UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

UNIVERSIDAD
PEDAGOGICA
NACIONAL

ESTRATEGIAS UTILIZADAS AL RESOLVER PROBLEMAS ARITMETICOS DE ESTRUCTURA SEMANTICA A NIVEL GRUPAL E INDIVIDUAL

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

LICENCIADO EN PSICOLOGIA EDUCATIVA

PRESENTAN:

MA. GUADALUPE JAVIER BARRERA
BEATRIZ MEDINA GARCIA

ASESOR DE TESIS: CUAUHTEMOC GERARDO PEREZ LOPEZ

MEXICO, D. F. ENERO 2001

AGRADECIMIENTOS

GRACIAS CUAUH:
por exigirnos y enseñarnos
a hacer las cosas
lo mejor posible.

A la Lic. Yanalte Álvarez Pérez:
por el invaluable apoyo en la revisión
de los problemas aritméticos
y sus oportunas
palabras de aliento.

Al profesor Pedro Bollás García:
por su amable ayuda y valiosas
sugerencias.

A los maestros de la UPN que a través
de sus agudas críticas y visión profesional
van sembrando ideas de cambio y desarrollo.

Gracias al maestro Rafael Serralde Venancio,
Director de la Escuela Primaria "General J. N. Álvarez",
por la confianza y apoyó que nos brindó.
Gracias a los maestros, por permitirnos interrumpir su labor
Y gracias a los niños... por dejarnos aprender de ellos.

Gracias a ti Gabriel:
por tu apoyo y fortaleza.
Te quiero

Alma y Gabriel:
gracias por su rebeldía
gracias por su curiosidad
gracias por su ternura...
Ustedes encienden mi vida.

A la profesora Leticia Morales,
por su generosa sensibilidad
ante los problemas ajenos.
Gracias

Creo que... gracias a Dios por
permitirme ser parte de una gran
familia y con ella compartir
nuestra memoria generacional.

Y gracias a Lupita, Elvia y Gaby
por compartir conmigo
su entusiasmo y dedicación.

BETY

A mis padres Tomás y Flor:
por permitirme ser la
constructora de mi camino,
lo cual no ha sido nada fácil.
Gracias.

A Dios:
Por ser un compañero inseparable.

A mis hermanos:
por soportar mis gritos,
quejas y compartir mis triunfos.

A mis amigas Gaby, Elvia y Bety:
por haber sustraído lo
mejor de ustedes.
Muchas gracias y buena suerte.

A la familia Bagundo:
por compartir conmigo
su intimidad.
Gracias.

LUPITA

ÍNDICE

Capítulo II

Capítulo III

Capítulo IV

RESUMEN

Con los objetivos de conocer cuál de los cuatro tipos de problemas de estructura semántica resulta más difícil en 1°, 3° y 6° de primaria y cuáles son las estrategias empleadas, se aplicaron a 27 sujetos, 9 en cada grado, un total de 15 problemas que fueron resueltos en dos modalidades de trabajo: 5 sujetos individualmente y 4 en forma cooperativa. Un experto se incluyó en cada forma de trabajo.

Los resultados muestran que en primer grado la estructura de combinación resultó ser la más difícil de representar, en tercero la de comparación y en sexto año, aunque disminuyen tales dificultades, combinación fue la más difícil.

Por otra parte los resultados evidencian la necesidad de no soslayar las habilidades informales que el niño posee al resolver problemas aritméticos, so pena de adquirir aprendizajes poco significativos. Por ello, se expone la gran diversidad de estrategias tanto informales como escolarizadas que se emplearon en estos grados. Asimismo, se presentan los diversos errores, tanto de representación como de ejecución, que surgen al tratar de resolverlos. Por último, las dificultades que enfrentaron los sujetos se resolvieron con mayor éxito al trabajar en equipo.

INTRODUCCIÓN

La comprensión eficaz de un problema aritmético se da en la medida en que el sujeto entiende las relaciones entre los elementos o datos que lo componen. En este sentido, se ha señalado la existencia de cuatro tipos de relaciones o estructuras semánticas en los problemas aritméticos. Ellas son: cambio, combinación, comparación e igualación. Además, el nivel de dificultad en la resolución varía según se trate de uno u otro tipo de estructura.

En este orden de ideas, una de las causas que ha propiciado un aprendizaje poco significativo en la enseñanza de las matemáticas surge al no vincular los conocimientos informales que el sujeto posee con los nuevos aprendizajes que se proponen en la educación formal. Tal situación se evidencia cuando al tratar de resolver un problema aritmético, no se legitiman las estrategias heurísticas que los niños aplican y, en cambio, deben adoptar estrategias totalmente extrañas a ellos (algoritmos).

Por otra parte, si proponer la enseñanza de los conceptos matemáticos a través de la resolución de problemas cotidianos es una alternativa prometedora, hacerlo dentro de un ambiente de trabajo cooperativo potencializa aún más los logros que pueden alcanzarse.

Considerando los aspectos mencionados anteriormente, nuestra investigación pretende indagar qué estructura semántica resulta más difícil de resolver en los grados estudiados (1°, 3° y 6°) así como los errores que surgen a partir de ello: representación, ejecución y conceptuales. Asimismo, se pone especial atención en la evolución de las diversas estrategias desplegadas al resolver los problemas propuestos. Finalmente, nos interesa comparar los resultados que se obtienen al realizar estas tareas en forma individual (un experto y 4 novatos) y en equipos de trabajo de cuatro personas (un experto y tres novatos).

El primer capítulo de esta obra sustenta teóricamente las aseveraciones formuladas anteriormente. Así, expone algunas de las causas que han dificultad la enseñanza – aprendizaje de las matemáticas. Enseguida, se señalan diversos aspectos que deben considerarse al proponer la resolución de problemas como un medio para enseñar los conceptos de esta ciencia. Otro punto de gran interés son las estrategias de aprendizaje como útiles herramientas para acceder a nuevos conocimientos así como las estrategias infantiles que se desarrollan al resolver un problema matemático. Finalmente, este capítulo revisa sucintamente las ventajas que ofrece realizar tareas matemáticas en un ambiente de trabajo cooperativo.

La metodología seleccionada en la recolección de datos se expone en el segundo capítulo. En él se describen las características de los sujetos, así como los criterios seguidos para seleccionar a quienes participaron tanto en la forma de trabajo individual como en la cooperativa. Asimismo, se mencionan los aspectos considerados al elaborar el instrumento aplicado en cada grado y los ajustes realizados después de confiabilizarlo. Finalmente describe el procedimiento seguido en la aplicación de tal instrumento.

El tercer capítulo comprende tanto el análisis cuantitativo como cualitativo de los datos. En el primero se exponen los aciertos obtenidos por los sujetos al resolver los 15 problemas propuestos, observándose una clara tendencia favorable hacia el trabajo cooperativo e individual experto.

Por su parte, el análisis cualitativo recoge los resultados en relación a la estructura semántica más difícil de representar y hace una descripción minuciosa de las estrategias empleadas al resolver los problemas en cada uno de los grados estudiados. Por último, evidencia algunos de los errores surgidos al realizar las tareas.

En relación a las categorías semánticas, en términos generales, en primer y tercer grado se observó mayor dificultad para resolver estructuras que implican relaciones estáticas, tal es el caso de los problemas de combinación y comparación. Por el contrario y como consecuencia del mayor número de aciertos obtenidos, en sexto grado existen mínimas diferencias en las dificultades para representar las cuatro estructuras semánticas.

Por último, se observó que a medida que se avanza en la escolarización y, por tanto, se van incorporando los algoritmos tradicionales y nuevos conceptos matemáticos se incrementan los errores de ejecución y conceptuales. Ello, probablemente, como consecuencia de un aprendizaje poco significativo. Asimismo, cabe señalar que durante este recorrido, las dificultades al representar las diversas categorías semánticas van disminuyendo. En cuanto a las estrategias, éstas se han homogeneizado en el último grado escolar, siendo los algoritmos los más utilizados.

En general las dificultades que se enfrentaron al resolver los problemas pudieron ser resueltos con mayor eficacia cuando la tarea se desarrolló en un ambiente de trabajo cooperativo. Evidentemente ello se debe a que sus integrantes podían confrontar sus ideas y llegar a una mayor comprensión del problema. Esto último no siempre ocurría al trabajar individualmente.

Finalmente, en el capítulo cuarto se discuten nuestros resultados a la luz de las aportaciones de diversos autores, desprendiéndose de lo anterior algunas sugerencias en torno a la labor docente y a la realización de futuras investigaciones.

Capítulo I

DIFICULTADES EN LA ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Matemáticas y los cambios sociales

Para Santaló (1995) la misión del educador y por tanto de la escuela, es preparar a las nuevas generaciones para poder desempeñarse con comodidad y eficiencia en el mundo que les ha tocado vivir. El mundo actual, regido por una tecnología altamente sofisticada, ha permitido investigar fenómenos alejados miles de millones de kilómetros de nuestro planeta, también ha permitido el estudio de lo infinitamente pequeño sin dejar fuera, por supuesto, la maravilla de poder observar en detalle el funcionamiento de los órganos vitales del cuerpo humano.

Ante este panorama, el reto de la escuela es tratar de ir a la par con dichos cambios y brindar al alumno la posibilidad de entender y utilizar, con provecho, las modernas tecnologías que imperan en la sociedad. Aquí es donde el tema de las matemáticas cobra un papel de gran importancia porque, según este autor, además de la tarea que implica su enseñanza, es necesario clarificar cuál es la matemática que se pretende impartir en la escuela. En este sentido, el autor recuerda la preferencia que tenían los griegos por la matemática pura sobre la matemática aplicada. Hoy en día, agrega el autor, la educación formal considera la importancia de ambas al seleccionar los contenidos en los distintos niveles de la educación. Dicha selección debe tomar en cuenta tanto el valor formativo, que ayuda a estructurar todo el pensamiento y a agilizar el razonamiento deductivo (matemática pura), como las herramientas que permitan al sujeto actuar en su entorno social (matemática aplicada).

A este respecto, Puy y Cérdan (1987) y Resnick y Ford (1990) plantean que uno de los problemas con los cuales se ha enfrentado el aprendizaje de las matemáticas, es que su enseñanza se ha basado en la memoria repetitiva y descontextualizada. En este sentido, el objetivo de la enseñanza matemática, señala Charnay (1995), es que lo aprendido esté cargado de significado. Para este autor el significado matemático se construye en dos niveles: uno "externo", que indica cuál es el campo de utilización de este conocimiento y cuáles son sus límites y, el otro "interno", que responde a saber cómo funciona un algoritmo y por qué conduce al resultado buscado. La clave para alcanzar tan importante objetivo es, según el autor, *enseñar las nociones matemáticas como herramientas para resolver problemas*, ya que sólo después podrán ser estudiadas en si mismas.

Estructura de las matemáticas

Es en la década de los sesenta cuando se presenta un cambio en la enseñanza matemática, cuyo fin había sido adaptarse a las necesidades sociales y avances tecnológicos. Se propone tomar en cuenta las estructuras básicas de los procedimientos y conceptos matemáticos, de modo que su enseñanza correspondiera al desarrollo intelectual del alumno, y que éste fuera capaz de trasladar los conocimientos adquiridos a su contexto (Resnick y Ford, 1990); se buscaba el logro de aprendizajes significativos.

El concepto de estructura es, según Resnick y Ford (1990), la clave para comprender los conceptos básicos para el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Así, la **estructura matemática** es la forma en que el conjunto de conocimientos matemáticos se organizan e interrelacionan internamente. En este sentido, a la psicología le interesa el análisis psicológico de estos conceptos, es decir, cómo son comprendidos por los alumnos, cómo los adquieren y cómo los utilizan. De aquí la gran importancia en que el niño sea un lector hábil, ya que las matemáticas también se leen.

Así, en los años setentas, con el auspicio del emergente enfoque cognitivista, frente al conductista, se da un gran interés por los procesos de resolución de problemas aritméticos. Esto tiene importantes implicaciones curriculares ya que, según Puig y Cerdán (1988), se toman como prioridad no los conocimientos que hay que transmitir, sino los procesos de producción del conocimiento. Estos autores mencionan que la tarea de resolver problemas es una actividad favorable para promover el aprendizaje y que si se desea saber cómo se produce éste, es preciso analizar las conductas que los sujetos llevan a cabo mientras los resuelven. Asimismo, entienden por proceso de resolución de un problema, a la actividad mental del sujeto cuando éste asume que lo que tiene delante es un problema y que no se concluirá hasta encontrarle una solución.

Enseñanza de la estructura matemática

Respecto a cómo enseñar la estructura básica de las matemáticas Resnick y Ford (1990) mencionan tres fases, en primer lugar, deben presentarse a los niños objetos concretos agrupados en conjuntos; después estos conjuntos se asociarán a las cifras que les correspondan, para finalmente, enseñarles el uso de la notación normal. Esto es, dicha enseñanza va de una representación concreta a una representación simbólica.

Las mismas autoras señalan que si se quiere conseguir que los alumnos adquieran una comprensión de las estructuras matemáticas se debe disponer de una teoría del funcionamiento intelectual. Por lo anterior, retoman el pensamiento de Bruner quien, al colaborar con el matemático Dienes, se interesó en los medios por los que los alumnos consiguen, retienen y transforman la información. Es decir cómo los niños se representan mentalmente los conceptos e ideas que van aprendiendo.

Así, Bruner (en Resnick y Ford, 1990) describe tres modos de representación: el primero es la **enactiva,** es decir, donde los niños se representan el conteo como un acto motriz y concreto. Esto puede verse claramente cuando el niño utiliza objetos o sus dedos para contar. El segundo modo es el **icónico**, el cual representa una transición entre lo puramente concreto o físico y el logro de las imágenes mentales. Es aquí donde el sujeto se imagina una operación o una manipulación realizada con anterioridad. Finalmente se da la **representación simbólica**, surgida gracias a la aparición de la competencia lingüística. Es decir, cuando los niños empiezan a tener contacto con las matemáticas utilizan ciertos símbolos como " =", "+" , " - " , marcando el principio de la representación simbólica, lo que les posibilita un pensamiento abstracto.

Por lo anterior, estas representaciones están íntimamente relacionadas, llevan una secuencia y cada una depende de la anterior; además, ello equivaldría a una teoría de las etapas de desarrollo del intelecto. Este planteamiento de Bruner, según Resnik y Ford (1990), es similar a la teoría del desarrollo de Piaget. Sin embargo, el trabajo de los dos teóricos ha recibido orientaciones diferentes. Bruner, por ejemplo, se ha ocupado más directamente de las aplicaciones en el aula, manifestando que todo problema o cuerpo de conocimiento se puede enseñar de una forma lo suficientemente sencilla como para que cualquier estudiante lo pueda comprender.

Por su parte Baroody (1988) apoyándose en algunos autores, muestra dos modelos de enseñanza de las matemáticas. El primer modelo se apoya en la teoría de la asociación, el cual muestra que aprender matemáticas consiste en memorizar conocimientos de manera rígida, preestablecida y donde se utilizan símbolos abstractos. Este modelo genera en el niño creencias debilitorias y perfeccionistas. Las primeras crean ideas como "soy tonto, no debo preguntar, no debo contar con los dedos". Por su parte, las creencias perfeccinistas inducen a utilizar los datos y procedimientos correctos y hacerlos con rapidez. Baroody menciona que un énfasis excesivo por obtener una respuesta correcta empleando el procedimiento adecuado puede crear falsos conceptos en los niños como: a) todos los problemas deben tener una respuesta correcta, b) sólo hay una manera de resolver un problema, c) las respuestas inexactas (estimaciones) y los procedimientos inexactos (ensayo y error) son inadecuados. Para este autor, la teoría de la absorción pasa por alto la matemática informal de los pequeños y por tanto aprenden a avergonzarse al contar con sus dedos, creen que la matemáticas son sólo para genios y que no tienen sentido.

Las creencias anteriores son denominadas por este autor creencias irracionales y permiten explicar por qué los niños aceptan muchas veces respuestas absurdas. Esto puede observarse cuando el niño resta (205 - 17 = 212) y obtiene un residuo mayor aun sabiendo que debería ser menor gracias a sus matemáticas informales. Estas creencias también llevan al niño a identificar las matemáticas con la aritmética y no con la búsqueda de relaciones o atajos, es decir, los niños al enfrentarse con problemas de aritmética creen que sólo deben hacer operaciones y no buscar atajos o relaciones (uso de propiedad conmutativa 18+27 = 27+18).

Las creencias irracionales generan ansiedad en los niños al no poder enfrentar los problemas matemáticos. Para disminuirla optan por copiar a un experto o simplemente no hacer nada. Esto les evitará fracasar a corto plazo pero a la larga los llevará a no mejorar y por lo tanto a no aprender.

Ante este panorama, Baroody (1988) expone un segundo modelo basado en la teoría cognitivista. Tal modelo propone acabar con las creencias irracionales apoyándose en la labor del maestro ya que debe: a) evitar el perfeccionismo e incluir problemas para los cuales no exista solución (Ejemplo: *Hay 26 ovejas y 10 cabras en un barco. ¿Qué edad tiene el capitán?,* Shoenfield 1989), b) permitir el uso de la matemática informal de los niños y relacionarla con la matemática escolar para hacerla menos extraña y amenazante.

Lenguaje de las matemáticas

Así como el lenguaje es para Luria (en Veggetti, 1997) un vehículo que permite organizar la acción voluntaria, el sistema de cálculo abstracto sirve para valorar cuantitativamente las relaciones perceptivas de los objetos, cuantificación "bruta", según Piaget y Szeminska (en Veggetti,1997).

Al respecto, Orton (1990) plantea la existencia de una relación crucial entre el aprendizaje de las matemáticas y el desarrollo del lenguaje. Para este autor, diversos aspectos, tanto del lenguaje como de las matemáticas, se conjugan para dificultar el aprendizaje de esta ciencia, lo cual, dice el autor, es una problemática presente en todo el mundo.

Uno de tales aspectos es el vocabulario matemático, que tomado del lenguaje cotidiano adquiriere un significado totalmente distinto; tal es el caso de las palabras "relación" (conjunto de pares ordenados, distinto a parientes en inglés); "volumen" (medida de una región tridimensional del espacio ordinario, distinto a, por ejemplo, comando de la t.v.); otras palabras como "campo", "grupo" y "raíz" también se usaban en el ámbito cotidiano antes de asignarles significados técnicos. Para superar las dificultades de vocabulario, Orton (1990) sugiere que los alumnos lleven a cabo actividades como resolución de crucigramas, sopa de letras y emparejamiento, entre otras, con el fin de familiarizarse con el uso que se le da a estas palabras en el ámbito matemático.

La lectura del texto matemático es otro aspecto a considerar, ya que ésta no necesariamente va de izquierda a derecha ni línea tras línea, como en el lenguaje literario o la lectura de otras materias. Entre sus características principales debe evitarse, en primer lugar, la lectura superficial ya que la pérdida de detalles, palabras o símbolos, podría alejar al lector del sentido expresado por el problema o frase. En pos de la legibilidad (que no es otra cosa, según este autor, que poder acceder al conocimiento matemático sin que "estorbe" el propio lenguaje), Orton (1990) recomienda la organización de grupos pequeños de trabajo o que la enseñanza y ejercicios estén entrelazados, logrando, además, la interacción. Esta última característica se logra con la presentación adecuada de gráficos, tablas y diagramas de donde el alumno extraerá la información pertinente.

Otra singularidad del texto matemático es que posee tres tipos de *unidad de significado*, es decir, tres recursos diferentes de exponer la información. El primero se refiere a hacer explícito el contenido matemático, esto se evidencia a continuación: "En la siguiente secuencia unos números consecutivos mantienen siempre la misma relación entre sí" (Shuard y Rothery 1984, en Orton, 1990); la segunda unidad de significado son las "declaraciones o preguntas" que, aunque proveen de información aparentemente explícita, exigen una actividad por parte del alumno, por ejemplo, "¿Qué números llenarían los huecos: 2, 4, __ , 16, 32, __ , __ , 256, __ , 1024, ___ , _?"; y, finalmente, existen "textos huecos o incompletos", que el alumno tendrá que llenar aportando algún significado a través de inferencias o apoyándose en otro tipo de conocimientos:

Para sumar fracciones los denominadores tiene que ser iguales.

$\frac{1}{3} + \frac{1}{2}$

$= \frac{2}{6} + \frac{3}{6}$

$= \frac{5}{6}$

Suma estas fracciones.

1). $\frac{1}{4} + \frac{1}{3}$, etc.

Al leer el enunciado y analizar el desarrollo de la operación, el alumno debe recurrir a sus conocimientos sobre el tema y deducir cómo se obtuvo el denominador común y, por tanto, el resultado, para que a continuación pueda resolver los ejercicios que se le presentan.

Los símbolos empleados en matemáticas son un tercer aspecto que da pie a las dificultades en su enseñanza. Aunque aparentemente su función es la misma que en otro tipo de lecturas, en matemáticas adquieren características muy específicas. Algunos de tales símbolos no se escriben de izquierda a derecha sino de arriba hacia abajo ($\frac{3}{4}$); en ocasiones, para comprender un mensaje claramente se requiere leer una colección completa de símbolos, por ejemplo: $\int \frac{2}{1} x^2 \, dx$. Así mismo, distintas estructuras de símbolos trasmiten el mismo significado "3:4" y "$4\overline{)3}$"; o, igual estructura supone un significado distinto "34" y "3x". Por lo anterior, en la comprensión de símbolos matemáticos es de vital importancia, según Orton (1990), discriminar símbolos muy semejantes y diferenciar lo que Skemp llamó la "*estructura superficial*" (la forma de los símbolos que trasmiten significados) de la "*estructura profunda*" (que son los significados).

Esta última es, según Orton (1990), el punto clave para la comprensión de símbolos. Por ello, para el logro de ésta el autor hace las siguientes sugerencias: 1) introducir el símbolo como etapa final de las secuencias de aprendizaje; 2) secuenciar las ideas matemáticas y relacionarlas con el conocimiento conceptual ya existente; 3) hacer amplio uso de lenguaje oral antes de convertirlo en símbolo y, 4) usar notaciones transicionales (área = longitud x anchura) como un puente hacia el simbolismo condensado (A = la).

Bermejo (1990) arriba a conclusiones similares, al afirmar que el interés por las matemáticas aumenta cuando el contenido de éstas se vinculan con experiencias de la vida cotidiana del escolar o, más aún, como afirma Kamii (1993), si se comprende que el contenido matemático se construye en base a tales experiencias; asimismo Bermejo recomienda, debido al carácter intuitivo del pensamiento infantil, evitar las prisas en el aprendizaje de conceptos así como en el uso de los símbolos matemáticos.

Finalmente, dice Orton, en la comunicación del significado matemático interviene, además, la *interpretación del receptor* y cuando ésta no es la que el profesor pretende, se convierte en otra dificultad para la enseñanza de las matemáticas. Para Donaldson (en Orton, 1990) dicha interpretación está influida por el conocimiento del lenguaje, la valoración respecto a lo que el profesor se propone y la manera como el estudiante se representaría la situación si el profesor no estuviera presente. Por lo anterior, para Orton es evidente la relación existente entre el lenguaje y la enseñanza de las matemáticas y, aún más, la importancia del **diálogo** en dicha relación. En la enseñanza tradicional, el debate que se establece entre profesor y alumno, basado en preguntas y respuestas, no proporciona a los alumnos situaciones suficientes de colaboración. Para este autor, una clase con mayores beneficios se caracteriza por la promoción de situaciones más "abiertas", en donde no prevalezca la orientación o guía directa del profesor, sino una en donde el alumno verbalice abiertamente sus ideas en pequeños grupos, debido a que estos procedimientos aunque exigen más tiempo suelen conseguir soluciones de mejor calidad.

En el mismo sentido, éstas son las consideraciones que realiza Ovejero (1990) al hablar de los efectos positivos, cognitivos y no cognitivos, del aprendizaje cooperativo en general y muy particularmente, en el de las matemáticas. A este respecto, Charnay (1995) describe tres modelos de aprendizaje para las matemáticas: a) el modelo **"normativo"**, en donde se trata de comunicar a los alumnos un saber ya acabado, característico de los métodos dogmáticos o tradicionales; b) el modelo "**incitativo**" centrado en los intereses, motivaciones y necesidades del alumno, por ello la estructura propia del saber pasa a un segundo plano, se encuentra presente en los métodos "activos" y, c) el modelo "**aproximativo**" parte de las concepciones existentes en el alumno para ponerlas a prueba con el fin de mejorarlas, modificarlas o construir nuevas, es decir; requiere la guía del maestro y la interacción entre compañeros en la construcción del saber. De acuerdo a este autor, según el modelo en que se lleve a cabo la enseñanza de las matemáticas, se asignará un rol y lugar a la actividad de resolución de problemas. Así, en el modelo normativo, el problema es visto como un "criterio" de aprendizaje y se caracteriza por ir de lo fácil a lo complejo y de lo concreto a lo abstracto. En el modelo incitativo, los problemas son apenas un "móvil" de aprendizaje, ya que las situaciones "naturales" a que se enfrenta el niño por ser demasiado difíciles y esporádicas pueden dificultar que construya por sí mismo los conocimientos matemáticos. Finalmente, la resolución de problemas es un "recurso" de aprendizaje para el modelo "aproximativo" ya que, además de lo mencionado, se proponen como una práctica necesaria desde el inicio del aprendizaje formal.

LOS PROBLEMAS VERBALES

Así, al referirse a los problemas verbales Bermejo (1990) afirma que deberían proponerse desde el inicio de la enseñanza formal, y al mismo tiempo que el aprendizaje de las operaciones de suma y resta, y no como una aplicación de estos algoritmos. Al respecto, algunos autores plantean que el significado de una operación aritmética (la resta, por ejemplo) se construye como resultado de las relaciones que el sujeto establece al resolver el problema planteado (Balbuena, Block y Carbajal, 1995).

Por su parte Kamii (1993) expone las razones que justifican tal propuesta. En primer lugar, los niños de preescolar y 1° año de primaria son capaces de resolver problemas verbales o de argumento sin necesidad de una enseñanza formal, es decir, antes de ingresar a la escuela cuentan con las habilidades que les permiten resolver diversos problemas. La segunda razón, se debe al hecho de que el niño construye la aritmética en base a lo que vive cotidianamente; por ello, para Resnick y Ford (1990) es razonable comprender que cuando los niños aprenden a utilizar las propiedades numéricas y los algoritmos, lo común es que lo hagan al plantearles problemas a través de palabras, lo que se ha llamado problemas verbales de relato o de argumento según Kamii (1993) .

Por lo anterior, Kamii (1993) propone al docente aprovechar las situaciones reales que se viven en el aula para formular problemas y así promover la construcción de significados matemáticos. Un juego que la autora sugiere realizar con niños pequeños es pedirles que inventen 10 preguntas y, al cabo de haber realizado más de la mitad de la actividad, el docente cuestione cuántas faltan; asimismo promover otras interrogantes que ayuden a los niños a razonar lo que están haciendo.

En la misma dirección, Santaló (1995) hace énfasis en que sean los alumnos quienes elaboren y propongan los problemas y no sólo los resuelvan; los esfuerzos, dice, deben encaminarse a interesar al alumno a extraer el planteamiento matemático de situaciones reales o imaginadas, así se desarrollaría, a la par, la *creatividad*. Según este autor, es a través de esta acción alternada entre proponer y resolver que la matemática avanza y crece. Por su parte, Vergnaud (1995) menciona que la escuela debe proponer problemas en cuyo planteamiento exista información que no se empleará e información faltante.

Para Carrillo (1995) es importante que el profesor asuma una actitud reflexiva ante su labor docente, por tal motivo debe preguntarse continuamente el cómo enseñar. Esta pregunta debe ir acompañada de elementos que informen del nivel de aprendizaje actual de sus alumnos. Es aquí donde la evaluación desempaña un papel importante entendida no como la calificación sino como la herramienta que ayuda a la transformación de un aprendizaje inicial a otro de distinto nivel. Este proceso no finaliza aquí sino que en base a él se iniciarán nuevas modificaciones, debido a que la evaluación debe ser un proceso continuo de transformación.

La evaluación, desde este punto de vista, ofrece la oportunidad de observar en el aula los distintos niveles existentes con respecto a la resolución de problemas. Esto es así, ya que ofrecen un marco ideal para la construcción de aprendizajes significativos y sobre todo son conocimientos que promueven el desarrollo de una actitud abierta y crítica. De tal manera que a los problemas debe dárseles la importancia que tienen y no tratarlos como simples ejercicios.

Por tal motivo, es necesario que al trabajar en la resolución de problemas: 1) se *hagan pausas* de vez en cuando para socializar los aprendizajes que se van produciendo; 2) que el profesor conozca diversos tipos de *recursos heurísticos* y pueda promoverlos entre sus alumnos, y 3) que el estudiante *reflexione* sobre su propio trabajo. Los puntos anteriores resultan más eficaces si el maestro dispone de los instrumentos que le permitan observar y diferenciar aspectos importantes del proceso de resolución. Dichos instrumentos deben incluir categorías como características personales del sujeto, sus habilidades matemáticas, los heurísticos que posee, los aspectos cognitivos y el tipo de control que tiene sobre sus procesos de resolución.

Por otra parte, De la O Roldán, Díaz y Méndez (1996) proponen diversas alternativas didácticas para resolver problemas matemáticos. Entre ellas que los problemas se refieran al contexto cotidiano de los niños y a su nivel de abstracción; trabajar con equipos de cuatro alumnos para promover la participación y búsqueda de soluciones; proponer los problemas a través de consignas orales, propaganda o lista de información y juegos; no incluir "palabras clave" en el planteamiento del problema pues lejos de ayudar confunden a los alumnos; discutir con ellos para que quede claro en qué consiste el problema, sin conducirlos a la resolución; permitir el uso de cualquier estrategia (dibujos, suma, resta, multiplicación, división, etc.); finalmente, consideran la importancia de promover la "confrontación grupal". Esto último con el objetivo de que cada equipo explique cómo lo resolvió y así reconozcan su capacidad para darle solución a los problemas; reconozca la validez de sus procedimientos por el solo hecho de que le brindan una solución; que se percate de que hay otras maneras de encontrar el resultado; que algunos procedimientos son más complicados que otros; que aprenda a defender sus métodos y reconocer sus errores así como los de sus compañeros.

Finalmente, algunos autores han encontrado que existe una gran diferencia en el desempeño de los niños al solucionar problemas matemáticos en ambientes cotidianos y en los ejercicios de cálculo ofrecidos en el salón de clase. Para verificar tal afirmación Carrraher, Carraher y Schliemann (1991) llevan a cabo un estudio en donde plantean tres situaciones diferentes de solución a problemas matemáticos: a) venta simulada, b) problemas presentados con pequeñas historias y c) ejercicios de cálculo, sin referencia a objetos del mundo real. En los tres casos los niños podían hacer uso de lápiz y papel. Los resultados de estos autores muestran que las dos primeras situaciones son más significativas para los niños obteniéndose en ellas mayor número de respuestas correctas; asimismo, se encontró que prefieren un procedimiento oral al resolver los problemas.

Corrientes de investigación centradas en el proceso de resolución de problemas verbales y el proceso de internalización.

Bermejo (1990) plantea la existencia de dos grandes líneas de investigación en el estudio de las habilidades aritméticas elementales; la primera comprende la tradición occidental, que, tratándose de suma y resta, se centra en el estudio de sus secuencias evolutivas a partir de los procesos de solución de problemas verbales. La segunda tradición corresponde a los estudios orientales, quienes se interesan más por definir con claridad el nivel o proceso de cuantificación, esto es la unidad de medición, que por los procedimientos de resolución; es decir, su inquietud es el proceso de interiorización del acto de sumar. Ambas corrientes utilizan como recurso metodológico la entrevista clínica, aunque, de acuerdo a sus distintos fines, los primeros realizan el análisis apoyándose de un marco teórico que clasifica los problemas de suma y resta en función de su estructura semántica; mientras, para los segundos, la tarea propuesta a los niños debe contar con la presentación de diversos objetos, guarismos o alguna combinación de ellos.

a) Línea oriental: Proceso de internalización

Veggetti (1997) sintetiza los logros de dos representantes de la teoría histórico cultural (2ª línea de investigación), Galperin y Davydov. Esta teoría, según Veggetti, trata de explicar la formación del concepto de número en el niño basándose en la concepción vygotskiana de zona de desarrollo próximo (ZDP) y, por lo tanto, en la idea de que el desarrollo cognitivo, al no ser un proceso de maduración espontáneo ajeno al contexto socio-educativo, depende de la capacidad de apropiarse de los instrumentos culturales que la práctica educativa proporciona. De aquí surge a su vez la figura del maestro como importante guía en el proceso de enseñanza aprendizaje.

Como ya se mencionaba, esta línea de investigación se interesa más por los procesos de interiorización que por los de resolución. Por ello, Galperin (en Veggetti, 1997) propone un ambiente educativo, en donde, a través de actividades concretas de medición, se genere el concepto de número y otros aspectos importantes en matemáticas. Tres son las etapas a través de las cuales se elabora la acción del sujeto y que, según este autor, llevan a dicho logro matemático: 1) plantear problemas en torno a la acción que se ha de formar; 2) diálogo entre profesor y alumno a través de un "lenguaje sonoro" cuya función es el control sobre la atención voluntaria y la ejecución de la acción y, 3) interiorización de la acción o transposición al plano mental. Para este autor, tal proceso puede abreviarse en función de la edad del sujeto, el grado de generalidad (diferenciar entre propiedades esenciales y no esenciales) y grado de integridad de la acción (mayor o menor facilidad en el desarrollo apropiado de la acción mental).

Por su parte, Davydov (en Veggetti, 1997)) propone que el concepto de cantidad y su comprensión tiene su origen, en un primer momento, en las incipientes experiencias de recuento de objetos discretos que el niño lleva a cabo y que posteriormente, devienen en valoraciones comparativas entre conjuntos, a los cuales les son aplicados las relaciones de "igual", "mayor", "menor".

b) Línea occidental: Proceso de resolución de problemas.

Resolver un problema verbal implica llevar a cabo una serie de pasos: 1*)* *representar* internamente sus elementos y las relaciones que de ellos surgen; 2) *seleccionar* una estrategia de solución, ya sea formal o informal; 3) *ejecutar la acción* (conteo) u operación seleccionada; y 4) *verificar* que la respuesta ofrecida sea adecuada (de Corte y Verschaffel en Orrantia, Morán y Gracia, 1997)

En este sentido, al resolver un problema el sujeto puede incurrir en dos tipos de errores. Uno surge cuando no se elige la operación correcta y el otro, cuando se cometen equivocaciones a la hora de resolver el algoritmo o acción propuesta. Según Maza (1989) para conocer las causas de estos errores han surgido diversas investigaciones que se proponen estudiar algunas variables presentes en los problemas. Tales variables son el tipo de sentencia, las variables sintácticas, variables lingüísticas y la estructura semántica, tanto la primera como la última han sido relevantes para la investigación.

Al analizar el <u>tipo de sentencia</u> en problemas de suma o resta, se ha observado que existe mayor o menor complejidad de acuerdo al lugar en donde se encuentra ubicada la incógnita.

RESTA	SUMA
a – b = ?	a + b = ?
a - ? = c	a + ? = c
? – b = c	? + b = c

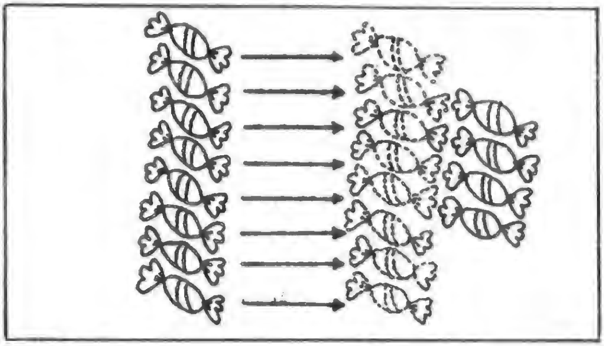
Las variables sintácticas se refieren al tamaño del problema (el cual se puede medir por el número de letras, palabras o frases), la complejidad gramatical de los enunciados (tipo de oraciones que constituyen el texto) y el orden de éstos. Por su parte, Puig y Cerdán (1988) agregan a esta lista la presentación de los datos (ya sea por medio de números, símbolos y palabras) y el orden de aparición de los mismos (para saber si el orden en que aparecen tiene que ver a la hora de darle solución).

En cuanto a las variables lingüísticas, Maza (1989) menciona los verbos más adecuados para formular un problema; es así como el niño asocia a la suma los verbos "juntar", "añadir", "unir" o "reunir" y a la resta los verbos "descontar", "reducir" o "perder". Sin embargo, Bermejo (1990) y Resnick y Ford (1990) señalan que ni las variables sintácticas ni las lingüísticas fueron relevantes para determinar la complejidad de los problemas verbales.

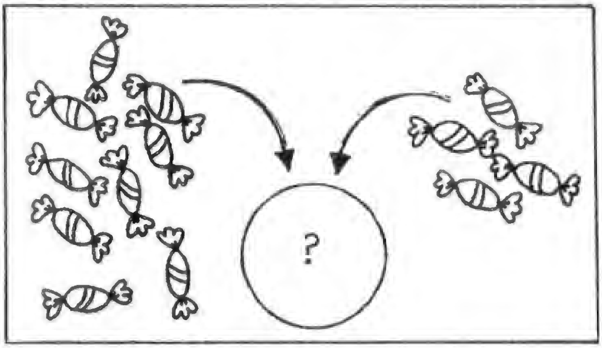
Por último, la estructura semántica, según Maza (1989), estudia las características estructurales del problema que le dan significado; ésta es, según Bermejo (1990), una variable más prometedora, ya que quienes la han considerado en sus estudios entienden la solución de problemas verbales como la puesta en marcha de procesos superiores de pensamiento (comprensión, interpretación, toma de decisiones, etc.). Por tanto, para Bermejo, la estructura semántica puede dar cuenta de la representación que el sujeto elabora para dar solución a un problema verbal. Según este autor, en tal representación existen dos etapas. En primer término, se construye un diagrama esquemático que contenga los principales datos o cantidades del problema así como las relaciones existentes entre ellos, es decir, se construye una representación mental del problema. En segundo lugar, se elige el tipo de ecuación o procedimiento necesario para dar un resultado adecuado.

De acuerdo con lo anterior y atendiendo a sus relaciones semánticas, Bermejo (1990) reconoce cuatro tipos de problemas aditivos verbales: problemas de cambio, de combinación, de comparación y de igualación. Esta clasificación también hace hincapié en la concepción unitaria (como cambio de estado) y binaria (combinación de dos conjuntos) de la suma (Fuson, en Bermejo, 1990). En todos los casos los problemas presentan tres subtipos, dependiendo del lugar en que se coloque la incógnita.

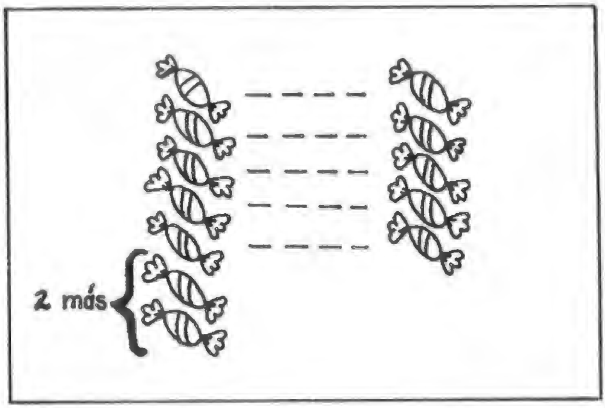
En los **problemas de cambio**, señala el autor, se presenta una acción, implícita o explícita, que trae como resultado el incremento o decremento de una cantidad inicial: "Pedro tenía 8 caramelos, María le da 4 caramelos más. ¿Cuántos caramelos tiene ahora Pedro?" (8 + 4 = ?).



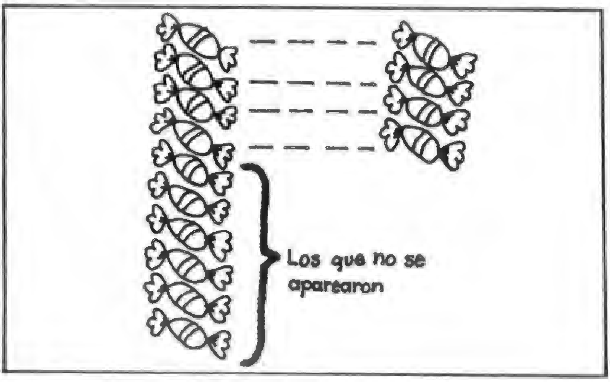
Por su parte, los **problemas de combinación** se caracterizan por situaciones en las que se proponen dos cantidades aparte, que pueden considerarse aisladamente o como partes de un todo sin que haya ningún tipo de acción: "Pedro tiene 9 caramelos y María 4. ¿Cuántos caramelos tienen entre los dos?" (9 + 4 = ?).



En cuanto a los **problemas de comparación**, éstos suponen la relación de dos cantidades separadas, bien para determinar la diferencia existente entre ellas: "Pedro tiene 7 caramelos. María tiene 5 caramelos. ¿Cuántos caramelos tiene Pedro más que María?" (7 - 5 = ?), bien para averiguar una de las cantidades conociendo la otra y la diferencia entre ellas: "Pedro tiene 13 caramelos. Tiene 4 caramelos más que María. ¿Cuántos caramelos tiene María?" (13 - ? = 4).



Finalmente, los **problemas de igualación** constituyen una mezcla de los problemas de comparación y cambio, ya que hay una acción implícita que tiene que aplicarse a una de las partes, basada en la comparación de dos conjuntos separados: "Pedro tiene 10 caramelos. María tiene 4 caramelos. ¿Cuántos caramelos le tienen que dar a María para tener los mismos que Pedro?" (10 - 4 = ?).



Qué hace que unos problemas sean más fáciles que otros.

Teniendo en cuenta la clasificación anterior se han observado diferencias sistemáticas entre los niños respecto al nivel de ejecución de los problemas verbales (Bermejo, 1990); tales diferencias dependerán del tipo de estructura semántica de que se trate, del lugar que ocupe la incógnita en la ecuación, de cómo sea formulado el problema, del tipo de ayudas brindadas al niño para la resolución (objetos concretos o dibujos), así como de la magnitud de los sumandos.

En cuanto a la primer causa, según Bermejo (1990), los problemas de cambio son la estructura semántica que resulta más fácil a los niños, y la más difícil, sobre todo en preescolar, es la de igualación. Por lo que se refiere al lugar ocupado por la incógnita, el mayor éxito lo logran los niños cuando la incógnita se ubica en el resultado, sin importar el tipo de problema, en ambos casos Baroody (1988) y Maza (1989) confirman estos hallazgos. Para ejemplificar lo anterior, Avila (1993) compara los siguientes problemas:

problema 1, *En la cooperativa había 300 tortas, después trajeron 250 tortas , ¿cuántas tortas hay ahora en la cooperativa?*

problema 2, *En el recreo se vendieron 410 tacos y quedaron 200 tacos. ¿cuántos tacos había al iniciar la venta?*

Como puede apreciarse, aunque ambos problemas responden a la estructura semántica de cambio, el primero es más fácil de resolver pues para ello el niño debe realizar una suma de manera natural (300 + 250 = ?); es decir, se agrega a la cantidad inicial otra cantidad y de esta manera la cantidad crece. Para crear esta idea sobre la suma, los niños no necesitan ir a la escuela y cuenta con ella desde los 3 años. Por lo que respecta al segundo problema, éste exige un razonamiento más complejo, ya que se trata de encontrar la cantidad inicial. Lo cual implica invertir el planteamiento:

Planteamiento inicial		inversión del planteamiento
? - 410 = 200	________________	200 + 410 = ?

Tal dificultad no es superada por muchos niños y en su lugar realizan, de manera incorrecta la siguiente resta:

$$\begin{array}{r} - \ 410 \\ 200 \\ \hline 210 \end{array} \qquad R = 210 \text{ tacos}$$

Por lo anterior, puede decirse que tanto el tipo de estructura semántica como el lugar en que se encuentra la incógnita marcan una dificultad mayor o menor para que el niño pueda resolver el problema.

Por otra parte, el éxito en la formulación del problema se debe, según Bermejo (1990), al hecho de explicitar claramente las relaciones entre las cantidades conocidas y desconocidas, considerándose que el orden en que se presenta la información también influye en los procesos de resolución de los niños. Asimismo, la presentación de ciertas ayudas, como objetos concretos o dibujos, a los niños pequeños, facilita el proceso de representación y, por tanto, el éxito en la resolución.

Finalmente, la magnitud de los sumandos se relaciona con el tipo de estrategia elegida. A este respecto, Bermejo y Lago (en Bermejo, 1990) encontraron que en niños de preescolar y primero de Educación General Básica (EGB), los más pequeños resuelven con mayor facilidad problemas en donde el primer sumando es mayor al segundo, se complica la situación cuando ambos sumandos son iguales, y más aún cuando en el problema el segundo sumando es mayor al primero. Asimismo, estos autores afirman que las estrategias de solución están en función de la edad, del nivel de abstracción de los sumandos del problema, la magnitud y ubicación de los mismos. Estas hallazgos son confirmados por Puy y Cerdán (1987) con alumnos de 8° de Educación General Básica (EGB), 3° de Bachillerato Único Profesional (BUP) y 1° de psicología al resolver problemas de proporción y probabilidad. En este mismo sentido, Vergnaud (1995) menciona que incluir números grandes provoca mayor dificultad al igual que proponer números decimales.

Errores infantiles en la resolución de problemas

Según Bermejo (1990), en la resolución de problemas verbales de suma existen errores al ejecutar el algoritmo y errores al representarlo. Los **errores de ejecución** incluyen tanto aspectos sintácticos, referidos a las reglas que dirigen la actuación del niño (iniciar la suma por la primera columna de la derecha, por ejemplo), como aspectos semánticos, referidos a conceptos básicos en la resolución de este algoritmo (notación posicional, por ejemplo). Según este autor, ambos errores de ejecución aumentan en niños preescolares cuando el segundo sumando es mayor que el primero y por ello no se pueden emplear los dedos de una mano. En niños de 1° de Escuela General Básica (EGB) el error semántico más observado es el referido a las "llevadas", debido a la dificultad que representa pasar de una columna a otra. Asimismo, el error sintáctico más común a esta edad es anotar, como resultado, el valor absoluto de la adición de los dígitos de una columna.

Por otra parte, los **errores de representación** ocurren cuando el niño ha elaborado una representación inadecuada del problema verbal (De Corte y Verschaffell, citados en Bermejo 1990) y, como consecuencia: a) repiten una de las cantidades propuestas en el problema; b) seleccionan una operación inadecuada (con tres posibles causas) y c) inventan la respuesta.

Diversos son las causas que suscitan en el niño *repetir una de las cantidades* propuestas en el problema, ello depende del tipo de problema con el que se enfrenta. Por ejemplo, en el problema de comparación "Javier tiene 6 globos, Mario tiene 9 globos más que Javier. ¿Cuántos globos tiene Mario?", niños de 7 y 8 años responden 9, debido a que confunden o no tienen un esquema para la proposición relacional "Mario tiene 9 globos más que Javier" y la interpretan como una proposición de asignación "Mario tiene 9 globos".

En problemas de cambio los niños repiten cantidades cuando no pueden crear un conjunto de partida desconocido y otro de cambio de forma aislada, por ejemplo, en "María tiene algunos lápices. Isabel le da 5. Ahora María tiene 17 lápices. ¿Cuántos lápices tenía María al principio?", la primera proposición no es representada como una incógnita y, al querer contestar a la pregunta, responden asignándole el valor de la siguiente proposición, que es 5. Es decir no incrementan al conjunto de partida lo que Isabel le da (? + 5).

Cuando en problemas de combinación del tipo "Pedro tiene 3 manzanas. Ana tiene también algunas manzanas. Pedro y Ana tienen juntos 9 manzanas. ¿Cuántas manzanas tiene Ana?", la respuesta dada es 9, ello se debe a que los niños no llegan a inferir las relaciones existentes entre las proposiciones, es decir, las representan aisladamente. Algunos autores llaman a esto falta de comprensión de la relación "parte todo".

Finalmente, no hay muchos datos respecto a los errores cometidos al resolver problemas de igualación. Sin embargo, se sabe de la gran dificultad que representan para los niños ya que no se ajustan a la forma clásica (a + b = ?) y porque no son frecuentes en la escuela (Bermejo, 1990).

El error de representación debido a la selección de una *operación inadecuada*, consiste en seleccionar la fórmula (a + b = ?) cuando en realidad la incógnita está planteada en uno de los sumandos (? + b = c). Las razones que llevan a ello son: a) incapacidad para interpretar la indefinición de uno de los sumandos (algunos), asignándole la cantidad que se da a continuación; b) no toman en cuenta la secuencia temporal que el texto les proporciona y, c) cuando para determinar el otro sumando tienen que comprender una proposición comparativa difícil. Este error de representación, según De corte y Verschaffel (en Bermejo, 1990), se debe a que los niños procesan el texto matemático superficialmente, es decir, no integran la información como un todo y más bien se guían en una palabra clave para seleccionar el tipo de operación; o bien, el niño no comprende el problema y adopta la forma más fácil para resolverlo. Finalmente, como en el punto anterior, *inventar la respuesta* se debe a que el niño no comprende el problema o simplemente está cansado.

En este sentido, Orrantia, et al. (1997), al reconocer la importancia que tiene la representación mental en la adecuada resolución del problema verbal, propone un programa de instrucción que pretende prestar las ayudas necesarias en este proceso. Tales ayudas son: ayudas textuales, representación lingüística del problema, representación figurativa, razonamiento y ayudas metacognitivas (revisión, evaluación, supervisión).

Características en la resolución en niveles avanzados

Es interesante observar la inquietud que manifiestan algunos autores por indagar cuáles son las estrategias que utilizan los estudiantes al enfrentarse a la resolución de problemas matemáticos. En este sentido, Santos (1996) se apoya en las categorías que Schoendfeld identifica para analizar y organizar el proceso que siguen los alumnos al resolver problemas. Estas categorías son: los recursos matemáticos que el sujeto posee, las estrategias heurísticas que emplea (estrategias que el propio sujeto elabora), la autorregulación y control del proceso de solución (por ejemplo la reflexión constante durante las fases del proceso) y las ideas o creencias que tiene acerca de las matemáticas.

Es así como Santos (1995, 1996) al trabajar con alumnos de nivel medio superior sugiere que la manera como han aprendido los contenidos matemáticos no les ha permitido desarrollar habilidades y estrategias que puedan generalizarse a múltiples situaciones. Las razones que le llevan a afirmar lo anterior son: 1) que los estudiantes dedican poco tiempo a la fase de comprensión del problema; 2) se les dificulta hacer uso de representaciones tales como gráficas, diagramas y tablas, lo cual les impide llevar un orden en la resolución; 3) carecen de monitoreo o autorregulación a lo largo del proceso y, 4) no verifican la congruencia entre respuesta obtenida y lo planteado por el problema; 5) poseen un esquema o plan de solución donde aparece la aplicación directa de algún cálculo aritmético o fórmula algebráica.

Por tal razón, este autor recomienda ofrecer a los alumnos problemas cuyo potencial les permita identificar distintas estrategias de solución, más aún, promover que los estudiantes elaboren o planten sus propios problemas matemáticos; es fundamental que no sólo se valore la solución final de un problema sino que se discutan las estrategias que llevaron a tal resultado, en este sentido los alumnos deberán expresar y defender sus ideas, especular y establecer conjeturas y, en general, agotar todas las posibilidades de discusión alrededor del problema.

Análisis de tareas

Según Resnick y Ford (1990), la psicología del procesamiento de la información dispone del lenguaje y de los métodos experimentales capaces de determinar lo que sucede en la mente de los sujetos desde que se les plantea una tarea matemática hasta que le dan respuesta. Es decir, abarca tanto el estudio de las habilidades de cálculo como la naturaleza de la comprensión inmersa en tal ejecución. Tal labor se alcanza a través del análisis de las manifestaciones externas del pensamiento, esto es, el *análisis en la resolución de tareas.* Las metodologías empleadas por este enfoque son los estudios del tiempo de reacción, las simulaciones por ordenador y los análisis de protocolos.

A continuación se exponen algunos de los resultados derivados de estos análisis. En *tareas de cuantificación*, según estas autoras, el "conteo" uno a uno es empleado por los sujetos, siempre que el número de objetos es superior a cuatro. De la misma manera se encontró que el tiempo de reacción aumenta conforme aumenta el material a contar (adulto: 300 milisegundos por objeto; preescolar: 1 segundo por objeto). Cuando el número de objetos es inferior a cuatro, la forma de cuantificación se denomina "subitación", y es la habilidad que posee el ser humano para considerar el número de objetos a simple vista; no obstante, cuando se subita también aumenta el tiempo para cubrir cada objeto adicional (de 1 a 4) adulto: 50 milisegundos; preescolar: 200 milisegundos.

Según Resnick y Ford (1990), las implicaciones pedagógicas de estos hallazgos serían: 1) dejar que los niños trabajen con conjuntos muy pequeños si se quiere enseñar un concepto que se basa en el conocimiento de la cardinalidad de los conjuntos (> que; < que) y lo que importa es que aprendan el concepto y, 2) retrasar el trabajo conceptual e incluso el cálculo avanzado con conjuntos grandes, hasta que la habilidad de contar se haya desarrollado lo suficiente como para poder contar unos tres objetos por segundo.

Otros resultados giran en torno a saber cómo proceden los sujetos al resolver ecuaciones sencillas de *suma*, del tipo (m + n = p), para lo cual se diseñaron tres modelos de ejecución. En el primero se considera la posibilidad de que los niños inicien el conteo en "0", es decir, el tiempo de reacción sería el tiempo que tardaran en contar (m + n). En el segundo modelo, se plantea que los niños inicien el contador en el primer sumando (m) y, a partir de ahí, incrementen el sumando "n", con lo cual se obtendría el tiempo de reacción.

Finalmente, en el tercer modelo el contador se iguala al sumando mayor (m ó n) y a partir ahí se incrementa el menor; como puede deducirse, este modelo ahorra tiempo, exige un mayor nivel de comprensión matemática (propiedad conmutativa) y la necesidad de decidir cuál es el sumando mayor. Los resultados de estos análisis muestran que niños de primer año se ajustan a las predicciones del tercer modelo, dejando para niños más pequeños las opciones anteriores.

Resnick y Ford (1990) señalan que al aplicar un mismo experimento a niños de diferentes edades (2° y 4° grados), es posible observar el cambio de las estrategias de cálculo con la edad y, quizá, con la enseñanza. En operaciones de *resta* (m - n = r) los investigadores proponen dos modelos hipotéticos de resolución; en el primero, se ajusta el contador a "m" y a partir de ahí se decrementa "n" veces. La segunda opción sería iniciar el contador a partir de "n" e ir incrementando hasta llegar a "m". Los niños de 2° año probablemente elijan en mayor proporción el modelo de decremento, dado que sus aprendizajes formales de resta son más recientes; no obstante, dicen las autoras, en algún momento los niños pueden descubrir que es más eficiente contar a partir de "n" hasta llegar a "m" y así encontrar la solución "r" y elijan en cada problema el camino más rápido. Este sería un modelo de "elección", presente sobre todo en niños de 4° año. El paso del sistema de decremento al de elección es, según Resnick y Ford (1990), un invento al que arriba el niño a través de sus observaciones de las relaciones de los números.

Para probar la idea de que los niños inventan rutinas de cálculo más eficientes que las que se les enseñan, las autoras llevan a cabo un estudio con niños preescolares. La tarea consistía en sacar "m" cubos, luego sacar otros "n" cubos, para finalmente contar el total de ellos (en donde "m" y "n" oscilan entre 0 y 5). Después de varias sesiones se retiraban los cubos y los niños tenían que dar la solución apretando un botón. Se quería observar si el niño era capaz de iniciar el conteo a partir del sumando mayor e incrementar a partir de ahí el sumando menor. La mitad de los niños logran tal avance, lo cual es visto como una prueba de invención de su parte, que tiene como mérito el menor número de pasos a realizar en el algoritmo.

Para las autoras, la importancia de tales descubrimientos reside en que los investigadores y diseñadores educativos puedan identificar tales transiciones de ejecución y a través de la enseñanza se puedan promover situaciones para fomentarlas.

Tales consideraciones han sido retomadas en México al elaborar los nuevos libros de texto de matemáticas. Balbuena, Block y Carvajal (1995) asumen la necesidad de propiciar una mayor participación de los niños en el desarrollo de técnicas más accesibles.

En este sentido, el propósito del aprendizaje de las "técnicas" no será visto sólo como "aprender a hacer las cuentas" sino también como el *desarrollo de la capacidad para crear procedimientos.* Para estos autores, esta es una manifestación de la "actitud creativa" que puede tener la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. No obstante, agregan, para poder llevar a cabo esta iniciativa, será necesario enfrentarse a ciertas resistencias arraigadas en la educación formal, ya que tal práctica implica aplazar un poco la enseñanza de las técnicas usuales para realizar las operaciones aritméticas, plantear los problemas desde antes de que dominen tales técnicas, aceptar la validez de procedimientos no formales y aceptar que un problema se puede resolver de maneras distintas.

ESTRATEGIAS GENERALES DE APRENDIZAJE

El auge en el estudio de las estrategias de aprendizaje ha cobrado gran importancia. Según Pozo (1990), ello se debe a dos razones: por un lado, las teorías psicológicas del aprendizaje han ido abandonando progresivamente la idea según la cual el conocimiento del sujeto era una simple réplica de la realidad, basada en la práctica y se han acercado a posiciones constructivistas, en las cuales se explica que el conocimiento depende de la interacción entre la información presentada y los conocimientos anteriores del sujeto. En segundo lugar, los profesores se han percatado que su labor no debe dirigirse tan solo a trasmitir conocimientos y asegurar ciertos aprendizajes. Por ello, el constructivismo muestra gran interés en el estudio de las estrategias de aprendizaje en general y de las estrategias de aprendizaje específicas, tal es el caso de las estrategias de comprensión lectora y de la resolución de problemas matemáticos.

Según Nisbett y Shucksmith (1987) y Danserau (1985) (citados en Pozo, 1990) las estrategias de aprendizaje son una serie integrada de procedimientos o actividades que se utilizan para facilitar la adquisición, almacenamiento y/o utilización de la información. Es decir, son útiles herramientas que permiten al sujeto acceder a nuevos conocimientos.

En este punto, Pozo (1989a) menciona la existencia de numerosas clasificaciones de estrategias que coinciden, finalmente, en dos extremos, uno el denominado enfoque superficial y otro, el enfoque profundo. Estos se corresponden, a su vez, con las dos clasificaciones clásicas del aprendizaje a) el asociativo basado en la repetición, externamente definido y organizado y, b) el aprendizaje constructivo que busca un significado personal, basado en la integración, la comparación y la relación conceptual jerárquica que logren establecerse en las estructuras de conocimiento propias del sujeto.

De esta manera, Pozo (1989a) clasifica las estrategias de aprendizaje en tres grandes grupos. En el primero se encuentran las estrategias de repaso, que se fundamentan en un aprendizaje asociativo basado en la práctica reiterada y resulta útil para el aprendizaje de materiales arbitrarios, sin significado, como números telefónicos, fechas memorables, etc. Entre sus técnicas más usuales se incluiría no sólo el simple repaso sino también el uso de técnicas auxiliares que sirven para seleccionar el material a repasar (tomar notas, subrayar, etc.). Los contenidos escolares que usualmente se aprenden a través de esta estrategia son las tablas de multiplicar (Bermejo, 1990; Resnick y Ford, 1990).

En cuanto a las estrategias de elaboración, éstas consisten en buscar un sistema de relaciones (normalmente externas al material) que permita aprender más fácilmente materiales inicialmente sin significado. Aquí se incluye la mayor parte de las mnemotecnias (uso de imágenes, códigos, palabras clave, etc.) y, por consiguiente, seguiría siendo eficaz sobre todo para el aprendizaje memorístico. Sin embargo, algunas formas de elaboración como las analogías, conducirían a un aprendizaje significativo.

Finalmente, en las estrategias de organización se busca, según Pozo (1989a), que el sujeto encuentre una estructura u organización apoyándose en el propio material de aprendizaje que le dota de un significado propio. La clasificación, la jerarquización, las destrezas de pensamiento y solución de problemas son ejemplos claros de estrategias organizativas. Estas estrategias son herramientas especialmente útiles para la comprensión de textos complejos y la solución de problemas; las estrategias de organización son, según el autor, las estrategias más complejas y difíciles de adquirir.

A este respecto, Gagñé (1991) apoyándose en Mayer y Bromage, afirma que las estrategias de elaboración y organización facilitan la transferencia de conocimientos. Esta afirmación es de gran relevancia si se considera que el objetivo de la enseñanza escolar, es que los estudiantes transfieran lo aprendido a los problemas enfrentados fuera del colegio.

ESTRATEGIAS INFANTILES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS VERBALES

Atendiendo a la clasificación que realizan Carpenter y Moser, Bermejo (1990) describe la evolución de las distintas estrategias que utilizan los niños en la resolución de problemas de suma. Así, en un primer término se encuentran las estrategias de **modelado directo**, en donde contar todo con objetos es un recurso presente desde antes de iniciar la escolaridad formal. Aquí, el sujeto representa o construye ambos conjuntos mediante objetos físicos o los dedos para después *contar todo*, ya sea con o sin la unión física de los elementos; también puede construir una colección (primer sumando) y a partir de ahí *contar hacia adelante* lo que indica el segundo sumando. Asimismo, Baroody (1988) menciona que los niños entre cinco y seis años de edad, para darle solución a los problemas de cambio y a los problemas de combinación, suelen emplear la estrategia de contar todo.

Una segunda etapa, mencionada por Bermejo (1990), se refiere a poder **contar sin modelos**, se diferencia de la anterior ya que el niño no usa objetos o dedos para representar los términos de la suma, sin embargo sí los usa para registrar el aumento progresivo de la numeración. Dentro de esta etapa, el niño utiliza las estrategias de *contar todo, contar a partir del primer sumando* (también llamada *contar hacia adelante)* y *contar a partir del sumando mayor*. Esta última representa la estrategia cognitiva más económica y evolucionada. Puente y Poggioli (1989) la denominan *modelo min*, por ejemplo: para 3 + 4 = ?, el niño dice "cuatro, y luego cinco, seis, siete, la respuesta es siete" (Puente y Poggioli, 1989)

Finalmente, en una tercera etapa existen otras estrategias cuyo uso depende de la memorización y la puesta en práctica de ciertas reglas. En cuanto a la **memorización** existen dos interpretaciones, la primera considera que los hechos numéricos son recuperados de la memoria a largo plazo de manera mecánica y sin conteo aparente. La segunda concepción, según Ashcraft (en Bermejo, 1990), considera que los hechos están representados en la mente como en una tabla y, por tanto, el tiempo en recuperarlos depende del tiempo en que se encuentra la intersección de los sumandos. No obstante, para Baroody (en Bermejo, 1990) dichas combinaciones numéricas son algo más complejas, ya que a través de ciertos principios, el sujeto puede construirlas, tal es el caso de que al sumar cero a cualquier número, da el mismo número. El sujeto también puede emplear combinaciones numéricas que recuerda, tales como: aplicación de la idea de doble (5 + 5 = 10) o aplicación de sumas conocidas (6 + 4 = 10) (Castro, Rico y Castro, 1995).

Por último, **las reglas** se refieren al hecho de que el niño componga y descomponga números para encontrar el resultado de la operación, por ejemplo, cuando quiere sumar el algoritmo 5 + 4 puede responder: " Como sé que 5 y 5 son 10, le quito una y son 9" (en Bermejo, 1990).

En esta etapa Puente y Poggioli (1989) identifican la estrategia de los *hechos derivados*, en donde el estudiante hace uso de sus conocimientos sobre los hechos conocidos para encontrar la respuesta a problemas relacionados. Por ejemplo, para resolver 6 + 8 = ?, el niño dice "si 6 + 6 = 12 y 8 es dos veces mayor que 6, la respuesta es catorce".

Las etapas en la resolución de operaciones de resta son iguales a las que atraviesa el niño cuando suma. Así, Puente y Poggioli (1989) mencionan las siguientes estrategias. Para el **modelado directo** (con objetos y dedos) se tiene: *separar de*, se construye un conjunto de objetos y se remueven b objetos. La respuesta es el número de objetos que quedan; *separar a,* se remueve del conjunto a tantos elementos como indique el conjunto b. La respuesta es el número de elementos removidos; *contar hacia adelante,* al conjunto b se le añaden tantos elementos como indica el conjunto a, la respuesta es el número de elementos añadidos; *igualar,* los elementos del conjunto a se igualan uno a uno a los del conjunto b, la respuesta es el número de elementos no igualados.

En la etapa de **conteo** las estrategias que se han identificado son: *contar hacia atrás desde,* se inicia el conteo desde el conjunto a tantas veces como indica el conjunto b, el número anterior al último contado es la diferencia; *contar hacia atrás hasta,* la secuencia de conteo inicia en el conjunto a hasta llegar al conjunto b, la respuesta es el número de palabras en la secuencia de conteo; *contar hacia adelante a partir de un número dado,* se cuenta desde el conjunto b hasta el conjunto a, el número de pasos es la diferencia; *selección,* el niño decide cuál estrategia requiere el menor número de pasos para contar y en este sentido procede en consecuencia. Por ejemplo, para solucionar 8 - 3 = ? , podría resolverlo empezando a contar desde 8 y luego disminuir tres veces; para 8 - 5 = ? , podría resolverse empezando a contar desde 5 y luego incrementar 3 veces (Puente y Poggioli, 1989).

Carraher, et al. (1991) al analizar las respuestas de los niños al resolver problemas matemáticos en ambientes cotidianos y los ejercicios de cálculo propuestos en el salón de clase, identificaron las estrategias de "descomposición" y "agrupamiento repetido", que corresponden a la etapa del uso de reglas. En las primeras, las cantidades incluidas en el problema se descomponen en cantidades menores, por ejemplo: 200 - 35 "Si fuese treinta, el resultado sería setenta. Pero es treinta y cinco. Entonces es sesenta y cinco; ciento sesenta y cinco", es decir el niño descompone el 35 en 30 y 5 y el 200 en 100 y 100 para poder trabajar 100 - 30 = 70 y en seguida considerar las unidades 70-5 = 65, finalmente retoma la segunda centena y dice 100 + 65 = 165.

En la estrategia de agrupamiento repetido la solución se obtiene mediante pasos, trabajando con cantidades iguales o mayores que aquellas mencionadas en el problema. Por ejemplo: al calcular 15 x 50 el niño empieza contando de cincuenta en cincuenta 5 veces hasta llegar a 250, en seguida duplica este resultado obteniendo 10 veces cincuenta, después suma los 5 cincuentas restantes uno a uno.

APRENDIZAJE COOPERATIVO

Muchas de las ideas expresadas anteriormente giran en torno a la conveniencia de resolver los problemas matemáticos en pequeños grupos de alumnos en el salón de clases. Ovejero (1990) al hacer una amplia revisión en torno al tema, sugiere que la profunda crisis que afecta no sólo a la educación sino también a la socialización en el mundo occidental podría verse reducida gracias a los efectos de implantar técnicas de trabajo cooperativo en la escuela.

Afirma que la forma de trabajo cooperativo es superior al competitivo e individualista y ello no sólo en torno a variables de socialización y relaciones interpersonales, sino también en cuanto a variables cognitivas y de rendimiento académico. Esta situación cooperativa se caracteriza porque cada uno de sus miembros alcanza su meta si y sólo si, los demás también la logran, además de la igualdad de estatus entre ellos. Esto no significa que los grupos tengan que ser homogéneos, por el contrario, se dice que los grupos heterogéneos son más eficaces.

Efectos Cognitivos del Aprendizaje Cooperativo.

En un intento por llegar a resultados concluyentes, algunos autores (Johnson, Maruyama, Johnson, Nelson y Skon, citados en Ovejero, 1990) realizan un metaanálisis de todos los estudios sobre el tema publicados entre 1924 y 1981, del cual ofrecen las siguientes conclusiones: 1) este tipo de aprendizaje es superior al competitivo cuando se fomenta rendimiento y productividad, en todas las áreas escolares, en todas las edades y niveles educativos; esto es así en tareas que exigen adquisición de conceptos, solución de problemas especiales, retención y memoria, ejecución motora y tareas de suposición y predicción; 2) la cooperación es superior al aprendizaje individualista al promover logro y productividad si la tarea no es rutinaria o cuando no exige división del trabajo; 3) la cooperación sin competición intergrupal promueve un mayor logro y productividad que la cooperación con competición intergrupal, aunque esto no es aún concluyente y 4) no hay diferencia significativa entre formas de logro competitivas interpersonales y las individualistas sobre rendimiento y productividad.

En 1990 se realiza un estudio similar que abarca desde el año 1897, los resultados son los siguientes: 1) el aprendizaje cooperativo promueve mayor productividad y rendimiento en relación con la competencia interpersonal o el logro individual; 2) el esfuerzo cooperativo lleva a utilizar un razonamiento de más alta calidad; 3) el trabajo cooperativo lleva a una mayor transferencia al compararlo con el competitivo o individualista; 4) se encontró que en el "mundo real" las recompensas de grupo son percibidas con mayor justicia que las individuales.

Dado que la instrucción matemática tiene como objetivo ayudar al estudiante a pensar matemáticamente, entender las conexiones de hechos y procedimientos y a ser capaz de aplicar flexible y significativamente el conocimiento formal matemático, Ovejero (1990) señala seis razones por las el aprendizaje cooperativo debe emplearse en el salón de clases: 1) el aprendizaje de conceptos y habilidades se logra mucho mejor en un proceso dinámico producto de la enriquecedora discusión de los integrantes de pequeños grupos; 2) solucionar un problema matemático es una tarea colectiva y, por tanto, inseparable de este método, gracias a él se logra entender cómo solucionarlos correctamente, a utilizar estrategias de razonamiento de más alto nivel, a asumir un pensamiento metacognitivo y a hacer explícitas sus ideas a través del lenguaje matemático lo que permite internalizar los conceptos y aplicarlos en nuevas situaciones, esto es más factible y cómodo de realizar dentro de pequeños grupos; 3) estructurar las clases cooperativamente asegura que los estudiantes se aclaren unos a otros lo que van aprendiendo, compartan otros puntos de vista y apoyen y sean apoyados; 4) las relaciones positivas que logran establecerse entre los alumnos y la mutua percepción de competencia matemática que se crean logra elevar su autoestima y por tanto su confianza de logro al enfrentarse a estas tareas; 5) el aprendizaje cooperativo de las matemáticas motiva intrínsecamente a los estudiantes a estudiarlas en forma continua; 6) existen pocas dudas de que la cooperación genera mayor rendimiento en la enseñanza de las matemáticas.

Planteamiento del problema

En la comprensión de un texto se hace énfasis en que el objetivo es captar el significado, para lo cual es necesario activar los esquemas de conocimientos y echar a andar diversas estrategias. Éstas permiten identificar las ideas principales, así como las formas en que se organiza un texto. Además, lo anterior se logra si el sujeto lleva a cabo un proceso de autorregulación o monitoreo, con lo cual el lector es capaz de aprender de lo que lee.

Un proceso similar se sigue al intentar resolver un problema matemático. En este caso la comprensión lectora eficaz surge en la medida en que el niño entiende las relaciones entre los elementos de un problema, es decir, el significado. Así, el lenguaje de las matemáticas ofrece al sujeto una estructura superficial, representada por los símbolos y una estructura profunda, cuando es capaz de identificar las relaciones entre los conceptos matemáticos. En consecuencia para resolverlo es fundamental que el niño **comprenda** lo que el texto plantea o pide, elija entre diversas estrategias de resolución, regule dicho proceso y corrobore que la solución ofrecida sea coherente con lo que se pide.

El grado de dificultad que plantea la resolución de un problema verbal, depende, como señalan algunos autores, de su estructura semántica. Así, los problemas más fáciles de resolver son los de *cambio*, donde como consecuencia de una acción una cantidad inicial aumenta o disminuye. Le siguen los problemas de *combinación* en donde se consideran dos cantidades aisladamente o como partes de un todo sin que exista ningún tipo de acción. En tercer lugar están los de *comparación*, que supone la relación de dos cantidades separadas, bien para determinar la diferencia existente entre ellas (7 - 5 = ?), bien para averiguar una de las cantidades conociendo la otra y su diferencia (13 - ? = 4). Finalmente, los problemas de *igualación* son los más difíciles, sobre todo a nivel preescolar, dado que son una mezcla de los problemas de comparación y cambio.

En cuanto a los elementos implicados al elegir una estrategia de resolución, se han mencionado la edad del sujeto, el nivel de abstracción, tamaño de los sumandos (caso de la suma) y el lugar en que se ubica la incógnita. Debe recordarse que cuando la incógnita aparece después del resultado (a + b = ?) el problema es más fácil de resolver.

Por otra parte, la tarea de resolución de problemas matemáticos en el contexto escolar, se ve favorecida cuando dicha labor se realiza en un ambiente de aprendizaje cooperativo. Esto es así ya que esta actividad se caracteriza por el intercambio de puntos de vista, el análisis crítico del problema y la discusión sobre la estrategia más adecuada, con lo cual se construye conjuntamente el significado del problema.

En este orden de ideas, la presente investigación tiene como objetivos identificar cuál de las estructuras semánticas resulta más difícil de resolver en 1°, 3° y 6° año de primaria, y cómo influye enfrentar la tarea tanto en forma individual como en pequeños grupos. Asimismo, se pretende conocer cuáles son las estrategias empleadas al resolver los diferentes tipos de problemas y los cambios que van experimentando a lo largo de la escolarización. Finalmente, como resultado del trabajo anterior, se podrá indagar qué tipo de errores surgen como resultado de las resoluciones.

El acelerado desarrollo tecnológico imponen a la escuela una tarea de grandes proporciones, en ella una de las piezas claves es la adecuada enseñanza de las matemáticas. Remontar las dificultades con las que hasta el momento se ha enfrentado esta disciplina implica proponer diversas alternativas en su aprendizaje. En este sentido, la enseñanza de los conceptos matemáticos a través de la resolución de problemas y el recuperar las formas de trabajo cooperativo pueden ser algunas de las opciones que permitirán ampliar las posibilidades de su aprendizaje. Debe recordarse que el ser humano tiene una tendencia innata a la relación con sus semejantes, también debe tenerse en cuenta que fomentar la socialización entre los escolares es uno de los objetivos primordiales en la Modernización Educativa.

Capítulo II

METODOLOGIA

Sujetos

Los sujetos de esta investigación acuden a una escuela pública ubicada en una zona de nivel medio bajo, en la Cd. de México. Para seleccionar la muestra, se aplicó una evaluación con 8 problemas a los grupos de 1°, 3° y 6° año de primaria; en base a los resultados se identificaron a aquellos alumnos que poseían mejores habilidades para resolver problemas aritméticos y quienes las poseían en menor grado. Así, los alumnos expertos fueron aquellos que obtuvieron las calificaciones más altas, en tanto los alumnos menos hábiles fueron aquellos con calificaciones menores a 5. Con ello se formó un grupo de trabajo cooperativo de 4 alumnos y una forma de trabajo individual en donde participarán 5 sujetos más. En total hubo 9 alumnos por grado, de ellos un experto participó en la forma cooperativa y 1 en la forma de trabajo individual. De esta manera la muestra quedó conformada por 27 alumnos cuyas edades oscilaron entre los 6 y 12 años (ver tabla 1).

Tabla 1. Total de sujetos que participaron en cada grado y según la forma de trabajo.

Grupo / Forma de trabajo	**1°**	**3°**	**6°**	Total
Individual	5	5	5	15
Grupal	4	4	4	12
Total	9	9	9	27

Instrumento

Con base en la revisión del programa oficial y a los libros de texto de matemáticas de 1°, 3° y 5° año se construyeron y dieron a valorar a 45 jueces, maestros de educación primaria, un total de 96 problemas aritméticos. De ellos se seleccionaron 23 problemas para cada grado; 8 para seleccionar a los sujetos del estudio (ver Anexo 2) y 15 que se aplicaron en la investigación (ver Anexo 3). Tales problemas, además, fueron elaborados en base a las 4 relaciones semánticas que reconoce Bermejo (1990): cambio, combinación, comparación e igualación. Cabe resaltar que cada juez valoró en promedio 6 problemas (ver Anexo 1).

No obstante que la mayoría de los maestros no coincidió al tratar de identificar las relaciones semánticas implicadas en los problemas aritméticos, la totalidad los valoraron como adecuados para el grado escolar al que se aplicarían.

Otra tarea importante fue confiabilizar el instrumento, por ello se realizó un piloteo con alumnos de 2°, 4° y 6° años. Lo anterior debido a que en estos grados, en especial en el 6° año, los niños ya habían revisado los contenidos matemáticos que el instrumento abordaba. Como resultado de dicha tarea, tuvieron que hacerse algunos ajustes: 1) originalmente se había planeado que un equipo o forma de trabajo individual resolviera en una hora, cuatro problemas; sin embargo, pudo observarse gran diferencia en la duración de los tiempos de trabajo, de tal forma que dicha meta no siempre se cumplía. Tales diferencias en la resolución, así como las actividades propias de la escuela (educación física, concursos y actividades especiales como la Unidad de Servicios de Apoyo a la Escuela Regular), guiaron la planeación de las sesiones, dos antes del recreo y una posterior. 2) En relación a los problemas construidos, se hicieron cambios a dos de los problemas de tercer año. En uno se cambió la palabra butacas por asientos, debido a que algunos niños no comprendían su significado; en el otro, se cambió "1 kilo" por "1 ½ kilo", con el objeto de incrementar la complejidad del problema.

Técnica

Se grabó el trabajo que desarrolló cada sujeto al resolver los problemas en forma individual, así como el trabajo realizado en forma cooperativa. Posteriormente fue necesario transcribir el diálogo producido y se tomaron en cuenta tanto las observaciones realizadas por las investigadoras como los materiales producidos por los niños.

Materiales

Cámara de video, cartulinas con los problemas escritos, calendario de actividades, hoja de registro de observaciones, lápices y hojas blancas.

Procedimiento

Cada uno de los 3 equipos de trabajo cooperativo y cada uno de los 15 sujetos que trabajaron individualmente, resolvieron 15 problemas que fueron distribuidos en un mínimo de cuatro sesiones y en diferentes días. Las investigadoras trabajaron en cada momento con sólo una de las formas mencionadas. En el caso de los alumnos de 1°, una de ellas leyó en voz alta los problemas y la otra grabó la sesión. A los niños de 3° y 6° se les entregó en una cartulina cada uno de los problemas, ellos los leyeron en voz alta y resolvieron.

Con el objeto de planear el desarrollo de las entrevistas se prepararon las posibles soluciones a cada problema, esto con el fin de diseñar algunas de las preguntas que se formularon a los sujetos. En este sentido, a través del diálogo la entrevistadora propició que los alumnos describan en detalle cada uno de los pasos que lleven a la solución del problema.

Análisis de Resultados

La resolución a un problema puede realizarse a través de dos formas, una es el uso de operaciones algorítmicas (con lápiz y papel) y la otra a través de estrategias heurísticas. De acuerdo a su etapa evolutiva, éstas últimas se clasifican en: modelado directo, contar sin modelos y hechos conocidos (combinaciones numéricas que recuerdan con facilidad). Esta clasificación permitirá realizar el análisis cualitativo de los resultados obtenidos, en ellos se podrá identificar el tipo de estrategia utilizada en los tres grados escolares, así como los cambios que sufren a través de la escolarización; de igual manera se podrá comparar la riqueza de estrategias empleadas en la resolución cooperativa y a nivel individual en los grados explorados.

Por otra parte, aunque el objetivo de la investigación no es encontrar las respuestas correctas a los problemas, el análisis cuantitativo identificará qué tipo de problema resulta más difícil de resolver, en qué grado escolar y sobre todo en qué modalidad de trabajo, cooperativo o individual.

Capítulo III

RESULTADOS

ANÁLISIS CUANTITATIVO

Como se dijo antes, en cada grado escolar y tanto en las resoluciones individuales como en las de equipo se aplicaron un total de 15 problemas aritméticos, que responden a la estructura semántica de cambio, combinación, comparación e igualación (ver Anexo 3). Una vez leído y resuelto el problema, la primer respuesta dada por el sujeto individual era la que se consideraba para calificar el problema como correcto (1) o incorrecto (0). El cuadro 2 muestra tales resultados; las letras asignadas a cada sujeto corresponden al grado de habilidad mostrada durante su evaluación inicial (ver Anexo 2). De esta forma, la letra (a) designa al experto y las cuatro letras restantes a los novatos. Debe recordarse que el trabajo cooperativo está integrado por un experto y tres novatos y también se le denomina "equipo".

Para la forma cooperativa se percibieron algunas diferencias. En el caso de los sujetos de 1° y 3° fue muy difícil que de manera espontánea y conjunta, ofrecieran una respuesta, quizá por su poca experiencia en esta forma de trabajo; por ello, se les guió para que cada uno expusiera su solución y se originara la confrontación de ideas. Tras lo anterior llegaron o no al resultado correcto. En 6° grado se observó mayor organización de los sujetos al trabajo grupal, por ello la intervención de la entrevistadora era menor. Fruto de su trabajo, su primer respuesta era la que se calificaba. De esta forma pudo identificarse qué tipo de problema resultó más difícil de resolver en cada uno de los grados escolares y cómo influyó la modalidad de trabajo.

Es importante insistir en que el cuadro 2 únicamente muestra si el problema fue resuelto correctamente o no, dejando de lado el tipo de dificultad a que se enfrentó el sujeto. Esto último será expuesto ampliamente en el apartado de Análisis Cualitativo.

PRIMER GRADO

Así, de 15 problemas aplicados en primer grado, el experto (**a**) resolvió el 73% correctamente, observando mayor dificultad en los problemas de combinación. Por su parte el equipo obtuvo 86% de aciertos y su único error se halla en la estructura de comparación.

Cabe señalar que quienes originalmente fueron asignados como sujetos a y c, como resultado de la evaluación inicial, después del análisis fueron desplazados y se ubicaron en los lugares b y e, respectivamente. Lo anterior debido a la inconsistencia de sus resultados.

Así, el sujeto (**b**) únicamente resolvió el 40% de los problemas. Los novatos (**c**, **d**, **e**) obtuvieron 26%, 26% y 6% aciertos respectivamente. De acuerdo a los resultados, las categorías de combinación y comparación resultaron difíciles para los novatos.

Tabla 2. Número de aciertos obtenidos por tipo de problema, modalidad de trabajo y grado

PROBLEMAS	CAMBIO				COMBINACION			COMPARACION				IGUALACION				Total aciertos
SUJETOS																
Primer Grado	*P1	P2	P3	P4	P1	P2	P3	P1	P2	P3	P4	P1	P2	P3	P4	
*a	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	11
b	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	6
c	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	4
d	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	4
e	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
aciertos	2	2	1	2	0	2	0	1	1	1	1	3	3	2	5	26
Equipo	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	13
Tercer Grado																
a	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	13
b	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	7
c	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	4
d	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	3
e	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	3
aciertos	2	3	1	0	2	1	3	1	1	1	1	4	3	3	4	30
Equipo	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	9
Sexto Grado																
a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	15
b	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	12
c	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	11
d	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	7
e	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	8
aciertos	4	1	4	5	2	3	2	5	4	4	4	3	3	2	5	50
Equipo	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	14

* P1, P2, P3, etc: problema 1, problema 2, problema 3, etc.

*a, b, c, etc: niño a, niño b, niño c,etc.

En base a los datos, en este grado la categoría de combinación resultó ser la más difícil y le sigue la de comparación. En combinación 1 la dificultad se ubica al intentar representar todos los datos del problema; en los dos restantes la limitante se debe al lugar en que se ubica la incógnita. Así, en combinación 3 ningún sujeto individual puede interpretar el conjunto vacío de partida (? + 5 = 13), y en combinación 2, pocos pueden calcular el valor del segundo sumando (5 + ? = 9). Por su parte, las dificultades en los problemas de comparación se deben a que los sujetos no poseen un esquema para comprender las proposiciones relacionales "más que" y "menos que". Finalmente, la categoría de igualación resultó ser la más fácil. Por otra parte, el equipo enfrentó con éxito la mayor parte de los problemas, aunque la categoría de comparación también les resulta difícil.

TERCER GRADO

Debe señalarse que los sujetos de tercer año se desempeñaron de acuerdo a las expectativas generadas en base a la evaluación inicial (ver Anexo). También es oportuno hacer notar que estos niños aún cuando ponen de manifiesto algunas estrategias heurísticas, ya han incorporado a sus resoluciones los algoritmos, por ello muchos de sus errores corresponden a la ejecución de éstos. Así, el sujeto (**a**) se identificó como experto al obtener 86% de aciertos. El sujeto (**b**) acertó en el 46% y sus errores son por igual de ejecución como de representación o comprensión. En tanto, el sujeto (**c**) obtuvo el 26% de aciertos y sus dificultades se aprecian principalmente en la ejecución. Finalmente, los dos últimos sujetos aunque obtienen 20% de aciertos cada uno, para el novato (**d**) sus errores son, por igual, de representación y ejecución, en tanto los errores del novato (**e**) son básicamente de comprensión.

Quienes trabajaron de modo cooperativo, obtuvieron 60% de aciertos. Entre sus errores se encuentran principalmente los de ejecución y algunos por la incomprensión de algún concepto matemático.

Según los resultados, en este grado la mayor dificultad se encontró en la categoría de comparación, debido a la dificultad de calcular "la mitad de" un número de tres cifras y, una vez más, por la incomprensión de los conceptos relacionales "más que" y "menos que". Por otra parte, los de igualación siguen siendo los más fáciles.

SEXTO GRADO

Una vez más, uno de los sujetos mostró menor habilidad en su evaluación inicial, sin embargo, durante las sesiones resolvió correctamente el 100% de los problemas. Por ello, se convirtió en el experto (**a**) del trabajo individual, desplazando a quien originalmente fue considerado como tal. Por su parte, los sujetos (**b**) y (**c**) obtuvieron 80% y 73% de aciertos, respectivamente, teniendo tanto dificultades en la representación como en la ejecución. Mientras que los sujetos (**d**) y (**e**), con 46% y 53% de aciertos, tienen sus mayores limitantes en la ejecución. Hablando del trabajo cooperativo, el 93% de sus resoluciones fueron acertadas, esto es, fueron igualmente expertos.

Los resultados obtenidos nos permiten decir que en este grado los problemas de combinación resultaron ser los más difíciles. Aunque la principal causa de ello es la representación, la carencia de ciertos conceptos matemáticos y los errores de ejecución. Por otra parte, los problemas más fáciles fueron los de comparación.

ANÁLISIS CUALITATIVO

Este capítulo describe, en primer término, los resultados en torno a qué estructura semántica resultó más difícil en cada uno de los grados propuestos y para las dos modalidades de trabajo. En segundo lugar, se exponen las estrategias empleadas en los resoluciones, hayan sido adecuadas o no, lo cual permite observar cómo va cambiando su uso a través del tiempo. Finalmente, se presentan los errores más comunes en cada grado.

ESTRUCTURAS SEMÁNTICAS

Aunque para cada categoría semántica y para cada grado escolar se proponen diferentes problemas, en cada una de ellas fue incrementándose en forma similar su dificultad según el lugar en que se ubica la incógnita y según la operación aritmética que la acompañaba. (Ver Anexo 3).

PRIMER GRADO

En los **problemas de cambio** se esperaba que la forma canónica (a + b = ?) fuera la más fácil, sin embargo resultó tan complicada como las situaciones restantes (a – b = ? ; a - ? = c). Por el contrario, y tal como señalan diversos autores (Bermejo, 1990; Maza, 1989), la situación más difícil de resolver resultó cuando la incógnita se ubica en el primer sumando (? + b = c). Un ejemplo de ello es el siguiente:

Sesión Individual
Cambio 3
(? + 5 = 8)

"En la frutería hay algunas piñas. El dueño compra 5 piñas más. Ahora tiene 8 piñas para vender. ¿Cuántas piñas tenía al principio?

JJ :	(pensativo) 13
Entrevistadora:	¿cómo le hiciste?
JJ:	mira...... sume 8 más 5
Entrevistadora:	¿cuánto es 8 más 5?
JJ:	13
Entrevistadora:	entonces, ¿cuántas piñas tenía al principio?
JJ:	13
Entrevistadora:	pero el problema dice que hay algunas piñas y el dueño compra 5 más y que ahora sólo tiene 8 piñas para vender y pregunta cuántas tenía al principio.
JJ:	8
Entrevistadora:	¿por qué?
JJ:	no sé
Entrevistadora:	¿está difícil?
JJ:	sí

Como puede observarse el experto (**a**) no puede representar un conjunto vacío de partida al tratar de resolver el problema, por lo cual opta por sumar las dos cantidades que se le brindan. En un segundo momento, intenta resolver repitiendo una de las cantidades propuestas en el problema.

Por otra parte, el equipo hizo un buen desempeño al resolver adecuadamente los cuatro problemas de cambio. Veamos cómo resuelven ellos el problema "En la frutería..."

Sesión grupal
Cambio 3
(? + 5 = 8)

O y N:	5
L:	8
Entrevistadora:	¿por qué 5?
O:	porque alguien tenía 5 y tú dijiste ¿cuántas tenía antes? y tenía 5 y luego consiguió otras 3. Porque mira...son 5 aquí (muestra 5 dedos) y luego ....6, 7, 8 (muestra 3 dedos)
(tras lo cual N dice:)	
N:	a ver otra vez, leelo
Entrevistadora:	(lo vuelve a leer)
N:	(al escucharlo extiende los dedos de la mano izquierda y tres de la derecha y dice:) ¡yo! 3
(O interrumpe y dice:)	
O:	**¡no! ... tenía 5**
(N aclara:)	
N:	**5 consiguió... en total tenía 8 para vender. Y ¿cuántas tenía antes? ... 3**
Entrevistadora:	entonces, ¿cuántas tenía al principio?
N:	3
Entrevistadora:	y ¿cuántas compró?
O:	5
Entrevistadora:	entonces, ¿cuántas tiene ahora?
L:	8

Como puede observarse, el esfuerzo cooperativo lleva a sus miembros a utilizar un razonamiento de mayor calidad. Esto es evidente cuando Norma asume un pensamiento metacognitivo y tanto ella como Oscar aclaran y son capaces de explicitar y compartir sus ideas con el equipo.

Los **problemas de combinación** resultaron ser los más difíciles de las cuatro categorías. En el trabajo individual nadie pudo resolver los problemas 1 y 3. Este último, seguramente, debido al lugar en que se ubica la incógnita (? + 5 = 13). Veamos el caso del niño experto:

Sesión Individual
Combinación 3
(? + 5 = 13)

"La mamá de Iván llevó a la fiesta algunos tacos de pollo. La mamá de Elena llevó 5. Si en total había 13 tacos de pollo ¿cuántos tacos llevó la mamá de Iván?

JJ:	mmm.... 4
Entrevistadora:	¿por qué?
JJ:	(pensativo)
Entrevistadora:	¿cómo le hiciste Juan José?
JJ:	porque la mamá de Elena lleva 5 y la mamá de Iván lleva algunos, entonces ......
Entrevistadora:	¿entiendes el problema?
JJ:	no
Entrevistadora:	¿qué no le entiendes?
JJ:	de que no sé cuánto llevó la mamá de Iván
Entrevistadora:	esa es la pregunta ¿verdad?
JJ:	sí
Entrevistadora:	¿cuántos tacos hay en total?
JJ:	13
Entrevistadora:	¿cuántos tacos lleva la mamá de Elena?
JJ:	5
Entrevistadora:	¿cómo podemos saber cuántos lleva la mamá de Iván?
JJ:	no sé

Una vez más, es evidente la dificultad con la que se enfrenta el sujeto al tratar de interpretar la indefinición del primer sumando. Por otra parte, quizá el número que se da como resultado dificulta aún más la búsqueda de una solución.

El otro problema de combinación que no fue resuelto se inspiró en una actividad del libro de texto de matemáticas. En ella, a través de una serie de dibujos se sugiere al niño hacer algunos cálculos y llegar a un resultado. En nuestro caso se plantea como un problema verbal que podía despertar la imaginación y razonamiento del niño e inducirlo a proponer dibujos o alguna otra estrategia conocida por él.

Combinación 1

"En un jardín hay dos árboles, cada árbol tiene tres ramas. En cada rama hay dos manzanas. ¿Cuántas manzanas hay en total?.

En su primer intento o respuesta ninguno de los sujetos individuales pudo resolverlo. Sin embargo, al insistir un poco más, el sujeto (**a**) lo resuelve a través de una estrategia heurística mientras que el sujeto (**e**) es el único que se anima a realizar un dibujo. Esto nos hace pensar que el niño escolarizado empieza a **creer** que en matemáticas y, en especial en la resolución de problemas, sólo se admiten símbolos numéricos. Quizá también por ello sistemáticamente todos los entrevistados, en un principio, escondían sus dedos para contar.

El problema de combinación 2 representó menor dificultad que los dos anteriores, debido posiblemente a la combinación numérica que implica (5 + ? = 9).

Con respecto al trabajo cooperativo, esta categoría no representó dificultad alguna. Ellos resolvieron adecuadamente los tres problemas propuestos, incluido el anterior. A continuación extraemos un pequeño fragmento del problema de combinación 2:

Combinación 2
(5 + ? = 9)

"El zoológico de Chapultepec y el zoológico de Aragón tienen los dos juntos 9 osos. En el de Chapultepec hay 5 y los demás están en el de Aragón. ¿Cuántos osos hay en el zoológico de Aragón?"

(después de una segunda lectura....)

O, L y N: ¡4! .... ¡4!

....

Entrevistador: a ver Oscar, explícanos

O: en el zoológico... en el primero había 5 ¡verdad! y en el otro había... había los otros, entonces habían 1,2,3,4,5,6,7,8,9 (muestra 5 dedos en una mano y 4 en la otra) y así serían 9 ... mira .... (extiende sus dedos)

Entrevistadora: ¿y tú Norma?

N: yo junté primero los 4 del zoológico de Aragón y los 5 del Zoológico de Chapultepec.... los junté y dije... en el de Chapultepec hay 5 ...entonces debe haber 4 en el de Aragón

Los cuatro **problemas de comparación** resultaron tan complicados que el experto (**a**) únicamente resuelve tres y el equipo dos. El novato (**d**) sólo acierta en uno. El único error del trabajo individual experto se encuentra en el problema de comparación 1 que dice:

"Gustavo tiene 3 vasos. Juanita tiene 4 vasos más que Gustavo. ¿Cuántos vasos tiene Juanita?" (3 + 4 = ?)

El experto responde "4", es decir repite una de las cantidades del problema. Lo anterior puede deberse a que no posee un esquema para la proposición relacional "más que" y la interpreta como una proposición de asignación (Bermejo, 1990). Por el contrario, éste es el único problema de comparación que resuelve el novato (**d**). Él agrega cuatro dedos a los tres que había mostrado.

La dificultad del equipo se presentó tanto en el problema anterior como en comparación 2 que dice:

"En el partido jugado el domingo pasado el equipo de Cruz Azul anotó 7 goles. El equipo de las Águilas anotó 3 goles. ¿Por cuántos goles de más ganó el Cruz Azul? (7 – 3 = ?)

También ellos responden repitiendo una de las cantidades del problema (7). Únicamente aciertan cuando *ellos mismos* plantean que *"a las águilas le faltan 4 para empatar al Cruz Azul"* Sin embargo, si se les vuelve a preguntar ¿por cuántos goles de más ganó el Cruz azul", vuelven a decir por "7". Esta misma respuesta es dada por el novato (**d**), y sólo al replantear la pregunta por "cuántos goles necesita las Águilas para empatar al Cruz Azul" responde "4". Es evidente que en ambos casos no comprenden que la pregunta se refiere a la diferencia de goles entre los dos equipos, es decir a una comparación, y no a una relación de igualdad.

Los problemas de igualación resultaron ser los más fáciles de resolver para ambas formas de trabajo. De hecho es aquí donde los novatos obtienen mayor cantidad de aciertos. Esto puede explicarse debido a que en esta categoría se mezclan tanto características de los problemas de cambio como de comparación. Ello implica que los sujetos pueden resolver estos problemas recurriendo a estrategias o acciones de quitar y poner, tan bien manejadas por ellos.

En el punto anterior pudimos observar cómo los sujetos poseen la habilidad de replantear ciertos problemas a estructuras por ellos conocidas. Es decir, pueden resolver problemas difíciles si se los plantean a través de una estructura semántica más fácil. Si observamos con atención el problema de comparación expuesto anteriormente, ("En el partido jugado el domingo pasado...") los sujetos lo resuelven porque al igualar las cantidades simultáneamente trabajan como si fuera un problema de cambio, es decir, agregan 4 al 3 que ya tenían (3 + 4 = 7).

Al enfrentarse a los problemas de igualación, algunos novatos los visualizaron como problemas de cambio. Para los expertos, evidentemente existen dos conjuntos y con uno de ellos se debe trabajar para igualar al otro, veamos un ejemplo:

Combinación 4:
(8 - ? = 5)

"Gaby tiene 8 pesos. Lupita tiene 5 pesos. ¿Cuánto dinero debe gastar Gaby para tener la misma cantidad que Lupita?"

N y O:	3
Entrevistadora:	¿cómo le hicieron?
N:	es que mira... Gaby tiene 8 pesos... su amiga 5 pesos, entonces Gaby debe gastar 3 para tener 5.
Entrevistadora:	¿y tú Oscar?
O:	igual que Norma... aquí tienes 8 pesos ... y *si le quitamos los 3 quedan 5*

Estos problemas generan cierta confusión para algunos novato debido a que, aún cuando llegan al resultado correcto, están trabajando como si sólo existiera un conjunto.

Por lo anterior, podemos decir que los problemas más difíciles fueron los de combinación y los de comparación. Así mismo, la categoría más fácil fue igualación. Por otra parte y tal como señalan algunos autores (Bermejo, 1990; Maza, 1989), cuando la incógnita se encuentra en el primer sumando (? + b = c), el problema es más difícil sin importar la categoría. Lo anterior pudo observarse en los problemas de combinación 3, cambio 3, comparación 3 e igualación 3.

TERCER GRADO

Veamos ahora las dificultades a que se enfrentaron los sujetos de tercer año al resolver los problemas de estructura semántica.

Como se mencionó, diversos autores afirman que **los problemas de cambio** son los más fáciles de resolver. Para tercer grado, nuestra investigación no corrobora tales afirmaciones. No obstante hay que señalar que en el caso de la forma canónica (a + b = ?), el problema que se propuso requería que los sujetos obtuvieran un resultado parcial antes de llegar al resultado global. Tal circunstancia pudo ser la causa del reducido éxito en las resoluciones. Así, este problema únicamente fue resuelto por dos sujetos (**a, b**). Los demás tuvieron dificultades sobre todo en la representación. Veamos un caso.

Sesión individual
Cambio 1
(6 x 4) 3 = ?

"El señor que vende helados los acomoda en una tablita. En cada tablita caben 6 filas con 4 barquillos. Si vende lo que cabe en 3 tablitas ¿cuántos barquillos vende en total?

(el sujeto suma los tres datos del problema)

J:	$\begin{array}{r} 6 \\ +\ 4 \\ \underline{3} \\ 13 \end{array}$	son 13
...		
Entrevistadora:	¿cuántos barquillos le caben a cada tablita?	
J:	¿en una tablita? ...	
Entrevistadora:	sí, en una	
J:	¿20?	
...		

Este sujeto requirió cierta ayuda por parte de la entrevistadora para poder establecer que en una tablita cabían 24 barquillos y en tres 72.

El problema de cambio 4, además de presentar la característica anterior, ubica la incógnita en el segundo sumando y plantea una resta (a - ? = c). Quizá por ello, en su primer intento, ningún sujeto individual pudo resolverlo, aunque la principal dificultad se dio al ejecutar el algoritmo. Cabe resaltar, sin embargo, que el esfuerzo cooperativo logró salvar tales dificultades. A continuación, transcribimos el diálogo completo del equipo ya que evidencia tal desempeño.

Sesión grupal
Cambio 4
(15 x 20) - ? = 85

"En la sala de un cine hay 15 filas con 20 asientos cada una. Si faltan por vender 85 boletos ¿cuántos boletos se han vendido?

...

Entrevistadora:	¿qué quieres hacer Tomás?
T:	multiplicar 15 por 20
Entrevistadora:	¿por qué?
T:	porque si hay 15 filas... y en las filas hay 20 asientos.... por eso quiero multiplicar 15 por 20
Entrevistadora:	¿y ese resultado qué significa?
T:	cuántos asientos hay... y dice que faltan 85 boletos... pues debemos saber cuántos boletos hay....y luego contaríamos los boletos
Entrevistadora:	a ver hazlo
T:	

$$
\begin{array}{r}
15 \\
\times\ 20 \\
\hline
15 \\
3\ \square \\
\hline
315
\end{array}
$$

Entrevistadora:	¿cómo podemos saber si Tomas multiplicó correctamente?
MF:	(realiza nuevamente la operación)

$$
\begin{array}{r}
15 \\
\times\ 20 \\
\hline
00 \\
30\ \\
\hline
300
\end{array}
$$

Entrevistadora:	¿qué significa el 300?
T y J:	los asientos
Entrevistadora:	¿y ahora qué hacen?
T:	restamos 300 menos 85, porque dice que faltan 85 lugares
Entrevistadora:	¿faltan para qué?
T:	para llenar la sala... si resto me va a dar el número de boletos que han vendido
Entrevistadora:	¿qué opinan ustedes?
Todos:	sí, sí
J:	(toma la hoja y escribe)

$$
\begin{array}{r}
300 \\
-\ \ 85 \\
\hline
325
\end{array}
$$

T:	¡no! espérate, vamos a revisarla

MF:	(toma la hoja y vuelve a escribir el algoritmo)

$$\begin{array}{r} 300 \\ -\ 85 \\ \hline 215 \end{array}$$

T:	(le ayuda a resolverlo) a ver... a 0 no le puedo quitar 5 y le pide prestado al 3 y aquí ya son 10 (señalando el 0 de las decenas)
MF:	(escribe a la izquierda del 0 de unidades un 1, así obtienen el resultado).
Entrevistadora:	¿qué significa el 215?
T:	los boletos que ya vendieron

Finalmente el problema de cambio 2 que dice: *"La dirección de la escuela recibió 725 libros de texto. Si ha entregado a los maestros 518 ¿cuántos tiene aún que repartir?*, fue el más fácil de esta categoría debido a que el sujeto sólo debía de efectuar un cálculo para obtener el resultado (725 - 518 = ?), obsérvese además que la incógnita se encuentra en el resultado. Cuando no tuvieron éxito se debió a errores en el algoritmo de resta.

Parte de la dificultad atribuida a los **problemas de combinación** 1 y 2 puede deberse a que los sujetos debían aplicar sus conocimientos respecto de los conceptos "medios" y "tercios", lo cual representó gran dificultad. El primero de estos problemas se presenta en el apartado de Errores Conceptuales, tercer grado.

Mejores resultados obtuvo el problema de combinación 3 a pesar de que la incógnita se ubicó en el primer sumando. Esto puede deberse a que la combinación numérica que se propuso era de fácil manejo: *"Lupita y Ester fueron al cine. Entre las dos tenían 42 pesos. ¿Cuánto dinero llevaba Lupita si 18 eran de Ester? (? + 18 = 42)".* Usando estrategias de distintos niveles pudieron resolverlo. Este caso se desarrolla en el apartado de Estrategias de Resolución, tercer grado.

Los **problemas de comparación** fueron los más difíciles para los sujetos de tercer año. Las causas de ello pueden ser las siguientes. En comparación 1, aún cuando la resolución implicaba dos operaciones, sus mayores dificultades se encontraron al tratar de obtener "la mitad de" un número. Véase Errores Conceptuales, tercer grado.

Por su parte, en el problema de comparación 2, la limitante estriba en que los sujetos no tienen un esquema para la proposición relacional "menos que" y la interpretan como una proposición de asignación (Bermejo, 1990), es decir, repiten una de las cantidades del problema. Veámoslo: *"Doña Luz compró 1 ½ kilo de arroz. Doña Ángeles compró ½ kilo menos que doña Luz. ¿Cuánto arroz compró doña Ángeles? (1 ½ – ½ = ?).* Todos los sujetos, excepto el experto (a) y el equipo, responden ½ .

Algo similar ocurre con el problema de comparación 3, en donde los sujetos no pueden interpretar adecuadamente la proposición relacional "más que" y como consecuencia repiten una de las cantidades del problema o implementan una operación inadecuada. Además, el lugar en que se encuentra la incógnita implica invertir el planteamiento. El problema en cuestión es el siguiente: *"El señor Ernesto pesa 77 kilos; él pesa 24 kilos más que su hijo. ¿Cuántos kilos pesa su hijo?"* (? + 24 = 77). Únicamente el experto (**a**) y el equipo resuelven correctamente este problema.

Finalmente, es interesante observar que en el problema de comparación 4: *"Ana tiene $ 613.- ahorrados.* Ester tiene $ 478.- ¿Cuánto dinero menos tiene Ester? (a - ? = c) , todos los sujetos plantearon adecuadamente la operación, sin embargo, sólo el experto individual (**a**) logró ejecutarla correctamente (613 – 478 = ?).

Aún cuando los cuatro **problemas de igualación** implicaban distinto nivel de complejidad, debido al lugar en que se ubicó la incógnita y al algoritmo que requería, tuvieron casi el mismo número de aciertos. Esto puede deberse, en primer término, a que dichos problemas sólo necesitaban una operación para acceder al resultado. En segundo lugar, las combinaciones numéricas presentes resultaron sencillas para la mayoría de los sujetos. Y, por último, creemos que en tercer grado los sujetos comprenden mejor este tipo de problemas, es decir, incrementan o disminuyen uno de los conjuntos considerando la existencia del otro conjunto.

No obstante lo anterior, los novatos (**d, e**) tienen menor número de aciertos debido a dificultades en la representación como en la ejecución. Veamos un caso en que el novato (**c**) logra resolverlo adecuadamente:

Sesión individual
Igualación 4
(350 - ? = 220)

"Aldo y Juan asistieron a la feria del libro. Aldo va a pagar $ 350 por los libros que le gustaron. Juan va a pagar $ 220 ¿Cuánto dinero en libros tendrá que dejar Aldo, si quiere llevar lo mismo que Juan?

Entrevistadora:	¿qué harías?
J:	restaría ... (se queda pensativa)
....	
J:	tendría que dejar 130, porque a 3 le quito 2.... (pensativa)
Entrevistadora:	¿cómo le hiciste?
J:	aquí le estoy haciendo 350 menos 220
Entrevistadora:	¿y cuánto te da?
J:	(mentalmente) debajo de la unidad se baja el 0 ... y al 5 le quito 2...3 y a 3 le quito 2...1

Por lo expuesto anteriormente podemos decir que los problemas de comparación resultaron ser los más difíciles de resolver. Lo anterior debido a dificultades en los conceptos "mitad de", "menos que"y "más que"; además de no poder invertir el planteamiento en el problema de comparación 3 (? +24 = 77). Le siguen por mínima diferencia los de combinación y cambio. Por su parte, la categoría de igualación sigue siendo la más fácil de representar.

SEXTO GRADO

Atendiendo únicamente a los errores de representación, podemos decir que en sexto año los problemas más difíciles fueron los de combinación y los más fáciles son, por mínimas diferencias, los de comparación, igualación y cambio. Sin embargo, cabe aclarar que estos resultados varían si tomamos en cuenta tanto los errores conceptuales como los de ejecución. En tal caso los más difíciles siguen siendo los de combinación y los más fáciles únicamente los de comparación, debido a que igualación y cambio generaron diversos errores de ejecución y concepto (ver Errores Más Comunes Sexto Grado).

Un problema en donde tres de las formas de trabajo individual (c, **d**, e) tuvieron dificultades de representación fue:

Combinación 1
54.3 + (54.3 + 3.7) = ?

"Bety pesa 54.3 kg. Elvia pesa 3.7 kg. más que Bety. ¿Cuánto pesarán las dos juntas?

Cada uno de los sujetos suma las dos cantidades propuestas. Dos de ellos (c, **d**) responden que "las dos juntas pesan 58 kg." Al volver a leer el problema y preguntarles qué significa que Elvia pese 3.7 kg. más que Bety, ambos corrigen y dan como resultado "112 kg.". El otro sujeto calcula mentalmente y dice: "sumaría 54.3 más 3.7 y serían...57.10 kg.", sin poder hacer ninguna corrección posterior.

Como puede observarse este problema de combinación incluye en su planteamiento la relación comparativa "más que" lo cual implica, en el contexto del problema, realizar una operación antes de encontrar el resultado total. Lo anterior generó cierta confusión para estos novatos. Así, los sujetos tuvieron dificultades para comprender la proposición comparativa "Elvia pesa 3.7 kg. más que" y la asumen como una proposición de asignación y al tratar de responder a la pregunta de combinación ¿cuánto pesarán las dos juntas? únicamente suman ambas cantidades.

Recordemos que en primero y tercer grado los problemas de comparación implicaron grandes dificultades en su representación. Por el contrario, en sexto año los sujetos pueden resolverlos debido a que, probablemente, han construido los esquemas mentales "más que" y "menos que". Cabe señalar, sin embargo, que tal situación se vio favorecida debido a que estos problemas implicaban una sola operación para darles respuesta. Si esto no fuera así, tal vez los resultados serían distintos, tal como lo demuestra lo sucedido con el problema de combinación 1 expuesto anteriormente.

Revisemos ahora uno de los problemas de comparación comprendido adecuadamente por todos los sujetos:

Comparación 2
(275 – 145 = ?)

"Un estante de la biblioteca tiene 275 libros. Otro estante tiene 145 libros menos. ¿Cuántos libros hay en este último estante?

Todos los sujetos realizan correctamente un algoritmo de resta, excepto el sujeto (**b**) quien tiene problemas en su ejecución.

ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN

Diversos son los cambios que experimentan los sujetos conforme transcurre su paso por la escuela. Uno de ellos es el logro en la adquisición de diversas habilidades al resolver los problemas matemáticos. Entre tales habilidades pueden mencionarse la capacidad de autorregulación, la sociabilidad, el desarrollo del lenguaje y, por supuesto, formas más económicas al resolverlos.

En este apartado se exponen las estrategias surgidas al resolver los 15 problemas propuestos en cada grado, fueran estos resueltos correctamente o no. En base a ello es posible observar el desarrollo evolutivo de tales herramientas. Asimismo, se observa su comportamiento cuando la resolución se realiza en forma cooperativa e individual.

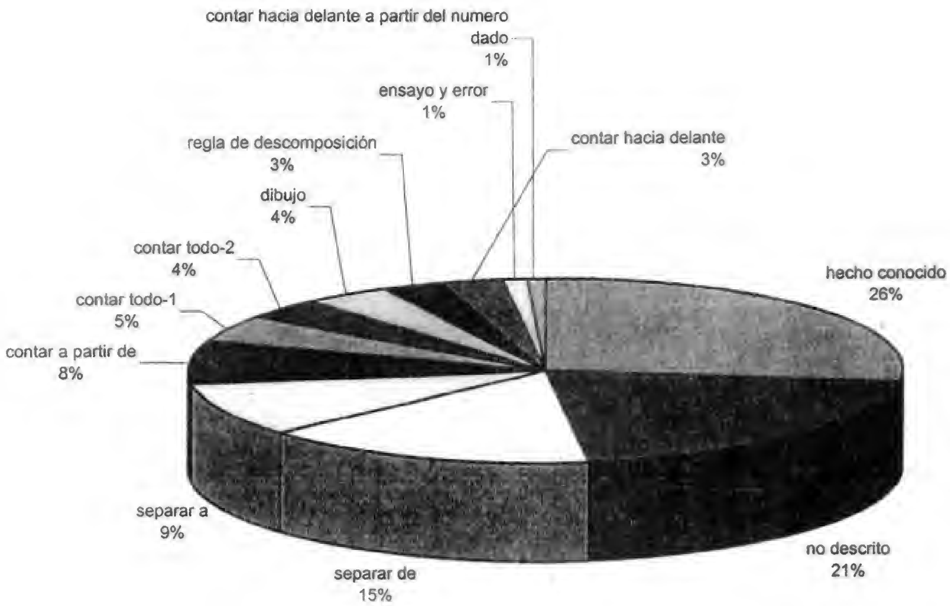
Así, nuestra investigación evidencia con claridad el abandono paulatino en el uso de las estrategias heurísticas por la incorporación de las llamadas estrategias algorítmicas. Cabe recordar, por último, la gran importancia que tiene para el niño hacer uso pleno de las estrategias que él mismo construye (heurísticos) para poder dar significado y avanzar en el dominio de estrategias más económicas y eficaces (algoritmos) (Block y Dávila, 1993).

PRIMER GRADO

La gráfica 1 muestra las estrategias empleadas tanto en las resoluciones individuales como en las de equipo. Es importante indicar que los porcentajes se obtienen al considerar todas las estrategias desarrolladas al resolver los problemas. A excepción de los *hechos conocidos* (HC), las estrategias restantes pertenecen a los heurísticos, es decir, aquellos procedimientos que el sujeto inventa, y que se resuelven casi en su totalidad sin el uso de lápiz y papel.

Como puede observarse casi 5 de cada 10 resoluciones ofrecen como respuestas algún *hecho conocido* (HC), o no describen cómo le hicieron (ND). Esto último sólo se presenta en este grado, posiblemente porque a esta edad aún no desarrollan estrategias metacognitivas que les permitan seguir sus procesos de resolución.

Gráfica 1. Porcentajes de Estrategias Heurísticas Utilizadas por los alumnos de primer grado



Así, los ***hechos conocidos*** (HC) representan el tercer nivel en la resolución de problemas y son combinaciones numéricas que se recuerdan con gran facilidad (5+5 = 10; 5+4 = 9; 6+4= 10 etc.). De las 29 ocasiones en que se presenta esta estrategia, en poco menos de la mitad, los sujetos hicieron uso de alguna otra estrategia para comprobar su resultado. Veamos algunos ejemplos:

Sesión Grupal:
Combinación 2
(5 + ? = 9)

"El zoológico de Chapultepec y el zoológico de Aragón tienen los dos juntos 9 osos. En el de Chapultepec hay 5 osos y los demás están en el de Aragón. ¿Cuántos osos hay en el zoológico de Aragón?

L, N, O:	¡4! ¡4!
. . .	
Entrevistadora:	a ver Oscar, explícalo
O:	en el zoológico, en el primero habían 5 ¡verdad! Y en el otro habían ... los otros, entonces habían 1,2,3,4,5,6,7,8,9 (cuenta sus dedos) y así serían 9 mira (muestra sus nueve dedos extendidos).

Como puede observarse, después de dar una respuesta inmediata (HC), Oscar emplea la estrategia *contar todo formando una colección* para comprobar que su resultado es el correcto.

Sesión Individual:
Igualación 4
(8 - ? = 5)

"Gaby tiene 8 pesos. Lupita tiene 5 pesos. ¿Cuánto dinero debe gastar Gaby para tener la misma cantidad que Lupita?"

JJ:	3
Entrevistadora:	¿por qué 3?
JJ:	no sé
(se repite el problema)	
JJ:	3
Entrevistadora:	¿cómo le hiciste para obtener ese 3?
JJ:	(Juan José muestra 5 dedos de su mano izquierda y 3 de la derecha)
Entrevistadora:	¿esos son de quién?
JJ:	esos son de Gaby. Se le quitan 3 ..... son 5.
Entrevistadora:	entonces, ¿cuánto debe gastar Gaby?
JJ	3

El sujeto (**a**) es el niño experto de primer grado y su respuesta es tan inmediata que al pedirle explicación le provoca cierta confusión; sin embargo lo hace utilizando la estrategia denominada *separar a,* en donde el número de elementos removidos es la respuesta.

En el uso de esta estrategia (HC) también encontramos situaciones en donde el sujeto no profundizó en su explicación, simplemente brindó alguna combinación numérica haciendo uso de los datos del problema, por ejemplo:

Sesión Individual
Igualación 2
(5 – 3 = ?)

"Elvia tiene 5 pesos. Si gasta 3 pesos en el recreo, le sobrará la misma cantidad que trae su amiga Bety. Entonces, puedes decir ¿cuánto dinero trae Bety?

(No termina aún de leerse el problema cuando el sujeto da su respuesta)

JJ:	2 pesos
Entrevistadora:	¿por qué 2 pesos?
JJ:	porque 2 más 3 son 5

Sesión Individual
Cambio 3
(? + 5 = 8)

"En la frutería hay algunas piñas. El dueño compra 5 piñas más. Ahora tiene 8 piñas para vender. ¿ Cuántas piñas tenía al principio?

R:	3
Entrevistadora:	¿cómo supiste?
R:	pensándolo
Entrevistadora:	¿qué pensaste?
R:	pensé que si le faltaban 5 .... pues tenía 3
....	
Entrevistadora:	¿qué dice el problema para que tú supieras que tenía 3 al principio?
R:	pues escuchándolo y sabiendo, *pensé que el dueño de las piñas tenía pocas y que fue a comprar 5 y pues pensé que eran 3.*

Este problema, aunque pertenece a la categoría de cambio, representó gran dificultad para casi todos los sujetos, incluso al equipo, esto debido al lugar en que se ubica la incógnita. El sujeto (c) aunque no es experto, ofrece una respuesta inmediata (HC) y acertada. No obstante su dificultad para expresar lo que piensa, es evidente que está haciendo una combinación entre los números 3 y 5.

Por otra parte, las estrategias heurísticas más empleadas fueron ***separar de*** (SEP- D) y ***separa a*** (SEP- A*)*. En la primera, se remueven del conjunto inicial una determinada cantidad de objetos, los que quedan son la respuesta. Mientras que en la segunda, del conjunto mayor se remueven tantos elementos necesarios para igualar la cantidad menor, los removidos son la respuesta. Cabe resaltar que en algunas ocasiones estas estrategias fueron utilizadas por el sujeto como segunda opción para demostrar su *hecho conocido (HC)*. A continuación se presentan algunos ejemplos de las estrategias mencionadas.

Sesión individual
Igualación 4
(8 – ? = 5)

Gaby tiene 8 pesos. Lupita tiene 5 pesos. ¿Cuánto dinero debe gastar Gaby para tener la misma cantidad que Lupita?

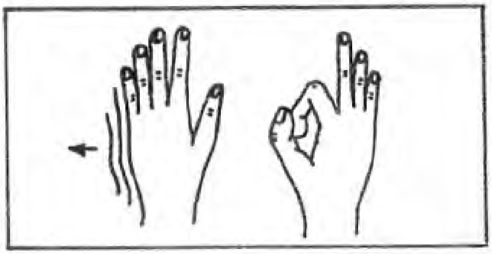
A:	3
Entrevistadora:	¿cómo le hiciste?
A:	(levanta sus manos)
Entrevistadora:	¿qué tienes ahí?
A:	mis deditos (pone 8)
Entrevistadora:	¿Eso sería lo que tiene Gaby?
A:	si
Entrevistadora:	y Lupita ¿cuánto tiene?
A:	5
Entrevistadora:	¿cuánto dinero tiene que gastar Gaby para tener la misma cantidad que tiene Lupita?
A:	3 *(de 8 dedos que levanta dobla 5)*

Este novato (d) emplea la estrategia *separar-de*, en donde la respuesta son los dedos que se muestran.

En el mismo problema el sujeto (b) utiliza la estrategia *separar-a*, en donde los dedos doblados son la respuesta. Veamos...

....

I:	8 tiene Gaby (levanta sus dedos) y Lupita tiene 5 (mueve ligeramente su mano izquierda), ¿cuánto debe gastar Gaby?....



I: 3

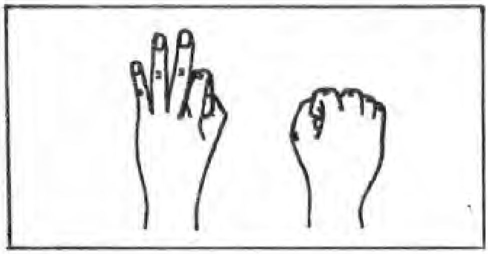
Revisemos otro problema donde se emplea la estrategia *separar-a*.

Sesión individual
Cambio 4
(9 - ? = 3)

"La señora Tere tenía 9 chiles verdes. Ella ocupó algunos para preparar una salsa. Al guardarlos sólo había 3. ¿Cuántos chiles ocupó la señora Tere?"

....

R:	6
Entrevistadora:	¿cómo sabes que son 6?
R:	(levanta 9 dedos y dobla 6) porque se gastó 6 y le quedan 3



Como se observa, los dedos separados son la respuesta (*separar-a)*.

La tercera estrategia heurística más utilizada por los sujetos fue ***contar a partir de*** (CAD). En ella se parte del primer sumando y se incrementa tantas veces como indica el segundo sumando (Puente y Poggioli, 1989). Esta estrategia la utilizaron tres sujetos individuales (**a**, **b**, **c**) y el equipo, al resolver el siguiente problema:

Cambio 1
(7 + 4 = ?)

"Juan Pablo tiene en su pecera 7 peces. Su mamá le compró 4 más. ¿Cuántos peces tiene ahora?"

En los tres casos los sujetos cuentan con sus dedos y dicen: 7 ... 8, 9, 10, 11.

A continuación aparece un problema en donde se emplea inadecuadamente esta misma estrategia:

Sesión grupal
Comparación 3
(? + 2 = 6)

"En el acuario de don Vicente hay 6 caballitos de mar. El tiene 2 caballitos más que el acuario de don Pepe. ¿Cuántos caballitos tiene el acuario de don Pepe?"

Uno de los integrantes responde 8 y su argumento es el siguiente:

O:	mira Luis... (se dirige a uno de sus compañeros) había en el primer acuario 6 y en el otro de don Pepe había 8, porque había 2 más. *Y así, habían 8 mira.... 6 ... 7 y 8.* Entonces, en el último acuario que dijo había 8 y en el primero había 6.

(No obstante, el experto expone la solución adecuada)

Entrevistadora:	¿por qué 4 Norma?
N:	porque en el primer acuario había 6 caballitos de mar y en el segundo acuario había dos menos, *entonces son 4 porque le faltan dos para completar 6.*

La cuarta estrategia más utilizada por los niños de primer grado se denomina ***contar todo formando una colección*** (CT-1). Ésta es la estrategia más primitiva y consiste en usar objetos o los dedos como forma para representar los elementos del problema; una vez construidos los une y cuenta todos (Puente y Poggioli, 1989).

El siguiente problema se ha mencionado anteriormente y es el mejor caso en el que se expuso la estrategia de *contar todo formando una colección* (CT-1).

Sesión Grupal:
Combinación 2
(5 + ? = 9)

"El zoológico de Chapultepec y el zoológico de Aragón tienen los dos juntos 9 osos. En el de Chapultepec hay 5 osos y los demás están en el de Aragón. ¿Cuántos osos hay en el zoológico de Aragón?

L, N, O:	¡4! ¡4!
...	
Entrevistadora:	a ver Oscar, explícalo
O:	en el zoológico, en el primero habían 5 ¡verdad! Y en el otro habían ... los otros, entonces habían 1,2,3,4,5,6,7,8,9 (cuenta sus dedos) y así serían 9 mira (muestra sus nueve dedos extendidos).

Estos mismos sujetos al tratar de resolver el siguiente problema utilizan esta misma estrategia (CT–1) en su intento por resolverlo:

Sesión grupal
Comparación 1
(3 + 4 = ?)

"Gustavo tiene 3 vasos. Juanita tiene 4 vasos más que Gustavo. ¿Cuántos vasos tiene Juanita?

L y O:	¡7¡
O:	tenía 3, si los juntan son 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 (con dedos)

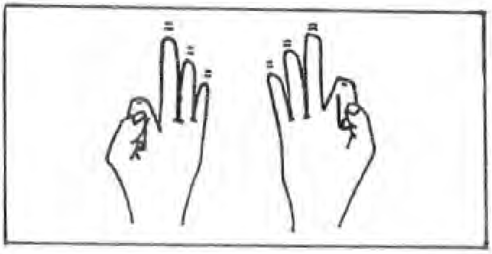
No obstante que su primer resultado es el correcto, ello denota una falta de comprensión ya que únicamente trabajan como si existiera un solo conjunto, como un problema de cambio. Como si los vasos de Gustavo y Juanita realmente pudieran juntarse. Recordemos que la categoría de comparación se caracteriza por sus relaciones estáticas. Esto se advierte cuando al preguntarles por qué los juntan, dicen que "para que tengan muchos". Se lee dos veces más el problema y en ambas ocasiones dan como respuesta 4. Es decir, su error es de representación y repiten una de las cantidades del problema.

La quinta estrategia más utilizada es ***contar todo formando dos colecciones*** (CT-2). Es similar a la estrategia anterior excepto porque en ésta el sujeto no une los conjuntos. Veamos el problema que fue resuelto sin dificultad por el equipo:

Sesión Grupal
Combinación 1
(2x3) 2 = ?

"En un jardín hay dos árboles, cada árbol tiene 3 ramas. En cada rama hay dos manzanas. ¿Cuántas manzanas hay en total ?

N:	(levanta 3 dedos de la mano izquierda y 3 de la derecha y cada uno lo mueve dos veces) ... ¡12 !



Entrevistadora: ¿por qué 12?

......

Entrevistadora: a ver explícale a tus compañeros:
N: son doce porque juntamos las ramas de los dos árboles y dan 12

(Tras lo anterior otro de los integrantes del equipo es capaz de explicar el problema)

En el trabajo individual y después de cierto esfuerzo por representarse adecuadamente los datos de este problema, el experto (a) genera también la estrategia *contar todo formando dos colecciones* (CT-2). Veamos la particular forma en que la construye.

En su tercer intento dice:

....

JJ: ¡12!
Entrevistadora: ¿12? En un árbol o en los dos árboles
JJ: en los dos árboles
Entrevistadora: ¿cómo sabes? ¿qué hiciste?
JJ: o sea .. mira... sume... 1-2 ... 3-4... 5-6... y después en el otro (mueve ligeramente su cuerpo hacia su izquierda y señala en el vacío con su índice derecho, el cual es seguido por su mirada) 7-8... 9-10... 11-12

....

Entrevistadora: a ver despacio, ¿cómo le hiciste?
JJ: (muestra su puño derecho y levanta sus dedos al tiempo que dice...) 1-2, 3-4, 5-6....
Entrevistadora: ¿eso es en cuántos árboles?
JJ: en uno hay 6 y en el otro hay 6
Entrevistadora: y entonces en total ¿cuántas manzanas hay?
JJ: 12

Al ser este un sujeto experto, los conjuntos son formados en su mente con el apoyo de sus movimientos corporales. En una segunda explicación sólo forma un conjunto y a partir de ahí es capaz de duplicar la cantidad y dar, una vez más, el resultado correcto. Como puede verse la estrategia del experto evoluciona y se afina (Parra, 1990).

En primer grado la estrategia *contar todo* (CT-1 ; CT-2) es empleada, fundamentalmente, para resolver problemas de cambio y combinación, lo cual coincide con lo señalado por Badoody (1988).

Por otra parte, la estrategia de ***dibujo*** (D) ocupa la sexta posición y es el novato (**d**) el único en utilizarla en 4 ocasiones. Uno de tales dibujos surge en el siguiente problema:

Sesión individual
Cambio 1
(7 + 4 = ?)

"Juan Pablo tiene en su pecera 7 peces. Su mamá le compra 4 más. ¿Cuántos peces tiene ahora?

....

(Después de contestar incorrectamente, el sujeto dibuja 7 peces en una hoja y los cuenta.)

A: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
Entrevistadora: siete peces que ya tenía y cuatro que le regalan ¿cuánto es?

A: (dibuja cuatro peces más)
Entrevistadora: ¿cuántos son en total?
A: 11

Las ***reglas*** (R) consisten en que el sujeto componga y descomponga los números del problema para encontrar el resultado de la operación (Bermejo, 1990). De acuerdo con nuestros datos únicamente el experto (**a**) la empleó. Observemos la forma en que procede en dos de los tres problemas en que la realiza.

Sesión individual
Igualación 3
(? + 6 = 10)

"Pepe tiene 10 colores. Ana necesita 6 colores para tener la misma cantidad que tiene Pepe. ¿Cuántos colores tiene Ana?"

JJ: 4
Entrevistadora: ¿cómo le hiciste?
JJ: 5 más 5 son 10
Entrevistadora: ajá...
...
JJ: *le quité uno al 5 y quedan 4*
Entrevistadora: *¿y dónde lo pones?*
JJ: *en el otro 5 y ya son 6*

Algo similar sucede al revisar la solución del siguiente problema. En un primer momento la entrevistadora piensa que el sujeto (**a**) no ha comprendido el problema. Sin embargo, cuando lo concluye se percata de la lógica que ha seguido.

Sesión individual
Cambio 4
(9 - ? = 3)

"La señora Tere tenia 9 chiles verdes. Ella ocupó algunos para preparar una salsa. Al guardarlos sólo había 3. ¿Cuántos chiles ocupó la señora Tere?

(tras la segunda lectura)

JJ: 4
Entrevistadora: ¿cómo sabes que son 4?
JJ: conté con mis dedos
Entrevistadora: ¿cómo le hiciste?
JJ: reste
Entrevistadora: ¿qué restaste?
JJ: este... 5

(ante la aparente confusión del sujeto creemos necesario repetir el problema, entonces contesta:)

JJ: 6
Entrevistadora: ¿6 ó 4?
JJ: 6

Entrevistadora: ¿por qué 6?
JJ: porque 5 + 4 son 9
Entrevistadora: ajá...
JJ: *porque al 4 le quito 1 y me quedan 3... y al 5 se lo pongo... y me quedan 6*

Es evidente que al dar su primer respuesta este sujeto estaba aún en el proceso de descomposición y al completarlo puede dar la respuesta correcta.

Contar hacia adelante (CHA) es una estrategia en donde el sujeto construye una colección o primer sumando y a partir de ahí cuenta hacia adelante lo que indica el segundo sumando (Bermejo, 1990). Como se ha mencionado, esta estrategia pertenece al nivel más primitivo (modelado directo) y en nuestra investigación es empleada por los novatos **d** y **e**. A continuación se expone un ejemplo.

Sesión individual
Igualación 1
(6 + 2 = ?)

"Elena tiene 6 chocolates...

A: (alza 5 dedos de la mano izquierda y uno de la derecha)

Ella necesita conseguir dos chocolates más para tener la misma cantidad que Tere...

A: (alza uno a uno, 2 dedos más)

¿Cuántos chocolates tiene Tere?

A: .. 8

Finalmente, las estrategias ***contar hacia adelante a partir del número dado*** (CHAPN) y ***ensayo y error*** (EE) surgieron en una sola ocasión.

La primera de ellas (CHAPN) se ubica en el segundo nivel de resolución (conteo) y consiste en que el sujeto cuente hacia adelante partiendo del número menor (al restar) hasta alcanzar el mayor, el número de pasos es la diferencia (Puente y Poggioli, 1989; Bermejo, 1990).

En el problema de *"El partido jugado el domingo pasado....."* el experto (**a**) respondió adecuadamente a la pregunta *¿por cuántos goles de más ganó el Cruz Azul?* Diciendo "4... porque (3) ... 4, 5, 6, 7"

Por otra parte, Santos (1996) afirma que estrategias como el **ensayo y error,** son tediosas y no se usan comúnmente en matemáticas. Asimismo, encontró que esta estrategia cuando se usa no es empleada en forma organizada. Esto último se corrobora en nuestra investigación, siendo empleada únicamente por el novato (**c**).

Sesión individual
Igualación 3
(? + 6 = 10)

"Pepe tiene 10 colores . Ana necesita 6 colores para tener la misma cantidad que tiene Pepe. ¿Cuántos colores tiene Ana?"

R:	5
Entrevistadora:	¿cómo sabes que son 5?
R:	porque necesita 6
Entrevistadora:	¿tiene 5 y necesita 6?
R:	sí
Entrevistadora:	¿y cuánto sería?
R:	10
Entrevistadora:	¿5 más 6 son 10?
R:	(pensativa) ... 9... 9 colores tiene Ana
Entrevistadora:	¿9 es la respuesta?
R:	si le faltan 6 colores, entonces tiene 9.... y le falta uno para tener 10

.....
(se vuelve a leer el problema)

R:	tiene 5 y le faltan 6 para tener los mismos que su compañero
....	
Entrevistadora:	entonces ¿cuántos colores tiene Ana?
R:	tiene 5 y le faltan 5
Entrevistadora:	pero el problema dice que le faltan 6 ....
R:	(pensativa)
.....	
R:	me equivoqué... ahorita tiene 6 y le faltan 6

Como puede observarse, este sujeto fracasa en sus inteñtos por encontrar la combinación numérica que incluyendo el 6 le dé 10.

Al comparar los niveles en que se ubican las estrategias que utilizaron los sujetos al darle solución a los problemas, podemos decir que tanto el trabajo cooperativo como el trabajo individual experto (**a**) tuvieron las más altas frecuencias con respecto a las estrategias de tercer nivel. En este caso, es pertinente recordar que ambos obtuvieron los mejores resultados. Así mismo, debido a la composición del equipo (experto y novatos), en sus resoluciones también aparecen gran cantidad de estrategias de primer nivel (modelado directo) y sólo algunas de segundo nivel (conteo).

Por otra parte, el sujeto (**b**) utilizó más estrategias de tercer nivel, siguiéndole las de primero. Cabe resaltar que éste sujeto frecuentemente no describe su estrategia (ND). Esto puede deberse bien a que su operación metacognitiva se realiza de manera inconsciente, a problemas de expresión verbal o no verbal, o a una falta de motivación para responder (Mayor, Suengas y González, 1995).

Por otra parte, los novatos (*c, d, e*) ocupan, sobre todo, estrategias de primer nivel (modelado directo). Cabe señalar que aunque el novato (**e**) emplea tanto estrategias de primer nivel como de tercer nivel, éstas generalmente no le llevaron a resultados correctos

TERCER GRADO

La gráfica 2 muestra el cambio en el uso de las estrategias que se emplearon en este grado. Así, 6 de cada 10 procedimientos involucran los *algoritmos de resta* (A-R) o *suma* (A-S) como estrategias de resolución. Enseguida aparece la estrategia denominada *suma iterada* (S-IT), que consiste en sumar "n" veces un mismo número. Ésta, probablemente, es una antesala en el uso del *algoritmo de multiplicación* (A-M), que de hecho aparece en menor medida.

Si en primer grado el *hecho conocido* (HC) fue la estrategia más utilizada, en tercer año no es así, seguramente, porque las combinaciones que se les proponen son hasta las centenas. Así mismo, los heurísticos ocupan un lugar de menor importancia. En algunas ocasiones, éstos se emplearon como un recurso seguro cuando se dificultó ejecutar el algoritmo. Los heurísticos que aún se emplean son: *regla- descomposición* (R- DES), *contar hacia delante a partir del número dado* (CHAPN), *ensayo y error* (EE) y *contar hacia atrás desde* (CON-AD). Finalmente, cabe resaltar que a esta edad todos los sujetos son capaces de describir la estrategia que utilizaron.

A continuación expondremos el trabajo de algunos sujetos al aplicar estas estrategias.

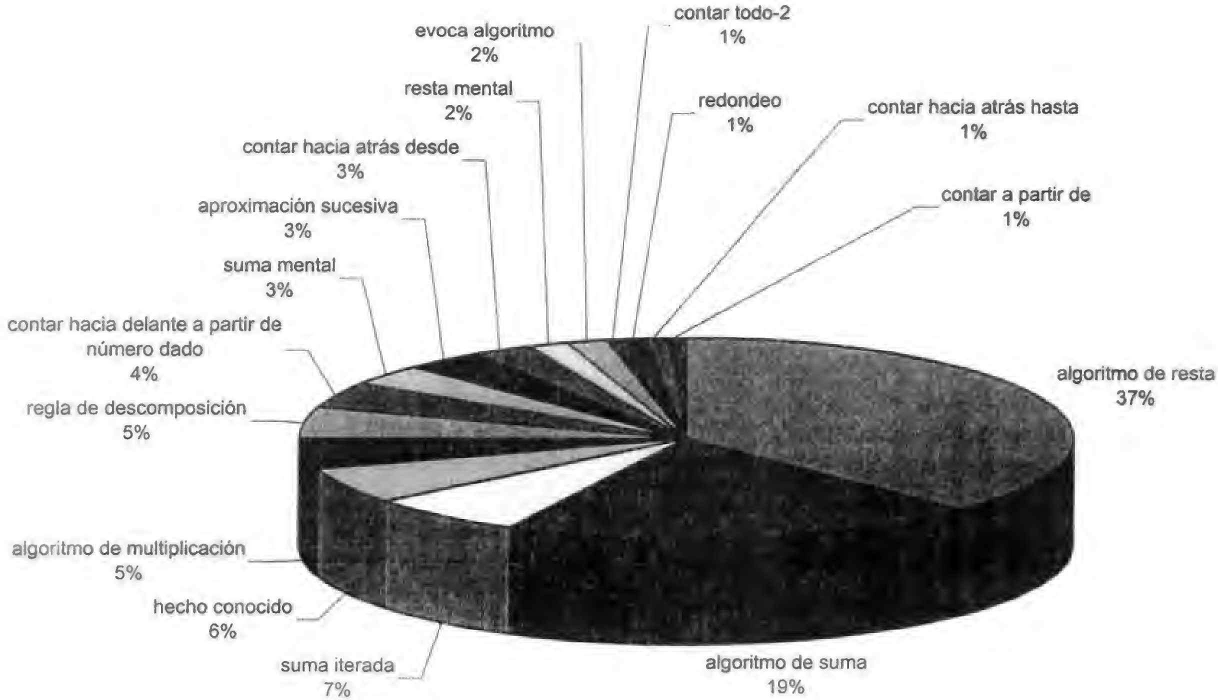
Sesión individual
Cambio 1
(6x 4) 3 = ?

"El señor que vende helados los acomoda en una tablita. En cada tablita caben 6 filas con 4 helados. Si vende lo que cabe en tres tablitas ¿cuántos barquillos vende en total?"

(Después de un rato, Israel toma su hoja y escribe una multiplicación $\begin{array}{r}24\\ \underline{\times\ 3}\\ 72\end{array}$)

I:	(de inmediato anota el resultado debajo de la multiplicación) 72 helados
Entrevistadora:	¿cómo le hiciste?
I:	sume en mi mente 6 veces 4 ...de las 6 filas ...que cada una tiene 4... que son 24 helados en una tablita. Y si quieren saber cuántos hay en 3 tablitas, multiplique 24 x 3 para ver cuanto es 3 veces 24.
Entrevistadora:	¿cómo le hiciste para obtener el 72?
I:	Lo hice en mi mente... estaba sumando 3 veces 20 y me dieron 60. Y después 3 veces 4 y me dieron 12... sume los 12 más 60 y me dio 72.
Entrevistadora:	¿cuántos helados venden en total?
I:	72 helados

Gráfica 2. Porcentaje de estrategias utilizadas por alumnos de tercer año.



Como puede observarse el experto (**a**) llevó a cabo tres estrategias diferentes: la primera cuando plantea el *algoritmo de multiplicación* (A-M), sin embargo, no lo ejecuta. Es entonces cuando dice que antes había sumado 6 veces 4, *suma iterada* (S-IT), para saber cuántos helados había en una tablita. Finalmente, para resolver 24 x 3, el sujeto *descompone* (R-DES) la multiplicación y obtiene 72 helados. Cabe señalar que en otro problema, este mismo sujeto tiene dificultades al realizar un algoritmo con multiplicador de dos cifras, quizá por ello aún recurre a sus heurísticos.

Por otra parte, durante las sesiones tuvimos oportunidad de observar el estado de indefensión en que se encuentran algunos sujetos, cuando al trabajar individualmente y esforzarse para dar solución a un problema, empleaban una y otra vez la misma estrategia sin lograr su cometido. Este fue el caso de los novatos **c** y **d**.

Sesión individual
Cambio 3
(? + 122 = 350)

"La señora conchita tenía algunos ahorros. Su vecina le pagó $ 122.- que le debía. Ahora la señora Conchita tiene $ 350.- ¿Cuánto dinero tenía antes de que su vecina le pagara?

El novato (**d**) comprende que existe un conjunto inicial que debe encontrar. Por ello, suma al 122 cantidades que, según sus conocimientos, puedan darle como resultado 350. Así, en un primer intento toma como base el mismo número y obtiene 244. Al percatarse que su resultado no es el esperado, procede a combinar el 100 con 122. En esta ocasión piensa que ha obtenido 350. Al darse cuenta que no es así realiza otra suma, 200 más 122, y obtiene 322. Aquí se detiene y deja de calcular. El sujeto recurre constantemente a esta forma de resolver los problemas. Es decir, al no poder invertir el planteamiento inicial imagina o intuye qué número sumado al que se le da, es 350. A esta forma de proceder, Vergnaud (1997) la denomina "estado inicial hipotético".

Algo similar ocurre con el novato (**c**), en este mismo problema. En un principio cree que se debe hacer una resta. Sin embargo opta por calcular un número que al sumarlo con 122 le dé 350. Este número resulta ser 232, ¿por qué? Porque dice (de izquierda a derecha): " 2 y 1 ...3, ... 3 y 2...5 pero aquí (unidades), no me da 0". Al sumar 122 más 232 se da cuenta que se ha pasado por 4, sin embargo no sabe a qué número quitárselo.

También debemos resaltar que en el problema de combinación 3, el novato (**c**) vuelve a emplear la estrategia de *ensayo y error* (EE) y el novato (**d**) la estrategia denominada *contar hacia atrás a partir del número dado (CHAPN).* En ambos casos sus resoluciones son exitosas debido, seguramente, a que se trata de cantidades de dos cifras y de fácil manejo para ellos. Veamos el caso del novato (**d**)

Sesión Individual
Combinación 3
(? + 18 = 42)

"Lupita y Ester fueron al cine. Entre las dos tenían $4. ¿Cuánto dinero llevaba Lupita, si $18 eran de Ester?"

A: (cuenta en voz alta) 18...19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28
(anota en una hoja el número 28)
A: (sigue contando) 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38,
(anota el 38 y dice)
A: a ver, aquí fueron 10 (lo anota cerca del 28 y otro 10 junto al 38)
(sigue contando)
A: 39, 40, 41, 42
(anota el 4 debajo de los dos 10 y suma)

28 10
38 10

$$\begin{array}{r} 10 \\ +\ 10 \\ 4 \\ \hline 24 \end{array}$$

A: ¡sí, Lupita llevaba 24!

Por su parte el novato (c), intenta, una vez más, encontrar un número que al sumarlo con el 18 le dé 42.

Entrevistadora: ¿qué harías?
J: sumar 30 más 18...pero no me sale
Entrevistadora: ¿te pasas o te falta?
J: me paso

(Jacqueline intenta sumar 29 más 18 y le da 47; después 28 más 18 y le da 46. Finalmente, Jaqueline se anima y suma 24 más 18 y obtiene 42 y dice)

J: o sea que Lupita llevaba 24

Al revisar cada una de las resoluciones obtenidas en tercer año, pudimos observar la alta recurrencia a las estrategias algorítmicas y diversas dificultades al ejecutarlas. Así, el éxito en la resolución dependió de la habilidad del sujeto, de la posibilidad de apoyar esta resolución con otro tipo de estrategias o, incluso, de la ayuda entre iguales. Lo anterior habla de un evidente proceso de cambio en la adopción de estrategias más elaboradas. Por ello, es el momento de recordar la importancia de no apresurarse en la enseñanza de nuevos conceptos, que el profesor conozca los procedimientos que sus alumnos manejan, que les permita socializarlos, hacer amplio uso de la matemática informal (heurísticos) y relacionarla con la matemática escolar y, sobre todo, evitar el perfeccionismo (Baroody, 1988; Carrillo, 1995; De la O, et al.,1996; Kaplan, et al. 1989). Con toda seguridad esto ayudará a los alumnos que están requiriendo mayor atención.

SEXTO GRADO

Los sujetos utilizaron, predominantemente, los cuatro algoritmos básicos que conocen, y de ellos, una vez más, la resta y la suma son los más frecuentes. Enseguida, los *hechos conocidos* (HC) reaparecen como una importante estrategia de solución, aunque se refieren a conceptos de mayor abstracción. En menor medida ofrecen respuestas a través de *sumas y restas mentales* (S-M; R-M), aunque éstas no son descritas y, generalmente, les llevan a resultados equivocados. Por último, aunque en menor frecuencia, los sujetos siguen empleando la *regla de descomposición* (R-DES) y surge una estrategia que a sugerencia del profesor Pedro Bollás García, se denominó *evoca algoritmo* (Ev-A). Estos datos se muestran en la Gráfica 3.

En el problema que se muestra abajo, cuatro de los cinco sujetos individuales y el equipo propusieron un algoritmo de suma como estrategia de solución. De ellos, únicamente el novato **(d)** tiene dificultades al sumar los números decimales. Por otra parte, el novato **(e)** *evoca el algoritmo* (Ev-A). Es decir, no anota la suma y resuelve siguiendo mentalmente los pasos del algoritmo. Esta misma situación la realiza en dos ocasiones más, sin éxito.

Igualación 1
(1213.20 + 2499.30 = ?)

"Sonia tiene ahorrado $ 1 213.20; ella aún necesita ahorrar $ 2 499.30 para tener lo mismo que la señora Flor. ¿Cuánto dinero tiene la señora Flor?

El *hecho conocido* (HC) fue la siguiente estrategia más empleada y a diferencia de primero y tercer grado, su uso implica mayor complejidad, abstracción y dominio de ciertos conceptos matemáticos. Veamos dos ejemplos:

Igualación 4
(7/8 – ? = 3/8)

"Doña Luz compró 7/8 de una sandía. Doña Ángeles compró 3/8 de otra sandía. ¿Qué parte de la sandía debe dejar doña Luz para llevar la misma cantidad que doña Ángeles?

Cuatro de las cinco formas de trabajo individual y el trabajo cooperativo contestaron inmediatamente "4/8".

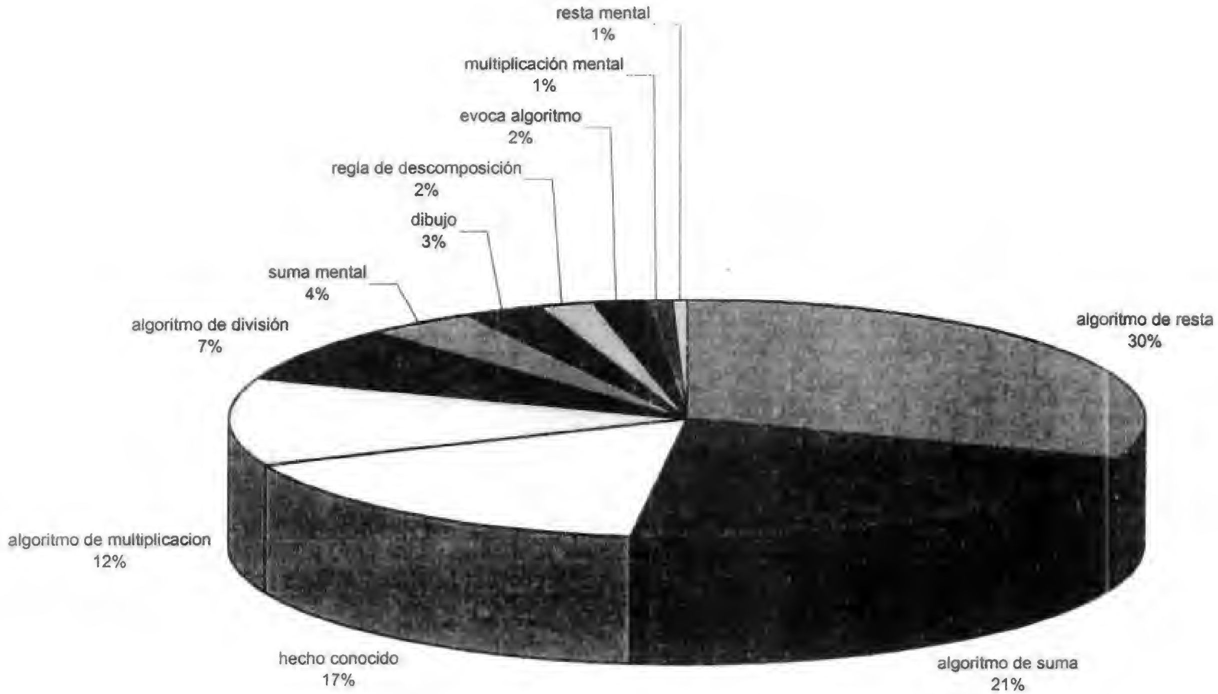
Otra *hecho conocido* (HC) se desprende del siguiente problema:

Comparación 4
((750 - ? = 500)

"Para hacer un guisado, la cocinera utilizó ¾ de kilo de carne de res y 500gr. de carne de cerdo. ¿Cuántos gramos menos de carne de cerdo que de res utilizó la cocinera?

También en este caso, la mayoría de los sujetos individuales así como el equipo contestaron de inmediato "250 gr." Ello implica que comprenden el concepto "kilo", el significado de la fracción y saber convertir a gramos.

Gráfica 3. Porcentaje de Estrategias utilizadas por los alumnos de sexto año.



ERRORES MÁS COMUNES

Este apartado da a conocer los errores generados al resolver los problemas de estructura semántica en los tres grados propuestos. Así, el error de representación es típico en los sujetos de primer grado, aparece en menor proporción en los de tercero y en sexto grado ha disminuido significativamente. Asimismo, en tercero y sexto año surgen errores al ejecutar el algoritmo y errores conceptuales. Éstos últimos se refieren a que en el planteamiento del problema se incluye un concepto matemático (1/2, mitad de, %, etc.) que al no ser comprendido por el sujeto le impide resolverlo. Estos datos son de gran relevancia ya que su comprensión brinda la posibilidad de apoyar a los sujetos en sus específicas necesidades así como hacer énfasis en algunas actividades para la mejor comprensión de los problemas .

PRIMER GRADO

De un total de 90 problemas resueltos por ambas formas de trabajo, el 56% se realiza incorrectamente. La mayoría (94%) de éstos se deben a la inadecuada representación que los sujetos realizan y, sólo una mínima parte (6%) corresponde a errores de ejecución heurísticos. Recuérdese que en primer grado no se utilizaron algoritmos para dar solución a los problemas.

a) Errores de Representación

Existen tres posibles causas de error al representar un problema. En nuestros datos el error de representación más frecuente es **repite cantidad** (50%) ubicado en su mayoría en los problemas de comparación. **Inventa la respuesta** (38%) es el error que sigue y lo encontramos sobre todo en problemas de combinación. Finalmente, emplean **operación inadecuada** (12%) que se ubica sobre todo en combinación y cambio. Revisemos algunos casos de estos errores.

Repite cantidad

En el caso del problema de comparación 1: "Gustavo tiene 3 vasos. Juanita tiene 4 vasos más que Gustavo. ¿Cuántos vasos tiene Juanita", tanto el equipo como cuatro de los cinco sujetos individuales dan como respuesta "4", debido a que confunden o no tienen un esquema para la proposición relacional "Juanita tiene 4 vasos más que Gustavo" y la interpretan como una proposición de asignación "Juanita tiene 4 vasos." (Bermejo, 1990). Situación semejante ocurre con los 3 problemas restantes de esta categoría.

Inventa la respuesta

En combinación 3: *"La mamá de Iván llevó a la fiesta algunos tacos de pollo. La mamá de Elena llevó 5. Si en total había 13 tacos de pollo, ¿cuántos tacos llevó la mamá de Iván?"*, la principal dificultad representó el lugar en que se ubica la incógnita (? + 5 = 13). Así, las cinco formas de trabajo individual proporcionaron respuestas que no tienen relación aparente con este problema. Entre ellas se dijo: 4, 3 y 20. Este error también se presentó, aunque en menor frecuencia, en algún problema de las restantes categorías semánticas. Cabe mencionar que el novato (**e**), quien obtuvo sólo un acierto, incurre en este error en la mitad de sus resoluciones.

Operación inadecuada

Seleccionar una operación inadecuada puede tener tres causas. Una de ellas se presenta cuando *para determinar el otro sumando el sujeto tiene que comprender una proposición comparativa difícil* (Bermejo, 1990). Tal es el caso de la resolución del novato (**e**) en el problema de comparación 4 que dice así:

"David tiene 9 canicas. Su primo Juan tiene 6 canicas. ¿Cuántas canicas menos tiene Juan que David?

IA:	15... si los juntara

Como puede observarse, el sujeto adopta la solución más fácil que conoce, la cual consiste en sumar los dos elementos que se le dan (9 + 6 = 15). Es decir, al no comprender la proposición comparativa "¿Cuántas canicas menos tiene Juan que David? no logra establecer la diferencia entre los sumandos que se le pide (9 – 6 = ?).

La segunda causa de elegir una operación inadecuada se debe a que el sujeto, al dar su respuesta, *no sigue la secuencia temporal que el texto le proporciona* (Bermejo, 1990). Este fue el caso de algunas de las resoluciones brindadas al problema de combinación 1, que dice: *"En un jardín hay dos árboles, cada árbol tiene tres ramas. En cada rama hay dos manzanas. ¿Cuántas manzanas hay en total?* Veamos cómo procedió el experto (**a**):

JJ:	6 (de inmediato)
Entrevistadora:	¿cómo sabes que son 6?
JJ:	porque son 3 ramas en los 2 árboles y las manzanas están en cada una de las ramas
Entrevistadora:	¿entonces cuántas manzanas hay?
JJ:	6
Entrevistadora:	(repite el problema)
JJ:	4 (de inmediato)
Entrevistadora:	¿cómo sabes, ya no son 6? ¿qué te hace cambiar de opinión?
JJ:	que en cada árbol hay... 2 (manzanas) en cada una (de las ramas)
Entrevistadora:	(repite el problema)

Es evidente que la cantidad de datos que contiene el problema, impide al sujeto seguir la secuencia temporal que el texto le propone, por ello sólo toma en cuenta parte de la información. El diálogo anterior muestra que el experto (**a**) poco a poco fue construyendo una representación más adecuada del problema, hasta que finalmente lo resuelve a través de la estrategia denominada CT2 (ver apartado de Estrategias).

Por otra parte, es de resaltar que únicamente el equipo resolvió este problema en su primer intento, así como el experto (**a**) y el novato (**d**) en subsecuentes oportunidades. Éste último a través de un dibujo.

La *incapacidad para interpretar la indefinición de uno de los sumandos* es la tercera causa por la cual se elige una operación inadecuada. El único caso en el cual se presenta esta situación es en el problema de "En la frutería...." (? + 5 = 8), ya mencionado anteriormente. Aquí, el experto (**a**) no es capaz de invertir el planteamiento inicial:

Planteamiento inicial	Inversión del planteamiento
? + 5 = 8	8 – 5 = ?

y lo resuelve, de manera incorrecta, asignando al conjunto vacío una de las cantidades que se da a continuación: (8 + 5 = 13). Observemos que suma a partir del número mayor, lo cual va de acuerdo con su condición de experto.

b) <u>Errores de Ejecución Heurísticos</u>

Como se ha mencionado, en primer grado se emplearon en su totalidad estrategias heurísticas, es decir, aquellos procedimientos que el niño inventa. En tales ejecuciones se originaron algunos errores. Veamos el caso del novato (**c**).

Sesión individual
Cambio 4
(9 - ? = 3)

"La señora Tere tenía 9 chiles verdes. Ella ocupó algunos para preparar una salsa. Al guardarlos sólo había 3. ¿Cuántos chiles ocupó la señora Tere?"

R:	(pensativa... levanta sus dos manos y muestra 9 dedos, de ellos baja 3 ...y otro más, quedándole 5 en una sola mano) ... 5

Como puede observarse, en esta respuesta utiliza la estrategia *separar de* (SEP-D), en donde el resultado son los dedos que quedan, sólo que al intentar bajar 3 dobla uno de más, por eso dice
"5".

Entrevistadora:	(repite el problema)
R:	6
Entrevistadora:	¿cómo sabes que son 6?
R:	(levanta 9 dedos y dobla 6) porque se gastó 6 y le quedan 3

En su segundo intento cambia de estrategia y utiliza *separar a* (SEP-A), en donde los dedos que dobla es la respuesta, por ello contesta "6".

TERCER GRADO

Al igual que en primer grado, de un total de 90 problemas resueltos por ambas formas de trabajo el 56% se realizó incorrectamente. Estos errores se distribuyen como sigue: 45% corresponden a la inadecuada representación (comprensión) que se hace del problema; 35% a los errores de ejecución y 20% a una categoría que hemos denominado "error conceptual". Éste último se refiere a que el sujeto desconoce un concepto matemático implícito en el problema y debido al cual no puede resolverlo correctamente (medios litros, una tercera parte, mitad de).

a) Errores de Representación

En tercer año los errores en la representación de un problema se presentaron cuando el sujeto **repitió una de las cantidades** del problema (52%). Al igual que en primer grado, este error se encontró principalmente en los problemas de comparación, debido principalmente a que no tienen un esquema para la proposición relacional "más que" y "menos que". Otra falla surgió al emplear una **operación inadecuada** (48%) y apareció, sobre todo, en los problemas de cambio 1, esto porque no se toma en cuenta la secuencia temporal que el texto le proporciona, y en comparación 3, porque para determinar el otro sumando se requiere comprender una proposición comparativa difícil. Finalmente, **inventar la respuesta** no es un recurso empleado en los sujetos entrevistados. Como se recordará este aspecto fue ejemplificado ampliamente al revisar las resoluciones de primer año, por ello en este apartado consideramos más interesante revisar lo que ocurrió con los errores de ejecución y los errores conceptuales.

b) Errores de ejecución

Tanto en el trabajo individual como en la forma cooperativa los sujetos emplearon en mayor medida los algoritmos como estrategias de resolución y, disminuyeron el uso de heurísticos. Así, gran parte de los errores de ejecución se ubicó en dificultades al realizar el algoritmo y éstas corresponden sobre todo a los novatos. Veamos algunas resoluciones.

Sujeto (**b**)

Cambio 2	Cambio 3	Comparación 4
$\begin{array}{r} 725 \\ -\,518 \\ \hline 227 \end{array}$	$\begin{array}{r} 350 \\ -\,122 \\ \hline 238 \end{array}$	$\begin{array}{r} 613 \\ -\,478 \\ \hline 235 \end{array}$

De los tres algoritmos que se observan se desprenden dos tipos de errores. En cambio 2, después de decir "8 para 15 ......son 7 y llevamos 1", el sujeto anota el 7 en las unidades y el 1 que llevaba se lo agrega al 2 del minuendo y entonces resta 3 menos 1 y anota 2. A continuación resta 7 menos 5. Así obtiene 227. Después se da cuenta que el 1 que sumó debió ser al 1 del sustraendo. En los dos siguientes algoritmos, este sujeto olvida, primero en las decenas y luego en las centenas, sumar en el sustraendo el 1 que llevaba. A primera vista, parece que el sujeto no ha automatizado "sumar el número que lleva". Aunque, probablemente, también puede deberse a una falta de comprensión del valor posicional de cada número, dado que no ve la diferencia de sumar el número que lleva arriba o abajo (minuendo o sustraendo).

Sujeto (c)

Cambio 2

$$\begin{array}{r} -\ 7\,2\,5 \\ 5\,1\,8 \\ \hline 2\,1\,3 \end{array}$$

Cambio 4

$$\begin{array}{r} -\ 3\,0\,0 \\ 8\,5 \\ \hline 1\,2\,5 \end{array}$$

En cambio 2, este sujeto corrige y dice: "está mal...porque no se le puede quitar a 5 ...8". Al preguntarle ¿qué haría entonces?, contesta "pedir prestado 1". Así, el 5 se vuelve 15 y cuenta a partir del 8 hasta 15. En el algoritmo que sigue, cambio 4, se evidencia que este sujeto no comprende qué es lo que sucede cuando "pide prestado 1". En este caso, resta 10 menos 5 y 10 menos 8 pero los dos números que ha pedido prestados los descuenta al 3, porque "el 0 no tiene nada". Obsérvese cómo, a diferencia del sujeto anterior, en este caso pide prestado y descuenta en el minuendo, aunque también hay deficiencias en la comprensión del valor posicional.

Sujeto (**d**)

Cambio 4

$$\begin{array}{r} -\ 3\,0\,0 \\ 8\,5 \\ \hline 3\,0\,0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\ 3\,0\,0 \\ 8\,5 \\ \hline 3\,8\,5 \end{array}$$

Comparación 4

$$\begin{array}{r} -\ 6\,1\,3 \\ 4\,7\,8 \\ \hline 2\,2\,5 \end{array}$$

Igualación 2

$$\begin{array}{r} -\ 4\,5 \\ 8 \\ \hline 3\,7 \end{array}$$

Este sujeto se caracterizó por emplear múltiples algoritmos de suma, con los cuales fue tanteando qué número agregado al sumando que se le proporcionó podía dar el total brindado. Es decir, tales problemas pedían una inversión del planteamiento y que el sujeto planteara una resta como estrategia de solución, esto le fue imposible.

Por el contrario, cuando el problema planteó de manera natural una resta este sujeto resuelve como se muestra arriba. En cambio 4 y comparación 4 no pudo ofrecer una explicación, aunque en este último es capaz de corregir. También se observó que cuando las cifras llegan hasta las decenas, y obviamente sin la dificultad que implican los ceros, el sujeto no tiene ninguna dificultad, tal es el caso del problema de igualación 2.

Sujeto (e)

Cambio 3	Cambio 4	Comparación 4
$\begin{array}{r} 122 \\ -\ 350 \\ \hline 372 \end{array}$	$\begin{array}{r} 85 \\ -\ 20 \\ \hline 65 \end{array}$	$\begin{array}{r} 613 \\ -\ 478 \\ \hline 135 \end{array}$

Este sujeto únicamente resuelve correctamente 3 de los 15 problemas propuestos. Esto se debe a que no hace una representación adecuada y, principalmente, da como respuesta una de las cantidades del problema y, en menor medida, propone una operación inadecuada. Algunos ejemplos de esto se presentan en cambio 3 y 4. Este último aunque es resuelto correctamente, no resuelve el planteamiento del problema.

Comparación 4 es muy interesante, porque a pesar de que el resultado es correcto cuenta a partir de 3 y dice "4, 5, 6, 7, 8 ... son 5". Ello significaría que el sujeto comprende que siempre que haya una diferencia de 5 entre minuendo y sustraendo podrá proceder de esta manera. Sin embargo, nuestros resultados no pueden afirmar tal supuesto.

Equipo

Cambio 2		Comparación 4
$\begin{array}{r} 725 \\ -\ 518 \\ \hline 106 \end{array}$	$\begin{array}{r} 725 \\ -\ 518 \\ \hline 107 \end{array}$	$\begin{array}{r} 613 \\ -\ 478 \\ \hline 145 \end{array}$

En estos dos algoritmos, el principal error del trabajo cooperativo se debe al olvido del número "prestado". En la primer operación, además, inician diciendo "8 para 15...6", continúan bien en las decenas y al restar las centenas, creen que han pedido uno prestado. Posteriormente, logran corregirlo sin necesidad de ayuda, debido a que el experto del equipo tiene la costumbre de comprobar el resultado.

c) Error conceptual

Como se mencionó, cuando un sujeto no pudo resolver correctamente un problema debido a que no comprendía el concepto matemático implícito en él, lo hemos denominado error conceptual. Tales conceptos son: medios, mitad de y una tercera parte. Veamos cómo se desarrollaron dos de ellos:

Sesión grupal:
Combinación 1
(8 + 4) 2 = ?

"Antonio tiene un puesto de aguas frescas. El día de hoy preparó 8 litros de agua de jamaica y 4 litros de agua de piña. ¿Cuántos medios litros venderá en total?"

T:	preparó 12 litros y nos piden medios litros... entonces la mitad de 12 es 6
Entrevistadora:	¿por qué la mitad Tomas?
T:	porque dice medios y medios es igual que la mitad

(Más adelante el este sujeto insiste y dice "la mitad de 12 es 6, la mitad de 6 es 3, la mitad de 3... quién sabe")

En diversas resoluciones a este problema, pudimos percatarnos que los sujetos pueden identificar cuántos medios litros hay en 1 litro. Sin embargo, no pueden generalizar este conocimiento a una situación como la descrita. En otros casos, se confunden y piensan que debe hacerse una resta, quizá porque así lo sugiere el verbo "vender". Por ello, a pesar de que el problema, aparentemente, era fácil se complica al integrar el concepto medios litros. Únicamente el trabajo individual experto (**a**) pudo representar adecuadamente esta situación y dio como resultado 24 medios litros. Veamos:

I:	24 medios litros de agua
Entrevistadora:	¿cómo le hiciste?
...	
I:	por ejemplo ... está así (junta sus palmas y las muestra)... y en cada parte hay... aquí hay por ejemplo 12 cachos de jamón, y si lo parto a la mitad... ahora en cada lado hay 12 cachos (separa sus palmas)...aquí hay 12 (muestra una mano)... aquí hay 12 (muestra la otra)... serían mitades. Las sumé y me dio 24.

Al escuchar este diálogo, nos preguntamos qué pasaría si en su clase de matemáticas a éste niño se le permitiera explicar a sus compañeros su procedimiento.

Otro error conceptual se presentó en el problema de comparación 1: *"José tiene 3 cajas con 42 canicas cada una. Luis tiene la mitad de las que tiene José. ¿Cuántas canicas tiene Luis"* (42 x 3) /2 = ? Algunos sujetos adjudicaron, de manera correcta, 126 canicas a José; sin embargo se observaron distintos niveles de comprensión al tratar de calcular la mitad de esta cantidad. Veamos tres casos: (sujeto **b**) "mitad de 6...3 y mitad de 2... 1, son 13"; "(equipo) "mitad de 100...50 y le sumamos a 50 otros 20, serían 70 y la mitad de 6 son 3, por eso pienso que son 73"; y (experto **a**) "primero busqué la mitad de 100 y me dio 50... después más 10 son 60... más 3 ... y me dio 63".

SEXTO GRADO

A diferencia de los dos grados anteriores, de las 90 resoluciones el 74% se hacen correctamente. También se encontraron diferencias en los errores cometidos ubicándose básicamente en la **ejecución** (44%); en los **errores conceptuales** (30%), que se derivan del desconocimiento de algún concepto matemático, y en la **representación** (26%). Cabe señalar que los errores de ejecución se cometen principalmente al realizar el algoritmo con lápiz y papel.

A continuación se presentan algunos problemas en los cuales surgieron algunos de los errores que consideramos más representativos en este grado.

En cambio 2 existieron tanto dificultades para aplicar el concepto matemático implícito (%), como al resolver el algoritmo, veamos:

Cambio 2
80 – (80 x 15/100) = ?

"Adolfo pesaba 80 kilos. Con una dieta bajó 15% de su peso. ¿Cuánto pesa ahora?

Después de haber calculado el % que pide la operación, los sujetos (**b** y **d**) dan como respuesta "Adolfo pesa ahora 12 kilos". Aún cuando uno de los sujetos reflexiona y dice "no puede haber bajado tanto" no identifica el origen de su error. En ambos casos, después de haber empleado todos los datos del problema para calcular el %, han perdido de vista el contexto en el que se pide calcular este concepto matemático. Tal pareciera que los sujetos están acostumbrados a realizar cálculos de este tipo, sin ninguna aplicación real.

En este mismo problema, el sujeto (**c**) calcula el 15% y obtiene 12 kilos. Después realiza un algoritmo de resta (80 – 12 = 78) y dice "bajó 2 kilos" o sea la diferencia entre 80 y 78. Al cuestionarle qué son los 12, responde "es lo que salió del 15%... y lo resté a los 80 para ver cuánto bajó". Como podemos observar, el sujeto pierde de vista en qué momento obtuvo los kilos que bajó. Si hubiera dicho que ahora Adolfo pesa 78 kilos, su error hubiera sido de ejecución algorítmica, sin embargo insiste en que bajó 2 kilos y que los 12 es lo que salió de calcular 15%. Por tanto, pensamos que en este caso no aplicó adecuadamente su conocimiento sobre el %.

Las fracciones es otro concepto matemático que no ha quedado claro para algunos sujetos. Por ello, aún cuando en este caso la incógnita se ubica en el primer sumando, la primordial limitante es el desconocimiento del significado de 3/5. Los siguientes ejemplos son prueba de ello.

Veamos primero el caso del sujeto **d**.

Combinación 3
(? + 3/5 = 100)

"Israel y Jacob tienen una bolsa con 100 globos. Jacob infló algunos. Israel infló 3/5 partes. ¿Cuántos globos infló Jacob?

Entrevistadora:	¿le entiendes al problema?
AL:	no
Entrevistadora:	¿qué no entiendes?
AL:	las 3/5 partes
Entrevistadora:	¿de qué manera puedes obtener las 3/5 partes de algo?
(se repite el problema)	
AL:	$\frac{3}{5} \times 5 = \frac{15}{25}$
Entrevistadora:	¿qué sacaste ahí?
AL:	una fracción equivalente
....	
Entrevistadora:	Ana Laura, ¿sabes qué significa el 3 de esa fracción y qué es el 5?
AL:	no me acuerdo

Algo peor le ocurre al sujeto **e**.

R:	(lee el problema dos veces) ¡ya! serían 85...este Israel infló 85
Entrevistadora:	¿por qué serían 85?
R:	porque el 5...2,3 veces serían 15...entonces a 15 le reste 100...serían 85. Jacob infló 85
Entrevistadora:	¿y cuántos infló Israel?
R:	3/5 partes
Entrevistadora:	¿cuánto es 3/5 partes?
R:	15

Finalmente, el siguiente problema no pudo ser resuelto por dos novatos. Uno de ellos (**d**) no recordó el valor de los conceptos km. y hm.; sin embargo, al recordarle su significado se equivocó al realizar una resta mental. El otro sujeto (**c**), en su primer respuesta, tiene dificultades para representar el problema, por ello repite una de las cantidades.

Igualación 3
(? + 3 hm = 3 km.)

"En una carrera Lety ha corrido 3 km. Su amiga Alicia necesita correr 3 hm. más para alcanzarla. ¿cuántos metros ha corrido Alicia?

C:	300 ha recorrido Alicia
Entrevistadora:	porque Alicia necesita correr...

TRABAJO COOPERATIVO

Según nuestros resultados el equipo de primer grado tuvo dificultades únicamente en dos problemas de comparación. Lo anterior debido a que no representa adecuadamente la relación "más que". No obstante sólo esta forma de trabajo pudo resolver correctamente los problemas de combinación 1 y 3, difíciles para las cinco formas de trabajo individual.

En tercer grado algunas de las dificultades fueron de carácter conceptual y se ubicaron en los problemas de combinación (convertir litros a medios litros y calcular la tercera parte de un número). En otras categorías sus deficiencias se deben al olvido del número "prestado".

Finalmente, el trabajo cooperativo logró sus mejores resultados en sexto grado, puesto que únicamente se le dificultó el problema de comparación 3, que dice: *"Micaela pesa 60 kilos, ella pesa 8 kilos más que Juana. ¿Cuánto pesa Juana?* En diversas ocasiones dudan entre sumar o restar las cantidades del problema. Tal parece que la primera parte del problema indica que hay que sumar, sin embargo al tratar de comprender la pregunta tardan en encontrar la relación entre las dos personas.

Por otra parte y al igual que ocurre con el trabajo individual, al comparar las estrategias empleadas por los tres equipos se observaron grandes diferencias. Así, el equipo de primer grado únicamente desarrolló estrategias heurísticas pertenecientes a los tres niveles conocidos. En tercer grado el equipo empleó básicamente los algoritmos de suma y resta como estrategia de solución e igualmente comete gran cantidad de errores al ejecutarlos. Por último, en sexto año es evidente que las estrategias empleadas para resolver un problema se han homogeneizado. Es decir, en algunos problemas las cinco formas de trabajo individual como el equipo emplearon el mismo algoritmo.

Una de las grandes fortalezas que se experimenta al interior de un equipo de trabajo es la ayuda que se presta entre iguales. A lo largo de nuestra investigación pudimos observar distintos momentos que denotan esta características. En cada uno de los equipos y de acuerdo a sus específicas habilidades, expertos y novatos trataron de llegar a acuerdos que les permitiera resolver la problemática planteada.

Así, en el problema "En la frutería..." propuesto en primer grado, se observó como el trabajo individual experto (**a**) únicamente pudo proponer la suma de las cantidades que se le brindaban (8 + 5 =13). Por el contrario, el esfuerzo realizado por el equipo les permitió avanzar poco a poco a una mayor comprensión. En un primer momento dan como respuesta una de las cantidades del problema, al cuestionarles tal resultado son capaces de reflexionar sobre lo que sus compañeros opinan. Tal cooperación permite al experto del equipo evolucionar respecto a su respuesta inicial e incluso le permite aclarar a uno de los novatos en dónde está su error. Como es de suponerse este intercambio de opiniones es la clave que permite obtener un mejor resultado, situación que obviamente no se da con el experto individual (**a**) (ver Categorías Semánticas, primer grado).

Por otra parte, se ha mencionado que el equipo de tercer grado fue el menos eficiente en relación a las otras dos formas de trabajo cooperativo. No obstante, debe valorarse tal resultado. Recuérdese que las características sociales del experto coadyuvaron al buen desarrollo de las distintas tareas. Además, se mostró atento al trabajo de sus compañeros lo cual le permitió guiar, corregir y explicar lo que no se entendía. Lo anterior nos permite decir que este sujeto guió a sus compañeros hacia un nivel de desarrollo más avanzado. Veamos un ejemplo:

Igualación 2
(45 - 8 = ?)

"Andrés pesa 45 kilos, él necesita bajar 8 kilos para pesar lo mismo que Benito.¿Cuánto pesa Benito?"

...

M:	43
Entrevistadora:	¿tú piensas que es 43?
(el experto interrumpe y dice...)	
T:	tiene que bajar 8 kilos ... no 2
T:	(lee el problema)
Entrevistador:	¿por qué no es 42 Tomás?
T:	porque dice... Andrés pasa 45 kilos.... (lee el problema). A ella le salió 42, en vez de bajar 8 sólo bajó 2
....	
T:	Andrés pasa 45 kilos, tiene que bajar 8 kilos para pesar los mismo que Benito. Lo que tu hiciste, en vez de quitarle 8 kilos, le quitaste 2 kilos ... Y mira, si restas 45 menos 8 te va a salir 37, que es lo que pesa Benito.

Asimismo, esta forma de trabajo es la única que resuelve correctamente el problema de cambio 4 "En la sala de un cine..." (ver Categorías Semánticas Primer Grado). Y junto con el trabajo individual experto (**a**), es el único en resolver los problemas de cambio 3 y comparación 2 y 3. Por último, el experto de este equipo apoya constantemente en la corrección de los errores de ejecución generados por sus compañeros.

Finalmente, en sexto año se percibió mayor experiencia en torno a este tipo de tareas, aunque acompañada de cierta prisa por concluir, lo cual no siempre beneficiaba a los novatos. Aquí también el experto apoyaba a sus iguales en la resolución de los procedimientos y era quien, generalmente, corregía los errores de ejecución algorítmicos. No obstante, a diferencia de tercero grado, el equipo de sexto se caracterizó por la activa participación de sus integrantes motivo por el cual obtuvo excelentes resultados.

Capítulo IV

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Uno de los objetivos de esta investigación consistió en identificar qué tipo de estructura semántica resultaba más difícil de resolver en cada uno de los grados propuestos, así como la influencia que ejercía el trabajo cooperativo en tales resoluciones.

En este sentido, al momento de llevar a cabo la construcción de los problemas, nos propusimos no sólo que se apegaran a una determinada estructura semántica (cambio, combinación, comparación e igualación) sino que, además, recogieran algunos de los contenidos que marca el Programa Oficial de Educación Primaria (SEP, 1993). Por ello, no obstante que el sujeto comprendió la estructura semántica, en algunos casos no lo resolvió correctamente debido a la incomprensión de algún concepto matemático o a dificultades en la ejecución del procedimiento elegido. Por ello, fue necesario abrir tres posibles causas de error: representación, ejecución y conceptual. De esta forma se hizo posible identificar con claridad qué problemas resultaron más difíciles de resolver y el tipo de error cometido.

Así, en primer grado las estructuras de combinación y comparación resultaron casi igualmente difíciles para el trabajo individual. En combinación 3 *"La mamá de Iván llevó a la fiesta algunos tacos de pollo..."*, tal como mencionan diversos autores (Bermejo, 1990; Maza, 1989), la indefinición del primer sumando (? + b = c) fue la causa de tal dificultad.

Por otra parte, si bien es cierto que el problema de combinación 1 contenía más información de la recomendada, se esperaba que el trabajo individual creara algún dibujo o representación gráfica para resolverlo. Esto no fue así a pesar de que en este grado la totalidad de las estrategias fueron producto de su invención (heurísticos). Esta situación nos permite suponer, al igual que Baroody (1988), que a esta edad los sujetos empiezan a **creer** que en matemáticas únicamente deben emplearse símbolos numéricos y un solo procedimiento para obtener el resultado correcto. Quizá por ello, en un principio, muchos de los entrevistados escondían sus dedos para contar.

Es interesante observar que los conceptos relacionales "más que" y "menos que" imprimieron gran dificultad a los problemas de comparación tanto en primero como en tercer grado; excepto al trabajo individual experto. Esto quiere decir, como señala Bermejo (1990), que los sujetos no tienen aún un esquema mental para tales relaciones, lo que les lleva a repetir una cantidad, seleccionar una operación inadecuada o inventar alguna respuesta. Asimismo, a la mayoría de los entrevistados de tercer grado se le dificultó obtener la "mitad de" un número de tres cifras. No obstante, el trabajo individual experto (**a**) pudo resolverlo a través de una *regla de descomposición* (R-des), lo cual implica tener claro el valor posicional de cada número. Es decir, este sujeto está relacionando sus conocimientos informales con los nuevos conceptos que se le proponen.

Por otra parte, en sexto año aumentaron los aciertos en la resolución de problemas y, así mismo, disminuyeron los errores de representación en cada una de las categorías semánticas. Lo cual significa que a esta edad los sujetos no sólo aumentaron sus habilidades sociales sino que entre sus habilidades cognitivas se han incorporado los esquemas "más que" y "menos que". Quizá por ello los problemas de comparación dejaron de ser una dificultad a esta edad. No obstante pudieron identificarse ciertas dificultades en los problemas de combinación, debido principalmente a errores conceptuales y de ejecución.

En nuestra investigación la categoría de igualación resultó ser la más fácil de resolver tanto en primero como en tercer grado y para ambas formas de trabajo. Lo anterior se debe, seguramente, a que las combinaciones numéricas propuestas eran de fácil manejo. Asimismo, en primero y tercero los problemas implicaban realizar una sola operación y, como se ha mencionado, las resuelven recurriendo a estrategias o acciones de quitar y poner. No obstante, en sexto grado hubo algunas dificultades conceptuales debido a que igualación 2 y 3 pedía calcular el porcentaje de un número y hacer conversiones antes de obtener el resultado. Tales hallazgos no coinciden con lo señalado por Bermejo (1990); para este autor los problemas de cambio son los más fáciles de resolver para alumnos de preescolar y 1° de EGB.

Por otra parte, nuestros resultados muestran que en primero y sexto grado el trabajo cooperativo resolvió exitosamente la mayor parte de los problemas. En cuanto al equipo de tercer grado, a pesar de la poca integración de sus miembros obtuvieron más de la mitad de aciertos y fue la única forma de trabajo en resolver correctamente el problema de cambio 4 "En la sala de un cine...". Asimismo, los problemas de cambio 3 y comparación 2 y 3 únicamente son resueltos por el equipo y el trabajo individual experto (**a**). Por lo anterior, podemos afirmar que las dificultades enfrentadas al resolver las tareas individualmente fueron remontadas al trabajar en equipo, excepto en los casos del trabajo individual experto de tercero y sexto (**a**). Este hecho corrobora las ideas de Ovejero (1990) en el sentido de que el trabajo cooperativo es superior al individual en tareas que implican variables cognitivas y de rendimiento académico.

Cabe señalar que las dificultades del equipo de tercer grado, se ubicaron principalmente en la ejecución de sus procedimientos y en el desconocimiento de los conceptos "medios litros" y "tercera parte".

Otro de los intereses que motivaron nuestra investigación consistió en detectar cómo evolucionan los procedimientos empleados al resolver los problemas matemáticos y de qué manera influye la forma de trabajo. Esta inquietud surge como consecuencia de las afirmaciones de algunos autores en el sentido de que los niños poseen una gran cantidad de conocimientos antes de iniciar la educación formal y que tales aprendizajes suelen no tomarse en cuenta en el aula, impidiendo con ello que sus habilidades informales puedan servir de ancla al intentar adquirir nuevos aprendizajes (Baroody, 1988; Kaplan, Yamamoto y Ginsburg, 1989; Vergnaud, 1995).

Nuestra investigación efectivamente comprueba que al iniciar la educación primaria los sujetos utilizan gran cantidad de estrategias informales, clasificadas según su nivel de abstracción en modelado directo, conteo y hechos conocidos (Puente y Poggioli,1989; Castro, et al. 1995).

Así, en primer grado las estrategias más empleadas fueron los *hechos conocidos, que* corresponden al tercer nivel; *separar de* (SEP-D), *separar a* (SEP-A) y, con menor frecuencia, *contar a partir de* (CAD), pertenecientes al segundo nivel. Debe recordarse que los *hechos* conocidos fueron un recurso constante tanto del trabajo cooperativo como del trabajo individual experto, lo cual es obvio si consideramos las características de ambas formas de trabajo.

Los procedimientos anteriores disminuyeron considerablemente al iniciar el tercer grado. A esta edad los sujetos manifestaron mayor uso de los algoritmos de suma (A-S) y resta (A-R) en decremento de los heurísticos. Es interesante subrayar, sin embargo, que al ejecutarlos surgieron gran cantidad de errores relacionados, sobre todo, con el olvido del "número prestado" (resta). Ello se observó, sobre todo, al trabajar con los novatos quienes no han comprendido aún la lógica de tales algoritmos y, en algunos casos, esto no será posible en tanto no queden claros conceptos tales como el valor posicional, la secuencia numérica, antecesor y sucesor de un número, entre otros. Lo anterior obliga a reflexionar y recordar, tal como señalan Baroody (1988) y Kaplan, et al. (1989), que el énfasis prematuro en la rapidez y el aprendizaje de hechos y conceptos no es la mejor manera de ayudar a la mayoría de los sujetos.

En este punto, nos parece importantísimo preguntar en qué momento y, sobre todo, de qué manera los sujetos experimentaron el abandono de los procedimientos creados de manera intuitiva para hacer uso de los algoritmos que enseña la escuela. Ello podría significar un alto en el camino para proponer diversas actividades que permitan al niño conectar lo que él maneja muy bien con el nuevo conocimiento que se le propone y con ello tratar de evitar aprendizajes poco significativos.

Por otra parte, en sexto año los sujetos utilizaron los cuatro algoritmos básicos que conocen, destacándose los de suma y resta. Asimismo, los *hechos conocidos* (HC) continúan como una importante estrategia de solución, aunque su uso implicó mayor complejidad, abstracción y dominio de ciertos conceptos matemáticos.

Finalmente, el tipo de estrategias empleadas por las tres formas de trabajo cooperativo no se diferencia de las expuestas por los sujetos individuales. Es decir, en primer año el equipo también empleó únicamente estrategias heurísticas, aunque debido al número y habilidad de sus integrantes pertenecían a los tres niveles mencionados. Igual situación se presentó en tercero y sexto grado, ahora haciendo uso de los diversos algoritmos. Aunque cabe resaltar que en sexto año el algoritmo empleado para resolver cierto problema, era el mismo independientemente de la modalidad de trabajo; es decir, los caminos en la resolución se uniformaron.

Por otra parte, mucho se ha discutido en torno del error como fuente de conocimiento y de los grandes avances científicos generados a partir de ellos. En la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es una tarea de primer orden acercarse a los procesos cognitivos que el sujeto realiza al adquirir tales conceptos. Así, los procedimientos de resolución que el sujeto implementa en un problema matemático y los posibles errores que en el puedan surgir abre la posibilidad de comprender y proponer alternativas para apoyarle en sus dificultades (Kaplan, et al, 1989; Rico, 1994; Vergnaud, 1995).

En este sentido, nuestros resultados identificaron con claridad el tipo de error en que el sujeto incurre al resolver los problemas propuestos. En primer grado los errores surgen básicamente al representar inadecuadamente el problema, por ello repite una cantidad, emplea una operación inadecuada o inventa. Tal hallazgo confirma la necesidad de fomentar a temprana edad la discusión en torno a las relaciones existentes entre los datos del problema, sin llegar a proponer la solución. Sólo entonces, como plantea De la O, et al (1996), podrá pedirse que lo resuelvan.

En tercer grado persisten las dificultades para representar adecuadamente los problemas y surgen también gran cantidad de errores de ejecución algorítmicos y, en menor medida, los conceptuales. Los errores algorítmicos identificados corresponden, sobre todo, al trabajo de los novatos y, en algunos casos, reflejan un aprendizaje memorístico y carente de todo significado producto de la enseñanza apresurada de hechos y conceptos. Como se ha señalado, esto puede significar la poca conexión entre los conocimientos formales e informales de los sujetos (Baroody, 1988; Kamii, 1993 y Resnick y Ford, 1990).

Por otra parte, en tercero como en sexto grado se identificaron una serie de errores debidos a la incomprensión de ciertos conceptos matemáticos. En tercero las dificultades se manifestaron al querer aplicar los conceptos "medios litros, mitad de y 1/3". En sexto año persiste la dificultad con el concepto de fracción (3/5) y se agrega el concepto de "tanto por ciento" (15%). En este último se observó que aunque podían realizar correctamente el procedimiento, algunos de los sujetos olvidaban en qué contexto estaba inmerso el cálculo y, por tanto, ofrecían alguna respuesta ilógica. Esto muestra que los sujetos realizaron mecánicamente tales cálculos, quizá porque no están acostumbrados a conectarlos con una problemática particular. Por lo tanto, sería conveniente considerar la propuesta de algunos autores en el sentido de enseñar los conceptos matemáticos en el planteamiento de situaciones reales surgidas, quizá, del propio salón de clase (Carraher, et al.,1991; Kamii, 1993).

Por lo que respecta al desempeño mostrado por las tres equipos de trabajo cooperativo pudieron observarse algunas diferencias. En primer grado fue necesario que la entrevistadora guiara de manera continua la participación de cada uno de los integrantes, ya que no eran capaces de dar espontáneamente una solución conjunta, mostrando, por el contrario, una predisposición al juego y la distracción. Aunado a ello, había cierta resistencia por parte de uno de los novatos para escuchar y aceptar la información o respuesta que le brindaba el experto del equipo. Lo anterior probablemente se debió a la poca experiencia en tal forma de trabajo y a cierto egocentrismo aún característico de esta edad. No obstante lo anterior, poco a poco entraron en una dinámica de diálogo, confrontación y aceptación. Esto último se observó cuando algún sujeto tenían que reconocer la validez de otro procedimiento. El trabajo cooperativo obtuvo un mayor número de aciertos (86%) en comparación con el trabajo individual experto (73%).

Por su parte, el equipo de tercer grado tuvo un desempeño inferior en relación al obtenido por los equipos de primero y sexto. La causa de esto, no sólo radicó en su escasa experiencia, sino a la poca participación de dos novatos. Además, las estrategias de los cuatro integrantes casi se restringían al uso de algoritmos, que por lo demás adolecían de ciertas deficiencias. A pesar de todo ello, el experto del equipo se caracterizó por promover la participación entre sus compañeros y de manera espontánea explicar y corregir. Cabe mencionar que quien se desempeñó en el trabajo individual experto (a) de tercer grado originalmente se integró en el trabajo del equipo, sin embargo debido a su escasa participación se cambió a la forma individual, en donde se desempeño mucho mejor (73%).

Finalmente, en sexto grado los sujetos mostraron mayor organización hacia el trabajo grupal. Esto pudo observarse ya que en la mayoría de los casos ellos mismos supervisaban el procedimiento que realizaba su compañero e intercambiaban puntos de vista. No obstante también identificamos cierta prisa por concluir la tarea, lo cual generó, en algunas ocasiones, que el novato del equipo se rezagara. Quizá este ritmo de trabajo sea un reflejo de lo que pudo observarse cuando los visitamos en clase. Por ello, es necesario insistir en que cuando se trabaje en equipo se de un tiempo razonable para socializar los procedimientos y, sobre todo, promover la ayuda necesaria a los menos expertos (Carrillo, 1995).

En base a nuestros resultados podemos afirmar que la confrontación y discusión que surge al tratar de resolver un problema matemático en un ambiente de trabajo cooperativo llevó a los sujetos, en muchas ocasiones, a clarificar sus dudas y expandir su propio razonamiento.

El desempeño anterior muestra que al conjuntar las habilidades sociales y cognitivas de los sujetos pueden obtenerse resultados de mejor calidad al enfrentar tareas matemáticas. Lo anterior se refleja no sólo en una mayor comprensión del problema resuelto sino en una fructífera socialización de los procedimientos desarrollados. Por ello, resulta inevitable hacer votos porque esta forma de trabajo se convierta en una herramienta constante dentro del salón de clase. No hay que olvidar, sin embargo, que el papel organizador del docente es una pieza central en el adecuado desarrollo de esta alternativa de trabajo. Asimismo, consideramos pertinente promover valores tales como el respeto por las ideas de los demás y una mayor tolerancia por los ritmos de aprendizaje de cada persona.

Sugerencias

En base a los resultados obtenidos a continuación realizamos algunas sugerencias dirigidas tanto a profesores de educación básica como a futuros investigadores.

Como se recordará la validación por jueces de nuestro instrumento mostró que los problemas construidos eran adecuados al grado escolar propuesto. Sin embargo, al intentar clasificar los problemas en cada estructura semántica los docentes tuvieron grandes dificultades. Por ello se recomienda brindarles mayor información al respecto. Lo anterior les permitirá enriquecer las situaciones problemáticas que hagan a sus alumnos, así como vislumbrar las distintas posibilidades de cada estructura.

Nuestros resultados señala que los problemas más difíciles de resolver tanto en primero como n tercer grado son las estructuras que implican relaciones estáticas, es decir problemas de combinación y comparación. Por ello sería apropiado promover, desde el inicio de la educación formal, problemas sencillos que impliquen situaciones en donde los sujetos puedan identificar el conjunto total de las partes que lo integran (relación parte todo) y relaciones comparativas como "más que" y "menos que" con el propósito de ir creando en el alumno estos esquemas mentales.

El trabajo con los sujetos nos permitió percatarnos de la necesidad de contar con diversas formas de organizar el trabajo cooperativo. Lo anterior teniendo como referente tanto las características individuales como el nivel de habilidad mostrado. Es decir en algunas ocasiones sería más provechoso disponer a los alumnos en díadas, por ejemplo cuando un novato requiere de una mayor ayuda. A veces sería mejor formar un equipo sólo de novatos, sobre todo cuando se observa que el experto es el único en resolver los problemas. De igual forma, dos expertos, uno más hábil que otro, y un novato sería una fórmula adecuada para permitir a este último avanzar a un ritmo más pausado.

Permitir el uso de cualquier tipo de estrategia de resolución y aceptar resultados aproximados puede ser una forma de superar creencias perfeccionistas y flexibilizar el pensamiento de los sujetos. Asimismo, ya sea como fruto del trabajo individual o en equipo se debería permitir a los alumnos exponer los procedimiento o estrategia que les llevaron al resultado. Esto con el fin de socializar las diversas formas de resolución que un mismo problema puede tener.

Ratificamos la idea de que para captar la estructura profunda de los conceptos debe introducirse el símbolo como etapa final de la secuencia de aprendizaje, relacionar dichos conceptos con el conocimiento que ya se posee y explicarlo ampliamente antes de convertirlo en símbolo.

Retomar los errores cometidos por los sujetos puede ser una importante fuente de conocimiento, ya que permitiría centrar la atención en las específicas dificultades que presentan. Nuestro trabajo con los novatos mostró su incomprensión respecto a una serie de conceptos que evidentemente están impidiendo que conecten sus habilidades con lo que se le enseña y, más aún, la imposibilidad de acceder a nuevas y más eficaces estrategias de resolución. De ahí la importante necesidad de trabajar conceptos tales como la secuencia numérica, el valor posicional y antecesor y sucesor de un número, entre otros.

Para el logro del propósito anterior, sería conveniente reorientar la actitud docente a la hora de evaluar el desempeño escolar, ya que únicamente descalificar el trabajo del niño sin mostrarle cuál era el camino adecuado desmotiva cualquier iniciativa.

En este orden de ideas, continuar las investigaciones en torno a los errores que cometen los sujetos al desarrollar las estrategias que enseña la escuela es una prioridad educativa, pues tal parece que no se ha creado un puente significativo entre los heurísticos creados de manera intuitiva y los nuevos procedimientos (algoritmos).

Asimismo, es evidente que los resultados a que se llega en torno a la dificultad de las estructuras semánticas, no pueden ser concluyentes. Por tal motivo se insta a no perder el interés en este tópico y así poder obtener mayor información al respecto. En este sentido, quizá convendría no perder de vista el grado de dificultad que se propone en cada categoría y grado escolar, pues ello daría mayor validez a las comparaciones que se hagan (cantidad y tipo de las operaciones, tamaño de los sumandos, lugar en que se ubica la incógnita , concepto matemático implicado)

De igual manera sería interesante que estudios posteriores ratificaran la tendencia mostrada en relación a las estrategias que los sujetos de primero, tercero y sexto grado manifestaron al resolver los problemas. En cuanto al primer grado no parecen existir dudas respecto al dominio que se tiene de las estrategias heurísticas. Sin embargo, en los dos grados restantes, nos parece que la mayor recurrencia al algoritmo de resta se debe a dos posibles causas: a errores en la construcción de los problemas o a una inclinación de estos sujetos hacia el uso de tal algoritmo. Obsérvese que en primer grado, los porcentajes más altos, después de los hechos conocidos y la no descripción de estrategias, son los heurísticos denominados *separar de* y *separar a*, que no son sino procedimientos intuitivos que implican una resta.

Limitantes de la investigación

Al final de nuestra investigación es conveniente señalar algunos de los posibles elementos que hubieran enriquecido nuestro estudio.

En primer término, debido a que únicamente se planteó la existencia de una forma de trabajo cooperativo en cada grado escolar, no fue posible realizar una comparación equivalente de estos resultados. No obstante lo anterior, las comparaciones que se hacen del desempeño mostrado por los tres equipos hablan de ciertas tendencias en la evolución de esta forma de trabajo. Por tanto, al realizar investigaciones de este tipo convendría tener, por lo menos, dos equipos de trabajo del mismo grado.

Finalmente, la gran cantidad de problemas construidos propició cierta pérdida de control en cuanto al grado de dificultad implicado en ellos. Así, problemas considerados difíciles, fueron resueltos con facilidad por los alumnos de sexto grado, sin embargo, en ellos sólo se proponía una operación. Por el contrario, en tercer grado los problemas de cambio implicaron cierta dificultad sobre todo porque en ellos se pedía realizar dos operaciones

REFERENCIAS

Alonso, J.(1991). **Motivación y aprendizaje en el aula**. Madrid: Santillana.

Ávila, A. (1993). Problemas fáciles y problemas difíciles. En: **Los niños también cuentan** Col. Libros del Rincón. (pp.55-65). México: SEP.

Ávila, A., Balbuena, H., Bollás, P. y Castrejón, J. (1994). **Matemáticas, tercer grado**. México:SEP.

Balbuena, H., Block, D. y Carvajal, A. (1995). Las operaciones básicas en los nuevos libros de texto. **Cero en conducta**. **40-41**, 15-28.

Baroody, A.J. (1988). **El pensamiento matemático de los niños: Un marco evaluativo para maestros de preescolar, ciclo inicial y educación especial**. Madrid: Visor.

Bermejo, V. (1990). **El niño y la aritmética**. Barcelona: Paidós.

Block, D., Carvajal, A., Fuenlabrada, I. y Martínez, N. (1995). **Matemáticas, primer grado**. México: SEP.

Block, D. y Dávila, M. (1993). La Matemática expulsada de la escuela. **Educación Matemática, 5** (3), 39-58.

Bower, D. (1993). **Escuelas para pensar**. Barcelona: Paidós.

Carraher, T., Carraher, D. y Schliemann, A. (1991). **En la vida diez, en la escuela cero**. Sao Pablo: Siglo veintiuno.

Carrillo, Y. L. (1995). La resolución de problemas en matemáticas: ¿cómo abordar su evaluación?. **Investigación en la escuela. 25**. 79- 86.

Castro, E., Rico, L. y Castro E. (1995). **Estructuras aritméticas elementales y su modelización**. México: Iberoamerica

Charnay, R. (1995). Aprender (por medio de) la resolución de problemas. En C. Parra e I. Saiz (Eds.). **Didáctica de matemáticas, aportes y reflexiones**. Barcelona: Paidós

De la O, J., Díaz, M. E. y Méndez, C. (1996). Dificultades y alternativas en la resolución de problemas. **Educación Matemática, 8** (1), 40-52.

Gagñé, E. D. (1991). **La psicología cognitiva del aprendizaje escolar**. Madrid: Visor.

Kamii, K. C. (1993). **El niño reinventa la aritmética: Implicaciones de la teoría de Piaget**. Madrid: Visor.

Mauri, T. (1991). ¿Qué hace que el alumno y la alumna aprendan los contenidos escolares? En J. Alonso (Ed.), **Motivación y Aprendizaje en el aula** (pp. 61-94). Madrid: Santillana.

Mayor, J. Suengas, A. y González, J. (1995). **Estrategias metacognitivas.** Madrid: Síntesis.

Maza, G. C. (1989). **Sumar y restar: el proceso de enseñanza y aprendizaje de la suma y de la resta**. Madrid: Visor.

Orrantia, J. Morán, M. y Gracia, A. (1997). Evaluación y Zona de Desarrollo Próximo: Una aplicación a contenidos procedimentales. **Cultura y Educación. 6/7**, 39-56.

Orton, A. (1990). **Didáctica de las matemáticas**. Madrid: Morata.

Ovejero, B. A. (1990). **El aprendizaje cooperativo: una alternativa eficaz a la enseñanza tradicional**. Barcelona: PPU.

Parra, B. (1990). Dos concepciones de resolución de problemas de matemáticas. **Educación Matemática, 3** (2), 22-31.

Perez, E. y López., G. (1995). **Matemáticas, quinto grado.** México: SEP.

Pozo, M. J. (1989a). Adquisición de estrategias de aprendizaje. **Cuadernos de Pedagogía. 175**, 8-11.

Pozo, M. J. (1989b). **Teorías cognitivas del aprendizaje**. Madrid: Morata

Pozo, M. J. (1990). Estrategias de Aprendizaje. En C. Coll, J. Palacios y A. Marchesi (Eds..) **Desarrollo Psicológico y Educación II**, (pp.199-224). Madrid: Alianza.

Puente, A. y Poggioli, L. (1989). Adquisición y desarrollo de estrategias cognitivas en matemáticas. En S. Castañeda, y M. López (Eds.). **La psicología cognoscitiva del aprendizaje,** (pp.95-120). México: UNAM

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). **Problemas aritméticos escolares**: Madrid: Síntesis.

Puy, L. y Cerdán, F. (1987). Buceando en el proceso de resolución de problemas. En A. Alvarez (Ed.), **Psicología y educación: realizaciones y tendencias actuales en la investigación y en la práctica**. (pp.339-344). Madrid: Visor.

Resnick, L. y Ford, W. (1990). **La enseñanza de las matemáticas**. Barcelona: Paidós.

Rico, L. (1994). Errores en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, L. Rico y P. Gómez (Eds.), **Educación Matemática,** (pp.69-108). Colombia: Iberoamérica

Santaló, L. (1995). Matemática para no matemáticos. En C. Parra e I. Saiz (Eds.). **Didáctica de matemáticas: aportes y reflexiones,** (pp.21- 38). Barcelona: Paidós.

Santos, T. M. (1995). ¿Qué significa el aprender matemáticas? Una experiencia con estudiantes de cálculo. **Educación Matemática. 7** (1), 46-62.

Santos, T. M. (1996), Análisis de algunos métodos que emplean los estudiantes al resolver problemas matemáticos con varias formas de solución. **Educación matemática, 8** (2), 7-69.

Secretaría de Educación Pública (1992). **La guía para el maestro, primer grado, educación primaria.** México: SEP.

Secretaría de Educación Pública (1993). **Plan y Programas de estudio para Educación Primaria.** México: SEP.

Shoenfeld, A. H. (1989). La enseñanza del pensamiento matemático y la resolución de problemas. En L. B. Resnick y L. E. Klopfer (Eds.). **Currículum y Cognición** (pp.141- 169). Argentina: Aique.

Veggetti, M. S. (1997). El aprendizaje sociocultural de las matemáticas: el diseño y uso de mediadores instrumentales sociales. Fundación Infancia y Aprendizaje. **Hacia un currículum cultural: la vigencia de Vygotsky en la educación.** (pp. 77-89). Madrid.

Vergnaud, G. (1997). **El niño, las matemáticas y la realidad: Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria.** México: Trillas.

Kaplan, R. G., Yamamoto, T. y Ginsburg, H. P. (1989). La enseñanza de conceptos matemáticos. En L. B. Resnick y L.E. Klopfer (Eds.). **Currículum y Cognición** (pp.105- 139). Argentina: Aique.

ANEXO 1

VALIDACIÓN POR JUECES

Para algunos autores, la estructura semántica de un problema permite que el sujeto se represente mentalmente los datos o cantidades que involucra, así como las relaciones existentes entre ellos. Lo anterior le lleva a elegir el procedimiento adecuado de solución. Tal estructura semántica se divide en cuatro categorías: problemas de cambio, de comparación, de combinación y de igualación.

Instrucción: según su opinión, coloque sobre la línea la clave de la categoría a la que pertenece cada problema. Así mismo, anote (A) si es adecuado para el grado escolar que se propone o (I) si no lo es.

CATEGORIAS:

(CA) Problemas de cambio: implican una acción que al llevarse a cabo modifica una cantidad inicial ya sea para aumentar o disminuir. Ejemplo: Pedro tiene 8 caramelos, María le da 4 caramelos más. ¿Cuántos caramelos tiene ahora Pedro?

(CB) Problemas de combinación: son situaciones en las que se presentan dos cantidades en forma aislada o como partes de un todo sin que se realice ningún tipo de cambio o transformación. Ejemplo: Pedro tiene 9 caramelos y María 4. ¿Cuántos caramelos tiene entre los dos?

(CP) Problemas de comparación: no existe transformación de los conjuntos, sólo una relación comparativa. Pretende determinar la diferencia existente entre los conjuntos; o averiguar uno de ellos conociendo el otro y la diferencia entre ellos. Ejemplo: Pedro tiene 7 caramelos. María tiene 5 caramelos. ¿Cuántos caramelos tiene Pedro más que María?

(I) **Problemas de igualación:** constituyen una mezcla de los problemas de cambio y comparación debido a que existe un aumento o disminución en una de las partes, basada en la comparación de dos conjuntos separados. Ejemplo: Pedro tiene 11 caramelos. María tiene 5 caramelos. ¿Cuántos caramelos le tienen que dar a María para tener los mismos que Pedro?

Nota: Los ejemplos arriba mencionados responden a la forma (a + b = ?). Sin embargo, para cada categoría la incógnita puede aparecer en cualquier elemento antes del signo igual. Por ejemplo: (? + b = c) ó (a + ? = c).

PROBLEMAS ARITMÉTICOS PARA PRIMER GRADO

HOJA 3

1.- Juan Pablo tiene en su pecera 7 peces y su mamá le compró en el mercado 4 más.¿Cuántos peces tiene ahora Juan?

2.- La mamá de Tere tenía 9 chiles verdes en una bolsa. La señora ocupó algunos para preparar una salsa. Al guardar la bolsa, Tere sólo vio 3. ¿Cuántos chiles ocupó su mamá para preparar la salsa?

3.- Claudia tiene 5 pesos para gastar en el recreo, su amiga Rocío también llevó 5 pesos. ¿Cuánto dinero tienen las dos si lo juntan?

4.- Lolita fue a comprar a la frutería un kilo de pera que le costó 6 pesos, un kilo de plátano de 5 pesos y un kilo de naranja de 2 pesos. ¿Cuánto tuvo que pagar Lolita por lo que pidió?

5.- En un jardín hay dos árboles, cada árbol tiene tres ramas. En cada rama hay 2 manzanas. ¿Cuántas manzana hay en total?

6.- Elvia tiene 5 pesos. Si gasta 3 pesos en el recreo le sobrará la misma cantidad que trae su amiga Bety. ¿Puedes decir, entonces, cuánto dinero trae Bety?

Estructura	Adecuado

ANEXO 2

EVALUACIÓN PARA PRIMER GRADO

Nombre del alumno: ____________________
Fecha: __________ Grado: ______ Grupo: __________

1) Beto y Toño juntaron 20 pesos para el regalo de su mamá. ¿Cuánto puso Toño, si Beto cooperó con 8 pesos?

2) En el parque don Simón y don Luis venden algodones de azúcar. Don Simón tiene 8, él necesita vender 3 algodones para tener los mismos que don Luis. ¿Cuántos algodones tiene don Luis?

3) Carmen le cosió 8 botones a su uniforme. Juana sólo le cosió 6. ¿Cuántos botones de más cosió Carmen a su uniforme?

4) La rana René comió 9 mosquitos. La rana Agustina comió 5 mosquitos menos que la rana René. ¿Cuántos mosquitos comió la rana Agustina?

5) Adela tenía 3 huevos para preparar el desayuno. Como no le alcanzaban pidió a su vecina algunos más. Ahora Adela tiene 7 huevos. ¿Cuántos huevos le prestó su vecina?

6) En la granja de Toño hay 5 conejos. En la granja de Pepe hay 9 conejos. ¿Cuántos conejos necesita Toño para tener los mismos que Pepe?

7) Claudia tiene 3 pesos para gastar en el recreo, su amiga Rocío tiene 5 pesos. ¿Cuánto dinero tienen entre las dos?

8) Emma traía 5 pesos para gastar en el recreo. Ella compró dos tacos que le costaron un peso cada uno. ¿Cuánto dinero tiene ahora Emma?

EVALUACIÓN PARA TERCER GRADO

Nombre del alumno: ____

Fecha: _____________ Grado: _____ Grupo: __________

1) Iván y Pedro trabajan en la misma empresa. Iván lleva 18 años trabajando ahí, con 5 años menos tendría el mismo número de años que lleva trabajando Pedro. ¿Cuántos años ha trabajado Pedro en la empresa?

2) Alfredo mide 192 cm. Si Gabriel mide 169 cm., ¿cuánto tiene que crecer aún Gabriel para alcanzar a su primo?

3) En una escuela hay 79 alumnos de segundo grado. ¿Cuántos alumnos hay en el 2° A, si el 2° B tiene 38 alumnos?

4) La señora Rosalía ha reunido $1 798. Si quiere comprar una enciclopedia que cuesta $ 2 800 ¿cuánto le falta para poder comprarla?

5) El día de hoy don Pepe vendió 21 kilos de naranjas. Si vendió 5 kilos menos de plátanos que de naranjas, ¿cuántos kilos de plátanos vendió?

6) Don Antonio y sus vecinos quieren ahorrar $4 000 para pintar el edificio donde viven. Si han ahorrado $2 500 ¿cuánto dinero les falta por ahorrar?

7) Un hipopótamo pesa 400 kilos. Un cerdo pesa 180 kilos. ¿Cuántos kilos de más pesa el hipopótamo que el cerdo?

8) Luis tiene un litro de helado de chocolate, Carmen tiene ½ litro de helado de fresa y Beto tiene ½ litro de helado de vainilla. Si lo juntan, ¿qué cantidad de helado tiene en total?

EVALUACIÓN PARA SEXTO GRADO

Nombre del alumno: ____

Fecha: ____________ Grado: _____ Grupo: _________

1) Ricardo cocinó 8/10 de una calabaza. Si hubiera preparado 3/10 menos, tendría la misma cantidad de calabaza que cocinó Pedro. ¿Qué parte de una calabaza tiene Pedro?

2) Don Arturo compró para una fiesta un puerco que pesaba 53 kilos. Seis meses después el puerco pesó 82 kilos. ¿Cuántos kilos aumentó el puerco en ese tiempo?

3) Rosa y María fueron al mercado y compraron 7 docenas de elotes. ¿Cuántos elotes le tocan a Rosa si 28 son de María?

4) Para llegar a su trabajo, Tomás recorre 5.8 km. y José 3 000 metros. ¿Cuántos metros más recorre Tomás que José?

5) En la Comercial Mexicana están dando un 25% de descuento en los yoghurt. Si el precio normal de un yoghurt de vasito es de $3.- ¿Cuánto pagarás con el descuento si compras 3 yoghurts?

6) Sebastián pesa 38.5 kg.; su hermanita pesa 3.7 kg. menos que él ¿cuánto pesarán los dos juntos?

7) El papá de Efraín tiene 35 años. Efraín tiene 13 años menos que él ¿Cuántos años tiene Efraín ?

8) Pedro tiene 280 canicas; su primo tiene el triple. ¿Cuántas canicas le faltan a Pedro para tener la misma cantidad que su primo?

ANEXO 3

PROBLEMAS DE ESTRUCTURA SEMÁNTICA PARA PRIMER GRADO

CAMBIO

1) Juan Pablo tiene en su pecera 7 peces. Su mamá le compró 4 más. ¿Cuántos peces tiene ahora?

$7 + 4 = ?$

2) Don Tomás vende pájaros en el mercado. Hoy trajo 9 y vendió 5. ¿Cuántos pájaros le quedan a don Tomás?

$9 - 5 = ?$

3) En la frutería hay algunas piñas. El dueño compra 5 piñas más. Ahora tiene 8 piñas para vender. ¿Cuántas piñas tenía al principio?

$? + 5 = 8$

4)La señora Tere tenía 9 chiles verdes. Ella ocupó algunos para preparar una salsa. Al guardarlos sólo había 3. ¿Cuántos chiles ocupó la señora Tere?

$9 - ? = 3$

COMBINACIÓN

1) En un jardín hay dos árboles, cada árbol tiene tres ramas. En cada rama hay 2 manzanas. ¿Cuántas manzanas hay en total?

$(2 \times 3)\ 2 = ?$

2) El zoológico de Chapultepec y el zoológico de Aragón tienen los dos juntos 9 osos. En el de Chapultepec hay 5 osos y los demás están en el de Aragón. ¿Cuántos osos hay en el zoológico de Aragón?

$5 + ? = 9$

3) La mamá de Iván llevó a la fiesta algunos tacos de pollo. La mamá de Elena llevó 5. Si en total había 13 tacos de pollo ¿cuántos tacos llevó la mamá de Iván?

$$? + 5 = 13$$

COMPARACIÓN

1) Gustavo tiene 3 vasos. Juanita tiene 4 vasos más que Gustavo. ¿Cuántos vasos tiene Juanita?

$$3 + 4 = ?$$

2) En el partido jugado el domingo pasado el equipo de "Cruz Azul" anotó 7 goles. El equipo de las "Aguilas" anotó 3. ¿Por cuántos goles de más ganó el "Cruz Azul"?

$$7 - 3 = ?$$

3) En el acuario de don Vicente hay 6 caballitos de mar. El tiene 2 caballitos más que el acuario de don Pepe. ¿Cuántos caballitos tiene el acuario de don Pepe?

$$? + 2 = 6$$

4) David tiene 9 canicas. Su primo Juan tiene 6 canicas. ¿Cuántas canicas menos tiene Juan que David?

$$9 - ? = 6$$

IGUALACIÓN

1) Elena tiene 6 chocolates. Ella necesita conseguir 2 chocolates más para tener la misma cantidad que Tere. ¿Cuántos chocolates tiene Tere?

$$6 + 2 = ?$$

2) Elvia tiene 5 pesos. Si gasta 3 pesos en el recreo, le sobrará la misma cantidad que trae su amiga Bety. Entonces, puedes decir ¿cuánto dinero trae Bety?

$$5 - 3 = ?$$

3) Pepe tiene 10 colores. Ana necesita 6 colores para tener la misma cantidad que tiene Pepe. ¿Cuántos colores tiene Ana?

$$? + 6 = 10$$

4) Gaby tiene 8 pesos. Lupita tiene 5 pesos. ¿Cuánto dinero debe gastar Gaby para tener la misma cantidad que Lupita?

$$8 - ? = 5$$

PROBLEMAS DE ESTRUCTURA SEMÁNTICA PARA TERCER GRADO

CAMBIO

1) El señor que vende helado los acomoda en una tablita. En cada tablita caben 6 filas con 4 barquillos. Si vende lo que cabe en 3 tablitas. ¿Cuántos barquillos vende en total?

$$(6 \times 4) \times 3 = ?$$

2) La dirección de la escuela recibió 725 libros de texto. Si ha entregado a los maestros 518 ¿cuántos tiene aún que repartir?

$$725 - 518 = ?$$

3) La señora Conchita tenía algunos ahorros. Su vecina le pagó $122 que le debía. Ahora la señora Conchita tiene $350. ¿Cuánto dinero tenía antes de que su vecina le pagara?

$$? + 122 = 350$$

4) En la sala de un cine hay 15 filas con 20 asientos cada una. Si faltan por vender 85 lugares para llenar la sala ¿cuántos boletos se han vendido?

$$(15 \times 20) - ? = 85$$

COMBINACIÓN

1) Antonio tiene un puesto de aguas frescas. El día de hoy preparó 8 litros de agua de jamaica y 4 litros de agua de piña. ¿Cuántos medios litros venderá en total?

$$(8 + 4)\, 2 = ?$$

2) Alma quiere llenar un álbum de 150 estampas. Si sólo ha conseguido una tercera parte de ellas, ¿cuántas estampas necesita para completar su álbum?

$$150/3 + ? = 150$$

3) Lupita y Ester fueron al cine. Entre las dos tenían $42. ¿Cuánto dinero llevaba Lupita, si $18 eran de Esther?

$$? + 18 = 42$$

COMPARACIÓN

1) José tiene 3 cajas con 42 canicas cada una. Luis tiene la mitad de las que tiene José. ¿Cuántas canicas tiene Luis?

$$\frac{42 \times 3}{2} = ?$$

2) Doña Luz compró 1 ½ kilo de arroz. Doña Ángeles compró ½ kilo menos que doña Luz. ¿Cuánto arroz compró doña Angeles?

$$1\ 1/2 - \tfrac{1}{2} = ?$$

3) El señor Ernesto pesa 77 kilos; él pesa 24 kilos más que su hijo. ¿Cuántos kilos pesa su hijo?

$$? + 24 = 77$$

4) Ana tiene $ 613 ahorrados. Ester tiene $ 478 ¿Cuánto dinero menos tiene Ester?

$$613 - ? = 478$$

IGUALACIÓN

1) El bosque de Aragón ha sido visitado por 1200 personas. Será necesario que acudan 450 personas más para igualar el número de visitantes que ha tenido el bosque de Chapultepec. ¿Cuántas personas han visitado el bosque de Chapultepec?

$$1200 + 450 = ?$$

2) Andrés pesa 45 kilos, él necesita bajar 8 kilos para pesar lo mismo que Benito. ¿Cuánto pesa Benito?

45 - 8 = ?

3) José y Margarita quieren bajar de peso. José ha bajado 12 kilos. Margarita necesita bajar 4 kilos más para igualar a José. ¿Cuántos kilos ha logrado bajar Margarita?

? + 4 = 12

4) Aldo y Juan asistieron a la feria del libro. Aldo va a pagar $ 350 por los libros que le gustaron. Juan va a pagar $220. ¿Cuánto dinero en libros tendrá que dejar Aldo, si quiere gastar lo mismo que Juan?

350 - ? = 220

COMBINACIÓN

1) Bety pesa 54.3 kg. Elvia pesa 3.7 kg. más que Bety. ¿Cuánto pesarán las dos juntas?

$$54.3 + (54.3 + 3.7) = ?$$

2) Alonso y Toño pintaron una línea que mide 14.40 m. Si Alonso pintó 8.45 m., ¿cuánto pintó Toño?

$$8.45 + ? = 14.40$$

3) Israel y Jacob tienen una bolsa con 100 globos. Jacob infló algunos, Israel infló 3/5 partesl. ¿Cuántos globos infló Jacob?

$$? + 3/5 = 100$$

COMPARACIÓN

1) Lilian mide 1.45 metros. Si Juan mide 13 cm. más que ella, ¿cuánto mide Juan?

$$1.45 + 13 = ?$$

2) Un estante de la biblioteca tiene 275 libros. Otro estante tiene 145 libros menos. ¿Cuántos libros hay en este último estante?

$$275 - 145 = ?$$

3) Micaela pesa 60 kilos, ella pesa 8 kilos más que Juana. ¿Cuánto pesa Juana?

$$? + 8 = 60$$

4) Para hacer un guisado, la cocinera utilizó ¾ de kilo de carne de res y 500 gr. de carne de cerdo. ¿Cuántos gramos menos de carne de cerdo que de res utilizó la cocinera?

$$750 - ? = 500$$

IGUALACIÓN

1) Sonia tiene ahorrado $ 1 213.20; ella aún necesita ahorrar $2 499.30 para tener lo mismo que la señora Flor. ¿Cuánto dinero tiene la señora Flor?

1 213.20 + 2 499.30 = ?

2) Cuauhtémoc y Joaquín están leyendo un libro de 350 páginas. Cuauhtémoc ha leído el 80%, si hubiera leído 20 páginas menos llevaría lo mismo que ha leído Joaquín. ¿Cuántas páginas ha leído Joaquín?

(350 x .80) - 20 = ?

3) En una carrera Lety ha corrido 3 km. Su amiga Alicia necesita correr 3 hm. más para alcanzarla. ¿Cuántos metros ha corrido Alicia?

? + 300 = 3000

4) Doña Luz compró 7/8 de una sandía. Doña Ángeles compró 3/8 de otra sandía. ¿Qué parte de la sandía debe dejar doña Luz para llevar la misma cantidad que doña Ángeles?

7/8 – 3/8 = ?