UNIVERSIDAD
PEDAGOGICA
NACIONAL

SECRETARIA DE EDUCACION PUBLICA

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

UNIDAD 096
D.F. NORTE

INTERPRETACIÓN DE LAS FRACCIONES DENTRO DE LA RELACIÓN PARTE - TODO

JULIO CÉSAR ARTEAGA PALOMARES

MÉXICO, D F 1998

UNIVERSIDAD
PEDAGOGICA
NACIONAL

SECRETARIA DE EDUCACION PUBLICA

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

UNIDAD 096
D.F. NORTE

INTERPRETACIÓN DE LAS FRACCIONES DENTRO DE LA RELACIÓN PARTE - TODO

JULIO CÉSAR ARTEAGA PALOMARES

Tesis que se presenta para obtener el título de
Licenciado en Educación Primaria

MÉXICO, D F 1998

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

ANEXO 4

DICTAMEN DEL TRABAJO PARA TITULACION

México, D.F. a 12 de noviembre de 1998.

C. PROFR. (A) JULIO CESAR ARTEAGA PALOMARES
P R E S E N T E

En mi calidad de Presidente de la Comisión de Titulación de esta Unidad y como resultado del análisis realizado a su trabajo, intitulado: "INTERPRETACION DE LAS FRACCIONES DENTRO DE LA RELACION PARTE-TODO" opción: TESIS a propuesta del asesor Profr. FELIX ALCANTARA MORENO manifiesto a usted que reúne los requisitos académicos establecidos al respecto por la institución.

Por lo anterior, se dictamina favorable su trabajo y se autoriza a presentar su examen profesional.

A T E N T A M E N T E
"EDUCAR PARA TRANSFORMAR"

PROFR. ALBERTO LUNA RIBOT
PRESIDENTE DE LA COMISION DE TITULACION
DE LA UNIDAD 096 D.F. NORTE

S. E. P.
UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
UNIDAD U. P. N. 096
D. F. NORTE

c.c.p. Archivo.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Por experiencia, las matemáticas han representado tradicionalmente una dificultad para los alumnos. Al investigar esa dificultad, se han encontrado obstáculos de origen psicológico, cognitivo, epistemológico y de enseñanza que han convertido a esta asignatura en una de las más áridas en los diferentes niveles educativos y en un verdadero problema para los estudiantes.

Para aprender, los alumnos necesitan *hacer matemáticas*, es decir, deben enfrentar numerosas situaciones que les presente un problema, un reto, y generar sus propios recursos para resolverlas, utilizando los conocimientos que ya poseen. Sus recursos serán informales al principio, pero gradualmente y con la ayuda de sus compañeros y maestro evolucionarán hacia la formalización del conocimiento. Este nuevo enfoque permite que se pueda aprender matemáticas al resolver problemas y no *aprender* matemáticas para después *aplicarlas* a la resolución de problemas.

El propósito de esta investigación es observar las ideas y dificultades que tienen los alumnos de sexto grado al resolver problemas de fracciones dentro de la relación parte - todo,al reconocer estas dificultades se pueden diseñar secuencias didácticas completas que sean significativas para los alumnos y que desarrollen un concepto sólido de la fracción a partir de la relación que guardan entre sus diferentes significados.

Se considera importante esta investigación para contribuir a que la enseñanza de las fracciones ponga menos énfasis en la memorización de reglas y la mecanización sin entendimiento de los algoritmos para dar cabida al desarrollo de los conceptos e ideas fundamentales que rodean a la fracción.

En el capítulo uno se comenta el planteamiento del problema abordado en este estudio, argumentando la importancia del manejo de la relación parte - todo como elemento básico para el conocimiento y desarrollo de las demás interpretaciones, se plantean los objetivos y las preguntas que guiaron la investigación, además se describen la metodología utilizada durante la investigación.

En el capítulo dos se comentan investigaciones efectuadas con relación a la formación del concepto de fracción, se revisaron diversos trabajos. Esta revisión permitió conocer los antecedentes y ubicar el trabajo de investigación.

En el capítulo tres se describe la forma en que se hizo la toma de datos. Primero se expone cómo se seleccionó la muestra que participó en el estudio. Posteriormente se presenta el diseño y la justificación de los problemas abordados en este trabajo; la elaboración, aplicación y resultados del cuestionario diagnóstico.

En el capítulo cuatro se presenta la manera en que se realizó el trabajo en equipos, se detalla la forma en que se llevaron a cabo las sesiones del trabajo trabajo experimental; algunas observaciones del trabajo en equipo y el análisis del trabajo de algunos equipos.

Al final, en el capítulo cinco se presenta la forma en que fue obtenida la información, se hace un análisis e interpretación de los datos obtenidos del cuestionario final. Además, se realiza una comparación del trabajo efectuado por los estudiantes antes y después de la resolución de problemas en equipo, con el propósito de indagar los avances mostrados después de la colaboración entre compañeros y de la instrucción del investigador.

CAPÍTULO 1

DESCRIPCIÓN DE LA PROBLEMÁTICA

1.1 Antecedentes

Por lo general, los alumnos de primaria aprenden matemáticas haciendo uso de la memorización de reglas que, en ocasiones limita su creatividad y propician que tengan un pobre desempeño en la escuela. Las matemáticas no se enseñan mediante actividades que produzcan aprendizajes significativos.

Desde los primeros grados de la primaria se proponen tareas, que originan el disgusto de los estudiantes, ya que se abusa de la repetición de algoritmos, memorización de tablas de multiplicar y fórmulas de la geometría, en un trabajo mecanicista y fuera de contexto sin ningún atractivo para los estudiantes. Con frecuencia, quienes tienen dificultades para efectuar estas tareas son señalados como individuos de bajo rendimiento escolar.

El mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas radica, en buena medida, en los métodos que se utilizan, ya que los niños no son simplemente receptores pasivos que acumulan la información que les dan los adultos, sino que aprenden modificando ideas anteriores al interactuar con nuevas situaciones problemáticas. Desde esta perspectiva las matemáticas deben ser para los alumnos una herramienta que les ayude a resolver problemas. (SEP, 1993)

Esta concepción de la enseñanza de las matemáticas implica recuperar los significados de los conocimientos, contextualizarlos nuevamente, es decir, ponerlos en situaciones en las que estos cobren sentido para el alumno al permitirle resolver los problemas que se le planteen.

Mediante la creación de situaciones problemáticas se puede lograr la motivación en los alumnos por el contenido escolar, además del desarrollo de habilidades para la resolución de problemas matemáticos sobre la base de la utilización de procedimientos donde la verificación pueda plantear una nueva situación problemática.

Con este enfoque se plantea la necesidad de organizar la enseñanza de manera que se propicie la participación eficaz de los estudiantes en el proceso de adquisición de los nuevos conocimientos. Las actividades que promueven la participación de los estudiantes en la construcción y comprensión del conocimiento, son escasas, por lo que se debe procurar la creación de ambientes favorables, donde los alumnos participen activamente en el aprendizaje de las matemáticas y, por lo tanto, también es necesario promover un cambio de actitud en los docentes.

1.2 Planteamiento del problema

Considerando que la enseñanza y aprendizaje de las fracciones es uno de los contenidos más problemáticos en la escuela primaria y tomando en cuenta que parte de esta dificultad es resultado del limitado conocimiento que tienen los profesores y los alumnos respecto a las diferentes interpretaciones y significados de la fracción nos interesa conocer:

¿Qué interpretaciones tienen los niños de sexto grado de primaria al resolver problemas de fracciones dentro de la relación parte - todo en casos continuos y discretos?

1.3 Justificación del problema.

La enseñanza y aprendizaje de las fracciones es un tema muy difícil de tratar en los niveles básicos, las dificultades provienen de diversos factores entre los que se encuentran el limitado conocimiento que tienen los docentes sobre los significados del concepto de fracción y la prematura simbolización de la fracción que no permiten una construcción completa del concepto de fracción, debido a su complejidad, en los programas de estudio se pospone su enseñanza hasta el tercer grado y las operaciones de multiplicación y división de fracciones hasta la secundaria.

Sin embargo las fracciones son una herramienta útil que permite resolver múltiples situaciones de la vida cotidiana aunque, las fracciones son menos utilizadas que los números enteros, este menor uso se asocia a la pobreza de significados de la fracción que se manejan en la escuela, pues en ésta se privilegia solamente una o dos interpretaciones de la fracción.

Estas son algunas de las causas fundamentales por las cuales a los alumnos se les dificulta comprender la noción de fracción, tradicionalmente este concepto se introduce a través del fraccionamiento de la unidad, los esfuerzos de la enseñanza se dirigen a que los alumnos "aprendan" a usar la simbología, identifiquen y manejen la denominación de sus partes además que mecanicen los algoritmos de sus operaciones.

Esta enseñanza limita la capacidad del alumno y propicia una concepción reducida y con limitado sentido de su utilización, para desarrollar este concepto se deben relacionar sus diversos significados y que éstos se encuentren ubicados dentro de un contexto cercano a los alumnos.

1.4 Objetivos

1. Detectar las ideas y dificultades que tienen los alumnos al resolver problemas de fracciones en casos continuos y discretos dentro de la relación parte-todo.

2. Analizar las dificultades encontradas, para diseñar actividades de enseñanza que permitan a los alumnos construir un concepto más sólido de la fracción.

3. Identificar los efectos de la colaboración entre los alumnos al resolver problemas de fracciones

1.5 Metodología

Con los datos de esta investigación se pretende hacer un análisis cualitativo. El diseño del estudio consistió en la aplicación de un cuestionario diagnóstico previo a la fase experimental y al término de ésta, los estudiantes resuelven un cuestionario final.

La primera fase de la investigación consistió en la búsqueda y el diseño de problemas para elaborar un cuestionario diagnóstico; que detectara los conocimientos básicos que tienen los alumnos sobre fracciones, así como las estrategias que surgieron en la resolución de problemas verbales. Los resultados obtenidos se tomaron en cuenta para elegir a los sujetos que participaron en la fase experimental.

De esta manera, se seleccionaron nueve estudiantes: tres de nivel alto, tres de nivel medio y tres de nivel bajo. Con los nueve sujetos seleccionados se formaron tres equipos de tres alumnos. La formación de los equipos se realizó de acuerdo a las preferencias de los estudiantes con el propósito de fomentar la cooperación e interacción entre los participantes.

Con los equipos formados se trabajaron seis sesiones de 50 minutos cada una donde se dieron las instrucciones generales para resolver los problemas planteados en 15 hojas de trabajo. Además, se trabajaron las deficiencias observadas en el cuestionario diagnóstico, es decir las interpretaciones de las fracciones en la relación *parte-todo* con conjuntos continuos y discretos. En las primeras tres sesiones se resolvieron los problemas con la guía del investigador y en las sesiones restantes se trabajaron de manera autónoma por los estudiantes.

Una etapa importante en la resolución de problemas, fue la comprensión de los mismos, ya que de esa manera se pudieron elegir y desarrollar las estrategias para la resolución del problema. Otro momento importante lo constituyó la verificación de la solución por parte del equipo y la posterior revisión colectiva entre los equipos y el investigador.

En esta revisión, el análisis se centró en los *procesos* de resolución de los alumnos y las estrategias utilizadas; se procuró que no quedaran dudas respecto a la solución y verificación de los resultados, y se hicieron explícitas las estrategias para que los alumnos las pudieran utilizar frente a otros problemas.

La tercera fase de la investigación consistió en el diseño y aplicación individual de un cuestionario final. Mediante este cuestionario se exploraron los avances logrados en la etapa de experimentación y con la colaboración entre compañeros, las respuestas fueron analizadas para conocer los avances que tuvieron los alumnos al interpretar las fracciones dentro de la relación parte - todo. Mediante el análisis de las respuestas se realizó una comparación con el trabajo hecho en el cuestionario diagnóstico.

La información en esta investigación se tomó mediante:
cuestionario;
hojas de trabajo;
observaciones directas;

Mediante este trabajo se pretende crear un ambiente para que los alumnos puedan resolver problemas verbales en equipo que les permita llegar paulatinamente a interpretar la fracción en la relación *parte-todo* en conjuntos continuos y discretos. También es importante señalar los beneficios del trabajo en equipo, pues la comunicación permite a los estudiantes compartir y corregir las tareas que efectúan.

Esta investigación se realizó con un grupo de sexto grado de primaria donde, en teoría, los alumnos han completado el concepto de fracción en sus diferentes interpretaciones, sin embargo, los alumnos no tienen ese dominio y esto se debe fundamentalmente al limitado manejo que tienen los docentes al enseñar este concepto.

Este trabajo muestra la forma en que los alumnos abordan la interpretación de las fracciones al relacionar de diferentes maneras el todo, la parte y la fracción, antes, durante y al término de la resolución de problemas en equipo.

Este estudio puede servir de base a otras investigaciones que les interese explorar las diferentes actividades que permitan relacionar las diversas interpretaciones de la fracción. La investigación no abarca las interpretaciones de la fracción como medida, como cociente, como razón y como operador, la amplitud de estas interpretaciones y su forma de integrarse rebasan las posibilidades del presente estudio.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

2.1 La enseñanza de las matemáticas

Por experiencia, en todos los niveles educativos se presentan dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. La enseñanza tradicional de las matemáticas provoca que su aprendizaje se adquiera de una manera mecánica y memorística. En general, la enseñanza de esta asignatura carece de actividades atractivas para los estudiantes; sin embargo, en los últimos años se han producido esfuerzos para crear ambientes favorables en el aula que permitan la participación activa de los alumnos en la construcción de aprendizajes significativos.

Una de las estrategias de enseñanza que se ha desarrollado en los últimos años y que se pretende incorporar en el currículo de matemáticas es la resolución de problemas. Tradicionalmente, los problemas son utilizados por los profesores para *verificar* que los alumnos hayan adquirido determinados conocimientos matemáticos, sin embargo, esta estrategia se lleva a la práctica de manera esquemática, donde normalmente los alumnos siguen un procedimiento único trazado por el profesor. En otros casos se toma como una moda pasajera donde se pierde la importancia de la resolución de problemas como fuente generadora de análisis, discusión y creatividad de los alumnos.

En el Plan y Programa de Estudios de Educación Primaria vigente se propone una nueva metodología para la enseñanza de las matemáticas basada en la resolución de problemas. Este nuevo enfoque propone una participación activa de los alumnos y el trabajo cooperativo para la resolución de problemas.

A nivel de los planes y programas de estudio se han incorporado alternativas para darle un enfoque diferente a la enseñanza de las matemáticas, también se incorporaron nuevas actividades en los libros de texto, pero es fundamental un cambio en la actitud de los docentes.

El nuevo enfoque que propone aprender matemáticas a través de la resolución de problemas define a las matemáticas como un producto inacabado, sujeto a un conocimiento dinámico en constante expansión y reajuste de acuerdo con nuevas situaciones problemáticas.

En este nuevo enfoque de las matemáticas, las estrategias de *aprendizaje cooperativo* que propone Artzt (1992) toman un nuevo significado ya que el trabajo en grupos pequeños proporcionan un ambiente natural en el que el diálogo es constante y se favorece la comunicación. Para obtener resultados favorables, las actividades en grupos pequeños deben estructurarse de tal manera que favorezcan las posibilidades de que los alumnos lleven a cabo preguntas, elaboren, expliquen y verbalicen de tal manera que puedan expresar sus ideas y lograr una retroalimentación.

Con el trabajo en equipos se pretende que los alumnos se comuniquen permanentemente durante la resolución de problemas. Estas experiencias son exitosas si sus miembros tienen interdependencia entre ellos y si a cada persona se le puede asignar cierta parte del trabajo realizado en equipo. Los integrantes deben sentirse a gusto y contentos con sus equipos, se debe poner especial atención a la formación de los equipos y al tiempo que se destina para la reflexión.

Artzt (Ibid) mencionó que la resolución de problemas y el razonamiento son componentes importantes del saber matemático. Para resolver con éxito los problemas se recurre a comportamientos *cognitivos* que se relacionan con el hacer y comportamientos *metacognitivos* que se vinculan con la elección y planeación de lo que hay que hacer, es decir, con el seguimiento y la autorregulación. Además favorece la comunicación entre los alumnos para leer, comprender el problema, explorar las ideas previas, analizar la situación, planear las estrategias, llevarlas a cabo y verificar sus resoluciones.

Se sugiere trabajar un problema cada día para favorecer la comunicación, la contribución de cada uno de los participantes y de que sean capaces de cuestionarse a sí mismos. Los procesos cognitivos que se desarrollan mediante la resolución de problemas pueden ser internalizados y activados en el trabajo individual.

Los alumnos han desarrollado diversas estrategias para resolver problemas, sus conocimientos previos son extensiones que les permiten adquirir conocimientos nuevos. Ante un conflicto cognitivo como es un problema, los estudiantes pueden lograr romper con la situación pasada o buscar nuevas caminos gracias a esos conocimientos previos.

Estas estrategias, las concepciones y procedimientos que los alumnos desarrollan, son el punto fundamental desde el cual surgen nuevas soluciones. Estas concepciones pueden funcionar como *obstáculos* o servir como *puentes* para la construcción de nuevos conocimientos.

2.1 Resolución de problemas

La actividad de resolver problemas ha sido reconocida por numerosos investigadores como un factor importante en el estudio del conocimiento matemático. Halmos (1980, citado en Santos, 1992) propuso que la resolución de problemas era el corazón de las matemáticas. En general, el desarrollo de las matemáticas se origina por el esfuerzo de resolver problemas específicos. Este reconocimiento ha generado diversas estrategias de enseñanza de las matemáticas mediante la resolución de problemas.

Polya (1945) propuso una heurística general que constituyó un antecedente importante en los diversos estudios sobre la resolución de problemas mediante diversos métodos heurísticos: dividir o descomponer el problema en problemas más sencillos, dibujar una figura del problema que se está tratando de resolver y trabajar en sentido inverso al problema. Los sujetos pueden ser eficientes en la resolución de problemas.

La idea de Polya fue analizar los procesos de quienes resuelven bien los problemas matemáticos con el fin de mejorar la resolución de problemas en la clase de matemáticas; lo que hacía en sus clases era resolver un problema en voz alta. De esta manera sus estudiantes podían ver el tipo de heurística que él estaba utilizando.

Schoenfeld (1985, citado en Santos, 1992) propuso la posibilidad de crear las condiciones propicias en el salón de clases de modo que los estudiantes pudieran desarrollar un pensamiento matemático. Este investigador ha identificado diferencias entre expertos matemáticos y estudiantes en la selección y uso de las estrategias para resolver problemas.

Una de estas diferencias la constituye la claridad en el entendimiento del problema, ya que los expertos dedican mayor tiempo que los estudiantes en la comprensión del problema y eso les proporciona mayores posibilidades de éxito. Este investigador propuso un diseño de actividades de aprendizaje que permitan:

1. La identificación de una estrategia en particular.
2. Discutir suficientemente la estrategia.
3. Dar a los estudiantes un buen entrenamiento para su uso.

Los resultados de esta estrategia mostraron un avance en la forma en que los estudiantes resuelven los problemas. Este autor encontró cuatro dimensiones que influyen en el proceso de resolver problemas:

1. Dominio del conocimiento.
2. Estrategias cognoscitivas.
3. Estrategias metacognitivas.
4. Sistemas de creencias.

Este investigador reconoce la importancia de vincular el desarrollo de las matemáticas con el proceso de resolución de problemas; además define que la solución de un problema matemático no es el fin, sino el principio para encontrar otras soluciones. Propuso que aprender matemáticas es un proceso activo que requiere de discusiones, de poner a prueba conjeturas e hipótesis para el desarrollo de nuevas ideas matemáticas. Además, mencionó que se debe ayudar a los estudiantes a explotar lo que ellos saben y a utilizar sus conocimientos en forma efectiva y a discutir el sentido de las ideas matemáticas.

Otro investigador, Kilpatrick (1995) reconoció también la importancia de los procesos de resolución de problemas para el aprendizaje de las matemáticas. Planteó que en primera instancia el conocimiento matemático debe estar inmerso en un contexto para que sea posible enseñarlo, después, el contexto debe ser eliminado y el conocimiento debe hacerse general. Señaló que uno de los trabajos *delicados* del profesor es guiar a los alumnos hacia un conocimiento formal que pueda ser validado matemáticamente a partir de sus errores y concepciones deficientes.

Kilpatrick (Ibid) desarrolló sus investigaciones alrededor de la resolución de problemas, parte de los métodos heurísticos de Polya para analizar el proceso de raciocinio de los estudiantes al resolver problemas matemáticos. Señaló que, en general, las tendencias en la enseñanza e investigación de resolución de problemas se han desplazado desde una heurística general hacia la investigación de problemas situados, donde los estudiantes pueden mejorar su rendimiento porque el problema tiene algún significado para ellos.

En dichas investigacionesa planteó el papel del error en la resolución de problemas, considerando que el error no es un virus o una enfermedad que se puede evitar, el error forma parte del proceso de conocimiento de las personas, es algo a lo que nos tenemos que habituar para detectar, controlar, valorar y corregir.

Propuso que los alumnos se deben enfrentar con sus errores y, a partir del conflicto que surge, tratar de lograr la superación del estudiante; los errores pueden ser una fuente de aprendizaje; estos errores surgen dentro de los conocimientos previos de los alumnos.

Este autor manejó el siguiente procedimiento que pueden seguir los alumnos para la resolución de problemas:

1. Haga.- se trabaja en el problema.
2. Hable.- se habla,discute y explican soluciones.
3. Registre.- escribe lo que ha hecho para llegar a soluciones.

2.3 Resolución de problemas y creatividad

En la línea de resolución de problemas, pero desde un punto de vista cognoscitivo, Ausubel (1983) señaló que tanto la resolución de problemas como la creatividad son formas de aprendizaje significativo por descubrimiento. En este proceso, la comprensión de las condiciones del problema y la asimilación de la solución del mismo constituyen formas de aprendizaje significativo por recepción.

Uno de los factores importantes que facilita la resolución de problemas y la adquisición de conceptos, es el lenguaje, por lo que la *capacidad verbal* y la *disposición cognoscitiva general* ayudan a explicar las tendencias de nivel de edad así como las diferencias individuales de la capacidad de resolver problemas.

Para Ausubel (Ibid), la *creatividad* es la expresión suprema de la resolución de problemas, ya que involucra transformaciones nuevas u originales de las ideas y genera principios integradores. Este autor refirió que al resolver problemas se puede hacer uso de dos estrategias:

1. Utilizar el ensayo y el error de las opciones existentes.
2. Utilizar el discernimiento como intento deliberado por decubrir un sistema de relaciones que fundamenten la solución de un problema.

Se podría comenzar mediante el ensayo y el error, mediante la aproximación y correción y posteriormente avanzar hacia el discernimiento. Propuso tres fases en la resolución de un problema:

1. Entender o formular el problema.
2. Generar una solución.
3. Incorporar la solución a la estructura cognoscitiva.

Ausubel (Ibid) señaló que mediante el discernimiento se puede encontrar una simple transposición de un principio ya aprendido a una situación nueva, o una reestructuración e integración cognoscitiva de la experencia previa y la presente para ajustarla a la nueva demanda. La estructura cognoscitiva existente desempeña un papel clave en la resolución de problemas, ya que la solución de cualquier problema supone la reorganización de la experiencia previa.

Este autor mencionó que esta estructura tiene dos tipos de transferencias que influyen en la resolución:

Transferencias *positivas*:
- conocimientos previos;
- elementos aplicables de estrategia;
- incorporación a las estructuras.

Transferencias *negativas*:
- persistencia de disposiciones habituales;
- fijación funcional;
- tendencias reduccionistas.

Con el análisis de la estructura cognoscitiva, este autor señaló las *etapas* a de la resolución de problemas:

1. Estado de duda.
2. Intento por identificar el problema.
3. Relacionar las proposiciones del planteamiento con la estructura cognoscitiva (planteamiento de las hipótesis).
4. Comprobación de las hipótesis.
5. Incorporar la solución acertada a la estructura cognoscitiva y luego aplicarla.

Los niños de 11-12 años tienen mayores capacidades para el pensamiento abstracto, los alumnos de sexto grado tienden a usar las estrategias por discernimiento. Los productos del pensamiento abstracto pueden ser perfeccionados con la expresión verbal para producir ideas que sean verdaderamente explícitas, precisas, abstractas y generales.

Ausubel (1983) señaló algunas características de los alumnos que pueden influir para que éstos puedan resolver con éxito los problemas:

- se concentran en el problema;
- pueden aplicar convenientemente sus conocimientos previos;
- su proceso de búsqueda es activo y vigoroso;
- son cuidadosos y sistemáticos en sus enfoques;
- son persistentes y no se distraen ;
- sus actitudes hacia el valor del razonamiento son positivas;
- muestran confianza en su capacidad;
- su enfoque para resolver problemas es objetivo;
- superan transferencias negativas.

El desarrollo de la capacidad para resolver problemas exige una experiencia prolongada de enfrentamiento con problemas. Si los problemas son concretos, se facilita la resolución de los mismos. En general, se puede decir que las heurísticas particulares pueden resultar adecuadas en la resolución de problemas verbales.

Este autor señaló algunas destrezas en la resolución de problemas:

- formular y delimitar el problema;
- evitar la concentración de la atención en un solo aspecto;
- ir más allá de lo obvio;
- tratar de evitar la tranferencia negativa;
- poner en duda la confiabilidad y la representatividad de los datos;
- hacer explícitas las suposiciones;
- distinguir entre datos e inferencias;
- emplear la información que provenga de hipótesis descartadas;
- aceptar las conclusiones que concuerden mejor con las propias opiniones.

Al estudiar las dificultades que enfrentan los alumnos para aprender las fracciones, se pueden reconocer dificultades tanto de carácter instruccional, como de naturaleza epistemológica y psicológica que obstruyen la adquisición de este concepto.

En la presente investigación se hace uso de los siguientes conceptos:

a) *Representaciones continuas*.- las representaciones más frecuentes suelen ser diagramas circulares o rectangulares (por ejemplo el pastel dividido en partes iguales).

b) *Representaciones discretas*.- las representaciones se toman de un ***todo*** que está formado por el conjunto global de diversos objetos (pueden tomarse bolitas, estrellas, coches e inclusive niños o personas).

c) *Concepto limitado de fracción*.- dividir un entero en partes iguales.

d) *Concepto amplio de fracción*.- concepto cuya formación y desarrollo se presenta a largo plazo enlazando los diferentes significados o interpretaciones de la fracción de una manera en espiral.

e) *Subconstructos*.- los diferentes componentes que forman el concepto de la fracción como un todo.

A partir de este marco se presentan diversas investigaciones que abordan la problemática en la enseñanza y aprendizaje de las fracciones

2.4 Las fracciones

Podemos ubicar la importancia de la enseñanza de las fracciones a partir de la resolución de problemas. Las fracciones son una herramienta que permite resolver diversas situaciones en el ámbito científico, técnico, artístico y en la vida cotidiana, sin embargo son menos utilizadas que los números enteros y además, la variedad de fracciones que se suele utilizar es reducida. Por ello el uso que se da a las fracciones en las situaciones de la vida cotidiana es insuficiente para propiciar avances significativos en el dominio de esta noción.

En la Guía para el maestro (1992) se señalaron algunas de las causas importantes por las cuales a los alumnos se les dificulta comprender la noción de fracción:

a) la pobreza de los significados de la fracción que se manejan en la escuela;

b) la tendencia de los niños de atribuir a los números fraccionarios las propiedades y reglas aplicables a los números enteros;

c) la introducción prematura de la noción de fracción, del lenguaje simbólico y sus algoritmos.

En esta guía se sugirió que las actividades fundamentales para introducir la noción de fracciones, son las situaciones de reparto y las situaciones de medición; estos grupos de problemas son fuentes generadoras de situaciones problemáticas que dan sentido a esta noción.

A través de las situaciones de reparto se establecen las bases para abordar algunos aspectos importantes de la noción de fracción. Uno de ellos es el desarrollo de las operaciones mentales que permiten coordinar la equitatividad y exhaustividad en los repartos. El proceso que siguen los niños para poder realizar estos repartos es largo.

La palabra fracción se asocia con dividir un entero en partes iguales. Sin embargo, aún en la vida cotidiana, el uso de las fracciones es mucho más amplio. Freudenthal (1983) presentó diferentes fenomenologías conectadas con el concepto de fracción a fin de dar un panorama más completo de lo que la fracción representa; otros investigadores al igual que Freudenthal han tratado de dar una clasificación sobre los diferentes aspectos de la fracción, en especial Kieren (1983) ha dedicado gran parte de su investigación a la construcción de un marco teórico que describa la formación y el desarrollo del concepto de fracción.

Streefland (1982) hizo la observación de que la única manera en la que se introducen las fracciones en el salón de clases es la subdivisión de cantidades continuas o discretas en partes equivalentes. Esta aproximación a las fracciones llamada p*arte - todo*, es unidireccional y deja sin explorar una gran variedad de estructuras conectadas con este concepto,este autor da algunas sugerencias para la presentación de las fracciones en el salón de clases:

- construir las fracciones de situaciones reales;
- construir modelos visuales como herramientas;
- construir abstracciones y generalizaciones del conocimiento informal del niño, y que utilice sus propias estrategias;
- construir el lenguaje de las fracciones;
- construir las reglas y los procedimientos para las operaciones.

Se considera que el concepto de fracción requiere de un desarrollo en el cual se vayan enlazando diversos significados o subconstructos (medida, cociente, razón y operador) estos subconstructos están interconectados.

Mochón (1990) sugirió que su presentación en clase debe hacerse de manera en espiral, dando primero las ideas más básicas de cada uno de ellos y trabajar hacia arriba.

Para comprender cómo construyen los niños el concepto de fracción y las dificultades de enseñanza que se presentan, se revisaron diversos autores para ubicar nuestro trabajo de investigación.

Kieren (1983) estableció que el conocimiento individual del número racional es complejo y formado por diversas concatenaciones, para este autor, la construcción del número racional, completamente desarrollado por parte de una persona, debe tener al menos la estructura conformada por los siguientes componentes:

a) medida
b) cociente
c) razón
d) operador

La relación parte-todo puede vincularse con cada una de las restantes interpretaciones y como ya se ha señalado una comprensión del concepto de fracción relaciona los constructos anteriores en forma de espiral. La relación parte- todo se presenta cuando un *todo* (continuo o discreto) se divide en partes congruentes (equivalentes),entonces la fracción indica la relación que existe entre un número de partes y el número total de partes.

El todo recibe el nombre de *unidad* y esta relación parte-todo depende directamente de la habilidad de dividir un objeto en partes iguales, es posible el manejo de esta relación a partir de elementos concretos para posteriormente utilizar elementos gráficos y simbólicos en una amplia variedad de situaciones y contextos cercanos a los alumnos. Esta relación puede ampliar la reducida visión del concepto de fracción al servir de base para enlazar los diferentes subconstructos. En la relación parte-todo se pueden presentar diversos problemas de casos continuos y discretos:

1. Parte - Todo = Fracción

En este tipo de problemas se presenta la parte y el todo para que aparezca la fracción

2. Fracción - Todo = Parte

En este tipo de problemas se presenta la fracción y el todo para que aparezca la parte

3. Fracción - Parte = Todo

En este tipo de problemas se presenta la fracción y la parte para que aparezca el todo.

Para la construcción de un conocimiento de número racional perdurable y completo se requiere que los niños realicen actividades que le permitan asociar *a/b* con objetos / acciones de cualesquiera de los cuatro componentes mencionados.

Aún cuando los niños construyen el conocimiento. El maestro (con otros elementos que inciden significativamente sobre el medio ambiente del niño tales como otros alumnos o un libro de texto) tiene un papel orientador activo y continuo dentro de una clase *viva* de matemáticas.

Los niños requieren de ciertas habilidades para poder comprender el concepto de fracción, Kieren (1983) planteó que se necesitan *tres mecanismos constructivos* (equivalencia, partición y unidades divisibles) que sirvan como herramientas mentales para ir desarrollando los diferentes significados de las fracciones.

La *equivalencia* es la habilidad de comprender los diferentes criterios que una *igualdad* entre fracciones implica; la *partición*, es la equidivisión de una cantidad continua o discreta en un número dado de partes; y las *unidades divisibles*, permite aceptar a la unidad como divisible y ver a las partes obtenidas como nuevas unidades.

Las fracciones se introducen generalmente como partes de un pastel circular o de una hoja rectangular. La división de estas figuras en partes *iguales* no es una tarea fácil y requiere que esta habilidad se vaya desarrollando poco a poco. Aun en las equidivisiones más simples (medios y cuartos), se requiere de una combinación de los tres mecanismos citados: el aceptar que la unidad pueda ser dividida, hacer la partición correspondiente y obtener partes equivalentes, las cuales deben formar la unidad.

Una primera dificultad reside en el hecho de que la *igualdad* mencionada no necesariamente implica una igualdad en forma sino que puede tener otros criterios. Otra dificultad tiene que ver con la partición, ya que por lo regular el proceso que se sigue para dividir algo en partes iguales es el de ir dividiendo en mitades, luego las mitades en mitades, etc. Por esta razón, particiones que no sean múltiplos de dos resultan bastante complicadas. La partición en el salón de clase no solamente debe concentrarse en conjuntos continuos sino también en conjuntos discretos.

El mecanismo de unidades divisibles se requiere desde los casos más sencillos. Por ejemplo, “tres cuartos” se concibe, primero dividiendo una unidad en cuatro partes iguales y luego tomando una de estas partes, llamada “un cuarto”, como nueva unidad para agrupar tres de ellas. En el caso de la equidivisión de conjuntos discretos, como por ejemplo 12 dulces, requiere que esta cantidad sea considerada como la unidad.

Otra dificultad se presenta cuando la unidad usada para representar cada fracción cambia a placer. Streefland (1984) planteó que en las experiencias didácticas preliminares para desarrollar los mecanismos constructivos, no es necesaria la simbología matemática usual de las fracciones y sí puede ser un freno en el entendimiento de estas ideas.

Debido a que esta escritura utiliza números enteros en su representación, éstos pueden actuar como distractores del significado real de la fracción. Si los tres mecanismos mencionados no están propiamente elaborados en un niño, pueden crear obstáculos en la formación del concepto de la fracción.

A continuación se presentan diferentes aspectos de la fracción:

Parte - Todo

Streefland (1982) observó que la única manera en la que se introducen las fracciones en el salón de clase es la subdivisión de cantidades continuas o discretas en partes equivalentes, esta única aproximación a las fracciones llamada *parte-todo* puede ser unidireccional si no se conecta a otras estructuras del concepto de fracción.

Los casos continuos son los más empleados, descuidando los casos discretos; además no se enfatiza sobre la idea de partes equivalentes, tratándose solamente el caso más restringido de partes idénticas.

La relación parte - todo se presenta cuando un *todo* (continuo o discreto) se divide en partes *congruentes* (equivalentes como cantidad de superficie o cantidad de objetos). La fracción indica la relación que existe entre un número de partes y el número total de partes, el todo recibe el nombre de unidad.Esta relación parte - todo depende directamente de la habiliad de dividir un objeto en partes iguales.

Medida

En situaciones de medida, se tiene una cantidad medible , una unidad y se quiere determinar cuántas veces cabe la unidad en la cantidad que se va a medir. El caso más simple es cuando la unidad cabe un número exacto de veces en la cantidad que se va a medir.

El concepto de medida está fundamentado sobre la idea de *parte - todo*, ya que la formación de sub-unidades requiere de su relación con la unidad. Experiencias concretas con medición pueden proporcionar un ambiente donde las fracciones aparezcan de manera natural y dar al alumno la posibilidad de que pueda ver a la fracción desde otro punto de vista.

Cociente

En esta interpretación, un todo es subdividido en partes equivalentes, el número de las cuales está determinado por la cantidad de objetos a los cuales se les va a hacer la repartición.

Operador

En esta interpretación, la fracción funge como transformador multiplicativo de un conjunto hacia otro *similar*. Se puede pensar en esa transformación como una amplificación o una reducción de los valores de un conjunto.

Razón

Una razón es una comparación numérica entre dos cantidades, las fracciones se pueden usar como razones. En este caso no existe de forma natural una unidad (un todo) como podía ocurrir en otros casos. Las comparaciones describen una relación *conjunto a conjunto* (todo-todo) aunque también aparecen como comparaciones *parte-parte*. Algunos autores utilizan contextos cotidianos para dotar de significado a la idea de razón de tal manera se utilizan contextos como recetas de comida, aleaciones, mezclas de líquidos.

Como hemos presentado, el concepto de fracción se puede concebir desde diversas perspectivas o interpretaciones. Lograr una formación del concepto, implica el desarrollo de diferentes estructuras cognitivas que se dan en el niño en diversas etapas de su desarrollo.

El concepto *fracción* (número racional) es muy complejo, está formado por diversas interpretaciones y las interrrelaciones entre ellas. La interpretación *parte-todo*, tanto en contextos continuos como discretos, constituye una parte fundamental sobre la que se van a desarrollar las restantes interpretaciones.

La comprensión del concepto de fracción requiere de un desarrollo en el cual se vayan enlazando diversos significados, tradicionalmente se indica que el estudio de las fracciones se debe de dar a través del fraccionamiento de la unidad presentando el todo y la parte para que aparezca la fracción también se presenta el todo y la fracción para que aparezca la parte.

Esta forma de presentar la fracción conduce apresuradamente hacia una simbolización ,ésto propicia que la construcción del concepto de fracción sea muy limitada y que el alumno sólo tenga un manejo superficial y limitado de este contenido.

Para que el niño pueda conseguir una comprensión amplia y operativa de todas las ideas relacionadas con el concepto de fracción se debe contemplar un proceso de aprendizaje a largo plazo ya que la variedad de estructuras cognitivas a las que las diferentes interpretaciones de las fracciones están conectadas condiciona este proceso de aprendizaje. Los profesores deben tener en cuenta la existencia de diferentes interpretaciones de las fracciones y el proceso de aprendizaje a largo plazo.

2.5 Ubicación del trabajo de investigación

Para la fase experimental, se consideró la perspectiva de trabajo cooperativo en pequeños equipos propuesta por Artz (1992). El análisis de las interacciones entre los alumnos en un contexto social y la mediación de los alumnos más capacitados para conducir a los alumnos menos capacitados hacia un desarrollo se fundamenta en la perspectiva de la teoría socio-cultural de Vygotsky mencionadas por Tudge (1993).

El presente trabajo se ubica dentro de la línea que presenta a las fracciones desde diversas interpretaciones también llamadas subconstructos y que son los diferentes componentes que forman el concepto de la fracción como un todo. Cada subconstructo conceptualiza a la fracción de una manera diferente y contribuye a formar una imagen completa de ella.

Este entrelazamiento es necesario además, para la mejor comprensión de los algoritmos asociados con la fracción, del manejo de las fracciones equivalentes, de la fracción como número racional, de la recta numérica como una de sus representaciones.

De acuerdo con Mochón (1990) todos los subconstructos están sumamente interconectados y su presentación en el salón de clase debe hacerse de manera espiral, introduciendo las ideas más básicas de cada uno de ellos y trabajar hacia arriba de manera que se vaya ampliando los mecanismos constructivos. Alcanzar el concepto de fracción con todas sus relaciones conlleva un proceso de aprendizaje a largo plazo, por lo que los profesores deben tener en cuenta las distintas interpretaciones de la fracción y el proceso de aprendizaje a largo plazo.

Para ubicar la noción de fracción como número, aceptamos la propuesta de Bergeron (1987) que planteó que esta noción solo puede emerger de la cuantificación de la **relación parte - todo** y de un sentido primitivo de razón.

CAPÍTULO 3

TOMA DE DATOS

3.1 Selección de la población

En este capítulo se presenta el proceso de la toma de datos para la investigación. En primer lugar se describe cómo se seleccionó la población (tipo de comunidad donde se ubica la escuela, edad de los alumnos, etc.) Posteriormente, se detalla el proceso del diseño de los problemas y la justificación de cada uno para la elaboración del cuestionario diagnóstico (CD). Finalmente, se presenta la forma en que se llevó a cabo la aplicación del cuestionario y los resultados del mismo.

Para esta investigación se escogió una escuela oficial de la Dirección No. 2 de primarias. La población escolar está conformada por alumnos de clase media baja, se escogió un grupo de sexto grado. Las edades de los sujetos oscilan entre los 11 y 12 años. El grupo estaba formado por 30 alumnos, a los cuales se les aplicó un cuestionario diagnóstico que permitiera detectar sus conocimientos y habilidades ante las fracciones en un contexto de resolución de problemas y que sirviera para delimitar la población con la que se iba a trabajar

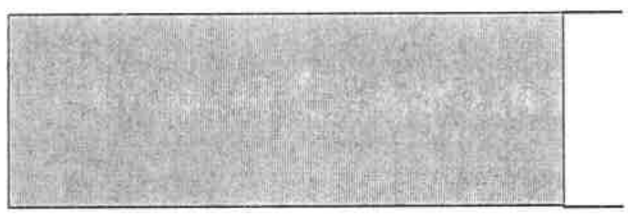
La primera actividad que se hizo fue la elaboración de un cuestionario, que permitiera obtener información referente a los conocimientos sobre fracciones que los sujetos tenían, para poder abordar el contenido matemático de esta investigación.

3.2 Características del cuestionario diagnóstico

Con el propósito de obtener información respecto a los conocimientos previos de los estudiantes, se diseñó el cuestionario diagnóstico tomando seis reactivos que exploraran tres diferentes combinaciones de la relación parte - todo, en conjuntos continuos y discretos:

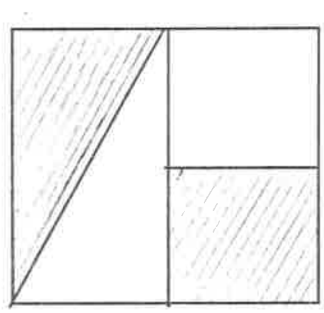
parte	-	*todo*	=	*fracción*
todo	-	*fracción*	=	*parte*
fracción	-	*parte*	=	*todo*

1. Estas son las 2/5 partes de un chicle, dibuja el chicle completo.



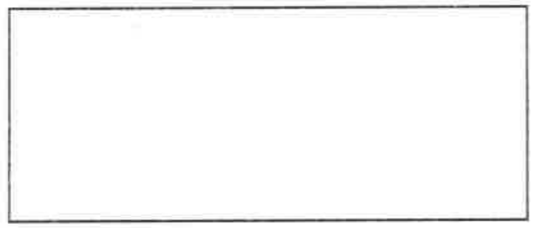
Propósito. En este problema continuo se presenta la *parte* y la *fracción* para que aparezca el *todo*. Se espera que los alumnos puedan medir la mitad de la parte para encontrar 1/5 de la figura y puedan trazar las restantes 3/5 partes.

2. El siguiente dibujo representa un terreno de forma cuadrada. ¿Qué fracción del terreno está sombreada?



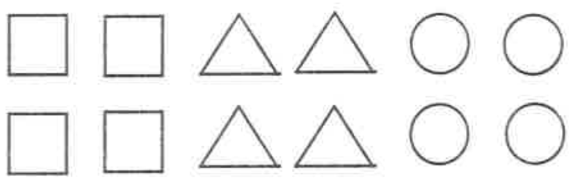
Propósito. En este problema continuo se presenta la *parte* y el *todo* para que surja la *fracción*. Se espera que los alumnos puedan encontrar la equivalencia de las fracciones (un cuarto) a pesar de tener diferente forma.

3. Ilumina 2/3 de la siguiente figura:



Propósito. En este problema continuo se presenta el *todo* y la *fracción* para que aparezca la *parte*. Se pretende que los alumnos midan la figura y la dividan en tres partes iguales; para, posteriormente iluminar dos partes.

4. En la siguiente colección de figuras geométricas, ¿qué fracción representan los triángulos?

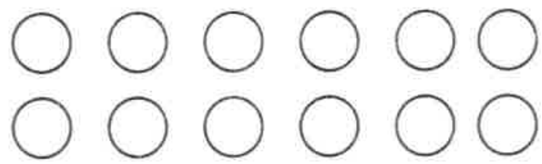


Propósito. En este problema discreto se presenta la *parte* y el *todo* para que aparezca la *fracción*. Se pretende que los alumnos cuenten los triángulos y comparen ese número con el total de figuras. También se pretende que puedan dividir el total de figuras en tres grupos y de ahí señalar el grupo que corresponde a los triángulos.

5. Tres niños del grupo coral representan ¼ parte. ¿Cuántos niños representan todo el grupo coral?

Propósito. En este problema discreto se presenta la *parte* y la *fracción* para que aprezca el *todo*. Se espera que puedan multiplicar el número de niños por cuatro para encontrar el total de integrantes del coro.

6. Encierra ¾ partes del conjunto de canicas:



Propósito. En este problema discreto se presenta el *todo* y la *fracción* para que aparezca la *parte*. Se espera que los alumnos puedan dividir el número total de canicas entre cuatro y encerrar tres canicas.

3.3 Resultados del cuestionario diagnóstico

El cuestionario diagnóstico fue resuelto por los 30 alumnos. Se aplicó con la finalidad de indagar cuáles eran las estrategias que utilizaban los estudiantes para resolver problemas con números fraccionarios, así como para seleccionar la población; se elaboró y aplicó un cuestionario con seis problemas. El tiempo que se dió para su resolución fue de 60 minutos, el trabajo se realizó individualmente y se pidió a los alumnos que utilizaran bolígrafo exclusivamente para que quedara registro de sus procedimientos de resolución.

Los resultados fueron los siguientes:

Resultados del cuestionario diagnóstico (Cuadro 3.1)

Problema	No contestan	Contestan	Correcto	Incorrecto	Tasa de éxito %
1	0	30	8	22	26.6
2	0	30	25	5	83.3
3	0	30	25	5	83.3
4	0	30	10	20	33.3
5	1	29	8	21	26.6
6	0	30	9	21	30

Como se puede observar en el cuadro 3.1, los únicos problemas que tuvieron una tasa de éxito alta fueron el dos y el tres. Estas representaciones continuas de la fracción son las que los maestros de primaria utilizan con frecuencia (en ocasiones son las únicas). De las representaciones continuas la menos utilizada es aquella donde los alumnos tienen que encontrar el *todo*, como en el caso del problema uno que tuvo la tasa de éxito más baja de todas las representaciones continuas.

Respecto a las representaciones discretas, la baja tasa de éxito (30% en promedio) se debe en buena medida al escaso manejo que de ellas se hace en la escuela primaria. Estas dificultades se deriva de la pobreza de significados y al desarrollo incompleto del concepto de fracción.

3.4 Selección de la muestra

De acuerdo con los resultados obtenidos en el cuestionario diagnóstico se seleccionaron nueve alumnos para la fase de experimentación. Se escogieron tres alumnos de nivel *alto*, tres de nivel *medio* y tres de nivel *bajo*. A continuación se presenta un análisis de los resultados obtenidos en el cuestionario diagnóstico por los alumnos seleccionados.

3.5 Resultados iniciales de los alumnos seleccionados

Como se puede observar en el cuadro 3.2 únicamente uno de los alumnos seleccionados no contesta. Los alumnos de nivel *alto* contestan correctamente los seis problemas. Los alumnos de nivel *medio* tienen dificultades con las representaciones discretas y con la representación continua donde se necesita encontrar el *todo*. Finalmente, los alumnos de nivel *bajo*, únicamente tienen éxito con la representación continua donde se necesita encontrar la fracción; sorprendentemente no son capaces de resolver con éxito el problema tres (problema que de manera tradicional se maneja en clase).

Resultados iniciales (Cuadro 3.2)

Alumno	Clasificación	1	2	3	4	5	6	Aciertos
Bithia	A1	1	1	1	1	1	1	6
Irving	A2	1	1	1	0	0	0	3
Janis	A3	0	1	0	0	n.c.	0	1
Andrea	A4	1	1	1	1	1	1	6
Erika	A5	0	1	1	0	0	1	3
Javier	A6	0	1	0	0	0	0	1
Cariño	A7	1	1	1	1	1	1	6
Fabiola	A8	0	1	1	1	0	0	3
Berenice	A9	0	1	0	0	0	0	1

n.c. no contesta
1 solución correcta
0 solución incorrecta

También se puede observar que en el problema cinco (representación discreta), únicamente los alumnos de nivel alto pudieron resolverlo. Los problemas cuatro y seis (representaciones discretas) solo pudieron ser resueltos por los alumnos de nivel *alto* y dos alumnos de nivel *medio* pudieron resolver un problema discreto cada uno.

En el siguiente cuadro se muestra el desmpeño que tuvieron los alumnos seleccionados frente a cada problema y su tasa de éxito.

Tasa de éxito en los problemas(Cuadro 3.3)

Problema	No contestan	Contestan	Correcto	Incorrecto	Tasa de éxito %
1	0	9	4	5	44.4
2	0	9	9	0	100
3	0	9	6	3	66.6
4	0	9	4	5	44.4
5	1	8	3	5	33.3
6	0	9	4	5	44.4

Como se puede observar en el cuadro 3.3 los problemas de representación discreta y uno de representación continua tuvieron tasas de éxito bajas mientras

Como se puede observar en el cuadro 3.3 los problemas de representación discreta y uno de representación continua tuvieron tasas de éxito bajas mientras que la representación continua de la forma *parte-todo*= fracción tuvo una tasa de éxito de 100% y la representación continua de la forma *todo-fracción*=parte tuvo una tasa de éxito de 66.6%.

Capítulo 4

EL TRABAJO EN EQUIPOS

4.1 Las sesiones del trabajo experimental

En este capítulo se presenta y analiza el trabajo que realizaron los alumnos al trabajar en equipos, se describe la metodología utilizada en la creación del ambiente de trabajo y las observaciones realizadas durante las sesiones.

El trabajo en equipos se diseñó alrededor de la resolución de problemas verbales con la idea de alentar la participación y discusión colectiva de los estudiantes. Los cuales, en forma sistemática valoraban los resultados de su propia actividad, así como los criterios de resolución de sus compañeros de equipo y posteriormente confrontaban sus procesos de resolución ante todo el grupo.

Después de haber seleccionado a nueve estudiantes para la etapa de experimentación, selección que se hizo tomando en cuenta su dominio aritmético y su capacidad de resolución de problemas verbales al resolver el cuestionario diagnóstico, se procedió a platicar con ellos para especificar:

- los objetivos de las sesiones de trabajo en el aula;
- la forma de trabajo y la organización;
- los materiales que se utilizarían (bolígrafo y hojas de trabajo);
- la duración aproximada de cada sesión;
- el compromiso de los participantes para esta etapa experimental.

En la primera sesión se organizaron los equipos de acuerdo con sus preferencias, a cada alumno se le dio una tarjeta de color con su nombre. Habían tarjetas con tres colores distintos que correspondían a cada uno de los niveles de clasificación de los alumnos que hizo el investigador, de acuerdo con los resultados obtenidos en el cuestionario diagnóstico (alumnos de nivel alto, de nivel medio y de nivel bajo).

La indicación fue que formaran tres equipos con tres estudiantes cada uno y que cada equipo estuviera formado con alumnos que tuvieran tarjetas de color distinto.

De esta forma, se integraron los tres equipos con un alumno de cada nivel y se respetaron las preferencias de los estudiantes. Se pidió que cada equipo nombrara un moderador que coordinara la discusión y que registrara las estrategias de resolución del equipo en las hojas de trabajo, además de un expositor que explicaría ante el grupo los procesos y las conclusiones del equipo. Se aclaró que en cada sesión, estos cargos se rotarían para que todos los alumnos tuvieran la oportunidad de *vivir* esa experiencia.

También se aclaró que no utilizarían lápiz y goma de borrar, únicamente bolígrafo para registrar sus resoluciones y en caso de equivocación trazarían una línea diagonal, sin intentar borrar o tachar sus producciones. Además sólo escribirían en las hojas de trabajo. Estas aclaraciones permitieron al investigador tener una visión clara de los procesos de resolución y de los errores cometidos por los estudiantes.

La metodología que se siguió en esta etapa fue:

- se presentaba el problema en hojas de trabajo y se hacía una lectura colectiva para la mejor comprensión del mismo;
- se aclaraban dudas;
- cada equipo determinaba la forma de enfrentar el problema;
- discutían y registraban sus procesos en las hojas de trabajo;
- resolvían y verificaban sus respuestas con las condiciones iniciales.
- un expositor de cada equipo explicaba sus resoluciones y se realizaba la revisión con todo el grupo.

Esta forma de trabajo permitió que los alumnos discutieran en equipos sus interpretaciones sobre un mismo problema, que acordaran sobre la forma más conveniente de enfrentarlo; en estas tareas pusieron en juego sus conocimientos previos. Además pudieron construir conocimientos nuevos a partir de la revisión colectiva y hacer uso de las diferentes estrategias de resolución que fueron surgiendo.

La creación de un buen ambiente de trabajo permitió que los estudiantes expresaran libremente sus ideas y las sesiones se desarrollaran en un clima de tolerancia y respeto. Para esta etapa se utilizaron cinco sesiones de 50 minutos cada una, en total se resolvieron 15 problemas. Cada problema se presentaba a los estudiantes mediante hojas de trabajo, con diversos ejercicios que contuvieron representaciones continuas y discretas, la finalidad de estas actividades fue la de desarrollar la habilidad para representar de diversas maneras la *relación parte - todo* tanto en conjuntos continuos como en conjuntos discretos.

Se observó que estas actividades motivaron e interesaron a los alumnos, pues ninguno había tenido la oportunidad de usar otras representaciones de la relación parte - todo.

4.2 Apoyo a los equipos durante las sesiones de la etapa experimental

En el proceso educativo una de las funciones del maestro es dirigir, orientar o coordinar el proceso de enseñanza y aprendizaje. En la enseñanza de las matemáticas basada en la resolución de problemas esta función es fundamental ya que permite que el maestro pueda coordinar el trabajo de los equipos y los pueda apoyar para que logren un trabajo autónomo. Esta ayuda debe ser la mínima indispensable para que los equipos puedan trabajar y que no enfrenten solos los problemas.

En las sesiones, mientras los alumnos trabajaban con los problemas, el investigador fungió como facilitador y orientador del trabajo. Se acercaba a los equipos para observar lo que realizaban y para ayudar, cuando se detectaba que algún equipo se enfrentaba a una dificultad que no podían resolver. Esta ayuda consistió en hacer preguntas que estimularan su razonamiento para que analizaran el problema con otra perspectiva. Algunas de las preguntas que se hicieron fueron:

Sobre el planteamiento

¿Han comprendido el problema?;
¿pueden platicarlo a sus compañeros de equipo?;
¿pueden explicar con sus propias palabras de que se trata el problema?;
¿qué es lo que quieren encontrar?;
¿tienen alguna dificultad para entender alguna parte del problema?;
¿qué es lo que no entienden?;
¿qué es lo que conocen?, ¿qué es lo que desconocen?;
¿cuáles son los datos del problema?;
¿ya identificaron la información que es necesaria?;
¿tiene el problema alguna información que no es necesaria?;
¿pueden dibujar algún diagrama o figura que ilustre o represente el problema?

Sobre la resolución

¿Tienen alguna idea sobre cómo resolver el problema?;
¿han resuelto algún problema similar?;
¿cómo lo van a resolver?;
¿qué estrategias podrían ayudar a resolver el problema?;
¿cuáles son las condiciones del problema?;
¿qué están haciendo ahora?;
¿los está llevando eso a algún lugar?;
¿como se relaciona eso con la solución?;
¿te podría ayudar una tabla o una gráfica?;
¿pueden pensar en alguna otra forma o método para resolver este problema?

Después de resolver

¿Cómo saben que la solución que obtuvieron es la correcta?;
¿qué hacen con este resultado?;
¿tu respuesta tiene sentido con respecto a las condiciones del problema?;
¿qué estrategias utilizaron?;
¿pueden verificar o comprobar su solución?;
¿podrían haber resuelto el problema de otra forma?;
¿cómo lo harían?;

¿pueden decir con palabras lo que han comprobado?;
¿qué opinan de las resoluciones de sus compañeros?;
¿es posible encontrar *patrones* de solución?

Estas preguntas sirvieron para orientar el trabajo en equipos, contribuyeron a poder enfrentar las dificultades que impedían el avance de los equipos y también permitieron al investigador observar los procesos de resolución de los alumnos.

4.3 Algunas observaciones de las sesiones de trabajo

En las sesiones se creó un ambiente de colaboración y confianza que permitió que los equipos se integraran rápidamente, que los alumnos pudieran intercambiar libremente sus ideas y que la rotación de los puestos de moderador y de expositor se realizara sin gran dificultad.

Al principio de la etapa de experimentación, los alumnos de nivel *alto* tomaron el mando de la conducción del equipo, pero al avanzar las sesiones, los alumnos de nivel *medio* y nivel *bajo* participaron de manera relevante al interior de los equipos y en las revisiones colectivas. Podría decirse que esta forma de trabajo permitió elevar la autoestima de los alumnos que de manera tradicional estaban clasificados dentro de su grupo como alumnos de bajo rendimiento.

Las primeras sesiones fueron con una intervención constante por parte del investigador. Existían muchas dudas entre los alumnos al no estar acostumbrados a esta forma de trabajo, pero conforme fueron transcurriendo los días, el trabajo de los equipos se hizo más sistemático e independiente, de tal manera que la intervención del investigador se volvió esporádica.

En los equipos, cada integrante trataba de dar su propia versión de cómo entendía el problema, lo describía con sus propias palabras, discutía sobre la estrategia o estrategias que podían utilizar para resolver el problema, ejecutaba la vía de solución elegida y verificaba su resolución. Posteriormente seleccionaban a un miembro del equipo que sirviera de expositor de las estrategias utilizadas en la solución del problema abordado.

Finalmente, en la revisión colectiva se confrontaron los procesos y estrategias de resolución seguidas por cada equipo. Se propició la discusión de los procedimientos, se señaló lo correcto e incorrecto en relación con las condiciones del problema y a la pregunta planteada. En los casos de resoluciones con error se analizaron las fallas y se corrigieron.

Es importante señalar que con esta revisión colectiva los alumnos pudieron identificar las estrategias que surgían y de este modo pudieron aplicar las estategias que les parecían útiles en la resolución de problemas parecidos.

Los problemas abordados se presentaban a los estudiantes en hojas de trabajo, en las que se pedía que registraran todo lo que iban realizando, además se hicieron preguntas orales para saber los argumentos que ellos tenían con relación a sus propuestas.

Se intentó crear un ambiente que involucrara activamente a los sujetos en las fases por las que pasa la solución de un problema, desde su comprensión y planteamiento, pasando por las proposiciones y discusiones de conjeturas, hasta la determinación y comprobación de la solución. Se procuró fomentar la comunicación, propiciando el diálogo entre los estudiantes, para trabajar en un entorno de colaboración y respeto mutuo, en el que podían expresar, comunicar y discutir sus ideas.

Lo anterior no fue fácil, pues generalmente los alumnos están habituados a que el profesor realice la exposición del tema, y ellos únicamente resuelven tareas individuales de repetición, asumiendo el papel de receptores pasivos de las explicaciones del profesor, limitándose a comprender y ejecutar técnicas y procedimientos vistos en el pizarrón. En el grupo no había antecedentes de una enseñanza que se apoyara en la resolución de problemas, pues los sujetos mostraron, mediante sus actitudes, que estaban acostumbrados a la memorización y aplicación de reglas y procedimientos.

En esta etapa, la intervención del investigador propició que se diera la discusión en clase, con el propósito de fomentar el análisis y obtener así, una mejor valoración de las resoluciones de los alumnos. Se eligió el trabajo con equipos pequeños para observar si el trabajo cooperativo contribuye para que los estudiantes logren avances en este tipo de tareas.

Con frecuencia el aprendizaje de las matemáticas es considerado como una actividad aislada e individual. Ante estas circunstancias muchos estudiantes se sienten inseguros, para entender lo que propone o quiere el profesor, esto se incrementa cuando a los sujetos se les asignan tareas de resolución de problemas. Los alumnos carecen de habilidades para enfrentar este tipo de actividades, van adquiriendo la idea de que el aprendizaje de las matemáticas, es únicamente para un grupo reducido de personas brillantes y talentosas.

La modalidad de trabajo en pequeños equipos da la posibilidad de éxito a los participantes, porque pueden desarrollar habilidades mediante el intercambio de ideas al escuchar y explicar conjeturas. A través de actividades realizadas de esta manera, los estudiantes pueden mejorar sus conocimientos básicos, además, al tratar de resolver problemas, comparten retos que les permiten diseñar y probar estrategias de solución.

El aprendizaje mediante el trabajo en pequeños grupos, es una alternativa para promover la cooperación mutua, porque los estudiantes no se sienten aislados y así es posible propiciar la integración real de la población heterogénea en un salón de clase. Sin embargo, el trabajo en equipo no sólo consiste en reunir alumnos en grupos pequeños y darles material para trabajar. Esta actividad requiere que el maestro asuma una actitud dinámica, visitando a los diferentes equipos con la finalidad de brindarles apoyo, si es necesario, proponer ideas que sirvan de guía durante las actividades que se están efectuando.

También, debe observar la interacción en los equipos para animar, o bien, propiciar la discusión y promover el trabajo cooperativo; debe tener el cuidado de equilibrar su ayuda limitándose a dar pistas, clarificar ideas, hacer correcciones, responder preguntas, evitando dar soluciones, porque si se brinda mucha ayuda, entonces se tendrán participaciones pobres con relación a la exploración y búsqueda de soluciones por parte de los estudiantes.

Otra situación que se debe considerar al trabajar en equipo, es el tiempo disponible para llevar a cabo esas tareas y el grado de dificultad que éstas presentan. Es importante jerarquizar las actividades para que, gradualmente, los estudiantes resuelvan problemas cuyo grado de dificultad aumente paulatinamente.

En resumen, algunas de las ventajas que ofrece el trabajo en grupos pequeños es que los estudiantes al involucrarse activamente en el aprendizaje de las matemáticas, mejoran sus relaciones sociales, se comunican en el lenguaje de las matemáticas, elaboran y contestan preguntas libremente, las relaciones del maestro con sus alumnos son más cercanas y los estudiantes no se fastidian en la clase.

Lo expuesto anteriormente, no tiene el propósito de señalar que mediante el trabajo en equipo se superarán todas las dificultades que se presentan en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Sin embargo, se debe considerar como una alternativa para el trabajo en la resolución de problemas.

4.4 Análisis del trabajo de algunos equipos

Al terminar la etapa de resolución de problemas en equipo, se puede comentar que inicialmente se presentaron algunas dificultades, porque los alumnos están habituados a efectuar tareas en forma individual; no obstante, al insistir en que podían compartir y discutir sus conjeturas, sin el temor de ser sancionados, se avanzó paulatinamente en la creación de un ambiente de confianza en el que exponían, evaluaban y corregían sus estrategias.

La actitud del investigador, al coordinar el trabajo y prestar apoyo a los diferentes equipos, cuando se presentaban situaciones difíciles, ayudó a establecer un clima de colaboración mutua en el salón de clases.

Durante las primeras sesiones el trabajo con los equipos estuvo enfocado principalmente a practicar la metodología de resolución de problemas, se revisaron los pasos a seguir al resolver problemas de fracciones. Una de las características observadas en los equipos al resolver los primeros problemas fue la tendencia a operar los datos de manera inmediata sin hacer primero una estimación del posible resultado.

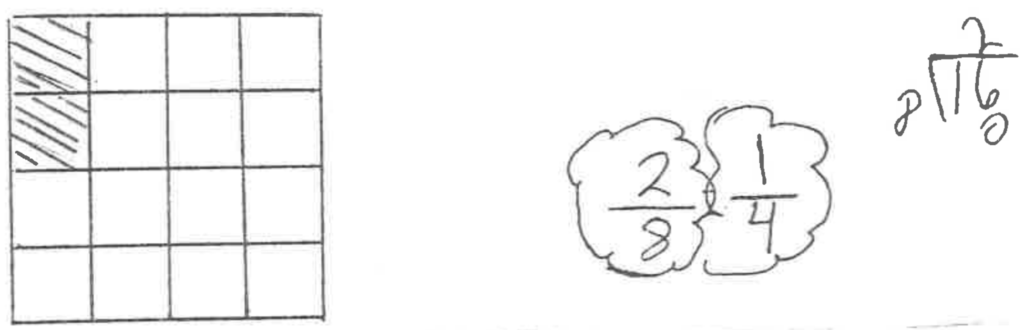
Tampoco hacían una lectura cuidadosa del problema para elegir una estrategia de resolución por lo que las preguntas alrededor del planteamiento fueron fundamentales para reorientar esa disposición tradicional hacia los problemas, también se percibió una desatención para verificar su resolución. Además, se percibió la fuerte influencia que tiene el trabajo individual tradicional que normalmente desarrollan los alumnos.

Ante un problema de representación continua donde se presentó el todo y la fracción para que iluminaran la parte, los alumnos de dos equipos lo hicieron correctamente. Otro equipo tuvo dificultades para iluminar la fracción. Estas dificultades las podemos observar en el siguiente ejemplo:

Problema

La siguiente figura representa una gelatina, ilumina 2/8 de la figura.

Resolución del equipo tres



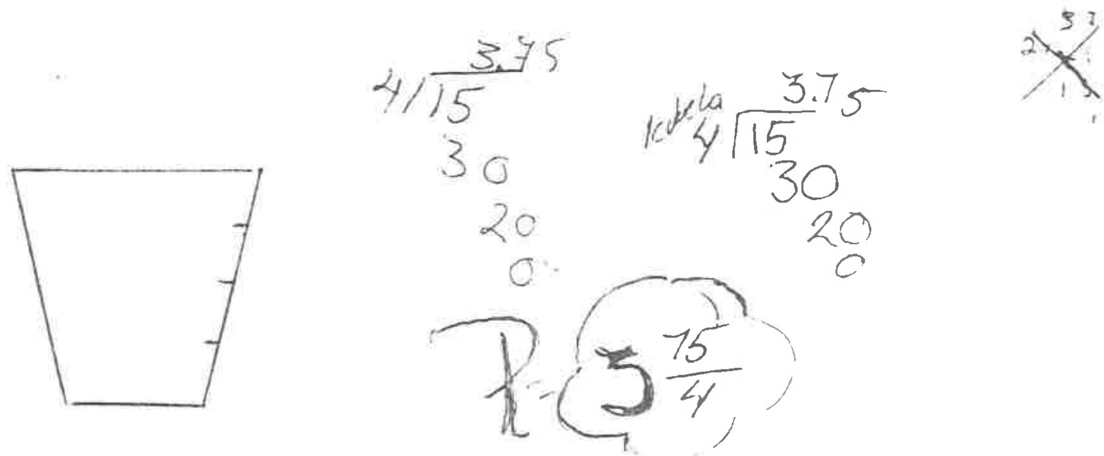
Se puede observar que realizaron una división de los 16 cuadritos de la figura entre ocho y encontraron un resultado de dos, como coincidía con el numerador de la fracción que se indicaba, únicamente iluminaron dos cuadritos sin percatarse que solo representaba 1/8 del todo.

En otro problema donde se pedía que se llenara una tina con una cubeta de cierta capacidad y en el que necesariamente se verían obligados a utilizar cubetas enteras y una fracción de cubeta, dos equipos contestaron correctamente mientra que otro tuvo dificultades para representar un número decimal como fracción común. El siguiente ejemplo muestra estas dificultades:

Problema

Gabriela va a llenar una tina de 15 litros de agua con una cubeta que tiene una capacidad de cuatro litros, ¿cuántas cubetas necesitará llenar para cumplir su objetivo?

Resolución del equipo tres



Los alumnos de este equipo dividieron los 15 litros entre cuatro que era la capacidad de la cubeta, el resultado fue 3.75; sin embargo, no pudieron expresar ese número decimal como fracción común y escribieron tres cubetas y 75/4.

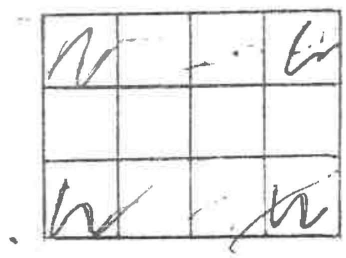
Ante un problema de representación continua donde se presentó el todo y se indicó la fracción a iluminar, los alumnos de los tres equipos resolvieron correctamente.

Dos equipos iluminaron los pedacitos de forma continua (uno junto a otro) mientras que otro equipo pudo iluminar cuatro pedacitos separados de la figura. Esto lo podemos observar en el siguiente ejemplo:

Problema

Ilumina 1/3 de la figura

Resolución del equipo uno

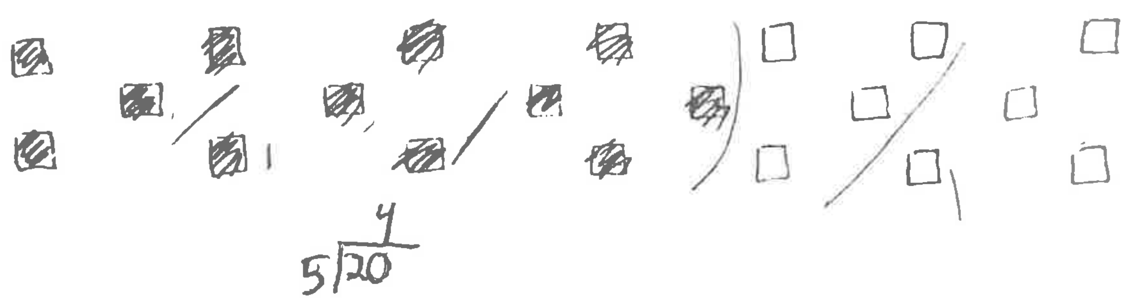


Ante un problema de representación discreta únicamente los alumnos de un equipo resolvieron correctamente mientras que los alumnos de los otros dos equipos tuvieron dificultades para encontrar las 3/5 partes del todo. El siguiente ejemplo muestra la resolución correcta:

Problema

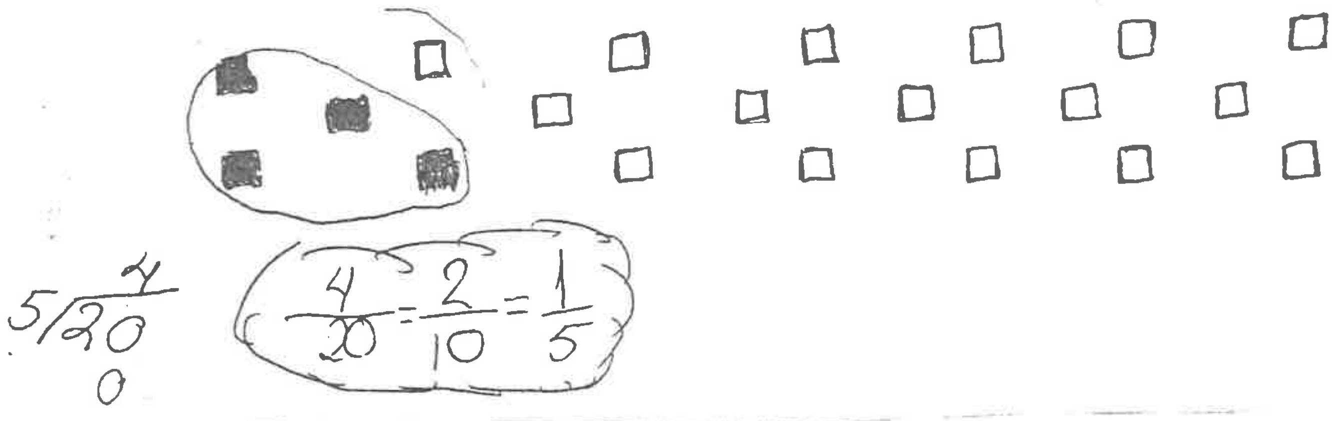
Sombrea las 3/5 partes de los cuadritos.

Resolución del equipo dos



Se puede observar que dividieron el total de cuadritos entre cinco y encontraron el número de cuadritos que representaba 1/5, después iluminaron tres veces esa cantidad.

Resolución del equipo tres



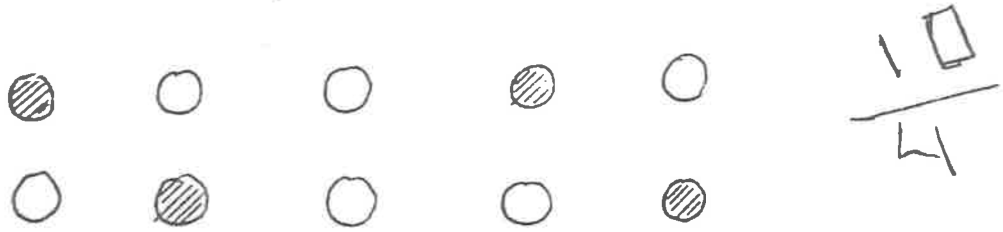
Estos alumnos dividieron entre cinco el número total de cuadritos y, mediante equivalencias encontraron 1/5. Sin embargo, no iluminaron la fracción que se les indicó (3/5).

Ante otro problema de representación discreta donde daba el todo y la parte para que encontraran la fracción, dos equipos resolvieron correctamente. Otro equipo tuvo dificultad para expresar correctamente la fracción. Esto lo podemos observar con el siguiente ejemplo:

Problema

En un tiro al blanco, Arturo derribó las figuras que están sombreadas. ¿Qué fracción representa del total de figuras?

Resolución del equipo dos



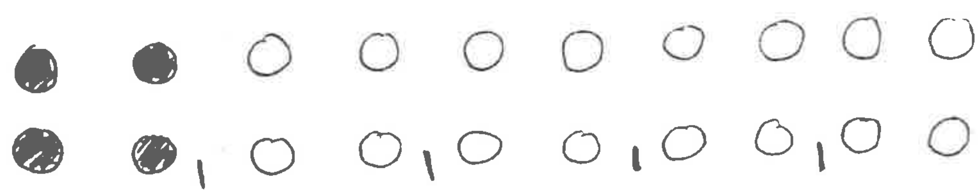
Se puede observar que no tienen claro cual es el numerador y cual el denominador de una fracción.

Ante un problema de representación discreta los alumnos de los tres equipos resolvieron correctamente. Los alumnos de un equipo utilizaron una estrategia de división mediante separación de rayitas. El siguiente ejemplo muestra esta estrategia

Problema

De las canicas que tiene Javier, prometió regalar una quinta parte a su hermano. Ilumina las canicas que debe regalar

Resolución del equipo dos



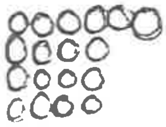
Al resolver un problema de representación discreta los alumnos de los tres equipos dividieron entre tres la cantidad de alumnos. De esa forma encontraron una cuarta parte, posteriormente sumaron esa fracción al número de alumnos dado y obtuvieron el total. El siguiente ejemplo ilustra ese proceso:

Problema

Dieciocho alumnos representan las ¾ partes del total de alumnos de un grupo, ¿cuántos alumnos tiene ese grupo?

Resolución del equipo tres

24 Alumnos



$3\overline{)18}^{\,6}$ $\quad 18 + 6 = 24$

Porque cada (pa) cuarta parte equi vale a seis alumnos y como son cuartas partes se suman o multiplican alumnos por cuartas partes y así da el total de alumnos

Frente a un problema de representación discreta los alumnos de dos equipos resolvieron correctamente, uno de ellos utilizó una estrategia pictográfica para su resolución. El equipo que resolvió incorrectamente tuvo problema para expresar la fracción. Los siguientes ejemplos ilustran los dos casos:

Problema

En mi grupo de amigos seis son niños y cuatro son niñas. ¿Qué fracción de mis amigos son niñas?

Resolución del equipo tres

$\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

Se observa la resolución pictórica y la simplificación de la fracción.

Resolución del equipo dos

$R = 10/4 = 5/2$

Se puede observar que nuevamente se presenta en este equipo la confusión entre numerador y denominador para expresar correctamente la fracción. El error se mantiene al simplificar.

4.5 Resumen

Durante la etapa de trabajo en equipos surgieron diferentes estrategias de resolución de los problemas de fracciones con representaciones continuas y con discretas. Unas estrategias que Santos (1992) denominó como *pictóricas*, donde los alumnos se apoyaron en dibujos para enfrentar los problemas. Otras, donde los alumnos recurren inmediatamente a los *algoritmos*. También surgieron estrategias en donde las operaciones no fueron escritas por los alumnos, sino que utilizaron el *cálculo mental*. Se percibió que las estrategias surgidas fueron incorporadas por los alumnos para la resolución de problemas parecidos, o bien las tenían como recursos para enfrentar en mejores condiciones a los problemas.

Con un ambiente de trabajo favorable se pudieron abordar problemas de fracciones sin que los estudiantes consideraran esta tarea como excesivamente difícil o aburrida. Al contrario, las tareas efectuadas por los estudiantes en los problemas de inicio les permitió enfrentar los problemas restantes con mayor seguridad. Además, el trabajo en equipos fue fundamental para que los estudiantes se expresaran de manera abierta y pudieran resolver los problemas mediante el trabajo cooperativo. Únicamente un equipo tuvo dificultades para distinguir el numerador del denominador al expresar las fracciones comunes.

En este capítulo se presentó la experiencia del trabajo cooperativo en equipos, y la posibilidad de crear en el aula un ambiente de trabajo adecuado para que los alumnos tengan la posibilidad de *hacer* matemáticas por medio de la resolución de problemas. El trabajo en equipos es fundamental para tratar de que los procesos de enseñanza y aprendizaje sean de otra forma, que cuente con la participación activa de los estudiantes y que sean ellos mismos los que construyan nuevos conocimientos a partir de sus ideas previas y de compartir con sus compañeros los procesos de resolución que les permita tener una visión más amplia de los problemas.

En esta etapa se pudo establecer una metodología para la resolución de los problemas verbales. Esta forma de trabajo en equipos permite modificar ideas como la de afirmar que los alumnos no razonan o no saben leer; que sólo los alumnos brillantes pueden resolver problemas; que sólo importa el resultado que obtengan; que los problemas únicamente sirven para aplicar lo que el maestro les enseñó y que el trabajo individual es la única posibilidad.

Se describe la riqueza de las estrategias que los propios equipos obtuvieron al enfrentarse a los problemas y la forma de compartirlas al realizar la revisión colectiva de sus procesos, que les permitió resolver las tareas contenidas en las hojas de trabajo. Este trabajo permitió comprobar que la participación del maestro (en este caso del investigador) puede ser la de un coordinador de las sesiones que fomente el trabajo independiente de los alumnos y que únicamente auxilie con preguntas que estimulen el razonamiento de los alumnos para encontrar otros caminos.

Durante la etapa de resolución de problemas por equipos se pudieron observar procesos interesantes en: la formación de los equipos; en los diferentes niveles de participación al interior de los mismos; en la elevación de la autoestima de algunos alumnos inhibidos en su trabajo diario; en la cooperación y solidaridad de los demás integrantes; en la forma exitosa de enfrentar los problemas y, en la confianza y seguridad en los alumnos en cuanto al planteamiento, ejecución y comprobación de conjeturas y estrategias.

Capítulo 5

ANÁLISIS DE DATOS

5.1 Aplicación del cuestionario final

En este capítulo se presenta y analiza el trabajo que los alumnos seleccionados realizaron en el cuestionario final (CF) y el trabajo efectuado por los sujetos en la fase de experimentación. Además, se lleva a cabo una comparación entre lo realizado en el (CD) y el (CF).

Para diseñar el (CF) se tomaron problemas similares a los presentados en el cuestionario dignóstico y la etapa de experimentación. Constó de seis problemas, tres de ellos fueron de representación continua y tres de representación discreta con diferentes combinaciones.

El (CF) se resolvió de manera individual con una duración aproximada de una hora. Fue resuelto con bolígrafo y se dieron indicaciones similares a la aplicación del (CD). Se analizó el desempeño individual de cada alumno ante problemas que pudieron resolver en equipo para indagar si se presentó una mejoría, un retroceso o si continuaron igual con su desempeño en el (CD). Además, se describe la forma en que los alumnos enfrentan los problemas y de qué manera utilizan las diversas estrategias que surgieron en la etapa de trabajo en equipos.

Se presentan los resultados de la fase experimental donde los alumnos resolvieron los problemas contenidos en las hojas de trabajo mediante el trabajo en equipo. También se presentan los resultados del cuestionario final donde los alumnos resolvieron de manera individual los seis problemas. Finalmente se realiza la comparación entre los resultados obtenidos por los alumnos en ambos cuestionarios.

5.2 Análisis de los resultados de la fase experimental

Como se puede observar en el cuadro 5.1, la mayoría de los alumnos organizados en equipos resuelven correctamente los problemas. Únicamente en el problema siete los alumnos obtuvieron una tasa de éxito baja.

Resultados de la fase experimental (Cuadro 5.1)

Hoja de trabajo	No contestan	Contestan	Correcto	Incorrecto	Tasa de éxito %
1	0	3	2	1	66.6
2	0	3	3	0	100
3	0	3	2	1	66.6
4	0	3	3	0	100
5	0	3	3	0	100
6	0	3	2	1	66.6
7	0	3	1	2	33.3
8	0	3	3	0	100
9	0	3	2	1	66.6
10	0	3	3	0	100
11	0	3	3	0	100
12	0	3	3	0	100
13	0	3	3	0	100
14	0	3	3	0	100
15	0	3	2	1	66.6

En el problema de la hoja uno los alumnos de un equipo no resolvieron correctamente a pesar de encontrar 1/8 de la figura.

En el problema de la hoja tres los alumnos de un equipo tuvieron dificultad para expresar un número decimal como fracción común.

En el problema de la hoja seis los alumnos de un equipo tuvieron dificultad para simplificar la fracción.

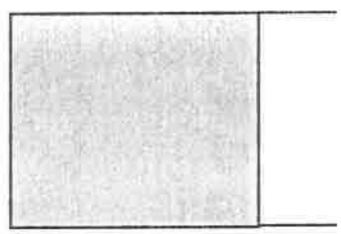
En los problemas de las hojas nueve y quince los alumnos de un equipo confundieron la ubicación del numerador y del denominador al expresar la fracción.

Es importante mencionar que todas las resoluciones y estrategias fueron analizadas cuidadosamente por los alumnos y el investigador para que no quedaran dudas.

5.3 Características del cuestionario final

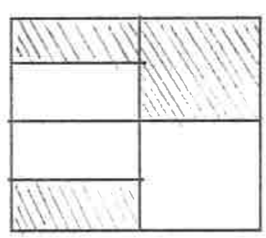
Al término de la etapa experimental se aplicó el cuestionario final que constó de tres problemas de representación continua y tres problemas de representación discreta, las características de este instrumento se describen a continuación.

1. Estas son las 3/7 partes de una barra de chocolate, dibuja la barra completa.



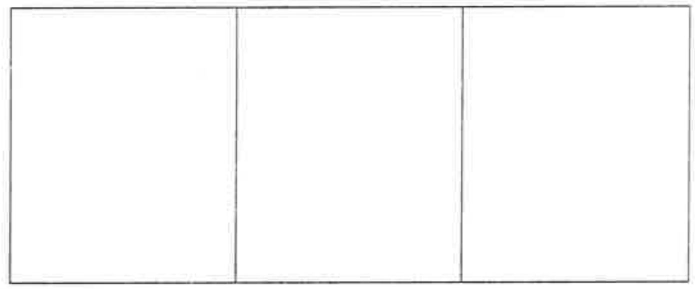
Propósito. En este problema continuo se presenta la *fracción* y la *parte* para que los alumnos dibujen el *todo*. Se espera que los estudiantes midan la parte y dividan entre tres para encontrar 1/7 de la figura y con esa medida puedan dibujar las 4/7 partes restantes

2. ¿Qué fracción del cuadrado está sombreada?



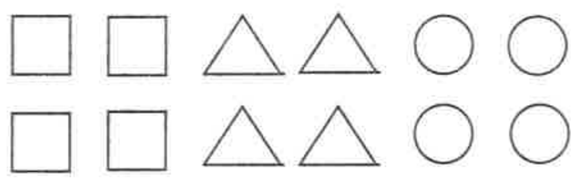
Propósito. En este problema de representación continua se presenta la *parte* y el *todo* para que los alumnos encuentren la *fracción*. Se espera que los estudiantes *visualicen* que si reúnen las tres partes iluminadas se obtienen 2/4 o su equivalente 1/2.

3. Ilumina ¼ del rectángulo



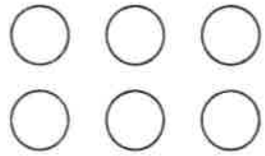
*Propósito.*En este problema de representación continua se presenta la *fracción* y el *todo* para que los alumnos iluminen la *parte.* Se espera que los estudiantes realicen una nueva división en cuartos ya que la figura se encuentra dividida en tercios, posteriormente iluminan una cuarta parte del rectángulo.

4. En la siguiente colección de figuras geométricas, ¿qué fracción representan los triángulos?



Propósito. En este problema de representación discreta se presenta el *todo* y la *parte* para que los alumnos encuentren la *fracción*. Se espera que los estudiantes identifiquen los cuatro triángulos como 4/12 del total de figuras. También pueden identificar los triángulos como la tercera parte del todo

5. Estas canicas representan 3/7 del total de canicas que se encuentran en una bolsa, ¿cuántas canicas tiene la bolsa?



Propósito. En este problema de representación discreta se presenta la *fracción* y la *parte* para que los alumnos puedan dibujar el *todo*. Se espera que los estudiantes dividan las canicas entre tres para encontrar una séptima parte de los objetos. Posteriormente dibujen cuatro veces esa cantidad para encontrar el total.

6. Encuentra ¾ de la colección de objetos

Propósito. En este problema de representación discreta se presenta la fracción y el todo para que los alumnos señalen la parte. Se espera que puedan dividir el total de objetos entre cuatro para encontrar la cuarta parte. Posteriormente multipliquen esa cantidad por tres para encontrar ¾ de los objetos.

5.4 Resultados del cuestionario final

Este fue el diseño del cuestionario final, los alumnos seleccionados lo resolvieron de forma individual con una duración aproximada de una hora. Este cuestionario pretendió observar el desempeño individual de los estudiantes ante los problemas verbales de fracciones. Los resultados fueron los siguientes:

Resultados del cuestionario final(Cuadro 5.2)

Problema	No contestan	Contestan	Correcto	Incorrecto	Tasa de éxito %
1	0	9	6	3	66.6
2	0	9	8	1	88.8
3	0	9	7	2	77.7
4	0	9	8	1	88.8
5	0	9	5	4	55.5
6	0	9	5	4	55.5

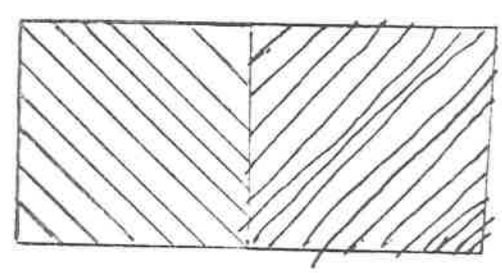
En este cuestionario se observa que los alumnos pudieron resolver los problemas en mejores condiciones que en el cuestionario diagnóstico, que

En este cuestionario se observa que los alumnos pudieron resolver los problemas en mejores condiciones que en el cuestionario diagnóstico, que pudieron incorporar las estrategias que surgieron en la etapa de experimentación y que la tasa de éxito en la mayoría de los problemas fue positiva.

A continuación se presenta el análisis de los resultados de cada problema (cf. Anexo 3):

Problema 1. Ante este problema de representación continua donde los alumnos tenían que reconstruir el todo, seis estudiantes resolvieron correctamente. Los tres alumnos de nivel bajo resolvieron incorrectamente. El avance fue significativo ya que dentro de los problemas de representación continua este representaba la mayor dificultad. Uno de los alumnos que resolvieron incorrectamente consideró la parte iluminada como la mitad del todo y entonces completó el doble de la figura. Los otros dos estudiantes consideraron a la parte como un tercio del total.

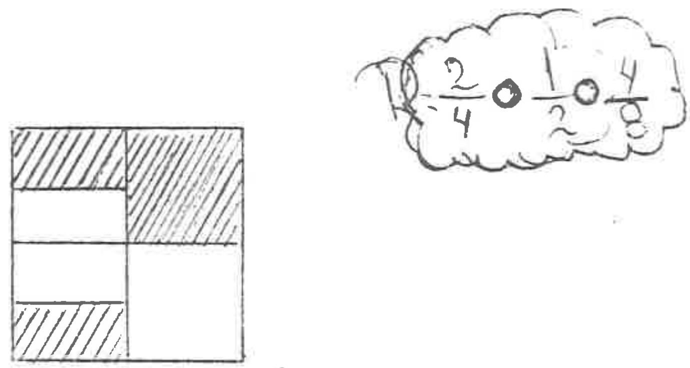
El siguiente ejemplo muestra la forma en que un alumno consideró la parte como la mitad del todo.



Problema 2. Ante este problema de representación continua, los alumnos tenían que encontrar la fracción. Ocho alumnos resolvieron correctamente, pudieron identificar que aunque las partes no tenían la mima forma, sí tenían la misma medida, inclusive seis alumnos manejaron equivalencia de fracciones. El

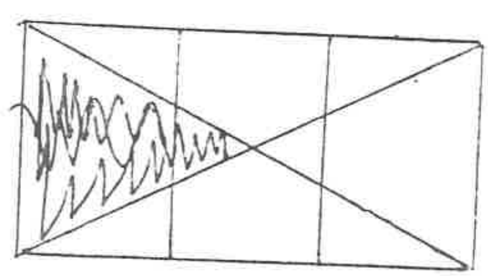
alumnno que resolvió incorrectamente solo consideró una de las partes iluminadas.

En el siguiente ejemplo podemos apreciar el manejo de las equivalencias que realizó un alumno.



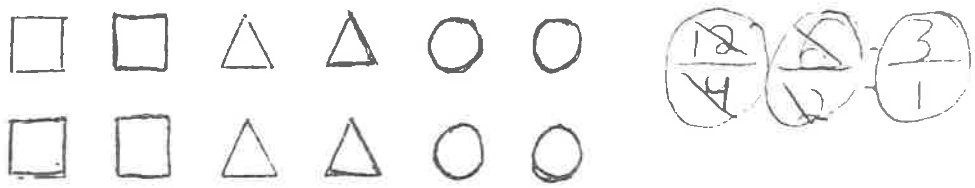
Problema 3. Ante este problema de representación continua, siete alumnos resolvieron correctamente a pesar de que la figura se encontraba dividida en tercios y se pidió que se iluminara un cuarto de la figura. Estos alumnos realizaron otra división sobre la figura. Uno de los alumnos que resolvieron incorrectamente agregó un tercio más a la figura para convertirla en cuartos, mientras que el otro estudiante iluminó un medio del rectángulo.

El siguiente ejemplo muestra la división con diagonales que hizo un alumno para resolver el problema.

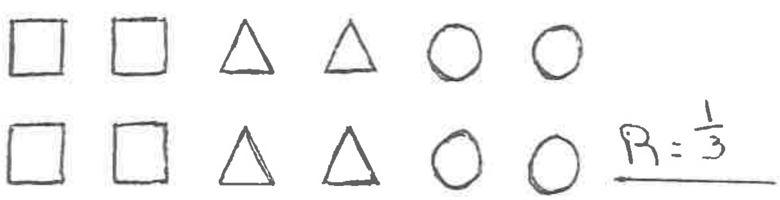


Problema 4. Ante este problema de representación discreta donde se tenía que encontrar la fracción, ocho alumnos contestaron correctamente e inclusive manejaron equivalencias de la fracción. Este manejo significa un avance de la forma en que los alumnos interpretan la fracción. El alumno que contestó incorrectamente no pudo expresar la fracción pues no tiene clara la diferencia de posición entre el numerador y el denominador.

En el siguiente ejemplo podemos apreciar la confusión de este alumno.



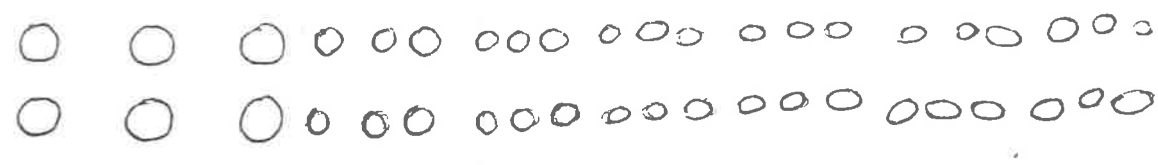
En el siguiente ejemplo podemos observar la interpretación avanzada que hace este alumno de la fracción.



Problema 5. Ante este problema de representación discreta donde los alumnos tenían que reconstruir el todo, cinco alumnos contestaron correctamente. Tres estudiantes contestaron incorrectamente. Dos de ellos consideraron la parte

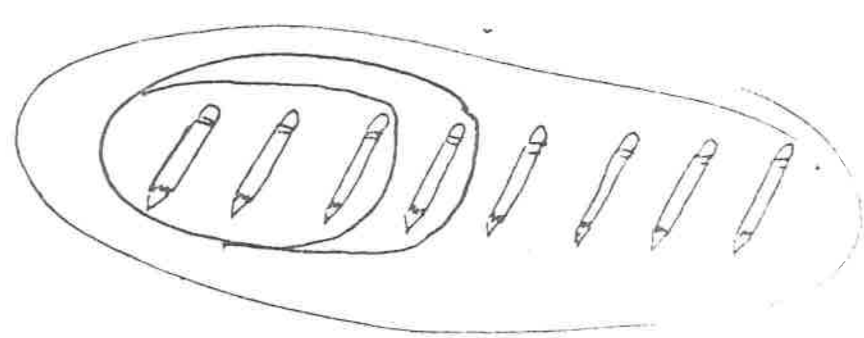
como un medio del total; otro tomó la parte como un séptimo del total y finalmente , otro consideró la parte como un tercio del total.

En el siguiente ejemplo podemos observar algunas de estas dificultades.



Problema 6. Ante este problema de representación discreta donde los alumnos tenían que encontrar la parte, cinco alumnos contestaron correctamente. Cuatro estudiantes contestaron incorrectamente. Uno de ellos tomó la todo como si fuera la parte; otro subdivide el todo en dos parte y de ahí toma las tres cuartas partes de uno de los subconjuntos; otro alumno tomo el todo como 8/9 y dibujó un objeto más para completar el todo. Finalmente un alumno efectuó una división del total de objetos entre cuatro (para encontrar un cuarto) pero únicamente iluminó una cuarta parte de los objetos.

En el siguiente ejemplo se observan algunas de las dificultades.



A continuación presentamos los resultados de cada alumno ante el cuestionario final:

Desempeño de los alumnos en el cuestionario final (Cuadro 5.3)

Alumno	1	2	3	4	5	6	Aciertos
A1	1	1	1	1	1	1	6
A2	1	1	1	1	1	1	6
A3	0	0	1	1	0	1	3
A4	1	1	1	1	1	1	6
A5	1	1	1	0	1	0	4
A6	0	1	0	1	0	0	2
A7	1	1	1	1	1	1	6
A8	1	1	1	1	0	0	4
A9	0	1	0	1	0	0	2

n.c. = no contesta
1 = solución correcta
0 = solución incorrecta

A continuación se presentan los resultados obtenidos por los alumnos en el cuestionario diagnóstico y el cuestionario final.

Desempeño de los alumnos en los cuestionarios (Cuadro 5.4)

Alumno	Cuestionario diagnóstico	Cuestionario final
A1	6	6
A2	3	6
A3	1	3
A4	6	6
A5	3	4
A6	1	2
A7	6	6
A8	3	4
A9	1	2

5.5 Interpretación global de resultados

Como se observa en el cuadro 5.3, los alumnos del equipo uno (A1, A2 y A3) tuvieron resultados interesantes. El A1 y el A2 tuvieron los máximos aciertos, esto indica una sensible mejoría en el rendimiento del alumno de nivel medio (A2). Los resultados de este alumno en el cuestionario diagnóstico (CD) fuero tres aciertos y el el cuestionario final (CF) fueron seis aciertos como se puede observar en el cuadro 5.4. El alumno de nivel bajo a pesar de obtener tres aciertos en el (CF) mejoró en relación al único acierto registrado en el (CD) como se aprecia en el cuadro 5.4.

Los alumnos del equipo dos (A4, A5 y A6) tuvieron resultados de acuerdo a su nivel. El A4 mantuvo su rendimiento al obtener el máximo de aciertos como se observa en el cuadro 5.3. El A5 registró cuatro aciertos en el (CF) pero obtuvo una ligera mejoría respecto a su rendimiento en el (CD) donde tuvo tres aciertos (ver cuadro 5.4). Finalmente, el A6 obtuvo dos aciertos en el (CF), su rendimiento mejró ligeramente respecto al (CD) donde obtuvo un acierto.

Los alumnos del equipo tres (A7, A8 y A9) también mantuvieron su nivel. El A7 registró el máximo de aciertos en los dos cuestionarios como se observa en el cuadro 5.4. El A8 mejoró ligeramente sus resultados con tres aciertos en el (CD) y cuatro aciertos en el (CF) como lo podemos apreciar en el cuadro 5.4. El A9 también mejoró ligeramente sus resultados con un acierto en el (CD) y dos aciertos en el (CF) como se observa en el mismo cuadro.

Los dos cuestionarios fueron diseñados con las mismas combinaciones de la relación parte-todo al plantear los problemas:

representaciones continuas y discretas

parte	-	fracción	=	todo
todo	-	parte	=	fracción
fracción	-	todo	=	parte

Es importante señalar que a pesar de tener la misma estructura y las mismas combinaciones, el grado de dificultad de los problemas en el cuestionario final fue mayor que en el cuestionario diagnóstico. En términos generales todos los alumnos mejoraron su rendimiento no sólo en el número de aciertos, sino en la capacidad de resolver problemas con mayor dificultad. Este avance es producto de la colaboración entre los alumnos y a la guía del investigador.

Capítulo 6

CONCLUSIONES

Ante las dificultades que provoca la enseñanza tradicional de las matemáticas conviene realizar estudios de cómo se desarrollan las clases en el aula y cuáles pudieran ser las transformaciones que propicien un cambio en la práctica docente.

La problemática en la asignatura de matemáticas es compleja, por lo que es conveniente tomar un aspecto de ella en particular y estudiarlo a profundidad; con la intención de sugerir actividades que ayuden a superar las dificultades en la enseñanza y en el aprendizaje de la asignatura. En el presente estudio se pretendió identificar las ideas y dificultades que tienen los alumnos de sexto año de primaria para interpretar las fracciones en la relación parte-todo al resolver problemas. Además de analizar los efectos de la creación de un ambiente de trabajo favorable para la resolución de esos problemas.

La investigación fue diseñada en el marco de la enseñanza basada en la resolución de problemas como fuente del conocimiento. Con los datos obtenidos y la contrastación realizada entre el cuestionario diagnóstico (CD) y el cuestionario final (CF) se pudo observar que los alumnos seleccionados encontraron diversas estrategias que les permitieron enfrentar en mejores condiciones los problemas propuestos. Las resoluciones estuvieron basadas en sus conocimientos previos en el ámbito aritmético, pero desarrollaron nuevos conocimientos como extensiones de los anteriores.

En el estudio también se pudo comprobar la importancia de romper la enseñanza tradicional (mecanicista e individualista) por una enseñanza donde los alumnos partcipen activamente, elaboren, comuniquen y validen sus conjeturas. Donde, además, puedan hacer preguntas, discutir ideas, aprender de sus errores, sepan escuchar a los demás, manifiesten críticas constructivas y puedan registrar por escrito sus descubrimientos.

Pensar en actividades que favorezcan el desarrollo del pensamiento matemático de los alumnos no es tarea fácil. Se necesita una revisión a fondo de las formas de trabajo en el aula para indagar en qué momento los alumnos se encuentran ante un verdadero conflicto cognitivo que les produzca un desequilibrio y los empuje a encontrar una solución a ese reto.

Tradicionalmente los problemas presentados en la escuela primaria, además de ser repetitivos están fuera del contexto cotidiano de los alumnos. Se necesita hacer una revisión de los problemas presentados en los libros de texto con el fin de actualizarlos y acercarlos a la cotidianeidad de los alumnos. Sin embargo, no basta con hacer problemas *atractivos* para los alumnos, sino que es necesario desarrollar y probar una metodología específica para la resolución de problemas.

Esta metodología rompe de inicio con la forma de enseñanza tradicional en las aulas donde impera el trabajo individual, la calificación por parte del maestro de los resultados de los alumnos y la sanción (verbal o escrita) del error. Con la fase experimental se comprobó que es indispensable trabajar desde la comprensión del problema; desde la producción de conjeturas y estrategias entre los alumnos; hasta la verificación de las resoluciones y la revisión colectiva de las estrategias y procesos efectuados. En esta perspectiva, el error es una fuente de aprendizaje que permite que los alumnos reflexionen sobre ellos y puedan realizar las correcciones pertinentes.

Conclusiones con base en los objetivos de la investigación

1. Objetivo. Detectar las ideas y dificultades que tienen los alumnos al resolver problemas de fracciones en casos continuos y discretos dentro de la relación parte-todo.

Con este objetivo se pretendió identificar las ideas, intuiciones, concepciones, y dificultades que tienen los alumnos de sexto grado al resolver problemas de fracciones en casos continuos y discretos dentro de la relación parte-todo. Se comprobó que los alumnos tienen un escaso manejo de la fracción.

Esta pobreza de significados está determinada fundamentalmente por la deficiencia de la enseñanza, ya que, de manera general, los diferentes subconstructos (medida, razón, cociente y operador) no son abordados por los profesores.

Estos subconstructos se enlazan en forma de espiral (Mochón 1990) para completar y construir el concepto de fracción, de tal manera que al manejar uno o dos significados, los profesores limitan a sus alumnos para que completen el proceso. Es muy importante el manejo completo de los diferentes significados. Sin embargo, se detectó que los alumnos llegan a sexto grado de primaria con graves confusiones de la representación de la fracción en la forma *a/b*.

2. Objetivo. Analizar las dificultades encontradas, para diseñar actividades de enseñanza que permitan a los alumnos construir un concepto más sólido de la fracción.

Una dificultad que se detectó fue que los profesores manejan preferentemente las representaciones continuas de la fracción. De esta manera los alumnos no tienen conocimiento ni dominio de las representaciones discretas que son igualmente utilizadas en la vida diaria. En general, la enseñanza se reduce a representar las fracciones como partes de un *pastel*, de una *naranja* o de *figuras geométricas*, sin que se manejen los conjuntos como un todo o unidad

Esta reducción y el manejo abstracto que se hace del conocimiento provoca que la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones sea un verdadero obstáculo en la escuela primaria. Necesariamente, las actividades de enseñanza para construir un concepto sólido de la fracción tendrán que ver con situaciones que estén cerca del entorno de los niños para que sean significativas para ellos. Además, se deberá tener presente la relación parte-todo como elemento que enlace los diferentes significados, interpretaciones o subconstructos de la fracción. Las actividades deben abarcar las representaciones continuas y las discretas.

3. Objetivo. Identificar los efectos de la colaboración entre los alumnos al resolver problemas de fracciones

Con este objetivo se pretendió identificar los efectos de la colaboración entre los alumnos al resolver problemas de fracciones. Al organizar a los sujetos en pequeños equipos se pretendió crear un ambiente de confianza y colaboración que involucrara activamente a los alumnos en la construcción del conocimiento matemático.

Se comprobó que la comunicación, el diálogo, el respeto mutuo y la interacción entre los estudiantes puede generar un ambiente propicio para la resolución de problemas en el cual los alumnos expertos pueden alentar, ayudar y estimular el potencial de la Zona de Desarrollo Próximo (ZDP) propia y de los alumnos menos capacitados.

Al principio se dio un liderazgo por parte de los alumnos de nivel alto, pero conforme fueron transcurriendo las sesiones, el liderazgo en los equipos fue compartido con los alumnos de nivel medio y nivel bajo. Este desarrollo no fue únicamente en la construcción de los conocimientos matemáticos y en el diseño y utilización de las estrategias, sino en la autoestima de los alumnos menos capacitados que, normalmente, son subestimados en el salón de clases.

Este trabajo contribuyó al desarrollo de habilidades en los alumnos al resolver problemas y a la necesidad de plantear nuevos problemas. Sin embargo, la creación de un ambiente de trabajo cooperativo no fue tarea fácil, ya que no es una práctica común del trabajo en el aula.

Generalmente, los alumnos están acostumbrados a que el profesor realice la exposición del tema y ellos únicamente resuelven tareas individuales de repetición. De esta manera, los alumnos asumen el papel de receptores pasivos de las explicaciones del profesor, se limitan a comprender y ejecutar procedimientos vistos en el pizarrón.

En la etapa experimental, el investigador fungió como facilitador y orientador del trabajo. Al involucrarse de esa manera, el investigador pudo intervenir con preguntas y sugerencias que alentaran el proceso de los alumnos. Además, pudo ser un apoyo para los sujetos cuando se presentaron dificultades en alguna parte del proceso.

Implicaciones y recomendaciones para la enseñanza

En investigaciones como la de Schoenfeld (1985, citado en Santos 1992) se reconoció que el proceso de resolución de problemas matemáticos representa un verdadero reto para los sujetos en la búsqueda de una vía de solución. Este reto puede ser aprovechado para ubicar la resolución de problemas como eje de la enseñanza y el aprendizaje.

El proceso visto desde esta perspectiva implica que necesariamente los docentes deban revisar sus concepciones sobre la enseñanza de la matemática e intentar una forma de trabajo distinta en beneficio del aprendizaje de los alumnos. Esa necesaria reflexión deberá ir acompañada de un proceso de formación docente donde los profesores puedan revisar su práctica, conocer la propuesta de resolución de problemas, hacer una revisión teórica de los estudios sobre el tema y adentrarse, efectivamente, en el diseño de problemas y en la aplicación de la metodología que permita el aprendizaje cooperativo de los alumnos.

Es necesario que los profesores se adentren en un proceso de actualización sobre los diferentes significados de la fracción, el proceso que sigue el niño en la construcción de este concepto, conocer el manejo de las representacionres continuas y discretas. Finalmente necesitan conocer, diseñar y evaluar actividades que les permitan tener un manejo completo de la fracción y que sean cercanas al interés de sus alumnos. Si no se tiene claridad sobre este proceso es prácticamente imposible avanzar hacia otros conocimientos como la operación de las fracciones (suma y resta) que implica otras dificultades.

Con base en los resultados obtenidos en la presente investigación, se pueden hacer algunas recomendaciones para la enseñanza en un marco de resolución de problemas.

1. Diseñar situaciones de enseñanza y aprendizaje en un marco de resolución de problemas, como la fuente misma de construcción del conocimiento matemático; que permitan modificar la práctica docente.

2. Incorporar el trabajo en equipos como medio para el aprendizaje cooperativo tomando en cuenta la interacción entre los alumnos en un contexto social.

Además, que se valore la importancia de la mediación de los alumnos más capacitados para conducir a los alumnos menos capacitados a ampliar su Zona de Desarrollo Próximo (ZDP).

3. Iniciar un proceso de formación permanente para que los profesores tengan dominio de los diversos aspectos que se ven involucrados en la construcción del concepto de fracción y el diseño de los problemas (el contexto, las formas de presentación, la estructura de los mismos, las relaciones involucradas, el dominio numérico, los factores de complejidad) para que ellos mismos puedan diseñar los problemas.

4. Crear ambientes de enseñanza y aprendizaje favorables, los cuales permitan la comunicación, el diálogo y el respeto mutuo para generar una atmósfera de cooperación y confianza. Este ambiente posibilita que los alumnos generen el conocimiento e incluso puedan aprender de sus errores.

Es una realidad que la mayoría de los profesores siguen trabajando de forma tradicional. Prácticamente las investigaciones y propuestas generadas en matemática educativa son desconocidas por ellos. Así, al no participar en el diseño curricular ni conocer las propuestas que se generan; los docentes trasladan a la práctica, de forma lenta los cambios propuestos en el plan de estudios de primaria. Una investigación interesante sería indagar cuáles son los obstáculos que enfrentan los docentes al operar las propuestas y cuáles serían las mejores vías para que conocieran y participaran en las investigaciones sobre matemática educativa.

Respecto al tema de investigación sería interesante diseñar actividades que permitan entrelazar los diferentes significados de la fracción teniendo como eje la relación parte-todo, que se puedan operar estas actividades y evaluarlas para su mayor difusión.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artzt, Alice (1996). *Developing Problem-Solving Behaviors by Assessing Communication in Cooperative Learning Groups*. En Communication in Mathematics, K - 12 and Beyond pp. 116-125

Ausubel, David Paul *et al.* (1983). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo* México, Trillas pp. 485-509

Bergeron, J. y Herscovics. (1987). *Unit fractions of a continuos whole.* Trad. por Simón Mochón y María Eugenia Ramírez. En Proceedings of the PME-XI. Montreal pp. 357-365.

Figueras, Olimpia *et al.* (1992). *Guía para el maestro, sexto grado primaria.* México, SEP pp.1-58.

Freudenthal, H. (1983). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas*. México. Traducción Luis Puig Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN pp. 1-60.

Hart, K. (1981). F*ractions*. En Children's Understanding of Mathematics. London, John Murray pp.66-81.

Jiménez de la Rosa, *et al.* (1991). *Antologías La Matemática en la Escuela tomos I, II y III*. México, SEP -UPN pp. 1-60.

Kieren, T. (1983). *La partición, la equivalencia y la construcción de ideas relacionadas con los números racionales.* Traducción por Olimpia Figueras. En Proceedings of the fourth international Congress on Mathematical Education. Canadá pp. 506-508.

Kilpatrick, J. (1995). *Errores y dificultades de los estudiantes, resolución de problemas.* En Educación Matemática. México, Grupo Editorial Iberoamerica pp.12-48

Mochón, S. (1990). *Fracciones: algo más que romper un todo.* México. Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV - IPN pp. 1 - 29

Polya, George (1996). *Cómo plantear y resolver problemas.* México, Trillas pp.25-53

Santos, Luz M. (1992). *Resolución de problemas; el trabajo de Alan Schoenfeld: una propuesta a considerar en el aprendizaje de las matemáticas* En Educación Matemática Vol. 4 No. 2 agosto 1992. México, Grupo Editorial Iberoamérica pp.16-24

Santos, Luz M. (1993). *La resolución de problemas: elementos para una propuesta en el aprendizaje de las matemáticas.* En Cuadernos de Investigación No. 25 Año VII julio. México, Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV pp.1-83

Streefland, L. (1982). *Subtracting Fractions with Different Denomintors* Educational Studies in Mathematics pp.233-255.

SEP. (1993). *Plan y programas de estudio de educación básica primaria.* México, Secretaría de Educación Pública pp. 49-70

Tudge, J. (1993). *Vygotsky, la zona de desarrollo próximo y la colaboración entre pares: connotaciones para la práctica del aula.* En Vygotsky y la Educación. Argentina, Aique Grupo Editor pp.187-208

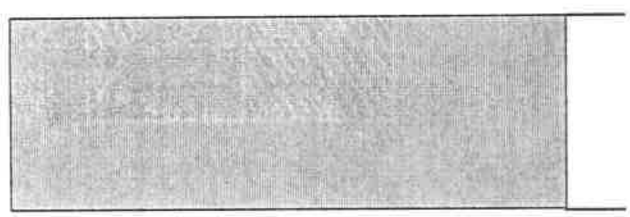
ANEXOS

Anexo 1

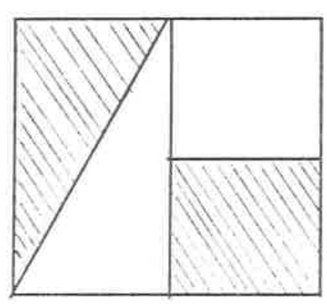
Cuestionario diagnóstico

Nombre____________________________________Años_________Meses________
Escuela______________________________Turno_______ hr.inic.____ hr.tér._____

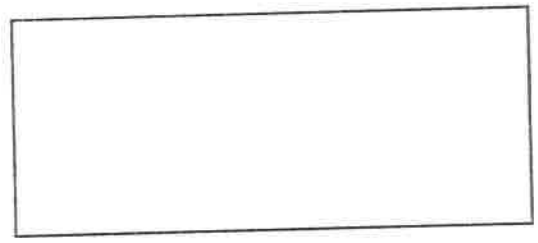
1. Estas son las 2/5 partes de un chicle, dibuja el chicle completo.



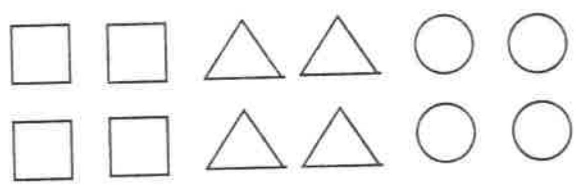
2. El siguiente dibujo representa un terreno de forma cuadrada. ¿Qué fracción del terreno está sombreada?



3. Ilumina 2/3 de la siguiente figura:

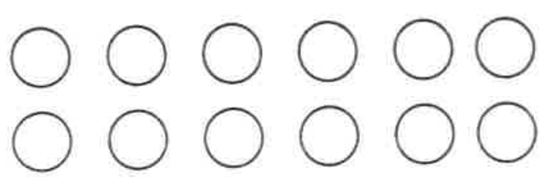


4. En la siguiente colección de figuras geométricas, ¿qué fracción representan los triángulos?



5. Tres niños del grupo coral representan ¼ parte. ¿Cuántos niños representan todo el grupo coral?

6. Encierra ¾ partes del conjunto de canicas:

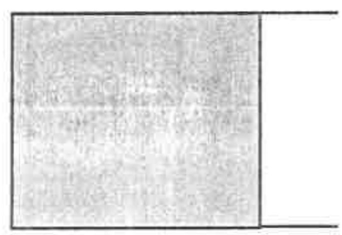


Anexo 2

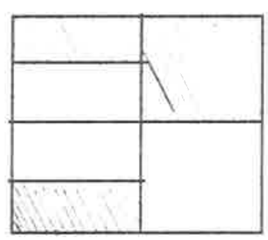
Cuestionario final

Nombre ________________________________ Años________ Meses_______
Escuela___________________________Turno______ hr.inic.____ hr.tér._____

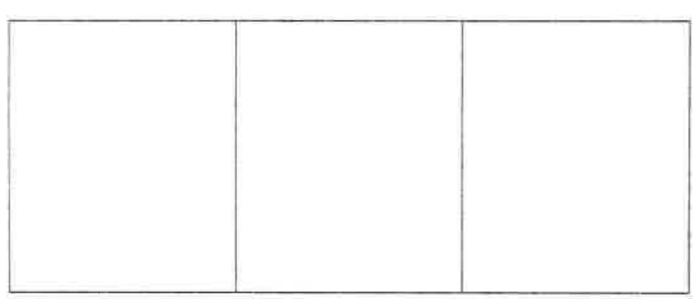
1. Estas son las 3/7 partes de una barra de chocolate, dibuja la barra completa.



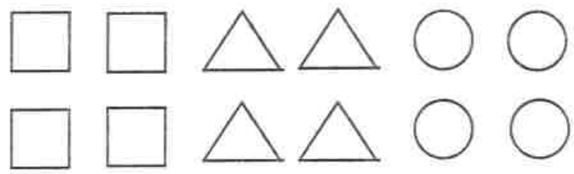
2. ¿Qué fracción del cuadrado está sombreada?



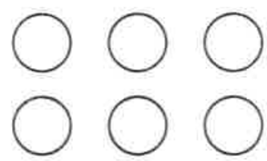
3. Ilumina ¼ del rectángulo



4. En la siguiente colección de figuras geométricas, ¿qué fracción representan los triángulos?



5. Estas canicas representan 3/7 del total de canicas que se encuentran en una bolsa, ¿cuántas canicas tiene la bolsa?

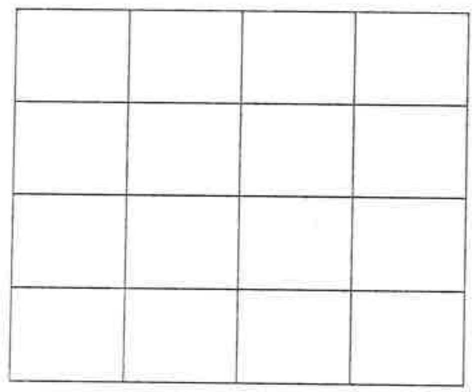


6. Encuentra ¾ de la colección de objetos

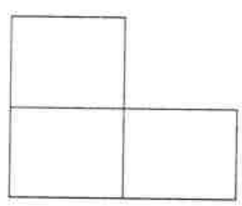
Anexo 3

Hojas de trabajo

1. La siguiente figura representa una gelatina, ilumina 2/8 de la figura.

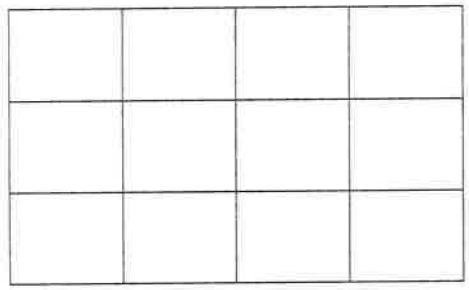


2. Esta figura representa las 3/8 partes de un pastel, dibuja el pastel completo.

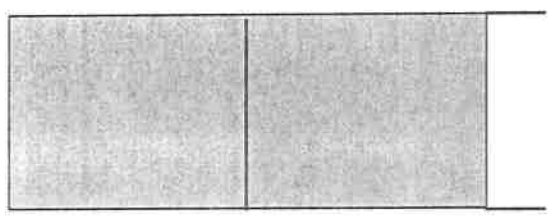


3. Gabriela va a llenar una tina de 15 litros de agua con una cubeta que tiene una capacidad de cuatro litros, ¿cuántas cubetas necesitará llenar para cumplir su objetivo?

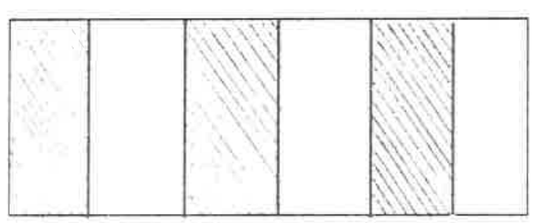
4. Ilumina 1/3 de la figura



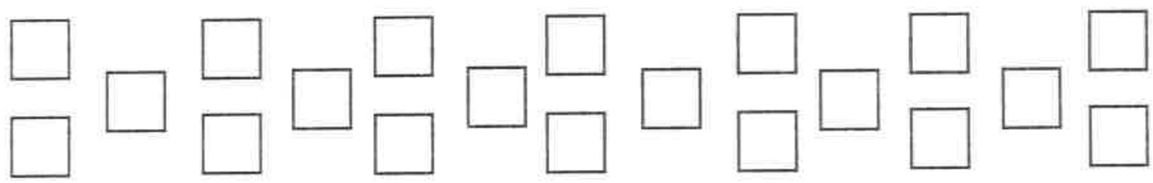
5. El dibujo representa las 2/6 partes del total de la figura. Dibuja la figura completa.



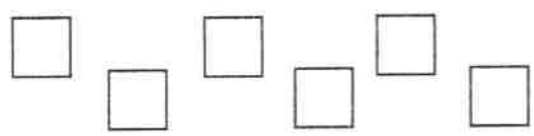
6. ¿Qué fracción representa la parte sombreada?



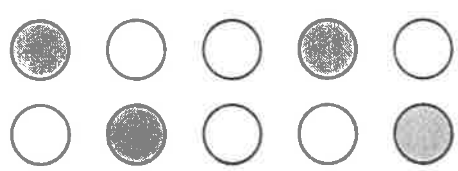
7. Sombrea las 3/5 partes de los cuadritos.



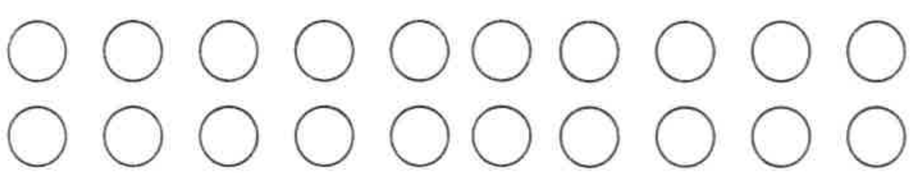
8. Estos cuadritos representan las 2/5 partes del total de cuadritos. Dibuja el todo.



9. En un tiro al blanco, Arturo derribó las figuras que están sombreadas. ¿Qué fracción representa del total de figuras?



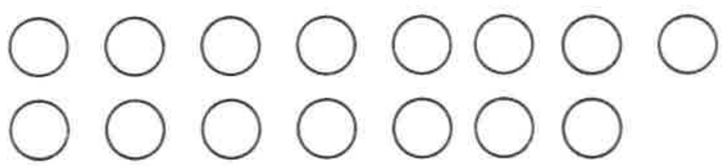
10. De las canicas que tiene Javier, prometió regalar una quinta parte a su hermano. Ilumina las canicas que debe regalar.



11. Dieciocho alumnos representan las ¾ partes del total de alumnos de un grupo, ¿cuántos alumnos tiene ese grupo?

12. ¿Qué fracción de la colección de triángulos está sombreada?

13. Encierra 3/5 de la colección de bolitas.



14. En mi fiesta de cumpleaños mis amigos se tomaron 18 refrescos. Estos representan ¾ partes del total. ¿Cuántos refrescos compramos?

15. En mi grupo de amigos seis son niños y cuatro son niñas. ¿Qué fracción de mis amigos son niñas?