir el entero; incluso este procedimiento les permite significar una fracción mayor que éste.

- El paso del establecimiento de la relación de fractura a la interpretación de la fracción como operador fracturante, en la actividad 5, es la causa de mayor conflicto y a la vez provoca la evolución de sus procesos, pues para actuar sobre el todo, es preciso interpretar la fracción expresada por el numeral.

- Se observa que, al menos una niña logra interpretar la fracción como un operador fracturante actuando en el programa, y que varios alumnos más lo hacen actuando con material concreto. Durante el trabajo que realizan los alumnos frente a la computadora, se procuró que la maestra mantuviera cierta distancia para que los alumnos pudieran sentirse más libres. Esta diferencia de condiciones también influye en su desempeño. Por lo anterior, se cree que el planteamiento en el programa de un problema lo suficientemente interesante para el alumno, podría mejorar su rendimiento de manera que se hiciera responsable de la búsqueda de su correcta resolución.

- La actividad 9 resulta satisfactoria, pues cumple con los propósitos establecidos. El juego provoca que los alumnos se interesen en el problema que se les plantea y utilicen sus recursos para interpretar la fracción como un operador fracturante y conformar el todo. De tres alumnos que resuelven correctamente todas las jugadas, dos de ellos hacen el número de agrupaciones que indica el numerador con los elementos que se encuentran fuera de la botella, una vez que descubren la cardinalidad de esos grupos, buscan la botella que contiene las agrupaciones faltantes de acuerdo a lo que indica el denominador, en la que conservan la misma cardinalidad de los grupos que han formado. Otro de los alumnos realiza esta división por ensayo y error, quizá porque la operación de dividir aún no la hace mentalmente. Esto hace pensar en la posibilidad de que, para alumnos que presentan esta dificultad, la representación icónica en el programa no contribuye en su proceso de resolución. En este caso la experimentación con una situación similar en la representación objetiva con otros manipulativos aclararía la causa de dicha dificultad.

- Los bloques "lego" facilitan la igualdad de las partes y la representación de algunas equivalencias que les resultan familiares, como 1/2 con 2/4. El material propicia que algunos niños interpreten la porción de bloques como una medida y otros lo manejen ciertamente como un conjunto de objetos con los cuales hacen distribuciones en todo momento equitativas. Con esto se puede afirmar que se propicia uno de los mecanismos de construcción del concepto de fracción, la equivalencia de las partes. Se observa que el desempeño de los alumnos con el material concreto es mejor que el que se muestra al operar con las imágenes. Del mismo modo, se puede ver que la descripción de sus procedimientos escrita en el programa es más escueta que la que hacen oralmente.

- Durante el desarrollo de las actividades se puede apreciar cómo la idea de concebir un conjunto de objetos como unidad evoluciona de manera que es posible afirmar dos cosas: operar con los materiales utilizados contribuye en esta evolución y, la concepción de unidad compuesta relacionada con cantidades discretas, resulta un reto al alcance de la mayoría de los niños con quien se trabajó. Sin embargo, se considera conveniente el uso alternado de las preguntas: ¿Qué parte..?, ¿Qué fracción? y ¿Cuántos de cuántos?, para contribuir a establecer dicha relación con el uso de este material.

2. Con relación al segundo propósito se puede afirmar que:

- Como se puede ver en la actividad 5, el contexto de reparto definido, el número de personas entre quienes se realiza éste, el trabajo en equipo y la representación objetiva, favorecen el cumplimiento de los propósitos. En estas condiciones a los alumnos se les facilita seleccionar la parte pues les resulta claro el todo, hay de por medio una instrucción de reparto o de división para hacer la distribución y realizar un conteo o suma de fracciones unitarias para integrar la parte solicitada.

- La capacidad para formar al todo mediante la interpretación de la fracción y la relación con la parte representada con imágenes, en la actividad 9 se pone a prueba en la representación icónica, la cual es superada, por al menos, tres alumnos. En la primera oportunidad que ellos participan, se aprecia que hacen las agrupaciones sobreponiendo sus dedos en el monitor o con el puntero del ratón. En la segunda ocasión de su participación, en la que les corresponden jugadas diferentes, se observa que uno de ellos realiza las agrupaciones mentalmente. Los seis alumnos restantes son capaces de resolver correctamente sólo aquellas opciones que implican hacer subconjuntos de un elemento. Estos alumnos son capaces de hacerlo operativamente con material objetivo (en la actividad 8) pero se les dificulta formar agrupaciones con más de un elemento en el programa. También existe la posibilidad de que la dificultad no se deba al cambio de la representación, sino a que al conjunto de canicas no pueden darle la estructura como a los bloques con los que pueden operar como con una cantidad continua.

- Sus procedimientos reflejan la transferencia que hacen de sus experiencias obtenidas con la representación de cantidades continuas al hacer particiones. Para algunos niños el uso de bloques que se ensamblan contribuye a entender la pregunta ¿Qué parte..?, como una relación entre la parte y el todo. Se pudo constatar que para un niño en especial, fue imposible concebir que una parte (refiriéndose a una fracción unitaria), estuviera formada por más de un elemento. Cuando la representación se hace con bloques y estos son ensamblados, es capaz de ver este conjunto como una parte ("por que forma una figura"), esto se hace evidente en la actividad 9, en donde se representa con 3 canicas la fracción 1/3, él expresó que esto no era posible. Con el conjunto de canicas que en todo momento conservan su independencia le resulta difícil concebirlo como una parte.

- La actividad 3, en la que operan con unidades de diferente tamaño permite obtener partes que reciben el mismo nombre pero su porción varía debido al tamaño de la unidad, lo que favorece el establecimiento de la relación que hay entre el tamaño de la parte y el tamaño de la unidad, es decir el carácter relativo de la fracción.

- Con la actividad 9, que corresponde a un juego en el cual los alumnos muestran el uso de sus conocimientos previos, se observa que en dos de los nueve alumnos su concepción de fracción parece más sólida y pueden transferir los conocimientos de una a otra actividad con cambio en el dato que se busca y con cambio en la representación en la que se trabaja.

- Con relación a la mima actividad también se observa que se les facilita interpretar la fracción unitaria. Además todos los alumnos aciertan a las jugadas relacionadas con subgrupos que se forman con un elemento. No así con aquellas fracciones cuyos subgrupos se forman con más de un elemento. Posiblemente esto encuentre explicación si se ve una de las diferencias de los materiales con los que se trabajó. Con los manipulativos, varios bloques con la posibilidad de ser ensamblados pueden verse finalmente como un solo objeto, pero con las imágenes de las canicas, aunque se junten conservan su separación, esto puede ser la causa que dificulta a algunos de los alumnos que no pudieron formar agrupaciones de más de un elemento. Por lo que conviene investigar si con otros manipulativos se supera esta idea.

- El caso de Diego, a quien se entrevistó (*Vid Supra,* 147-148), evidencia que interpreta correctamente la expresión numérica de la fracción, utilizando el mismo juego en el que anteriormente se había equivocado. El dominio que muestra en la interpretación de fracción como una relación entre la parte y el todo, en la formación de particiones equivalentes y en la asignación de fracciones de las otras opciones en el mismo juego, hace suponer que puede ser falta de experiencia, o presión del grupo lo que impide que Diego se desempeñe con acierto en la primera oportunidad, como lo hace cuando se queda sólo en la entrevista.

- El proceso de expresión oral, de los alumnos, reporta mayores beneficios que el proceso de escritura en la computadora, pues durante la primera se aprecian correcciones y aclaraciones de sus procedimientos, Los alumnos se percatan de sus contradicciones durante la verbalización, también reformulan sus concepciones. Con la intención de proporcionar un ambiente de libertad ante la computadora, los alumnos desconocen que se lleva un registro de sus respuestas en un archivo. Sin lugar a dudas que la presión o estímulo que siente un alumno frente a compañeros y maestros es diferente de la presión que puede sentir frente a la máquina. Esta puede ser una causa por la que dan menos importancia o formalidad a esta actividad, de manera que las justificaciones que dan a sus respuestas por escrito ciertamente permiten conocer sus concepciones, pero no se encuentra algún caso en el que a través de este proceso los alumnos corrijan errores o aclaren procedimientos, como sucede en las justificaciones que dan oralmente.

- El desarrollo de las actividades mediante el programa permite conocer algunas de las interpretaciones que los alumnos hacen de enunciados, preguntas, así como la forma en que libremente responden a éstas. También se observan más expresiones de la mímica que en el trabajo en equipo.

- Se aprecia que el trabajo con el programa les toma el tiempo que consideran suficiente para dar respuesta a las preguntas que aparecen. En repetidas ocasiones se observa que los alumnos sueltan el ratón de la computadora y toman una actitud de reflexión frente a la pantalla ante el problema que les plantea el programa.

- En la actividad 9 el alumno cuenta con la posibilidad de conocer si su opción es correcta o no. Esta acción del programa significa para algunos niños una llamada de atención que les permite reconsiderar su proceder y modificarlo en algunos casos, así como la revisión de la información que toma en cuenta. Por lo anterior conviene que el programa cuente con formas de validar resultados.

- El desempeño de los alumnos en las actividades del programa se observa disminuido con relación al desempeño en las actividades en equipo. Todo parece apuntar que esta diferencia se debe fundamentalmente a que las actividades en el programa muestran el desempeño individual del alumno. En cada una de las actividades del programa se localizan las causas que provocan confusión en el alumno y se detectan elementos necesarios para que el alumno interactúe con la situación, para que pueda establecer relaciones o reformular sus concepciones, de esta manera se brinde apoyo al alumno en su desempeño individual, dado que se considera que "...un recurso didáctico se convertirá en recurso para el aprendizaje sólo cuando propicie la interacción del educando con el objeto de conocimiento" (SEP-CONAFE ,1994:87).

3. Con relación a las dificultades identificadas en el desarrollo de las actividades se puede decir lo siguiente:

- En la actividad 8 los alumnos pueden formar el entero operando con material concreto, en la que ensamblan los bloques y lo consideran como una medida y mediante un procedimiento de conmesuración buscan la parte que falta para formar dicho entero. Esto no es posible hacerlo con las imágenes inamovibles de la actividad 9. Con éstas, es preciso anticipar mediante una división, hecha mentalmente, o bien mediante una distribución por ensayo y error. Esto último implica mayor dificultad ya que es preciso tener presente los subgrupos que va formando pues no hay manera de marcarlos o separarlos. Por lo anterior es conveniente experimentar también con manipulativos que no acepten ser ensamblados para observar si esta dificultad es superada.

Con relación a la actividad 6 en el programa, se considera pertinente hacer las siguientes modificaciones:

- En virtud de que el alumno resuelve individualmente el problema, conviene partir nuevamente de una instrucción explícita de reparto. A partir del resultado de este reparto se le pide que reúna "x" fracción para terminar alguna construcción o fachada, por ejemplo. Una vez seleccionada la parte de bloques se le presenta en una siguiente escena donde el alumno puede apreciar la construcción sin terminar con la parte faltante. Si el alumno toma el número correspondiente a la fracción indicada puede concluir la construcción sin que le sobre nada. De esta manera cuenta con el recurso para validar por él mismo su respuesta para que ésta le sea significativa.

Para el siguiente problema, se propone incluir en la instrucción la fracción sin instrucción explícita de reparto. Conviene trabajar con una fracción cuyo denominador coincida con el número de bloques con el fin de conocer cómo resuelve este tipo de situaciones. Por ejemplo, la fracción 11/15 en un grupo de 15 bloques.

También conviene observar la situación en la que mediante la programación se establezca una relación entre las acciones que ejecuta el alumno y la escritura que el programa hace de la fracción. Es decir que el número de agrupaciones que el estudiante hace se vea reflejado en la escritura del denominador y el número de estas agrupaciones que tome determinen la escritura del numerador. Esta acción puede contribuir a que el alumno observe las modificaciones que los elementos constitutivos de la fracción sufren y que a la vez le ayude a integrarla y a establecer la relación como parte–todo.

- Situaciones como las que se trabajan en la actividad 3 pueden incluirse en la actividad 2 "Repartos"; con el fin de que el alumno maneje en forma reversible el proceso de reparto y se pueda conocer la interpretación que hace de la expresión numérica de la fracción. Es decir, una vez que da como resultado la parte que le toca a uno, dos o "x" número de integrantes, se puede plantear como problema: "Si a cada integrante le toca 1/7, ¿cuántas personas tiene ese equipo?".

- Se conocen mediante la propia experiencia y a través de otras fuentes, las dificultades por las que maestros y alumnos pasan en el aprendizaje y la enseñanza de fracciones. De lo visto en este estudio se deduce la necesidad de enfatizar en las propuestas de enseñanza las distintas representaciones, los distintos significados y situaciones didácticas para propiciar vinculaciones que contribuyan a la formación de un concepto sólido de fracción.

BIBLIOGRAFÍA.

- ADELL, Jordy. (1997). "Tendencias en educación en la sociedad de las tecnologías de la información" en *EDUTEC. Revista Electrónica de Tecnología Educativa No. 7*
- ALBANO, Sergio. (1999). Modelos cognitivos y tecnologías: El proceso de visualización – imagen y conocimiento- elementos para una modelización. *http://www.ciberaula.es*
- ARTIGUE, M. (1995). "Ingeniería Didáctica" en *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*, Bogotá, Ed. Iberoamárica. pp. 33 – 60.
- ÁVILA, Storner Alicia y Mancera Martinez Eduardo. (1985) *La fracción: una expresión difícil de interpretar. Mecanograma*, UPN, México.
- ÁVILA, Storner Alicia, Balbuena Corro Hugo, Bollás García Pedro y Castrejón Téllez Juan. (1994). *Libro para el alumno Matemáticas Tercer grado.* SEP México, D. F.
- ÁVILA, Storner Alicia, Balbuena Corro Hugo y Bollás García Pedro. (1994). *Libro para el alumno Matemáticas Cuarto grado.* SEP México, D. F.
- ÁVILA, Storner Alicia, Balbuena Corro Hugo, Fuenlabrada Velázquez Irma, y Waldegg Casanova Guillermina. (2000). *Libro para el alumno Matemáticas Quinto grado.* México, D. F.
- BALDOR, Aurelio. (1983). *Aritmética: Teórico Practica.* Ed. Publicaciones Cultural. México.
- BEEKMAN, George. (1995). *Computación & informática hoy".* Ed. Addison – Wesley Iberoamericana, U.S.A.
- BRUNER, Jerome S. (1998). *Desarrollo cognitivo y educación.* Ed. Morata. Madrid.
- CALDERÓN Alzati, Enrique. (1988). *Computadoras en la educación.* Ed. Trillas, México.

- COLLETTE, Jean Paul. (1985). *Historia de las matemáticas I,.* Ed. Siglo Veintiuno Editores, México.
- CUENCA, de Luis Alberto. (1984) en PLATÓN. Argumento, *Diálogos: Critón, Fedón, El banquete, Parménides.* Ed. Edaf. España.
- CHADWICK, Clifton. (1992). *Tecnología educacional*. Ed. Paidos, Buenos Aires, 1992, pp 39-45
- DÁVILA, Vega Martha. (1994). "Las fracciones un tema difícil de enseñar y difícil de aprender" *La matemática en la Educación primaria.* CONAFE, México.
- DIENES, Zoltan Paul. (1972). *Fracciones.* Ed. Varazen. México.
- FIGUERAS, Olimpia, Gonzalo López Rueda, Mochón Rueda Simón. (1992). Introducción General a la Propuesta de Matemáticas, en *Guía para el maestro. Sexto grado. Educación Primaria.* México: SEP.
- FIGUERAS, Olimpia. (1988). *Dificultades de aprendizaje en dos modelos de enseñanza de los racionales*,Tesis Doctoral, Departamento de Investigaciones Educativas, CINVESTAV, México.
- FREUDENTHALL, Hans. (1994). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas.* Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV – IPN.
- GARCÍA, Alfonsa, Martínez Alfredo y Miñano Rafael. (s/f). *Nuevas tecnologías y enseñanza de las matemáticas.* Ed. Síntesis. España.
- GIMENEZ, Rodríguez Joaquín. (1992)."Propuesta metodológica sobre la enseñanza de las fracciones en la educación básica" *Revista de Educación Matemática, Vol. 2 No.1,* Ed. Iberoamericana.
- GUIRAUD, Pierre. (1972). *La semiología.* Ed. Siglo XXI Argentina Editores S.A. Buenos aires, Argentina.
- HIEBERT, James y Behr Merlyn. (1989). *Aprehensión de temas principales.* Universidad de Delaware y Universidad del Norte de Ilinois. (Trad. Olimpia Figueras , CINVESTAV)
- HOLLOWAY, G.E.T., (1986). *Concepción de la geometría en el niño según Piaget.* Ed. Ediciones Paidos , España.
- INSTITUTO LATINOAMERICANO DE COMUNICACIÓN EDUCATIVA (1995). *Proyecto de Informática Educativa 1995 – 2000*. México.

- KIEREN, Thomas E. (1976). “On the mathematical cognitive and instructional foundations of rational numbers” en *Number and measurement papers from a research workshop.* R. Lesh.
- … (1983). *La partición, la equivalencia y la construcción de ideas relacionadas con los números racionales.* Trad. Figueras Olimpia, Sección de Matemática Educativa. CINVESTAV 1990.
- … (1988). “Personal knowledge of rational numbers. Its intuitive and formal development”. *Research Agenda Project.* NCTM, Reston, Virginia.
- LÓPEZ Rueda Gonzalo, Pérez Hernández Esnel, García Juárez Marco Antonio, Rivera Álvarez Mario, García Pascual Elizabeth, Durán Ponce Rafael. (1994). *Libro para el alumno Matemáticas Sexto grado.* México, D. F.
- LOVELL, K. (1962). *Desarrollo de los conceptos básicos científicos en los niños.* Ed. Morata.
- LLINARES, Salvador y SANCHEZ, M Victoria. (1997). *Fracciones. La relación parte–todo.* Ed. Síntesis. España.
- MANCERA, Martínez Eduardo. (1992).“ Significados y significantes relativos a las fracciones” *Revista de Educación Matemática, Vol. 4 No.2, Ed. Iberoamericana.*
- MOCHON, Simón. (1990). *Fracciones: algo más que romper un todo.* Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV – IPN. México.
- NUNEZ, Terezinha y Bryant, Peter (1997). *La matemática y su aplicación: La perspectiva del niño.* Ed. Siglo XXI.
- PAPACOSTAS Casanova, Alcibíades. (1998). “Enseñanza de matemáticas y computadoras” en *El camaleón. No. 3* CINVESTAV – IPN. México.
- PETERSON, John A. y Hashisaki, Joseph (1996). *Teoría de la aritmética*. Ed. Limusa México.
- PIAGET, Jean e Inhelder, Barbel. (1976). *Génesis de las estructuras lógicas elementales.* Ed. Guadalupe. Argentina.
- PLATÓN, (1984). *Diálogos: Critón, Fedón, El banquete, Parménides.* Ed. Edaf. España.

- REAL ACADEMIA DE LA LENGUA. (1992). *Diccionario de la lengua española.* (Vol. 2 – 2) Ed. Espasa Calpe. España.
- RESNICK, Lauren B. y Ford, Wendy W. (1990). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos.* Ed. Paidós. España.
- SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA
  a) (1993). *Plan y programas de estudio de Educación Básica Primaria 1993.* México, D. F.
  b) (1996). *Libro para el maestro Matemáticas Tercer grado.* México, D. F.
  c) (1996). *Libro para el maestro Matemáticas Cuarto grado.* México, D. F.
  d) (1996). *Libro para el maestro Matemáticas Sexto grado.* México, D. F.
  e) (1999). *Libro para el maestro Matemáticas Quinto grado.* México, D. F.
- SEP–CONAFE (1994). "Los recursos didácticos y los recursos para el aprendizaje" en *Manejo de grupos multigrado: Documento del docente.* México.
- SKEMP, R. (1993). *Psicología del aprendizaje de la matemáticas,* Ed. Morata.
- SOLARES Pineda, Diana V. (1999). *La fracción como resultado de una división: Un estudio didáctico.* Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.
- STRUIK, Dirk Jean. (1994). *Historia concisa de las matemáticas.* Instituto Politécnico Nacional, México.
- TOMBER, Marvin L. (1970). *Introducción al álgebra contemporánea.* (Trad. por Jesús del Castillo, Santiago Alonso y Francisco Paniagua). Ed. UTEHA. México.
- VERGNAUD, Gerard. (1991). *El niños, las matemáticas y la realidad. Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria.* Ed. Trillas.
- WALDEGG, Guillermina (1996). "La contribución de Simón Stevin a la construcción del concepto de número" en *Educación matemática Vol. 8 No. 2* pp. 5 – 17

ANEXO 1

TEORÍA DEL NÚMERO RACIONAL.	REQUERIMIENTOS DIDÁCTICOS.
Consideremos una magnitud *S* y dentro de *S* multiplicaciones por números naturales (diferente de 0), lo que forma un conjunto *M*, con la composición como una operación en *M*. *M* entonces es → - un semigrupo conmutativo - con identidad y una - regla de cancelación: $a \circ x = a \circ y$ $x = y$ Tales semigrupos, en general, pueden ser extendidos a grupos, lo que se prueba fácilmente.	
(1) "k veces" es una aplicación inyectiva[10] de S en sí misma.	
(2) El inverso de "K veces" se llama "K-ésima parte de"	Ver e identificar el inverso de "k veces" como "k-ésima parte de" o "1/k de"
(3) Todas la "k veces" forman un conjunto M; la " k-ésima parte de " un conjunto M^{-1}	La actividad mental de componer e invertir aplicaciones.
(4) (k veces) ∘ (m veces) = km veces.	El reconocimiento de "K veces" como una aplicación inyectiva y la identificación de ciertas aplicaciones como "k veces". La composición mental de "k veces" y "m veces" y el reconocimiento del resultado como "km veces".
(5) M es cerrado y conmutativo para la composición.	
(6) Dado un conjunto T y aplicaciones inyectivas *a, b* de T en sí mismo, entonces de $a \circ b \circ b^{-1} \circ a^{-1}$ = identidad se concluye: Si *a* y *b* conmutan entonces *a y* b^{-1} también, así como a^{-1} *y* b^{-1}, además $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$	
(7) Aplicando (6) a S en vez de a T y dos elementos de M en lugar de *a, b*, se obtiene $M \cup M^{-1}$ con la composición, ya que su operación es conmutativa.	
(8) De la última parte de (6) se deduce que (n-ésima parte de) ∘ (m-ésima parte de) = = (mn-ésima parte de)	La composición mental de "n-ésima parte de " y "m-ésima parte de " y el reconocimiento del resultado como "mn-ésima parte de",
(9) Se define	La definición y reconocimiento como una

[10] "Aplicación inyectiva" se refiere a los estiramientos y contracciones en la recta numérica.

(m/n de) = (m veces) ∘ (n-ésima parte de) que de acuerdo con (7) puede también ser escrito = (n-ésima parte) ∘ (*m* veces) Aquí *m/n* todavía no se concibe como símbolo de un número racional. Es más bien un símbolo arbitrario, expresado por medio de *m y n.*	aplicación de "*m/n* de" como compuesto de "*m* veces" y "n-ésima parte de" en orden arbitrario,
(10) La regla de multiplicación (*m/n* de) ∘ (*k/l* de) = (*mk/nl* de) se deriva de (9), (8) y (7).	La composición mental de "*m/n* de" y "*k/l* de" y la comprensión de la regla de la multiplicación,
(11) (k/k de) = (1 vez) se deriva de (8) y (2).	
(12) La regla de cancelación *mk/nk* de = *m/n* de se deriva de (10) y (11). Esto nos permite presentar números racionales como clases de fracciones.	La comprensión de las reglas de cancelación,
(13) Los (m/n de) forman un conjuntoN, que según (11), es cerrado y conmutativo.	
(14) (m/n de) es una aplicación inyectiva de S en sí mismo con (m/n de) como su inverso	
(15) N es un grupo conmutativo de aplicaciones inyectivas de S en sí mismo.	

(FREUDENTHAL: 33 – 36)