UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

SECRETARIA DE EDUCACION PUBLICA Y CULTURA

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

UNIDAD 25 A

LA GEOMETRIA Y LA HEURISTICA COMO ELEMENTOS PARA LA ENSEÑANZA DEL ALGEBRA. UN PROGRAMA DE INTERVENCION

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN EDUCACION

PRESENTA

SALVADOR HERNANDEZ VACA

M.C. ELDA LUCIA GONZALEZ CUEVAS
DIRECTORA DE TESIS

CULIACAN ROSALES, SINALOA, SEPTIEMBRE DEL 2000.

UPN
UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

SECRETARIA DE EDUCACION PUBLICA Y CULTURA

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

UNIDAD 25 A

LA GEOMETRIA Y LA HEURISTICA COMO ELEMENTOS PARA LA ENSEÑANZA DEL ALGEBRA. UN PROGRAMA DE INTERVENCION

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN EDUCACION

PRESENTA

SALVADOR HERNANDEZ VACA

M.C. ELDA LUCIA GONZALEZ CUEVAS
DIRECTORA DE TESIS

CULIACAN ROSALES, SINALOA, SEPTIEMBRE DEL 2000.

AGRADECIMIENTOS

Quiero darle las gracias a mi esposa e hija *Ma. Socorro y Génesis* respectivamente por su apoyo continuo e invaluable.

Así como también a mi profesora directora de la tesis *Elda Lucía González Cuevas* por tener mucha paciencia y siempre estuvo atenta para atenderme.

Gracias a la Universidad Pedagógica Nacional Unidad 25-A y al Centro de Ciencias de Sinaloa, por apoyarme institucionalmente para obtener el grado.

A todos muchas gracias.

Indice

Introducción

En los últimos años, ha habido gran interés por reestructurar el sistema educativo no sólo en matemáticas sino, también, en el estudio de las ciencias en general. Se parte de la premisa de que una mejor educación le ayudará al individuo a responder adecuadamente a los cambios y necesidades sociales. Al realizar, ya sea una actividad manual o intelectual, se observa una tendencia a que el sujeto realice actividades donde tiene que responder y ajustarse a situaciones cada vez más complejas. Es decir, es importante que aprenda a usar diferentes sistemas y aparatos en tiempos cortos y transferir sus conocimientos a diversas situaciones o contextos. Parece que la idea de mantenerse realizando la misma rutina a través de los años ha ido cambiando y se ajuste al desarrollo de varias actividades constantemente. Esto es una necesidad en cualquier medio donde se valore la participación crítica de la gente en la toma de decisiones.

En nuestro país y en otros países el movimiento de reestructurar el estudio de las matemáticas recomienda que la resolución de problemas matemáticos debe ser la actividad esencial en el estudio de esta disciplina[1]. De hecho, en los últimos 20 años la resolución de problemas ha sido una línea importante en la investigación en la enseñanza de la matemática. Esto ha influido en el desarrollo de propuestas curriculares y métodos de enseñanza. Entre los resultados importantes de esta línea de investigación está el hacer hincapié en el proceso utilizado por los estudiantes al resolver problemas matemáticos.

¿Qué tipo de conocimiento matemático ayuda al individuo a responder adecuadamente en esta sociedad en constante transformación?, ¿qué estrategias algebraicas deben promoverse en la educación secundaria?, ¿cómo evaluar la apropiación del conocimiento matemático?, en cuanto al conocimiento propiamente algebraico, ¿qué elementos interpretativos nos indican que se ha pasado a un estado más elaborado?. Son algunas preguntas que han servido como eje rector para la presente propuesta.

En el presente estudio, se analizan los diversos métodos que utilizan los estudiantes del nivel básico (secundaria) al resolver problemas que involucran diversos métodos de solución y se presenta un modelo de intervención pedagógica.

El trabajo se divide en cuatro capítulos. El primer capítulo se refiere a la problemática detectada y los elementos que justifican nuestro trabajo. A la vez, se refiere a los objetivos planteados y el marco teórico desde donde se va a dilucidar nuestro objeto de investigación. El segundo capítulo hace referencia a los aspectos de la metodología, tamaño de la población, método, escenario, aplicación de la propuesta didáctica y los elementos de evaluación. El tercer capítulo, se refiere al análisis e interpretación de los datos, donde se muestran los resultados de las observaciones hechas en el aula. En el cuarto capítulo se enuncian las conclusiones y algunas sugerencias susceptibles de ser aplicadas en el aula para promover la enseñanza de estrategias en la resolución de problemas algebraicos.

---

[1] Santos, T.M. (1993). *Learning mathematics. A perspective based on problem solving*. Departamento de Matemáticas Educativas, CINVESTAV: México.

Capítulo I. Construcción del objeto de estudio

1. Planteamiento del problema

Una sociedad como la nuestra, que se torna cada vez más compleja, resulta difícil imaginar áreas en las que no hayan penetrado las matemáticas. Ante los avances tan impresionantes en las comunicaciones que hacen posible la adquisición de un sofisticado vehículo último modelo vía Internet. Ante los logros por las ciencias en la clonación de seres vivos, las transacciones bancarias desde la comodidad del hogar, por ejemplo es de esperarse un aumento de la cultura matemática de la población. Sin embargo, esto no es así. La mayoría de la población encuentra la matemática aburrida y difícil, y les resulta casi imposible resolver problemas de cálculo elemental, a pesar de haber aprobado el ciclo básico. De hecho, la sola palabra "matemáticas" provoca pérdida de autoestima personal en ciertos núcleos de la población, pues es frecuente escuchar entre los padres de familia que sus hijos resuelven con precisión y esmero las tareas de geografía, español, historia, etc., pero, al tratar de resolver la tarea de matemáticas sus acumulados desaciertos en esta rama del saber, provocan una enorme pérdida de confianza a título personal. Ante este grave problema, los padres se ven angustiados por la posibilidad de que dicha pérdida de confianza se traslade a las otras disciplinas que cursan sus hijos. Datos oficiales nos señalan que en todo el país, tan sólo el 2% de la población estudiantil elige alguna carrera que tiene que ver con conocimientos de álgebra no básicos[1].

---

[1] SEP. *Programa de Desarrollo Educativo 1995-2000*. Cap. III. Educación Media Superior y Superior. Sec. 1.2.4. Pertinencia. México. http:// www.sep.gob.mx.

Entonces la paradoja esta planteada; por un lado, una sociedad tecnificada como la nuestra requiere la alfabetización funcional de sus miembros en el área de la matemática. Pero, al mismo tiempo la sociedad enfrenta que la matemática es una de las esferas más inaccesibles para la población en general.

La dificultad que implica para los sujetos acceder al conocimiento matemático se ha puesto de manifiesto en diversos estudios[2]. Se señala, por ejemplo, las personas que fracasan en las tareas formales y exámenes matemáticos en la escuela, realizan exitosamente cálculos en actividades que les plantea la vida cotidiana, como es la compra, almacenamiento y reparto de mercancías. De igual forma, hemos de señalar que hoy en día, muchos profesionistas en cada uno de sus campos laborales donde se les demanda una aplicación del conocimiento matemático, emprenden tales tareas acertadamente, aunque ayer fueron calificados por el sistema escolar como "analfabetos matemáticos", es decir, las personas son competentes en situaciones de actividad cotidiana que implican cálculos matemáticos idénticos a los de las pruebas formales en la escuela.

Estas observaciones nos llevan a pensar que la razón de que los sujetos no aprendan matemáticas, hay que buscarla no sólo en el mito de la dificultad de la disciplina, sino también en la forma de cómo esta se ha venido enseñando en la escuela.

[2] Gómez-Granel Carmen (1994). *Las matemáticas en primera persona.* Cuadernos de pedagogía N° 221. Ed. Fontalba. Barcelona, p.17-18.

Se ha privilegiado una enseñanza de la matemática descontextualizada del uso del sujeto y ajena a la actividad social, lo que ha provocado que los aprendices vean a la matemática como algo inútil y totalmente ajeno a la vida cotidiana.

La creciente descontextualización de la enseñanza de las diferentes áreas de la matemática, ha llevado en la práctica, a que el profesor de álgebra enseñe esta rama del saber desde su punto más abstracto y genérico posible. Bajo este modelo, se priva al sujeto de ver el álgebra como un proceso social, rico en la negociación de significados entre los dos principales actores del proceso de enseñanza; los docentes y los alumnos. La enseñanza ha priorizado un discurso algebraico constituido, desestimando todos los aspectos intuitivos, sociales y personales que acompañan el proceso histórico de la construcción algebraica. Esta forma de enseñanza hace suponer que influye en el hecho de que veinticuatro de cada cien alumnos que cursan reprueben álgebra[3], y quedan, en ocasiones, por lo mismo condenados a la frustración y la animadversión por el aprendizaje de este tipo de conocimientos

Para evitar en lo posible, el fracaso en el aprendizaje del álgebra hay que promover una enseñanza alejada de las prácticas formalistas y abstractas, al esclarecimiento, a los sentidos y a un proceso reflexivo, de forma contextualizada de tal suerte que se puedan atraer en cada ciclo escolar a un mayor número de alumnos interesados en cursos superiores de álgebra.

[3] SEP (1998). *Secundaria estadísticas a nivel nacional ciclo 1996/97*. México, http://www.sep.gob.mx.

2. Justificación

La investigación actual sobre los procesos cognitivos involucrados en el pensamiento matemático plantea que existen diversas formas de representación de los objetos que se pretende estudiar, algunos de los cuales adquieren un nivel de abstracción y complejidad tales, que requieren diversos niveles de razonamiento. Es conocida la dificultad para aprender matemáticas desde el ingreso a la primaria. Esta dificultad se debe al carácter formalizador de la disciplina, por un lado y por el otro a las estrategias de enseñanza que utilizan los profesores. Esta situación tiene un efecto pernicioso sobre los procesos de asimilación del acervo conceptual y de razonamiento que exigen las matemáticas.

En consecuencia, el gobierno de la República Mexicana ha planteado diversas acciones que se enmarcan en el Programa de Desarrollo Educativo 1995-2000, tendientes a impulsar valores y actitudes que permitan a los alumnos mejorar su aprendizaje. Dicho programa hace hincapié en la preocupación gubernamental por los bajos niveles de conocimientos matemáticos logrado por los alumnos y egresados del sistema educativo. En relación con los egresados se ha señalado que su desempeño es aún insuficiente y su preparación académica todavía es incompleta, se reconoce como uno de los problemas más serios, "el insuficiente dominio del lenguaje, de las matemáticas"[4].

También en la misma dirección, investigaciones, como la de Freudenthal (1983), han abordado el problema de la didáctica del álgebra. En este trabajo el autor, "se enfrenta con la problemática

---

[4] SEP. *Programa de Desarrollo Educativo 1995-2000, Cap. III. Sección 3.2. Calidad.* México, http://www.sep.gob.mx.

de convertir el álgebra simbólica, por medio de la enseñanza, en un lenguaje para ser aprendido y utilizado"[5].

Por otro lado, se manifiesta en todo su esplendor la intención de fortalecer la enseñanza de la matemática en el nivel básico. Esto con el fin de orientar los esfuerzos en la formación de los sujetos desde los primeros niveles de la escolaridad buscando con ello que estén más preparados, que sean capaces de aprender, de adecuarse continuamente a nuevos entornos y de afrontar los desafíos que la sociedad le impone.

Mientras que, se ha promovido en los alumnos la adquisición de algoritmos o fórmulas vía la memorización, quedando los conceptos relegados a ideas confusas y poco accesibles. Así, en el otro sentido, se plantea la enseñanza del álgebra, en oposición a considerar sólo el conocimiento matemático como una serie de datos arreglados sistemáticamente.

Lo anterior implica abandonar las viejas formas de enseñanza de las matemáticas que han predominado a lo largo de la historia y, han demostrado su inoperancia y fracaso. Es necesario desterrar la idea de que para aprender matemáticas basta con adquirir los algoritmos o fórmulas vía la memorización.

Por ello, la escuela en la actualidad debe orientarse a promover una cultura matemática en la que se incluyan conocimientos, se desarrollen estrategias y, sobre todo se promueva una actitud reflexiva hacia este tipo de conocimientos.

---

[5] Castillo, Luis y Gallardo, Aurora (1996). *Pragmática de los lenguajes químico y algebraico en el ámbito escolar.* Educación Matemática, Vol. 8, N°

La enseñanza de la matemática debe ser conceptualizada, hoy en día, no como actividad de pura transmisión de un conocimiento fijo y acabado, sino que debe ser vista como una actividad que debe fomentar en el alumno la curiosidad y una actitud reflexiva. Tarea en la que se debe involucrar a todos los profesores de todos los niveles.

Obviamente, la calidad educativa no sólo compete al docente. En la calidad educativa concurren actores y elementos muy diversos: profesores, alumnos, planes y programas de estudio, labores de investigación, servicios y materiales de apoyo, financiamiento, investigación y evaluación educativa, todos importantes en sí mismos y también por la forma en que se combinan. Actualmente se presentan problemas en cada uno de ellos que habrá que solucionar para mejorar la calidad de la educación.

3. Objetivos

Analizar la problemática específica que plantea la resolución de problemas algebraicos en los alumnos de secundaria.

Hacer una revisión teórica de los modelos de la enseñanza de la matemática así como lo relativo a la enseñanza del álgebra y la resolución de problemas.

Conocer las estrategias que emplean los alumnos de la escuela secundaria en la resolución de problemas.

2, Ed. Iberoamericana, México, p. 44.

Diseñar y someter a experimentación pedagógica una estrategia metodológica formada por tres etapas: la concreta, la geométrica y la simbólica en la enseñanza del álgebra.

Evaluar la pertinencia de la estrategia diseñada para la enseñanza de la resolución de problemas algebraicos a partir de elementos geométricos y aritméticos.

4. Hipótesis

Los alumnos de la escuela secundaria utilizan estrategias cognitivas elementales (como ensayo y error) y, el uso de "fórmulas" en la resolución de problemas algebraicos.

El uso de material tangible para la enseñanza del álgebra es un puente de vinculación entre la aritmética (vía el perímetro y área) y el arribo a la representación simbólica del álgebra.

El empleo de material concreto y tangible para la enseñanza del álgebra facilitará la comprensión de los conceptos de multiplicación y factorización de polinomios y, promoverá la puesta en práctica de estrategias metacognitivas como son la anticipación, el monitoreo y la visión retrospectiva en la resolución de problemas de tipo algebraico.

5. Marco Teórico

5.1. Modelos teóricos en la enseñanza de la matemática

En la última década se ha desatado una gran polémica entre los educadores ligados al campo de la enseñanza de la matemática, sobre cuál es o cuáles son los modelos más apropiados para promover el aprendizaje de matemática. A lo largo de la historia de la educación han existido diferentes modelos de enseñanza de la matemática que han evolucionado a partir del desarrollo de esta disciplina, de los aportes de la psicopedagogía y otras disciplina vinculadas a lo educativo.

5.1.1. El modelo teoricista en la enseñanza de la matemática.

Prevaleció en el curriculum escolar durante la década de los sesentas. Dentro de este modelo[6] se agrupan las tendencias, que poniendo el acento en los conocimientos acabados y cristalizados en las "teorías" consideran la resolución de problemas como un aspecto secundario dentro del proceso didáctico. La actividad matemática se pone entre paréntesis y sólo se toma en consideración el fruto final de esta actividad, en particular se ignoran las tareas dirigidas a elaborar estrategias de resolución de problemas y, por tanto, los problemas tienden a ser trivializados y descompuestos en ejercicios rutinarios. Es decir, los problemas o "ejercicios" están absolutamente determinados a priori por la teoría a la que sirven.

[6] Santos Trigos, Luz Manuel (1997). *La formulación de problemas para una instrucción y evaluación matemática balanceada*, en Estudios en Didáctica. Grupo Editorial Iberoamericano, México. P. 281-288.

El modelo teoricista también abandona la geometría, el pensamiento geométrico pasa por un profundo desprecio. Con la idea de ir tras los fundamentos de la matemática se puso énfasis en la teoría de conjuntos y la búsqueda de rigor lógico[7]. Bajo esta escuela se fomentó la presentación de los temas matemáticos en forma tensa, rigurosa, desprovisto de motivación alguna y en algunos casos tan cuidadosamente pulido que resultará casi ininteligible.

Para evitar llegar al extremo en que incurrió el teoricismo, surge una corriente sobre la enseñanza de la matemática, el cual configura un modelo al que le daremos el nombre de "Tecnicismo".

5.1.2. El modelo tecnicista en la enseñanza de la matemática.

Se manifiesta a principios de los setentas, en contraposición al desprecio o la poca importación otorgada por el modelo teoricista al uso de las técnicas matemáticas. Primordialmente, el tecnicismo plantea solamente aquellos ejercicios que sirven para llegar a dominar los procesos algorítmicos. Surgiendo una apología por el dominio de las técnicas especialmente de las algorítmicas que son las más visibles, como objetivo último del proceso de aprendizaje.

El tecnicismo parte de ciertas técnicas, excluye las estrategias no algorítmicas, y plantea solamente aquellos ejercicios que sirven para llegar a dominarlas. El énfasis tan exclusivo en las técnicas simples hace olvidar otras características de los problemas, que son aquellos cuya

[7] Para una discusión más amplia sobre los efectos del "formalismo" en la educación matemática ver: Lakatos I. (1977). *Proof and refutations*.

dificultad principal consiste en elegir las opciones adecuadas para plantear estrategias de resolución de un repertorio amplio de problemas.

De acuerdo con Josep Gascon (1994), los modelos teoricistas y tecnicistas, constituyen el modelo tradicional en la enseñanza de la matemática, los cuales “comparten además una concepción psicológica ingenua del proceso didáctico, que tiene en el conductismo su referencia más clara, y que considera al alumno como una caja vacía que debe llenarse a lo largo de un proceso gradual... o bien como un autómata que mejora el dominio de las técnicas mediante la simple repetición"[8].

5.1. 3. El modelo modernista en la enseñanza de la matemática.

Alcanza su máximo florecimiento a finales de la década de los setentas y principios de los ochentas en oposición a los extremos que exhibe el modelo tradicional. El Modelo Modernista surge ante la necesidad de rescatar la actividad de resolución de problemas en sí misma y junto al fracaso absoluto de los alumnos ante la dificultad de escoger el teorema adecuado o la técnica pertinente para resolver un problema.

El Modelo Modernista tiende a identificar la actividad matemática con la exploración de los problemas, es decir, con las tareas que se realizan cuando todavía no se sabe gran cosa de la solución. Luego se ensayan algunas técnicas para comprobar a donde nos puede llevar, se

---

Cambridge: Cambridge University Press. U.K.

[8] Gascon Josep (1994). *La resolución de problemas en la enseñanza de la matemática.* Educación matemática, Vol. 6 N° 3, Grupo Editorial Iberoamérica. México, p.40.

intenta aplicar éste o aquel resultado, se buscan problemas semejantes, etc. El modelo modernista se caracteriza por conceder una preeminencia absoluta al momento exploratorio. Ello quiere decir que identifica "enseñar" y "aprender matemáticas", con enseñar y aprender ésta actividad exploratoria.

Según Josep Gascon (1994), el modelo modernista "pretende superar al conductismo clásico, coloca en su lugar una especie de "activismo" que no deja de constituir otra modalidad del psicologismo ingenuo fundamentada en una interpretación muy superficial de la psicología genética "[9]. Desde esta perspectiva, el aislamiento y la descontextualización de los problemas que ya era preocupante en el modelo tradicionalista, no hace más que agravarse en el modelo modernista.

5.1.4. El modelo constructivista en la enseñanza de la matemática

Si algo comienza a estar claro hoy, precisamente, es la necesidad de romper con la idea ingenua, pero extraordinariamente extendida, de que enseñar es "fácil", "cuestión de personalidad", "de sentido común", "de encontrar la receta adecuada". Debemos terminar con esa práctica pedagógica de la mera transmisión, que concibe la enseñanza de la matemática como un producto ya elaborado que debe ser trasladado al estudiante mediante un discurso que <<cure su ignorancia>>.

La renovación de la enseñanza matemática no puede ser cuestión de simples retoques, sino que exige nuevas características y se enfrenta con las dificultades de un nuevo modelo. Si

[9] Op. cit. Gascon Josep (1994). p 42.

bien, tras varias décadas de esfuerzos innovadores no se ha producido una renovación efectiva de la enseñanza de la matemática, ello puede ser atribuido, precisamente a la falta de comprensión de la coherencia global de los diferentes modelos propuestos y, a la ausencia de un nuevo modelo capaz de dar respuesta a las dificultades encontradas.

Ante el problema central de la psicología de la enseñanza de la matemática de proveer de una teoría que facilite la intervención en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática, los investigadores matemáticos ven con buenos ojos el constructivismo como una propuesta alterna.

El modelo constructivista hoy en día está jugando el papel integrador, tanto de las investigaciones en los diferentes aspectos de la enseñanza-aprendizaje de la matemática, como de las aportaciones procedentes del campo de la sociología, la epistemología y la psicología del aprendizaje. De este modo, las propuestas constructivistas se han convertido en el eje de una transformación fundamental de la enseñanza de la matemática.

Los investigadores toman el constructivismo como un marco teórico que guía el desarrollo de las actividades instruccionales que, facilitan al alumno una construcción progresiva de conceptos y procedimientos matemáticos cada vez más abstractos.

Sin embargo, no hay unificación de lo que significa el constructivismo en la enseñanza de la matemática. Las raíces ambiguas del constructivismo se encuentran en la filosofía, la sociología y en la psicología. Según Paul Ernest[10] (1992) se distinguen dos tipos de constructivismo. El Constructivismo Radical, el cual tiene como fundamento la teoría piagetiana de la mente y el Constructivismo Social el cual tiene como base la teoría vigotskiana de la formación social de la mente.

Kilpatrick (1987)[11], sostiene que el constructivismo radical y el constructivismo social tiene en común:

1. El conocimiento es construido por el que conoce; no se puede recibir pasivamente del entorno.
2. El proceso de conocer es una acción de adaptación del sujeto al mundo de su propia experiencia. Por lo tanto, no es posible descubrir un mundo independiente y pre-existente afuera de la mente del que conoce.

El primer principio no es cuestionable. Es evidente que la bifurcación del constructivismo (en radical y social), surge del segundo principio y sus interpretaciones. Sobre todo, es obvio que lo primero que debemos abordar es, que se entiende por "proceso de adaptación al mundo de la experiencia". Los constructivistas radicales son aquellos que aceptan ambos principios. Sin embargo, lo primero que tenemos que hacer es entender claramente la propuesta de cada uno de ellos.

---

[10] Ernest Paul (1992). *The Nature of Mathematicas: Towards a Social Constructivist Account. Science and Education.* Klawer Academic Publishers. Neatherlands.

[11] Kilpatrick, Jeremy (1987). *What constructivism might be in mathematics education.* en Bergeron, J.C., Herscovics, N. Y Kieran, C. (Eds.). Proceeding of the 11th International Conference for the Psychology of

5.1.4.1. La perspectiva radical

Los primeros trabajos sobre cognición hechos por Jean Piaget (1896-1980) ilustran, según Luis E. Moreno, una actividad metacognitiva temprana en los niños[12]. Piaget estudió la organización de los procesos del pensamiento en el niño y consideró la actividad cognitiva como un proceso envolvente de adaptación del pensamiento al entorno. Desde esta perspectiva se pone de moda un constructivismo radical del aprendizaje de la matemática, lo cual da cuenta de la construcción individual ideosincrática del significado. La teoría piagetiana describe la apropiación y desarrollo del conocimiento mediante procesos gemelos como la equilibración, asimilación y acomodación.

Piaget establece su Epistemología Genética (1970), sobre la base de que el conocimiento se construye mediante la actividad del sujeto sobre los objetos. Los objetos matemáticos ya no habitan en un mundo eterno y externo, sino que son producidos, construidos, por el sujeto mismo en un proceso continuo de asimilaciones y acomodaciones que ocurre en sus estructuras cognoscitivas. El sujeto se acerca al objeto de conocimiento dotado de ciertas estructuras intelectuales que le permiten "ver" al objeto de cierta manera y extraer de él cierta información, misma que es asimilada por dichas estructuras. La nueva información produce modificaciones, -acomodaciones- en las estructuras intelectuales, de tal manera que cuando el sujeto se acerca nuevamente al objeto lo "ve" de manera distinta

---

Mathematics Education Vol. 1. (pp. 3-27). Montreal: Université de Montréal.

a como lo había visto originalmente y es otra la información que ahora le es relevante. Sus observaciones se modifican sucesivamente conforme lo hacen las estructuras cognoscitivas, construyéndose así el conocimiento sobre el objeto.

Una tesis fundamental de la teoría piagetiana es que todo acto intelectual se construye progresivamente a partir de estructuras cognoscitivas anteriores y más primitivas. Con este fin analiza la génesis de las nociones lógico-matemáticas, y encuentra que su origen está vinculado a dos tipos de experiencia: una física y la otra lógica-matemática. Mediante el primero, el niño advierte en los objetos diversidad en: densidad, dureza, solidez, etc.; el segundo, permite al sujeto obtener conocimientos a partir de la acción y no a partir de los objetos mismos. Se trata de encontrar ciertos aspectos que no son físicos, como orden, relación, suma, etc., que se evidencian cuando tenemos por delante un conjunto de objetos.

El conocimiento matemático, para la epistemología genética, es resultado de esta reflexión sobre acciones interiorizadas en donde se enfatizan los aspectos individuales de la construcción del conocimiento matemático pero también se hace énfasis en la complementariedad de la negociación con las normas del salón de clase.

El Foro Internacional sobre Psicología de la Educación Matemática, celebrado en Japón en 1987, y la National Council Teachers of Mathematics han sometido a discusión sobre la posibilidad de que los alumnos, por si solos, construyan los conocimientos matemáticos tal y como lo sostiene

---

[12] Moreno Luis E. (1996). *La epistemología genética; una interpretación.* Educación Matemática. Vol. 8 N° 3. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

la perspectiva radical[13]. Esta postura ha recibido fuertes criticas debido a que no es posible que los alumnos, por si solos, puedan construir los conocimientos que tanto tiempo y esfuerzo exigieron a los más relevantes matemáticos. Esta y parecidas críticas se repiten una y otra vez. Es difícil no estar de acuerdo, por supuesto, en que los sujetos por si solos no pueden construir los conocimientos científicos. En el mismo sentido, Cobb (1990a)[14] afirma que exigir que los sujetos descubran la matemática en su propio yo es un absurdo. Se trata de favorecer una propuesta de investigación colectiva, alejada tanto del descubrimiento autónomo como de la mera transmisión de conocimientos ya elaborados.

Ante tales observaciones, Cobb (1990b)[15] establece algunos criterios fundamentales del constructivismo radical en el terreno del conocimiento matemático en los siguientes términos:

1. El aprendizaje debe ser una actividad tanto interactiva como constructiva, esto es, se debe siempre fomentar la discusión y negociación creativa, en la cual la voz del estudiante sea genuina.
2. Se debe fomentar la presentación y discusión de puntos de vista conflictivos.
3. La reconstrucción y verbalización de las ideas matemáticas en el aula.

---

pp. 5-23.

[13] Davis, R. B., Maher, C.A., y Nodding. N (Eds.) (1990). *Constructivist views on the teaching and learning of mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

[14] Cobb P. (1990). *Reconstructing elementary school mathematics*. University of Newcastle: faculty of education.

[15] Cobb, P. (1990). *Multiple perspectives*. In L.P. Steffe & T. Wood (Eds.). *Transforming Children's mathematics education: International perspectives*. Madison, Wisconsin: University of Wiscinsin. (pp. 92-130).

4. Se establece una relación asimétrica, en donde los alumnos y los profesores deben aprender a tomar una sana distancia entre ellos, desde actividades interactivas y continuas con la intención de entender e interpretar soluciones alternativas.
5. Se hace necesario trabajar hacia el consenso en el cual las ideas matemáticas tengan coherencia.

Ante tales propuestas, desde principios de los 90's un número considerable de investigadores como Wood (1992) y Yakel (1992)[16], Murray (1992)[17], claman por un constructivismo radical, pero también hacen énfasis en la negociación de las normas del salón de clase, argumentando que el conocimiento matemático posee ambos aspectos tanto el individual como el social. En el mismo sentido, Stanik y Kilpatrick (1992)[18] identifica en sus investigaciones algunas características constructivistas radicales que reúne el enfoque de la resolución de problemas.

---

[16] Cobb, P. Yakel, E. & Wood, T. (1992). *A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education.* Journal for Research in Mathematics Educations.
[17] Murray, H. (1992). *Learning mathematics through social interaction.* Paper presented to working group 4, ICME 7, Conference, Quebec.
[18] Stanik y Kilpatrik (1992). *Learning to think mathematically problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics.* Handbook for

5.1.4.2. La perspectiva social

En párrafos anteriores mencionamos la necesidad de reconciliar el conocimiento matemático individual y la naturaleza social de la escuela y su contexto. Para lograr esto se propone una teoría en la cual el conocimiento tenga sentido tanto en los procesos individualses y sociales. El constructivismo social ofrece esta posibilidad[19] .

El termino "constructivismo social" apareció en la filosofía en los 80's, aunque este puede ser identificados mucho antes, por ejemplo, en los trabajos de Wittgenstein, L. (1956), Thomas Kuhn (1962), Imre Lakatos (1976) y Gastón Bachelard (1984). También dentro de esta misma década, las teorías del aprendizaje reciben la influencia del Constructivismo Social de Vygotsky, lo cual puede apreciarse, con distintos matices, en los trabajos de propulsores del constructivismo social del aprendizaje en los niños como son: Jerome Bruner (1960), Pollord (1987) y Wertsch, J. (1988), entre otros.

En el campo de la enseñanza de la matemática, el constructivismo social genera dos posturas. La primera es la construcción social de la teoría del aprendizaje planteada por

---

research on mathematics teaching an learning. New York, MacMillan, USA. pp. 334-370.

[19] Según Paul Ernest (1994). *What is social constructivism in te psychology of matematics education*. University of Exeter, United Kindom, hay pocas referencias explícitas del constructivismo social en el trabajo del interaccionismo simbólico y etnometodológico y los trabajos realizados por Mead (1934), y Berger y Luckmann (1966), se centran en el constructivismo social de las relaciones sociales personales e interpersonales. En los 70's la construcción social del conocimiento esta inspirado en la tesis de Esland, Young, Bernstein, y otros.

Weinberg y Gavelek (1987)[20] cuyo objetivo primario es explicar la construcción social del conocimiento científico incluyendo el matemático. Estos autores plantean la socialización como un proceso dialéctico compuesto por tres momentos (exteriorización, objetivación e interiorización) y en donde el punto central de estos procesos es lo que se va a entender por interiorización. Desafortunadamente Weinberg y Gavelek no lograron desarrollar una teoría explícita de la apropiación del conocimiento matemático. Correspondio a Paul Ernest (1990)[21] plantear una teoría completa en este ámbito, cuyos elementos centrales abordaremos más adelante.

La segunda postura proviene de la sociología matemática de Restivo (1988)[22] la cual intenta dar respuesta a grandes interrogantes como las siguientes: ¿cómo reconciliar las estrategias de lo individual y lo colectivo?, ¿cómo reconciliar el desarrollo conceptual de lo individual con la naturaleza social de la escuela matemática y su contexto?, ¿cómo reconciliar lo individual y lo social?. Este autor inicia una discusión en la cual tiene sentido el conocimiento matemático tanto en los procesos individuales como en los sociales.

Ernest (1992)[23] ha venido desarrollando una forma de constructivismo social, en la que se extraen las raíces vigotskyanas para la explicación del conocimiento matemático. Desde este punto de vista, se observa al ser individual y, a la esfera de lo social como sistema indisolublemente interconectados con elementos humanos formados a través de sus

---

[20] Weinberg y Gavelek (1987). *A social constructivist theory of instruction and the development of mathematical cognition.* Proceding of PME II, Montreal, Canada, pp. 346-352.
[21] Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education.* London, Palmer.
[22] Restivo, S. (1988). *The social construction of mathematics.* ZDM, 20 I, pp. 15-19.

interacciones con los otros (tanto por su proceso individual) en contextos sociales. Esta versión del constructivismo social no subraya la metáfora de la mente totalmente aislada, por el contrario, favorece la metáfora de la conversación y la comprensión del significado lingüístico. Ernest brinda, al detalle, una explicación del carácter subjetivo de la construcción del conocimiento

Sin embargo, ante esta conjunción (de las teorías del constructivismo radical y el constructivismo social), se eleva la pregunta en cuanto a su consistencia mutua. En respuesta a esto, se dice que se trata de diferentes dominios, y ambos involucran una negociación social en su frontera. Así, la inconsistencia parece imposible.

Harre Rom (1979), en el mismo sentido de P. Ernest, ha elaborado una cíclo-interpretación vigotskyana del desarrollo de la mente, identidad personal y adquisición del lenguaje. En su propuesta del constructivismo social, sugiere una amplia gama de líneas de investigación en la que se contemplan las siguientes:

1. La adquisición y la transformación de destrezas en las representaciones semiótica de la escuela matemática.
2. El aprendizaje de las formas retóricas aceptadas del lenguaje matemático escolar, (ambos el hablado y el escrito).
3. El papel crucial del profesor en la correcta producción del conocimiento por parte del alumno.

---

[23] Op. Cit. Ernest Paul (1992).

4. La importancia del contexto social en la enseñanza de la matemática, para ver a esta en toda su complejidad y forma de vida organizada que incluye; (a) personas, relaciones y funciones, (b) material de investigación, el discurso de la matemática escolar, ambos contenido y forma. El conocimiento matemático público y privado, todo en un patrón cíclico de apropiación, transformación, publicación y conversación.

Este último punto, es el origen de partida de la propuesta de Alan Schoenfeld (1994) sobre la Resolución de Problemas en la Enseñanza de la Matemática. Este autor sostiene que, si la matemática es vista como una construcción social, entonces los objetivos de la enseñanza necesitan ser reformulados para dar a todos los grupos más acceso a sus conceptos, para enriquecer y potencializar su conocimiento. Donde el contexto social del uso y practica de la matemática no puede hacerse a un lado.

La polémica generada entre el constructivismo social y el constructivismo radical en el campo de la enseñanza de la matemática no ha concluido. Si bien la perspectiva vigotskyana ha tenido una amplia aceptación, entre los educadores e investigadores, hemos de reconocer que los trabajos de Piaget y algunos de sus seguidores, sobre los aspectos cognitivos de la enseñanza matemática, ofrecen nuevas y novedosas perspectivas teóricas, metodológicas y prácticas que serán de mucha utilidad para mejorar los procesos de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

5.2. El constructivismo y la resolución de problemas

Los educadores y los matemáticos inauguraron la década de los ochenta, con fuertes y apasionadas discusiones sobre los valores y deficiencias de las tendencias de la enseñanza matemática. Se inauguraba una intensa búsqueda por parte de la comunidad matemática internacional para encontrar formas más adecuadas de afrontar los nuevos retos que demanda la problemática soslayada.

Correspondió a Imre Lakatos (1977), en su tesis doctoral Proof and Refutations[24], plantear la insuficiencia del razonamiento axiomático para alcanzar las verdades de la matemática misma además de brindar los elementos para fundar una nueva perspectiva de la apropiación del conocimiento matemático.

Por ejemplo se había evidenciado el fracaso de las propuestas modernistas las cuales planteaban regresar a lo básico, promover destrezas orientadas e impulsar prácticas jerárquicas para enseñar y aprender matemáticas produjeron una generación de estudiantes con una visión mecánica y parcial de la matemática.

No obstante, que la resolución de problemas como enfoque para la enseñanza de la matemática, no es nuevo ni tampoco es una moda, pues según señalan Stanic y Kilpatrick (1988) ésta ha formado parte del curriculum escolar matemático según textos que datan del año de 1650 antes de Cristo[25], la propuesta se hace vigente.

[24] Op. cit. Lakatos I. (1977).
[25] Maria L. Fernández, Nelda Hadway, and James W.Wilson (1994). *Problem solving: Managing it all.* Mathematics Teachers, Vol. 87, N°3. USA. p. 195

Ya en el siglo XVII, el matemático francés René Descartes (1596-1650) dió a conocer, en su libro Rules for the Direction of Mind, reglas básicas para resolver cualquier tipo de problemas y en Discurse on the Method presentó estrategias generales y reglas específicas para resolver cierto tipo de problemas[26].

En la época actual, el modelo de la resolución de problemas, fue el punto de convergencia para que matemáticos y educadores matemáticos reflexionaran sobre su quehacer cotidiano a través de varios foros. Uno de los más trascendentales fue el celebrado en 1980 en los Estados Unidos de Norte América. La National Council of Teacher of Mathematics (NCTM) establece categóricamente una agenda para la acción, en la que recomienda mejorar la calidad de la enseñanza matemática, proponiendo cambios en las currícula, programas para el mejoramiento académico del profesorado y además establece como propuesta académica principal la resolución de problemas. De la misma manera, en nuestro país académicos interesados en los procesos educativos en el campo de la matemáticas de instituciones como el Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del IPN (CINVESTAV) y de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México han desarrollo innumerables propuestas [27].

---

[26] Santos Trigo M. (1992). *Resolución de problemas; El trabajo de Alan Schoenfeld: una propuesta a considerar en el aprendizaje de las matemáticas.* Educación Matemática. Vol 4, N° 2, Grupo Editorial Iberoamérica. México, p. 16.

[27] Destacan entre otros, académicos como Carlos Armando Cuevas, Santos Trigo, Claudia Margarita Acuña, Luis Moreno Armella, Fernando Hitt.Para mayor referencia véase Hitt Fernando (1998). *Investigaciones en Matemática Educativa II.* Centro de Investigación y de Estudios Avanzados IPN. Grupo editorial Iberoamérica, México.

Alan Schoenfeld, continuador de las aportaciones hechas por Polya en 1945[28], desarrolló la propuesta más interesante sobre la resolución de problemas. Acerca de las creencias de los alumnos sobre la matemática, a lo largo de sus años de investigación, Schoenfeld[29] ha detectado en los alumnos diversas creencias sobre el aprendizaje de la matemática, por ejemplo que, la solución de problemas sólo tiene un camino para llegar a la respuesta correcta en la cual la actividad matemática es una actividad solitaria, hecha por individuos aislados, o que, la matemática aprendida en la escuela tiene un poquito o nada que ver con el mundo real o cotidiano, entre otras.

El método desarrollado por Schoenfeld (1992)[30] presenta un conjunto de heurísticas, centradas en estrategias de control y regulación, además de indagar las creencias personales de los alumnos acerca de los sistemas matemáticos. Además, retomando las propuestas de P. Cobb, incluye el modelado explícito de estrategias para la resolución de problemas y proporciona una serie de ejercicios estructurados para que el estudiante las practique ya sea, tato en pequeños o grandes grupos como individualmente.

En su proceso de investigación emplea una táctica que él llama "análisis postmortem", la cual consiste en desandar la solución del problema reciente, abstrayendo o generalizando estrategias y componentes. Otra interesante táctica empleada consiste en "poner en duda al profesor", esto es, los alumnos seleccionan problemas desafiantes para que el profesor los resuelva. Esto sin duda alguna, da lugar para que los estudiantes sean testigos de falsos inicios y finales

---

[28] Polya, G. (1973). *How to solve it*. Princeton, NJ: Princeton University Press. USA (Copiado del original de 1945).

[29] Santos Trigo (1996). *Análisis de algunos métodos que emplean los estudiantes al resolver problemas* matemáticos con varias formas de solución. Educación Matemática. Vol. 8, N° 2.Grupo Editorial Iberoamérica. México, pp. 57-69.

equivocados, por parte del profesor. Generando en el alumno una creencia más acertada de lo que es la estructura de los problemas matemáticos. Bajo este modelo, se fomenta la comunicación entre los alumnos para el aprendizaje cooperativo reportando grandes avances en la adquisición conceptual de los esquemas de representación basados en la resolución de problemas matemáticos.

A la pregunta ¿qué tipo de problemas promueven o motivan a los estudiantes a discutir y valorar el uso de diversas estrategias?, Schoenfeld reportó, a partir de sus investigaciones, que al enseñar los métodos heurísticos en una forma general no influía para que los estudiantes asimilaran los aspectos relacionados con la selección de las estrategias más apropiadas y la decisión de cuando utilizarlas. Sugiere entonces discutir con los alumnos, "el uso de las estrategias en contextos particulares e ilustrar... una amplia gama de sub-estrategias importantes que deben conceptualizarse... en la búsqueda de patrones; consideración de polinomios fáciles de factorizar; consideración del círculo unitario, triángulo equilátero, o cuadrado"[31]. Sostiene, además, que la discusión debe acompañarse de una reflexión constante sobre las posibles limitaciones de las estrategias metacognitivas, en donde se incluya una evaluación del proceso de solución. En este sentido, un componente importante en la instrucción matemática es el tipo de problemas que se utilizan tanto en las discusiones de clase como la evaluación de los alumnos.

---

[30] Schoenfeld A. (1992). *Handbook for research on mathematics teaching and learning* (D. Grows, De.). New York: MacMillan.

[31] Santos Trigo (1997). *La formulación de problemas para una instrucción y evaluación matemática balanceada*. Estudios en didáctica. Grupo Editorial Iberoamérica, México, p. 283.

En México, por citar un ejemplo, Santos Trigo (1997)[32] al aplicar el modelo desarrollado por Shoenfeld, propone algunos criterios que pueden guiar el diseño de problemas que ofrezcan un potencial matemático para el salón de clases en los siguientes términos: 1) sin ser fáciles, los problemas deben ser accesibles a los estudiantes en base a sus conocimientos previos. No deben requerir el uso de ideas muy sofisticadas o gran cantidad de procedimientos mecánicos; 2) Los problemas deben demandar un plan de reflexión, es decir, que no puedan resolverse instantáneamente; 3) los problemas deben poder resolverse por medio de diferentes formas; 4) los problemas no deben involucrar trucos o consideraciones que están fuera del alcance de los alumnos; 5) los problemas deben poder extenderse o generalizarse a otros contextos donde se muestren exploraciones o conexiones matemáticas; 6) cuando un alumno resuelva un problema, deberá dar cuenta del plan de solución como de las estrategias utilizadas.

5.3. La actividad metacognitiva como elemento rector en la resolución de problemas matemáticos

El metaconocimiento es un campo floreciente de investigación y con un área de problemas importantes que exigen cierta atención. A la pregunta ¿qué debemos entender por metaconocimiento?, se encuentran múltiples respuestas dado que, cada una de ellas esta fuertemente condicionada por ciertos modelos epistemológicos implícitos.

Cuando Flavell, J. (1977) se refiere al metaconocimiento, se refiere al proceso de reflexión individual que cada sujeto realiza de su propio proceso cognitivo. La metacognición, por

[32] Op. cit. Santos Trigo (1997), pp. 281-288.

tanto, implica un examen activo y una consiguiente regulación y organización de los procesos psicológicos en relación con los objetivos cognitivos sobre los que versan, por lo general, al servicio de algún fin u objetivo concreto"[33].

A la par, que se han hecho investigaciones sobre los aspectos teóricos generales de la metacognición, también se han hecho importantes contribuciones en aplicaciones educativas. Muchos investigadores convencidos de la relevancia educativa que la teoría metacognitiva tiene para profesores y estudiantes, están desplazando su atención desde lo teórico a lo práctico, desde el laboratorio al salón de clases. Se argumenta que las teorías metacognitivas tienen un considerable potencial para ayudar al profesor, en la medida en que éstos construyan en el salón de clase un entorno que favorezca el aprendizaje de estrategias París y Winograd (1990) argumentan que los estudiantes "pueden potenciar su aprendizaje tomando conciencia de su propio pensamiento y la resolución de problemas en la escuela. Los maestros pueden promover esta conciencia informando a los estudiantes de las estrategias efectivas para la resolución de problemas y discusiones cognitivas"[34].

Ante la problemática sobre la enseñanza de estrategias metacognitvas, los investigadores como Polya (1945) y Schoenfeld (1985)[35], se hicieron preguntas como la siguiente; ¿puede la instrucción metacognitiva, en el área de la matemática, facilitar los procesos de aprendizaje?

---

33 Moreno, A. (1989). *Metaconocmiento y aprendizaje escolar*. En cuadernos de Pedagogía, N° 173, Barcelona, De. Fontalba, p. 54.

34 Paris y Winograd, (1990). *How metacognition can promote academic learning and instruction*. En B.F. Jones y L. Idol (Eds.). *Dimension of thinking and cognitive instruction* Hillsdale, NJ: Erlbaum. p. 15.

35 Schoenfeld, A. (1985). *Metacognitive and epistemological issues in mathematical understanding*. En E.A. Silver, Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Desde diferentes dominios investigadores como J. Kilpatrick (1985), Alan Schoenfeld (1992), Carolyn Kieran (1995), Santos Trigo (1997) y Miguel de Guzmán (1998), entre otros, están de acuerdo en que el aprendizaje es de tiempo completo al estudio, los estudiantes deben tomar conciencia de ser sujetos autorregulados, quienes pueden conscientemente alcanzar objetivos específicos.

Desde el seno de la enseñanza de la matemática se ha desarrollado un especial interés por las estrategias de razonamiento y la resolución de problemas. Las investigaciones realizadas parecen indicar que no existen procedimientos generales que se puedan enseñar para aplicar a todos los tipos de problemas. Las estrategias son, por lo tanto, específicas a cada área ya que dependen de los conocimientos previos, el contenido de la tarea, la estructura que presente y las instrucciones que se brinden.

5.4 El papel del profesor en la enseñanza de estrategias metacognitivas.

Corresponde al profesor desarrollar su intervención pedagógica en el aula tomando en consideración, por un lado, los conocimientos previos que tiene el alumno sobre contenido específico y por el otro, el grado de dificultad del conocimiento o tarea a la que se enfrenta. De tal manera que el profesor va graduando su ayuda y las explicaciones que da al respecto pueden ir desde mostrar íntegramente cómo se realiza la tarea o dando una serie de soluciones que le muestra cómo resolver un problema en sus distintas etapas hasta su conclusión, dejando luego que el alumno intente hacerlo, buscando alternadamente que los alumnos que ya comprendieron el proceso ayuden a sus compañeros menos hábiles, hasta que el alumno logra por sí solo reproducir en un primer momento y más tarde, con la acción, dominarlo.

Al modelar las estrategias ante sus alumnos, el profesor debiera no sólo mostrarles cómo utilizarlos y cómo razonar durante el proceso, sino a la vez, fomentar para que expresen cuándo se ha de utilizar esa estrategia. Este aspecto del modelado sirve para que los alumnos desarrollen los procesos metacognitivos necesarios para la buena comprensión. Para que el segmento de enseñanza sea efectivo, debe ir seguido de suficientes oportunidades para que el estudiante practique la estrategia.

El modelado no debiera culminar en este punto para completar el procedimiento, el profesor debe pedir a sus alumnos que verbalicen la forma en que han utilizado este proceso en la solución de problemas. Por otra parte, el profesor no debe obsesionarse con que sus alumnos identifiquen explícitamente ciertos procesos en la solución de un problema. Es posible que un alumno comprenda bien un problema planteado, aún cuando no sepa decirnos qué estrategias y procesos está utilizando. El profesor ha de recordar que lo más importante es la comprensión, y no el recitado de las estrategias en juego.

Otra función importante del profesor es la regulación, en la cual es preciso modelar y verificar su desempeño durante la realización de la tarea para asegurarse de que han comprendido los elementos centrales del problema. Si el proceso no tiene éxito, si no se entiende, es preciso detenerse, volver atrás y reconceptualizar para intentar suplir la falta de comprensión.

Por lo que se refiere al contenido, el profesor debe verbalizar los procesos de pensamiento bajo los cuales suele dar solución a un problema matemático, resumir ideas en un paso, deducir el significado de palabras desconocidas, representar y resolver un problema en distintas formas, organizar información complicada. Es igualmente importante, que verbalice sus dudas e inquietudes surgidas en el proceso. Al respecto Miguel de Guzmán y Daniel Gil señalan, "realizar la solución del problema que se trate verbalizando al máximo, fundamentando lo que se hace y evitando, una vez más, operativismos carentes de significación"[36].

Este tipo de pensamiento en voz alta, cuando las cosas no son fáciles es invaluable como ayuda para que los estudiantes entiendan que tipo de esfuerzos se requieren para aprender, y que son con frecuencia dificiles para el estudiante. Similarmente debe mostrar a los estudiantes como pensar ante situaciones conflictivas.

Los estudiantes se preparan para aprender en muchas formas pero es especialmente importante fomentar en ellos actitudes metacognitivas. Mediante el modelado los estudiantes aprenden a tomar la responsabilidad de ajustar, autosugerir y cuestionar a los demás. Tales actividades, señala Fernández, (1994)[37] son empleadas por los estudiantes para aprender, además, de vigilar que los progresos vayan encaminados hacia los propósitos establecidos con anterioridad.

---

[36] Gil, D. Y Guzmán, M. (1993). *Enseñanza de las ciencias y la matemática, tendencias e innovaciones*. Organización de los Estados Iberoamericanos. Sección II.2.3. Edición PDF. www.oei.org.co/oeivirt/

[37] Op. cit. María L. Fernández, Nelda Hadaway, and James W. Wilson (1994).

Sin embargo, el modelado de los procesos intelectuales ejecutivos involucrados en la solución de problemas, es mucho más que un simple esfuerzo como dice Rosemary Schmalz (1995)[38] pues los profesores no pueden simplemente presentar la solución del problema sino que deben describir sus procesos cognitivos y metacognitivos. Ellos deben explicitar sus acciones tanto como los procesos ejecutivos del pensamiento.

El modelado implica buscar ejemplos para evaluar el entendimiento del problema, generar posibles aproximaciones y monitorear el progreso. El profesor no debe rechazar ninguna de las sugerencias de los alumnos, más bien debe hacer preguntas que requieran la propia evaluación del alumno, para caracterizar sus propias sugerencias o progresos.

En síntesis, en la resolución de problemas ¿cuál debe ser el papel de los profesores y alumnos en la clase de matemáticas? Los profesores deben ser resolutores de problemas matemáticos en su intento por desarrollar en sus alumnos las estrategias para la solución de problemas. Deben ayudar a los estudiantes a desarrollar los procesos psicológicos ejecutivos en la solución de problemas asumiendo el papel de modelador.

La tarea del profesor en la enseñanza de la resolución de problemas no es la de proporcionar las respuestas a los estudiantes sino redirigir sus esfuerzos y ayudarlos, empleando diversas estrategias. Se debe tener presente que, el mayor principio de la enseñanza es proveer de la correcta cantidad de ayuda cuando los estudiantes la necesitan, ni demasiada ni muy poca, para que estos tengan tanta responsabilidad como les sea posible para su propio aprendizaje.

---

[38] Schmalz Rosemary (1995). *Problem-solving an attitude as well as a strategy*. National Council of Teachers of Mathematics, Inc. USA,

Capitulo II. El proceso de la investigación

2.1. Metodología

La aproximación metodológica utilizada en la presente investigación es de tipo cualitativa y comparte en mucho la perspectiva de indagación pedagógica de carácter experimental la cual consiste básicamente en propiciar en un grupo de alumnos una mejora en sus proceso de aprendizaje a través de un proceso de instrucción . El diseño experimental se realizó bajo el modelo de grupo único *pretest-postest*, según lo denomina Hayman[39].

Para dar cuenta del proceso de indagación-intervención se utilizaron los aportes del método clínico utilizado por Jean Piaget[40] a través de la entrevista de tipo clínica y la observación de aula.

La entrevista de tipo clínico se utilizó durante la etapa de evaluación inicial y final, también denominadas *pretest-postest*. Durante el interrogatorio el entrevistador se condujo bajo los canónes de este método dejándose conducir por el entrevistado en sus representaciones sobre el problema de base, tratando de no sugerirle nada y en obtener al mismo tiempo la información deseada.

Para el abordaje de las situaciones el entrevistado no realiza el interrogatorio a partir de una serie de preguntas preparadas de antemano, sino con base en el momento de su actuación donde su respuesta o su actuación generan la nueva pregunta o cuestionamiento, tratando siempre de entender su postura en relación al tópico en cuestión.

Las entrevistas con los alumnos, en la etapa de evaluación inicial, tuvieron una duración aproximada de 15 minutos y se realizaron después de aplicado el examen de conocimientos

---

www.enc.org/reform/journals/.

[39] Hayman, John L. (1991). *Investigación y Educación*. Piados-Educador, Barcelona, pp. 137-140.

matemáticos. El registro de las entrevistas se hizo de forma manual y en cinta magnetofónica.

En la etapa de evaluación final, el interrogatorio se realizó durante la ejecución de la tarea , esto es, mientras el alumno resolvia los problemas planteados en el pizarrón. El registro de las entrevistas y la ejecución de la tarea se hizo de forma manual y en citas videográficas.

Las observaciones de aula

La observación de aula se realizó con el fin de conocer las estrategias que utilizan los alumnos durante la resolución de los problemas planteados ya sea en forma indivudual o colectivo. El registro de los observables se hizo en forma manual por parte del investigador responsable y del auxiliar.

Muestra.

El proceso de intervención pedagógica se llevo a cabo en un grupo conformado por veitidós alumnos que cursaban el tercer grado en el turno matutino en diversos grupos de una escuela secundaria. El proceso de experimentación se realizo de septiembre a diciembre de 1998 y tuvo un duración de 45 horas.

Nuestra aproximación metodológica comparte mucho la perspectiva de indagación pedagógica de carácter experimental. Se diseño la metodología cualitativa de acuerdo a lo estipulado, entre

---

[40] Piaget, J. (1984). *La representación del mundo en el niño*. Ed. Morata, Madrid.

otros, por Morrales, M. y Moreno, R. (1993)[41], el cual consiste del diseño de grupo único experimental con pretest y postest, el diseño estuvo acompañado de la obseración y la entrevista de tipo clínica. Se trabajó con el grupo experimental de septiembre a diciembre de 1998, así como también, se hizó un registro cotidiano, de las acciones académicas más sobresalientes. El proceso de experimetación tuvo una duración de 45 horas.

Sujetos

Los alumnos que conformaron el grupo experimental fueron seleccionados por los profesores del plantel, entre aquellos que sin ser reprobados tenían bajo rendimiento escolar en matemáticas.

Los alumnos, de ambos sexos y cuyas edades fluctúaban entre los 13 y 14 años, procedían de familias de la "clase media"; eran hijos de profesionistas, profesores universitarios, profesores del nivel básico y pequeños comerciantes.

Escenario

La investigación se llevó a cabo en una Escuela Secundaria General, ubicada en la zona urbana de Culiacán. La fase de evaluación final se desarrolló en el Laboratorio de Matemáticas del Centro de Ciencias de Sinaloa[42].

[41] Morales, M. y Moreno, R. (1993). *Problemas en el uso de los términos cualitativo/cuantitativo en investigación eduativa*. En Investigación en la Escuela N° 21. Sevilla, pp. 39-50.
[42] El Centro de Ciencias de Sinaloa (CCS) fue creado en 1992, es una institución pública descentralizada del Estado de Sinaloa. Sus instalaciones se encuentran ubicadas en la ciudad de Culiacán, cuenta con

Materiales

Para el desarrollo del trabajo se formaron siete grupos de alumnos a quienes se les entrego suficientes piezas geométricas que les permitiera trabajar compartiendo el material e ideas con sus compañeros así como en forma individual.

Además de las piezas geométricas magnetizadas se utilizó pizarrón, gis y cámara de video para el proceso de evaluación final.

Instrumentos

Para la evaluación inicial se diseñó un examen escrito el cual fue acompañado de una entrevista individual para conocer las estrategias que utilizan los alumnos en la resolución de problemas. Las entrevistas tuvieron una duración promedio de 15 minutos.

2.1.1. Estrategia didáctica

No existe hasta el momento un acuerdo sobre cuál es el mejor método para afrontar el tratamiento de los problemas que presentan los estudiantes durante el aprendizaje de las matemáticas. Esto se debe a que existen diferentes supuestos sobre las causas que se consideran como los principales responsables de tales problemas.

---

salas museográficas y laboratorios. Entre sus principales funciones tiene el de realizar actividades de divulgación científica e investigación educativa. Se atienden grupos escolares para realizar actividades experimentales sobre todo de los niveles pre-universitarios.

Existen diversos programas que se han desarrollado para tratar la resolución de problemas, entre ellos podemos mencionar programas de instrucción directa, programas de tratamiento de las deficiencias cognitivas y los programas mixtos.

Los programas de instrucción directa, parten del supuesto de que todos los sujetos necesitan el mismo modo de instrucción aunque el ritmo sea diferente según las necesidades de cada uno. Asimismo, consideran que los problemas sobre el aprendizaje se debe fundamentalmente a que la enseñanza ha sido inadecuada en el modo o en el ritmo necesario en relación con el sujeto que se trate.

En esta propuesta, se operó bajo la perspectiva de un modelo de instrucción directa que tiene como base la teoría de la Zona de Desarrollo Próximo de Vygotski, según la cual el alumno aprende primero con la ayuda del profesor, hasta que una vez internaliza las estrategias el alumno actúa sin la presencia del profesor. Este modelo, sigue los siguientes pasos: primero, el profesor sirve de modelo desarrollando correctamente la actividad. Posteriormente, él y el alumno realizan conjuntamente la actividad, en la que este último va responsabilizándose progresivamente de la tarea hasta que, finalmente, es capaz de realizarla sin ayuda del profesor.

El modelado de las estrategias por parte del profesor consiste básicamente en manifestar en voz alta los pensamientos que normalmente se producen de forma encubierta durante el proceso de instrucción en la resolución de problemas, con el fin de mostrar al alumno como se resuelven los mismos. Para ello se requiere, en primer lugar, lograr la identificación expresa de la estrategia a utilizar así como la explicitación del uso de tal estrategia. Este tipo de conocimientos necesario para que el alumno pueda comprender mejor o realice una actividad metacognitiva y con ello aumente la posibilidad de que actúe en consecuencia y transfiera lo aprendido a otras situaciones. Este tipo de instrucción, explícita o directa, tiene como propósito "orientar la atención del sujeto hacia el proceso de comprensión y aumentar el conocimiento, uso y control de las estrategias en él implicadas"[43].

Desarrollo de una clase típica

En cada lección, como medio para la conversión de las acciones externas en internas, se propone abordar tres etapas en la solución de los problemas para llegar a la apropiación del conocimiento matemático: la etapa concreta, la geométrica y la simbólica.

La etapa concreta se aborda en la resolución de los problemas manipulando estrictamente las piezas geométricas. Ello implica conocer las propiedades de dimensión de las piezas, color, forma, peso, etc., y su equivalencia. Los alumnos identifican, nombran, comparan, y operan sobre las piezas geométricas. El lenguaje constituye en este caso un medio de comunicación.

La etapa geométrica, es el momento de vinculación entre objetos, áreas y perímetros, los cuales son manipulados simultáneamente. La función de esta etapa es asegurar que los estudiantes hagan la conexión entre, lo hecho con las piezas geométricas y el trazo de líneas, perímetros y áreas. Una base sólida para arribar a esta etapa es establecer la equivalencia entre la etapa concreta y su contraparte gráfica. El momento geométrico es un puente entre la etapa concreta y la simbólica. En esta etapa el alumno analiza figuras en términos de sus atributos, relaciones y

[43] Tapia, Alonso y Mar Mateos, Sanz (1987). *Entranamiento de habilidades cognitivas, comprensión lectora fundamentación teórica. Capítulo IV:*

se encuentran propiedades a través de la observación. El lenguaje es aquí, además de un medio de comunicación, una manifestación icónica de la acción.

En la etapa simbólica se prescinde de las piezas geométricas. El objetivo en cada clase era que los estudiantes arribaran a la etapa simbólica, punto en el cual los alumnos pueden operar con actividades que muestren la conexión entre la geometría y el álgebra. Las lecciones son diseñadas para permitir a los estudiantes discutir y fomentar el vínculo natural que existe entre la geometría y el álgebra.

En este momento simbólico la realización de la acción mental se lleva a efecto de manera independiente por el alumno y se caracteriza además por una reducción de la base de orientación. El lenguaje es ahora, más que todo, un medio para reflexionar, con el cual se instrumentan las medidas para el control de los resultados de la acción, incluso de los alumnos por sí mismos.

Así, tenemos que, para cada nuevo concepto estudiado nuestro modelo de intervención propone que los problemas sean inicialmente resueltos observando que sucede con la manipulación de los objetos concretos. Gradualmente cuando la acción concreta es asimilada, el alumno rehace posteriormente la acción empleando el modelo geométrico para representar los objetos. Más tarde, el alumno es quién debe replantear las acciones que lo lleven al significado simbólico.

¿Enseñar a pensar? Perspectivas para la educación compensatoria. Madrid, CIDE-MEC, p. 200.

Las piezas geométricas como material didáctico

Con las piezas geométricas se pretende fomentar el aprendizaje de los conceptos básicos en el álgebra. Cada lección fue diseñada, para conectar el desarrollo de los conceptos algebraicos con: a) vincular la experiencia de los alumnos de perímetro y área con las piezas geométricas, b) la relación entre el lenguaje natural y el lenguaje algebraico y c) retomar los conocimientos de la aritmética para extenderlos al terreno algebraico.

La etapa introductoria en cada lección

Cada lección presenta, en la parte introductoria, una serie de interrogantes para trabajar en grupo, seguido por diversas preguntas que guían al grupo a realizar inferencias. Cuando se le asigna al alumno el material geométrico manipulable y el tema algebraico a tratar, se señala el propósito central de cada lección seguido por preguntas que guían al grupo a delimitar el tópico del día.

Después de completada las direcciones de cada lección, se traza un plan, paso a paso, para explicar el concepto empleando las piezas geométricas, y se completaba con sugerencias para que los alumnos hicieran registros de sus observaciones. Después, se presenta un problema para que el grupo (con la menor intervención posible del profesor), lo resuelva. Dicho problema contiene elementos para que los alumnos tengan la oportunidad de extraer los conceptos explorados.

La acción del profesor

En cada lección el profesor tiene cuatro importantes funciones a desarrollar interrelacionadas entre sí, la cuáles son:

Guiar. Para que la información sea compartida se debe asegurar que cada integrante del grupo está participando.

Preguntar. Se hacen preguntas, modela la solución de problemas, comparte la información con todos los alumnos, lo cual lleva a formularse nuevas preguntas.

Sintetizar. Se realiza una síntesis de la información de los conocimientos apropiados y ayuda para que el grupo identifique la solución.

Anotar. Se hace constar cual es la información importante y la solución.

2.1.2. Evaluación inicial

Para la evaluación del proceso y el uso de las estrategias por parte de los estudiantes en la solución de problemas se utilizaron alguns sugerencias propuestas en Estados Unidos de Norteamérica por la *National Council Teachers Mathematics* (NCTM)[44]. Esta organización no gubernamental, fundada en 1920, tiene su origen en el trabajo embrionario de Polya G. (1945) y, el modelo de la resolución de problemas propuesto por Alan Schoenfeld (1992).

[44] NCTM, Standars Tabla 3.1 (1989). *Purpose and mathods of assessment.* http://www.enc.org/reform/journals/ENEC2280/nf_280200t1.htm

Los criterios para evaluar la resolución de problemas, (ver la tabla siguiete), es una adaptación de la agenda para la acción en la década de los 90's propuesta por la NCTM, (para ver los criterios completos ir al anexo IV).

Tabla de criterios para la evaluación:

PROCESO	NIVEL 1 NIVEL BAJO	NIVEL 2 NIVEL MEDIO	NIVEL 3 NIVEL ALTO
ENTENDIMIENTO DEL PROBLEMA	requiere la asistencia del profesor .	Muestra un entendimiento parcial del problema.	muestra un completo entendimiento del problema.
FORMULANDO UN PLAN	requiere la asistencia del profesor para elegir una estrategia apropiada o aplica aleatoriamente la estrategia de ensayo-error.	muestra evidencia de un plan y emplea una estrategia la cual puede o no puede se aplicada efectivamente.	selecciona y aplica apropiadamente la estrategia. Desarrolla diferentes estrategias.
SOLUCION DEL PROBLEMA	proporciona soluciones incorrectas aún con asesoria.	hace errores matemáticas menores lo cual conduce a respuestas erróneas o soluciones incompletas.	proporciona la solución correctamente. Muestra más de una forma de resolver el problema.
VISION RETROSPECTIVA	Requiere de asistencia y sugerencias para determinar la razonabilidad de la solución.	considera sólo con sentido comun la razonabilidad de la solución.	continuamente monitorea lo razonable de la selección de la estrategia.
COMUNICANDO LA SOLUCION	Explica el razonamiento en una forma desorganizada que es difícil de seguir.	da una respuesta y empieza a elaborar y explicar con la asistencia del profesor.	realiza acertadamente la tarea y explica el razonamiento con claridad y coherencia.

Asi mismo, nos apoyamos en los diversos trabajos hechos en México, sobre la evaluación del proceso que siguen los alumnos en la solución de problemas, como es el caso del investigador

¿Hay un problema más simple relacionado con el que tú intentas resolver?.

¿Cómo sabes que lo que has hecho es lo correcto?.

¿Qué haces cuándo no estás segura del resultado?.

¿Cómo le explicarías a tus compañeros lo que estas haciendo?.

2.1.3. Evaluación final

La evaluación final se realizó al concluir la etapa de instrucción. Se planteó a los alumnos la resolución de problemas algebraicos, de manera individual, de tal manera que pudiera observarse el proceso que realiza para su ejecución.

Los problemas planteados cubrieron las siguientes características: que su resolución no pudiera hacerse en forma instantánea, que la resolución tuviera diferentes procedimientos para su solución, que fuera clara la heurística empleada por los alumnos en la solución del problema y que tuviera elementos para verificar su resultado.

2.2. Resultados de la evaluación inicial

Entendimiento del problema

El 65% de los alumnos tienen dificultades para entender el problema y requieren de la asistencia del profesor para su comprensión. Hacen una lectura inmediata del mismo y no se detienen a leer con cuidado el encabezado.

El 15 % de los alumnos asociaron la información del problema con algunas operaciones, pero mostraron dificultades para pensar en algún plan que les ayudara. De igual manera observamos que hacen un razonamiento parcial porque presentan una respuesta correcta pero, con cálculos o explicaciones ilegibles o con un procedimiento incomprensible o incorrecto.

El 20 % de los alumnos logran un adecuado entendimiento del problema.

Finalmente, hemos de señalar que el planteamiento de los problemas en todos los alumnos contienen información como: datos, números, procedimiento, aunque requieren de la ayuda del profesor.

Formulando un plan

En este aspecto observamos que más de la mitad de la muestra (58 % de los alumnos) presentan un nivel bajo. Resuelven casos particulares. Cuando se les presenta un rectángulo con números específicos enseguida lo resuelven pero, al ver polinomios las variables se imponen y no logran generalizar los resultados.

El 23 % de los alumnos, en este rubro se ubican en un nivel bajo y el 19 % en el nivel alto.

Solución del problema

En lo que concierne a este aspecto detectamos que el 68 % de los alumnos presentan deficiencias ya que, aún con la ayuda del profesor no se percatan de procedimientos erróneos. Para el 18 % de los alumnos sólo cuenta obtener la solución por un método y si este método no funciona, entonces abandonan el problema. Estos alumnos presentan una respuesta correcta pero, con cálculos incompletos y hay momentos que no justifican la respuesta.
El 14 % de los alumnos presentan una respuesta correcta con cálculos y procedimientos argumentados.

Cabe mencionar que el método más usado por los estudiantes encuestados fue el abordar el problema algebraicamente, no emplearon alguna estrategia de aproximación sucesiva. Es decir, para resolver los problemas, trataron de simbolizar las variables del problema y establecer las ecuaciones correspondientes.

Visión retrospectiva

Esta estrategia está ausente en la mayoría de los alumnos (89 %) de los alumnos y tan sólo una minoría (11%) las poseen o utilizan en la resolución de problemas.

En general los estudiantes no verificaron que las soluciones cumplieran con las condiciones del problema, tampoco monitorean el curso de las acciones que emprenden en sus intentos de solución.

Comunicando la solución

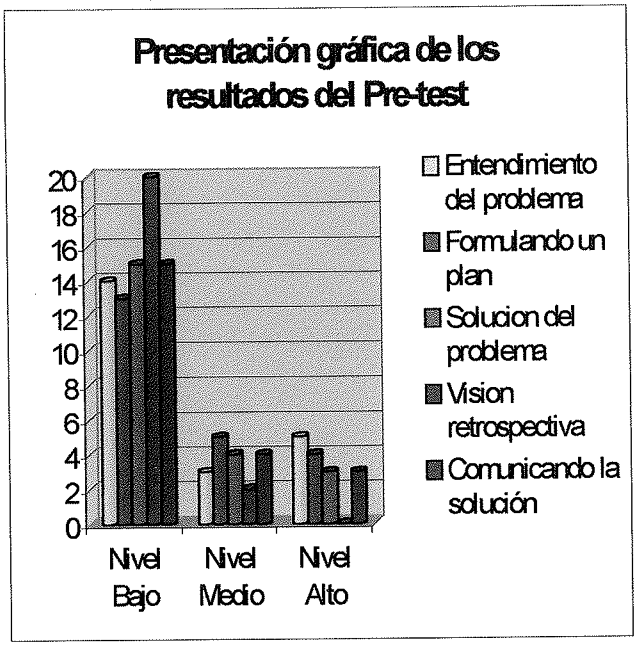
La mayoría de los alumnos (68%) requirieron de la asistencia del profesor para comunicar la solución de los resultados, así mismo ofrecieron sugerencias pero no ordenadas.

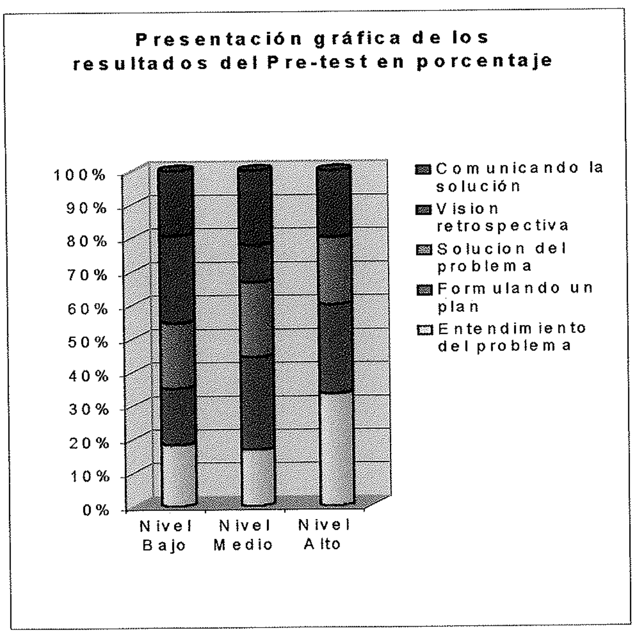
El 20 % de los alumnos contribuyeron con ideas y sugerencias pero en forma caótica, no defendieron su idea, es decir, la cambiaron cuando el entrevistador no estaba de acuerdo. Solo el 12 % de los alumnos alcanzaron el nivel más alto porque estuvieron dispuestos a clarificar o explicar su respuesta, tanto como fue necesario.

Tabla:

Proceso	Alumnos					
	Nivel Bajo		Nivel Medio		Nivel Alto	
	N	%	N	%	N	%
Entendimiento del problema	14	65	3	15	5	20
Formulando un plan	13	58	5	23	4	19
Solución del problema	15	68	4	18	3	14
Visión retrospectiva	20	89	2	11	0	0
Comunicando la solución	15	68	4	20	3	12

GRÁFICAS


Presentación gráfica de los resultados del Pre-test
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
Nivel Bajo
Nivel Medio
Nivel Alto
Entendimiento del problema
Formulando un plan
Solucion del problema
Vision retrospectiva
Comunicando la solución


Presentación gráfica de los resultados del Pre-test en porcentaje
100%
90%
80%
70%
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
Nivel Bajo
Nivel Medio
Nivel Alto
Comunicando la solución
Vision retrospectiva
Solucion del problema
Formulando un plan
Entendimiento del problema

Capitulo III. Aplicación de la propuesta de intervención pedagógica

En este apartado se hace una exposición de los resultados observados del proceso seguido, a lo largo de la propuesta de intervención pedagógica en lo concerniente a los conceptos como: monomio, polinomio, términos semejantes, multiplicación y factorización de polinomios.

3.1. Monomio

A partir de la construcción del concepto de monomio se deriva el concepto de polinomio. Dicho silogismo no es gratuito; monomios y polinomios sólo son una forma distinta de representación de la categoría de variable.

En este tema específico de monomios, los alumnos seleccionan las piezas apropiadas y el color adecuado. Ellos describen la colección de las piezas en dos formas; verbalizan en lenguaje natural y plasman las ideas en símbolos matemáticos. Esta actividad ayuda a identificar las piezas a cada variable.

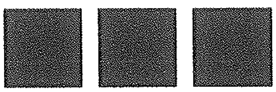
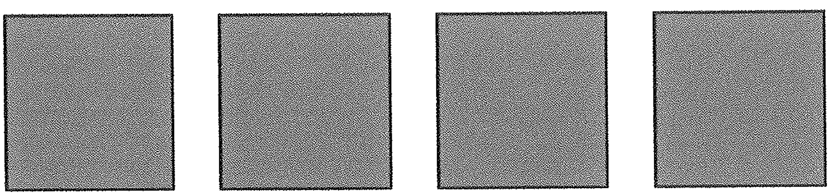
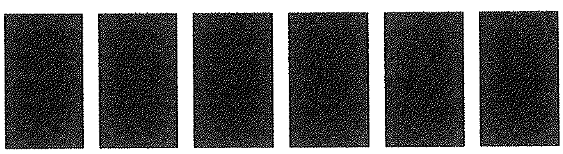
Introducción del problema

Se va a entender por monomio a una expresión algebraica formada por números y variables que no incluye la suma algebraica, los exponentes que aparecen están elevados a exponentes positivos. Por ejemplo, $3X^2$, $1/2ab$, $49XY^5$, Z^7, a^3, A^3, 4.

Explorando con las piezas geométricas

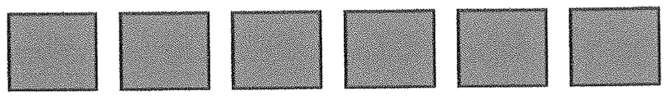
Les comento a los alumnos que vamos a usar las piezas geométricas para tener una representación del concepto de monomio. Se presentan los siguientes ejemplos en el pizarrón usando las piezas geométricas.

Observación.- Con las piezas geométricas sólo es posible representar monomios y polinomios que excluyen expresiones elevadas a más de la segunda potencias. Además de que las soluciones se restringen al ámbito de los números enteros.

Pieza geométrica	Monomio que representa
	$3X^2$
	$4Y^2$
	$6XY$

En este sentido le preguntamos al alumno Miguel:

Profr.: *"¿ Qué monomio representan las siguientes piezas geométricas ?";*



Ao.: *"$6Y^2$";*

Prof.: *"Si sustituimos a la Y por 5, ¿cuál es el valor del monomio?";*

Ao.: *(Después de hacer las operaciones de multiplicación en el pizarrón, contesta) "150";*

Profr.: *"¿ Cuáles materiales me ayudan a resolver el problema ?";*

Ao.: *" Las piezas amarillas";*

Profr.: *"¿ Cuáles son esas piezas ?";*

Ao.: *"Estas";*

(El alumno señala donde hay un conjunto de estas piezas);

Profr.: *"Si cambiamos del problema original Y=1, ¿ podría resolverse de la misma forma?";*

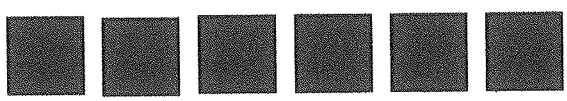
Ao.: *"Sí, cambio la pieza azul por una pieza verde";*

Profr.: *"¿ Puedes presentar otro problema que se resuelva de la misma forma que se resuelve este ?";*

Ao.: *"Sí, $5X^2$";*

Profr.: *"¿ Cuáles son las piezas que me representa el monomio que diste de ejemplo ?";*

Ao.:



(El alumno selecciona y muestra estas piezas)

Profr.: *"¿ Cómo puedes determinar si tu respuesta es correcta ?";*

Ao.: *"Dándole el valor de uno a la X".*

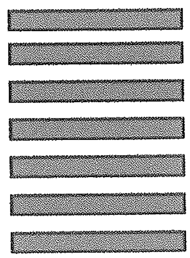
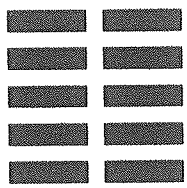
Registrando las relaciones

Cada grupo de alumnos elige una colección de piezas geométricas. Registran la colección, bosquejando las piezas geométricas y escribiendo la expresión formando los monomios empleando todas las variables (X, X^2, Y, Y^2, XY) y las unidades.

Los alumnos tratan para diferentes valores de las variables. Por grupo registran, en su cuaderno de trabajo, las regularidades de cada conjunto de piezas que representan los monomios.

Informando y exhibiendo

Al final de cada sesión se le solicitaban a un equipo que pasara al pizarron a informar y exhibir los registros hechos en su cuaderno. Por ejemplo, Leo Alberto, Luis Felipe y Saúl informan y muestran lo siguiente:

Piezas geométricas	Expresión simbólica del monomio que representa	Asignando valores particulares
	7Y	Si Y=7 49
	10X	Si X=9 90

Enseñando el concepto de monomio.

Se introduce el concepto de monomio en el que se identifica a este como un elemento individual del material. Es decir, cada pieza geométrica representa un monomio. Se presenta así, la oportunidad de sostener un diálogo como el siguiente:

Profr.:	*"¿ Que monomio representan las tres piezas rojas que tienes ahí ?";*
Ao.:	*"3XY";*
Profr.:	"¿ Cada pieza que tienes frente a ti que representa ?";
Ao.:	*"Un monomio";*
Profr.:	*"Dame una pieza";*
Ao.:	*"Aquí tiene", (me da un cuadrado verde);*
Profr.:	*"Pues, lo que tú me has dado es un monomio";*
Profr.:	*"¿ A esta pieza como la llamamos ?";*
Ao.:	*"Y^2";*

Así, en la solución del requerimiento se identifica linealmente la pieza geométrica al concepto de monomio. Con el referente visual o la pieza en la mano, se parte de los sentidos del alumno para generalizar una variedad de situaciones. En el mismo sentido, tomando el referente físico, se pregunta:

Profr.:	"¿ Qué monomio me representa las piezas siguientes "?, (le proporciono dos cuadrados azules)?;
Ao.:	"$2X^2$".

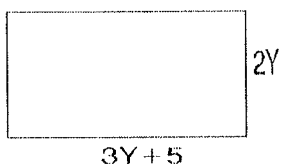
Con la pregunta anterior, también se intenta que los alumnos realicen actividades de conexión entre la geometría y el álgebra. La idea de vincular la geometría con el álgebra está sustentada en la perspectiva piagetiana en que primero se parte de la etapa concreta para luego avanzar a la etapa lógico-formal. En la etapa simbólica, se espera ver el fruto del trabajo anterior, cuando el alumno logre realizar los procesos algebraicos sin material de apoyo, como fue en el caso siguiente:

Profr.:	*"¿ Dame un monomio, sin pasar por las piezas, geométricas?";*
Ao.:	*"$3Y^2$"; (El alumno escribe esta expresión en el pizarrón);*
Profr.:	*"Dame otro monomio, pero que no intervenga las variables "X o Y";*
Ao.:	*"3a".*

El paso dado hasta aquí por el alumno no es fácil, es lo más complicado ya que históricamente también se ha abordado de tal forma, de la retórico pasando por lo lacónico para llegar a lo simbólico.Según Carolyn Kieran, (1995), no fue sino el siglo XVI cuando el trabajo de Diófanto (250 a.C.) llevó a Vieta (1540-1603) a "utilizar letras para las cantidades dadas y para las incógnitos. Se empiezan a expresar soluciones generales y a formular reglas para relaciones numéricas"[47].

Una de las muy obvias diferencias entre la aritmética y el álgebra, por supuesto, es el empleo de la letra como representante de valores. Las letras también aparecen en aritmética, pero en una forma completamente diferente al álgebra. Por ejemplo las letras "m" y "c" se emplean en aritmética para representar el número de metros o el número de centímetros. Este cambio provoca confusión resultando una falta del referente numérico, como es el caso de Almazul:

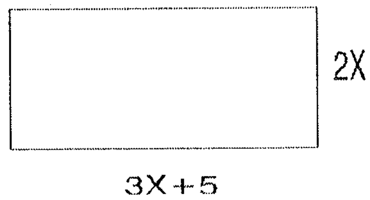
Profr.: *"¿ Qué significa la "Y" en el siguiente problema ?";*



Profr.: *"¿ Es solamente una letra, o qué es ?";*
Aa. *"Es una letra, es algo como 5Y";*
Profr.: *"¿ Cómo qué ?";*
Aa.: *"Puede ser un yate. Pueden ser 5 yates";*
Profr.: *"¿ La "Y" puede ser otra cosa ?";*
Aa.: *"Puede ser yoghurt";*
Profr.: *"¿ Puede ser lo que empiece con "Y" ?, como yoghurt, o puede ser otra cosa ?";*
Aa.: *"Pensándole bien puede ser lo que empiece con "Y", porque tenemos que tener una "Y" al principio de la palabra".*

También es el caso de Eder, quién aunque hace una correcta expresión algebraica pero no puede verlo como una respuesta propia:

[47] Op. cit. Kieran Carolyn (1995).



Profr.: *"¿ Cuál es el perímetro de la figura anterior ?";*
Ao.: *"10X + 10, sólo que no se conoce cuánto vale la "X"";*
Profr.: *"¿ Así que, la respuesta es 10X + 10 ?";*
Ao.: *"No puedo dar una respuesta correcta porque no conozco cuanto vale la "X".*

Lo cual muestra, entre otros, que el alumno no tiene conciencia completa de lo que es la variable, o mejor dicho, tiene una visión restringida del concepto de variable[48].

Al principio de nuestra propuesta de intervención, los alumnos proporcionaban ejemplos en donde interpretaban el concepto de monomio como variable de una letra evaluada. Veamos un ejemplo con Juan. La figura siguiente tiene "n" lados, cada lado de longitud 2;

Profr.: *"¿ Cuál es el perímetro de la figura anterior ?";*
Ao.: *"No, porque no se cuánto vale la "n", no puedo saber cuantos lados tiene la figura, a menos que...";*
Profr.: *"¿ Qué es eso de "a menos que" ?"; (el alumno después de hacer algunos trazos y sumas en el cuaderno continua);*
Ao.: *"Bien, digamos que n vale 14";*
Profr.: *"¿ Cómo obtienes el 14 ?";*

[48] Ursini Legovich Sonia (1994). *Los niños y las variables*. Educación Matemática. Vol. 6, N° 3. Grupo Editorial Iberoamérica. México, pp. 90-108. Aquí Ursini comenta que Kuchemann (1980) identificó seis diferentes maneras de interpretar los símbolos literales: letra evaluada, letra no utilizada, letra como objeto, letra como incognita específica, letra como número generalizado y, letra como variable.

Ao.: "*Como te dije necesito saber cuanto vale "n" y, en el alfabeto la "n" ocupa el lugar 14*";
Prof.: "*Así que, ya con eso podemos conocer el perímetro*";
Ao.: "*Si*";
Profr.: "*¿ Cual es el perímetro ?*";
Ao.: "*28*".

En las primeras conversaciones sostenidas con los alumnos mostraron una fuerte tendencia a identificar las "letras" como representantes de números. Más aún, hubo al principio una fuerte tendencia a identificar las "letras" con números específicos, con valores únicos, más que con valores en general.

En aritmética los símbolos representan cantidades que siempre representan valores únicos, así el valor del número "3" siempre representa el mismo valor. Uno de los aspectos observados al inicio del proceso de instrucción fue que muchos de los alumnos asumen que letras diferentes deben representar necesariamente valores diferentes. Es decir, muchos alumnos consideran que "X + Y + Z" nunca puede ser igual a "X + P + Z", como es el caso de Cristina:

Profr.: "*La sentencia $X + Y + Z = X + P + Z$, ¿Es verdadera?*"; *siempre/nunca/algunas veces, cuando...*;
Aa.: "*Nunca será verdadera*";
Profr.: "*¿Nunca?*";
Aa.: "*Nunca, porque tendrán valores diferentes, porque P tiene un valor diferente al valor dado a Y*". "*Así que, nunca será verdad*";
Profr.: "*Así que, P tiene valores diferentes a Y , ¿ por qué dices eso ?*";
Aa.: "*Porque si no tuviera valores diferentes, entonces usted no pondría P, usted pondría de nuevo la Y. Lo ve, usted puso una letra diferente porque quiere poner un valor diferente*";

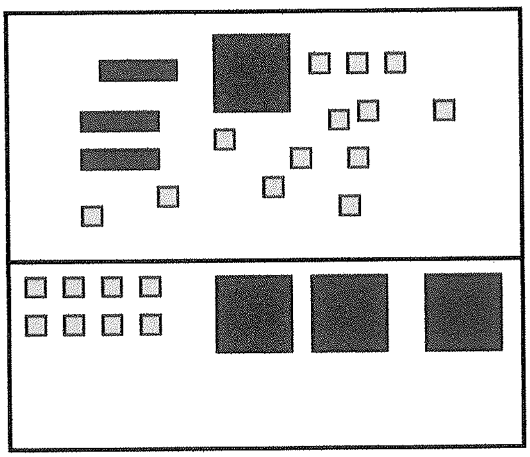
Así, Cristina justifica su opinión. Es un magnífico argumento desde la aritmética, porque es el primer encuentro que tienen los estudiantes con el álgebra. En este sentido, abordé la enseñanza del álgebra como una extensión de la aritmética.

3.2. Polinomio

¿Por qué se hizo a lo largo de la propuesta tanto énfasis en la categoría de monomio? Porque los polinomios se definen en función de los monomios, "un polinomio es una expresión compuesta por sumas o restas de monomios"[49]. Así abordamos el concepto de polinomio;

Profr.:	*"Dame dos objetos";*
Ao.:	*"Aquí tiene una X y también una Y";*
Prof.	*"Lo que me acabas de dar es un polinomio".*

Es decir, para empezar un polinomio será para nosotros más de una pieza. En clase los polinomios los empiezo a enseñar de la siguiente manera; escribe la cantidad que muestra la siguiente figura:

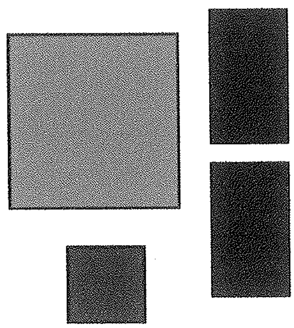


[49] Martinez Ma. del Pilar, Struck Francisco (1997). *Matemáticas 2*. Libro de texto. Secundaria. Serie 2000.Editorial Santillana. México p. 92.

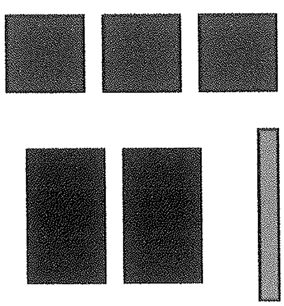
Las piezas colocadas en la parte superior representan el área negativa. Mientras que, las piezas colocadas en la parte inferior representan las piezas positivas. Entonces el polinomio que representa la figura siguiente es: $3X^2 + 8 - (X^2 + 3X + 13)$.

Hago énfasis en presentar más ejemplos para ver los polinomios como suma (resta) de monomios. En este sentido se exhiben dos ejemplos.

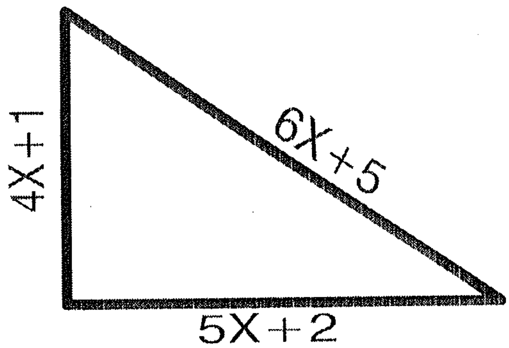
Ejemplo 1:

Polinomio Con piezas geométricas	Polinomio en expresión simbólica	Asignando valores Particulares	Valor del polinomio
	$Y^2+2XY+X^2$	Si, Y=1; X=1	4

Ejemplo 2:

	$3X^2+2XY+Y$	Si, Y=2; X=3	41

También, el planteamiento de los problemas propuestos fue con intención de diagnosticar la construcción del concepto de polinomio, como segmento de polígono. Para que el concepto de polinomio se amplíe a representar los segmentos como monomios. Tal fue la intención de trabajar con problemas que hicieran énfasis en ver los polinomios como lados de un triángulo, formamos la figura siguiente:

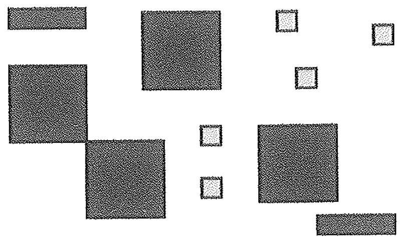


Profr.:	*"¿ Qué nos representa cada lado ?";*
Ao.:	*"Un polinomio".*

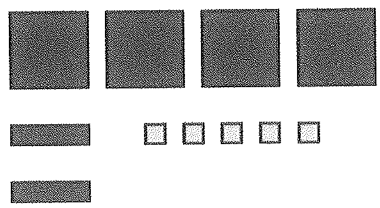
Otra forma de presentar a los alumnos el concepto de polinomio, fue el de seleccionar una muestra arbitraria de las piezas geométricas, para luego identificarlas como un polinomio.

Por ejemplo; "En la figura siguiente, encontrar el polinomio que representan las piezas colocadas en forma desordenada, luego coloca las piezas en forma ordenada, para finalmente representar el polinomio en forma simbólica".

a) Piezas geométricas



b) rearreglo y concatenación



c) presentación simbólica $4X^2 + 2X + 5$

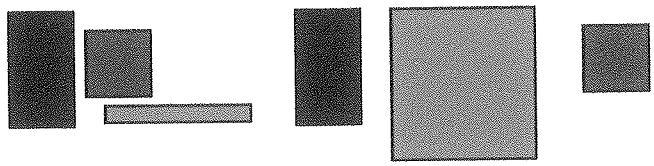
La intención de esta presentación fue para que los alumnos posean una representación visual del concepto de polinomio.

En otro sentido, si el alumno representa simbólicamente el polinomio, se le sugiere que represente físicamente el polinomio en cuestión. Es el caso de la alumna Perla:

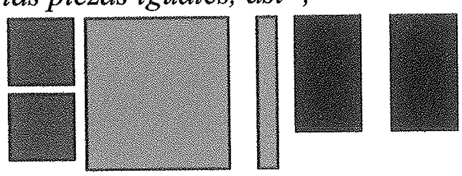
Profr.: "¿ Qué es un polinomio para ti ?";
Aa.: "Es la expresión de una forma";
Profr.: "¿ De que forma ?";
Ao.: "$X + Y$; $X - 2$; $+ 2X^2 + 2X + 1$";
Profr.: "¿ Cómo representamos esos polinomios con las piezas ?"; (La alumna primero me da los polinomios simbólicamente y, luego selecciona las piezas geométricas para representar los polinomios acertadamente).

Después de plasmar el polinomio de diferentes formas, planteo el siguiente problema a la alumna Urania:

Profr.: *"¿ Qué representan las siguientes piezas ?"; (Se realizó la distribución en el pizarrón):*



Ao: *"Un polinomio";*
Profr: *"¿ Cómo organizas las piezas ?";*
Ao: *"Junto las piezas iguales, así";*



Profr: *"¿ Hay un problema más simple relacionado con el que tú intentas resolver ?";*
Ao: *"Si. Quitándole piezas";*
Profr: *"¿ Puedes obtener la solución de otra forma ?";*
Ao: *"Dando valores a las piezas";*
Profr: *"¿ Puedes escribir otro problema que pueda ser resuelto empleando la misma aproximación que empleaste para resolver este problema ?";*
Ao: *"Si";*
Prof: *"¿ Cómo, cuál ?"; (El alumno tomo otras piezas que representan otro polinomio);*
Profr: *"Si, al problema original le agregamos más piezas, ¿ Podría resolverse ?";*
Ao: *"Si";*
Profr: *"¿ Por qué ?";*
Ao: *"Porque es otro polinomio más grande";*
Profr: *"¿Que aprendiste al resolver este problema?";*
Ao.: *"No sé";*
Profr.: *"Que es un polinomio es un conjunto de piezas diferentes";*
Profr.: *"¿ Los polinomios se representan sólo con las letras X, Y ?";*

Ao.: *"Con cualquier letra";*
Profr.: *"¿ Hay problemas más simples relacionados con el que resolviste" ?,*
Ao.: *(El alumno no contesta);*
Profr.: "¿ Qué hace a este problema fácil"?;
Ao.: "Que usamos las piezas".

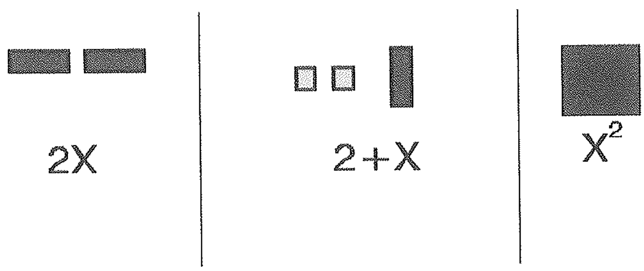
A lo largo de la propuesta, se trató de fomentar la estrategia para encontrar la analogía con otro problema más simple.

En varias ocasiones los alumnos comentaron que estaría bien les permitieran usar las piezas en los exámenes en sus escuelas.

3.3. Términos semejantes

Para nosotros el concepto de términos semejantes es muy simple; términos semejantes son piezas iguales.

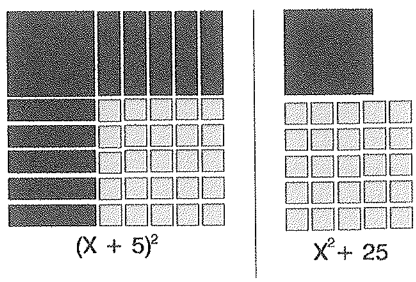
Al comprender el concepto de término semejante se supero un problema muy común en el grupo. Al inicio del curso los alumnos igualaban $X^2=2X$ o, $X^2=2+X$. Se argumentó visualmente que eso era imposible pues, observando las piezas tenemos que son objetos diferentes:



Al final del curso, los alumnos construyeron lo que entendimos por "término semejante", como se observa con Perla:

Profr.: *"En la mañana un niño me dijo que 2X era igual a X^2, tú, ¿ qué opinas ?";*
Aa.: *"Es falso";*
Profr.: *"¿ Por qué ?";*
Aa.: *"Porque no son las mismas piezas".*

Otro error de los alumnos se percibió en la creencia de que la siguiente sentencia es válida: $(X + 5)^2 = X^2 + 25$. Nuevamente, para que superaran el error se les tuvo que presentar el referente físico:

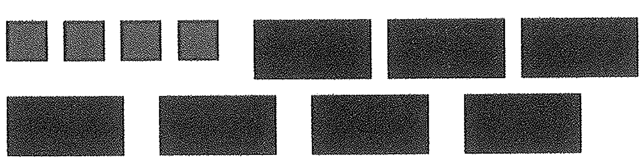


De nuevo se usó un argumento visual para dar una respuesta convincente de que ambos polinomios no son iguales.

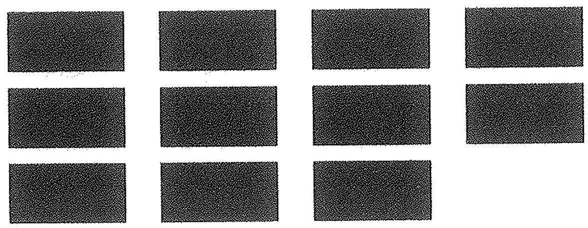
Otro caso similar al inicio de las sesiones, se observó en varios estudiantes que asociaban 4X + 7Y, a la simplificación 11XY.

Así, mediante referentes físicos se les hizo ver que eso es un error, pues, no se puede mezclar 4 piezas azules con 7 piezas verdes. Para salir del error, el referente físico es contundente:

El polinomio 4X+7Y, se representa con las piezas, así:



Mientras que el polinomio 11XY se represnta así:

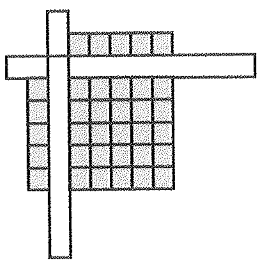


Con lo cual se muestra visualmente que es imposible que sea cierta la igualdad $4X+7Y = 11XY$.

3.4. Multiplicación de Polinomios

La definición de álgebra comúnmente se le concibe como una extensión de la aritmética, sin embargo esto no siempre ha sido así[50].

En nuestra propuesta la construcción gradual de los conceptos algebraicos, se inicia vía la aritmética. Por ejemplo, los alumnos pueden moverse desde la representación de la multiplicación de (5)(5), con las piezas geométricas, como se muestra en la figura siguiente.



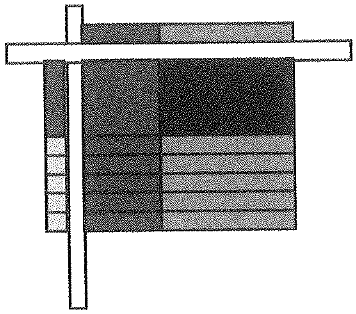
En donde los factores se encuentran en el exterior de la escuadra y, el producto esta en el interior de la escuadra.

Con una idea análoga, se multiplica en álgebra. Como lo hemos visto, el resultado de cualquier multiplicación se puede mostrar como un rectángulo. Esto es porque, para un rectángulo, área= largo por ancho.

[50] Smith S., Randall I. Dossey I. (1992). *Algebra*. Antes de Descartes "el álgebra y la geometría eran ramas independientes de las matemáticas". Addison Wesley Iberoamérica, México, p. 314.

Ahora, en el terreno algebraico, se procede a dar un ejemplo de la multiplicación de los polinomios (X+5)(X+Y), empleando las piezas geométricas, haciendo el siguiente arreglo:

a)

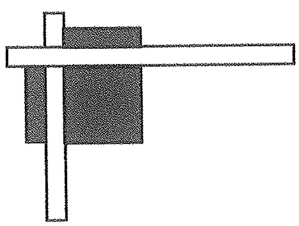


La expresión anterior se procede a explicar de la siguiente forma:

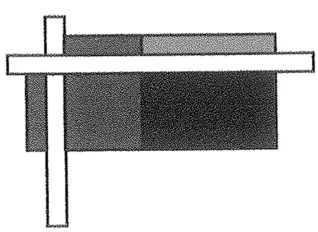
¿Cuál es el factor de la multiplicación que se encuentra a un costado y al exterior de la escuadra?; (X+5). ¿Cuál es el factor de la multiplicación que se encuentra arriba y al exterior de la escuadra?; (X+Y). ¿Cuál es el largo y ancho del rectángulo formado en el interior de la escuadra?; (X+5, X+Y). ¿Cuál es la multiplicación que se muestra en las piezas?; (X+5)(X+Y).

Ahora se explica gráficamente la formación del rectángulo en el interior de la escuadra de la forma siguiente:

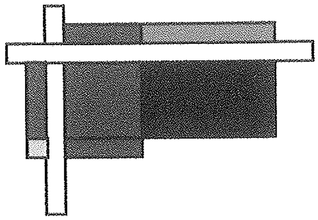
b) ¿Cuál es el producto de X por X?



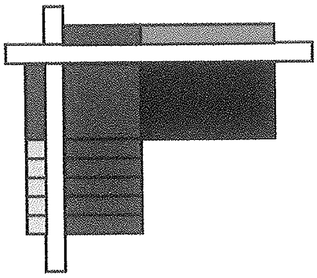
c) ¿Cuál es el producto de X por Y?



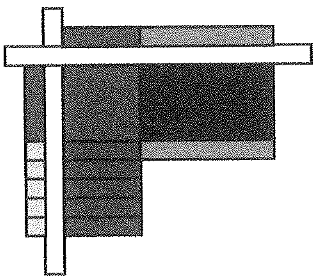
d) ¿Cuál es el producto de 1 por X?



e) Al repetir esta operación 4 veces más obtenemos la figura:



f) ¿Cuál es el producto de 1 por Y?



Al realizar la operación cuatro veces más, obtenemos la figura del inciso a).

Durante la multiplicación de polinomios se presentó la problemática de la división entre cero. Es el caso con Samuel:

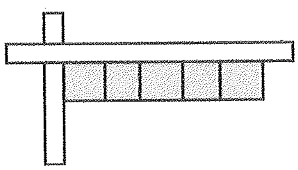
Profr.:	*"¿ Cuál es el resultado de 5 entre 0 (5÷0) ?";*
Ao.:	*"Cero";*
Profr.:	*"¿ Cuál es la estrategia que empleaste para resolver el problema ?". (El alumno no responde);*
Profr.:	*"¿ Estas seguro de que tu respuesta es correcta ?";*
Ao.:	*"Si";*

Profr.: "*¿ Puedes plantear un problema igual al anterior ?*";
Ao.: "*8/0*";
Profr.: "*¿ Cómo sabes que la solución es razonable ?*";
Ao.: "No".

Entonces viene la explicación, se retoma el ejemplo de 5/0.

Es falso que 5/0 sea cero. Porque es como afirmar, empleando las piezas geométricas, que es posible formar un rectángulo que tenga de área 5 unidades cuadradas y de ancho cero unidades por cero unidades de largo. Es decir, es falso que, 5 = (0)(0).

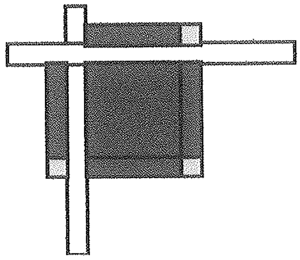
Se Tiene, también un argumento con las piezas geométricas. Visualmente es imposible formar una figura como la siguiente:



En donde el área es 5 y el perímetro es cero.

Más tarde, se observa una asimilación de estrategias para resolver problemas que se muestra, cuando nuestros alumnos emplean diferentes estrategias metacognitivas. Como es el caso de Cristina. Quién resuelve el problema de la multiplicación de polinomios de la forma en que se desarrolló en el salón de clases durante el proceso de instrucción.

Profr.: "*¿puedes hacer la multiplicación (X+1)(X+1)?*";
Aa.: *Sí;*
Profr.: *(La alumna selecciona las piezas y forma con la ayuda de una escuadra la figura siguiente):*



Profr.: "En el interior de la escuadra, ¿ qué formaste: un cuadrado o, un rectángulo ?";
Aa.: "Un cuadrado";
Profr.: "¿ Qué piezas son las que formaron ese cuadrado ?";
Aa.: "$X^2 + 2X + 1$";
Profr.: "¿ Cual es el resultado de multiplicar $(x+1)(x+1)$?";
Aa.: "$X^2 + 2X + 1$".

Antes de entrar al análisis metacognitivo, las acciones ejecutadas por Cristina dan paso a dos actividades canónicas siempre involucradas en la solución de multiplicación de polinomios; a saber: a) hacer un rectángulo (cuadrado) usando un conjunto apropiado de piezas geométricas; b) para cada rectángulo, se escribe la multiplicación (largo)(ancho) = área.

"Hacer un rectángulo" es una sugerencia que todos los estudiantes pueden entender una vez que se den dos lados del rectángulo.

Hasta aquí, la alumna ha recorrido 3 fases metacognitivas en la resolución de los problemas de acuerdo a las propuestas de Polya (1957), Schoenfeld(1992); a) entendimiento del problema; la alumna lo concibe como un problema relacionado al perímetro y área; b) plan para la solución; selecciona las piezas adecuadas y toma la pieza auxiliar (escuadra) como elementos -lo comenta verbalmente- a considerar que le apoyaron para solucionar el problema, anticipa la solución; c)

solución del problema; realiza el arreglo necesario para formar el cuadrado y posteriormente plasma la solución en símbolos del problema.

El problema resuelto con las piezas presenta un modelo físico para ayudar a los estudiantes a llevar un plan progresivo, cada modelo físico representa un cuadrado o rectángulo. Pero no es solamente el propósito de usar piezas geométricas para conceptualizar las categorías del álgebra y resolver el problema, sino es un foco para concentrarnos en discusiones más teóricas como la estrategia de retrovisión fundamental en la perspectiva metacognitiva; es hacer conciencia sobre la solución del problema, como es el caso, continuamos con el análisis de la entrevista con Cristina.

Profr.:	*"¿ Qué pasa si no me gustan esas piezas y pongo otras ?, por ejemplo, quito esta "X" y pongo esta "Y". Es, ¿ correcto, falso o que sucede ?";*
Aa.:	*"Falso";*
Profr.:	*"¿ Por qué ?", (tomando como referencia la figura anterior);*
Aa.:	*"Porque es "Y" y no da el resultado correcto";*
Profr.:	*"Yo puedo poner las piezas que yo quiera";*
Aa.:	*"Si. Pero, por ejemplo, había puesto (X+1)(X+1) y el resultado no lleva una Y";*
Profr.:	*"Entonces le puedo poner otras piezas";*
Aa.:	*"No se pueden agregar";*
Profr.:	*"¿ Por qué ?";*
Aa.:	*"Porque no sería el resultado correcto y aparte se sale de los límites", (le señala al profesor que se sale del perímetro el área con la pieza agregada y eso visualmente ya no tiene sentido).*

Se observa claramente que Cristina no vacila en contestarme que el profesor esta equivocado al agregar más piezas u otra pieza que no corresponde a la variable en cuestión; esto es Cristina tiene un argumento visual para establecer la estrategia de retrovisión, de monitoreo continuo en la acción que realiza. Estrategia que no encontramos en el pretest realizado por Cristina. Ella nos proporciona argumentos geométricos para verificar el producto algebraico. En la propuesta relacionó continuamente el álgebra con la geometría. Continuamos con Cristina.

Profr.:	*"El producto de (X+1)(X+1), ¿ dónde esta representado en la figura ?";*
Aa.:	*"El área".*

Trato aún más, de indagar si ha interiorizado el concepto. Por ello le planteo la siguiente disyuntiva:

Profr.:	*"En la otra clase, Farina nuestra compañera, nos dijo que si cambiábamos el orden de las piezas que ya no era el mismo producto, ¿ tú que opinas ?";*
Aa.:	*"Si, es el mismo producto";*
Profr.:	*"¿ Por qué ?";*
Aa.:	*"Porque nadamás se cambiaron de posición";*
Profr.:	*"¿ Qué se observa con el área ?, ¿ cambia, es más pequeña, es más grande ?";*
Aa.:	*"Es la misma";*
Profr.:	*"¿ Por qué ?";*
Aa.:	*"Porque nadamás las cambiaron (las piezas) y no cambió su resultado";*
Profr.:	*"¿ Es la misma multiplicación ?";*
Aa.:	*"Si, la misma".*

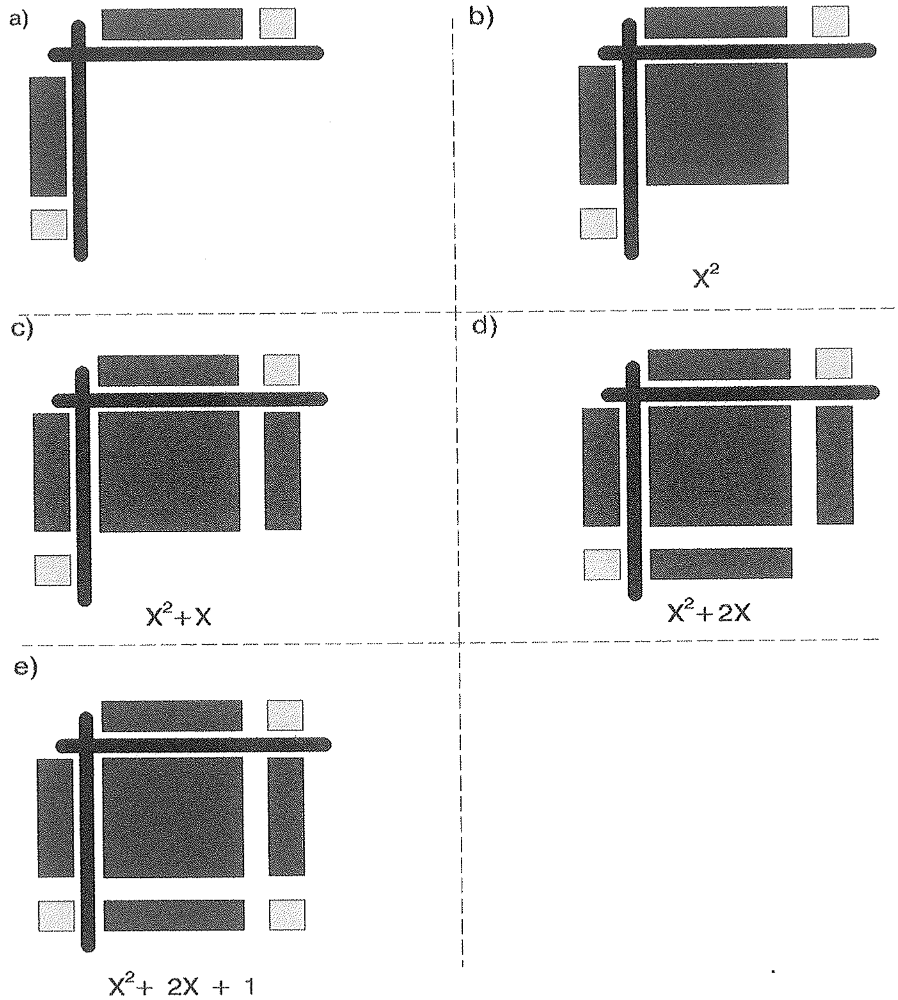
Cristina estuvo siempre segura de sí misma, insistí tanto porque estoy convencido de la propuesta para aprender la multiplicación con piezas geométricas es una buena alternativa muy poderosa si se sabe emplear adecuadamente. A través, de la entrevista Cristina estuvo siempre segura de sí misma, la comunicación entre profesor y alumna fue fluida, el elemento físico y geométrico nos dio argumentos para discutir la representación simbólica de la solución de la multiplicación (X+1)(X+1).

Indudablemente las piezas manipulativas tienen un papel que jugar, haciendo más atractivo el modelo de aprendizaje algebraico y la comunicación entre profesores y alumnos. En la alumna Cristina, la retroalimentación entre la presentación geométrica con la simbólica ayuda a ella en la construcción significativa del producto entre polinomios, mientras que, en el pretest no hubo argumentos similares.

Vamos a observar como se apropio de la propiedad distributiva la alumna Cristina:

Profr.:	*"El resultado de multiplicar (X+1)(X+1), ¿ a qué es igual ?".*
Aa:	*"$X^2 + 2X + 1$".*

Pero lo más importante aquí es ver el proceso que empleó Cristina para resolver el problema. En gráficas se bosqueja secuencialmente en la siguiente figura.



Cristina en el inciso a) coloca las piezas que representan los factores a multiplicar. En el inciso b) se coloca el cuadrado que representa el área de la multiplicación de X por X. Análogamente, en los incisos c), d) y e) Cristina coloca las piezas que corresponden a la multiplicación de X por 1, 1 por X y, 1 por 1 respectivamente.

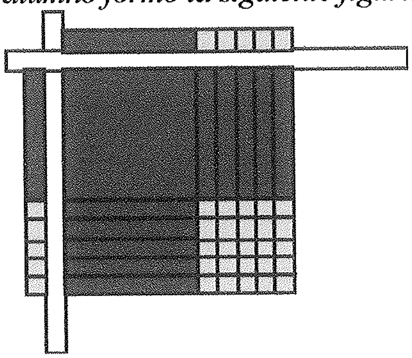
Implícitamente Cristina emplea la estrategia de dividir el área total en subáreas para monitorear visualmente su avance y, lleva un control del proceso de solución del problema. Al descomponer

el área en sus partes más fundamentales disminuye la opción de ensayo-error, pues, cada pieza unitaria se ajusta a su espacio correspondiente.

En la solución de problemas que involucra a la multiplicación siempre se hace uso de la distributividad, haciéndola emerger como una propiedad fundamental en el álgebra.

Veamos que ocurrió con otro estudiante, es el caso de Esteban:

Profr.: *"Vamos a multiplicar (x+5)(x+5)";*
Aa.: *(El alumno formó la siguiente figura);*



Profr.: *"Los factores de la multiplicación son, ¿ el perímetro o el área ?";*
Aa.: *"El perímetro";*
Profr.: *"¿ Cuál es el área del rectángulo ?";*
Aa.: *"$X^2 + 10x + 25$".*

Resolvió el problema Esteban apoyado en la interpretación física, luego geométrica y finalmente simbólica del problema.

3.5. Factorización de polinomios

En la materia de matemáticas, la factorización es un tema central en el programa oficial de estudio. Además, es un concepto fundamental que presenta el carácter reversible de la multiplicación. La factorización primero, constituye una revisión crítica de la ley distributiva de la multiplicación, la asociatividad y la conmutatividad. Segundo, es fundamental porque no es automático el algoritmo de la factorización, para la factorización se requieren de procesos heurísticos. Si los estudiantes no interiorizan el concepto de la factorización, ellos no construyen un entendimiento completo de la multiplicación y las leyes de asociatividad, conmutattividad y distributividad.

Dado que la tendencia de la escuela matemática es desplazarse desde la memorización de algoritmos al entendimiento conceptual. En la intervención pedagógica, el fenómeno de la factorización fue presentado bajo el siguiente esquema canónico: Sí, en la multiplicación los factores que proporcionamos representan el perímetro del rectángulo (cuadrado) y lo que se buscó fue el área. Ahora, en la factorización el proceso es el inverso al de la multiplicación, dado el área encontrar el perímetro del rectángulo. O sea, vamos a identificar en una figura el perímetro de la misma con la factorización del polinomio.

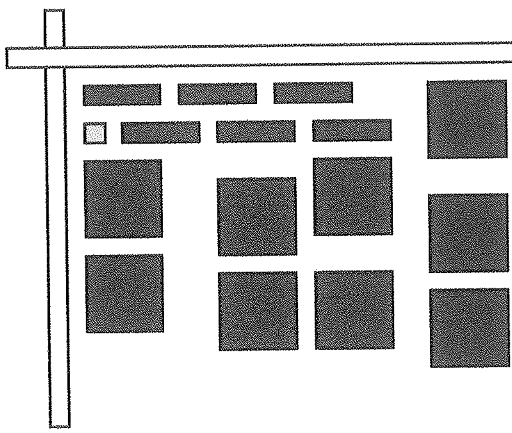
La factorización, como concepto, debe enfatizar en la reversibilidad, como una habilidad para reestructurar la dirección de un proceso mental, desde un pensamiento directo hasta un pensamiento inverso.

La factorización algebraica tiene su representación en la aritmética, cuando decimos; dado el número 12, encontrar dos números que multiplicados entre sí, nos den el 12. Pueden ser entonces: $12 = (3)(4)$; $12 = (2)(6)$; $12 = (1)(12)$; $12 = (3)(2^2)$.

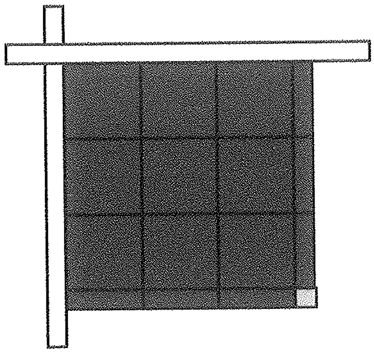
De donde, tomemos por ejemplo el polinomio $9X^2 + 6X+1$, lo equivalente en álgebra es, hacernos la pregunta: encontrar dos polinomios que multiplicados entre sí, nos den de nuevo el polinomio $9X^2 + 6X+1$.

Con el uso de las piezas se procede así:

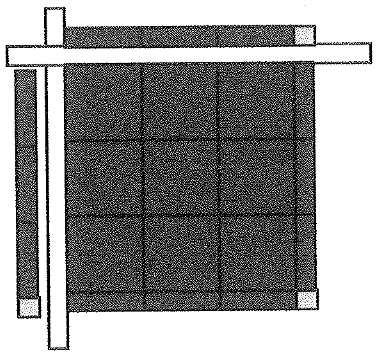
a) colocar las piezas que constituyen el polinomio $9X^2+6X+1$ en el interior de la escuadra:



b) Ordenar las piezas de tal forma que se forme un cuadrado.



c) Colocar las piezas arriba y a un costado de la escuadra, así:

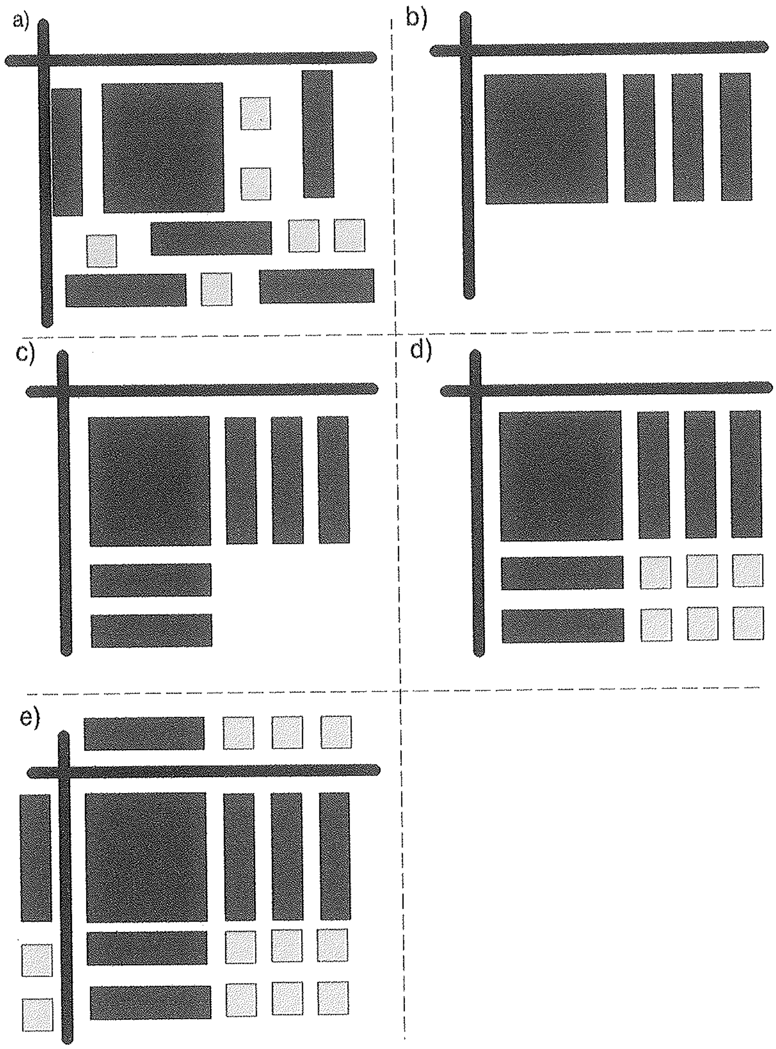


d) El resultado es, las piezas colocadas como factores en el exterior de la escuadra, es decir:

(3X+1)(3X+1).

Veamos un caso específico, de como Eder interiorizó el concepto de factorización.

Profr.:	*"Vamos a factorizar empleando las piezas geométricas X^2+5X+6";*
Aa.:	*"Ya esta profesor";*
Profr.:	*"¿ Cuál es el resultado ?";*
Aa.:	*"Es (X+2)(X+3)";*
Profr.:	*"¿ Por qué es ese resultado ?, ¿ puedes explicar tu plan ?.*
	Para explicar su plan, Eder realizó las siguientes etapas con las piezas para resolver el problema":



Para describir la estrategia empleada por el alumno, se va a explicar la gráfica. Eder en el inciso a) coloca en el interior de la escuadra las piezas que constituyen el polinomio a factorizar, en un principio las piezas tienen una presentación caótica. En el inciso b), c) y d) organiza paulatinamente las piezas para darle forma al rectángulo. En el inciso e) Eder coloca las piezas en el exterior de la escuadra, las cuales constituyen el resultado buscado. La siguiente pregunta es con la intención de verificar la respuesta.

Profr.:	*"En la figura, cuando realizas la factorización, ¿estas encontrando el área o el perímetro?";*
Ao.:	*"El perímetro".*

La siguiente pregunta es trascendental, porque es una muestra de que se logró alcanzar la etapa simbólica para Daniel para llevar a cabo él la solución del problema no requirió necesariamente tener frente a su vista el referente físico.

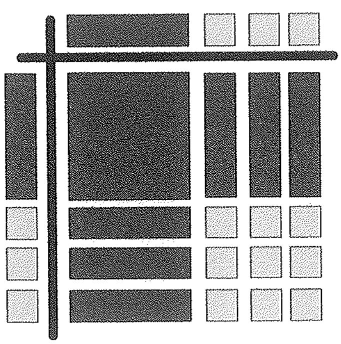
Profr.:	*"¿ Se puede hacer de otra forma ?";*
Ao.:	*"Hay que buscar dos números que multiplicados den 6 y, sumados den 5";*
Profr.:	*"¿ Qué diferencia hay entre la multiplicación y la factorización ?";*
Ao.:	*"En que si multiplicamos sale el área y si factorizamos sale el perímetro del área";*
Profr.:	*"Si tú fueras el maestro, ¿ cómo explicarías a los alumnos la factorización ?";*
Ao.:	*"Pues que busque dos números que multiplicados den 6 y que sumados den 5";*
Profr.:	*"¿ No necesitas hacerlo con piezas y rectángulos ?";*
Ao.:	*"No".*

De tal suerte que la respuesta navega en el momento simbólico.

Así, el alumno infirió el algoritmo, dándole un significado independiente de la geometría.

Ahora, mediante el siguiente ejemplo, veremos que Daniel tiene elementos de monitoreo para realizar una visión retrospectiva.

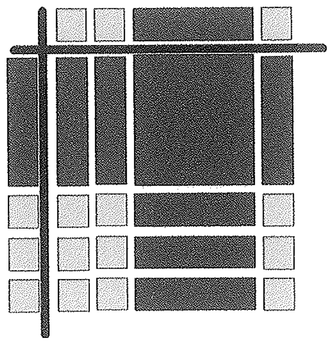
Profr.:	*"factoriza el polinomio X^2+6X+9";*
Ao.:	*(El alumno realiza la siguiente figura):*



Profr.: *"¿ Cuál es el resultado ? ";*

Ao.: *"(X+3)(X+5) ";*

Profr.: *"Si cambiamos el orden y colocamos las piezas así":*



(El profesor coloca las piezas de la forma anterior);

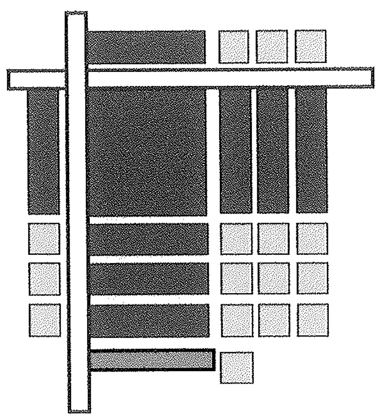
Profr.: *"¿ Escribe el nuevo resultado ? ";*

Ao.: *"Pues, es el mismo";*

Profr.: *"¿ Por qué es el mismo ? ";*

Ao.: *"Porque son las mismas piezas";*

Profr.: *(El profesor hace la misma figura anterior pero, ahora agregándole más piezas):*



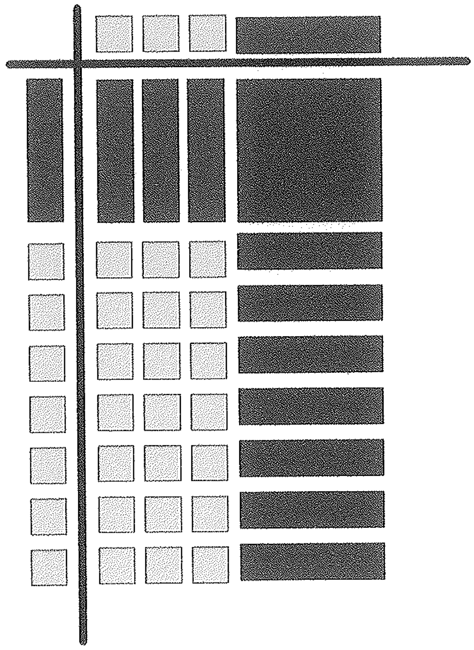
Ao.: *"El resultado no es igual porque se pasa del perímetro";*

Profr.: *"¿ Por qué no le agregas más piezas ? ";*

Ao.: *"Se sale del perímetro".*

Veamos si Daniel logro superar el obstáculo clásico: "yo lo sé, con X's, pero, con m's no me lo enseñaron";

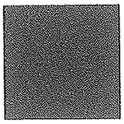
Profr.:	*"¿ Factorizar $m^2+10m+21$?";*
	(el alumno con destreza realiza la siguiente figura):



Profr.:	*"¿ Cuál es el resultado ?";*
Ao.:	*"(m+7)(m+3)";*
Profr.:	*"¿ Por qué es ese el resultado ?";*
Ao.:	*"Porque vendrían siendo dos lados del perímetro de la figura de adentro";*
Profr.:	*"Estamos diciendo que esta pieza*

	es X. Ahora me dices que es m. ¿ Cómo esta eso ?";
Ao.:	*"Porque le puedo dar el valor de cualquier letra";*

Profr.: *"También hechos dicho que esta pieza*



es X^2. Y, ahora me dices que es m^2".

Ao.: *"Porque también le puedo dar el valor de cualquier letra".*

Con ello nos muestra Daniel que ha alcanzado un nivel alto de generalización de variables desligado del contexto.

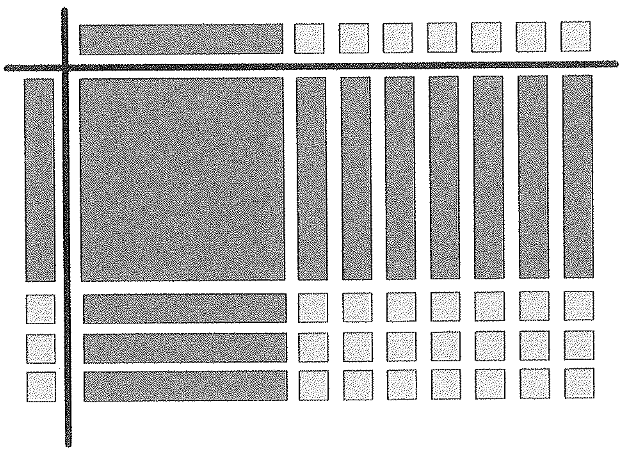
El siguiente problema fue con la intención de asignar a las piezas geométricas la letra que más nos guste. A la vez que, resaltar el carácter experimental de las piezas geométricas.

Profr.: *"Daniel y, si yo en lugar de usar las piezas azules, uso las piezas verdes, ¿ qué pasa con la factorización ?; ¿ sería la misma, diferente, errónea ?, tú ¿ qué opinas ?";*

Ao.: *"No se puede"*

Profr.: *"Vamos a intentarlo", (El profesor le proporciona las piezas);*

Ao.: *(Nuevamente, con destreza el alumno realiza con las piezas la figura siguiente):*



Profr.: *"Ya viste que sí se podía";*

Ao.: *"Sí se puede".*

3.6. Comentarios globales acerca de los diálogos

En síntesis, del análisis global de los diálogos, se constató que los alumnos al inicio de la etapa geométrica se limitaban a la estrategia de "ensayo-error", lo que refleja que conciben el problema algebraico desde una perspectiva de proceso. Aunque en esta situación los estudiantes no tienen aún el control total sobre el resultado de las transformaciones realizadas en la expresión algebraica.

Por el contrario, después de la intervención pedagógica, las estrategias seguían aumentando, por ejemplo, aplicaban la estrategia de anticipación al concebir el área total como subáreas y a partir de visualizarlas, proponen, a manera de hipótesis, una expresión algebraica para representar esas transformaciones.

Esta ampliación de estrategias, con la cual se avanzó en la comprensión de las relaciones entre la gráfica y la expresión algebraica, fue posible por el apoyo visual de las piezas geométricas.

Después de la intervención, los alumnos manifestaron su creencia de que habían comprendido aspectos importantes del álgebra. Esto nos ha motivado para continuar experimentando sobre la relación existente entre el lenguaje natural y el material concreto para interiorizar los conceptos algebraicos en la enseñanza del álgebra.

Conclusiones

Del análisis realizado sobre los datos obtenidos de los diálogos y las entrevistas, es posible contar con un panorama general sobre la situación que presentan los alumnos de una Escuela Secundaria General. Podemos decir que la experiencia abre nuevas inquietudes, nuevas preguntas, que habrá que diseñar nuevas investigaciones, y proseguir la búsqueda para ofrecer mejores programas de educación básica.

Evaluación inicial

Como puede apreciarse en la observación al pretest y las entrevistas de tipo clínica realizadas al principio de la intervención pedagógica, se percibe en los alumnos la falta de estrategias en la solución de problemas.

En la evaluación inicial el 65% de los alumnos tienen dificultades para entender el problema. El 58% de los alumnos no presentan estrategias de planteamiento del problema. Dos terceras partes de los estudiantes requieren de la asistencia del profesor para comunicar la solución. Mientras que ningún alumno presenta estrategias de monitoreo para verificar continuamente la respuesta. En el mismo sentido el 68% de las entrevistas explica su razonamiento de una forma desorganizada que es difícil de seguir.

Se observa en el pretest que la actividad metacognitiva empleada por los alumnos favorece primordialmente el método algebraico, es decir, no conocen otras estrategias para abordar los problemas.

El hecho de que los estudiantes a ingresar a 3er. grado de secundaria no presenten indicios del uso de estrategias metacognitivas en la solución y representación de un problema planteado, es sin duda, un elemento en el que hay que poner especial atención, puesto que indica que los grados previos no han tenido los resultados esperados, no solo en el aspecto de conocimientos específicos, sino en el desarrollo conceptual de los estudiantes.

La concepción de los alumnos sobre el álgebra

Los alumnos presentan una desarticulada idea del álgebra, respecto a la aritmética y la geometría. El conjunto de ideas externadas por los estudiantes, nos permite inferir como lo menciona Santos Trigo (1997)[51], que los alumnos poseen un esquema mecanicista sobre las representaciones algebraicas. Así, el álgebra al estar fraccionada de los otros campos de la matemática limita al estudiante la asimilación y acomodación de los elementos que le permitan realizar la conexión para contar con una representación coherente del álgebra. De hecho, se genera en los alumnos una comprensión parcial del concepto de variable en el terreno algebraico y, se concibe el álgebra como una materia desligada de los ciclos escolares anteriores.

Sobre el estado actual de la enseñanza del álgebra

Es evidente la falta de relación con la que se tratan los temas algebraicos en el aula. Por ejemplo, la multiplicación de polinomio, que implica el binomio al cuadrado, se enseña aprendiendo de memoria, sin justificación alguna, una regla.

---

[51] Op. cit. Santos Trigo (1997).

En cuanto a las representaciones visuales del álgebra, no se favorece una visión del álgebra ligada al lenguaje natural. Negando así, la construcción social de la matemática. Tampoco se hacen relaciones que permita al alumno tener una idea de sus dimensiones espaciales, así como de las ideas explícitas entre variable y polinomios. Esto genera que la multiplicación y factorización de polinomios sean temas tratados de forma independiente entre sí. Pues, se queda oculto la relación explícita entre la aritmética, el álgebra y el lenguaje natural.

De los resultados obtenidos

Durante la intervención los estudiantes tomaron conciencia de que la matemática es una disciplina que admite diversas soluciones a un cuestionamiento y que es fundamental argumentar las respuestas y contrastarlas con las de otros compañeros, antes que ofrecer sólo un dato numérico como resultado.

Al tratar con situaciones que involucran conceptos de multiplicación y factorización de polinomios. ¿Hasta qué grado los estudiantes exhibieron consistencia en el uso de sus estrategias para resolver problemas?. Esta es una pregunta fundamental que necesita ser discutida en términos del trabajo de los estudiantes.

Se observó que los estudiantes, en general, usaron las estrategias de planeación, anticipación y visión retrospectiva. Al proporcionar estrategias metacognitivas para la solución de problemas. El material concreto ayuda a los alumnos a controlar su proceso de aprendizaje.

Es importante mencionar que las actividades instruccionales motivaron a los estudiantes a trabajar como parte de un grupo.

También, cambió la actitud de los alumnos hacia la matemática ya que con las piezas regulan y dirigen la acción en la resolución de problemas algebraicos, al concebir el álgebra como una extensión de la aritmética.

Es decir, en cada alumno se notaron avances cognitivos muy importantes después de la intervención pedagógica. Por ejemplo, se observa la presencia en el postest de procesos en la solución de problemas como: formulando un plan, la visión retrospectiva (estrategias que no se observan en el pretest) y, una notable mejora en la comunicación de la solución.

Más aún, en la observación del postest y la entrevista de tipo clínica durante el mismo, los alumnos después de la intervención pedagógica mejoraron en los aspectos; a) aparte de la representación simbólica para resolver los problemas se emplearon otras estrategias en la solución de estos, b) se hizó uso de elementos geométricos para verificar con otra representación la solución a los mismos problemas, c) se apropiaron de las estrategias sobre la planeación y la visión retrospectiva, además de mejorar notoriamente la comunicación de la solución.

En las entrevistas realizadas como postest, se observa un avance al pasar de un conocimiento menos elaborado a otro más elaborado. Pues los alumnos fueron conscientes del proceso mental seguido ya que se refirieron al conjunto de operaciones que se encargan de gestionar los conocimientos de distinta naturaleza que interviene en la realización de los problemas algebraicos, es decir, los alumnos clasificaron datos, compararon soluciones, encontraron diferentes representaciones en la solución de un mismo problema; usaron tablas, diagramas y listas sistemáticas, lo cual muestra que el proceso de aprendizaje fue consciente.

Algunas sugerencias después de la intervención pedagógica

La observación global que podemos anotar respecto a este proceso de intervención es que la actividad docente en un curso de álgebra en secundaria debe realizarse sobre bases más sólidas: comprensión de conceptos algebraicos apoyados en procedimientos geométricos y sustentados en esquemas de razonamiento adecuados a los requerimientos de los alumnos, en un contexto motivante que permita el desarrollo de la actividad metacognitiva.

Como resultado de nuestra intervención pedagógica, se exponen algunas formas que se consideran pueden contribuir al mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra, en los temas de suma, resta, multiplicación y factorización de polinomios.

- Establecer las relaciones de las operaciones algebraicas con la geometría y la aritmética.
- Plantear redes o mapas conceptuales que le permitan al estudiante relacionar los procesos del álgebra a todos sus niveles con el lenguaje natural.
- Promover una actitud y un medio ambiente adecuado para que los alumnos puedan emplear argumentos visuales en la resolución de problemas algebraicos y estrategias en la solución de problemas como: ensayo-error, aproximación, anticipación y visión retrospectiva. Poner al estudiante en contacto con representaciones visuales que favorezcan la construcción de nociones.

Recomendaciones didácticas.

Entre los objetivos fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas, se encuentra el que los estudiantes desarrollen diversas estrategias que les permitan entender el contenido matemático, y aplicarlo en la resolución de diversos problemas. En el presente estudio se analizaron las estrategias que emplean los estudiantes que han cursado dos años de álgebra en la secundaria. En general, los resultados muestran por un lado que, al principio experimentaron los estudiantes serias dificultades en las distintas fases del proceso de solución de los problemas. Mientras que por el otro lado, al final de la intervención pedagógica los estudiantes alcanzan claramente visualizar el proceso de solución de problemas que desarrollaron en tres etapas: la concreta, geométrica y finalmente simbólica. Los alumnos que participaron en la propuesta de intervención pedagógica poseen, por ejemplo, estrategia que les ayudan a monitorear los procesos de solución, y si evalúan el sentido o pertinencia de la solución del problema. Además, es importante que en el proceso de solución los alumnos presentaban diversos métodos y representaciones de solución.

Los resultados dejan ver que los estudiantes con la manipulación de las piezas geométricas hicieron de la matemática una disciplina experimental donde el estudiante observa, descubre, conjetura, y estudia patrones geométricos.

A) Elementos a favor en el uso de las piezas geométricas manipulables

Discurso. Las herramientas también facilitan la transición del formato de la clases en donde sólo existen el pizarrón, gis y "fórmulas", hacia el interior de un desarrollo del aprendizaje, la resolución de problemas en donde el trabajo en conjunto son las normas. No son solo las piezas geométricas objetos para pensar, también son objetos de los cuales hablar. En lugar de que la autoridad del maestro sea la única base para corregir. Las herramientas hacen posible para los estudiantes el usar el razonamiento y la discusión, como una sólida referencia para juzgar la validez de las afirmaciones de la multiplicación y factorización de polinomios.

Las piezas geométricas tienen un carácter exploratorio, con lo cual no tiene sentido que el profesor use las piezas manipulables en una sola línea; "hazlo como yo digo". Es más efectivo usar las piezas geométricas como un marco para la resolución de problemas, discusión, comunicación y reflexión. Las limitaciones del modelo manipulativo al menos genera la chispa para algunas discusiones en clase.

Independencia. A medida que los estudiantes trabajan con las herramientas por un tiempo considerable y desarrollan más y más el entendimiento de los conceptos del álgebra. Ellos tienen menos necesidad de herramientas seguras (tales como piezas manipulables o diagramas), las cuales sirven solamente como un puente hacia el entendimiento de ideas abstractas.

Las piezas geométricas manipulables deben ser un complemento, no un sustituto de otras representaciones. En particular, las representaciones gráficas, la lista sistemática, la estimación, etc., son extremadamente importantes.

El uso de piezas geométricas no está en oposición a otras alternativas. Así, los estudiantes son más independientes, y por lo tanto, seguros de sí mismos.

La función de las piezas manipulables en el plan de estudios es ayudarnos a enseñar el álgebra de una forma más profunda. Algunas veces en nuestro fervor por usar las piezas manipulables, perdemos de vista el hecho de que son medios para un fin, no un fin en ellas mismos. Observé en los alumnos que hay un punto en el cual ya las piezas geométricas les estorban; la pregunta central es ¿en qué momento debemos quitar las piezas manipulables y empezar a trabajar solamente con símbolos?. Algunos alumnos están ya cansados de las piezas geométricas y ellos las hacen a un lado, las desecharan. Al final de las cuarenta y cinco horas de propuesta de intervención pedagógica, al plantear un problema algunos alumnos me preguntaban "como quiere que resuelva el problema con las piezas o sin las piezas", -sin las piezas replicaba yo- los alumnos decían: "que bueno porque ya me enfadaron las piezas".

B) Inconvenientes del uso de piezas geométricas

Las piezas geométricas no son la "solución mágica" a los problemas en el terreno algebraico que algunos profesores le puedan asignar. El poder de las piezas manipulativas no puede ser usados efectivamente sin una adecuada preparación del profesor. Las piezas manipulables no hacen "fácil" a las matemáticas, y los profesores necesitan aprender como usarlas.

Cuando los alumnos alcanzan un nivel sofisticado de manipulación de las piezas, pueden dar la imagen que entienden bien los conceptos algebraicos pero, no olvidar que las piezas sólo son un pretexto para llegar a la etapa simbólica.

La atención debe ser puesta en ayudar a transferir lo que los alumnos saben con las piezas manipulables a otras representaciones, incluida la simbólica, numérica, etc. Recordar que la transferencia no se da espontáneamente.

Finalmente existe el peligro de que el uso de piezas geométricas "fije" al alumno solamente al momento concreto. Es decir, si no se emplean adecuadamente las piezas geométricas o se abusa de ellas, el uso de modelos concretos puede ocultar lo que se pretende enseñar. Los modelos con piezas geométricas pueden anclar a los estudiantes a un contexto concreto y a progresar dentro de este contexto, demorando la construcción de la sintaxis algebraica. Encontramos que las intervenciones de enseñanza eran cruciales para ayudar a los estudiantes a progresar desde el modelo concreto hasta la construcción de nociones algebraicas[52].

Esta alternativa de enseñanza es un camino donde todavía queda mucho por explorar y donde los maestros podemos aprender y aportar mucho. Donde la memoria no es el principal requisito para aprender, sino que se conjugan y desarrollan varias estrategías del alumno.

Creemos que una aproximación como la esbozada aquí es promisoria para abordar problemas educativos importantes relacionados con el bajo rendimiento escolar de la materia del álgebra. Se trata de dotar a los alumnos de repertorios autorregulatorios más amplios y flexibles para que puedan autodirigir su aprendizaje y confrontar más competentemente algunos retos cognoscitivos y comunicativos que se les presentan. Esta aproximación, además de abordar problemas educativos importantes ya existentes, puede servir de trabajo preventivo para contribuir a disminuir problemas potenciales en esta área, sobre todo si es empleado por los propios maestros como parte de su práctica cotidiana.

Lo que sí estamos seguros es que la propuesta presentada aquí no produce más problemas de los que resuelve y, vale la pena explorar su potencial. En éste campo existen muy pocos estudios en México y las posibilidades de investigación y aplicación son ricas y diversas.

---

[52] En el mismo tenor publican resultados análogos Filloy E. Y Rojano T. (1989). *Solving equation: the transition from arithmetic to algebra*. En For the Learning of Mathematics 9, 2, USA. pp. 19-25.

Bibliografía

Castillo, Luis y Gallardo, Aurora (1996). *Pragmática de los lenguajes químico y algebraico en el ámbito escolar.* Educación Matemática, Vol. 8, Nº 2, Ed. Iberoamericana. México.

Castorina José Antonio, Ferreiro Emilia, Kohl de Oliveira Marta, Lerner Delia (1996). *Piaget-Vygotsky: Contribuciones para replantear el dabate*. México. Ed. Paidós Educador.

Carles Monereo, coordinador (1998). *Estrategias de enseñanza y aprendizaje.* Biblioteca del normalista. Cooperación española. SEP. México.

Cobb P. (1990). *Reconstructing elementary school mathematics*. University of Newcastle: faculty of education.

Cobb, P. (1990). *Multiple perspectives*. In L.P. Steffe & T. Wood (Eds.). *Transforming Children's mathematics education: International perspectives.* Madison, Wisconsin: University of Wiscinsin. (pp. 92-130).

Cobb, P. Yakel, E. & Wood, T. (1992). *A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education*. Journal for Research in Mathematics Educations.

Davis, R. B., Maher, C.A., y Nodding. N (eds.) (1990). *Constructivist views on teaching and learning of mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Ernest, P. (1991). The philosophy of mathematics education. London, Palmer.

Ernest, Paul (1992). The Nature of Mathematics: Towards a Social Constructivist account. Science and Education. Klawer Academic Publishers. Neatherlands.

Fernández María L., Hadaway Nelda, and Wilson James W. (1994). Problem solving: Managing it all. Mathematics Teachers, Vol. 87, Nº 3. USA.

García J., Rivera M. (1996). Matemática 1, 2 y 3, Estrategias. Educación secundaria. Editorial Esfinge. México.

Gascón Josep (1994). La resolución de problemas en la enseñanza de la matemática. Educación matemática, Vol. 6 Nº 3, Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Gascón Josep (1997). El papel de la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas. IV Congreso Nacional de Investigación Educativa-Universidad Autónoma de Yucatán. Mérida, Yucatán. México.

Gil, D. y Guzmán, M. (1993). Enseñanza de las ciencias y la matemática, tendencias e innovaciones. Organización de los Estados Iberoamericanos. Sección II.2.3 Edición PDF.www.oei.org.co/oeivirt/

Gómez-Granell, Carmen (1994). Las matemáticas en primera persona. Cuadernos de Pedagogía 221. Ed. Fontalba, Barcelona.

Gómez Pedro (1999). Educación matemática como campo del saber: límites, responsabilidades y posibles perspectivas. Colombia. http://ued. uniandes.edu.co/servidor/.

Gómez Pedro (1999). Riesgos de la innovación curricular en matemáticas. Colombia. Pgomez.@uniandes.edu.co;http://ued.uniandes.edu.co/servidor/.

Gómez Pedro, Mesa Vilma María (1999). ¿Qué significa saber álgebra?. Colombia. Universidad de los Andes. Apartado Aereo 4976. Bogota-Colombia. Fax: 284-1890; http://ued. uniandes.edu.co/ servidor/.

Hayman, John (1991). Investigación y educación. Paidós Educador, Barcelona, España, pp. 134-147.

Guzmán de Miguel (1999). Tendencias innovadoras en educación matemática. Organización de los Estados Iberoamericanos; http://www.oei.org.co/oeivirt/edumat.htm.

Harre Rom (1979). Personal being. Oxford. Blackwell. U.K.

Hoyos Verónica (1996). Un estudio exploratorio sobre la asignación de sentido a las representaciones básicas de la variación, al término de la primaria y el inicio de la secundaria. Educación Matemática, Vol. 6, Nº 3, Ed. Iberoamericana. México. p. 65-81.

Kieran Carolyn (1995). The learning and teaching of school algebra. Traducción resumida hecha por Vilma María Mesa. Cap. 17, Universidad de los Andes. Colombia.

http://ued.niandes.edu.co/servidor/emlrecinf/traducciones/default.htm.

Kilpatrick, Jeremy (1987). *What constructivism might be in mathematics education*. En Bergeron, J.C., Herscovics, N. Y Kieran, C. (Eds.). Proceeding of the 11th International Conference for the Psychology of Mathematics Education Vol. 1. (pp. 3-27). Montreal: Université de Montréal.

Lakatos Imre. (1977). *Proof and refutations: the logic of mathematical discovery*. Cambridge (UK): Cambridge University Press.

Mancera Eduardo (1990). *Investigación y educación matemática*. Educación Matemática, Vol. 2, Nº 1, Ed. Iberoamericana. México, p. 10-20.

Martínez Ma. del Pilar, Struck Francisco (1997). *Matemáticas 2.* Ed. Santillana. México.

Moreno A. (1989). *Metaconocimiento y aprendizaje escolar*. En cuadernos de Pedagogía, Nº 173. De Fontalba. Barcelona.

Moreno A. Luis E.(1996). *La epistemología genética: una interpretación*. vol.8. No. 3. Diciembre 1996. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Morales, M. y Moreno, R. (1993). *Problemas en el uso de los términos cualitativo/cuantitativo en investigación educativa*. En investigación en la escuela Nº 21. Sevilla, pp. 39-50.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). _Principles and Standars for School Mathematics_. National Council of Teachers of Mathematics, Inc. USA.

Nisbet J.P. y Shucksmith J. (1987). _Estrategias de aprendizaje_. Santillana. Madrid.

Paris y Winograd, (1990). _How metacognition can promote academic learning and instruction._ En B.F. Jones, y L. Idol (Eds.). Dimension of thinking and cognitive instruction Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Piaget, J. (1984). *La representación del mundo en el niño*. Ed. Morata, Madrid.

Polya George (1994). _Cómo plantear y resolver problemas_. Decimooctava reimpresión en español. Ed. Trillas. México.

Restivo, S. (1988). _The social construction of mathematics._ ZDM, 20 I, pp. 15-19.

Santos Trigo (1992). _Resolución de problemas; el trabajo de Alan Schoenfeld: una propuesta a considerar en el aprendizaje de las matemáticas_. Educación Matemática. Vol. 4, Nº 2. Editorial Iberoamérica. México.

Santos Trigo (1993). _Learning mathematics_. _A perspective based on problem solving_. Departamento de Matemáticas Educativas, CINVESTAV. México.

Santos Trigo (1995). *Hacia una propuesta de evaluación en la resolución de problemas*. La Enseñanza de las Matemáticas en la Secundaria, Lecturas, SEP; Programa Nacional de Actualización Permanente, Libro para el Maestro. México.

Santos Trigo (1996). *Análisis de algunos métodos que emplean los estudiantes al resolver problemas matemáticos con varias formas de solución.* Educación Matemática. Vol. 8, Nº 2. Grupo Editorial Iberoamérica. México, pp. 57-69.

Santos Trigo (1996). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de la matemática.* Grupo Editorial Iberoamericana. México.

Santos Trigo (1997). *La formulación de problemas para una instrucción y evaluación matemática balanceada.* Estudios en didáctica. Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Schoenfeld Alan (1985). *Metacognitive and epistemological issues in mathematical understanding.* En E.A. Silver, Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Schoenfeld Alan (1992). *Hanbook for research on mathematics teaching and learning*. MacMillan. New York. USA.

SEP (1994). *La enseñanza de las matemáticas lecturas, talleres: en la escuela primaria, secundaria*. Programa Nacional de Actualización Permanente de los Maestros, de Educación Básica en Servicio (PRONAP). Http://www.sep.gob.mx

SEP (1994). *Libro para el maestro*. Matemáticas segundo grado. Mexico.

SEP (1995). *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria, lecturas*. PRONAP, México.

SEP (1995). *La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria, lecturas*. PRONAP, México.

SEP (1995). *La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria, guía de estudio*. PRONAP, México.

SEP. *Programa de Desarrollo Educativo 1995-2000*. México. http:// www.sep.gob.mx.

SEP. *Secundaria ciclo 1996/97.* México. http://www.sep.gob.mx.

Smith Stanley A., Randall I. Charles, Dossey John A. (1992). *Algebra.* Addison Wesley Iberoamérica. México.

Stanik y Kilpatrik (1992). *Learning to think mathematically problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics*. Handbook for research on mathematics teaching an learning. New York, MacMillan, USA. pp. 334-370.

Tapia Alonso y Mar Mateos, Sanz (1987). *Entrenamiento de habilidades cognitivas, comprensión lectora fundamentación teórica*. "Capítulo IV", en Alonso Tapia, Jesús. ¿Enseñar a pensar? Perspectivas para la educación compensatoria. CIDE-MEC. Madrid. España.

Ursini Legovich Sonia (1994). Los niños y las variables. Educación Matemática. Vol 6, Nº 3. Grupo Editorial Iberoamérica. México, pp. 90-108.

Vargas Romero Liduvina (1997). SEPyC. Las matemáticas también se construyen. 1er. Congreso Estatal La enseñanza de las Matemáticas en la Educación Básica, CEEMEB. Programa general de actividades y resumenes de ponencias. Sinaloa, México.

Vygotsky Lev S. (1996). El desarrollo de los procesos psicológicos superiores. Ed. Grijalbo. Barcelona.

Weinberg y Gavelek (1987). A social constructivist theory of instruction and the development of mathematical cognition. Proceding of PME II, Montreal, Canada, pp. 346-352.

Apéndices

Apéndice I. Transcripción de las entrevistas realizadas durante el pre-test

Alumna Perla:

Profr.: El problema Nº 1, ¿cómo se te ocurrió resolverlo?.

Aa.: Pues, la verdad no le entendí muy bien, yo creo que era una ecuación, ¿no?.

Profr.: Si, adelante.

Aa.: Pues, se tendría que multiplicar o dividir. No sé la verdad.

Profr.: ¿Por qué multiplicar o dividir y no sumar?.

Aa.: No sabría decirle.

Profr.: Te han planteado problemas, ¿cómo éstos?.

Aa.: No.

Profr.: Vamos a pasar al problema Nº 2. ¿Cuántas regiones tienes en esa figura?

Aa.: Cuatro.

Profr.: ¿Cuál es el área de está región uno?

Aa.: X^2.

Profr.: ¿El área de la región dos?.

Aa.: Y^2

Profr.: ¿El área de la región tres?.

Aa.: XY.

Profr.: ¿El área de la región cuatro?.

Aa.: X.

Profr.: Te han planteado problemas, ¿cómo éstos?.

Aa.: No.

Profr.: Vamos al problema tres, inciso (a)?, ¿por qué se te ocurrió poner 17 puntos?.

Aa.: Porque los estuve sumando y no supe bien que ponerle.

Profr.: ¿Por qué fueron 17 y no 12?, por ejemplo.

Aa.: ¿Por qué fueron 17 y no 12?, por ejemplo.

Profr.: ¿Por qué fueron 17 y no 12?, por ejemplo. ¿En qué forma le aumentaste?.

Aa.: Como me imaginé.

Profr.: El inciso (B), ¿cómo estuvo ahí?.

Aa.: También lo sumé y le aumenté.

Profr.: El inciso (C).

Aa.: Los estuve sumando también.

Profr.: Perla, estás nerviosa por las preguntas.

Aa.: Un poquito.

Profr.: Estas más nerviosa que cuando estabas haciendo el examen sola.

Aa.: Si.

Profr.: ¿Cómo es qué se te ocurrió resolver el problema Nº 4?.

Aa.: Pues, primero lo sume.

Profr.: El primer montón, el segundo montón o, ¿cuál montón?.

Aa.: Si.

Profr.: Perla, ¿cuál es el resultado?.

Aa.: Pues, no me salió bien, es como yo pensé, salió 4 menos 2.

Alumna Cristina:

Profr.: ¿Por qué no intentaste el problema Nº 1?.

Aa.: No lo he visto en clase.

Profr.: Has hecho problemas, ¿dónde tengas que obtener el área de un rectángulo?.

Aa.: Si.

Profr.: ¿Puedes encontrar el área del rectángulo con 10 de ancho y 14 de largo?.

Aa.: Si.

Profr.: ¿Cuánto es?.

Aa.: 140.

Profr.: Bien, el problema Nº 2 dice que no le entendiste pero, esta muy bien realizado, ¿cómo estuvo eso?.

Aa.: Es que me dijeron los compañeros que lo hiciera así.

Profr.: A lo largo del curso vamos a ver la razón de lo que hiciste.

Aa.: Si.

Profr.: El problema Nº 3 también lo hiciste muy bien. Que me puedes decir al respecto.

Aa.: Que fue más fácil que los anteriores.

Profr.: ¿Por qué?.

Aa.: Es ver como va aumentando la figura.

Profr.: En este inciso te faltaron poner los puntos dentro.

Aa.: Pensé que no hacían falta.

Profr.: ¿Qué formaste, cuadrado o rectángulo?.

Aa.: Rectángulo.

Profr.: ¿Cuál rectángulo es más grande?.

Aa.: Este, (ella señala el cuarto rectángulo de la serie).

Profr.: Y el ¿más pequeño?.

Aa.: Este, (ella señala el primer rectángulo de la serie).

Profr.: ¿Cómo se te ocurrió hacer la tercera figura qué son cuadritos?.

Aa.: Poniendo un piso cada vez más grande.

Profr.: ¿Qué forma tiene?, de pirámide, escalera, torre.

Aa.: De escalera.

Profr.: ¿Por qué no se te ocurrió algo de los problemas 4?.

Aa.: No le entiendo y no me gustan esos problemas.

Profr.: ¿Has visto problemas como estos en las clases del año pasado?

Aa.: No.

Profr.: Bueno. Gracias.

Alumno Esteban:

Profr.: En el problema Nº 1, ¿por qué igualaste ambos lados del rectángulo?.

Ao.: Porque voy a encontrar el valor de la X's.

Profr.: Se necesita conocer el valor de X para encontrar el área del rectángulo.

Ao.: Si.

Profr.: ¿Por qué?.

Ao.: Porque con la X encuentro el área.

Profr.: ¿Habrá otra forma de encontrar el valor de X?.

Ao.: No. Porque después despejamos de aquí la X.

Profr.: ¿Cómo la despejamos?.

Ao.: (El alumno despeja muy bien la incógnita X?.

Profr.: El problema N° 2 lo hiciste correctamente, ¿cómo obtuviste el área de la región I?.

Ao.: Multiplique X por X.

Profr.: ¿La otra región?.

Ao.: Multiplique X por Y.

Profr.: Se parecen en algo los problemas N° 1 y El N° 2?.

Ao.: Si.

Profr.: ¿En qué?.

Ao.: El área del problema 2 es más grande.

Profr.: ¿Por qué?.

Ao.: Porque se ve que la figura es más grande.

Profr.: ¡Ah!, si, ya lo veo. Veo, que el problema N° 3 también lo hiciste bien, ¿cómo lo hiciste?.

Ao.: Fijándome cuál es la figura que sigue.

Profr.: Te fijaste en el tamaño de la figura o en el número de puntos.

Ao.: En el número de puntos.

Profr.: La cuarta figura del inciso a es; ¿una escalera, un cuadrado o un triángulo?.

Ao.: Un triángulo.

Profr.: Del inciso b, la cuarta figura ¿qué es?.

Ao.: Un cuadrado.

Profr.: De ¿cuántos puntos?.

Ao.: (Esteban cuenta los puntos), veinte puntos.

Profr.: Vamos al problema N° 4, ¿por qué no lo intentaste?.

Ao.: No sé cómo se hace.

Profr.: ¿Has visto este tipo de problemas en clase?.

Ao.: No.

Profr.: Gracias.

Alumno Benjamín:

Profr.: ¿Cómo se te ocurrió resolver el primer problema?.

Ao.: No pues, como se saca el área de un rectángulo, largo por ancho, o yo lo hice con los números que tiene ahí.

Profr.: ¿Cuál es el largo?.

Ao.: $3X + 5$.

Profr.: Y, ¿el ancho?.

Ao.: $2X$.

Profr.: ¿Tienes alguna duda de éste problema Joaquín?.

Ao.: No, se vio un poco fácil.

Profr.: Podemos pasar al problema N° 2.

Ao.: Sí.

Profr.: Vamos a ver el problema N° 2. ¿Cuál es el área de ésta región?.

Ao.: X^2.

Profr.: El área de la región N° 2.

Ao.: XY.

Profr.: El área de la región Nº 3.

Ao.: XY.

Profr.: Y el área de la región Nº 4.

Ao.: Y^2.

Profr.: Entonces, ¿cuál es el área total de las 4 regiones?.

Ao.: $X^2 + XY + Y^2 + XY$.

Profr.: Joaquín porqué no se te ocurrió multiplicarlos, si los presentas correctamente en forma de suma, ¿cuál fue tu razón?.

Ao.: No pues, dice que, yo pensé ponerlo así como sumando.

Profr.: Se parece en algo el problema Nº 2 al problema Nº 1, Joaquín.

Ao.: Sí.

Profr.: ¿En qué?.

Ao.: En que los 2 me piden que saque en forma de polinomio o algo parecido.

Profr.: ¿Ya habías visto éste tipo de problemas?.

Ao.: La verdad no, pero...

Profr.: El problema Nº 3, ¿cómo se te ocurrió resolver el problema?

Ao.: Hay primero una figura pequeña, una que le sigue más grande, otra más grande, y yo pensé la que faltaba era una escala más.

Profr.: ¿Por qué le pusiste al triángulo 1, 2, 3, 4, 5 de altura?.

Ao.: Porque el primero tiene 1, el segundo tiene 3, el tercero tiene 4 y pues el faltante ese viene siendo 5, yo pienso que debe ser.

Profr.: De largo le pusiste 1, 2, 3, 4, 5, también.

Ao.: Sí.

Profr.: ¿Por qué se te ocurrió 5?.

Ao.: Porque como te dije el primero tenía 1, el segundo tenía 3, el tercero tenía 4 y el último tenía 5.

Profr.: Joaquín, el inciso B, cómo se te ocurrió?

Ao.: Pues, una escala más grande también.

Profr.: Pero, nada más le agregaste arriba y abajo o, ¿cómo le hiciste ahí?.

Ao.: Sí, a los lados y arriba, por el largo y el ancho.

Profr.: ¿Cuántos puntos en total tienes?.

Ao.: Tiene 5 de largo por 4 de ancho.

Profr.: El último inciso, ¿cómo es qué se te ocurrió?.

Ao.: (Silencio absoluto).

Profr.: Ahora, ¿no sé te ocurre nada?.

Ao.: No le entendí nada.

Profr.: Vamos a hacer el cuarto, ¿cuántas canicas hay en cada montón?.

Ao.: Pues, en realidad en el primer montón puse 16.

Profr.: ¿Por qué 16 y no 20?.

Ao.: Pues...

Profr.: ¿Cómo es qué se te ocurrió?.

Ao.: Pues, porque el montón primero tenía 5 y eran las que sumaban 21 pero...

Profr.: Continua, adelante.

Ao.: El segundo, el tercer montón, no supe cuántos montones tenía.

Profr.: Vamos a resolverlo.

Ao.: En el primer montón le pondría que 8 canicas, en el segundo que tuviera 5 y ya el tercero sumaría el total, ¿no?.

Profr.: Haber súmalo.

Ao.: El 21. Pues, en realidad no salió.

Profr.: ¿Este problema te lo habían planteado anteriormente?.

Ao.: No.

Profr.: Gracias.

Ao.: De nada.

Alumna Guadalupe:

Profr.: ¿Cómo se te ocurrió resolver el 1º problema?.

Aa.: Multiplicando lado por lado

Profr.: ¿Por qué aparece la "a^2" y, no "X^2"?.

Aa.: Porque el maestro usaba la "a^2".

Profr.: Del problema Nº 2 que nos puedes decir.

Aa.: Que se parece al problema 1.

Profr.: ¿Cuál es el área de la región I?.

Aa.: Ab^2.

Profr.: ¿Cuál es el área de la región II?.

Aa.: Ab.

Profr.: ¿Cuál es el área de la región III?.

Aa.: Ab.

Profr.: ¿Cuál es el área de la región IV?.

Aa.: A^2.

Profr.: ¿El área total?.

Aa.: No lo hemos visto.

Profr.: ¿Qué nos puedes decir del problema Nº 3?.

Aa.: Es el más fácil.

Profr.: ¿El inciso a?.

Aa.: Son quince puntos.

Profr.: ¿Qué figura?.

Aa.: Triángulo.

Profr.: ¿El inciso b?.

Aa.: Veinte puntos.

Profr.: ¿Qué figura se formo?.

Aa.: Rectángulo.

Profr.: ¿El inciso c?.

Aa.: No se entiende.

Profr.: Que en esta secuencia , ¿cuál es la cuarta figura que sigue?.

Aa.: Parecida al anterior.

Profr.: ¿Qué nos comentas del problema 4?.

Aa.: Que no se puede porque el número de cúbitos vale uno.

Profr.: Gracias.

Aa.: De nada.

Alumno Eder:

Profr.: ¿Cómo factorizas el polinomio de la primer figura?.

Ao.: Yo pondría 3X+5=2. Luego pondría a las X al lado izquierdo y pasaría 3X-2X, porque cambió de lugar. Luego pasaría el cinco al lado derecho restando, daría -5. Luego sumaria las X me daría una X=-5 y, luego pondría X=-5/1 y me daría X=5.

Profr.: ¿Habrá alguna otra forma distinta de resolver el problema?.

Ao.: Si, poniendo las X's al lado derecho.

Profr.: ¿Cómo le explicarías a tus compañeros lo que estas haciendo, o a alguien que no está en clase y quiere saber cómo se resuelve el problema?

Ao.: Pues, también poniendo las X's al lado derecho.

Profr.: Ahora qué dice el problema Nº 2.

Ao.: Observa la siguiente figura, aquí parece que se suman las X y da una X^2, luego la Y+X da XY, y, luego queda una Y.

Profr.: ¿A éstas letras cómo les llamas constantes, variables o, incógnitas?.

Ao.: Variables.

Profr.: ¿Por qué no le llamas incógnita?.

Ao.: También se le puede llamar incógnita.

Profr.: Este problema Nº 2, ¿lo has visto alguna vez en clases?.

Ao.: En las clases con la maestra no pero, con el profesor si.

Profr.: ¿Cómo se llama tu maestra?.

Ao.: Profesora Romi.

Profr.: ¿Has visto este problema con la profesora Romi?.

Ao.: No.

Profr.: Pasamos al problema Nº 3, inciso (A). Le entiendes al problema?.

Ao.: No los he visto éstos.

Profr.: ¿Nunca los habías visto?.

Ao.: No.

Profr.: ¿Cómo resolverías el inciso B?.

Ao.: Pues, igual que el otro pero, no sé como se resuelve el otro.

Profr.: ¿El inciso C?.

Ao.: Es que es igual a los otros dos.

Profr.: ¿Qué es lo qué te falta para entender este problema?.

Ao.: Saber que es lo que se hace en él.

Profr.: ¿En clase no te ponen este tipo de problemas?.

Ao.: No, nos ponen puras ecuaciones para aprender y luego nos van a enseñar las de segundo grado y eso.

Profr.: ¿Cómo te ayudo a resolver el problema?.

Ao.: Preguntándole; ¿qué es lo que tenemos que hacer en esto, ¿qué es lo que vamos a hacer?.

Alumno Daniel:

Profr.: Nos explicas cómo se te ocurrió resolver el problema Nº 1.

Ao.: Pues, la base del rectángulo son 3X+5 y su altura es de 2X.

Profr.: Si.

Ao.: Yo escribí 3X+5=2X.

Profr.: ¿Por qué se te ocurrió escribir (3X-2)5=X ?.

Ao.: Se me ocurrió así la base por la altura.

Profr.: Si.

Ao.: Después pase 2X al lado izquierdo restando.

Profr.: Si.

Ao.: Y, me quedaron cinco esos cinco los pase al lado derecho sumándolos.

Profr.: Oye y ¿por qué el resultado $X=5$?.

Ao.: Porque $3X-2X$ da a X.

Profr.: ¡Aja!.

Ao.: Y el cinco entre uno es igual a cinco.

Profr.: ¿Ya habías visto este tipo de problemas en el salón con tu maestro?.

Ao.: Si.

Profr.: ¿Lo viste en 2º año?.

Ao.: Si.

Profr.: Bueno muy bien, ahora nos puedes decir qué entendiste en el problema Nº 2.

Ao.: Pues, vienen unos rectángulos cuadrados, pues el valor de sus lados XY solamente sumando sus lados $X+X$ $X^2X + Y$ XYXY y Y^2.

Profr.: Oye, ¿se te hace algo parecido el problema 2 al problema 1 ?.

Ao.: En algo.

Profr.: ¿Cómo en qué se parecen?.

Ao.: Pues, su forma.

Profr.: Vamos a ver el problema Nº 3, ¿por qué se te ocurrió poner estos números?.

Ao.: Aquí tengo un punto, aquí tengo seis más, aquí conté seis, aquí conté seis y cuatro más entonces eso fue lo que iba aumentando según yo.

Profr.: En el segundo donde hay rectángulos, ¿cómo se te ocurrió resolverlo?.

Ao.: También igual, dos sume dos y luego aquí iba aumentando seis.

Profr.: Y esta figura ¿cómo fue qué la interpretaste?.

Ao.: Si, sume primero y segundo, pues.

Profr.: Si.

Ao.: Y los que me sobraron los puse aquí.

Profr.: ¿Intentaste el problema Nº 4?.

Ao.: No.

Profr.: ¿Por qué?

Ao.: Porque no lo han enseñado en clase.

Profr.: Gracias.

Ao.: De nada.

Alumna Urania:

Profr.: ¿Cómo realizaste el problema Nº1?.

Aa.: Lado por lado.

Profr.: ¿Cuál sería cada lado?.

Aa.: Pues, estos.

Profr.: ¿Puedes obtener el área?.

Aa.: Sí.

Profr.: Entonces, ¿cuál es el área?.

Aa.: Es que no me acuerdo.

Profr.: Vamos al problema Nº 2, ¿cuál es el área de cada región?.

Aa.: Lo que tiene adentro.

Profr.: Bien, en éste caso la región Nº 1, ¿cuánto vale?.

Aa.: Lado por lado.

Profr.: La región Nº 2, ¿cuánto vale?

Aa.: Y.

Profr.: La región Nº 3.

Aa.: Y.

Profr.: La región Nº 4.

Aa.: X.

Profr.: Entonces para ti, ¿cuál sería el área de todas las 4 regiones?.

Aa.: X.

Profr.: Esta sería toda el área, ¿no sería más grande el área?.

Aa.: X por Y.

Profr.: Te han planteado algún problema anteriormente a éste.

Aa.: Si.

Profr.: ¿Pasamos al siguiente problema?.

Aa.: Si.

Profr.: El problema Nº 3, ¿qué figura falta en el inciso A?.

Aa.: Pues, una de 14 puntos.

Profr.: Una figura de 14 puntos y tendría forma rectangular, cuadrada o triangular o qué forma sería?.

Aa.: Triangular.

Profr.: ¿Cómo sería el inciso B ?.

Aa.: Una figura de 16 puntos.

Profr.: ¿Qué forma tendría triangular, de rombo, de hexágono?.

Aa.: A no, de 19 puntos.

Profr.: ¿Y qué forma tendría?.

Aa.: Cuadrada.

Profr.: ¿Nos pasamos al inciso C ?.

Aa.: Si.

Profr.: ¿Cuál es la figura faltante en el inciso C?.

Aa.: Le agrega uno al de abajo, uno al de arriba, otro al de mero arriba, y le pones otro arriba.

Profr.: ¿Entonces cuántos cúbitos en total tendrías?.

Aa.: 13

Profr.: 13 en total de la cuarta figura te hacen falta.

Aa.: ¡Ajá!.

Profr.: ¿Cómo se te ocurre resolver el problema Nº 4?.

Aa.: A ver tengo 21 canicas, le pongo la mitad, le quito la mitad y le sumo 5 a uno, y ya va a ser la mitad mas 5 y el otro va a ser la mitad menos 5, y ya.

Profr.: Gracias.

Aa.: De nada.

Alumna Almazul:

Profr.: ¿Por qué no pudiste resolver el problema número uno?.

Aa.: No sé, no me acuerdo.

Profr.: ¿Cómo se obtiene el área de un rectángulo?.

Aa.: ¿Cómo?.

Profr.: ¿Cuál es la fórmula para encontrar el área de un rectángulo?.

Aa.: Base por altura.

Profr.: Entonces...

Aa.: Faltó que nos diera la base y la altura.

Profr.: Ah, si.

Profr.: ¿Qué entiendes del problema número dos?

Aa.: Que hay que encontrar el área.

Profr.: ¿Sé parece en algo al problema anterior?.

Aa.: Si.

Profr.: ¿En qué?.

Aa.: En que hay que encontrar el área.

Profr.: ¿Qué ideas tienes para hacerlo?.

Aa.: Pues, saber cuanto miden.

Profr.: ¿Cuánto mide la región número uno?.

Aa.: Es que no le entendí.

Profr.: ¿Cuál es el área de las cuatro regiones?.

Aa.: Si me lo explica, si lo entiendo.

Profr.: Si, de acuerdo, en las próximas clases lo explico.

Aa.: Si.

Profr.: ¿Son difíciles los dos problemas anteriores?.

Aa.: Si.

Profr.: ¿En qué?.

Aa.: No los había visto.

Profr.: Del problema número tres, ¿qué me puedes decir?.

Aa.: Pues, que el primero es un triángulo, el segundo es un cuadrado y el tercero es una torre.

Profr.: ¿De cuántos blocks esta formada la torre que hiciste?.

Aa.: De veinticinco.

Profr.: ¿La torre anterior?.

Aa.: De nueve blocks.

Profr.: ¿Cuál es la diferencia entre las dos figuras?.

Aa.: De que la última tiene más blocks.

Profr.: ¿Cuántos más?.

Aa.: (los cuenta) dieciséis.

Profr.: Regresándonos al inciso (a), ¿por qué no pusiste el número de puntos que tiene el triángulo?.

Aa.: Porque se ve que es un triángulo.

Profr.: ¿Más grande o más pequeño?.

Aa.: Más grande.

Profr.: ¿Cómo se te ocurrió resolver el problema número cuatro?.

Aa.: Conté los veintiún cúbitos y luego le quite cinco.

Profr.: Algo que quieras agregar.

Aa.: No. Gracias.

Apéndice II. Pos-test. Transcripción de las entrevistas videofilmadas después de la intervención pedagógica.

Alumna Perla:

Profr.: Nos puedes decir ¿qué es un monomio?.

Aa.: Es la expresión de una forma.

Profr.: ¿Cómo de que forma?, da un ejemplo.

Aa.: $2X^2Y^2$.

Profr.: ¿Cualquier forma?, ¿hay piezas qué me representen ese monomio?.

Aa.: Si.

Profr.: ¿qué es un polinomio para ti?.

Aa.: Es la expresión de una forma.

Profr.: Pero, de ¿qué forma?, ¿puedes dar un ejemplo?, ¿otro polinomio?.

Aa.: $X+Y$, $X-2$

Profr.: ¿Cómo representamos físicamente un polinomio?, eso es, oye Perla y ¿cómo representamos esos polinomios con las piezas?.

Aa.: $2X^2+5X+1$. (Perla realiza la tarea con las piezas geométricas).

Profr.: ¿Cómo representamos un polinomio con signo menos?.

Aa.: Escribe $2X^2-1$.

Profr.: A ver escribimos $2X^2-1$, represéntalo aquí físicamente, ¿Cómo vamos a interpretar las piezas qué estén arriba de otras?., con signo positivo(+) o negativo(-).

Aa.: Negativo.

Profr.: ¿Puedes darme otro ejemplo de un polinomio?, el qué tú quieras.

Aa.: Selecciona las piezas adecuadas para formar un polinomio).

Profr.: Represéntalo simbólicamente el polinomio.

Aa.: $2X^2+3X-2$.

Profr.: Muy bien, ahora este polinomio; si tú lo pusiste así, ¿es lo mismo si yo lo pongo así?, o, ¿ya cambia?.

Aa.: Sigue igual.

Profr.: ¿Por qué sigue igual?.

Aa.: Porque son las mismas piezas.

Profr.: El hecho de que cambien de lugar estas piezas, ¿qué propiedad estoy aplicando de los números reales?.

Aa.: Conmutativa.

Profr.: ¿qué son términos semejantes?.

Aa.: Son piezas iguales.

Profr.: ¿Por qué los puedo sumar Perla?.

Aa.: Porque son piezas iguales.

Profr.: Entonces aquí, ¿piezas iguales son términos semejantes?.

Aa.: Si.

Profr.: Oye, en la mañana un niño me dijo que $2X$ era igual a X^2, tú ¿qué opinas?.

Aa.: Es falso.

Profr.: ¿Por qué es falso Perla?.

Aa.: Observa las piezas.

Profr.: ¿Puedes darme otro ejemplo de términos semejantes?.

Aa.: Si.

Profr.: Coloco varias piezas, ¿me puedes representar simbólicamente esas piezas?.

Aa.: $2X^2+Y^2+X^2-X$

Profr.: ¿Qué propiedad aplico al mover las piezas?, el niño me dijo en la mañana que esto ya era otro polinomio, por el hecho de haberle cambiado las piezas, ¿tú qué opinas?.

Aa.: Que sigue siendo el mismo.

Profr.: ¿Por qué Perla?.

Aa.: Porque son las mismas piezas.

Profr.: Oye, Perla ponte en mi lugar, imagínate que tú fueras la maestra y, si te pregunto: ¿qué es un polinomio?, ¿tú qué me dirías?

Aa.: La expresión de un producto.

Profr.: ¿Cómo cuál?, ¿cómo empezarías?, ¿les darías un ejemplo?, ¿les darías piezas?, ¿les ayudarías a entenderlo?.

Aa.: Les ayudaría a entenderlo.

Profr.: Gracias Perla.

Aa.: De nada.

Alumna Cristina:

Profr.: ¿Puedes hacer la multiplicación de (X+1)(X+1)?.

Aa.: Si.

Profr.: ¿Lo qué formaste en el interior de la escuadra es cuadrado o rectángulo?.

Aa.: Cuadrado.

Profr.: ¿Qué piezas son las qué formaron ese cuadrado?.

Aa.: X^2+2X+1.

Profr.: El resultado de multiplicar $(X+1)(X+1)$, ¿a qué es igual?.

Aa.: X^2+2X+1.

Profr.: Qué pasa si no me gustan esas piezas y, pongo otras, ¿eso es cierto?, o ¿falso?.

Aa.: Falso.

Profr.: ¿Por qué?.

Aa.: Porque es Y, y no da el resultado correcto.

Profr.: ¿Por qué no es el resultado correcto?, yo puedo poner las piezas que yo quiera aquí o, ¿no?.

Aa.: Pues, si pero por ejemplo había puesto $(X+1)(X+1)$ y el resultado no lleva una Y.

Profr.: Entonces, le puedo poner estos otros mira, yo le puedo poner tantos como yo quiera aquí. ¿Por qué no se los puedo agregar y por qué si se los puedo agregar?.

Aa.: No se pueden agregar.

Profr.: ¿Por qué no se los puedo agregar esos?.

Aa.: Porque no sería el resultado correcto y aparte se sale de...

Profr.: Se sale, ¿de dónde?, ¿cuál sería el límite?.

Aa.: Hasta donde esta el cuadrito este, (lo señala la alumna).

Profr.: ¿Hasta dónde llega esto?.

Aa.: Si.

Profr.: Entonces, ¿ya no me puedo pasar de aquí?.

Aa.: No.

Profr.: Y, acá.

Aa.: Tampoco.

Profr.: Quito estas piezas y pongo este cuadrado grandote, ¿es cierto lo qué hago?.

Aa.: No.

Profr.: ¿Por qué?.

Aa.: Incorrecto.

Profr.: ¿Por qué?.

Aa.: Porque ese no es el resultado.

Profr.: Un argumento de tipo de perímetro o área, ¿si se ve ahí?.

Aa.: No.

Profr.: ¿Cuál es el perímetro de esta figura?, ¿la primera qué tu formaste?.

Aa.: Vendría siendo X+1+X.

Profr.: El perímetro es esto que esta aquí afuera, ¿cuál es este perímetro?.

Aa.: X+1+X+1.

Profr.: El producto de multiplicar (X+1)(X+1), ¿es el perímetro o el área?.

Aa.: El área.

Profr.: En la otra clase Cristina, te acuerdas que Farina nos dijo que si yo cambiaba el orden de las piezas, que este ya no era el mismo producto, ¿tú qué opinas?.

Aa.: Si es el mismo producto.

Profr.: ¿Por qué será el mismo?.

Aa.: Porque nada más lo cambiaron de posición.

Profr.: Y, ese cambiar de posición, ¿cómo se llama esa propiedad en los números reales?.

Aa.: Las mismas piezas.

Profr.: No importa el orden.

Aa.: ¡Ajá!.

Profr.: Ahora también te voy a cambiar el orden de aquí, ¿es la misma multiplicación o es distinta?.

Aa.: La misma multiplicación.

Profr.: ¿Por qué la misma?.

Aa.: Por que nada más las cambio de posición.

Profr.: Y físicamente qué se observa, ¿qué se observa ahí en el área?, ¿el área cambia o es distinta, o es más pequeña?.

Aa.: Es la misma.

Profr.: Si yo cambio también el orden de esto ¿sigue siendo la misma multiplicación o va cambiando?.

Aa.: La misma.

Profr.: ¿Por qué?.

Aa.: Porque nada más las cambiaron y no cambio su resultado.

Profr.: Si cambiamos el orden, éste lo pongo aquí, éste lo pongo arriba, ¿es la misma multiplicación?.

Aa.: Si, la misma.

Profr.: ¿Por qué Cristina?.

Aa.: Porque cambia de posición.

Profr.: Gracias, Cristina.

Alumno Esteban:

Profr.: Vamos a multiplicar (X+5)(X+5), a ver hazme ese producto, ¿por qué es cierto esto Esteban?.

Ao.: Porque haz de cuenta que aquí tenemos el área y multiplicamos que estos son los perímetros cruzados (X)(X).

Profr.: ¿Lo podemos hacer con las piezas?,

Ao.: (El alumno empieza a manipular las piezas).

Profr.: ¿La multiplicación es el perímetro o el área?.

Ao.: Es el perímetro.

Profr.: ¿Cuál es el área?.

Ao.: Es primero X^2, después..

Profr.: ¿cómo es el resultado?.

Ao.: $X^2+10X+25$.

Profr.: Entonces, cuándo yo te proporciono estos dos factores en la multiplicación, ¿qué te estoy proporcionando?, ¿el área o el perímetro? .

Ao.: El perímetro.

Profr.: ¿Por qué lo separaste aquí, ¿por qué no lo pusiste juntito?.

Ao.: Para poder notar cada símbolo y cada número.

Profr.: Aquí entre este espacio, ¿qué símbolo habría?. ¿el + (más), el - (menos), a la X (multiplicación)?.

Ao.: El más (+).

Profr.: Si los sumo todos y ahora a mi me gusta el color vino y le agrego el color vino, el color verde y el color azul. Ahora ¿es válido qué le ponga a la multiplicación de (X+5)(X+5) estas piezas?.

Ao.: No.

Profr.: ¿Por qué no es cierto eso?.

Ao.: Porque no, porque se sale del límite del perímetro.

Profr.: Qué ocurre si yo cambio el orden de las piezas en el área, ¿es el mismo resultado?, o, ya cambió,

Ao.: Es igual.

Profr.: ¿Cuándo yo hice ese movimiento de cambiar las piezas de su lugar?, ¿qué propiedad aplique?.

Ao.: Conmutatividad de los números.

Profr.: ¿Al multiplicar (X+5)(X+5) hay un nombre muy específico que se le conoce como cual nombre será?

Ao.: No lo recuerdo.

Profr.: Puede ser: suma, binomios conjugados, trinomio al cuadrado, binomio al cuadrado, ¿cuál de todos será?.

Ao.: Binomio al cuadrado.

Profr.: Nos dicen que este es un rectángulo y tiene 60cms^2 de área, y tiene X+2 de base por 20 de lado, ¿puedes decirnos cuál es el valor de X?.

Ao.: (X+2)(20)=60

Profr.: ¿Por qué se te ocurrió así?.

Ao.: Porque multiplico la base por la altura.

Profr.: ¿Lo podemos hacer usando estas piezas?, ¿y cuál será el resultado?, ¿qué piezas me cubren este pedazo?,

Ao.: Son 20X+40=60.

Profr.: Bueno, pues gracias

Alumno Benjamín:

Profr.: ¿Qué piezas nos representarían (a+b)(a-b)?, ¿cuál sería el resultado de acuerdo a las piezas qué están ahí?.

Ao.: (El alumno ejecuta la tarea, manipulando las piezas).

Profr.: Ahora realizamos la siguiente multiplicación (Y+X)(X-X), usando las piezas ¿quién es la X y quién es la Y ahí?, ¿cuál es el resultado?, ¿es posible que lo simplifiques?.

Ao.: ¿Eliminarlos?.

Profr.: Si los que sobran, ¿qué te quedo después de simplificar?.

Ao.: Y^2-X^2.

Profr.: Si yo invierto el orden de estas piezas ¿sería el mismo resultado?.

Ao.: Si.

Profr.: ¿Cómo se llama ése producto notable?.

Ao.: No la verdad no me acuerdo.

Profr.: Gracias.

Alumna Guadalupe:

Profr.: Tenemos este problema, tenemos una figura y nos dan estas características: AY, éste es AX,BY,y BY, la primer pregunta que nos van a hacer ¿cuál es?, ¿cuántos rectángulos hay?.

Aa.: Cuatro.

Profr.: ¿Si el área del rectángulo 1 es AY? nos preguntan; ¿cuál es su base?.

Aa.: Es Y.

Profr.: ¿Y cuál será su altura?.

Aa.: La altura es "A".

Profr.: Entonces, ¿cuáles son los factores de AY ?.

Aa.: Es AY.

Profr.: ¿Cuál es el área total del rectángulo 1 y 2 ?.

Aa.: Es AY+BY.

Profr.: A ver súmalo.

Profr.: Tenemos esto : esto es X, esto es A, esto es B y esto es Y. ¿Me puedes dar el perímetro de la figura? ¿sabes cuál es? ¿si yo tuviera cualquier figura cuál seria su perímetro?.

Aa.: Todo se suma ¿no?

Profr.: Si tu fueras la maestra y te preguntaran, ¿cómo enseñarías a multiplicar (X+2)(X+1), ¿cómo le explicarías a uno de tus alumnos?.

Aa.: Pues con mucha paciencia y paso por paso.

Profr.: ¿Podríamos hacer esta multiplicación parecido al área de un rectángulo?.

Aa.: Pues yo creo que si. (La alumna ejecuta la tarea).

Profr.: Gracias

Alumno Eder:

Profr.: Factorizar empleando las piezas geométricas X^2+5X+6.

Ao.: Ya esta profesor.

Profr.: ¿Cuál es el resultado?.

Ao.: Es (X+2)(X+3).

Profr.: ¿Por qué es ese resultado?, ¿de dónde surge?, ¿dónde está X+2 en la figura?.

Ao.: Aquí.

Profr.: Y, X+3.

Ao.: Acá arriba.

Profr.: Cuando haces la factorización, ¿estas encontrando el área o el perímetro?.

Ao.: El perímetro.

Profr.: ¿También se puede hacer de otra forma?.

Ao.: Hay que buscar dos números que sumados den esto (6) y multiplicado de uno de estos (5).

Profr.: O sea que, multiplicados nos dan ¿cuál número?.

Ao.: Este.

Profr.: ¿Cómo se llama ese número?, seis, o, ¿no?.

Ao.: Seis.

Profr.: ¿Qué diferencia hay entre la multiplicación y la factorización?.

Ao.: En que si multiplicamos sale el área y si factorizamos sale el perímetro del área.

Profr.: Si tu fueras el maestro ¿cómo explicarías a los alumnos la factorización?.

Ao.: Pues que busque dos números que multiplicados den 6 y que sumados den 5.

Profr.: ¿No necesitarías hacerlo tu con piezas y rectángulos?.

Ao.: No.

Profr.: Y si cambiamos el orden, me decía tu compañero; ¿puedes re-escribir el resultado?.

Ao.: Pues, es el mismo que allá.

Profr.: ¿Por qué es el mismo?.

Ao.: Porque son las mismas piezas, pero el resultado no es igual porque se pasa del perímetro, las puso al revés.

Profr.: ¿Por qué ya no le sigues agregando más piezas?.

Ao.: Se sale del perímetro.

Profr.: Gracias.

Alumno Daniel:

Profr.: Vamos a factorizar $9X^2+18X+8$.

Ao.: Si.

Profr.: ¿Cuál es el resultado?.

Ao.: $(3X^2+2)(3X+4)$.

Profr.: ¿Qué representa el resultado de la factorización?.

Ao.: El perímetro.

Profr.: Si el resultado lo invierto y ponemos estas piezas aquí ¿sería el mismo resultado?.

Ao.: Si.

Profr.: ¿Qué cambio de aquí?.

Ao.: Nada.

Profr.: Factorizar $m^2+10m+21$, ¿cuál es el resultado?.

Ao.: $(m+7)(m+3)$.

Profr.: ¿Por qué es ese el resultado?.

Ao.: Porque vendría siendo el perímetro de la figura de adentro.

Profr.: ¿Por qué estabamos diciendo anteriormente que estas piezas era X, y, esta pieza era X^2, ¿por qué ahora me cambias y me dices que esta pieza es m y esta m^2?.

Ao.: Porque le puede dar el valor de cualquier letra.

Profr.: En la factorización si yo cambio el orden de estos y ahora los pongo aquí, ¿sigue siendo la misma factorización?.

Ao.: Sigue siendo la misma.

Profr.: ¿Por qué sigue siendo la misma?.

Ao.: No tiene nada que ver si los cambia, vendría siendo lo mismo de adentro.

Profr.: Mi pregunta es: ¿puedo agregar más unidades tanto cómo yo quiera?.

Ao.: No, no puede, porque no sería lo mismo.

Profr.: ¿Por qué no sería lo mismo?.

Ao.: No daría el resultado de la multiplicación.

Profr.: ¿Con respecto a esto cambiaría?.

Ao.: Si, si cambiaría, serían más piezas.

Profr.: Pongo 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 piezas pero, se las pongo de este lado 4,5,6,7 ¿cómo quedaría arreglado, las piezas?, al poner el primer factor; ¿cuál sería el primero?.

Ao.: (El alumno ejecuta la acción).

Profr.: Si en lugar de usar las piezas azules, uso las piezas verdes, ¿sería lo mismo?, o, tú ¿qué opinas?.

Ao.: No se puede.

Profr.: ¿No se puede?, vamos a intentarlo.

Ao.: (Daniel realiza correctamente la manipulación de las piezas, para formar el rectángulo).

Profr.: Daniel, ya viste qué sí se podía.

Ao.: Si se puede.

Profr.: Gracias.

Alumna Urania:

Profr.: La siguiente división $9X^2+6X+1/3X+1$, ¿cómo le hacemos Urania?.

Aa.: Primero pongo 3X+1 aquí a un lado, ya. Ahora voy a poner las piezas que siguen.

Profr.: ¿Son cuántas piezas?.

Aa.: 9.

Profr.: Y ahora te hacen falta 6X.

Aa.: Ahora voy a formar un rectángulo o un cuadrado.

Profr.: ¿Cuáles qué están en el interior?.

Aa.: Si, maestro ya.

Profr.: Ya.

Aa.: Se formó un cuadrado.

Profr.: Ahora ¿cuál es el resultado?

Aa.: ¿En la parte de arriba?, ya.

Profr.: ¿Cuál es el resultado?.

Aa.: 3X+1, ya maestro.

Profr.: Ese resultado que colocaste en la parte superior, ¿forma parte del área o del perímetro del cuadrado?.

Aa.: Del perímetro.

Profr.: ¿Por qué ya no le agregaste más piezas aquí?.

Aa.: Porque no tiene pasar de aquí.

Profr.: Se dice que podías haber hecho esto ¿es el mismo resultado?.

Aa.: Si, pero el mejor resultado es que este acá.

Profr.: Eso es.

Aa.: Así, ya maestro.

Profr.: Gracias.

Alumna Almazul:

Profr.: Vamos a resolver la siguiente división: $2X^2+5X+4/2X+1$.

Aa.: (La alumna observa la división que escribo en el pizarrón)

Profr.: ¿Por qué pusiste primero 2X+1?.

Aa.: Porque es lo que esta allá abajo y esto es lo que marca el límite, de que no me pase de aquí, y aquí no hay límite, así que me puedo venir hasta acá.

Profr.: Muy bien adelante, son cuatro nada más, no las acomodes nada más ponlas ahí, y, ¿cuántas unidades?.

Aa.: Estoy acomodando esto para no pasarme del límite que esta aquí.

Profr.: ¿Dónde va esa X?.

Aa.: Así, formo el rectángulo porque con estos dos me paso.

Profr.: ¿Cuál sería el resultado?.

Aa.: El resultado sería X+2.

Profr.: ¿Cuánto te sobra?.

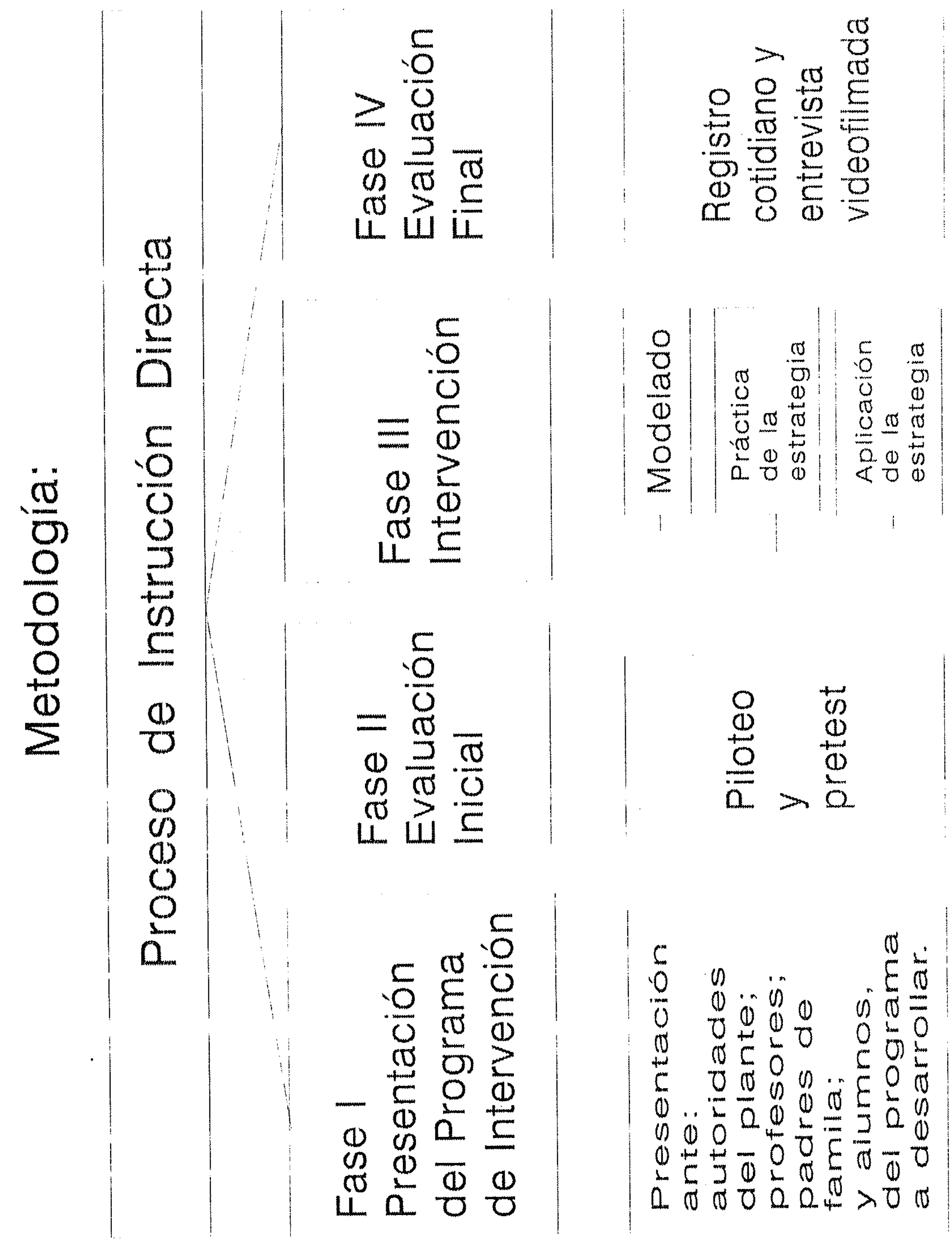
Aa.: Me sobran estos 2.

Profr.: ¿Cuál es el resultado entonces?.

Aa.: X+2.

Profr.: Gracias.

Anexo I. Diagramas de la metodología



Proceso de Intervención

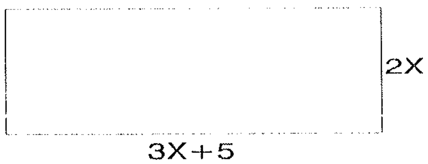
- Modelado
  - Presentación y desarrollo del concepto
  - Comprobación del aprendizaje del concepto
- Práctica de la estrategia
  - Entre profesor y alumnos; planteamiento y resolución de problemas propuestos
- Aplicación de la estrategia
  - Práctica guiada
  - Solución de problemas realizados colectivamente
  - Solución de problemas realizados individualmente

Anexo II. Pretest

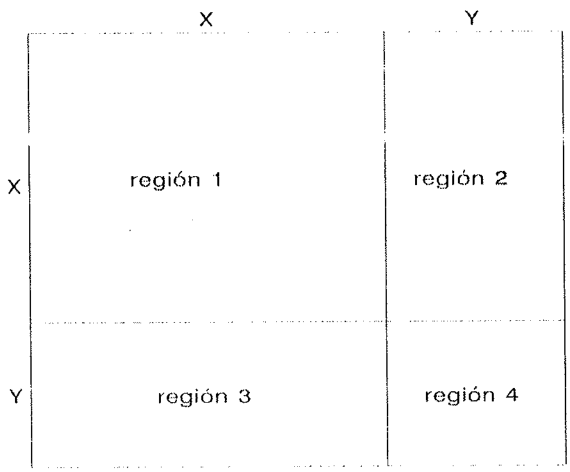
Alumnos que ingresan a 3º año. Escuela Secundaria General Nº 1.
Moisés Saenz. Fecha:

Nombre del alumno(a):-------------------------------------

Problema Nº 1.Indica con un polinomio el área del rectángulo siguiente:



Problema Nº 2. Observa la siguiente figura:



A) ¿Cuál es el área de cada región?.
B) ¿Cuál es el área total de las 4 regiones?.

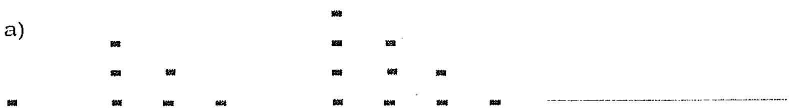
Con estos dos problema se intenta evaluar las siguientes estrategias y contenidos:

Estrategias	Contenidos
-Estimación. -Prueba y error. -Plantear un problema más simple. -Representación simbólica. -Autocorreción o monitoreo.	-Multiplicación y factorización de polinomios. -Exponentes, aplicación de la ley distributiva. -Area y perímetro.

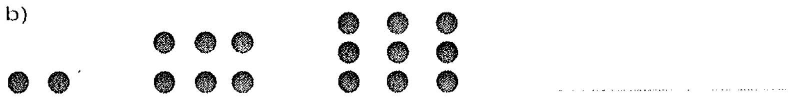
Problema Nº 3.

Dibuja la figura faltante en cada secuencia.

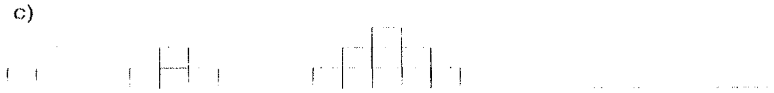
a)



b)



c)



Con este problema se intenta evaluar las siguientes estrategias y contenidos:

Estrategias	Contenidos
-Observar el comportamiento de patrones numéricos. -Prueba y error. -Anticipación. -Trazar un esquema o diagrama. -Lista sistemática. -Asociar el problema con otro ya conocido. -Elegir varias alternativas de solución. -Autocorreción.	-Geometria. -Simetria. -Teoría elemental de números. -Inducción.

Problema Nº 4.

Se tienen dos montones de canicas. El segundo montón tiene 5 canicas menos que el primer montón. La suma de los dos montones es 21. ¿Cuántas canicas hay en cada montón?.

Con este problema se intenta evaluar las siguientes estrategias y contenidos:

Estrategias	Contenidos
-Tabulación. -Estimación. -Prueba y error. -Lista sistemática. -Plantear un problema más simple. -Autocorreción. -Representación simbólica.	-Multiplicación de polinomios. -Factorización. -Solución de ecuaciones de 1er grado.

Nota.- Al cabo del presente examen se le hizó una entrevista a cada alumno individualmente para que nos explicara verbalmente la forma en que se resolvieron los problemas

Anexo III. Preguntas realizadas a lo largo de la instrucción.

A lo largo de la propuesta de intervención pedagógica, se formularon preguntas para explorar el proceso de solución de los problemas, agrupadas de acuerdo a las categorías a indagar, como las siguientes:

Entendimiento del problema:

¿Puedes explicar el problema en tus propias palabras?.

¿Hay algo que no entiendas?.

¿Qué se supone que vas a hacer?.

Formulando un plan:

¿Cómo organizaste la información?.

¿Cuáles materiales te ayudan para resolver el problema?.

¿Qué has hecho hasta ahora?.

¿Cuáles estrategias te ayudan en la solución del problema?.

Solución del problema:

¿Puedes obtener la solución de otra forma?.

¿Hay un problema más simple relacionado con el que tú intentas resolver?.

¿Tú solución responde a la(s) pregunta(s) planteadas en el problema?.

Visión retrospectiva:

¿Cómo vas a verificar tu resultado?.

¿Cómo sabes que lo que has hecho es lo correcto?.

¿Qué haces cuando no estás segura(o) del resultado?.

¿Es esta clase de problema fácil o difícil para ti?,

¿Qué hace a este problema fácil?,

¿Qué hace a este problema difícil?.

Comunicando la solución:

¿Cómo le explicarias a tus compañeros lo que estas haciendo?.

¿Es este problema igual a otros que ya has resuelto?, ¿En qué forma es lo mismo?

¿En qué forma es diferente?.

¿Cómo resumes la solución?.

Anexo IV. Criterios de evaluación propuestos por la National Council Teachers of Mathematics.

Tabla de criterios para la evaluación			
Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
Proceso: Entendimiento del problema			
requiere la asistencia del profesor para entender el problema	muestra un entendimiento parcial del problema, necesita asistencia del profesor	muestra un completo entendimiento del problema	muestra un entendimiento completo del problema y tiene ideas más allá del problema
Proceso: Formulando un plan			
requiere la asistencia del profesor para elegir una estrategia apropiada o, aplica aleatoriamente la estrategia de ensayo-error	muestra evidencia de un plan y emplea una estrategia la cual puede o no puede se aplicada efectivamente	selecciona y aplica apropiadamente la estrategia	desarrolla sofisticadas estrategias y las aplica dentro de un plan efectivo
Proceso: Solución del problema			
proporciona soluciones incorrectas aún con asesoria	hace errores matemáticas menores lo cual conduce a respuestas erróneas o soluciones incompletas	proporciona una solución en forma completa y correcta	proporciona una solución en forma completa y correcta. Pero, muestra más de una forma de resolver el problema. Generaliza soluciones
Proceso: Visión retrospectiva			
requiere de asistencia y sugerencias para determinar la razonabilidad de la solución	Considera con sentido común razonable la solución	Independientemente que considera buena la solución y la viabilidad, verifica la respuesta	continuamente monitorea lc razonable de la selección d la estrategia y el progres hacia la solución. Cons variaciones y extensio problema
Proceso: Comunicando la solución			
explica el razonamiento en una forma desorganizada que es difícil de seguir	da una respuesta y empieza a elaborar y explicar con la asistencia del profesor	explica el razonamiento en una forma bien organizada con justificación	realiza acertad y explica el ra claridad, co capacidad

Durante la propuesta de intervención se hizó uso del siguiente material: