UPN unidad SEAD 161 UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Secretaría de Educación Pública

Importancia de la Lógica Matemática en el Programa de Sexto Grado de la Educación Primaria

SOFIA YOLANDA FERREIRA CASTRO 1766

Investigación documental presentada para optar por el título de

Licenciado en Educación Primaria

MORELIA, MICH., 1985

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

USE.-T-64

DICTAMEN DEL TRABAJO DE TITULACION

MORELIA, MICH., 06 de FEBRERO de 1985

C. PROFR. (A) SOFIA YOLANDA FERREYRA CASTRO.
P r e s e n t e
(nombre del egresado)

En mi calidad de Presidente de la Comisión de Exámenes Profesionales y después de haber analizado el trabajo de titulación alternativa INVESTIGACION DOCUMENTAL

titulado IMPORTANCIA DE LA LOGICA MATEMATICA EN EL PROGRAMA DE SEXTO GRADO DE LA EDUCACION PRIMARIA.

presentado por usted, le manifiesto que reúne los requisitos a que obligan los reglamentos en vigor para ser presentado ante el H. Jurado del Examen Profesional, por lo que deberá entregar diez ejemplares como parte de su expediente al solicitar el examen.

A T E N T A M E N T E

El Presidente de la Comisión
Para Exámenes Profesionales.

PROFR. Y DR. JESUS FUENTES LOPEZ

S E P
UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
UNIDAD SEAD 161
MORELIA

POR MI UNIDAD FECUNDA,

A USTEDES

¡ BENDITOS PADRES !

POR MI CRECIMIENTO CONSCIENTE

A MIS INSIGNES MAESTROS

DE TODO TIEMPO.

A TI QUE ERES LUZ DIVINA,

GUIA EN MI VIDA Y FUERZA

DE MI CORAZON, EL EJE DE

MI AMOR Y VOCACION, A TI

HIJA " ZORAYDA MORELIA ".

A MI ESPOSO

CON AMOR.

I N D I C E :

pp.

Introducción.. 5

CAPITULO I

HISTORIA DE LA LOGICA SIMBOLICA.

Lógica antigua...................................... 8

Lógica moderna...................................... 15

CAPITULO II

LA LOGICA SIMBOLICA

La lógica inductiva................................. 20

La lógica deductiva................................. 21

Tablas de verdad.................................... 26

La negación... 27

La disyunción....................................... 28

La conjunción....................................... 32

La condicional o implicación........................ 34

La bicondicional o doble implicación................ 37

CAPITULO III

IMPLICACIONES DERIVADAS, TAUTOLOGIAS Y CONTRADICCIONES.

Implicaciones derivas............................... 40

Tautologías y contradicciones....................... 43

CAPITULO IV

ALGUNAS REGLAS DE INFERENCIA Y CUANTIFICADORES.

Algunas reglas de inferencia........................ 46

pp.

Algunas formas no válidas de razonamiento que se usan........ 52

Cuantificadores.. 55

CAPITULO V

LA LOGICA MATEMATICA EN EL PROGRAMA DE SEXTO GRADO DE EDUCACION PRIMARIA.

Objetivo general... 58

Historia de la lógica simbólica.............................. 59

Lógica inductiva y lógica deductiva......................... 61

Lógica simbólica... 63

La disyunción.. 64

La condicional o implicación................................. 64

La bicondicional... 65

Implicaciones derivadas....................................... 66

Tautologías y contradicciones................................ 67

Algunas reglas de inferencia................................. 67

La regla de la cadena... 69

Cuantificadores.. 70

Conclusión... 72

Bibliografía... 73

I N T R O D U C C I O N

El presente trabajo comprende la porción más simple y pe-- queña de la Lógica, que una estudiante de la UPN realiza.

Esta investigación documental nos da a conocer las leyes generales que rigen el pensamiento de los hombres y el legado que manejamos, entre ellos: Aristóteles, George Boole, Sir ---- Williams Hamilton, Augustus De Morgan...

Nos heredaron métodos, a través de los cuales la Lógica -- moderna realiza su labor.

No se trata pues, de comprender elevadas abstracciones, -- sino de aprender una notación matemática para escribir cosas ,- que de hecho, ya estamos acostumbrados a utilizar.

La Lógica Matemática ha sido motivo de grandes cambios en los Programas de Educación Primaria, por lo cual se constatará a través de este estudio, que tan eficaz ha sido, y cuales son sus resultados.

Los objetivos que personalmente me propuse alcanzar a tra- vés de la investigación fueron :

1.- Investigar documentalmente la lógica matemática en el Programa de Sexto Grado de Educación Primaria.

2.- Comparar la lógica matemática con la enseñanza-apren__ dizaje en dicho grado escolar.

3.- Corroborar cómo el alumno es capaz de asimilar la ló-- gica simbólica.

El esquema del contenido del trabajo es el siguiente :

Capítulo 1o.- Historia de la Lógica Simbólica: todo tiene un principio; es aquí, donde se encuentran los orígenes de la - Lógica y una aproximación a ella.

Capítulo 2o.- Lógica Simbólica: se explica brevemente ---- y lo más claro posible lo que se llama Lógica Inductiva y Lógica Deductiva; para ello se usan razonamientos muy simples y --- ejemplos claros con ejercicios propuestos.

Se establece lo que es un conectivo u operador lógico. Se muestra como se simboliza una proposición y se indican los símbolos, significado, nombre y uso. También se conoce qué es una tabla de verdad y se da la regla para establecer los valores de verdad que se le pueden asignar a una proposición compuesta. Se indica un método de árbol para encontrar los valores de verdad y se anexan ejercicios propuestos.

Capítulo 3o.- Implicaciones derivadas, tautologías y con - tradicciones: usando ejemplos sencillos se muestran las aplicaciones que se pueden derivar de una implicación dada y también las tablas de verdad de dos implicaciones derivadas. Se -- establece lo que es una tautología y una contradicción y se dan las tablas de verdad correspondientes.

Capítulo 4o.- Algunas reglas de inferencia y cuantificadores: aquí se dan a conocer tres reglas de inferencia; en base a ejemplos simples se dan las normas lógicas de estas reglas y su expresión proporcional simbólica. Se establece la condición para la validez de un razonamiento y se muestran algunas -

tablas de verdad de estas reglas. Se estudian algunas formas -de razonamiento no válidas que se usan en la publicidad. Se --tratan, además, cuantificadores, su uso, su simbología y su --nombre y se indica la forma de obtener la negación de un cuantificador. Se manejan, además, tres de los métodos de prueba -más usuales y se aplican en algunas demostraciones sencillas.

Capítulo 5o.- La Lógica Matemática en el Programa de Sexto Grado: es aquí donde se especifican los temas que concier -nen a la Lógica en dicho Programa.

Conclusiones y sugerencias.

Es satisfactorio llegar al final y dar a conocer experiencias propias en calidad de mínima aportación al inmenso mundo de la ciencia.

Todo lo anterior como requisito que da la oportunidad de obtener el Título de Licenciado en Educación Básica en la ----Universidad Pedagógica Nacional.

LA SUSTENTANTE.

CAPITULO I

HISTORIA DE LA LOGICA SIMBOLICA.

La historia de la Lógica es, en gran medida, la historia de la interacción de la Lógica y la Matemática, ya que el --- avance y desarrollo importante de la Lógica parece provenir - en último término de los desarrollos de la Matemática.

El desarrollo de la Lógica ha sido más bien conservador que progresista.

La investigación en torno a la historia de la Lógica simbólica comprende dos épocas: antigua y moderna.

LOGICA ANTIGUA.

Hasta hoy se viene aceptando que Aristóteles de Estagira fue quien inició el estudio de la Lógica.

Precedieron al estudio de Aristóteles diversos trabajos, pero principalmente el que realizó Platón (428-348 a. de C.)

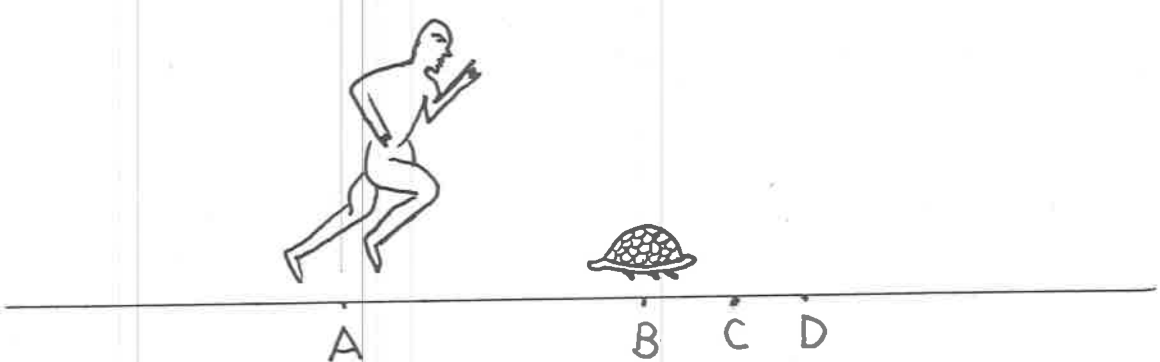
Aristóteles - en uno de sus escritos - afirma ser el --- creador de la Lógica y se basa en el hecho de haber sido el -- primero en calificar las reglas existentes en la Lógica. En -- efecto, Aristóteles calificó la Teoría del Silogismo.

Una motivación importante para el estudio de la Lógica -- vino probablemente del deseo de eliminar paradojas, como por - ejemplo, la que concierne al veloz corredor Aquiles y la -----

tortuga.

" Si Aquiles parte del punto A, a una distancia dada de - una tortuga que está en el punto B y ambos recorren un camino a sus velocidades máximas, cuando Aquiles llegue al punto B -- la tortuga se habrá movido al punto C. Entonces cuando Aquiles llegue al punto C, la tortuga se habrá movido al punto B. En - cada caso se reduce la ventaja de la tortuga, pero el argumento se puede continuar infinitamente sobre distancias más y más pequeñas, de modo que Aquiles jamás llegue a alcanzar a la --- tortuga... ¡ Conclusión falsa ! ... (1).

Lógicamente es increible que el veloz Aquiles no alcance a la tortuga por más que se adelante ésta; pero de acuerdo a -



1.- MC GRAW- HILL. Lógica II Prueba. Colombia, 1974. p. 5.

una propiedad de los números racionales (Q) llamada " densidad ", si la distancia recorrida por la tortuga se divide infinitamente, Aquiles jamás alcanzará a la tortuga.

La teoría del silogismo de Aristóteles proporcioné una -- base que duró veinte siglos con solo pocas modificaciones. La base de la teoría es la hipótesis de que todo argumento correcto puede analizarse en proposiciones de una forma particular que llamaremos proposición sujeto-predicado, ejemplo:

Todos los hombres son mortales.

Ningún pez es pájaro.

Algunas mujeres no son madres.

Algún alumno es inteligente.

En cada caso hay un sujeto cuantificador ligado a un --- predicado y se denota por S y P; estos cuantificadores se llaman :

Universal afirmativo : Todo S es P.

Universal negativo : Ningún S es P.

Particular afirmativo : Algún S es P.

Particular negativo : Algún S no es P.

Un argumento para Aristóteles era una colección de proposiciones relacionadas conocidas como SILOGISMO; en un silogismo dos de las proposiciones forman las premisas y la tercera, la conclusión, ejemplo:

" Si todos los hombres son mortales,
y todos los griegos son hombres,
entonces todos los griegos son mortales ". (2)

Otro ejemplo sería :

Si todos los niños son inquietos,
y todos mis alumnos son niños,
entonces todos mis alumnos son inquietos.

Usando S y P para el sujeto y el predicado de la con --- clusión " TODOS LOS GRIEGOS SON MORTALES " se observa que la -- primera premisa incluye P y la segunda S. La premisa que in --- cluye a P se llama premisa mayor y la que incluye a S, premisa menor. El término " hombres " aparece en cada premisa, pero -- no en la conclusión y se llamó término medio que denotaremos -- por M. El argumento es pues, tanto para el primero como para -- el segundo, ejemplo:

Si todo M es P
y todo S es M,
entonces S es P.

El principal logro de Aristóteles fue su investigación --

2.- MC GRAW-HILL. Ob. cit. p. 11.

de todas las formas posibles de silogismo. Se sabe, sin em ---- bargo, que existió una Lógica Antigua, la de los estóicos, ---- fundada por Zenón (495-435 a. de C.) que puede considerarse - precursora de la Lógica de hoy. La Lógica estóica surgió de --- la Lógica de la escuela de Megara fundada por Euclides -------- (430-360 a. de C.).

Después del período antiguo transcurrieron muchos siglos - durante los cuales el desarrollo de la Lógica estuvo estanca -- do. Hay, sin embargo, unos pocos nombres que merecen mención -- en el período que sirve de puente entre la Lógica antigua y --- moderna.

Este período se conoce como el período escolástico, que -- comienza con el trabajo de Peter Abelard. (1079-1142).

Raymundo Lulio (1235-1315), místico catalán nacido ---- en Mallorca hizo el primer intento enusar figuras geométricas - con el propósito de descubrir verdades lógicas.

En su obra usa con frecuencia la idea de círculos concén-- tricos rotatorios. El creía que se podrían descubrir todas las combinaciones necesarias de términos a partir de los cuales se podían construir argumentos.

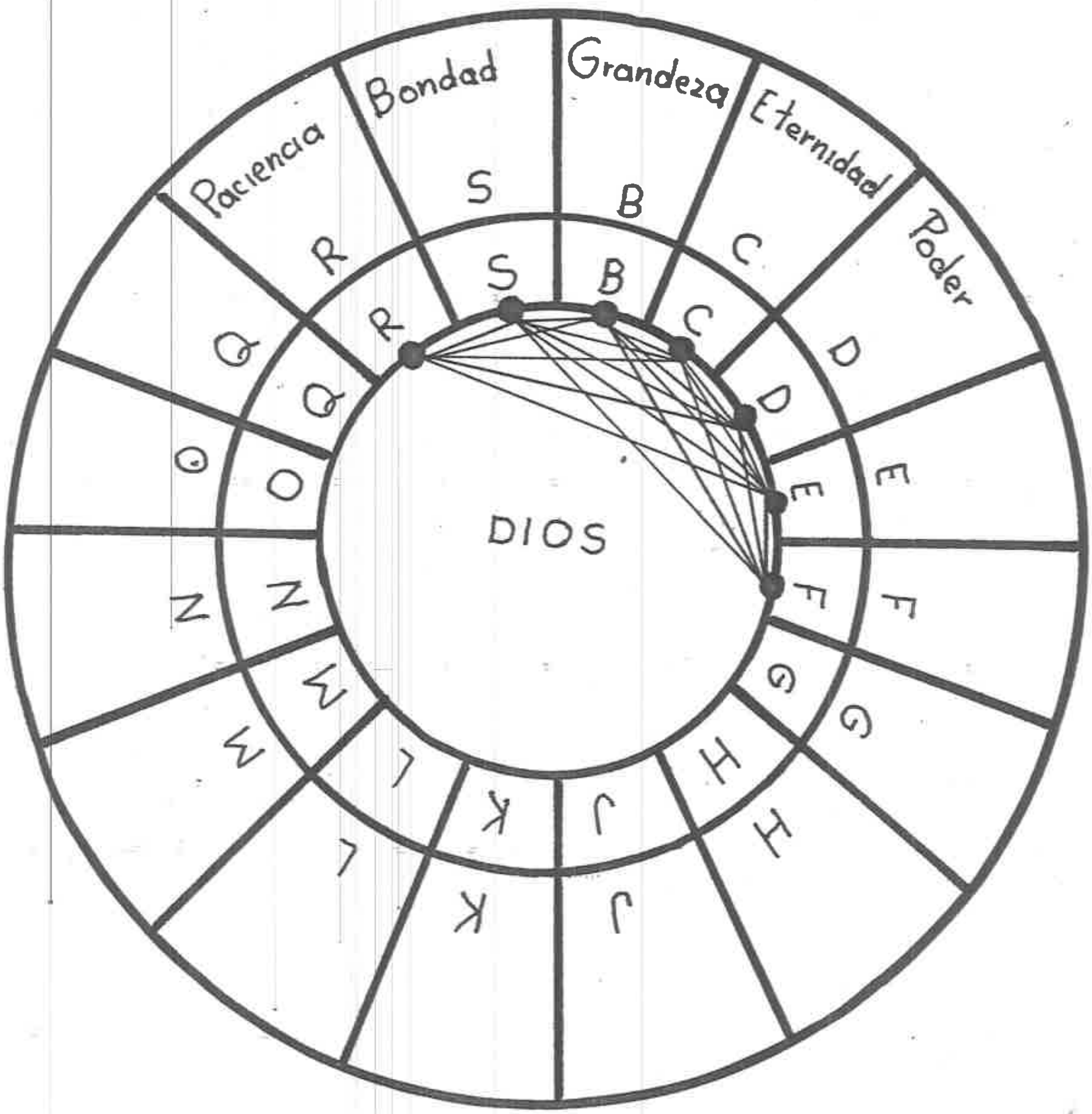
Ejemplo: " Combinaciones de los conceptos : bondad, ----- grandeza, eternidad, poder y paciencia. En el centro de los -- círculos concéntricos aparece el objetivo principal cuyos --- atributos se están investigando, DIOS, el alma, la virtud, --- etc. Dios aparece en el centro como objeto de discusión. Hay - dos círculos rotatorios centrados en Dios y contienen dieci --

seis compartimientos rotulados con letras que representan ----- propiedades diversas, por ejemplo R para paciencia, D para --- bondad, etc. Rotando los círculos o trazando líneas conectoras llegamos a ciento veinte combinaciones diferentes de dos letras que se supone nos dejan algo adicional sobre Dios. Así la combinación C y S nos dice que su bondad es eterna y la combinación B y D " que su grandeza es poderosa ". (3).

Un contemporáneo de Lulio fue el filósofo y científico --- inglés George Bacon (1214-1292) quien se asoció a las es ---- cuelas de Oxford y París, donde discutió extensamente sobre --- Aristóteles.

Fue uno de los pensadores más originales del período es -- colástico de la Lógica; fue condenado por un tiempo y puesto -- en prisión por autoridades eclesiásticas. Sus contribuciones - al pensamiento no fueron únicamente matemáticas; produjo su --- " Opus Maius ", un compendio de todas las ramas del conocimiento y predijo las propiedades de magnificación de los lentes --- convexos, la posibilidad de embarcaciones propulsadas mecánicamente y de máquinas voladoras, así como el uso extenso de la -- pólvora.

3.- MC GRAW-HILL. Ob. cit. p. 12.


Paciencia
Bondad
Grandeza
Eternidad
Poder
B
C
D
E
F
G
H
J
K
L
M
N
O
Q
R
S
DIOS

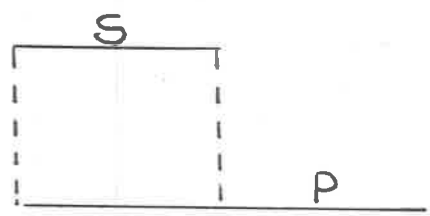
LOGICA MODERNA.

Se considera que " la Lógica Moderna comienza con la obra de George Boole (1815-1864) ". (4).

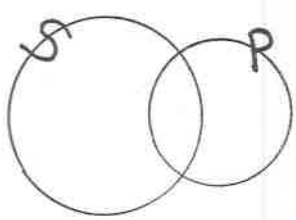
Sus estudios fueron sobre el álgebra de la lógica, pero -- hubo algo más de un siglo antes con el filósofo y matemático -- Gottfired Leibniz (1646- 1716); este notable hombre fue el -- primero en proponer un lenguaje simbólico universal y además se adelantó a Boole en los intentos de simbolizar argumentos lógicos en términos algebráicos. También fue el primero en usar lo que conocemos como diagramas de Venn Euler (200 años antes de Venn). Consideró tanto los diagramas circulares y lineales---- (para conuntos).

Forma lineal

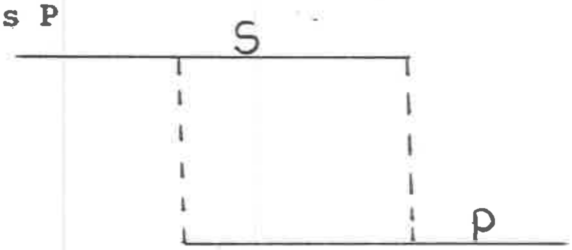
Todo S es P



Forma circular



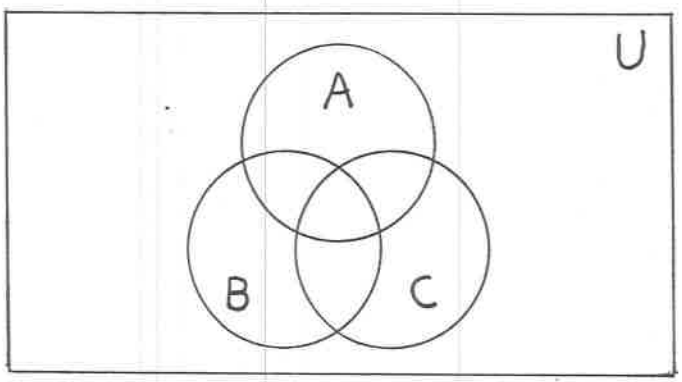
Algún S es P



4.- COPI, M. Irving. Introducción a la Lógica. 1980, p. 7.

Los diagramas circulares llegaron a ser verdaderamente --- populares en tiempos del matemático suizo Leonard Euler ------ (1707-1783) y John Venn quien recolectó los diferentes dia -- gramas de uso general y quien en el beneficio de la obra de --- Boole introdujo los tres círculos dibujados de modo que tras -- laparon de todas las maneras posibles, dividiendo así el plano en ocho regiones.

El último que contribuyó a esta historia fue Charles Dog-- son (1832 - 1898), (Lewis Carrol el de " Alicia en el país de las Maravillas "), quien encerró los círculos de Venn en -- un cuadrilátero que representa el universo del discurso, dan -- do así al diagrama de Venn la forma que hoy usamos.



Gottlof Frege (1848 - 1925), fue el verdadero fundador - de lo que hoy conocemos como Lógica Matemática; a él se debe - en gran parte el uso adecuado de cuantificadores y el análi --- sis lógico del importante método de prueba por inducción ma --- temática.

El objetivo principal de Frege fue tratar de fundamen ---- tar toda la aritmética sobre la sola lógica. Fue el caso de ---

muchos científicos que enfocaron formalmente su insostenible -- programa de deducir toda la matemática enteramente de la ló --- gica.

En la segunda mitad del siglo XIX se había mostrado que -- la mayor parte de la matemática entonces conocida, se podía --- reducir a un sistema construído a partir de la aritmética ---- de los números positivos. Con esto, sirvió solamente para ---- darse cuenta del vacío sobre el cual gran parte de ella había - sido construída. Al desarrollar sistemas más complicados par - tiendo de la aritmética. Se necesita una teoría de conjuntos -- y no sólo de enteros, sino también una teoría que incluya el -- concepto de conjunto de conjuntos, conjunto de conjuntos de --- conjuntos y así sucesivamente.

El creador de esta teoría fue George Cantor (1845 - 1918) la definición de Cantor de conjunto como " cualquier colección en un todo de objetos definidos y separados ", no dio lugar a - dificultades siempre que se tratara solamente de un número fi-- nito de cosas. Los problemas surgen cuando se trata de conjun-- tos infinitos y, en particular, el conjunto de todos los conjun tos.

Alfred North Whitehead y Rusell (1861 - 1947) trataron - de salir de esta encrucijada, intentando deducir la matemática de la Lógica, poniendo de manifiesto un problema matemático --- muy importante del siglo XX.

Un enfoque completamente diferente fue el del matemático - holandés L. E. J. Brower (1881 - 1968). Brower encabezó lo -- que se ha conocido con el nombre de escuela intuicionista de --

los matemáticos. Este nombre parece hacer un llamado a la intuición, pero en realidad, las pruebas de los intuicionistas son tan rigurosas como las de los otros matemáticos; con frecuencia requieren de mayor precisión lógica.

La mayor parte de los matemáticos estarían de acuerdo en que cualquier cosa probada en el sistema intuicionista es válida, pero generalmente se cree que los intuicionistas son demasiado cautelosos y que su rechazo de tanta matemática aceptable desde otro punto de vista, es un serio retroceso.

" En 1930, Kurt Gödel anunció sus resultados concernientes a proposiciones dudosas en un sistema formal. Gödel demostró que en cualquier sistema suficientemente rico para expresar la aritmética elemental, o hay proposiciones de las cuales se comprueba que son falsas o hay proposiciones no demostrables que son verdaderas, donde falso y verdadero tienen una interpretación dada de acuerdo con el sistema correspondiente.

Esta proposición no es demostrable.

Llamaremos S a esta proposición.

Si S es verdadera, entonces S no es demostrable.

Si S no es verdadera, entonces S no es demostrable.

Si S es demostrable, entonces S no es verdadera ". (5).

En t_odos los sistemas suficientemente ricos para conte n er a S, por lo menos se incluye a un enunciado verdadero ----

5.- Mc GRAW-HILL, Ob. cit. p. 24.

si y solamente si no es demostrable. Al final este enfoque formalista es tan insostenible como el programa de deducir toda -- la matemática de la lógica.

A través del tiempo se han resuelto muchos problemas, pero han traído otros que han atacado otras lógicas y matemáticas; ahora, ¿ dónde nos encontramos ?, puesto que parece haber paradojas aún no resueltas en los fundamentos de las matemáticas.

Si queremos certeza absoluta entonces tenemos que contentarnos con un sistema muy trivial. Sin embargo, si queremos --- disfrutar de la riqueza de las aventuras en el razonamiento --- que permiten conceptos de números, lógica y teorías de conjuntos, entonces tenemos que aceptar algún elemento de inseguridad y la posibilidad de encarar una paradoja que solo más tarde en un campo más inseguro, podemos resolver.

CAPITULO II

LA LOGICA SIMBOLICA.

Antes de iniciar el estudio específico de la Lógica Simbólica, por considerarlo muy importante también, me referiré a la teoría general del razonamiento exacto.

" Dicha teoría consta de dos partes : Lógica inductiva y Lógica deductiva ". (6).

La Lógica inductiva resulta importante en el estudio de las matemáticas puesto que proporciona una idea inteligente acerca de lo que puede ser una generalización; sin embargo, no debemos de dejarnos engañar llegando a creer que algo es siempre cierto tan solo porque se haya observado que resulta verdadero en un número determinado de casos, por ejemplo, yo observo que José compra un aparato eléctrico en la tienda del ISSSTE y sale defectuoso; luego, Pedro y Juan compraron otros y también salieron defectuosos; de lo anterior, puedo concluir que todos los aparatos eléctricos que vende esa tienda salen defectuosos.

Este tipo de razonamiento se basa en un número limitado de ejemplos y siempre nos lleva a la conclusión de que " ALGO ES CIERTO y se denomina LOGICA INDUCTIVA, la cual se caracteriza porque su razonamiento, a partir de observaciones específi--

6.- MITCHELL, D. Introducción a la Lógica. 1977, p. 13.

cas, conduce a conclusiones generales ". (7).

También podemos usar otro tipo de razonamiento : EL DEDUCTIVO.

Gracias a los antiguos griegos podemos utilizar este razonamiento que se conoce como LOGICA DEDUCTIVA.

La Lógica deductiva es el proceso de llegar a una conclusión válida o no válida.

Decimos que la Lógica deductiva es el proceso de llegar a una conclusión válida a partir de suposiciones o premisas que se aceptan como parte del análisis.

Un razonamiento es válido, cuando a partir de premisas ciertas se obtiene una conclusión cierta; de otro modo, diremos que el razonamiento no es válido.

Veamos la siguiente situación que nos ilustra el método de la Lógica deductiva.

a).- Todos los hombres son mortales.

b).- Aristóteles es hombre.

c).- Aristóteles es mortal.

En el ejemplo anterior, a los dos primeros enunciados les llamamos premisas y al tercero, conclusión.

Algunos problemas en que se puede aplicar la Lógica inductiva :

1.- Cite tres elementos siguientes que crea satisfacen en el patrón :

7.- MITCHELL, D. ob. cit. p. 15.

a).- 2, 3, 5, 7, 11, , , ,

b).- 1, - 1, 2, - 2, , , ,

c).- x, x, x, x, , , , , ,

2.- Resuelva el siguiente ejercicio aplicando la Lógica --ind_uctiva :

a).- (1) y=4+1 es una ecuación de una línea recta con una pendiente de 4.

(2) $y=2/8_x+5$ es una ecuación de una línea recta con una pendiente de -- 2/8.

(3) y=9/3x+2 es una ecuación de una línea recta con una pendiente de...

b).- (1) 3+4=4+3

(2) 8+5=5+8

(3) a+b= ___________

3.- Resuelva los siguientes problemas empleando la Lógica deductiva :

--- Distinga las premisas y la conclusión.

--- Determine si la conclusión es o no válida.

a).- Todos los alumnos de la Normal Superior se titu ---- lan en alguna Licenciatura.

b).- Lola es una alumna de la Normal Superior.

c).- Por tanto, Lola se titula en alguna Licenciatura.

a).- Todos los Z son A.

b).- Algunos A son C.

c).- Por tanto, algunos Z son C.

a).- A todos los habitantes de Flórida les gustan las ---
naranjas.

b).- Williams no vive en Florida.

c).- Por tanto, a Williams no le gustan las naranjas.

Una vez que se han expuesto las ideas más importantes -- acerca de la Lógica inductiva y la Lógica deductiva, procederé en seguida a tratar lo relacionado con la LOGICA SIMBOLICA.

Se intentará desarrollar una Lógica simbólica de naturaleza deductiva.

Una proposición es un enunciado declarativo que puede te - n_er dos valores de verdad: falso o verdadero; pero no puede -- ser ambas cosas a la vez.

Designaremos a las proposiciones por medio de letras: p, q, r.

p : " Yo estudio en la Universidad ".

q : " Curso filosofía ".

Hay símbolos que nos permiten relacionar las proposicio -- nes dadas, de tal manera que se forman nuevas proposiciones.

Estos símbolos reciben el nombre de conectivos u operado-- res lógicos.

Estos símbolos representan a las palabras " no "," y " , " o ", " si... entonces ... " y " si y solo si " .

TABLA 3. 1.

SIMBOLO	SIGNIFICADO	NOMBRE	LECTURA
$\wedge$	y	conjunción $p \wedge q$	p y q
$\vee$	o	disyunción $p \vee q$	p o q
$\longrightarrow$	si...entonces	$p \rightarrow q$ condicional o implicación.	p implica q si p entonces q.
$\longleftrightarrow$	si y sólo si	$p \leftrightarrow q$ bicondicional a doble implicación	p es equivalente de q, p si y sólo si q.
$\sim$	no	negación $\sim p$	no p

Antes de usar los conectivos clasificaremos las proposiciones en dos tipos: simples y compuestas.

Algunos autores, a las proposiciones simples les llaman -- ATOMICAS y a las compuestas les llaman MOLECULARES.

" Las proposiciones simples o atómicas son aquellas que en su enunciado no contienen conectivos ". (8), por ejemplo :

" Hoy es sábado "

" Afuera está soleado ".

" Las proposiciones compuestas o moleculares son aquellas

8.- GARCIA HERRERA, Jesús. Elementos de Lógica Matemática.1979, p. 33.

que están formadas por dos o más proposiciones simples unidas -- por un conectivo " (9), por ejemplo :

$p \wedge q$ " Hoy es sábado y afuera está soleado ".

$p \vee q$ " Hoy es sábado ó afuera está soleado ".

$p \rightarrow q$ " Si hoy es sábado entonces afuera está soleado"

$p \leftrightarrow q$ " Hoy es sábado si y sólo si afuera está soleado"

$\sim p$ " Hoy no es sábado ".

Si en la primera proposición llamamos p a la proposición simple " Hoy es sábado " y q a la proposición " Afuera está --- soleado " la podemos simbolizar : $p \wedge q$ y se lee p y q.

En la segunda proposición se utilizó el conectivo $\vee$ deno -- minado disyunción, por loq que la podemos simbolizar $p \vee q$ que se lee p ó q.

En la siguiente proposición se usó el conectivo ($\longrightarrow$) implicación o condicional; luego, la proposición traducida en símbolos, será $p \longrightarrow q$ que se lee: si p entonces q.

La penúltima proposición está simbolizada como $p \longleftrightarrow q$ que contienen el conectivo ($\longleftrightarrow$) : si y sólo si y para fi-- nalizar se forma la negación ($\sim$) de la proposición p, la que se simboliza como $\sim p$.

Con lo anterior vemos que muchas de las proposiciones que nos den las podemos simbolizar identificando el conectivo, la proposición p y la proposición q, etc.

9.- GARCIA HERRERA, Jesús. Ob. cit. p. 34.

PROBLEMAS 3.1.

1.- Dadas las proposiciones siguientes, traduce las propo-- siciones simbolizadas :

p: Morelia es colonial.

q: Llueve por la tarde.

a).- $p \wedge q$

b).- $p \vee q$

c).- $\sim p$

d).- $q \longrightarrow p$

e).- $p \longleftrightarrow q$

f).- $q \longleftrightarrow p$

2.- Escribe lo que sigue, utilizando la forma simbólica :

a).- Hoy es domingo o lunes.

b).- Si hoy sale el sol, los pescadores trabajan.

c).- Aceptaré el empleo si y sólo si el salario es bueno.

d).- A Juan le pusieron peluca y a Beto bigotes.

e).- La condición necesaria para aprobar este examen es estu-- diar mucho.

f).- Hoy no es viernes.

TABLAS DE VERDAD.

Conociendo las proposiciones del tipo p   q, p   q, ---- p   q, p   q y   p, etc., estudiaremos qué valores de verdad les corresponde a cada una de estas proposiciones construyendo las TABLAS DE VERDAD.

Así, LA TABLA DE VERDAD para una proposición p cualquiera es :

TABLA 3.2.

P
V
F

Deduciendo de la tabla anterior que p sólo puede ser verdadera o falsa pero no ambas cosas.

LA NEGACION. " No. ". (   ) al anteponer este conectivo a una proposición, la transforma en una compuesta; al aplicarla a una proposición verdadera cambia su valor de verdad y se hace falsa y si la proposición es falsa, el conectivo la hace verdadera; lo cual nos indica que invierte sus valores.

TABLA 3.3.

P	$\sim$ P	$\sim(\sim$ p $)$
V	F	V
F	V	F

Tabla de verdad del conectivo : .

En la tercera columna tenemos la negación de una negación $\sim(\sim)$ de una proposición que es la afirmación de la misma proposición.

Por ejemplo : No es cierto que hoy no me examino es lo mismo que decir : " Hoy me examino ".

PROBLEMAS 3.2.

1.- Niegue las proposiciones siguientes :

a).- Los alumnos son flojos.

b).- Ayer estuvo nevando.

c).- Reprobé el examen de matemáticas.

d).- $20 = 0$.

e).- En el colegio se educa.

f).- El helado es de fresa.

g).- $-5 + 10 = 10 + 5$.

h).- Morelos es inmortal.

DISYUNCION : " Esta proposición llamada disyunción se forma mediante la palabra " o " ; entre dos proposiciones dadas nos da la idea de elegir entre dos cosas. Hay dos clases de disyun-- ción: inclusiva y exclusiva ". (10).

La disyunción inclusiva es la que se usa más frecuentemente en la lógica simbólica.

Son dos proposiciones con su conectivo " o " ($\vee$) que se lee p ó q.

Para construir la tabla de verdad de p q usaremos la siguiente regla :

El número de valores de verdad se obtiene por la regla de 2^n donde n es el número de proposiciones simples que inter -- vienes en la proposición.

Por ejemplo, en la proposición $p \vee q$ hay dos proposi-- ciones simples, luego el número de valores de verdad que se le asigne será $2^2 = 4$; en estos cuatro valores de verdad habrá -- dos verdaderos y dos falsos.

TABLA 3.4.

p	q	p q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabla de verdad $p \vee q$

10.- MATES, Benson. <u>Lógica matemática elemental</u>. 1974, p. 62.

Otro camino para encontrar estos valores de verdad es el siguiente: encontrando todas las combinaciones posibles de los valores de verdad de la proposición p con los diversos valo-- res de q . Así obtenemos $p \vee q$.

p —— V
V —— $P \vee q$
q —— V

p —— V
V —— $P \vee q$
q —— F

N_uevamente hacemos lo mismo pero p será falsa y q -- con sus dos diferentes valores de verdad.

p —— F
V —— $p \vee q$
q —— V

p —— F
F —— $p \vee q$
q —— F

Así, p q tendría los valores : V, V, V y F que son los mismos que los de la tabla de verdad.

Podemos decir que una disyunción es verdadera siempre que - al menos una de las proposiciones sea verdadera.

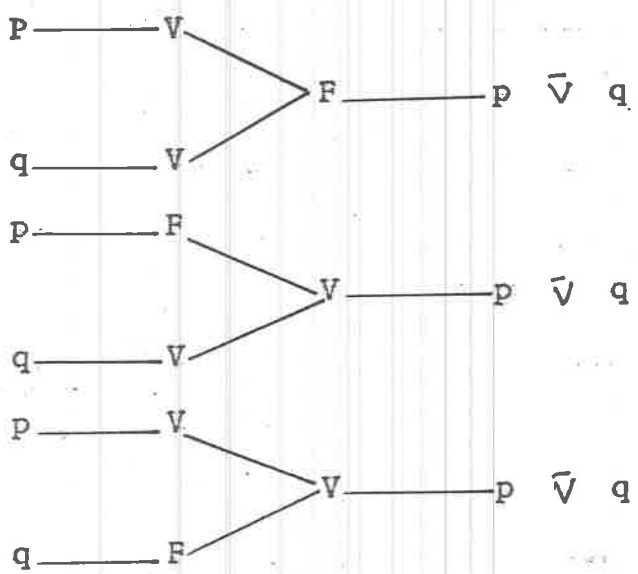
La disyunción exclusiva que es también importante, pero --- no tiene mucho uso, solo nos permite escoger entre dos cosas, -- la primera o la segunda.

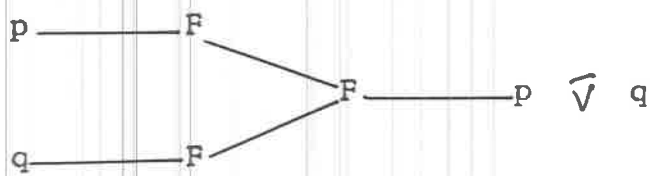
La disyunción exclusiva es una <u>o</u> fuerte, mientras que la -- disyunción inclusiva es una <u>o</u> débil. La disyunción exclusiva se denota por el símbolo y su tabla de verdad es la siguiente:

TABLA 3.5.

p	q	$p \bar{\vee} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabla de verdad $p \bar{\vee} q$





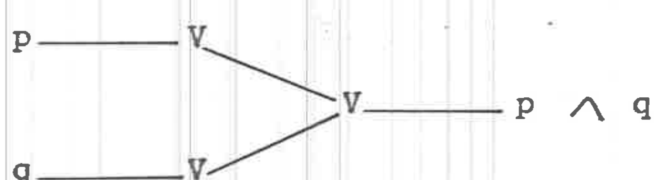
En las dos diferentes formas $p \bar{\vee} q$ tiene los valores de verdad: F, V. V y F, lo que nos indica que la disyunción exclusiva es verdadera cuando exactamente una de las dos proposiciones es verdadera o cierta.

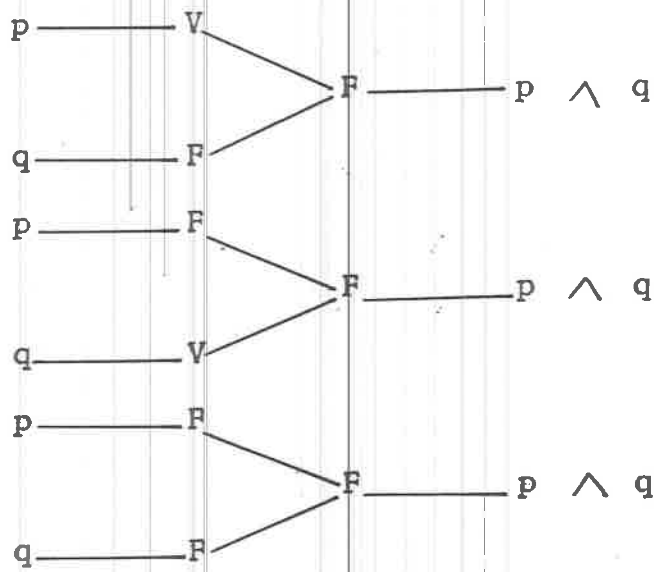
PROBLEMAS 3.3

1.- Construir las tablas de verdad de las siguientes proposiciones :

a).- $p \vee \sim p$
b).- $p \bar{\vee} \sim (\sim p)$
c).- $\sim p \vee \sim q$
d).- $\sim (p \vee q)$

CONJUNCION : Esta proposición, a diferencia de la anterior, nos dice que $p \wedge q$ es cierta cuando tanto p como q son verdaderas y también se puede encontrar esta tabla de verdad por medio de las posibles combinaciones que los dos valores de verdad de q.





Aquí observamos que los valores de verdad para $p \wedge q$ son V, F, F y F lo cual lo verificamos en la siguiente tabla :

TABLA 3.6

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabla de verdad de $p \wedge q$.

La tabla de verdad anterior es de la proposición $p \wedge q$ que demuestra los valores de verdad : V, F, F y F.

PROBLEMAS 3.4

1.- Construya una tabla de verdad para cada una de las --- conjunciones :

a).- $6 = 2 + 4$ y $8 \quad 5$

b).- $p \wedge \sim p$

c).- $\sim (p \wedge q)$

2.- Simbolice las siguientes expresiones :

a).- Juan come y María estudia.

b).- Voy de compras ó a misa y juego futbol.

c).- Ocho es diferente de cinco y cuatro es menos que nueve.

LA CONDICIONAL O IMPLICACION : Se expresa mediante $p \longrightarrow q$ y se lee de las siguientes maneras :

Si p, entonces q

p, sólo si q

p implica q

p representa a la hipótesis o antecedente y q a la conclu-- sión o consecuente.

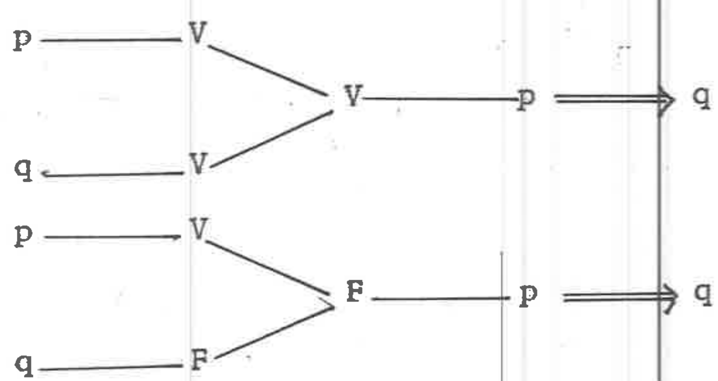
En la siguiente tabla el conectivo condicional hace que --- una proposición sea falsa sólo si el antecedente es cierto y el consecuente falso; en todos los demás casos, la proposición se-- rá verdadera.

TABLA 3.7

p	q		$p \Longrightarrow q$
V	V		V
V	F		F
F	V		V
F	F		V

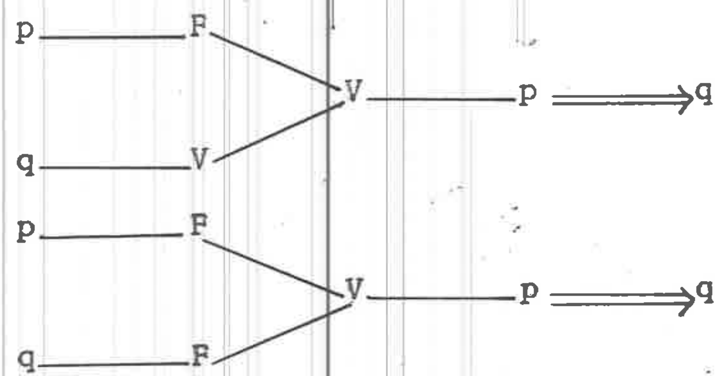
De lo anterior observamos que si el antecedente p es cierto y el consecuente q es falso, entonces la condicional ----- $p \Longrightarrow q$ es falsa. Lo que asegura que de algo verdadero no podemos inferir algo falso, salvo que se cometa un error en el razonamiento.

También podemos concluir lo mismo haciéndolo en la siguiente forma :



Por otro lado, si p es falsa y q puede ser verdadera o ---

falsa, se obtienen los valores :



De todo lo anterior se concluye que los valores de verdad - para la proposición $p \Longrightarrow q$ son : V,F, V y V.

PROBLEMAS 3.5

1.- Encuentre las tablas de verdad de las siguientes proposiciones :

a).- $\sim p \Longrightarrow \sim q$

b).- $(p \wedge q) \Longrightarrow r$

c).- $p \Longrightarrow (q \wedge p)$

2.- Dé tres ejemplos donde se de la condicional y tradúzcalos a sus respectivos símbolos.

BICONDICIONAL O DOBLE IMPLICACION : Es de gran importancia para las matemáticas este conectivo, ya que muchos de los teoremas tienen la forma " sí y sólo si ", como por ejemplo : -----

AB = AC sí y sólo si B= C ó usando el símbolo de la bicondicional : $AB = AC \Longleftrightarrow B = C$ que se puede descomponer en dos im-- plicaciones y se usa por medio de la conjunción.

$$1.- \ (AB=AC \Longleftrightarrow B=C) \equiv (AB=AC \Longleftrightarrow B=C) \wedge (B=C \Longleftrightarrow AB=AC)$$

Ahora sustituiremos las proposiciones anteriores ; llamaremos p a la proposición simple " AB=AC " y q a la proposición --- " B=C " y así la equivalente (1. 0) quedará en :

$$p \Longrightarrow q \equiv (p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p)$$

Ahora usaremos la tabla de verdad de la implicación ----- ($\Longrightarrow$) y la conjunción ($\wedge$) para poder obtener la tabla de verdad de la bicondicional.

TABLA 3.8

p	q	$p \Longrightarrow q$	$q \Longrightarrow p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	V

Tabla de verdad de $p \Longrightarrow q$ y $q \Longrightarrow p$.

Como ya conocemos las columnas de valores de verdad de --- $p \Longrightarrow q$ y $q \Longrightarrow p$ por medio de la conjunción ($\wedge$), obtendremos la tabla de verdad de la proposición $(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p)$ que es equivalente a $p \Longleftrightarrow q$.

TABLA 3.9.

$p \Longrightarrow q$	$q \Longrightarrow p$	$(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p)$
V	V	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Por lo tanto la tabla de verdad de $p \Longleftrightarrow q$ es la si --- guien_te:

TABLA 3.10.

p	q	$p \Longleftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Tabla de verdad de la bicondicional o doble implicación ($\Longleftrightarrow$)

Como conclusión podemos decir que si alguna proposición -- es falsa, la bicondicional será falsa, y será verdadera siem -- pre y cuando las proposiciones sean falsas o ambas sean verda-- deras.

PROBLEMAS 3.6.

1.- Encuentre las tablas de verdad de las proposiciones -- guientes y encuentre si hay dos equivalentes :

a).- $p \Longleftrightarrow \sim q$

b).- $(p \wedge q) \Longleftrightarrow (q \wedge p)$

c).- $(p \wedge q) \Longleftrightarrow r$

d).- $p \Longleftrightarrow \sim (\sim q)$

CAPITULO III

IMPLICACIONES DERIVADAS, TAUTOLOGIAS Y CONTRADICCIONES.

IMPLICACIONES DERIVADAS : " En matemáticas con frecuencia - es necesario considerar las implicaciones relacionadas con una - implicación dada, $P \Longrightarrow Q$. Las más importantes son: LA CONVERSA, LA INVERSA y LA CONTRAPOSITIVA ". (11).

Proposición dada :	$P \Longrightarrow Q$:	Si un avión puede volar, -- entonces tiene gasolina en - el depósito.
LA CONVERSA	$Q \Longrightarrow P$:	Si un avión tiene gasolina en el depósito entonces --- puede volar.
LA INVERSA	$\sim P \Longrightarrow \sim Q$:	Si un avión no puede volar, entonces no tiene gasolina en el depósito.
LA CONTRAPOSITIVA	$\sim Q \Longrightarrow \sim P$:	Si un avión no tiene gaso-- lina en el depósito, entonces no puede volar.

Ahora bien, ¿ las declaraciones CONVERSA, INVERSA y CON--- TRAPOSITIVA serán siempre ciertas, a condición de que la implicación sea verdadera ?

11.- SOMINSKI, I.S. <u>Método de introducción a las matemáticas.</u> p. 68.

El resultado lo veremos en la tabla de verdad de cada im---plicación.

P	Q	$P \Longrightarrow Q$	$Q \Longrightarrow P$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	V

Tabla de verdad de la CONVERSA ($Q \Longrightarrow P$) de una implicación.

Otro ejemplo: la conversa de la proposición :

" Si el cielo es azul, entonces el avión vuela ".

Es la proposición : " Si el avión vuela, entonces el cielo es azul ".

A una proposición de la forma $\sim Q \Longrightarrow \sim P$ se le llama -- la INVERSA de la implicación $P \Longrightarrow Q$.

Para obtener la inversa de una implicación hay que negar -- el antecedente y el consecuente de la implicación dada, por ---- ejemplo :

" Si estudio mucho, entonces aprobaré el curso ".

Su inversa es la proposición :

" Si no estudio mucho, entonces no aprobaré el curso ".

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$\sim P \Longrightarrow \sim Q$
V	V	F	F	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Tabla de verdad para la INVERSA de una implicación.

Observemos nuevamente que la inversa de una implicación --- dada no necesariamente es verdadera.

Una proposición de la forma $\sim Q \Longrightarrow \sim P$ se llama la CONTRAPOSITIVA de la implicación $P \Longrightarrow Q$.

Por ejemplo, dada la proposición :

" Si aprendo física, entonces conozco el universo ".

La contrapositiva sería :

" Si no conozco el universo, entonces no aprendo física ".

En la siguiente tabla de verdad se observará que las anotaciones en la columna $\sim Q \Longrightarrow \sim P$ y la tabla de verdad de la - proposición $P \Longrightarrow Q$ son las mismas, lo cual significa que una implicación y su contrapositiva son enunciados equivalentes y -- una puede reemplazar a la otra en un análisis.

La siguiente tabla de verdad muestra los valores de ver--- dad de la proposición CONTRAPOSITIVA.

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$\sim Q \Longrightarrow \sim P$
V	V	F	F	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

PROBLEMAS 4.1.

Un buen ejercicio para el alumno sería encontrar la con -- versa, la inversa y la contrapositiva de las proposiciones si-- guientes y traducirlas a sus símbolos :

a).- Si un cuadrilátero es un paralelogramo, sus lados -- opuestos serán congruentes.

b).- Si se funde es nieve.

c).- Si un triángulo es escaleno, entonces no es equilá -- tero.

TAUTOLOGIAS Y CONTRADICCIONES.

" Una tautología es una proposición que siempre es verdae- ra, independientemente del valor de verdad de sus componentes". (12).

12.- SOMINSKI, I. S. Ob. cit., p. 76.

Ejemplo: " Una proposición del tipo $P \vee \sim P$ es una tau-- tología y para comprobarlo veamos su tabla de verdad que es la siguiente :

P	$\sim P$	$P \vee \sim P$
V	F	V
F	V	V

Tabla de verdad de una TAUTOLOGIA.

La proposición $P \vee \sim P$ es siempre verdadera sin im -- portar qué valores de verdad tengan sus componentes P y $\sim P$ y, por tanto, es una tautología.

Una contradicción es una proposición de la forma $P \wedge \sim P$, que siempre es falsa, independientemente del valor de verdad - de sus componentes P y P.

Su tabla de verdad es la siguiente :

P	$\sim P$	$P \wedge \sim P$
V	F	F
F	V	F

Tabla de una CONTRADICCION.

De la tabla anterior, vemos que la proposición $P \wedge \sim P$ es siempre falsa y, por tanto, es una contradicción.

En general, se dice que dos proposiciones son contradictorias si una es la negación de la otra, luego una contradicción es la conjunción de una proposición y su negación.

PROBLEMAS 4.2.

1.- Muestre que las proposiciones siguientes son tautologías :

a).- $P \Longrightarrow \sim (\sim P)$

b).- $(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\sim Q \Longleftrightarrow \sim P)$

c).- $(P \wedge \sim Q) \Longrightarrow Q$

d).- $(P \wedge Q) \Longrightarrow (P \vee Q)$

2.- Encuentre tres ejercicios donde se demuestre que son -- contradicciones.

CAPITULO IV

ALGUNAS REGLAS DE INFERENCIA Y CUANTIFICADORES.

ALGUNAS REGLAS DE INFERENCIA : En el transcurso de nuestra vida hablamos de razonamientos válidos y no válidos, es decir, - aceptamos la conveniencia de " pensar de manera lógica ", de --- usar el razonamiento deductivo correctamente, pero son pocas --- las personas que siguen sus convicciones al pie de la letra.

En esta parte estudiaremos lo que se llama INFERENCIA LOGICA o INFERENCIA DEDUCTIVA: en otras palabras, estudiaremos algunos casos en los que, a partir de uno o varios enunciados, podemos obtener nuevos enunciados en un sentido deductivo. Por ejemplo, analizaremos los siguientes razonamientos :

Premisa 1 : Si apruebo el curso, pasaré,a segundo año.
Premisa 2 : Apruebo el curso.
Conclusión : Pasaré a segundo año.

Premisa 1 : Si él está en el partido de futbol, entonces él está en el estadio!
Premisa 2 : El está en el partido de futbol.
Conclusión : El está en el estadio.

Premisa 1 : Si llueve, entonces el cielo ha de estar nu - blado.
Premisa 2 : Llueve.

Conclusión : El cielo ha de estar nublado.

Los razonamientos anteriores los podemos sintetizar de la siguiente forma: Si una implicación, P Q, dada es cierta, entonces la conclusión Q, será verdadera; en símbolos los ---- ejemplos se expresan así :

Premisa 1 : $P \Longrightarrow Q$

Premisa 2 : $\underline{P \qquad\quad}$

Conclusión : $\therefore$ Q.

A la regla anterior se le llama " Ley de separación ", --- " Regla de derivación ", o " Modus Ponendo Ponens ".

" Es el método (modus) que afirma (ponens) el conse -- cuente, afirmando (ponendo) el antecedente y se abrevia ---- MPP. " (13).

La forma anterior también se puede expresar de la siguiente forma :

$$\left[(P \Longrightarrow Q) \wedge P \right] \Longrightarrow Q$$

Al verificar vemos que se trata de una tautología y se -- puede decir que el razonamiento es válido; en otras palabras, - para que un razonamiento sea válido, debe tratarse de una tau-- tología.

13.- SUPPES HILL, P. <u>Introduc. a la lógica matemática</u>. p. 47.

P	Q	$P \Longrightarrow Q$	$(P \Longrightarrow Q) \wedge P$	$[(P \Longrightarrow Q) \wedge P] \Longrightarrow Q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Tabla de verdad de la regla de inferencia: Modus Ponendo Ponens. (MPP).

Analizando otro razonamiento tenemos :

Premisa 1 : Si soy buen estudiante aprobaré el curso.

Premisa 2 : No aprobé el curso.

Conclusión : No soy buen estudiante.

Si lo anterior se traduce a símbolos, adquiere la siguiente forma :

$$\begin{array}{l} P \Longrightarrow Q \\ \underline{\sim Q \qquad\qquad} \\ \therefore \ \sim P \end{array}$$

Esto significa, que si se da una implicación y se niega el consecuente, entonces se niega el antecedente; la forma lógica equivalente de la regla anterior sería :

$$[(P \Longrightarrow Q) \wedge \sim Q] \Longrightarrow \sim P$$

Se llama Modus Tollendo Tollens. La regla de inferencia -- que tiene el nombre latino : " Negando (Tollendo) el conse -- cuente, se puede negar (tollens) el antecedente de la condi-- cional y se abrevia MTT. " (14).

La proposición $[(P \Longrightarrow Q) \wedge \sim Q] \Longrightarrow \sim P$ es una tautología y podemos afirmar que el argumento anterior es váli-- do.

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$P \Longrightarrow Q$	$(P \Longrightarrow Q) \wedge \sim Q$	$[(P \Longrightarrow Q) \wedge \sim Q] \Longrightarrow \sim P$
V	V	F	F	V	F	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	F	V

Tabla de verdad de la regla de inferencia :

MODUS TOLLENDO TOLLENS (MTT).

Aunque existen más reglas de inferencia, que son reglas -- del razonamiento, analizaremos solo una más : " La regla de la cadena " o del " Silogismo Hipotético ".

Esta regla tiene como premisas a dos implicaciones y la -- conclusión es otra implicación. Su forma simbólica es :

14.- SUPPES HILL, P. Introduc. a la lógica matemática. p. 58.

$$\begin{array}{l} P \Longrightarrow Q \\ Q \Longrightarrow R \\ \hline \therefore P \Longrightarrow R \end{array}$$

Su forma lógica equivalente es la siguiente :

$$(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow R) \Longrightarrow (P \Longrightarrow R)$$

Esta forma se usa con frecuencia en la matemática para demostrar teoremas; en la educación elemental se relaciona con -- las ciencias naturales, por ejemplo:

Premisa 1 : Si el óvulo es fecundado, entonces habrá desarrollo de un ser humano.

Premisa 2 : Si hay el desarrollo de un ser humano, entonces nacerá un bebé.

Conclusión : Si el óvulo es fecundado, entonces nacerá un bebé.

Premisa 1 : Si yo colecto rocas, entonces yo conoceré diversos materiales.

Premisa 2 : Si y o conozco diversos materiales, entonces - yo podré explicar sus características.

Conclusión : Si yo colecto rocas, entonces yo podré explicar sus características.

Premisa 1 : Si son alimentos nutritivos, entonces serán -- fuentes de energía.

Premisa 2 : Si son fuentes de energía, entonces contienen vitaminas, proteínas y minerales.

Conclusión : Si son alimentos nutritivos, entonces contienen vitaminas, proteínas y minerales.

Se demostrará también que todos los argumentos de la forma anterior son válidos.

Observaremos que en esta regla intervienen proposiciones simples: P, Q, R, luego, para obtener la tabla de verdad de la Regla de la Cadena necesitamos saber cuántos valores de verdad le corresponden: el número de proposiciones simples que intervienen son tres, luego los valores de verdad que podemos asignar son $2^3 = 8$.

Ocho valores de verdad, a saber :

P Q R	$(P \Longrightarrow Q)$	$(Q \Longrightarrow R)$	$(P \Longrightarrow R)$	$(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow R)$	$[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$
V V V	V	V	V	V	V
V V F	V	F	F	F	V
V F V	F	V	V	F	V
V F F	F	V	F	F	V
F V V	V	V	V	V	V
F V F	V	F	V	F	V
F F V	V	V	V	V	V
F F F	V	V	V	V	V

Tabla de verdad de la Regla de la Cadena.

PROBLEMAS 5.1.

1.- Determine cuales son las conclusiones de los problemas siguientes válidas y cuales no; cuando sean válidas dar la regla de inferencia que se aplique :

a).- Si obtengo buena calificación en este examen, mi promedio subirá.

Si mi promedio sube, me darán un viaje a Europa.

Si obtengo buena calificación en este examen, me darán un viaje a Europa.

b).- Si $4 + 3 \quad 10$, entonces $7.5 \quad 40$

$$\frac{4 + 3 \quad 10}{7.5 \quad 40}$$

c).-

$$\frac{\begin{array}{l} P \Longrightarrow \sim Q \\ \sim P \end{array}}{\therefore\ Q}$$

d).- Si $4.3 = 12$, entonces $9.4 = 36$

$$\frac{9.4 = 36}{4.3 = 12}$$

e).-

$$\frac{\begin{array}{l} \sim Q \Longrightarrow \sim P \\ \sim P \Longrightarrow \sim R \end{array}}{\therefore\ \sim Q \Longrightarrow \sim R}$$

ALGUNAS FORMAS NO VALIDAS DE RAZONAMIENTO QUE SE USAN.

La lógica no solo se usa en las matemáticas o en otra --- ciencia; también se usa en la publicidad para inducir a la gente a comprar tal o cual objeto.

Existen muchas formas de razonamiento NO VALIDAS LOGICA --- MENTE que se usan en la publicidad. Por ejemplo, un publicista diría :

" Si desea ser hermosa, compre jabón pétalo ".

Lo que el publicista desea hacer suponer a quien escuche -- este anuncio sería :

" Si uso jabón pétalo, seré hermosa ".

Si simbolizamos lo anterior y llamamos P a la proposición simple " desea ser hermosa " y llamamos Q a la proposición -- " use jabón pétalo ", el razonamiento anterior tomará la forma:

$$\begin{array}{l} P \Longrightarrow Q \\ \underline{Q \qquad\qquad} \\ \therefore \ P \end{array}$$

Se expresa como proposición, es de la forma :

$$\left[(P \Longrightarrow Q) \wedge Q \right] \Longrightarrow P$$

Si encontramos la tabla de verdad de esta proposición, veremos que no es una tautología y, por tanto, el razonamiento no es lógicamente válido.

P	Q	$(P \Longrightarrow Q)$	$[(P \Longrightarrow Q) \wedge Q]$	$[(P \Longrightarrow Q) \wedge Q] \Longrightarrow P$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	F
F	F	V	F	V

Tabla de verdad de la FORMA NO VALIDA.

$$[(P \Longrightarrow Q) \wedge Q] \Longrightarrow P$$

Otro tipo de razonamiento que usan los publicistas para --- inducir a la gente es el siguiente :

Considérese la proposición :

" Si compra su ropa en Garber's, usted es una persona ele-- gante ".

El publicista espera que quien escuche este anuncio piense " Si no compro mi ropa en Garber's, no soy una persona ele- gante ".

Lo que el publicista hace es suponer la inversa de la im-- plicación dada y espera que la gente acepte su argumento.

El razonamiento anterior, al traducirlo a símbolos, es de forma :

$$\begin{array}{l} P \Longrightarrow Q \\ \sim P \\ \hline \therefore \sim Q \end{array}$$

Que escrito de otra forma, es la expresión :

$$\left[(P \Longrightarrow Q) \wedge \sim P \right] \Longrightarrow \sim Q$$

Y al obtener la tabla de verdad de esta expresión, resulta que tampoco es una tautología y, por tanto, el razonamiento no es válido.

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$(P \Longrightarrow Q)$	$\left[(P \Longrightarrow Q) \wedge \sim P\right]$	$\left[(P \Rightarrow Q) \wedge \sim P\right] \Rightarrow \sim Q$
V	V	F	F	V	F	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	V	V	V	V

Tabla de verdad $\left[(P \Longrightarrow Q) \wedge \sim P\right] \Longrightarrow \sim Q$ no válida.

Cuantificadores : En nuestra vida diaria usamos con frecuencia enunciados cuantificadores, es decir, enunciados que nos dan la idea de cantidad, por ejemplo: tenemos los siguientes:

" Todos los gatos tienen cuatro patas ".

" Existe un X entero para el cual X + 12 = 15 ".

" N o hay ningún número natural tal que X sea menos que 1 ".

" Para algún X racional, X - 3 = 1 ".

" Para todo X, Y números naturales se cumple X.Y = Y.X".

Las palabras de los enunciados que dan la idea de cantidad se denominan <u>cuantificadores</u> ; al resto del enunciado le llamamos predicado; así, los cuantificadores en los enunciados anteriores son : " todos ", " existe ", " ningún " , " para algún " y " para todo ".

Distinguiremos dos tipos de cuantificadores : EL UNIVERSAL y EL EXISTENCIAL.

El cuantificador UNIVERSAL es la palabra para todo o todo y se denota por una A invertida $\forall$; así, la expresión " para todo X, Y números naturales se cumple que X.Y = Y.X ".

La podemos sintetizar de la siguiente forma :

$\forall$, X, Y números naturales, X.Y = Y. X.

El cuantificador EXISTENCIAL se representa por las palabras " existe al menos un ", " para algún " o " existe un " y se denota por una E invertida $\exists$; de ésta forma el enunciado " Existe un X entero para el cual X + 12 = 15; lo simplificamos escribiendo :

$\exists$, X entero tal que X + 12 = 15

NEGACION DE UN CUANTIFICADOR : Para negar un cuantificador por ejemplo EL UNIVERSAL, lo sustituiremos por el cuantificador EXISTENCIAL y negaremos el predicado correspondiente; para negar el cuantificador EXISTENCIAL, lo sustituiremos por el cuantificador UNIVERSAL y negaremos su predicado. Por ejemplo:

" Todos los gatos tienen cuatro patas ".

Su negación sería la expresión, también cuantificada :

" Algunos gatos no tienen cuatro patas ".

O también :

" Ningún gato tiene cuatro patas ".

Si la proposición cuantificada que se da es la siguiente :

" Algunos números son racionales ".

Su negación sería :

" Todos los números no son racionales ".

O bien :

" N_ingún número es racional ".

En general, vemos que podemos negar cualquier expresión --- cuantificada intercambiando los cuantificadores y negando el --- predicado.

CAPITULO V

LA LOGICA MATEMATICA EN EL PROGRAMA DE 6. GRADO DE EDUCACION PRIMARIA.

Con el propósito de lograr el desarrollo integral de los educandos, el Programa de Sexto Grado de Educación Primaria incluye nociones de LOGICA MATEMATICA, en el Area de Matemáticas, sin desconocer que esta área va relacionada con todo el Programa.

El objetivo general es :

" ALCANZAR EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO CUANTITATIVO Y RACIONAL, COMO UN INSTRUMENTO DE COMPRENSION, INTERPRETACION Y EXPRESION DE FENOMENOS PARA PROPICIAR CON ELLO EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO INDUCTIVO Y/O DEDUCTIVO ". (15)

En el presente trabajo trataré los aspectos fundamentales de la Lógica Matemática, previstos y no previstos en el Programa de 6o. grado de educación primaria.

1.- Historia de la Lógica Matemática.

2.- Lógica Inductiva y Lógica Deductiva.

3.- Lógica Simbólica.

4.- Implicaciones derivadas.

5.- Reglas de inferencia.

6.- Cuantificadores.

15.- Programa para el 6o. grado de Educ. Prim. SEP/MEX, 1982. p. 36.

El enfoque que se da de estos seis aspectos en este grado, comprende una concepción distinta en relación con la de los demás grados.

El desarrollo de los temas se realiza por medio de problemas que, para su solución, se necesitan conocimientos de todos los grados anteriores, por lo que, para desarrollar los contenidos de estos temas motivaré las actividades por mediomde discusiones abiertas en clase, permitiendo revisar con todos los niños aquellas ideas que se han visto en cursos anteriores y que se relacionan con el desarrollo de temas subsecuentes.

HISTORIA DE LA LOGICA SIMBOLICA.

Al iniciar esta investigación encontré que la historia de la Lógica es nula en el Programa de 6o. grado, pero si tiene algunos puntos de referencia y relacionados con otros grados, por ejemplo vemos que el niño de primer grado se le habla de conjuntos y empieza a trabajar con diagramas de Venn.

Para poder abordar este tema con los alumnos de 6o. grado y encontrando lagunas en el Programa, quiero alcanzar mi objetivo relacionando este tema con las siguientes áreas y objetivos:

CIENCIAS SOCIALES.

4.1.2. Explicar los principales avances científicos del siglo XX.

4.1.2.1. Investigue por equipos la obra de algunos de los si-- guientes personajes. (L.A.C.S. pp. 92-96).

Aristóteles.

Carlos Federico Gauss.

Jorge Cantor.

Evaristo Galois.

4.1.2.2. En equipo, exponga ante el grupo las principales --- aportaciones de éstos personajes :

4.1.2.3. Responda en equipo las dudas que se susciten.

4.1.2.4. Organice con su equipo un ALBUM que coleccione los datos investigados sobre las aportaciones que hicieron- éstos sabios para enriquecer la cultura de nuestro -- tiempo.

MATEMATICAS :

7.2.3. Efectúe sustracciones de números enteros sustituyen-- do cada diferencia por la suma correspondiente.

7.2.3.1. Efectúe varias sustracciones de enteros, sustituyendo cada uno por la adición correspondiente. (L.A. Mat. pág. 100).

Observaciones : Se agregó la edad de Aristóteles.

LOGICA INDUCTIVA Y LOGICA DEDUCTIVA.

En la Lógica se utilizan los siguientes métodos: inductivo y deductivo.

El inductivo parte de casos particulares para llegar a generalidades.

El deductivo parte de generalidades para particularizar.

Uno de los objetivos que incluye el método inductivo, es el siguiente :

MATEMATICAS :

2.6.6. Elaborar una fórmula para calcular el volumen de un -- prisma.

2.6.6.1. Construya un cubo y observe sus características.
Construya con su cubo y los de sus compañeros, un --- prisma rectangular.
Analice las características del prisma construído.
Determine el volumen del prisma contando los cubos.
Observe cuántos cubos hay a lo ancho de cada capa y cuántos a lo largo.
Calcule el número de cubos que hay en cada capa.
Señale cuántas capas de cubos tiene el prisma.
Indique, con base en lo anterior, cuántos cubos en total tiene el prisma. (L.A. Mat. pp. 28-29).

2.6.6.2. Elabore con base en la actividad anterior, una fór -- mula para obtener el volumen del prisma (Area de --- la base por altura). (L.A. Mat. p. 30).

El método deductivo lo encontré en :

CIENCIAS NATURALES :

4.1.1. Advertir que los seres vivos están formados por célu-- las.

4.1.1.1. Comente lo siguiente:

- De qué está formada su mano.
- Qué partes forman el dedo.
- De qué está formada la piel y los huesos de sus --- dedos.

4.1.1.2. Exponga ante el grupo algunas hipótesis de cómo están formados los seres vivos.

4.1.1.3. Observe en su libro de texto el esquema de un corte -- de piel visto al microscopio. (L.A. C.N. pp. 102-103) Indique si sus hipótesis acerca de cómo están forma--- dos los seres vivos son correctas.

4.1.1.4. Practique otras observaciones al microscopio u obser- ve las microfotografías de los cortes de algunos ór--- ganos observados. (L.A. C.N. pp. 104-105).

4.1.1.5. Identifique las unidades que feman la piel y los ór-- ganos observados. (L.A. C.N. p. 105).

4.1.1.6. Discuta la diversidad de formas celulares que observó.

LOGICA SIMBOLICA.

En este aspecto es donde el alumno se enfrenta a un serio problema: EL LENGUAJE.

Esto se debe a que el que usamos en nuestra vida diaria es diferente al que se emplea en otras ciencias.

En el educando de sexto grado no encontramos toda la simbología, pero si la vemos aplicada.

LA CONJUNCION :

Se relaciona con :

ESPAÑOL :

3.6. Reconocer algunos casos en que se utiliza la conjunción " y ".

3.6.1. Lea un enunciado que incluya varias oraciones. (L. A. ESP. p. 65).
Diga cuántas oraciones hay en el enunciado y señale la palabra que los une.
Advierta que la conjunción " y " es un nexo que une elementos iguales.
Lea otros enunciados que incluyan la conjunción " y ".
Diga qué categorías gramaticales une la " y " en los

enunciados y los escriba por separado. (L.A. ESP. -- p. 66).

LA DISYUNCION :

El programa de sexto grado no incluye nada acerca de la -- disyunción, razón por la cual propongo como complemento al an-- terior conocimiento, el siguiente objetivo :

Objetivo específico :

- Investigar qué relación denota la disyunción " o " como conjunción.
- Elaborar oraciones donde se use la disyunción " o " denotando separación.
- Localizar en su libro de lecturas oraciones donde-- encuentre la disyunción " o " denotando alternativa.
- Indicar qué diferencia existe entre la disyunción - que denota separación y la que denota alternativa y escríbalo en su cuaderno.

LA CONDICIONAL O IMPLICACION.

La implicación la encontramos muy claramente en los si --- guientes objetivos del área de matemáticas:

6.5.2. Interpretar algunas implicaciones.

6.5.2.1. Observe las características de algunos animales, -- fenómenos y objetos diversos.

Registrar por escrito las características observadas.

6.5.2.2. Relacione los animales, fenómenos u objetos y sus características por medio de implicaciones.

Si es mamífero, entonces tiene la sangre caliente.

Si es triángulo, entonces tiene tres lados.

6.5.2.4. Realice otros ejercicios similares. (L.A. Mat. ---- p. 87).

LA BICONDICIONAL.

Ya anteriormente se ha dicho que en el programa de sexto grado hay lagunas; una de ellas es la que concierne al conocimiento de la bicondicional y traté de correlacionarla con el -- objetivo anterior; por tanto, el objetivo deseado será :

OBJETIVO ESPECIFICO :

Iden_tificará proposiciones equivalentes:

Si su área es $\frac{b \times h}{2}$

Es un triángulo.

Si su área es $\frac{b \times h}{2}$ si y sólo si es un triángulo.

Es un ser vivo.

Respira.

Es un ser vivo si y sólo si respira.

Resolverá más ejercicios colocando la bicondicional en --

su lugar.

Observaciones : Ejercicios dados por el maestro.

IMPLICACIONES DERIVADAS.

La conversa, la inversa y la contrapositiva son las implicaciones derivadas y las localizamos en la siguiente área y objetivo :

MATEMATICAS :

7.5.1. Determinar la falsedad o veracidad de algunas implicaciones dadas.

7.5.1.1. Analice las características de los elementos que integran algunos conjuntos y subconjuntos, ejemplo:

. El conjunto de los cuadriláteros.

. El conjunto de los paralelogramos.

7.5.1.2. Formule implicaciones falsas o verdaderas con base en los resultados de sus análisis.

Si es cuadrilátero es paralelogramo.

Si es paralelogramo es cuadrilátero.

7.5.1.3. Indique cuál de las implicaciones formuladas es falsa y cuál verdadera.

7.5.1.4. Realice otros ejercicios similares. (L.A. Mat. p. 107).

TAUTOLOGIAS Y CONTRADICCIONES.

Correlacionando con el objetivo anterior en el ejercicio (L.A. Mat. p. 107) IMPLICACIONES FALSAS O VERDADERAS los -- alumnos observarán algunos casos en que dos proposiciones son verdaderas y las otras dos son falsas; en otras una es falsa y la otra es verdadera; por lo tanto, aquí queda claramente --- especificada la tautología y la contradicción.

ALGUNAS REGLAS DE INFERENCIA.

A través del programa de sexto grado, el proceso de la -- enseñanza-aprendizaje siempre va acompañado de la Lógica, aunque a los niños no se les diga qué reglas o tipo de lógica se - está usando.

Por ejemplo, analizaremos el siguiente objetivo en donde se ve aplicado el MODUS PONENDO PONENS y el MODUS TOLLENDO TOLLENS y la REGLA DE LA CADENA.

MATEMATICAS :

1.7.1. Distinguir fenómenos deterministas y fenómenos azarosos.

1.7.1.1. Responda con base a su experiencia algunas preguntas como :

Si se pone una canica sobre el agua, ¿ se hundirá ?

Si se coloca otra canica, ¿ qué pasará ?

Si se colocan otras diez, ¿ pasará lo mismo ?

Si se tienen cinco barajas distintas y se saca una carta sin ver, ¿ es seguro que salga la que uno -- piensa ?

Si se saca otra vez, ¿ será seguro que salga la que se pensó ?

¿ Es posible saber con seguridad cuál otra se va a sacar ?

1.7.1.2. Observe, con base en lo anterior, que algunas veces se puede saber con seguridad cual será el resultado de un experimento y otras veces no.

Llame experimento de azar aquél en el que no es po-- sible conocer anticipadamente con seguridad el re--- sultado.

Los experimentos de no azar bien se pueden explicar en la siguiente forma, aplicándose el MODUS PONENDO PONENS y el MODUS TOLLENDO TOLLENS.

Si se pone una canica sobre el agua, entonces se hunde.
Pongo una canica sobre el agua.
Se hunde.

Si se pone una canica sobre el agua, entonces se hunde.
No se hunde la canica.
No se pone la canica sobre el agua.

Si paso la mano sobre el fuego me quemo.

N o me quemo.

No paso la mano sobre el fuego.

Si paso la mano sobre el fuego me quemo.

Paso la mano sobre el fuego.

Me quemo.

LA REGLA DE LA CADENA.

La regla de la cadena es una inferencia que está muy rela-- cionada con todas las áreas, ya que los conocimientos tratan --- de darse lo más lógicamente posible y después de un conocimiento siempre habrá otro y así sucesivamente, ejemplo:

CIENCIAS NATURALES :

4.2.5. Describir el desarrollo de un ser humano, desde la --- fecundación del óvulo hasta el nacimiento del bebé.

4.2.5.1. Observe y describa las ilustraciones de su libro, donde se muestran las fases más importantes del desarro-- llo intrauterino del ser humano, desde la fecundación del óvulo hasta el nacimiento del nuevo individuo.

Si el óvulo es fecundado, entonces habrá desarrollo de un ser humano.

Si hay el desarrollo de un ser humano, entonces na --

cerá un bebé.

Si el óvulo es fecundado, entonces nacerá un bebé.

Estas son todas las formas válidas en un razonamiento de inferencia. Ahora encontraremos las formas no válidas de razonamiento que generalmente se usan en la publicidad.

ESPAÑOL :

7.11. Analizar críticamente anuncios publicitarios.

7.11.1. Lea, observe y comente los textos y las ilustraciones sobre publicidad. (L.A. p. 161-162 ESP.).

Lea algunos enunciados sobre la intención de los avisos publicitarios y dé su opinión al respecto.

Discuta con sus compañeros y maestro sobre lo que opina cada uno acerca de la publicidad.

En estos ejercicios encontramos enunciados como :

Si toma refresco SPLASH será alegre y cascabelero.

Si saborea chocolate CACAO tendrá felicidad.

Si usa zapatos PICOTA tendrá ascenso social, ----- ¡ gana ! ¡ triunfa ! y ¡ llega !

CUANTIFICADORES.

En el programa de sexto grado si se encuentran los cuantificadores y se hace uso frecuente de ellos.

MATEMATICAS :

3.5.1. Interpretar y calificar proposiciones en las que se usen cuantificadores.

3.5.1.1. Determine diversos conjuntos con los objetos que lo rodean.

Observe que entre los elementos de los conjuntos que determinó todos, alguno o ninguno poseen ciertas características, por ejemplo: si el conjunto está formado por los alumnos del grupo :

- Todos los niños que forman el conjunto son alumnos de la escuela.
- Algunos alumnos obtuvieron diez en su prueba de matemáticas.
- Ninguno tiene quince años.

3.5.1.2. Determine la falsedad o veracidad de algunas proposiciones que se refieran al conjunto anterior.

- Todos los niños que forman el conjunto son alumnos de la escuela. (verdadera).
- Todos los que pertenecen al conjunto tienen quince años. (falso).

3.5.1.3. Realice otros ejercicios semejantes. (L.A. Mat. p. 32).

C O N C L U S I O N:

Es importantísimo darse cuenta y experimentar como las ---- mujeres somos tan capaces como los hombres, de conocer, asimi--- lar y descubrir el mundo de las matemáticas y concretamente el - uso adecuado de la lógica en dicha área.

La lógica propugna por el desarrollo del pensamiento ----- cuantitativo y racional, con la intención de comprender, in---- terpretar y expresar los fenómenos, propiciando con ello el --- desarrollo del pensamiento inductivo y/o deductivo.

En el sexto grado de la educación primaria es fundamen ---- tal el empleo de la lógica matemática porque posibilita la bús-- queda de solución a multitud de problemas simples y complejos; da oportunidad al alumno de conocer y manejar la simbología es- pecífica, le permite diferenciar la falsedad o veracidad de de-- terminadas implicaciones, así como las contradicciones que se -- presentan, etc.

El conocimiento de la lógica no se le presenta al alumno - de manera aislada, sino correlacionándola con otras áreas.

De esa manera se coadyuva en la formación integral del --- educando, para bien propio, de la familia, de la sociedad y --- de la patria.

B I B L I O G R A F I A :

COPI M., Irving. Introducción a la lógica. Edit. Universitaria, de Buenos Aires, 1980.

ESCAREÑO et al. Matemáticas por objetivos. 2a. edic., Edit. --- Trillas, México, 1980.

GARCIA HERREA, Jesús. Elementos de lógica matemática. Edit. --- Universitaria, Morelia, Mich., 1979.

LARGER, Susan a. Introducción a la lógica simbólica. Siglo XXI Editores, S.A. México, 1974.

MARTINEZ S., Jorge. Lógica. Edit. ANUIES, México, 1973.

MATES, Benson. Lógica matemática elemental. Edit. Tecnós. Ma-- drid, 1974.

MITCHELL, D. Introducción a la lógica. Nueva colección Labor, Barcelona, 1977.

NEWMAN, James. Sigma. Edit. Grijalbo, México, 1979.

NICHOLS, D. Matemáticas. Edit. Interamericana, México, 1977.

SOMINSKI, I. S. Método de introducción a las matemáticas. Edit. MIR., Moscú, 1975.

STRICK, Dirk. A concise history of mathematics. Dover Publi--- cations, New York, N.Y. 1967.

TARSKI, Alfred. Introducción a la lógica. Edit. Espasa Calpe S.A. Madrid, 1977.

UPN. Redacción e investigación documental. 1980. (Manual).

UPN. Unidad de probabilidad y estadística. 1980.

SEP. Libro para el maestro. 6o. grado. 1982.

SEP. Matemáticas. 6o. grado., 1981.