UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

SECRETARIA ACADEMICA
DIRECCION DE INVESTIGACION

PROBLEMAS EN TORNO AL CONCEPTO DE EQUIVALENCIA DE FRACCIONES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRA EN DESARROLLO EDUCATIVO,
EN LA LINEA DE EDUCACION MATEMATICA

PRESENTA:

LETICIA JIMENEZ GARCIA

DIRECTOR DE TESIS:
DR. EDUARDO MANCERA MARTINEZ

AJUSCO, D.F. 1999

A mi mamá:
Quien siempre tuvo palabras de aliento hacia mí y cuyo apoyo se ve reflejado en la culminación de este trabajo.

A mis hijas:
A Laura, mi agradecimiento infinito por enseñarme a crecer con ella.
A Citlalli, mi cariño por su comprensión y paciencia.

Agradecimiento

Quisiera agradecer a todas aquellas personas que creyeron en mí, que me apoyaron en todo momento y que al inyectarme su confianza me impulsaron a continuar. Entre ellos se encuentran mis hermanos, mis familiares, mis amigos y mis maestros. De una forma muy especial un reconocimiento a la Dra. Verónica Hoyos Aguilar con quien inicié este trabajo y que por causas de fuerza mayor, no pudimos concluir.

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

PRESENTACIÓN

No son pocas las expresiones que he escuchado y observado en torno a la dificultad que experimentan los alumnos al trabajar con las matemáticas y fundamentalmente cuando se refieren a las *fracciones.*

Durante mi práctica docente he conocido a infinidad de alumnos que sufren al trabajar con fracciones y acaban por "odiarlas", no quieren saber más de ellas. En otras ocasiones es tal la confusión de los alumnos que llegan a la secundaria sin saber realizar una suma o resta con fracciones y al finalizar la secundaria siguen en la misma situación.

Esta situación atrae mi atención porque se convierte para mí, como maestra, en un reto que hay que vencer para que los beneficios recaigan en el alumno. Él es la parte medular en el proceso de aprendizaje y debe participar activamente en la construcción de su conocimiento, pero es parte importante el papel que desempeña el maestro en esta construcción.

El maestro debe planear y organizar diversas actividades que permitan llevar a feliz término el aprendizaje y para esto es necesario que el maestro domine los diferentes significados que tiene una fracción así como también se requiere que conozca y aplique diferentes métodos didácticos de acuerdo a las situaciones planteadas y a los resultados obtenidos. Además de los factores señalados, es muy importante que el maestro tenga presentes los errores en que más incurren los alumnos.

Por eso, el propósito de este trabajo es mostrar algunos problemas a los que se enfrentan los estudiantes cuando trabajan la equivalencia de fracciones y temas relacionados con ella; en este estudio se observan algunas estrategias desarrolladas por los alumnos, ya sean correctas o incorrectas, y que permiten al maestro, tener una visión más clara de la forma en que está razonando el niño. Esto es muy importante, sobre todo para comprender el porqué de los errores. Éstos son la clave para comprender qué aspectos hay que reforzar o tratar de una manera didáctica diferente que lleve al éxito una situación de aprendizaje.

Creo que en la medida en que estemos preparados para enfrentar problemas que se susciten en torno a la enseñanza de las matemáticas, en esa medida podremos responder satisfactoriamente a las demandas de nuestros estudiantes.

INTRODUCCIÓN

INTRODUCCIÓN

El plan y los programas de estudio vigentes para primaria y secundaria tuvieron un largo proceso de revisión y análisis que data desde los primeros meses de 1989. En esta primera etapa se realizó una consulta para identificar los principales problemas educativos.

De esta etapa de consulta surgió el *Programa para la Modernización Educativa 1989-1994*, en el cual se estableció como una necesidad inmediata la renovación de los contenidos y los métodos de enseñanza. En 1990, dentro del programa *Prueba Operativa* se elaboraron programas experimentales que fueron aplicados en determinados planteles para observar su viabilidad. En mayo de 1992, con el *Acuerdo Nacional para la Modernización de la Educación Básica*, se inició la última etapa para la transformación de los planes y programas.

A finales de 1992, un grupo de maestros, científicos y especialistas en educación, elaboraron propuestas programáticas detalladas; en la primera mitad de 1993 ya se tenía formulada una versión completa de los planes y programas, así como de los materiales necesarios para su aplicación en su primera etapa.

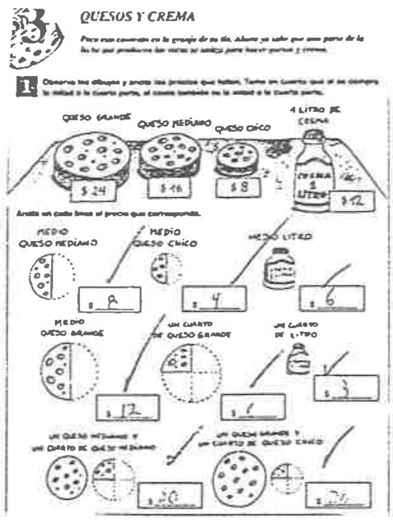
No fue posible la transición de un programa a otro en un sólo momento, debido a esto se optó por llevarla a cabo en dos etapas.

Primera etapa *Ciclo escolar 1993-1994;* únicamente se aplicó a primero, tercero y quinto año de primaria, así como en primero y segundo de secundaria.

Segunda etapa *Ciclo escolar 1994-1995;* su aplicación se extendió a segundo, cuarto y sexto año de primaria y a tercero de secundaria.

Desde el ciclo escolar 1994-1995 todas las escuelas de educación básica están funcionando con el nuevo plan establecido.

Haciendo referencia exclusivamente a Matemáticas, de acuerdo a la reforma emprendida en el año de 1989, la enseñanza de las fracciones empieza desde el tercer año de la primaria. En este grado se inicia con la introducción de la noción de fracción (medios, cuartos y octavos) mediante actividades de reparto y medición de longitudes. Ejemplo de ello son las páginas que se presentan a continuación.



Introducción de la noción de fracción (medios y cuartos). Matemáticas. Tercer grado. p. 86.

4 JUGUETES DE MADERA

El autobús se detuvo esta vez cerca de un puesto de juguetes de madera. Ahí, nuestros amigos conocieron a Martín, el niño que atendía el puesto. Martín les contó que todos los días, ayuda a su tío a hacer juguetes de madera.

A veces, cuando hacen pirámides de madera, Martín recorta las piezas que hacen falta.

Para que Martín no se equivoque en las medidas, su tío se las da marcadas en tiras de cartoncillo.

1 Ayuda a Martín a saber de qué medida tiene que cortar las maderitas. Para eso, usa tu regla, mide las seis tiras y anota en cada una cuántos centímetros mide.

¿Cuál de las tiras es más larga? ______

¿De qué color es la tira más corta? ______

Hay dos tiras que son más largas que la tira roja. ¿Cuáles son? ______

¿Cuáles tiras son más cortas que la tira roja? ______

¿Cuántas veces cabe la tira verde en la tira roja? ______

¿Es cierto que la tira roja mide lo mismo que dos tiras verdes? ______

2 Mide las tiras del material recortable número 15 y completa lo que dicen los niños. La tira amarilla es un ejemplo.

3 Observa lo que hicieron Toño y Mario para medir la tira verde con la tira roja.

¿Es cierto o no es cierto que la tira verde mide la mitad de la tira roja? ______

¿Cuántas veces cabe la tira amarilla en la tira verde? ______

¿Por qué la tira amarilla mide $\frac{1}{4}$ de la tira roja? ______

¿Es cierto que la tira amarilla mide la mitad de la tira verde? ______

Introducción de la noción de fracción (medios y cuartos). Matemáticas. Tercer grado. pp. 130, 131, 134, 135.

6 COMPARTIR CON LOS AMIGOS

Otros niños también salieron de viaje. Al regresar, varios de ellos llevaron a la escuela algunas cosas para compartir con los amigos.

1 Los cuatro niños de este equipo acordaron repartirse en partes iguales las cosas que llevaron.

¿Cuáles se pueden repartir sin que sobre nada? ______

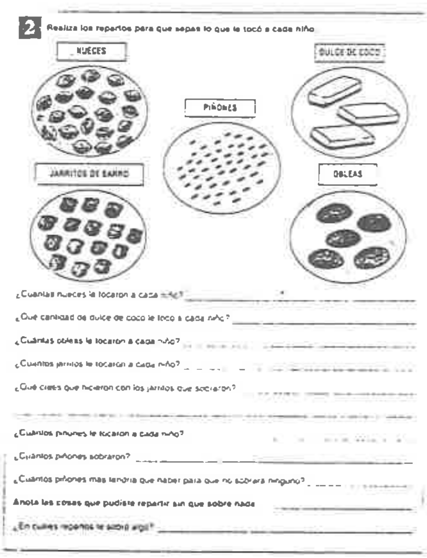
¿En cuáles va a sobrar algo? ______

¿Crees que le toquen más de 10 nueces o menos de 10 nueces a cada niño? ______

¿Le tocará más de media barra de dulce de coco a cada niño o menos de media barra? ______

¿Crees que le toque más de una oblea o menos de una oblea a cada niño? ______

¿Alcanzan los jarritos para que a cada niño le toquen tres? ______



2 Realiza los repartos para que sepas lo que le tocó a cada niño.

¿Cuántas nueces le tocaron a cada niño? ______

¿Qué cantidad de dulce de coco le tocó a cada niño? ______

¿Cuántas obleas le tocaron a cada niño? ______

¿Cuántos jarritos le tocaron a cada niño? ______

¿Qué crees que hicieron con los jarritos que sobraron? ______

¿Cuántos piñones le tocaron a cada niño? ______

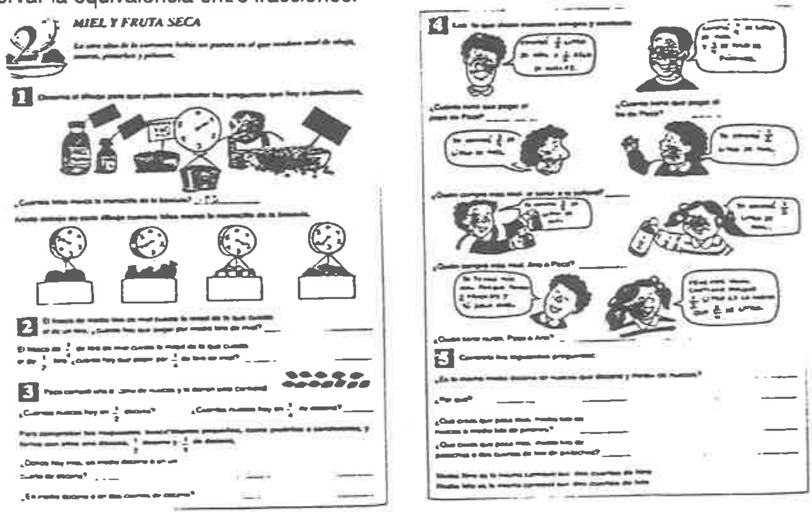
¿Cuántos piñones sobraron? ______

¿Cuántos piñones más tendría que haber para que no sobrara ninguno? ______

Anota las cosas que pudiste repartir sin que sobre nada. ______

¿En cuáles repartos te sobró algo? ______

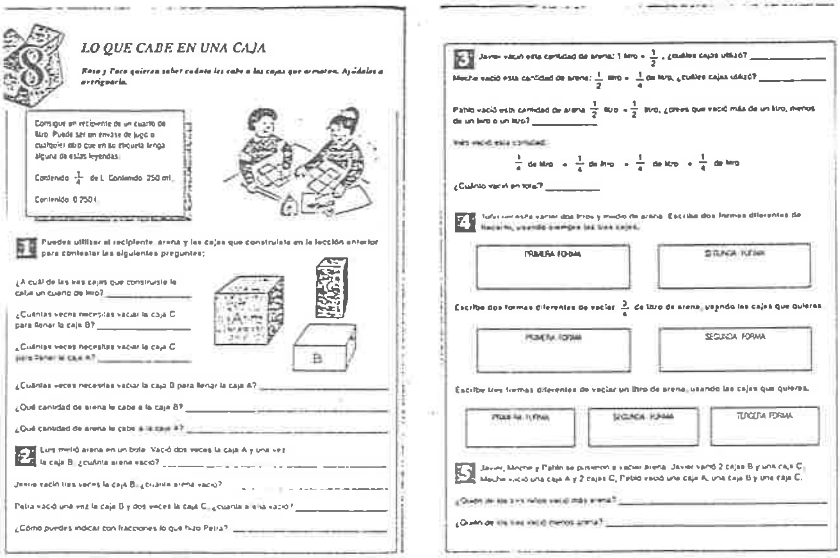
También se incorpora la comparación de fracciones sencillas representadas con material concreto, para observar la equivalencia entre fracciones.



Equivalencia entre fracciones. Matemáticas. Tercer grado. pp. 126, 127.

En este mismo grado se llega a la representación convencional de las fracciones y por último, se plantean y resuelven problemas que implican suma de fracciones sencillas empleando medios y cuartos, mediante manipulación de material.

Representación convencional de las fracciones. Matemáticas. Tercer grado. p. 87



LO QUE CABE EN UNA CAJA

Consigue un recipiente de un cuarto de litro. Puede ser un envase de jugo o cualquier otro que en su etiqueta tenga alguna de estas leyendas:

Contenido $\frac{1}{4}$ de L. Contenido 250 ml.

Contenido 0.250 l.

1 Puedes utilizar el recipiente, arena y las cajas que construiste en la lección anterior para contestar las siguientes preguntas:

¿A cuál de las tres cajas que construiste le cabe un cuarto de litro? ______

¿Cuántas veces necesitas vaciar la caja C para llenar la caja B? ______

¿Cuántas veces necesitas vaciar la caja C para llenar la caja A? ______

¿Cuántas veces necesitas vaciar la caja B para llenar la caja A? ______

¿Qué cantidad de arena le cabe a la caja B? ______

¿Qué cantidad de arena le cabe a la caja A? ______

2 Luis metió arena en un bote. Vació dos veces la caja A y una vez la caja B. ¿cuánta arena vació? ______

Petra vació una vez la caja B y dos veces la caja C. ¿cuánta arena vació? ______

¿Cómo puedes indicar con fracciones lo que hizo Petra? ______

3 Javier vació esta cantidad de arena: 1 litro + $\frac{1}{2}$. ¿cuáles cajas utilizó? ______

Meche vació esta cantidad de arena: $\frac{1}{2}$ litro + $\frac{1}{4}$ de litro. ¿cuáles cajas utilizó? ______

Pablo vació esta cantidad de arena $\frac{1}{2}$ litro + $\frac{1}{2}$ litro. ¿crees que vació más de un litro, menos de un litro o un litro? ______

$\frac{1}{4}$ de litro + $\frac{1}{4}$ de litro + $\frac{1}{4}$ de litro + $\frac{1}{4}$ de litro

¿Cuánto vació en total? ______

4 Escribe dos formas diferentes de hacerlo, usando siempre las tres cajas.

PRIMERA FORMA | SEGUNDA FORMA

Escribe dos formas diferentes de vaciar $\frac{3}{4}$ de litro de arena, usando las cajas que quieras.

PRIMERA FORMA | SEGUNDA FORMA

Escribe tres formas diferentes de vaciar un litro de arena, usando las cajas que quieras.

PRIMERA FORMA | SEGUNDA FORMA | TERCERA FORMA

5 Javier, Meche y Pablo se pusieron a vaciar arena. Javier vació 2 cajas B y una caja C. Meche vació una caja A y 2 cajas C. Pablo vació una caja A, una caja B y una caja C.

Sumas de fracciones. Matemáticas. Tercer grado. pp. 174, 175.

Una pregunta que surge de manera natural es ¿Por qué si el niño tenía su primer acercamiento al tema de *fracciones*, alrededor de los 6 ó 7 años de edad (con los anteriores planes y programas de estudio) y terminaba su educación básica cuando tenía aproximadamente 14 ó 15 años de edad, no había logrado tener un dominio sobre este tema?

La razón puede ser que en algunos estudios realizados recientemente, como por ejemplo, los de Ávila y Mancera (1988), y el de Figueras (1988), se ha mostrado que es un tema de difícil comprensión para los niños, es por eso que su enseñanza se posterga.

Pero, no obstante, los siete años en que el estudiante de educación básica tiene un acercamiento a las fracciones, de acuerdo a los nuevos Planes y Programas, los resultados aún no son favorables. La dificultad puede radicar desde el concepto mismo, dado que un mismo símbolo está asociado a diversos significados.

Se pretende que con este acercamiento que tiene el niño con la fracción, tenga la oportunidad de generar sus propias estrategias y aprehender realmente el concepto de fracción el cual depende de manera importante de la noción de equivalencia de fracciones porque esta relación se encuentra en diversas situaciones, como por ejemplo: como parte fundamental para la comprensión de otros aspectos relacionados con las fracciones, para ejecutar operaciones de adición y de sustracción; también se podría decir que es la "culminación" de la real apropiación de la noción de fracción.

¿Por qué es importante la equivalencia?

Es importante el dominio de este tema porque la equivalencia se maneja principalmente con base en expresiones simbólicas, pero éstas deben construirse a partir de diferentes situaciones que permitan al alumno observar, demostrar y comprobar objetivamente la relación mencionada.

De acuerdo con Kieren (1983), el conocimiento de número racional es acerca de cuatro subsistemas o subconstructos-medidas, cocientes, razones y operadores. El lenguaje de parejas ordenadas de los números racionales está basado en un quinto constructo: la relación parte-todo. Para que un individuo pueda construir el conocimiento de número racional requiere del empleo de mecanismos mentales: constructivos y de desarrollo.

Dos mecanismos de desarrollo son la conservación del todo y el razonamiento proporcional. Se piensa que los mecanismos de partición y de equivalencia son mecanismos constructivos para el desarrollo de los cinco subconstructos de número racional, tanto intuitivo o informal, como de un conocimiento más formal del número racional.

En un sentido informal, la comprensión de la equivalencia es uno de los fundamentos para los conceptos de número racional para varios de los subconstructos. El mismo autor cita a Karplus y Kurtz, cuando afirman que el concepto de equivalencia de un niño es de naturaleza multiplicativa y muy íntimamente relacionado con el razonamiento proporcional.

Otras nociones de equivalencia son menos formales como por ejemplo una extensión de la equivalencia cuantitativa, es decir, el niño observa que 1/2 es lo mismo que 2/4 ya que "poniendo 1/4 con 1/4 se forma 1/2".

Los conceptos de número racional son de naturaleza, tanto extensiva como compleja. La partición y la equivalencia se consideran dos mecanismos constructivos que permiten a un niño o a un joven construir tales ideas complejas. Debido a que, estos mecanismos pueden ser enseñados, se les debe dar más atención en los currícula de números racionales.

Por lo tanto, el propósito de este trabajo es explorar si los estudiantes de 6o. grado de primaria y los de 1o. y 2o. grado de secundaria, quienes han tenido un acercamiento a las fracciones por lo menos durante tres años, tienen la misma percepción en torno a la equivalencia de fracciones, y si no es así, identificar las diferentes conceptualizaciones que tienen los alumnos en relación a este tema y con ello sugerir algunas direcciones para el desarrollo de propuestas didácticas que permitan obtener avances en la comprensión de las fracciones.

La realización de este estudio se hizo con base en algunas de las interpretaciones de la fracción que señalan Ávila y Mancera (1989): la fracción como parte de una figura; como parte de un conjunto; como una expresión numérica; como un porcentaje; como una razón y como una medida. Se trató de observar cómo es el manejo que el alumno da a la equivalencia en tan diversas interpretaciones.

En el estudio citado se muestra que la interpretación de la *fracción* que tienen los alumnos de educación básica, está ligada fundamentalmente al modelo "del pastel". (Se divide una figura en partes iguales y después se iluminan cierto número de partes). Con esto se muestra que los niños sólo consideran un único significado: la fracción como parte de una figura plana.

En el análisis de los resultados que estos autores señalan se obtuvieron porcentajes elevados de error que enfatizan que existe en el comportamiento infantil una constante en las respuestas erróneas.

Los errores más comunes detectados en ese estudio fueron:

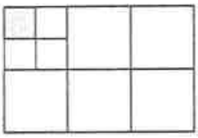
- *Interpretación insuficiente de la fracción.* La atención puesta sólo en el número de partes que han de tomarse y no en la relación que se establece entre éstas y el número de partes que se tienen. Por ejemplo: sombrear 3/4 de una colección de 20 canicas.

  ●●●○○○○○○○○○○○○○○○○○

  Se sombrean tantas partes como indica el numerador desvinculado de su relación con el denominador.

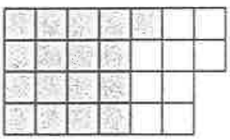
- *Interpretaciones erróneas de la fracción.* Se señalan tres casos:

  a) Transformación del numerador en denominador y su aplicación al todo original. Por ejemplo: 4/6 se transforma en 1/4 porque el alumno convierte el numerador en denominador ya que lo interpreta como "la cuarta parte de un rectángulo". También se dan casos en que la misma fracción representa para otro alumno: "la cuarta parte de un sexto", a lo cual correspondería la siguiente situación.



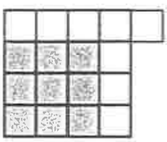
4/6

  b) Yuxtaposición del numerador y el denominador. Generalmente ocurre al trabajar con fracciones mayores que 1. Ejemplo:



17/9

  c) También lo manejan como una inversión de sus elementos. El numerador se convierte en denominador y viceversa.



17/9

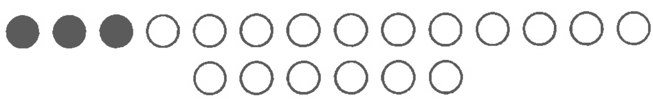
Con esto se muestra que las conceptualizaciones que los niños han conseguido se basan fundamentalmente en el "modelo del pastel" en donde se restringe al empleo de una sola figura que se subdivide y colorea.

Los mismos autores, Ávila y Mancera (1987) en otro estudio realizado (Estudio exploratorio en alumnos que finalizan la primaria en el Distrito Federal) con niños que iniciaban sexto año y con alumnos que iniciaban primero de secundaria, observaron lo siguiente:

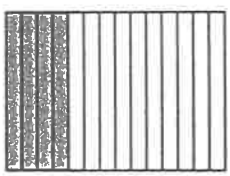
- Los alumnos identifican fácilmente fracciones representadas en círculos o rectángulos. Cuando trabajan con figuras que no les son familiares muchos fallan en sus respuestas, sobre todo cuando se trata de figuras no simétricas.

- A los estudiantes se les dificulta interpretar una fracción como parte de un conjunto. Se les facilita cuando el denominador coincide con el número total de la colección. Los alumnos pudieron señalar acertadamente 9/10 de un conjunto de 10 monedas porque el subconjunto era de 9 elementos.

- Por el contrario, cuando el número de objetos que forman el subconjunto no era igual al numerador, casi la totalidad de los niños fallaron. Por ejemplo, para señalar 3/4 de 20 canicas, la respuesta más frecuente fue iluminar 3 canicas.



- La mayoría de los niños son capaces de interpretar la fracción cuando es menor o igual a la unidad. Cuando el numerador es mayor que el denominador invierten la fracción para no tener problemas en su representación. Por ejemplo, para representar 14/4 se dieron respuestas como lo muestra la siguiente ilustración.



14/4

- Casi ninguno de los alumnos interpreta la fracción como razón. Las respuestas que se dieron fueron sólo al azar, sin ninguna argumentación.
- Se observó un raquítico manejo del concepto de equivalencia. Muchos estudiantes interpretaron como la mayor fracción aquella que estaba compuesta por números más grandes. (Ejemplo: 75/100 > 3/4).
- Caso contrario es el hecho de observar que algorítmicamente los alumnos, en un alto porcentaje, pudieron encontrar fracciones equivalentes a otra dada.
- Algunos alumnos concluyeron que 20 cm es mayor que 1/4 de metro porque 20 > 1/4; no establecieron la relación 20/100 que tal vez les hubiera permitido comparar correctamente los datos.

MARCO DE REFERENCIA

MARCO DE REFERENCIA

Algunos estudios, como el de Dávila (1992) permiten conocer las estrategias utilizadas por niños de 1o. y 2o. año (cuando todavía se contemplaba este tema dentro de los Planes y Programas de estudio) al tener su primer acercamiento en torno a la noción de fracción a partir de problemas de reparto.

Se presentan algunas hipótesis de los niños sobre la equivalencia o no equivalencia de algunas fracciones y se observa que cuando se trata de repartir pasteles entre 2 y entre 4 niños, éstos son capaces de repartir equitativa y exhaustivamente utilizando la estrategia de partir siempre por mitades.

De acuerdo a este estudio, se pueden identificar cuatro diferentes grupos de alumnos, en relación a las respuestas dadas por ellos.

- Manejan apropiadamente las variables y les permite anticipar el tamaño del pedazo que se obtiene en un reparto. Esto se debe a que han logrado construir la relación: "número de pasteles, número de niños, tamaño del pedazo" [1]. Esta relación implica ser conservador de área.

- Los alumnos que están en proceso de construir la relación citada, pueden establecer la equivalencia pero dudan de ella cuando los pedazos no tienen formas usuales o son tantos que resulta difícil su comparación visual. Frente a determinados tipos de reparto manejan muy bien la relación y frente a otros regresan a centrarse en el número de pedazos. Cuando se comparan figuras con diferente forma pero con el mismo número de partes, se centran entonces en la forma y hacen referencia al que "está más gordito"... "están más delgaditos". A pesar de esto, algunos logran establecer la equivalencia a través del corte y la sobreposición de los pedazos.

- Otro grupo es el de los alumnos que **no** son conservadores de área y que tampoco han logrado construir la relación: "número de pasteles, número de niños, tamaño del pedazo". Para estos

[1] Dávila (1992) p. 38

alumnos, mientras más pedazos tengan, más cantidad de pastel hay. Por ejemplo, para ellos fue menor 1 1/2 que 6/4 debido a la forma en que se representaron físicamente las fracciones.

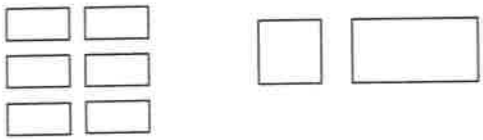


Fig. a Fig. b

Los alumnos que aún no son conservadores de área consideran que es mayor la cardinalidad representada en la figura ***a*** que la representada en la figura ***b*** por tener más partes.

- Un grupo más está formado por los alumnos que no aceptan la equivalencia de áreas si los pedazos no son cortados y coinciden en forma y tamaño; no es suficiente con sobreponer los pedazos y ver la coincidencia de áreas. Las demostraciones de equivalencia que realizan sus compañeros, a ellos no les dice nada. Para ellos no es suficiente con sobreponer los pedazos y notar la coincidencia de las áreas; es necesario partirlos para que el número de pedazos y las formas sean iguales.

Lerner (1994) hizo un estudio con niños de 3o. y de 5o. año en el cual planteó situaciones vinculadas con las fracciones. Algunas de ellas son:

- Si tú te comes la mitad de una naranja y yo me como la mitad de la mitad, ¿Quién come más? ¿Por qué? ¿Cuánto es la mitad? ¿Y la mitad de la mitad? ¿Cómo se escribe? (Tercer y quinto grado).
- Marca con una cruz las figuras divididas en medios. (Tercer grado).

- También se plantea la siguiente situación: ¿Cuántos litros caben en total en los tres recipientes de la figura? (Tercer grado).

◊ 6 litros y medio

◊ 3 litros y un cuarto de litro

◊ 2 litros y un cuarto de litro

Se presentan tres recipientes con su correspondiente capacidad.

- Otra situación que se planteó a los niños fue la de encontrar qué cantidad faltaba para llenar un recipiente con agua si ya contenía las 3/5 partes. (Quinto grado).

- También se les cuestionó sobre esta situación: Una persona había leído las 115/180 páginas de un libro. ¿Cuántas páginas tiene el libro? ¿Cuántas páginas ha leído? ¿Qué fracción del libro le queda aún por leer? (Quinto grado).

Entre los resultados sobresalientes se encuentran:

- Gran cantidad de niños consideran que sólo son medios aquellos que resultan de dividir una figura con una línea horizontal o vertical, pero no mediante una diagonal.
- Consideran que dos mitades deben ser iguales entre sí.
- Los niños producen formas propias para representar las fracciones, así como interpretaciones de la notación convencional que no siempre coinciden con las del adulto.
- No todos los niños saben que el denominador se refiere al total de partes que tiene el entero.

Otra interrogante que se planteó Lerner y que sería tema para otra investigación es el porqué los niños que son capaces de sumar mentalmente fracciones no saben cómo hacerlo cuando tienen que hacerlo por escrito.

Como un último comentario Lerner hace referencia a la necesidad de que los niños descubran que una "unidad" no siempre es un objeto, sino que puede tratarse de un conjunto de elementos discretos.

En el texto de Hart (1981) se presenta un informe de los resultados de una investigación sobre fracciones realizada con niños de 12 a 15 años. En dicha investigación se aplicaron dos test diferentes de acuerdo a la edad de los estudiantes; se incluyeron varios ejercicios sobre la equivalencia entre fracciones.

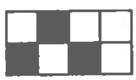
Uno de los ejercicios planteados por Hart, el cual es retomado en esta investigación, se refería a encontrar dos fracciones equivalentes a 2/7 pero proporcionando también el denominador de una y el numerador de otra. Esto es 2/7 = □/14 = 10/▲, como respuesta se dio a menudo 21 y 28 como sustituto de ▲, por lo cual Hart señala que un error común era considerar a los numeradores como formando un modelo numérico y a los denominadores otro, pero ignorando la relación entre ellos. También se observó que encontrar el valor de ▲ fue mucho más difícil que encontrar el valor de □, ya que el niño se empeñaba en trabajar con 4/14 = 10/▲ y ningún entero múltiplo de 4 es 10; el alumno no podía aplicar la transitividad que posiblemente le facilitaría la labor: 2/7 = 10/▲.

En la misma investigación realizada por Hart, se planteó un problema en relación a una carrera de relevos que se corría en etapas de 1/8 km; cada corredor corría una etapa. La pregunta era: ¿Cuántos corredores se necesitarán para correr una distancia total de 3/4 km? La estrategia que varios niños emplearon fue la de traducir 3/4 a 6/8 y concluyeron: "seis corredores".

Un ejemplo más es el siguiente problema: Si dos niños tenían la misma cantidad de dinero y uno decidía ahorrar 1/4 de su dinero, y el otro decidía ahorrar 5/20 de su dinero. Se trataba de establecer cuál de las dos fracciones era mayor o si eran equivalentes.

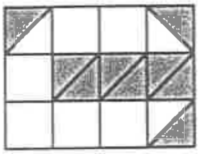
Se notó un error común al comparar el tamaño del número del numerador y el tamaño del número del denominador, es decir, el niño se centró en comparar aisladamente los elementos y no la razón entre ambos.

Otro ejemplo de los reactivos que se plantearon fue: ¿Qué fracción está sombreada?



En situaciones como la anterior, los niños invariablemente contaron el número de cuadrados de la figura completa, después contaron los cuadrados sombreados y colocaron un número encima del otro.

Un último ejemplo de los ejercicios propuestos por Hart, se refería a una persona que estaba poniendo baldosas en el suelo; se muestran sombreadas. ¿Qué fracción del suelo ha sido embaldosada?



En situaciones como la anterior, Hart concluye que el niño es incapaz de utilizar la parte más pequeña como una "parte" y prefiere utilizar la otra alternativa. En este caso, muchos optaron por considerar al cuadrado como la unidad para contar las partes en vez de utilizar los triángulos.

Entre las conclusiones más importantes destacan que:

- El niño no establece la relación entre el numerador y el denominador; los considera independientes uno del otro.

- Para encontrar fracciones equivalentes muchos utilizaron la estrategia de multiplicar el numerador y el denominador por un mismo número, pero también muchos demostraron tener dificultades con el método que utilizaron.

- Se les dificultó aplicar la transitividad de las equivalencias, porque ellos ven la igualdad sólo para las dos expresiones que se encuentran a cada lado del signo de igual.

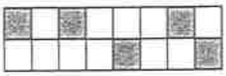
- Un error común en el manejo de fracciones equivalentes era observar el número del numerador y el del denominador como elementos aislados y no la razón entre ambos.

Las fracciones equivalentes constituyen la base sobre la que se construyen las operaciones de adición y sustracción, pero de acuerdo a este estudio, parecen ser comprendidas por menos del 60% de los alumnos de 1o. y 2o. grado de secundaria.

Se han hecho numerosos estudios sobre la relación de equivalencia entre fracciones pero se supone necesariamente cierto manejo de la noción de fracción, por tal motivo, a continuación se enumeran algunos obstáculos que impiden la construcción del concepto de fracción, según el estudio realizado por Figueras, Filloy y Valdemoros (1987).

1. *Predominio de la cardinalidad de la parte.* El niño tan sólo toma en consideración el numerador de la fracción.

- El numerador se impone desplazando al denominador. (Fig. a)
- El numerador de la fracción es tomado en cuenta, aunque el denominador es sustituido por otro. (Fig. b)
- El numerador de la fracción es tratado como entero, se desvincula del denominador. (Fig. c)

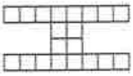


a

La quinta parte de dieciséis

b

En un círculo, representa dos quintos



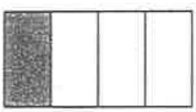
c

En 20/28 se toma el 20 como el total de la figura entera.

2. *Predominio de la cardinalidad del denominador.* Revela exclusiva consideración del denominador de la fracción dada, al que se le otorga el significado de parte. Por ejemplo: 9/16, lo toma como que hay 9 partes y faltan 16, haciendo un total de 25.

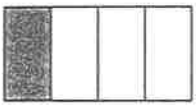
3. *La no consideración del todo.*

- Consideran al todo como la suma del numerador y del denominador.



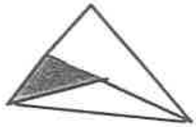
1/3

- Como una lectura incompleta del dibujo presentado.



1/2

4. *La desigualdad de las partes.* No hay conservación del área.



1/3

5. *Las dificultades en la partición*, ocasionadas por figuras no incluidas en trabajos previos, tal vez por su estructura compleja, y que requieren del uso simultáneo de varias unidades de partición.

No tan sólo se han hecho investigaciones con alumnos de lo que llamaríamos educación básica, sino también estudios en niveles más avanzados o con profesores. Hay estudios como el de Sánchez y Llinares (1992) por ejemplo, quienes realizaron una investigación con futuros maestros de educación elemental, con el propósito de conocer cómo conciben la idea de fracciones equivalentes. Entre las respuestas más comunes se encontraron:

- *Recordaron reglas inapropiadas para la equivalencia.* Aunque los estudiantes sí tenían la noción del procedimiento algorítmico de "multiplicar cruzado" y de obtener el mismo cociente por división, no lograron llegar a la conclusión y se fueron desviando hacia una errónea estrategia aditiva.

- *Procedimiento algorítmico no generalizado.* Algunos participantes en el estudio recordaron que podían encontrar fracciones equivalentes al dividir o multiplicar por un mismo número tanto al numerador como al denominador, sin embargo no fueron capaces de aplicar este algoritmo a cualquier fracción y derivaron nuevamente hacia una estrategia aditiva errónea.

- *Algunos lograron la solución correcta de los ítems en un nivel simbólico*, pero no proporcionaron información sobre los referentes moldeados.

- *El tipo de ítems presentados influyeron en la ejecución del estudiante.* Cuando no se observaba fácilmente la relación multiplicativa entre los numeradores dados, se notó la incapacidad para extender los razonamientos previos.

- *Errónea sobregeneralización de una regla.* Uno de los estudiantes recordó una regla para encontrar fracciones equivalentes pero la memorizó sin ningún sentido. Para él era lo mismo sumar, restar, multiplicar o dividir por un mismo número al numerador y al denominador.

- Se detectaron algunos futuros maestros de educación elemental con una débil comprensión de contenidos matemáticos.

En suma, sabemos que en relación con las fracciones y la noción de equivalencia, los niños pueden establecer la equivalencia cuando las fracciones surgen de dividir en mitades, así como también reconocen que las mitades deben ser iguales. También se observa que al alumno se le facilita más trabajar con cuadrados, rectángulos o círculos para representar físicamente las fracciones.

Algo muy importante reflejado en estos estudios es la necesidad de que los niños comprendan que una unidad no siempre es un objeto sino que puede ser un conjunto discreto de objetos; además es necesario que el alumno deje de percibir al numerador y al denominador como dos elementos aislados sin considerar la relación que existe entre ellos.

Otros problemas que se detectaron en diversas situaciones fueron: la no consideración del todo y la desigualdad de las partes.

Se observó que la equivalencia es una relación que presenta serias dificultades a tal grado que en el estudio realizado por Hart, (1981) se demostró que menos del 60% de alumnos de secundaria parecen comprender la relación de equivalencia.

Por otro lado, también se encontró que en otros niveles, como en el caso de algunos futuros maestros, se presenta la gran dificultad para recordar estrategias aplicadas a la relación de equivalencia.

Con este rápido recuento de estudios acerca de la noción de equivalencia en las fracciones, se hace necesario el estudio de la comprensión que los niños de grados superiores de educación primaria y los de educación secundaria tienen respecto a las fracciones y su equivalencia. Por ello este trabajo se plantea como un estudio de carácter exploratorio.

En consideración a los estudios citados en párrafos anteriores es posible suponer que los errores conceptuales de los alumnos, son repetitivos. También se puede pensar que existe una constante en las estrategias que emplean los niños, de ahí que con los reactivos seleccionados para la investigación se pretende confirmar o eliminar las suposiciones planteadas.

METODOLOGÍA

METODOLOGÍA

Dado que el propósito de este estudio es *identificar las diferentes interpretaciones que hacen los niños en torno a la equivalencia de fracciones* entonces se requiere trabajar directamente con niños que ya han tenido la oportunidad de conocer la equivalencia de fracciones. En este sentido se pensó que los estudiantes de tercero o cuarto año no tendrían manifestaciones claras de lo que han aprendido ya sea por el nivel de expresión verbal que tienen o de expresión escrita, así como la claridad necesaria para ayudar a determinar fuentes de conflicto. Por otra parte, los estudiantes de 5o. y 6o. año de primaria, así como los de 1o. y 2o. de secundaria ya han tenido la oportunidad de madurar un poco el concepto y pueden ofrecer más posibilidades para el desarrollo del estudio.

También hay que considerar que no fue una selección con un criterio estricto dado que se trataba de establecer contacto con los estudiantes con base en su participación en la interacción con el investigador. De acuerdo a la estrategia de muestreo teórico expresada por Peter Woods (1987), se trató de incluir en la muestra un amplio espectro de las diferentes formas de pensamiento que se han detectado en la práctica, con lo que después de analizar varios casos pudieron encontrarse regularidades que continuaron cuando se incluyeron más elementos en la muestra y por ello ya no se incorporaron más y el estudio se desarrolló con los elementos más relevantes para arribar a conclusiones.

También considerando al mismo autor, y a Taylor y Bogdan (1992), se estimó que la entrevista a profundidad era el mecanismo más adecuado para recabar datos sobre el problema de investigación que en este caso interesaba, ya que por ser flexible y dinámica permite que los encuentros entre el investigador y el alumno sean dirigidos hacia la comprensión de las experiencias que tiene el alumno. Además es un método que puede ayudar a una comprensión detallada de lo que se obtiene al escuchar y observar al sujeto simultáneamente.

La elección de este método, entrevista a profundidad, también se debió a que permite que un grupo pequeño sea igualmente ilustrativo que uno grande, dependiendo de la interacción que se genere entre los que participan en ella. Además es posible descubrir la variedad de formas de pensar de los entrevistados hasta llegar a agotar las diferencias de sus pensamientos en torno al tema planteado. Esto se percibe porque ya no hay argumentaciones nuevas, son repetitivas.

Para la realización de estas entrevistas fue necesario elegir algunas preguntas así como un procedimiento para su desarrollo, como el de la contraargumentación, establecer diferentes contextos, usos de materiales o situaciones simbólicas, para encontrar formas de acercamiento al pensamiento de los estudiantes cuando se enfrentaban a las situaciones planteadas.

Dichos contextos representaban diferentes opciones de acercamiento a las fracciones lo cual implicó el uso de modelos discretos y continuos o la combinación de ambos.

Selección de alumnos del grupo de estudio.

Se eligió una muestra que reunió las siguientes características: alumnos cuyas edades estuviesen comprendidas entre los 11 y 15 años.

¿Por qué precisamente entre estas edades? Porque apoyándonos en los estudios de Piaget (1965), es posible observar que en la fase operatoria (7 a 11 años) apenas se empiezan a construir las primeras estructuras representativas reversibles, que llevan a la elaboración de las nociones de conservación, lo cual es importante para el manejo de la noción de equivalencia debido a que implica el fragmentar o completar una unidad y establecer las mismas magnitudes en unidades diferenciadas como por ejemplo, 1/2 y 2/4, 1/2 y 4/8.

Alrededor de los 11 ó 12 años se agrega un conjunto de operaciones nuevas, relativas a proposiciones y no a objetos logrando formar una estructura de conjunto creando un sistema de transformaciones propias de las estructuras de orden, siendo éstas fundamentales para el mecanismo de la inteligencia. Es en esta etapa cuando se supone que el niño, desde el punto de vista psicogenético, es capaz de comprender las relaciones que se generan a partir de las fracciones. Por eso es que se espera que los niños seleccionados estén en posibilidades de transmitir valiosas experiencias basadas en sus encuentros con las fracciones.

También con base en estudios realizados por Vergnaud (1991), se sabe que la noción de proporción, la cual está íntimamente ligada a la equivalencia de fracciones, está en el límite de la capacidad de los mejores alumnos al final de la escuela primaria. La noción de razón, la mayoría de los niños de 9 y 10 años no la comprenden, sin embargo, en el ámbito escolar, esto no significa no trabajarla; al contrario, el maestro debe apoyarse en las nociones más evidentes para el niño. Las nociones de razón, razón-operador y proporción son de alto nivel de dificultad para los alumnos de enseñanza elemental, por ello Vergnaud propone trabajarlos durante los dos últimos años de la primaria, y hasta el primero y segundo año de secundaria.

Como el objetivo de este estudio exploratorio era conocer la equivalencia en diversas interpretaciones de la fracción, incluyendo las razones, se decidió trabajar con alumnos que estuvieran en la etapa de completar hipotéticamente sus operaciones lógico-matemáticas o perfeccionando sus construcciones para tener el nivel requerido para esta investigación.

Se seleccionaron alumnos de escuelas oficiales ya que se estimó que este tipo de escuelas serían las más adecuadas por ser en las que se encuentran los niños promedio, es decir de niveles socioeconómicos diversos y de diferente grado de maduración social, pero lo más importante es que en ellas se concentran la mayor parte de estudiantes de los niveles en que se apoya esta investigación y a fin de cuentas es en este tipo de población en la que se concentran los esfuerzos de planeación y elaboración del currículo.

Las escuelas elegidas están ubicadas en el Distrito Federal; se trabajó con alumnos que cursaban 6o. grado de primaria, así como también alumnos de 1o. y 2o. grado de secundaria.

Se seleccionaron alumnos de estos grados, por lo mencionado anteriormente, y debido a que ya han tenido experiencias previas en el manejo de las fracciones, por lo que supuestamente permitirían un trabajo más eficiente en cuanto a la fracción en general y la relación de equivalencia en particular. Es decir, al considerar que el estudiante ya había tenido la oportunidad de trabajar por lo menos tres años con el tema motivo de estudio, se supuso que tal vez las nociones que había adquirido en torno a las fracciones fuesen lo suficientemente sólidas para permitir la comprensión de los problemas planteados.

Instrumentos

Se consideró que para realizar esta investigación lo mejor sería aplicar una metodología cualitativa debido al objetivo que se pretendía conocer: *identificar las diferentes interpretaciones que hacen los niños en torno a la equivalencia de fracciones, ¿qué mecanismo siguen los estudiantes al trabajar la equivalencia con fracciones?* De ahí que, con esta metodología, se puede tratar de comprender los procedimientos y estrategias que emplea un alumno en la solución de problemas relativos a las fracciones y tratar de determinar un patrón acorde con lo observado.

Para ello se diseñó un cuestionario con diferentes problemas relacionados con el tema, algunas de estas situaciones se retomaron de otros estudios y otros fueron diseñados ex-profeso.

La investigación se llevó a cabo en dos etapas: una etapa piloto y la exploración, propiamente dicha. La etapa piloto, además de proporcionar datos para el estudio, implicaba mejorar las estrategias de acercamiento a los estudiantes y poner en práctica algunas formas de trabajo que se detectaron que eran adecuadas. La segunda etapa se realizó en una dirección más profunda en la realización de las entrevistas y en la cual se fueron delineando algunos de los resultados que aquí se presentan.

Las preguntas y la selección de los sujetos que se incluyen en este reporte es la culminación de diversas exploraciones para orientar los procedimientos y mejorar el desarrollo de las entrevistas; los sujetos considerados en este reporte no participaron en la etapa piloto.

Dadas las experiencias de la etapa piloto se consideró pertinente dividir la recopilación de datos en dos momentos:

Durante la segunda etapa se plantearon dos momentos para la investigación:

1o. Entrevistas a tres alumnos de primaria (6o. grado) y tres alumnos de secundaria (1o. y 2o. grado).

2o. Entrevistas a tres alumnos; uno de primaria (6o. grado) y dos de secundaria (1o. y 2o. grado).

En el primer momento se planearon cinco sesiones de 40 a 50 minutos cada una, en días continuos. En la primera sesión se trabajó con todos los alumnos seleccionados de cada nivel, es decir, alumnos de primaria por un lado y alumnos de secundaria por otro lado.

La primera actividad que se realizó consistió en una serie de juegos utilizando fracciones, de tal forma que permitiera establecer una relación de confianza entre los estudiantes y el entrevistador, así como también ir explorando los conocimientos de los niños respecto al tema. Esta serie de ejercicios se puede consultar en el Anexo.

Las cuatro sesiones restantes se trabajaron en forma individual con cada participante, se realizaron entrevistas en donde se plantearon diversas situaciones sobre fracciones y cuyas respuestas fueron controladas por medio de un cuestionario.

Durante estas cuatro sesiones, los ítems se organizaron para su ejecución, de la siguiente manera:

- 1a. sesión: 1 - 4
- 2a. sesión: 5 - 10
- 3a. sesión: 11 - 16
- 4a. sesión: 17 - 21

En el segundo momento de la investigación, se trabajó con otros tres alumnos (un alumno de cada grado: 6o. año de primaria, 1o. y 2o. de secundaria), diferentes a los que ya habían participado. Se desarrolló el mismo trabajo de las situaciones que se aplicaron en el primer momento, con excepción de los juegos. Los tiempos y ejecución de los ítems se ajustaron a lo planeado para el primer momento.

No fue posible realizar los juegos para el acercamiento entre investigador y alumnos debido a la insuficiente cantidad de alumnos para desarrollarlos, sin embargo a lo largo de las cuatro sesiones que conformaron la entrevista se procuró crear un ambiente de tranquilidad y confianza que permitiera el óptimo desarrollo de la misma.

Para llevar a cabo esta exploración se estructuró una entrevista para lograr la posibilidad de establecer comparaciones entre el trabajo de los sujetos y por ello se diseñaron las situaciones a trabajar con los niños. Cada ítem se planteó oralmente aunque se daba libertad para que el alumno leyera el texto, si así lo deseaba y, en ciertos casos, se les daba material concreto para desarrollarlo. Los ítems que requirieron materiales fueron: 2, 3,4, 8, 9, 10 y 13.

La resolución de los ítems se complementó simultáneamente con argumentaciones de los niños, de tal forma que hubiera la posibilidad de conocer el porqué y el para qué de cada una de las acciones de los alumnos. El empleo de este método se decidió por su gran flexibilidad para llegar a obtener respuestas consistentes, porque permite plantear diferentes interrogantes tantas veces como sea necesario.

Todas las sesiones se grabaron en cinta magnetofónica para poder analizarlas considerando, tanto las respuestas de los niños como las intervenciones del entrevistador.

Al tener las respuestas de cada cuestión, se agruparon por similitudes y se hizo un análisis descriptivo. Posteriormente los reactivos se agruparon de acuerdo a los objetivos que se pretendían evaluar.

Características del instrumento.

El objetivo de este instrumento fue conocer la forma en que los estudiantes entienden la equivalencia en relación con los diferentes significados que tiene una fracción.

En relación con el tipo de ejercicios, se incorporaron dos modelos diferentes:

- Modelo continuo → Figuras cerradas planas. (El todo corresponde a una de estas figuras).
- Modelo discreto → Colección de objetos. (El todo está representado por un conjunto de objetos).

En cuanto al <u>**contenido**</u> que se maneja en las situaciones, podemos considerarlas dentro de la siguiente clasificación:

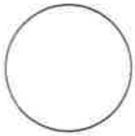
- Sólo requieren interpretar la fracción. (1, 5, 7, 13, 17, 18).
- Requieren el uso de la noción de equivalencia. (2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 19, 20, 21.)

De acuerdo a las <u>**ejecuciones**</u> que deben realizar los estudiantes se pueden agrupar los ejercicios del cuestionario de la siguiente forma:

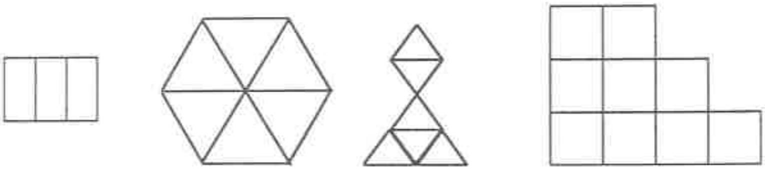
- El alumno tiene que iluminar, doblar o realizar algún trazo en el material. (1, 6, 9, 11, 18, 21)
- Ejercicio que corresponde al modelo discreto, el estudiante debe separar los objetos que correspondan a la fracción señalada. (2, 10, 12)
- De acuerdo a un modelo discreto, el alumno debe de interpretar lo señalado y traducirlo a un lenguaje numérico. (3, 13, 14, 17)
- El estudiante debe comparar las fracciones indicadas en colecciones que corresponden al modelo discreto. (4, 15)
- Ejercicio que se plantea sólo en forma oral y con el cual se pretende que el alumno reflexione sobre otros ejercicios realizados con anterioridad y dé su respuesta también en forma oral. (5)
- Ejercicio correspondiente al modelo continuo en el cual el estudiante debe proporcionar una respuesta en forma oral. (7, 8, 21)
- Ejercicio exclusivamente numérico. (16, 19, 20)

Los ítems que se desarrollaron durante el estudio exploratorio fueron los siguientes:

1. Divide este círculo en mitades.



2. Señala 2/3 en cada uno de los siguientes conjuntos de objetos.
   2.1 En un rectángulo se sobreponen 3 barras.
   2.2 6 triángulos equiláteros se acomodan formando un exágono regular.
   2.3 Los mismos seis triángulos se distribuyen para formar una figura cualquiera.
   2.4 Una figura, similar a una escalera, formada a base de rectángulos.



2.1 2.2 2.3 2.4

3. Estoy colocando azulejos en el piso. Lo que hasta ahora llevo se muestra en la figura. ¿Qué fracción del piso ha sido cubierto?
   Se presenta la figura de un rectángulo (piso del baño) con los mosaicos que ya se han colocado y se entrega un conjunto de triángulos y cuadrados que se pueden sobreponer en la figura.[2]

4. Determina cuáles figuras representan fracciones equivalentes.

- Rectángulo dividido en octavos, señalándose cuatro de ellos.
- Círculo dividido en octavos, señalándose cuatro de ellos.
- Triángulo dividido en dieciseisavos, señalándose ocho de ellos.

[2] Se cubrían 10/24 y 5/12

5. Tienes una naranja y la quieres repartir entre dos de tus amigos, ¿cómo le haces para repartir esa naranja?

6. Ilumina dos tercios de cada figura.

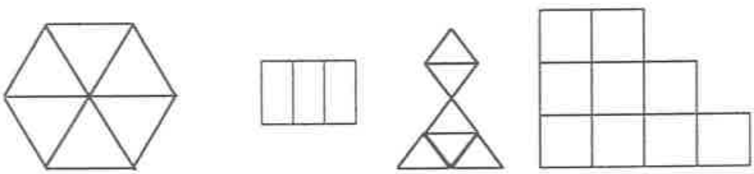
Se entrega una hoja que contiene dibujadas las mismas figuras que fueron trabajadas la sesión anterior, es decir, en el ítem No. 2.

6.1 Exágono dividido en sextos.

6.2 Rectángulo dividido en tercios.

6.3 Figura formada a base de seis triángulos equiláteros.

6.4 Figura similar a una escalera, dividida en novenos.



6.1 6.2 6.3 6.4

7. Observa el siguiente círculo y dime si quedó dividido en dos mitades.

Se presenta un círculo en donde se observa claramente que una de las partes es mayor que la otra.

8. ¿Cómo podrías demostrar lo siguiente?

8.1 Demostrar que 1/2 = 4/8

8.2 Demostrar que 3/4 = 6/8

Para el primer ejercicio se entregan tres rectángulos divididos a la mitad; una mitad de cada rectángulo se divide en medios, sextos y octavos respectivamente.

Para el segundo ejercicio se entregan parejas de secciones de círculos que permiten hacer la demostración solicitada.

9. Ana y Lola tienen cada una, una barra de chocolate del mismo tamaño. Ana partió su chocolate en 8 partes iguales y se comió 4. Lola cortó el suyo en 4 partes iguales y se comió 2. ¿Quién comió más chocolate? ¿Por qué piensas eso?

10. El premio para los ganadores de un concurso son las canicas que se muestran (se presentan 18 canicas). Juan y Hugo fueron ganadores. A Juan le entregaron 1/3 de las canicas y a Hugo 2/6. Separa las canicas que ganó Juan y las que ganó Hugo. ¿Quién ganó más canicas?

11. Raúl y Liliana tienen que hacer un dibujo en un pedazo de cartulina. Raúl divide su cartulina en 6 pedazos iguales y hace su dibujo en 4 de ellos. Liliana divide su cartulina en 3 partes iguales y hace su dibujo en 2 de ellas. ¿Cuál dibujo quedó más grande?

12. Se van a colocar estos focos en tres diferentes salones de una escuela. En uno de ellos se colocan 4/8 de los focos; en otro un cuarto de los focos y el resto en el último salón. Separa los focos que corresponden a cada salón.

13. 5 huevos de una caja de 12 se encontraron rotos.
   13.1 ¿Qué fracción de la caja de huevos está rota? Escríbelo como razón.
   13.2 ¿Qué fracción de la caja de huevos no está rota? Escríbelo como razón.

14. De un grupo de 30 alumnos, 12 son hombres.
   14.1 Escríbelo en forma de razón.
   14.2 ¿La razón que escribiste es equivalente a 2/5? Explica tu respuesta.

15. Dos niños tienen la misma cantidad de dinero. Uno decide ahorrar 1/4 de su dinero, el otro decide ahorrar 5/20 de su dinero.

Marca la respuesta que tú creas correcta.

a). 5/20 es más que 1/4

b). 1/4 es más que 5/20

c). 5/20 y 1/4 es lo mismo.

16. 2/7 = □/14 = 10/▲

16.1 ¿Qué número va en □ ?

16.2 ¿Qué número va en ▲ ?

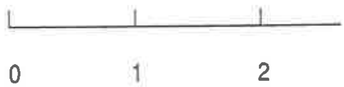
17. 3/4 de un grupo de 6o. grado son niños.

17.1 ¿Cuál es el porcentaje de niños que existe en el grupo?

17.2 ¿Cuál es el porcentaje de niñas?

18. En las siguientes rectas numéricas señala la fracción que se te pide.

18.1 6/5



18.2 4/5

18.3 5/3

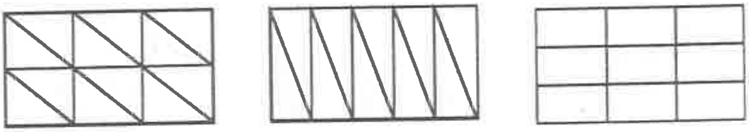
19. Escribe las siguientes fracciones en orden, comenzando por la más pequeña.

1/4 1/2 1/100 1/3

20. Encierra la fracción mayor en cada una de las parejas. La primera está resuelta para ti.

1/4 3/4 3/7 5/7 3/5 3/4 1/2 3/10

21. Marca el rectángulo que tiene la mayor parte sombreada.



Los ítems que conforman el cuestionario pueden ser clasificados de la siguiente manera, con base en el estudio realizado y detallado por Ávila y Mancera (1988).

No.	DESCRIPCIÓN	OBJETIVO	CLASIFICACIÓN
1	Conformado por un círculo en el que se pide que se divida en mitades.	Observar si el alumno tiene la noción de la igualdad de las partes, al ser dividido un todo.	La fracción como parte de una figura.
2	Compuesto por cuatro figuras (rectángulo, dividido en 3 partes; exágono, dividido en 6 partes; especie de escaleras, dividido en 9 partes; y seis triángulos que se acomodan para formar una figura). En cada una de ellas es posible sobreponer barras, triángulos o rectángulos, según corresponda, para posteriormente separar 2/3 de los objetos sobrepuestos en cada caso.	Se pretende concluir si el alumno es capaz de reconocer en modelos discretos, una fracción dada en que el denominador de ésta coincida con el número de partes en que está dividida la figura, así como en el caso de que no coincida. De lograrlo, el siguiente paso es establecer la equivalencia entre las fracciones establecidas en una misma figura.	La fracción como parte de un conjunto.
3	Este ejercicio está formado por un rectángulo (piso de un baño) en el cual se sobreponen triángulos y cuadrados que representan azulejos colocados en el piso.	Se pretende observar si el alumno establece la relación de equivalencia al trabajarlo con triángulos y con cuadrados.	La fracción como parte de una figura.
4	Está conformado por tres figuras (círculo, rectángulo y triángulo) en las cuales se pueden sobreponer algunas de las partes en que fue dividida cada figura.	En éstas se representa la misma fracción para determinar la posibilidad de que el alumno establezca la relación de equivalencia que existe entre las tres figuras.	La fracción como parte de un conjunto.
5	Este reactivo está formado por una pregunta que se plantea oralmente en relación a cómo repartir una naranja entre dos personas.	Interesa observar si el alumno conserva la igualdad entre las partes.	La fracción como parte de un conjunto.

6	Reactivo que presenta casi las mismas características que el ejercicio número 2. La única diferencia es que no se trata de modelos discretos sino de modelos continuos impresos en una hoja de papel. Las indicaciones son: "En cada una de las figuras, sombrea dos tercios".	Uno de los propósitos es el ya señalado para el reactivo número 2. Otro de los objetivos en la realización de este ejercicio es determinar la mayor o menor dificultad al trabajar con modelos continuos o con modelos discretos.	La fracción como parte de una figura.
7	Este reactivo está formado por un círculo cortado por una línea, en partes desiguales.	El objetivo de este ejercicio fue comprobar si la respuesta dada a un ejercicio similar en la sesión anterior (si fue correcta) fue una respuesta consciente o intervino el azar. La diferencia entre este reactivo y el número 1 es que en aquél sólo se presentaba el círculo para que el alumno lo dividiera en mitades y aquí ya está hecha esa división. Esa posible respuesta debió de llegar a establecer la igualdad de las partes.	La fracción como parte de una figura.
8	Este reactivo está compuesto por dos partes; en la primera de ellas se trata de demostrar que 1/2 = 4/8. Para lograr esto se entregan materiales que representan relaciones de equivalencia entre 1/2 y 2/4; 1/2 y 4/8; 3/6 y 6/12.	Se pretende observar si el alumno es capaz de establecer la relación de equivalencia en modelos gráficos cuando un mismo modelo parece estar dividido en partes desiguales, así como también observar el comportamiento del estudiante al enfrentarse a diferentes modelos por el número de partes en que están divididos, no por la forma.	La fracción como parte de un conjunto.
9	Se refiere a un problema en el que se trata de determinar qué niña comió más chocolate si a cada una se le dio una barra de chocolate del mismo tamaño; sin embargo, las porciones que cada una comió se dan como las fracciones 2/4 y 4/8. No es obligatorio el empleo de material, pero sí se les entregan dos tiras de cartulina que representan las barras de chocolate y se les sugiere que pueden utilizar dichos materiales para que se les facilite el trabajo.	El objetivo de este reactivo es indagar sobre la solidez que tiene un alumno para comprender un problema, interpretar las fracciones que existen en éste y observar si logran establecer la equivalencia entre las fracciones	La fracción como parte de una figura.
10	En este reactivo se plantea el reparto de 18 canicas entre dos niños, de acuerdo a la fracción	Mediante este reactivo se trata de que el alumno establezca la equivalencia entre las fracciones,	La fracción como parte de un conjunto.

	señalada para cada uno: 1/3 y 2/6; el material que se les entrega son 18 canicas.	apoyándose en la manipulación de material.	
11	En este reactivo se plantea un problema para determinar cuál de dos niños, realizó el trabajo más grande en una cartulina, de acuerdo a la cantidad empleada por cada uno de ellos para tal fin. Uno de los niños utilizó 2/3 de la cartulina y el otro 4/6 de su cartulina. El ejercicio ofrece libertad para su solución, de tal forma que pueden realizarlo mental, gráfica o algorítmicamente, mediante doblado de papel o como los alumnos lo prefieran.	Con este ejercicio se trata de conocer qué estrategias emplea el alumno para la solución de este problema y también se desea observar si el estudiante puede llegar a establecer la relación de equivalencia	La fracción como parte de una figura.
12	Se plantea en forma escrita un problema en el que se tienen que repartir 16 focos entre 3 salones, de acuerdo a las fracciones indicadas para cada uno de ellos; 4/8 de focos para el primer salón; 1/4 para el segundo y el resto para el tercero. En la hoja están impresos los 16 focos y el alumno debe encerrar los focos correspondientes a cada salón	Se desea conocer la facilidad o dificultad que presenta el alumno para trabajar la relación entre las partes y el todo y observar si es capaz de determinar un subconjunto dentro de un conjunto, así como también, si es posible, nombrar otras formas de referirse a la misma fracción.	La fracción como parte de un conjunto.
13	Este ejercicio está compuesto por dos preguntas en donde se pretende que se utilice la noción de *razón*. Es un problema escrito en donde se señala que existen 12 huevos dentro de una caja; 5 de ellos están rotos, establecer la razón que corresponda. Se le entregan al alumno 12 canicas que representan los huevos para que primero trate de resolver el problema auxiliándose del material. La segunda pregunta es complementaria de la primera, se le pide al alumno que exprese en forma de razón, la cantidad de huevos que no está rota.	Con este reactivo se pretende tener una idea inicial de la capacidad del alumno en el manejo de razones para pasar posteriormente a la equivalencia entre razones.	La fracción como razón.
14	Este ejercicio es un problema por escrito en donde se plantea la situación de un grupo formado por 30 alumnos, de los cuales 12 son hombres y se trata de establecer	El objetivo de este reactivo es observar si realmente hay una comprensión de la razón para poder establecer la relación de equivalencia entre dos razones.	La fracción como razón.

	la razón que corresponde a tal situación. Después de establecer la razón se pregunta si es equivalente a 2/5.		
15	Este problema aparece en forma escrita y ofrece la posibilidad de seleccionar una de las tres respuestas ahí señaladas. Es un problema que se refiere a dos niños que tienen la misma cantidad de dinero (no se especifica cuánto) y cada niño ahorra una parte de su dinero; uno ahorra 1/4 de su dinero y el otro ahorra 5/20 de su dinero. Se tiene que determinar si 5/20 > 1/4, 1/4 > 5/20 ó 1/4 = 5/20	El objetivo es observar si el alumno prefiere utilizar un procedimiento algorítmico sobre uno basado en modelos gráficos. También interesa conocer en qué nivel domina el orden entre las fracciones.	La fracción como expresión numérica.
16	El reactivo No. 16 está compuesto por tres fracciones equivalentes; en dos de ellas se desconoce uno de sus elementos y el problema radica precisamente en determinar qué números hacen verdadera esa relación de equivalencia. 2/7 = □/14 = 10 /▲	El propósito de este ejercicio es nuevamente conocer las estrategias para determinar la equivalencia entre fracciones.	La fracción como expresión numérica.
17	Este reactivo consta de dos preguntas. El problema se presenta en forma escrita, "3/4 de un grupo de 6o. grado son niños", (como se observa no se maneja la cantidad de niños). Las preguntas se refieren a porcentajes: ¿Cuál es el porcentaje de niños que existe en el grupo? ¿Cuál es el porcentaje de niñas?	Con este ejercicio se pretende conocer si el alumno es capaz de interpretar una fracción como un porcentaje y la forma de hacerlo.	La fracción como porcentaje.
18	Este reactivo está conformado por tres rectas numéricas en donde se trata de representar: a) Una fracción mayor que el entero; b) una fracción menor que el entero, y c) una fracción en base a otra fracción ya señalada. (En esta recta no aparecen marcados los números enteros).	Se trata de observar si el alumno mantiene presente la igualdad de las partes al hacer particiones; también se pretende conocer si el alumno tiene la consideración exhaustiva del todo.	La fracción como parte de una figura.
19	El ejercicio consta de cuatro fracciones cuyos numeradores son el número uno y los denominadores son diferentes. Se trata de escribirlas en orden, de menor a mayor.	Se pretende conocer con este ejercicio si el alumno maneja en forma diferente los números enteros de las fracciones; si considera a la fracción como una sola cantidad o como dos	La fracción como parte de una figura.

		elementos aislados; si maneja adecuadamente el orden entre fracciones.	
20	Este reactivo está formado por tres parejas de fracciones cuyas características de cada una son: a) Denominadores iguales, numeradores diferentes. b) Numeradores iguales, denominadores diferentes. c) Numeradores y denominadores diferentes. En cada pareja de fracciones, el alumno debe escoger la mayor, encerrarla en un óvalo y explicar su razonamiento.	Este ejercicio es para comprobar que el alumno acepta que las fracciones son diferentes aunque tengan un elemento en común, ya que podría darse el caso de pensar en fracciones equivalentes por el simple hecho de tener un elemento igual.	La fracción como una expresión numérica.
21	Consta de tres rectángulos divididos en diferente número de partes. Uno de ellos queda dividido en doceavos, otro en décimos y el último en novenos; en cada uno de ellos están sombreadas tres partes. Las instrucciones señalan al alumno que debe marcar el rectángulo que tenga la mayor parte sombreada.	Este ejercicio es para observar si el alumno sabe interpretar la relación parte-todo, la correspondencia del número de subdivisiones del todo con el denominador, así como ver si es posible que el alumno llegue a la conclusión de que mientras el todo se divida en mayor número de partes, menor será el tamaño de éstas.	La fracción como parte de una figura.

RESULTADOS

RESULTADOS

Al tener las respuestas de cada cuestión, se agruparon por similitudes y se hizo un análisis descriptivo. Posteriormente los reactivos se agruparon de acuerdo a los objetivos que se pretendían evaluar.

Tipos de análisis realizados:

- Por situación.
- Por objetivos (grupos de situaciones similares).

Con objeto de identificar rápidamente a cada uno de los alumnos, a continuación se enlistan sus claves, su nivel escolar y su aprovechamiento, de acuerdo al criterio de sus maestros.

CLAVE	*NIVEL ESCOLAR*	*APROVECHAMIENTO*
I	Primaria	Alto
C	Primaria	Medio
G	Primaria	Medio
H	Primaria	Bajo
L	Secundaria (1o.)	Bajo
A	Secundaria (2o.)	Medio
E	Secundaria (2o.)	Alto
N	Primaria	Medio
J	Secundaria (1o.)	Bajo
F	Secundaria (2o.)	Medio

Alumnos que participaron en el primer momento de la investigación.

Alumnos que participaron en el segundo momento de la investigación.

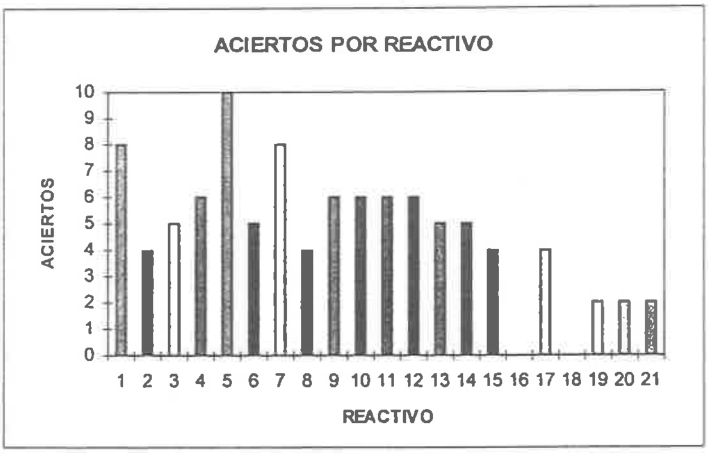
Se planeó realizar la investigación en dos momentos con el objeto de ratificar o descubrir nuevos comportamientos en el segundo momento respecto de los resultados obtenidos durante el primero, es decir, si las conductas eran repetibles significaría que la muestra era suficiente para obtener conclusiones.

Inicialmente se había planeado trabajar sólo con tres niños en cuanto a alumnos de 6o. grado se refiere, pero durante el desarrollo de las entrevistas se presentó un caso en el que se manifestaba una escasa noción del manejo de fracciones; se decidió considerarlo como un caso particular y se seleccionó otro alumno de 6o. año. Sin embargo, durante el segundo momento de la investigación otros casos similares hicieron su aparición, por lo tanto se decidió no considerarlos como casos aislados y fueron incluidos en el rango correspondiente.

Análisis por situación.

Este primer análisis se realizó tomando reactivo por reactivo.

En la siguiente gráfica se puede observar una visión general de los resultados obtenidos durante la exploración.[3]



[3] En los casos de reactivos con varios incisos, para efectos de la gráfica se consideró como respuesta correcta solamente que hubieran obtenido todos los incisos correctos.

Un comentario de manera muy general, es que de acuerdo a lo que se observa en la gráfica, se puede pensar que el ítem No. 5 fue de un grado mínimo de dificultad y caso contrario, los ítems 16 y 18 requirieron de estrategias que los alumnos no lograron concretar, posiblemente por la dificultad que representó para ellos.

Ítem No. 1

En el ítem No. 1, de los 10 alumnos entrevistados, 8 dividieron correctamente el círculo en dos mitades, sin embargo conviene señalar que dos de ellos primero sintieron la necesidad de preguntar si lo dividían en una mitad o en dos.

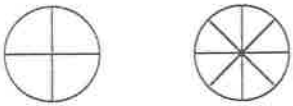
Las dudas que manifestaron los alumnos en torno a la ejecución de este ejercicio nos llevan a pensar qué difícil resulta la lectura e interpretación del lenguaje matemático, por muy obvio que parezca un enunciado para algún adulto.

Fragmentos de entrevistas	*Observaciones*
M: "...quiero que este círculo que está aquí lo dividas en mitades..." A: ¿Una mitad? A: ¿Mitades? M: ¿Puedes dividirlo en una mitad? A: No. M: ¿No? ¿Cuántas? A: Dos. A: Dos	*No se decide a actuar sin antes confirmar lo que cree que se le pide.*
M: "Primero vas a dividir este círculo en mitades" E: "¿En mitades? M: "Sí, aquí hay material si quieres tomar algo..." E: "Una mitad o dos? M: "...lo que tú pienses que está bien"	*Nuevamente se nota la confusión con el lenguaje empleado.*

Los otros dos alumnos de la muestra que por cierto correspondían a 1o. y 2o. grado de secundaria (J y F)[4], empezaron dividiendo en 2 partes "iguales" y siguieron dividiendo (siempre en dos partes); uno

[4] Se utilizarán letras para identificar a cada alumno.

de ellos (J) se detuvo cuando llegó a 4 partes y el otro (F) al obtener 8, como si consideraran que las partes obtenidas debieran seguirse dividiendo entre 2. No obstante se notó la tendencia a conservar la igualdad de las partes.

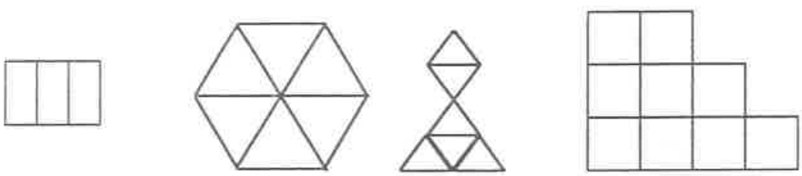


Particiones incorrectas: Divide un círculo en mitades.

Los respuestas anteriores tal vez se deriven de una reinterpretación inadecuada de la indicación dada, la cual podría ser interpretada como: "Divide este círculo en todas las mitades que puedas".
Tal vez por la tendencia a utilizar fracciones con múltiplos de 2, considerando que se trabajan primero fracciones que involucran medios, cuartos y octavos, el alumno reinterpreta a los *medios* como el hecho de seguir dividiendo en 2 cada parte. Pero no es tan sólo al inicio de las secuencias didácticas sino también cuando se trabaja la relación de equivalencia, las primeras demostraciones generalmente son a base de doblado de papel en el que representan las fracciones antes mencionadas.

Ítem No. 2

En cuanto a 2.1 todos los alumnos tuvieron éxito para separar los dos tercios. Era la figura más sencilla puesto que coincidía el denominador con el número de partes en que estaba dividida la figura.

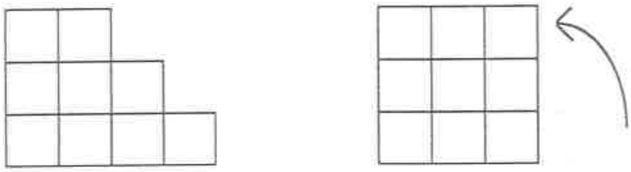


2.1 2.2 2.3 2.4

Con los demás reactivos hubo bastantes diferencias, en general, con 2.2, 2.3 y 2.4 hubo 3 alumnos (L, H, F) que no pudieron resolver este problema; por toda justificación mencionaron que "había más partes de las que se señalaba en la fracción", es decir no podían separar los tercios si la figura estaba dividida en sextos o en novenos. Esta idea errónea fue el obstáculo que impidió llegar a establecer la equivalencia de las fracciones involucradas en este ítem.

Otros 3 alumnos (C, I, E) manejaron sin dificultad alguna estos tres ejercicios, dos de ellos de primaria y uno de secundaria.

Uno de los alumnos de secundaria (A), finalmente logró resolver de forma correcta esta serie de ejercicios, después de aplicar una transformación de las partes de una figura, y llegar a darle una forma más convencional a dicha figura en la que le fue más fácil apreciar los tercios. Esto hace suponer que existe la tendencia de enseñar fracciones primordialmente con determinadas figuras (cuadrado, círculo, rectángulo), de tal forma que el alumno al enfrentarse a nuevas situaciones presenta incapacidad para su interpretación.



Representación de la "transformación" realizada por el alumno.

Uno de los estudiantes de primaria (N), señalaba que 2/3 eran dos partes de cualesquiera de las figuras, sin poder argumentar por qué razón daba esa respuesta. Este hecho muestra que existe predominio en la cardinalidad de la parte, es decir, el alumno centra su observación sólo en el numerador y se olvida o resta valor al denominador y la relación entre ellos.

Otro de los alumnos de secundaria (F) se centró en el denominador, de tal forma que interpretó 1/3 como lo equivalente a 3 objetos, por lo tanto 2/3 es separar 6 objetos, ya que es dos veces 3. Aquí aparece una disociación de los elementos de la fracción; a los numerales que encuentra los considera números enteros y establece una nueva relación entre ellos.

Finalmente, en otro de los casos de primaria (G) se nota un manejo muy incipiente del tema; en la primer figura señala correctamente 2/3; en la 2a. y 3a. señala 2 partes de cuatro, de tal forma que es difícil interpretar el porqué el alumno ejecuta acciones que indudablemente lo llevan a errores. Parte del trabajo realizado se muestra a continuación:

Fragmentos de entrevistas	*Observaciones*
M: ¿Y por qué crees que estos sean dos tercios? G: Porque serían mitad de los triángulos... M: La mitad de los triángulos y... ¿yo te pedí la mitad de los triángulos? o ¿por qué crees que sean dos tercios? G: Porque eran seis triángulos y le di tres... M: Y ya con eso son dos tercios.	
Bueno, pasamos a otra figura, ésta... ya sobrepuse unos rectángulos ahí encima de la figura, entrégame dos tercios de esos rectángulos.	*Se le señala la figura 2.4.*
M: ¿Estos son dos tercios ¿Por qué crees? ¿Cuántos me diste? G: Tres. M: Tres, ¿por qué crees que los tres rectángulos sean dos tercios del conjunto de rectángulos? G: Porque son nueve rectángulos y... son nada más tres...es la cuarta parte de...	*Entrega tres rectángulos porque dice que son la cuarta parte de los nueve rectángulos y cuando se le pregunta por qué, no sabe qué responder*
M: ¿Tres es la cuarta parte de ese conjunto? y si es la cuarta parte ¿por qué me das éstos si yo te pedí dos tercios. G: Porque...	*Después de unos minutos dejamos de lado el ejercicio.* *No fue posible obtener más información.*

Ítem No. 3

En relación al ítem No. 3, cinco de los alumnos (E, I, C, L, y H) manejaron con gran habilidad este problema; cabe mencionar que uno de ellos (C) no quiso emplear el material, sino que lo resolvió mentalmente y también fue capaz de dar una solución correcta cuando se le pidió que diera la respuesta con otro denominador. En este ejercicio, los alumnos primero interpretaron la fracción que estaba indicada y posteriormente al cambiar el material (a triángulos y cuadrados) lograron establecer la equivalencia.

Se pudo observar que para otros alumnos no fue de mucha utilidad el material, pareciera que se volvió como un obstáculo para determinar la equivalencia, tal vez confirmando lo que Streefland (1977) afirma en cuanto a que el empleo de materiales para el manejo de fracciones equivalentes no es muy útil porque generalmente, después de unos pocos ejemplos con materiales concretos, "la equivalencia se aborda exclusivamente de manera algorítmica".[5]

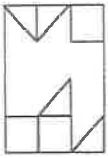
Uno de los estudiantes (A) no pudo concretar la idea, sabía que se podían formar 12 cuadrados dentro de la figura, pero no logró establecer la cardinalidad de la parte.

Dos alumnos (N y G) coincidieron en nombrar la fracción que estaba representada por el azulejo como 1/5, al preguntarles el porqué, también coincidieron en afirmar que se formaban cinco cuadrados (de ahí el 5) y existía solamente un piso (de ahí el 1). Estos casos muestran la importancia de que el alumno *comprenda* fehacientemente, mediante diversos ejemplos y ejercicios la noción de fracción, para no llegar a extremos como los que se manifiestan en estas observaciones.

Otro alumno (J) reunió **arbitrarlamente** los números que intervinieron en el problema para determinar una fracción, la cual no correspondía a lo planteado. Al observar que, de acuerdo con los azulejos colocados, por un lado del rectángulo se podían formar 2 cuadrados y por otro lado de podían formar 3 cuadrados, relacionando estos números estableció que quedaba representada la fracción 2/3.

En la siguiente figura se observa la respuesta dada por los últimos tres alumnos a que se hace referencia.

1/5



2/3

1er. caso.- Los alumnos (G y N) consideran que en la figura está representado 1/5 porque se forman 5 cuadrados y hay un piso.

2o. caso.- El alumno (J) considera que en la figura está representado 2/3 porque en la parte superior se forman 2 cuadrados y en la inferior, 3 cuadrados.

---

[5] Streefland (1977) p. 2

Otro alumno (F) no pudo determinar con exactitud la fracción cubierta por el azulejo, pero "aparentemente" tiene la noción de lo que es la mitad de una figura pues al observar la superficie representada afirmó que la superficie que se había colocado era "menos de la mitad", lo cual, ciertamente, es correcto.

Ítem No. 4

Este ítem fue sencillo para 6 de los alumnos (A, C, I, E, F y H) quienes notaron que las partes sombreadas pueden ocupar cualquier posición sin modificar la fracción representada ya que después de haber sido interpretada una de las figuras, se les cambiaba de lugar las partes sombreadas y ellos concluían que la fracción se conservaba; dos de ellos también observaron que es más sencillo identificar la fracción si aparecen todas las partes sombreadas juntas y no intercaladas. A continuación se muestran ejemplos de los diálogos:

Fragmentos de entrevistas	*Observaciones*
M: ¿También aquí si los cambio de lugar, éste por acá, éste por acá y éste por este lado, sigue siendo la misma? A: Ajá. M: Oye... ¿cómo se te facilitaría más?, hace un momento me dijiste que... ahí la fracción que estaba representada era un medio, pero estaban colocadas de otra manera las partecitas. Si yo te lo hubiera puesto así desde un principio *(las partes iluminadas intercaladas con las que no lo están)* ¿también me hubieras dicho fácilmente que era un medio? o te hubiera costado más trabajo. A: Hubiera dicho cuatro octavos. M: Hubieras dicho cuatro octavos y como tú las acomodaste así, ahí se te hizo más fácil decir qué... A: Un medio. M: Un medio, ¿verdad?	*Todas las partes sombreadas estaban juntas.*

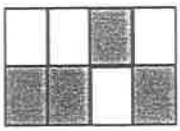
Con otro de los alumnos:

Fragmentos de entrevistas	*Observaciones*
M: ... Oye... hay otra cosa ahorita ya me dijiste la respuesta, pero supongamos que hubiera yo colocado	

así la figura, ¿qué fracción me dirías que está aquí representada? I: Cuatro octavos. M: Cuatro octavos o qué otra cosa, ¿de qué otra manera podrías leer esta fracción? I: Un medio. M: Un medio, ¿y ésta, cómo la podrías leer si la hubiera colocado así? I: Un medio. M: Un medio, ajá. ¿Tú crees que si te las hubiera colocado como ahorita las puse te hubiera sido más fácil decirme desde un principio que representaban lo mismo, que aquí estaba un medio y que aquí estaba un medio o hubiera sido lo mismo? I: Hubiera sido más rápido pero de todas maneras es lo mismo.	*Primero se le presentaron las partes sombreadas intercaladas y posteriormente se colocaron juntas.*

Dos de los alumnos (N y G) consideraron al numerador como el número de partes sombreadas y al denominador como el número de partes sin sombrear, llevándolos a conclusiones erróneas. Es decir, conciben a la fracción como una yuxtaposición del numerador y el denominador.

Uno de los alumnos (J) desvió completamente la idea de noción de fracción, ya que para él, el numerador de una fracción queda representado por el número de partes sombreadas que aparecen en la parte superior de la figura y el denominador, por el número de partes sombreadas en la parte inferior de la figura. (Ver Fig. No. 1) El mismo alumno fue el que interpretó de manera similar el reactivo No. 3, el cual ya fue ilustrado con anterioridad. Es una especie de hipótesis "espacial" en donde el numerador, que se escribe arriba, correspondería a la cantidad de partes sombreadas arriba y el denominador las partes sombreadas abajo.



1/3

Fig. No. 1

Se transcribe parte de la entrevista realizada con el citado alumno:

Fragmentos de entrevistas	*Observaciones*
M: Bueno, me vas a ayudar a colocar estos triangulitos.	*En sus respuestas se muestra que él concibe la equivalencia como la*

J: ¿Como yo quiera? M: Ajá. Éstos déjalos del lado café. M: Está muy latoso éste ¿verdad? M: Bueno, ahora yo quiero que observes las tres figuras y que me digas si tú crees que alguna de ellas o todas están representando la misma fracción, es decir, si son fracciones equivalentes, si todas representan lo mismo o no, o nada más dos, o ninguna, o si todas son diferentes. J: Éstas. M: Éstas dos ¿por qué? J: Porque nada más tienen... porque tienen todas forma de triángulos. M: Ah, bueno, pero te voy a decir que estos no son triángulos ¿eh? J: No... M: No porque están curvitas, se parecen... más bien parecería un cono si fuera un cuerpo, pero no son triángulos. J: Estos porque son triángulos ¿no? M: Tú me podrías decir ¿qué fracción está representada aquí en esta figura? J: ¿En esta figura? M: Ajá, ¿qué fracción? J: Ah ¿en todas? M: Ajá. J: Ésta. M: Ésta ¿con cuál otra? J: No, nada más ésta. M: No, pero me puedes decir ¿qué fracción está señalada ahí? J: ¿Aquí? M: Ajá. J: ¿Un tercio? M: ¿Cómo sabes que es un tercio? J: Porque un tercio... *(ininteligible)* M: Bueno y aquí ¿qué fracción está señalada? J: ¿Cuatro cuartos? M: ¿Cuatro cuartos están ahí? Bueno cuatro cuartos y acá un tercio ¿ésta es equivalente a ésta o no? O sea, cuatro cuartos es lo mismo que un tercio ¿o no? J: No. M: No. Bueno y aquí qué fracción está señalada? J: Dieciséis. M: Dieciséis ¿qué? J: Ocho octavos. M: ¿Ocho octavos? ¿por qué sabes que son ocho octavos? J: Porque son ocho triángulos y ocho de otro color.	*igualdad de la forma de las partes. De ahí que piense que las fracciones señaladas en el círculo y en el triángulo son equivalentes puesto que "todas son triángulos"* *Señala que son equivalentes el rectángulo y no sabe cuál otra. Se le cuestiona sobre qué fracción está señalada y dice que 1/3, la razón es que en el rectángulo dividido en 8 partes, una de ellas queda sombreada arriba y tres en la parte de abajo.* *En realidad, en las dos figuras estaba representada la fracción 4/8.*

M: Ajá, muy bien.	

Los problemas mencionados con anterioridad reflejan que el alumno presenta cierta dificultad para conectar los elementos involucrados en la relación parte-todo.

Otro alumno (L) aunque pudo interpretar correctamente las fracciones, no logró establecer la equivalencia entre todas las figuras por no estar divididas en el mismo número de partes y por lo tanto, representadas por el mismo denominador, es decir, para él las figuras son equivalentes cuando están representadas por el mismo numeral. Por eso no consideró la fracción señalada en el triángulo, equivalente a las otras dos, ya que estaba dividida en más partes que el círculo y el rectángulo.

Ítem No. 5

En el ítem No. 5 todos los alumnos confirmaron la igualdad que debe de existir entre las partes. Sin embargo, dos de ellos en un principio mostraron confusión y dejaron entrever que las partes podían ser desiguales. Parte de las entrevistas se presentan a continuación:

Fragmentos de entrevistas	*Observaciones*
M: ... Tienes una naranja y la quieres repartir entre dos de tus amigos, ¿cómo le haces para repartir esa naranja? C: La partiría a la mitad. M: ¿A la mitad? C: Y le daría la mitad a cada uno. M: ¿Y por qué a la mitad? C: Porque... tengo que repartir partes iguales a mis dos amigos, entonces les toca una mitad. M: Ajá, ¿y si no la partes exactamente en partes iguales, seguirían siendo mitades o ya no seguirían siendo mitades? C: Sí, no... M: ¿Sí o no? C: No, sí. M: ¿No, sí? Sí seguirían siendo mitades ¿aunque no estuvieran iguales? C: Sí, no, tienen que ser iguales.	*Titubea en su respuesta*

Otro fragmento de entrevista:

Fragmentos de entrevistas	*Observaciones*
E: La partiría a la mitad. M: ¿La partirías a la mitad? ¿Si tú partes algo a la mitad tienen que ser forzosamente partes iguales o puede ser una más grande que la otra? E: Puede ser una más grande que la otra. E: ...Las parto iguales. M: ¿Las partes iguales? E: Sí. M: Y seguiría siendo la mitad... ¿y de la otra forma, si le hubieras dado a uno no sé un pedacito nada más de la naranja y al otro mucha? ¿qué? ¿Estarían partidas a la mitad? E: No. M: ¿No? Entonces... ¿sí o no? E: No.	*Al hacerle esta pregunta al alumno, él primero dice que aunque no sean iguales, sí se parte a la mitad. Después rectifica.* *Cabe aclarar que al término de la sesión el alumno comentó que él se refería a que en el momento de partir la naranja sería difícil hacerlo exactamente a la mitad dadas las características de la fruta.*

Ítem No. 6

En cuanto al ítem No. 6, cuatro de los alumnos (I, C, H y E) resolvieron correctamente este ejercicio dividiendo el número total de partes que forman el entero entre 3, para saber cuántos elementos formarían un tercio y posteriormente señalar lo correspondiente a dos tercios, es decir, trabajaron algorítmicamente, se centraron en el denominador y después establecieron la relación con el numerador. También consiguen establecer la equivalencia entre 2/3 y 4/6, y entre 2/3 y 6/9. Uno de los estudiantes (I) logra resolver este ejercicio mentalmente.

Dos de los estudiantes (A y J)) parecen centrarse únicamente en el numerador ya que iluminan dos partes de cada figura. Al preguntarles en qué se basaron, uno de ellos (A), solo, descubre su error y corrige todas las figuras. (J) insiste en iluminar dos partes de cada figura y la forma de leer la fracción 2/3 ó 4/6, para él, es 2/4 (dos iluminadas y cuatro sin iluminar).

Tres estudiantes (L, F y N) señalan que no es posible determinar una fracción cuando el denominador no coincide con el número de partes en que está dividida la figura. Se observa cómo no han logrado aprehender la noción de fracción que les hubiera permitido reflexionar e interpretar adecuadamente esa relación parte-todo hasta llegar a observar la equivalencia entre las fracciones sin importar la cardinalidad del todo.

Uno de los alumnos (G) mostró cierta inclinación que parecía llevarlo a la idea errónea de que el numerador señala el número de partes en que se debe dividir el entero, de ahí que para señalar la fracción 2/3 en un entero dividido en seis partes, consideraba que el entero se debía dividir en dos partes; tal vez como la división era exacta quedaba convencido de tal acción. Sin embargo, cuando hubo necesidad de separar 2/3 de un entero dividido en nueve partes, dividió dos veces entre 2 sin tener argumentos válidos para ello.

Ítem No. 7

En el ítem No. 7, 8 de los estudiantes (exceptuando a L y G) mencionaron, sin dudarlo, lo esencial que resulta la igualdad de las partes en cualquier figura fraccionada; dos de los alumnos (C y E) habían mencionado en el ítem No. 5 que las mitades podían ser de diferente tamaño, sin embargo, en ese momento reflexionaron y reconsideraron su postura. Esto les permitió contestar acertadamente y con mayor facilidad el ítem No. 7.

Observemos los comentarios de C.

Fragmentos de entrevistas	*Observaciones*
M: Ahora fíjate tengo este círculo, obsérvalo, ¿ese círculo quedó dividido en dos mitades? C: No. M: No ¿Por qué no? C: Porque no es la misma cantidad. M: O sea no están del mismo tamaño las partes. C: Ajá. M: Ajá, pero hace ratito que te platicaba de la naranja, me dijiste que sí podía quedar una mitad más grande que la otra, ¿sí es cierto o no es cierto que pueden quedar una más grande que	*Confirma que las partes deben ser iguales.*

otra? si lo quieres partir, digamos este círculo, has de cuenta que este círculo es la naranja y la vas a partir a la mitad, ¿puede quedar una porción más grande que la otra? C: No. M: ¿No? ¿tienen que ser iguales? C: Sí M: ¿Sí? M: Y entonces... ¿si haces esto con tus amigos al repartirles la naranja? C: A uno le va a tocar más que a otro. M: ¿No crees que se enojen? C: Sí, al que le tocó menos. M: Al que le tocó menos, entonces para que sean mitad, ¿qué debe de pasar? C: La debo dividir a la mitad... M: ¿Cómo deben de ser esas partes? C: Iguales. M: Iguales, porque si no, no es mitad, bueno muy bien.	

Por otro lado, (E) contesta más seguro de sí:

Fragmentos de entrevistas	*Observaciones*
M: Ahora te voy a mostrar una figura. ¿Este círculo ha sido dividido en mitades? E: No. M: ¿Por qué no? E: Porque una parte es más grande que la otra. M: Y entonces... ¿así no se puede dividir en mitad? E: No, porque las mitades son exactamente iguales. M: Ajá, y de una figura completa ¿cuántas mitades se pueden obtener? E: Dos. M: Dos. Bueno, entonces quedamos en que esto no está dividido a la mitad.	*Se observa su seguridad al contestar.*

Uno de los entrevistados (L), a pesar de la respuesta correcta dada en el ítem No. 5, en relación al tamaño de las mitades, insiste en que las mitades pueden ser diferentes. Veamos parte de la entrevista:

Fragmentos de entrevistas	*Observaciones*
M: Ahora... te voy a presentar otro dibujo, este círculo. ¿Este círculo está dividido en mitades? L: Se podría decir que sí. M: ¿Sí? ¿Por qué? L: Porque... está partido. M: Ajá, entonces ¿en cuántas partes estaba dividido el círculo? L: En dos. M: En dos. ¿Y cada una de ésas es una mitad? L: Sí. M: ¿Si? L: Pero no son iguales, las mitades no son iguales. M: Las mitades no son iguales, o sea, las mitades pueden ser de diferente tamaño. L: Ajá. M: Oye, y por ejemplo hace rato que te hablaba de la naranja para tus dos amigos... si tú partes así la naranja, haz de cuenta que ésta es la naranja, y la partes así ¿no crees que hubiera algún problema entre tus amigos? L: Sí. M: ¿Por qué? L: Porque no les tocarían partes iguales. M: ¿Quién se pondría muy contento? L: El que tuviera más naranja. M: Y el otro... a la mejor se enojaba. Y entonces hace ratito me dijiste que les darías la misma cantidad ... hasta donde fuera posible por si no te quedaba exactamente, pero tú tratarías de darles lo mismo. ¿Éstas también serían mitades? L: Sí. M: ¿Si? Pero éstas también son mitades. L: Mjm.	*El alumno insiste en que las mitades pueden ser de diferente tamaño.*

Un alumno (G) argumentó que el círculo no estaba dividido en dos mitades, pero no hizo referencia a la igualdad que debería de existir entre las partes, sino que se observó que para él, decirle "divide en dos mitades" equivale a decir "divide dos veces a la mitad", de tal forma que la figura no estaba dividida en mitades, como lo mostró en el ítem No. 1. Nuevamente ¿dificultades en la forma de concebir la fracción o en la manera de comprender el lenguaje matemático?

Ítem No. 8

En el ítem No. 8, para cuatro alumnos (C, I, E y H) fue sencillo identificar fracciones equivalentes en los modelos y comprobar al sobreponer las figuras. Mostraron la idea de la igualdad de las partes al partir primero la figura en partes de igual tamaño, para posteriormente establecer la equivalencia entre las fracciones. Uno de estos alumnos (E) prefirió el manejo algorítmico de esta relación y efectuó la simplificación de fracciones para encontrar la equivalencia. Al decirle que no era suficiente esa demostración, se le pedía que lo hiciera con el material y lo hacía sobreponiendo las figuras.

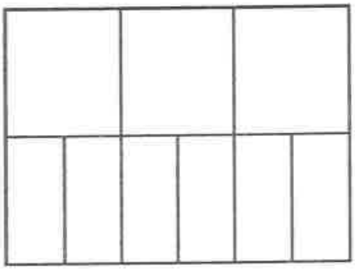
Otro alumno (L) también consiguió hacer la demostración de las figuras equivalentes, pero en un principio olvidó que las partes deben ser iguales y afirmó que una figura dividida en cinco partes, sin importar el tamaño de las partes, está dividida en quintos. Momentos después corrigió su error y reafirmó la igualdad de las partes.

A uno de los estudiantes (A) se le dificultó demasiado este ejercicio y aunque se le explicó la primera parte, no consiguió demostrar la equivalencia con modelos gráficos en la segunda parte del ejercicio; lo que resulta coherente en tanto se le pedía mostrar una equivalencia que, en principio, para él podría no serla. Se hace referencia a "demasiada dificultad" en tanto que a pesar de que se le dio una breve explicación de cómo podía llevar a cabo la demostración de que □ = 4/8, no logró concretar la demostración que se pedía en el segundo caso.

Para otro de los alumnos (G) resultó algo verdaderamente difícil, aunque en determinados momentos señalaba las figuras correctas, en ninguna ocasión supo explicar el porqué de su determinación.

Caso aislado que surgió con este ejercicio:

- (J) Lee e interpreta las fracciones de acuerdo a la hipótesis "espacial" señalada con anterioridad. Por ejemplo, un rectángulo dividido horizontalmente a la mitad; después, la parte superior dividida en 3 columnas verticales y por último la parte inferior dividida en 6 columnas verticales la representa como la fracción 3/6, aún sin estar sombreado nada. (Ver fig. No. 2)



3/6

Fig. No. 2

Mantiene su hipótesis: $\frac{3}{6}$ arriba
abajo

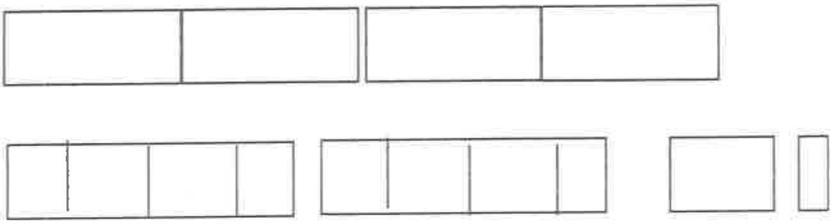
Para dos estudiantes (N y F) resultó un gran problema relacionar la representación gráfica de las fracciones con su representación simbólica ya que el denominador no coincidía con la cardinalidad del total de las partes y concluyeron que ninguna de las representaciones correspondía a la fracción solicitada.

Ítem No. 9

En el problema de las barras de chocolate, 6 alumnos (A, C, I, E, L y H) pudieron concluir que las dos fracciones eran equivalentes, al pedirles una explicación, lo hacen manipulando las tiras de papel (barras de chocolate), muestran las particiones en cada barra y concluyen que las dos niñas comieron la misma cantidad de chocolate: un medio. Dos de estos alumnos, (E y C) inmediatamente percibieron que las cantidades que comieron las niñas eran iguales, es decir, cada una comió la mitad de su chocolate; no fue necesario para ellos, el empleo de ningún material.

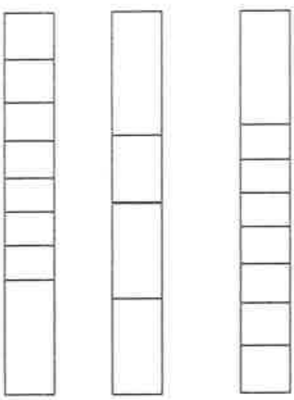
Dentro del grupo de seis alumnos que lograron éxito en este ejercicio, uno de ellos (L) lo hizo utilizando una regla para medir la barra y realizar las operaciones necesarias para determinar la longitud de cada porción. También se dio el caso del alumno (A) que inicialmente respondió equivocadamente pero, al momento de explicar su estrategia, procede correctamente y observa que las dos niñas comieron la misma cantidad; establece la equivalencia entre las fracciones requeridas.

En uno de los estudiantes (G) se pudo observar que no tiene firme la reconstrucción del todo. Para este alumno es aceptable el "cortar" la parte "sobrante" al hacer una partición; no tiene presente la conservación del todo. De ahí que al momento de comparar los modelos, las representaciones no sean equivalentes.



En primer lugar se encuentra el chocolate de Lola *(el alumno primero cortó a la mitad la barra y después las marcó nuevamente a la mitad)*. En segundo lugar aparece el chocolate de Ana *(el alumno primero dividió mediante líneas la barra en ocho partes casi iguales, casi porque en ningún momento hizo dobleces o mediciones, sino a simple vista, pero como sobraba parte de la barra optó por cortarle dos pedazos; posteriormente cortó a la mitad lo que consideró que era la barra de chocolate)*. Lógicamente al compararlas se observa de mayor tamaño la porción de Lola que la de Ana.

Dos estudiantes (J y N) dieron respuestas incorrectas a causa de no considerar la igualdad entre las partes que debe existir al fraccionar un todo. Uno de los casos (N) se ejemplifica a continuación.



I II III

La barra central es la de Lola, las de los extremos representan la de Ana. *(Es la misma barra pero colocada en sentido inverso)*. Se puede observar en la barra de Ana que una de las porciones es de mayor tamaño que las demás, de tal forma que si se compara de abajo hacia arriba, I con II resulta ser mayor I y si se compara II con III, es mayor II. *(No olvidar que I y III son la misma barra)*.

Otro estudiante (F) se rehusó a emplear el material, posiblemente porque no sabría que hacer con él; su respuesta fue incorrecta y no supo justificarla.

Ítem No. 10

La situación No. 10 presentó serias dificultades; seis de los estudiantes (A, C, I, E, L y H) lograron éxito en la tarea. Todos ellos empezaron por dividir el número de canicas entre el denominador para saber cuántos grupos deberían de formar y conocer el número de canicas que quedaban en cada grupo.

De los estudiantes que no dieron la respuesta correcta, se pueden mencionar los siguientes casos:

Dos de los estudiantes (G y N) centraron su atención en el denominador, considerando que éste es quien determina el número de objetos que se toman, por lo tanto 1/6 son 6 canicas y 2/6 son 12 canicas.

1/6 = ○ ○ ○ ○ ○ ○

2/6 = ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

Otro de los estudiantes (J), para calcular el número de canicas correspondiente a cada niño, sumó los elementos de la fracción (numerador y denominador) sin poder dar alguna explicación. Para él, 1/3 representaban 4 canicas ya que 1 + 3 = 4. Muy probablemente no sabía qué hacer pues evidentemente no maneja la noción de fracción.

También se observó el caso de un estudiante (F) que interpreta la fracción como una parte de otra parte, por lo que 1/3 significa tomar primero tres canicas y después de ésas, tomar una.

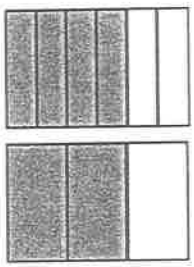
Ítem No. 11

El ítem No. 11 permitió que 6 alumnos (A, C, I, E, L y H) demostraran su dominio en la ejecución de tareas con fracciones.

Tres alumnos (A, I y H) lo resuelven mentalmente y hacen su demostración a base de diagramas. (A) lo hace con enteros diferentes y al pedirle que lo haga en un mismo entero para observar mejor los espacios utilizados, lo hace con seguridad y demuestra la equivalencia de las fracciones.

Otro de estos 6 estudiantes (E) lo resuelve primero utilizando productos cruzados y posteriormente para demostrarlo lo hace con el doblado de una hoja de papel.

Uno más (C) primero encuentra la respuesta apoyándose en diagramas trazados por él y posteriormente con hojas de papel doblado demuestra la equivalencia de las fracciones.

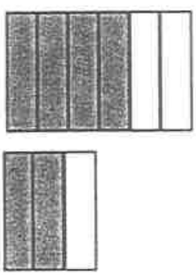


4/6

2/3

Otro de estos estudiantes (L) se va directamente a la demostración mediante la sobreposición de hojas que ha doblado previamente, de acuerdo a las fracciones señaladas.

En cuanto a errores observados, destaca el de un alumno (G) en que se observa nuevamente la no conservación del todo y el manejo arbitrario del tamaño del entero, a pesar de que se trate de dos objetos iguales, fijando su atención solamente en el denominador.



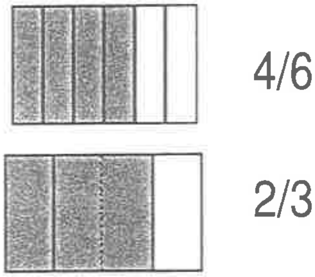
4/6

2/3

Puede observarse cómo representa la cartulina de Raúl dividida en 6 partes iguales, de las cuales ilumina cuatro. Al representar la cartulina de Liliana lo hace sólo en la parte equivalente a la mitad de la cartulina de Raúl, al preguntarle por qué las cartulinas de ellos son de diferente tamaño, su respuesta es que sólo va a utilizar tercios, por eso sólo traza tres partes.

Uno de los estudiantes (F) afirma que es más grande el dibujo de quien lo hizo en más partes. Se le sugiere que lo haga a través de un dibujo; logra hacerlo y señala que se observan del mismo tamaño, pero a pesar de esto sigue afirmando que uno de los dibujos es más grande.

Otro de los estudiantes (J) trata de representar las fracciones en forma gráfica, sin embargo, en uno de los dibujos que tenía que partir en tercios, lo divide en cuatro partes; se le pregunta en cuántas partes tenía que estar dividido y nota su error, por lo tanto borra una de las líneas y la figura queda dividida en tres partes sin considerar la igualdad que debe existir entre ellas.



Puede observarse que la cartulina de Raúl queda dividida en 6 partes iguales; la cartulina de Liliana la divide en 4 partes iguales; la divide en cuartos, al cuestionarle que en cuántas partes la divide Liliana dice que en 3 y trata de corregir el error con sólo borrar una de las líneas sin dar importancia a la igualdad que debe existir entre las partes. En consecuencia, al comparar las zonas utilizadas, se observa que el dibujo de Liliana es más grande,

Uno de los alumnos (N) centra su atención sólo en los numeradores y los compara (4/6 y 2/3). Como $4 > 2$ establece erróneamente que el dibujo de Raúl quedó más grande.

Ítem No. 12

El ítem No. 12 generó bastantes problemas y confusiones entre los alumnos. Después de determinar qué cantidad de focos correspondía a cada salón, se les cuestionaba sobre otra forma de nombrar la fracción 4/8. Los alumnos lograron establecer equivalencias como 1/2, 2/4 y 8/16.

De los alumnos, sólo seis (A, C, I, E, L y H) manejaron correctamente el reparto y la equivalencia. La mayoría de estos alumnos alcanzaron el éxito en su labor, observando el material y haciendo las particiones necesarias.

Un alumno (E) prefirió encontrar en forma algorítmica una fracción equivalente a la dada; cuando se le pidió que lo hiciera con el material, también lo pudo hacer.

En cuanto a procedimientos erróneos se puede mencionar el de dos alumnos (G y F) al concebir la fracción como una parte de otra, es decir, representar una fracción como 4/8 significa separar ocho y luego separar cuatro.

Uno de los estudiantes (N) , en determinados momentos considera al denominador como el elemento que señala la cantidad de focos; □ son 4 focos; 1/8 son 8 focos. En otras ocasiones se refiere a cada foco como 1/8 de tal forma que 4 focos son 4/8 que es contradictorio a lo señalado en este mismo párrafo.

Un estudiante más (J) considera la suma del numerador y el denominador para obtener el total de focos, por lo tanto 4/8 son 12 focos.

Ítem No. 13

El ítem No. 13 fue resuelto favorablemente por cinco de los estudiantes (A, C, I, E y L), quienes trabajaron manipulando el material, para después traducirlo a una razón y su correspondiente equivalencia.

Cabe mencionar que uno de los estudiantes (A) dio la respuesta correcta, sin embargo al trabajarlo algorítmicamente se observaron errores de procedimiento. También es importante comentar que ningún alumno comprendió la pregunta inicial al referirnos a razones, hubo necesidad de aclararles que eran como lo que ellos acostumbraban trabajar como fracciones.

Otro de los estudiantes (H) estableció las razones correspondientes pero no fue capaz de identificar la igualdad entre ellas. Para efectos de la gráfica esta respuesta se consideró errónea por no satisfacer en su totalidad los cuestionamientos señalados.

En uno de los estudiantes (G) se observó una gran confusión en el manejo de la fracción como razón, de tal forma que para representar una parte de un total de objetos, lo interpretó como un número mixto, en donde el entero parece simbolizar el total de los huevos y la cantidad de huevos rotos y no rotos queda determinada por la fracción. Así fue que, por ejemplo, señalar que de una caja que contiene 12 huevos, 5 están rotos quedó indicado como 12 5/7.

Posteriormente, después de algunos cuestionamientos que se le hicieron, acabó por concluir que la respuesta era 7/5 "siete que están buenos y cinco que están rotos", considerando que la suma del numerador y el denominador deben dar por resultado el total de los elementos del conjunto. Al pedirle que representara lo correspondiente a 13.2, se observó que su respuesta fue exactamente la misma que en la pregunta anterior: 7/5, no obstante que las preguntas eran complementarias.

Uno de los alumnos (F) no pudo establecer la razón; hizo una aproximación pero no logró traducirlo a una representación simbólica y prefirió dejarlo con "menos de la mitad". Es el mismo alumno que en el ítem No. 3 también dio una respuesta similar al señalar que el piso que ya estaba cubierto era "menos de la mitad".

Otro estudiante (N) menciona la razón 1/5 para referirse a 5 huevos de 12, sin considerar el número 12; también señala 1/7 para referirse a 7 huevos de 12.

Uno más de los estudiantes (J), después de mostrar una gran dificultad para comprender qué es lo que se le pide, concluye que la forma de representar esas fracciones es: huevos rotos, 7/5; huevos no rotos, 5/7. En seguida se transcribe un fragmento de la entrevista.

Fragmentos de entrevistas	*Observaciones*
M: ¿Qué fracción de huevos está rota? O sea ¿cómo lo escribirías con una fracción? ¿cómo indicarías que de la	

caja de huevos, 5 están rotos? Una fracción como con las que hemos estado trabajando... J: Comprar otros huevos. M: No nada más quiero que con una cantidad me indiques que 5 huevos están rotos... mediante una fracción. J: ¿De estos dos? M: Porque en la caja vienen 12 huevos. J: ¿Suma o resta? M: Lo que tú quieras... J: Dos. M: ¿Dos? Yo quiero que me digas una fracción, sí conoces las fracciones ¿no? J: No. M: Éstas son las fracciones. J: Ah, ya.	*Con sus respuestas se puede observar que no tiene una idea clara de lo que se le pide.*

Ítem No. 14

En cuanto al ítem No. 14, sólo cinco estudiantes (A, C, I, E y L) lograron establecer la razón que se pedía y comprobar su equivalencia con otra. Las estrategias que siguieron fueron diferentes: utilizando productos cruzados (E y A), simplificación de fracciones y ver si coincidían en sus elementos (C e I), empleando diagramas (L).

Otro alumno (H) no logró clarificar sus pensamientos y razonamientos por lo cual no pudo llegar a la respuesta correcta.

Otro alumno (G) insiste en considerar a los elementos de una razón como la suma del total de elementos de un conjunto, de ahí que al referirse a doce hombres de treinta, lo haga como 12/18. Desconoce la forma de determinar la equivalencia de fracciones mediante productos cruzados, lo hace buscando un número que al ser multiplicado por una de las fracciones dé por resultado la otra fracción; de no encontrarlo concluye que las fracciones no son equivalentes.

Dos casos se presentaron (J y N) en que establecen la razón en forma inversa, es decir, en vez de 12/30 anotaron 30/12. En ninguno de los dos casos recordaron algún mecanismo para comprobar la equivalencia de las razones.

Por último, otro de los alumnos (F), parece ser que se centra en fracciones sencillas, que le son más familiares, como 1/2 ó 1/4 de tal forma que afirma que la fracción de hombres es 1/4.

Ítem No. 15

En relación con el ítem No. 15, se puede observar que tan sólo 4 alumnos (A, C, I y E) pudieron llegar a la respuesta correcta. Al igual que en otros ejercicios, los procedimientos empleados fueron variados: simplificación de fracciones, asignación de una cantidad arbitraria para hacer más concreto el problema, forma algorítmica de encontrar fracciones equivalentes, productos cruzados.

Uno de los alumnos (L) que trabajó en forma equivocada solicitó materiales para representar el dinero. Es importante señalar que en este reactivo no se tenía planeado trabajarlo con material, sin embargo al solicitarlo el alumno, se le proporcionaron canicas y tarjetas utilizadas con anterioridad, pero no le fue suficientemente objetivo para alcanzar los fines propuestos.

Para otro de los alumnos (H), el decir 1/4 representa la cuarta parte de cuatro y 5/20 son cinco partes de veinte. Asegura que 5/20 es mayor que 1/4. Para este alumno es mayor la fracción representada por la figura que tiene más partes.

Otros dos de los alumnos (J y N) comparan numerador con numerador y denominador con denominador; en el caso específico de este problema compararon el 5 con el 1 y el 20 con el 4 y concluyeron que 5/20 > 1/4, es decir, toman los números como enteros.

Dos de los estudiantes (F y G) muestran que no reúnen los conocimientos necesarios para dar solución al problema y optan por dejar a un lado el ejercicio.

Ítem No. 16

El ítem No. 16 consistía en encontrar los elementos que hicieran verdadera la equivalencia entre tres fracciones, sin embargo, ningún alumno fue capaz de encontrar los elementos faltantes en las fracciones. Tres alumnos (A, C y E) se aproximaron bastante a la respuesta correcta, de hecho respondieron bien la primera parte.

Dos estudiantes emplearon una estrategia aditiva errónea (L y J); otro (I), definitivamente señaló su incapacidad para resolverlo. A continuación observemos un fragmento en donde se aprecia la aplicación de una estrategia aditiva errónea.

Fragmentos de entrevistas	*Observaciones*
L: Tomé como referencia el dos y el diez y se me dio la ocurrencia de restar al diez el dos para ver qué número iba en el cuadrito, igual en el catorce... M: Restaste al veintiuno, ah no, aquí lo sumaste, ¿qué hiciste? L: Sumé siete más catorce. M: ¿Y ahí por qué no restaste? ¿También pudiste haber restado? L: Sí también puede ser siete. (Uniendo la acción a las palabras encima el 7 sobre el 21) M: ¿Por qué en uno restas y en otro sumas? L: No me acuerdo bien pero... así lo hago y sí...	*8* ⇓ *2/7 = □/14 = 10/▲* ⇑ *21* *7*

Otro de los alumnos (H) también pretende, a base de sumas, encontrar los elementos faltantes y termina por sumar los dos numeradores conocidos y su suma es el numerador desconocido; lo mismo hace con los denominadores: los suma y encuentra el elemento perdido.

Uno de los estudiantes (F), debido a que encuentra la relación entre dos de los denominadores, en la cual se observa que uno es la mitad del otro, concluye que cada uno de los elementos faltantes es la mitad del elemento conocido.

Existe otro caso (N) en que efectúa productos cruzados y anota como numerador el elemento faltante; un procedimiento similar sigue con los denominadores.

2/7 = □/14 = 10/▲ 2/7 = 28/14 = 10/196

Para obtener el primer valor multiplica el numerador 2 por el denominador 14 y el producto lo anota como numerador de la segunda fracción, a su vez éste lo multiplica por el denominador 7 y su producto corresponde al denominador de la tercera fracción.

Uno de los estudiantes (G) no tiene bien definido el procedimiento para encontrar fracciones equivalentes, de tal forma que en ocasiones suma, otras resta, a veces efectúa las dos operaciones.

En estos procedimientos se puede apreciar la idea de hacer operaciones con los números que existen, así combinan productos cruzados con una variación (poner el 28 en el numerador de la segunda fracción) puesto que ya existe un número (el 10) en dónde "debería" colocarse el producto que se obtiene.

Ítem No. 17

En el reactivo No. 17, cuatro de los estudiantes (A, C, I y E) mostraron seguridad y certeza en el trabajo con porcentajes. Como en la mayoría de los casos, las estrategias fueron diferentes.

Un alumno (A) encontró rápidamente la equivalencia entre 3/4 y 75% al realizar una división de 100 (100%) entre 4 y tomar 3 de esas partes, es decir, 75%. El resto, 25% es equivalente a una cuarta parte, la cual encontró con el mismo procedimiento.

Otros alumnos (I y C) tuvieron una pequeña diferencia en estrategia al encontrar el porcentaje de niñas restando al cien por ciento, el setenta y cinco por ciento que ya habían calculado.

Es interesante analizar el siguiente fragmento de una entrevista en la que el estudiante (C) resuelve correctamente la situación trabajando mentalmente, al pedírsele que lo haga en forma escrita no lo consigue.

Fragmentos de entrevistas	*Observaciones*
C: Ya. M: ¿Ya? ¿Por qué no lo escribes o no	*...Se las ingenia para formar un grupo de 100 niños. Simplemente*

hiciste ninguna operación o sí hiciste operaciones? C: Sí, pero en la mente. M: A ver escríbelas y ahorita me las vas diciendo, por favor. C: No, no sé. M: A ver explícamelas. C: ¿Le digo las respuestas? M: Sí. C: En la primera es el setenta y cinco por ciento de niños. M: Pero a ver dime por qué. C: Porque se divide en cuatro partes el grupo de los cien niños, divido entre cuatro toca a veinticinco por tres, son setenta y cinco. Entonces queda un cuarto que son el porcentaje de niñas, que sería veinticinco por uno, serían veinticinco, entonces veinticinco es el porcentaje de niñas que hay en el grupo. M: Era lo que te preguntaban ¿verdad? nada más. Escribe nada más las respuestas aún sin operaciones, escribe las respuestas. C: Ya.	*determina la cantidad de 100 niños para facilitarse la ejecución de las operaciones.*

Otro de los estudiantes (E) seleccionó un número arbitrario de alumnos (número que fuera múltiplo de 4) de tal forma que pudiera calcular las 3/4 partes del grupo y determinar así el número de alumnos. Al hacerle la aclaración de que no pedían número de alumnos sino porcentajes, recordó que el 75% equivale a 3/4 pero no supo por qué, simplemente se lo grabó así.

Uno de los estudiantes (L) prefirió asignar un número arbitrario de alumnos dentro del grupo y determinó la cantidad de niños y de niñas existentes, pero no lo pudo manejar con porcentajes.

Cuatro de los alumnos (G, H, J y N) se declararon incompetentes para trabajar los porcentajes.

Otro de los estudiantes (F) estableció que el grupo estaba formado por: 18 niños, que correspondían al 88% y 12 niñas, que correspondían al 13%; en ningún momento pudo explicar el porqué.

Ítem No. 18

Este ítem, el No. 18, conformado por varias rectas numéricas, fue quizás el más difícil para los alumnos. Ningún alumno trabajó correctamente las tres rectas. Los errores encontrados son diversos:

- Considerar que la fracción no se puede localizar en la recta ya que el numerador es mayor que el denominador.
- No tomar en cuenta desde el cero, ni los números enteros previamente señalados.
- Procedimiento equivocado al tratar de convertir a decimales una fracción.
- Considerar toda la recta como el entero.
- Tomar cada espacio de la recta numérica (enteros) como una de las partes a considerar, de tal forma que para poder ubicar la fracción 6/5 en la recta numérica, necesitaría seis partes (enteros) y en la recta sólo aparecía hasta el número 2.

Fue una sorpresa el que uno de los estudiantes (G) que más había fallado en ejercicios anteriores, fuera el único que ejecutara con cierta habilidad estos ejercicios. Posiblemente la mayoría de los alumnos entrevistados falló en este aspecto debido al poco énfasis que se hace en este tipo de representación de fracciones en las escuelas de educación básica.

Este estudiante tomó en consideración los enteros previamente señalados en las rectas, hizo las particiones necesarias y marcó los puntos requeridos. Tuvo error en la tercera recta debido a que tomó una medida arbitraria del cero a 2/3 (como si fuera el entero) y lo dividió en 5 partes tal parece que predominó el numerador en su concepción ya que continuó dividiendo en cinco partes para determinar los tercios subsecuentes hasta llegar a 5/3; no consideró la igualdad que se tenía que conservar entre cada tercio. En seguida se presenta parte de la entrevista:

Fragmentos de entrevistas	*Observaciones*
M: Bueno, y luego en la última recta es un poquito diferente porque fíjate que ahora te señalo dónde está la fracción 2/3 y yo quiero que tú señales la fracción 5/3, ¿dónde quedaría 5/3? G: Ya. M: ¿Qué pasó, dónde quedó la fracción 5/3?	*Empieza a dividir en muchas partecitas, empleó una medida arbitraria para dividir del cero a 2/3 en cinco partes; empleó otras cinco partes para señalar tres tercios y otras cinco partes para cuatro tercios y así sucesivamente*

G: Aquí. M: ¿Cómo sabes que debe estar ahí 5/3? G: Porque aquí son dos tercios, tres tercios, cuatro tercios, cinco tercios. M: ¿Cómo sabes que aquí son 3/3? G: Porque hice la recta de aquí, del cero al 2/3 y de ahí a 3/3. M: A ver, ¿por qué aquí del cero a 2/3 lo dividiste en cinco partes? Porque así lo hiciste ¿verdad? Son cinco partes. G: Sí, para que me salieran los 3/3. M: O sea que ¿de 2/3 a 3/3 existe la misma distancia que de cero a 2/3? G: Sí. M: ¿Y luego de 3/3 a 4/3 también lo dividiste en cinco partes? G: Sí. M: ¿Y de 4/3 a 5/3 también lo dividiste en 5 partes? G: Sí. M: ¿Y por qué en cinco partes? G: Así lo saqué.	

Ítem No. 19

En el ítem No. 19, sólo dos de los estudiantes (I y E) muestran una sólida concepción acertada que tienen sobre las fracciones al considerar que los denominadores mayores pertenecen a las fracciones menores puesto que al ser mayor el número de partes en que se va a dividir un entero, resultan ser de menor tamaño esas partes. A continuación fragmentos de le entrevista con I y E.

Fragmentos de entrevistas	*Observaciones*
M: Muy bien pasamos a otro ejercicio. Aquí hay estas cuatro fracciones, yo quiero que las vuelvas a escribir aquí abajo, pero en orden, desde la que tú consideres la menor de todas ellas hasta la mayor. I: ¿De menor a mayor? M: De menor a mayor. M: Muy bien, ¿por qué las ordenaste de esta forma? I: Porque ésta está dividida en más partes y entonces son más chiquitas, los medios son los más grandes porque sólo se divide en dos.	*Para ordenar las fracciones utilizó la lógica al señalar que el que estaba dividido en más partes era el menor puesto que las partecitas quedaban más pequeñas.*

Fragmentos de entrevistas	*Observaciones*
M: Bueno, aquí tienes cuatro fracciones, quiero que las vuelvas a escribir aquí pero ordenadas, desde la menor a la mayor y luego que me digas por qué así las ordenaste o sea cómo supiste que deberían de llevar ese orden que tú me vas a decir. E: Mjm... ya. M: ¿Ya, cuál fue la menor? E: Un centésimo. M: ¿Cómo supiste? E: Porque se divide el entero en cien partes y sólo se toma una, como se divide en más partes, la parte será más pequeña. M: ¿Y el mismo razonamiento seguiste con éstas? E: Mjm. M: Entonces, la mayor ¿cuál es? E: Un medio. M: Un medio, muy bien.	

En seis de los estudiantes (A, C, H, L, J y N) se observa la tendencia a considerar los denominadores como números enteros, ocasionándose la inversión del orden de las fracciones.

Uno de los alumnos (F) trata de resolver el problema a base de diagramas pero las particiones son incorrectas ya que no considera la igualdad de las partes.

Para otro de los estudiantes (G) parece no existir ningún argumento que justifique la forma de ordenar las fracciones. Se muestra a continuación parte de la entrevista:

Fragmentos de entrevistas	*Observaciones*
M: Ahora fíjate en el siguiente ejercicio tienes unas fracciones, yo quiero que aquí abajo las vuelvas a escribir pero en orden, desde la menor hasta la mayor. G: ¿Aquí abajo? M: La que tú creas que es menor, luego me vas a decir por qué, por qué crees que es menor. G: Sí. G: Ya. M: ¿Ya, cuál fue la menor? G: 1/3. M: Luego 1/4, luego 1/2 y por último	*Ordena en forma incorrecta las fracciones y además no puede encontrar un argumento para justificar sus acciones.*

1/100. ¿Por qué, en qué te basaste para saber cuál era la menor? G: Porque de cualquier figura un tercio se divide en tres partes y después un cuarto lo corté primero en lo mismo, en 1/4 sería... de cualquier figura cortar 1/4, después un medio y después 1/100. M: Pero no te entiendo ¿cómo sabes que un tercio es menor que un cuarto, por qué? Sí te entendí que éste se divide en tres partes, pero yo no sé que es lo que te sirve a tí para decir que es menor un tercio que un cuarto, ¿cómo supiste que era menor? G: Porque un cuarto es la cuarta parte y un tercio es la tercera parte... M: Ajá, pero ¿cómo sabes que un tercio es menor que un cuarto? ¿Qué te hace pensar que es menor? Porque en algo te basaste, ¿no? para acomodarlos así de esta forma, ¿qué fuiste viendo? M: ¿No, no puedes? G: No.	*Después de esperar unos minutos...*

Ítem No. 20

En este ejercicio se analizan tres diferentes casos de la comparación de fracciones: los numeradores son iguales y los denominadores diferentes, los numeradores son diferentes y los denominadores son iguales y por último, tanto los numeradores como los denominadores son diferentes. Sólo dos estudiantes (A y E) tuvieron una actuación favorable en todas las parejas dadas.

Seis alumnos (A, I, L, J, N y G) compararon los numeradores cuando los denominadores eran iguales.

A tres alumnos (C, F y H) se les facilitó el trabajar con diagramas ya fuese mentalmente o por escrito.

Para otro estudiante (E) el procedimiento de productos cruzados fue el camino más seguro. De hecho todos los estudiantes lograron éxito en esta primera parte del ejercicio.

Para la segunda parte del ejercicio, varios de los alumnos (A, I y F), auxiliándose de diagramas lograron llegar a respuestas correctas. Otro (C) empleó la misma estrategia pero equivocó su respuesta debido a la falta de precisión en los trazos.

Cuatro alumnos (L, J, N y G) llegaron a una conclusión errónea ya que al ser iguales los numeradores, decidieron comparar los denominadores.

Un alumno (H) concluyó que la figura que está dividida en más partes es la mayor.

Nuevamente (E) este alumno lo trabajó con productos cruzados logrando dar la respuesta correcta.

Cuando las fracciones tienen diferentes numeradores y denominadores, cinco de los estudiantes (I, L, J, N y G) compararon por separado cada uno de los elementos como si fueran enteros; el razonamiento fue erróneo.

Uno de los alumnos (E) manejó en forma algorítmica la relación de orden y todas sus respuestas fueron correctas.

Un alumno (A), aún sin haber escrito o dibujado algún diagrama determinó que 1/2 es mayor que 3/10 porque 1/2 es la mitad de un entero, en cambio, 3/10 no llega a ser la mitad de un entero, es menos.

Se presentó el caso de dos alumnos (C y F) en el que argumentan que es mayor la fracción que tiene más partes y de las cuales se toman más de esas partes.

Al representar gráficamente las parejas de fracciones (H) logra encontrar la respuesta correcta.

Ítem No. 21

En relación al último ítem, algunos estudiantes (A y H) señalan que la que está dividida en más partes es la mayor .

Otro de los alumnos (C) resuelve acertadamente el ejercicio pero lo hace de una manera intuitiva ya que él señala que fue trasladando en su mente las partes sombreadas para formar columnas y así compararlas.

Uno de ellos (E) lo trabajó algorítmicamente y con facilidad; inició por escribir la fracción representada en cada rectángulo y después las fue comparando por parejas, utilizando los productos cruzados. También afirma que la mayor es la que está dividida en el menor número de partes, con lo que coincide con otros dos estudiantes (I, F) pues dicen que así son más grandes.

Otro (L) señala que la que tiene el mayor denominador es la mayor.

También hubo quien (G) a "simple vista" decidió cuál era la mayor y no logró acertar en su respuesta.

Otro caso es el de un alumno (J) que inicialmente concluyó que todas las áreas eran iguales puesto que en todos los rectángulos estaban sombreadas tres partes. Después reflexiona y anota a cada rectángulo la fracción señalada, sin embargo invierte los términos de la fracción y además lo escribe como un complemento. Por ejemplo: En el primer rectángulo se señalaba la fracción 3/12; anota 12/3 y después lo cambia por 9/3 (ya que 9+3 = 12); hace lo mismo con los otros rectángulos y afirma que 9/3 es la mayor puesto que el 9 es mayor que cualquiera de los otros numeradores.

Un estudiante más (N) lo hizo casi en la forma descrita en el párrafo anterior, establece la fracción de acuerdo al número de partes sombreadas y no sombreadas: 3/7 en realidad es 3/10.

Finalmente, las respuestas dadas por los alumnos muestran que existe similitud con las obtenidas en otros estudios, que los errores en el manejo de las fracciones no son exclusivos de un nivel educativo, que los errores son repetitivos y varias de las estrategias coinciden en su aplicación.

Los errores más comunes que se detectaron fueron: desvinculación del numerador y denominador; mayor dificultad al trabajar con figuras no convencionales; yuxtaposición del numerador y el denominador; la no conservación del todo; al comparar fracciones compararlas como si fuesen números enteros; concebir a la fracción como una parte de otra parte; considerar al denominador como el elemento que señala cuántos objetos se toman de una colección; no considerar los números enteros señalados en la recta numérica; imposibilidad de ubicar una fracción impropia en la recta numérica.

Este estudio nos permite observar la gran dificultad que representa para los niños el trabajo con fracciones, por lo tanto, confirma los resultados de estudios realizados con anterioridad y nos ofrece una visión del por qué se han modificado los Programas de Educación Básica, específicamente en la asignatura de Matemáticas que es la que nos compete.

Por eso, en los actuales Programas de Primaria se propone un trabajo más intenso sobre los diferentes significados de la fracción en situaciones de reparto y de medición y en el significado de las fracciones como razón y como división.

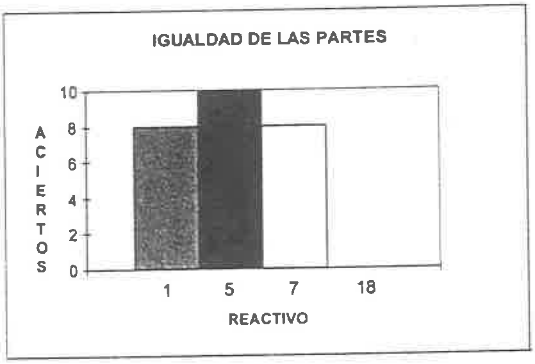
En cuanto a la enseñanza en secundaria, también se establece la postergación de los temas sobre fracciones y sus operaciones, por considerarlos como temas de difícil comprensión.

Análisis por objetivos

Con el propósito de establecer una correlación entre las respuestas de ejercicios similares, se hizo el siguiente análisis.

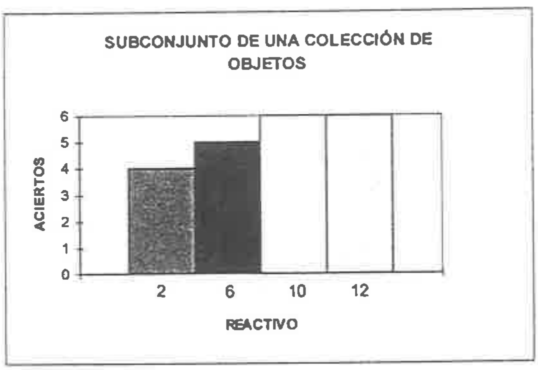
Reactivos que valoran la concepción de la igualdad de las partes en figuras fraccionadas: 1, 5, 7 y 18.

El hecho de incluir el reactivo No. 18 en este rango, fue con el propósito de percibir si el alumno realmente conserva la igualdad entre las partes en una recta numérica.



La mayoría de los estudiantes estuvieron conscientes en esta primera parte, de la importancia de dividir una figura en porciones iguales. Esto les permitió dar respuestas acertadas y rápidas, sin embargo, no pudieron aplicar del todo este criterio al momento de trabajar con las rectas numéricas; no siempre conservaron la igualdad de los segmentos y además no consideraron la dimensión de cada entero. Posiblemente se debió a que el alumno no está familiarizado con este tipo de representación ya que en los textos no se utiliza con frecuencia.

Otro grupo de reactivos fue la de relacionar un subconjunto con la colección que lo contiene, y tratar de establecer la equivalencia entre las fracciones definidas en la misma figura, entre ellos se encuentran: 2, 6, 10, y 12.



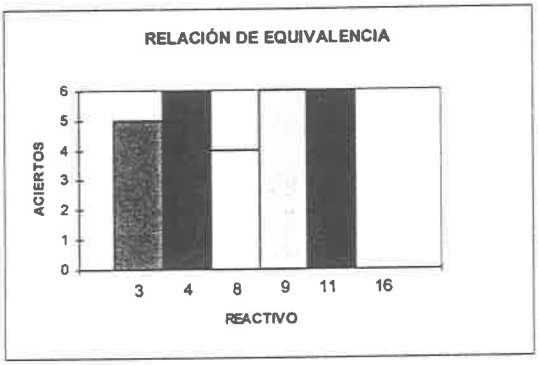
Se observó que los alumnos tuvieron serios problemas al separar una colección de otra, sin embargo aún fue mayor la dificultad cuando el modelo presentado ya estaba dividido en cierto número de partes que no coincidía con el denominador dado (Ítem No. 2). En estos casos los alumnos prefirieron centrarse en el numerador y separar los objetos señalados por éste.

Como puede observarse en la gráfica de la página anterior, la frecuencia de error en 10 y 12 es el mismo y corresponde exactamente a los mismos alumnos, es decir, alumnos que repitieron el error, considerando que era la forma correcta de resolver el ejercicio. Estos estudiantes con mayor razón equivocaron su respuesta en 2, del cual ya habíamos señalado un nivel de dificultad más elevado.

Los alumnos que resolvieron correctamente 2, no tuvieron ningún problema al llegar a 6; los mecanismos se repitieron: formar 3 subconjuntos con el mismo número de objetos o dividir la cantidad total de elementos entre 3 y después multiplicar por 2. Es importante señalar que aumentó la rapidez para la ejecución de este ejercicio, así como también un estudiante más logró dar la respuesta correcta algorítmicamente, lo que nos hace pensar qué tanto, el material manipulable, se convierte en determinados momentos en un obstáculo para el empleo de los algoritmos, que fue la forma en que este alumno lo resolvió. No se está negando el valor del material, el cual es indiscutible, sino se cuestiona el por qué un alumno restringe su capacidad para seleccionar diferentes alternativas en la solución de problemas.

La mayoría de los alumnos que no lograron éxito en 2, tampoco lo hicieron al trabajar con 6, 10 y 12 . Y, caso contrario, quienes contestaron correctamente en 2, también lo hicieron en 6, 10 y 12.

En cuanto a los reactivos que se relacionan con la equivalencia se tienen: 3, 4, 8, 9, 11 y 16.



Se pudo observar que a los alumnos que demostraron tener noción del concepto de fracción, de acuerdo a los resultados obtenidos en los ejercicios, les fue sencillo llegar a establecer la equivalencia entre fracciones. Es importante señalar esto porque al parecer aquellos alumnos que no se han apropiado de este concepto se les dificulta más lo que se les plantea; se encontraron algunos casos extremos que dan la impresión de que se está hablando en el vacío. Por ejemplo:

Fragmentos de entrevistas	*Observaciones*
M: ... ahora yo quiero que tú escojas una de estas tres representaciones que hay aquí y me digas ¿cuál te serviría para demostrar que 1/2 efectivamente son 4/8? J: ¿Que sean 4/8? M: Ajá, o sea que me puedas decir que 1/2 = 4/8. ¿Cuál escogerías y por qué? Piénsale, ahí las tienes. J: ¿No puedo escoger una de éstas? M: No, para esta pareja son éstas... cualquiera de estas tres. J: ¿También ésta? M: Ajá. J: Ésta y... M: Bueno... te hago la aclaración de que debe ser una sola figura ¿eh? ésta, ésta o ésta. Donde se pueda observar que 1/2 es lo mismo que 4/8. J: En ninguna. M: ¿En ninguna? ¿Por qué? J: Aquí no tiene 4/8. M: ¿Ésta no tiene 4/8? J: Tiene tres... ¿qué serían? Tiene tres... décimos. M: 3/10 ¿sería aquí?	*Toma materiales que no se le habían proporcionado.* *Indica equivocadamente que en ninguna está representada la equivalencia porque las fracciones señaladas son 3/6 y ½; la otra no pudo interpretarla.*

J: Ajá, no... 3/6. M: ¿3/6? ¿Por qué 3/6? J: Porque son 6. M: ¿6 de cuáles? J: De aquí, aquí hay 6 y aquí 3. M: Ah, hay 6 de este lado y hay 3, entonces esta es la fracción 3/6 . Bueno y aquí ¿qué fracción estaría representada? J: ¿Cómo se les dice cuando es un qué... cuando se les dice... M: ¿Porque son dos partes? ¿medios? J: ¿1/2? M: ¿Este es 1/2 ? J: Sí. M: ¿Y en la última? J: Serían cuatro... no, ya no sé... M: Entonces con ninguna de ellas podrías demostrar que 1/2 es igual a 4/8, ninguna te sirve. Bueno, vamos a pasar a la otra pareja, pero para esta pareja vas a trabajar con éstas y de aquí sí me tienes que dar dos, por pareja. ¿En cuál puedes demostrar que 3/4 es lo mismo que 6/8? ¿En esta pareja, en esta pareja o en esta pareja? Que 3/4 es lo mismo que 6/8. J: ¿También las puedo juntar así? M: ¿Si me explicas para qué? Sí. J: Porque aquí serían tres... tres... no. Aquí serían 3/4. M: ¿Todo el círculo serían 3/4? J: Ajá. M: A ver, no me quedó muy claro, ¿todo esto son 3/4? J: Porque aquí es uno, dos, tres y este otro cuatro. M: Ah, 3/4. Bueno, ¿qué otro? ¿la otra no se puede? J: ¿Cuál es la otra? M: 6/8 porque 3/4 ya lo tienes aquí, falta 6/8. J: No, no se puede. M: ¿No se puede? Bueno, entonces hasta ahí lo dejamos.	*Al círculo que está dividido en octavos (incompleto porque solamente aparecen 6 de las partes) le agrega 1/4 y afirma que la fracción es 3/4 porque cuenta 3 y luego 4, es decir, 6 partes del círculo más una parte del cuarto que se agregó, el cual lógicamente no estaba dividido en partes del mismo tamaño, dan un total de 7 partes. No pudo representar 6/8.*

Aquellos que dominaban este tema ejecutaron diversas acciones, según fuera el caso, para resolver la situación planteada. Se notó en ellos la destreza en la manipulación de materiales, la representación gráfica de fracciones y sobre todo el manejo algorítmico de ellas.

En general, al tomar las fracciones como parte de una figura y tratar de establecer la equivalencia entre ellas, es primordial que el alumno interprete correctamente las fracciones implicadas para que la respuesta sea favorable. En estos casos, los alumnos requirieron de la lectura de lo representado y traducirlo a un lenguaje numérico que les permitiera comprobar, mediante productos cruzados, la equivalencia de fracciones. En otros casos prefirieron hacer la demostración de la equivalencia a través de gráficos, papel doblado o la sobreposición de figuras.

Tal vez los errores que mostraron algunos alumnos se debieron más a una deficiente concepción de la fracción. De ahí que al manejar la fracción como una yuxtaposición de sus elementos o la centración en cualquiera de los elementos: numerador o denominador, no se logre establecer la equivalencia.

El ítem No. 16 fue un ejercicio aislado ya que era el único que se presentaba exclusivamente con lenguaje numérico, aislado de todo contexto y en el que se pretendía determinar los números que hicieran verdadera la relación de equivalencia establecida entre tres fracciones. Ningún alumno logró éxito en la tarea, sobre todo al tratar de encontrar el elemento de la tercer fracción:

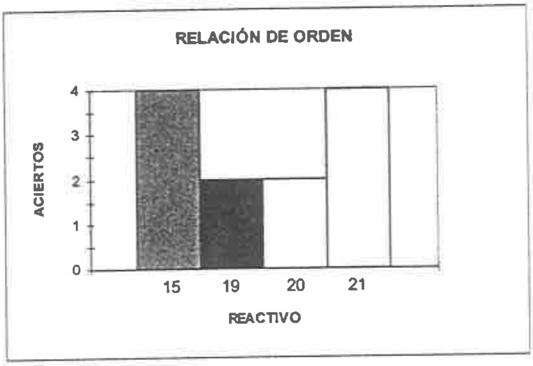
$$2/7 = \square / 14 = 10/\triangle$$

La mayoría de los alumnos encontraron correctamente el numerador de la segunda fracción porque tienen en mente que al encontrar el doble de las cantidades, están estableciendo fracciones equivalentes; así lo observaron con los numeradores 7 y 14.

En un estudio realizado por Dávila (1992) se muestra cómo, alumnos de 1o. y 2o. grado de primaria, dominan la estrategia de repartir "pasteles" al hacer cortes sucesivos por la mitad, familiarizándose con fracciones como 1/2, 2/4, 4/8, etc. en donde se puede observar la relación que existe entre los elementos de las fracciones.

Para la tercer fracción no fue posible que aplicaran este principio debido a que el número 10 no surgía de multiplicar por 2 ninguno de los dos numeradores.

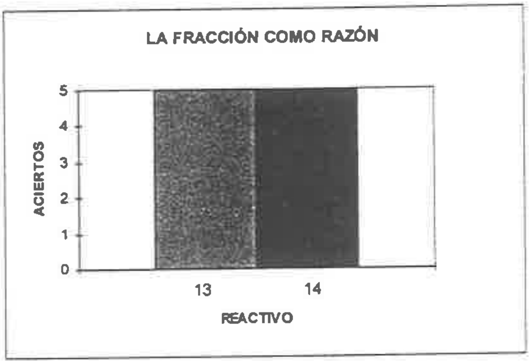
Otro grupo de problemas lo constituyen los referentes a la relación de orden: 15, 19, 20 y 21. Los resultados de esta serie de ejercicios pueden observarse en la siguiente gráfica.



Otro error común a varios de los estudiantes fue que a pesar de que en otros ejercicios habían considerado la importancia de que las partes fueran iguales, resultó que hacen caso omiso de esto y efectúan sus particiones sin tomar en cuenta las dimensiones de las partes, de tal forma que al hacer la comparación de las fracciones representadas, la relación de orden se ve alterada.

Otra situación que interfiere con la correcta interpretación de la relación de orden es la de considerar que es mayor la fracción que tiene los denominadores mayores o cuya figura está dividida en más partes. No todos los alumnos perciben que mientras una figura esté dividida en más partes, menor será el tamaño de éstas.

En ejercicios en que se requería el empleo de *razones* fue necesario aclararles a los alumnos que se trataba de una fracción, debido a que habían olvidado qué era ese concepto y sólo se concretaban a observar al experimentador. A este tipo de ejercicios corresponden: 13 y 14.



Finalmente los resultados obtenidos nos muestran que aquellos alumnos que interpretan y manejan el concepto de fracción son los que resuelven favorablemente los ejercicios planteados y aplican diversas estrategias que van desde la manipulación de materiales hasta el empleo mental de algoritmos.

La mitad de los alumnos responden correctamente a los dos ítems; inician con el uso de material concreto, interpretan lo representado y comprueban la equivalencia a través de simplificación de fracciones o cocientes iguales al efectuar la división del numerador entre el denominador o mediante el cálculo de los productos cruzados.

La otra mitad de los alumnos repite errores ya analizados con anterioridad, por ejemplo: 7/5 significa que siete están enteros y cinco están rotos, manejan la fracción como una yuxtaposición de los elementos o como un complemento entre ellos.

Este grupo de alumnos que no ejecutaron correctamente el ejercicio, desde el principio cayó en errores para establecer la *razón.*

Otro estudiante (G) traduce la fracción como un número mixto, en donde el total de objetos es el número entero y los subconjuntos de huevos rotos y huevos no rotos, es la fracción común. Por ejemplo, 12 5/7 significa que de 12 huevos, 5 están rotos y 7 no lo están. Para comprobar la equivalencia busca al azar, un número que multiplicado por el numerador y el denominador de una de las fracciones, dé por resultado el numerador y el denominador de la otra fracción.

Uno de ellos (N) afirma que la forma de representar a los 5 huevos rotos es mediante la fracción 1/5; no establece una relación con el total de huevos.

Fragmentos de entrevistas	Observaciones
N: ¿Cinco vienen rotos? M: Cinco vienen rotos, los demás están bien. ¿Podrías a través de una razón decirme... qué parte de los huevos están rotos?...éstos de éstos, mediante una fracción. N: ¿1/5? M: ¿1/5? ¿Por qué crees que una quinta parte de los huevos están rotos? N: Porque... hay cinco y... si fueran diez serían 2/5. M: Ah, bueno, entonces anótale ahí, 1/5 de los huevos, están rotos. M: Ahora, qué fracción de los huevos no está rota. N: Un, un... siete ¿cómo se les dice a los sietes? M: Séptimos. N: Un séptimo. M: Doce por tres, ¿por qué multiplicaste 12 X 3? N: Para ver cuántos huevos ya tenía con las tres. M: Ah, con las tres cajas. Y en esas tres cajas juntas ¿cuántos huevos rotos vienen? N: 15 M: 15, muy bien. Quince de ¿cuántos huevos? N: De 36. M: De 36 y entonces este ¿no se te ocurre alguna forma de escribir una fracción para señalarme precisamente que 15 huevos están rotos de 36? N: No.	*Separa 5 canicas y hace mención de que son 1/5 los huevos rotos y los no rotos 1/7.* *Al preguntarle por 3 cajas multiplica 12 X 3 = 36 y le resta 15 huevos.*

Ya se mencionaba con anterioridad que lo que algunos alumnos muestran hace pensar que no tienen idea de lo que se está planteando, tal es el caso de (J), veamos un fragmento de la entrevista con él:

Fragmentos de entrevistas	Observaciones
M: ¿Qué fracción de huevos está rota? O sea ¿cómo lo escribirías con una fracción? ¿cómo indicarías que de la caja de huevos, 5 están rotos? Una fracción como con las que hemos estado trabajando...	

J: Comprar otros huevos. M: No, nada más quiero que con una cantidad me indiques que 5 huevos están rotos mediante una fracción. J: ¿De estos dos? M: Porque en la caja vienen 12 huevos. J: ¿Suma o resta? M: Lo que tú quieras. J: Dos. M: ¿Dos? Yo quiero que me digas una fracción, sí conoces las fracciones ¿no? J: No. M: Éstas son las fracciones. J: Ah, ya.	*Se le señalan algunas fracciones escritas.*

La conversación permite observar el nivel de comprensión de este alumno en torno a las fracciones. Si él no es capaz de interpretar una fracción, no puede establecer la relación de equivalencia y tampoco comprobarla de manera objetiva.

CONCLUSIONES

CONCLUSIONES

- Podemos concluir que, como se señala en otros estudios, algunos alumnos adquieren solamente una "concepción restringida" de la fracción. Identifican rápidamente la fracción solicitada cuando el número de partes en que está dividida la figura coincide con el denominador de la fracción, pero cuando el todo contiene más unidades de partición que el denominador, el estudiante necesita modificar el esquema que ya había construido para hacer frente a la nueva situación. Mucho de esto tal vez se deba a la enseñanza tradicionalista de las fracciones que aún es desarrollada en las aulas y que no permite al alumno "jugar" con los diferentes significados que ofrece una fracción.

- Se pudo observar que en su mayoría, los estudiantes reconocen como necesaria la igualdad de las partes.

- Predominó la igualdad de las partes en que fueron divididas las figuras.

- Se puede concluir, en términos generales, que el alumno sí reconoce la igualdad de las partes en situaciones prácticas.

- Con el ítem No. 5 se permitió confirmar el comportamiento previsto: conservar la igualdad entre las partes, aunque entre algunos de ellos se notó cierta confusión.

- Con estos ejercicios se pudo observar que se requiere de una concepción total de la fracción para poder trascender a otros niveles de complejidad.

- Existen bastantes alumnos que no tienen clara la noción de fracción y que por toda respuesta toman arbitrariamente los números que aparecen de una u otra forma, y los relacionan forzando la situación, sin que se les dé algún sentido o significado.

- Persiste la tendencia a operar con los elementos de la fracción sin comprender su significado.

- Para algunos alumnos, el denominador señala el número de elementos que hay que tomar.

- Otros alumnos consideran a la fracción como "una parte de otra parte", por ejemplo 5/20 significa "cinco partes de veinte", y si se compara con 1/4 "una parte de cuatro", es mayor 5/20 porque son más partes.

- Posiblemente el lenguaje empleado influyó en dos de los casos en que los alumnos no lograron los resultados previstos, tal vez se requiera más precisión y claridad en las instrucciones, tomando en cuenta las dificultades propias que conlleva el lenguaje matemático.

- El alumno interpreta de manera diferente el mensaje que tratamos de hacerle llegar, posiblemente por una errónea concepción de la noción de fracción, sin embargo hay que tener cuidado con el lenguaje empleado, tratando de simplificarlo al máximo para evitar confusiones en el trabajo con fracciones.

- Algunos estudiantes centran su atención exclusivamente en el numerador, olvidándose del denominador y de la relación existente entre ellos.

- Las conclusiones anteriores parecen estar dentro de ciertos márgenes previstos, sin embargo hay resultados que se alejan de lo esperado, como por ejemplo: pensar que el denominador señala el número de objetos y el numerador cuántas veces hay que tomar ese número de objetos, de tal forma que 2/3 = 6 ya que "se toman tres objetos, dos veces".

- Hay cierta tendencia a considerar que la suma de los elementos de una fracción es el total de elementos de un conjunto.

- Aún se presentan casos en que los elementos de una fracción son considerados como números enteros aislados, sin ninguna relación entre sí, llevando a conclusiones erróneas al comparar por separado numeradores y denominadores.

- Los alumnos consideran que tiene mayor área aquel rectángulo que está dividido en más partes; es un ejemplo más de que el estudiante no relaciona los dos elementos de la fracción sino que los desliga por completo y piensa sólo en función de números naturales en donde el mayor número representa la mayor cantidad.

- Se les facilita trabajar con figuras convencionales: rectángulos, círculos, cuadrados, etc. figuras que de una u otra forma le son familiares al niño. Si se le presentan figuras con las que nunca ha trabajado en clase, requiere de una modificación a sus esquemas que le permitan hacer frente a la nueva situación, es el caso del uso de la recta numérica.

- En términos generales, el alumno reconoce la relación parte-todo. En algunos casos el alumno es capaz de establecer la equivalencia entre fracciones; en casos concretos, el dominio de esta relación demuestra la habilidad del estudiante en su pensamiento abstracto.

- Se pudo observar que la mayoría de los estudiantes reconocen e interpretan las fracciones equivalentes aún cuando se modifique el lugar de las partes sombreadas.

- Aparentemente, de acuerdo a los resultados obtenidos en este ejercicio, los estudiantes dominan la equivalencia, pero no es así. Posiblemente la sencillez de los modelos gráficos presentados, así como la fracción representada influyeron para que el 60% de los alumnos acertaran en su respuesta. Se pudo percibir cómo el modelo es de gran apoyo en la enseñanza de las fracciones; el alumno, a pesar de no tener un dominio sobre la equivalencia, logró determinarla al codificar cada figura como *una mitad.*

- El hecho de que el denominador no coincida con el número de partes en que está dividida la figura, obstaculiza la interpretación de la fracción y de la relación de equivalencia.

- Otro aspecto relevante que impidió la ejecución correcta de la tarea fue el de considerar al numerador como el indicador del número de partes en que se divide un entero.

- El alumno emplea espontáneamente la estrategia de sobreponer figuras para demostrar la equivalencia de áreas.

- Tal vez la sencillez de las fracciones manejadas permitió que los alumnos encontraran fácilmente, aún sin materiales, la equivalencia de las fracciones dadas.

- Nuevamente se presenta el hecho de realizar operaciones arbitrariamente. Para algunos resulta indistinto sumar o restar los elementos de la fracción para demostrar la equivalencia.

- Se les facilita reconocer fracciones equivalentes cuando los números que intervienen en una fracción son el doble de los que aparecen en la otra fracción. En caso contrario se vuelve un obstáculo insuperable en muchas de las ocasiones.

- En las respuestas correctas, prevalece la estrategia algorítmica sobre cualquier otro procedimiento. Esto nos lleva a pensar si no se ha privilegiado demasiado el trabajar algorítmicamente en vez de dar oportunidad a que el estudiante se apropie de la noción de fracción y sus relaciones por medio de diferentes modelos de enseñanza.

- No se considera un inconveniente el que un alumno sólo trabaje algorítmicamente sino que, sobretodo en sus primeras exploraciones, se recomienda que se dé mayor énfasis al trabajo con materiales manipulables que permitan al niño llegar a tener un dominio aceptable de la comprensión de la fracción y en determinados momentos, si llega a olvidar un algoritmo, pueda solucionar su problema siguiendo otra estrategia.

- La estrategia algorítmica previamente razonada da resultados favorables.

- Muchos estudiantes basan sus respuestas en la forma algorítmica, producto tal vez de una enseñanza mecánica.

- Mínimamente se presenta la no conservación del todo.

- En términos generales, los alumnos reconocen la conservación del todo.

- Para algunos estudiantes es fácil percibir que mientras un entero se divida en más partes, éstas serán más pequeñas de tamaño.

- Aunque teóricamente el alumno maneja la igualdad de las partes, al momento de hacerlo en forma práctica, se olvida de este requisito e incurre en errores que no le permiten apreciar cuál fracción es la menor o la mayor.

- Hay quienes sí reconocen que el hecho de estar dividido un entero en menos partes, hace que éstas sean de mayor tamaño.

- No existe la comprensión de lo que es una razón.

- La mayoría de los alumnos no lograron establecer la relación de equivalencia entre razones.

- En su mayoría, los alumnos desconocen el manejo e interpretación de porcentajes.

- Para los alumnos que muestran un manejo aceptable de las fracciones, el material que se les presenta se convierte sólo en un apoyo, que en algunas ocasiones ni siquiera es requerido.

- Es necesario manejar diferentes estrategias para resolver un problema ya que de no hacerlo así, se corre el riesgo de caer en errores de procedimiento, que en ocasiones pasan desapercibidos.

- Los gráficos siguen siendo un buen apoyo para el manejo de fracciones siempre y cuando se tracen con exactitud.

- Es indiscutible el esquema de acción que presentan los alumnos y que hace repetitivas algunas acciones y errores observados en estudios anteriores.

- Los obstáculos que se presentan son: no conservación del todo, manejo arbitrario del tamaño del entero, la creencia de que mientras más partes sean es mayor el tamaño, la no conservación de la igualdad de las partes, el considerar a la fracción como si fuera un número entero y compararla como tal.

- En relación con rectas numéricas, los alumnos consideran que cuando el numerador es mayor que el denominador no se puede localizar en la recta numérica.

- También en cuanto a rectas numéricas, los niños no toman en consideración desde el cero para hacer sus particiones.

- Varios de los alumnos no tienen la idea precisa de lo que es un *entero* y, por lo tanto, no les es posible ubicar una fracción en la recta numérica.

- La mayor parte de los niños que participaron en esta muestra no ha logrado construir el concepto de fracción y se ha convertido en un impedimento para establecer otro tipo de relaciones y operaciones. Después de varios años de relacionarse con las fracciones, el niño no ha logrado su aprehensión.

- La capacitación permanente para el maestro es un requisito indispensable para eliminar las deficiencias detectadas entre los alumnos.

- Dados los resultados obtenidos en esta exploración, se demuestra una vez más la gran dificultad que presenta el aprendizaje de la noción de fracción, siendo un gran obstáculo para la comprensión de la relación de equivalencia. Por lo tanto, es necesario continuar indagando y proponiendo nuevas situaciones didácticas que permitan al estudiante, mediante un proceso de construcción, hacer suyos estos conceptos.

- Respecto a la enseñanza de fracciones, no se debe olvidar trabajar con longitudes o con otros modelos didácticos y no centrarnos solamente en el modelo del "pastel"

- Se apoya la posición de Kieren al considerar que en la enseñanza de las matemáticas, mientras más se propicien situaciones diferentes mayor será la comprensión del concepto de fracción.

- No se da fácilmente el paso de los modelos gráficos a la simbolización.

- Urge reflexionar sobre nuestra práctica como maestros, detectar errores en las concepciones que tienen nuestros alumnos y proponer nuevas situaciones que permitan mejorar la calidad de nuestra enseñanza.

- En algunos alumnos se nota falta de habilidad en el razonamiento, utilizan procedimientos diferentes e incorrectos para resolver situaciones idénticas.

- La noción de la fracción 1/2 es firme y permite al alumno establecer comparaciones con otras fracciones en relación a ella.

BIBLIOGRAFÍA

BIBLIOGRAFÍA

Ávila, A. **(1991).** *"Matemáticas, enseñanza y formación de profesores"* en: Pedagogía, Revista de la Universidad Pedagógica Nacional. Vol. 7 No. 21. **México.**

Ávila, A., E. Mancera. **(1988)** *"La fracción: una expresión difícil de interpretar"* en: Pedagogía, Revista de la Universidad Pedagógica Nacional. Educación matemática. Vol. No. 17. **México.**

Ávila, A. y E. Mancera. **(1988).** *"Algunos problemas en el aprendizaje de las fracciones (Estudio exploratorio en alumnos que finalizan la primaria en el Distrito Federal)"* en Memorias de la Segunda Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. **Guatemala.**

Balbuena, H. et. al. **(1983).** "Descubriendo las fracciones", Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. Departamento de Investigación Educativa. **México.**

Balbuena, H. y D. Block. **(1988).** *"Las Fracciones: Un Estudio Didáctico"* en Memorias de la Segunda Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. **Guatemala.**

Benett, Jr. Albert **(1988).** "Fractions Bars". Step-by-step. Teachers guide. Edit. Scott Resources. **New Hampshire.**

Block, D. **(1987).** "Estudio Didáctico sobre la Enseñanza y el Aprendizaje de la Noción de Fracción en la Escuela Primaria". Tesis de Maestría. Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados del IPN. Departamento de Investigación Educativa. **México.**

Bonfil, A. **(1990).** "Algunas interpretaciones del Concepto de Número Racional y sus Relaciones con la Educación Matemática". Tesis de Maestría. **México.**

Borasi, R. J: Michaelsen. **(1985)** *"Discovering the Difference Between Fractions and Ratios"* en Focus on Learning Problems in Mathematics. Vol. 7; Nos: 3 y 4. **USA.**

Dávila, M. **(1991).** "Situaciones de reparto: una introducción a las fracciones". Tesis de Licenciatura. Universidad Pedagógica Nacional, SEP. **México.**

Dávila, M. **(1992).** *El reparto y las fracciones* en Revista de Educación Matemática. Vol. 4. No. 1. Edit. Iberoamérica. **México.**

Dienes, Z. **(1972)** Fracciones. pp 5-16. Edit. Varazén, S.A. **México.**

Figueras, O. **(1988)**. Dificultades de Aprendizaje en dos Modelos de Enseñanza de los Racionales. Tesis de Doctorado. **México.**

Figueras, O. E. Filloy, M. Valdemoros. **(1987)**. *"Distorsiones que obstruyen la Construcción del Concepto de Fracción"* en Memoria de la 1a. Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Educación Matemática. **Mérida.**

Freudenthal, H. **(1983)**. "*Las fracciones*" en Fenomenología Didáctica de las Estructuras Matemáticas. Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN. Traducción de Luis Puig. **México.**

Hart, K. **(1981)**. *"Fracciones"* en Children's Understanding of Mathematics: 11-16. CSMS, Maths team. **London.**

Hernán, F. y E. Carrillo. **(1991)**. Recursos en el Aula de Matemáticas. Edit. Síntesis. **Madrid, España.**

Kamii, C. **(1996)**. *"La teoría de Piaget y la enseñanza de la aritmética"* en Revista Perspectivas. Vol. XXVI, No. 1. **México.**

Kerslake, D. **(1988)**. Fractions: Children's Strategies and Errors. A Report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project. NFER-NELSON. **Oxford.**

Kieren, T. **(1983)**. *La partición, la equivalencia y la construcción de ideas relacionadas con los números racionales* en Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education. **EEUU.** Traducción realizada por Olimpia Figueras. Sección Matemática Educativa. CINVESTAV. Febrero 1990.

Lerner, D. **(1994)**. La Matemática en la escuela. Aquí y ahora. Edit. Sigma. Colección Didáctica. **Argentina.**

Mack, N. **(1990)**. *"Learning Fractions with Understanding: Building on Informal Knowledge"* en Journal for Research in Mathematics Education. Vol. 21 No. 1, 16-32. January. **USA.**

Mancera E. **(1992)** "Significados y significantes relativos a las fracciones" en Revista Educación Matemática. Vol. 4. No. 2. **México.**

Peck, D. y M. Connell. **(1991)** *"Using Physical Materials to Develop Mathematical Intuition in Fraction Part-Whole Situations"* en Focus on Learning Problema in Mathematics Fall Edition. Vol. 13. No. 4. **USA.**

Piaget, J. **(1961)**. La formación del símbolo en el niño. Cap. IX y X. Fondo de Cultura Económica. **México.**

Piaget, J. et. al. **(1971)** *Las estructuras matemáticas y las estructuras operatorias de la inteligencia* en La enseñanza de las matemáticas. Cap. I. Edit. Aguilar. **México.**

Piñón, M. **(1995)** *"Las fracciones en la escuela"* en Revista de Pedagogía. Tercera época. Vol. 10. Núm. 5. U.P.N. **México.**

Plan y Programas de Estudio de Educación Básica. Primaria. **(1993).** SEP. **México.**

Plan y Programas de Estudio de Educación Básica. Secundaria. **(1993).** SEP. **México.**

Rodrigo, M. J. y J. Arnay. Comp. **(1997).** *"Tesis sobre el constructivismo"* en La construcción del conocimiento escolar. Edit. Paidós. Colección: Temas de Psicología. **Barcelona.**

Rosas, J.R. **(1995).** *"La comprensión del álgebra y los números racionales"* en Revista de Educación Matemática. Vol. 7. No. 2. Edit. Iberoamérica. **México.**

Sánchez V. y Llinares, S. **(1992).** "Prospective Elementary Pedagogical Content Knowledge about Equivalent Fractions". PME XVI, Durham, NH **(USA).** (Vol. II).

Sánchez V. y Llinares, S. **(1996).** *"Comprensión de las nociones matemáticas y modos de representación. El caso de los números racionales en estudiantes para profesores de primaria"* en El Proceso de llegar a ser un Profesor de Primaria. Cuestiones desde la Educación Matemática. Edit. Comares (Colección Mathema). **Granada.**

Streefland, L. **(1977)** *"Resultados de algunas observaciones acerca de la construcción mental del concepto de fracción".* Ponencia presentada en la Primera Conferencia del G.I.P.E.M. (Grupo Internacional para la Psicología de la Educación Matemática), en Ultrecht, agosto de 1977. Traducción: Olimpia Figueras, miembro de la Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV, (1985) **México.**

Taylor, S. y R. Bogdan. **(1992).** Introducción a los métodos cualitativos de investigación. Paidós. **España.**

Valdemoros, M. **(1987)** "Ciertos Caminos hacia la identificación de la fracción". Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. **México.**

Vergnaud, G. (1991). El niño, las matemáticas y la realidad. Edit. Trillas. **México.**

ANEXO

ANEXO

Los juegos y materiales seleccionados fueron una adaptación a la propuesta de Bennett Jr, (1988).

El equipo de 5-Bars está conformado por varias tarjetas y barras con las siguientes características: Hay siete colores diferentes de Barras de Fracciones que representan medios, tercios, cuartos, quintos, sextos, décimos y doceavos. Cada una de ellas está dividida en el número de partes requeridas y el número de partes sombreadas va aumentando hasta llegar a completar al entero, por ejemplo:

Hay dos barras divididas en medios. En una de ellas está sombreado un medio; en la otra, dos medios. Hay tres barras divididas en tercios. En una de ellas está sombreado un tercio; en otra, dos tercios; y en la última , tres tercios; así sucesivamente para cada una de las fracciones indicadas.

Se requiere que existan dos juegos de las barras descritas con anterioridad: uno para ser distribuido entre los alumnos y otro que formará la pila de barras.

También es necesario un equipo de tarjetas en las cuales se anota en forma numérica el valor que corresponde a cada una de las barras de fracción.

5-Barras No. 1

Objetivo: Relacionar las barras de fracción con la barra que sea descrita.

Jugadores: 2 - 4

Materiales: Equipo de 5 barras , semillas, barras de fracción.

Cada jugador deberá tener un juego de 5 barras y semillas. Se colocan las barras de fracción boca abajo.

Por turnos, los jugadores toman una barra y la describen; mientras el jugador describe la barra, cualquier jugador que tenga la misma barra en su equipo de barras, le coloca una semilla encima.

El primer jugador que coloque una semilla encima de sus cinco barras, gana.

5-Barras No. 2

Es lo mismo que el 5-Barras No. 1 pero jugado con las cartas de fracción en vez de las barras de fracción.

Barras y cartas.

Objetivo: Relacionar las barras de fracciones con las cartas de fracciones.

Jugadores: 2-4

Materiales: Barras de fracciones y cartas de fracciones.

Se colocan dos barras de fracciones de cada color boca arriba. La pila de cartas de fracciones se coloca boca abajo.

Por turnos, cada jugador toma una carta de la pila y trata de relacionar la fracción con una de las barras que están boca arriba. El jugador deberá nombrar la fracción.

Si hay relación, el jugador toma la barra de fracción. Otra barra del mismo color se coloca boca arriba. El jugador continúa su turno tomando otra carta.

Si no hay relación, la carta se pone a un lado y el turno pasa al siguiente jugador.

El juego termina cuando la pila de cartas ha sido jugada en su totalidad. El jugador con el mayor número de barras gana.

Relacionar las 5 barras

Objetivo: Relacionar las barras de fracción que sean equivalentes a las cinco barras que tenga el jugador.

Jugadores: 2-4.

Materiales: Barras de fracción, equipo de cinco barras, semillas.

Cada jugador deberá tener un equipo de cinco barras y algunas semillas. Se extiende un set de barras de fracción boca abajo.

Por turnos, cada jugador escoge una barra y la describe. Si la barra es equivalente a una de las barras del equipo de barras de cualquier jugador, ese jugador coloca una semilla sobre la barra de su equipo.

El primer jugador que coloque una semilla sobre todas sus barras gana.

Relación No. 1

Objetivo: Relacionar las barras de fracción que sean equivalentes.

Jugadores: 2-4.

Materiales: Barras de fracción.

Se voltean tres barras de fracción boca arriba y se ponen las barras restantes en una pila boca abajo.

Por turnos, cada jugador toma la barra de encima y la compara con las barras que están boca arriba.

Si la barra de la pila es equivalente a una de las barras boca arriba, el jugador gana ambas barras. El jugador continúa tomando otra barra de la pila.

Cuando la barra de la pila no es equivalente a una de las barras boca arriba, se coloca con estas cartas boca arriba. El turno del jugador termina.

Después de que cada barra de la pila ha sido usada, el jugador con el mayor número de barras gana.