Secretaría de Educación Pública
Secretaría de Educación Pública y Cultura
Universidad Pedagógica Nacional
Unidad 25-A

"El uso de la factorización en números primos para la búsqueda del mínimo común denominador en las fracciones"

TESIS

Que para obtener el título de

LICENCIADO EN EDUCACION PRIMARIA

Presenta

Carlos García Salomón

Culiacán Rosales, Sin., Enero 1998

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

MCM 5/III/99

DICTAMEN DEL TRABAJO PARA TITULACIÓN

Culiacán Rosales, Sinaloa, a 08 de enero de 1998.

C. PROFR. CARLOS GARCIA SALOMON

En mi calidad de Presidenta de la Comisión de Titulación de esta Unidad y como resultado del análisis realizado a su trabajo, intitulado: **"EL USO DE LA FACTORIZACION EN NUMEROS PRIMOS PARA LA BUSQUEDA DEL MINIMO COMUN DENOMINADOR EN LAS FRACCIONES"**, opción **tesis,** a propuesta del asesor, M.C. Candelario Cálix López, manifiesto a usted que reune los requisitos académicos establecidos al respecto por esta Institución.

Por lo anterior, se le dictamina favorablemente su trabajo y se le autoriza presentar su examen profesional.

María Librada Velázquez Paredes

LIC. MARIA LIBRADA VELAZQUEZ PAREDES
PRESIDENTA DE LA COMISIÓN DE TITULACIÓN
DE LA UNIDAD 25 A

ESTADOS UNIDOS MEXICANOS
S.E.P.
UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
UNIDAD 25A
CULIACAN, SIN

DEDICATORIAS

Este trabajo se dedica:

A todas aquellas personas que
de una u otra manera participaron
en su elaboración.

En especial a mi esposa e hijos,
Que gracias a su apoyo moral y
tranquilidad que propiciaron
permitió llegar a buen término
éste trabajo.

AGRADESCO:

A M.C. CANDELARIO CALIX LOPEZ,
Por hacer posible el logro de
este trabajo, gracias a su
capacidad académica y al apoyo
moral que desinteresadamente
brindó.

INDICE

INTRODUCCION 1

I.- PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1.- Antecedentes 3

1.2.- Delimitación 5

1.3.- Justificación 6

1.4.- Objetivos 6

1.5.- Hipótesis 7

II.- MARCO TEORICO

2.1.- La enseñanza de las matemáticas 9

2.2.- Las fracciones comunes como parte de las matemáticas 12

2.3.- Desarrollo y aprendizaje 14

2.4.- Desarrollo y aprendizaje de las fracciones comunes en el niño 20

2.5.- La enseñanza de las fracciones en la escuela primaria 22

2.6.- Factorización en números primos 23

III.- ANALISIS DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS EN EL TRABAJO DE AULA Y LOS ESTUDIOS DE CASO REVISADOS

3.1.- Metodología 26

3.2.- Analisis de los estudios de caso 33

3.2.1.- El caso de Gregorio 33

3.2.2.- El caso de Karina 38

3.2.3.- El caso de Edwin 42

3.2.4.- El caso de Marilú 47

3.2.5.- El caso de Henry 52

3.2.6.- El caso de Xiomara 57

CONCLUSIONES 65

BIBLIOGRAFIA 68

APENDICE 71

INTRODUCCION

En la búsqueda para encontrar mejores caminos que nos permitan resolver los problemas cotidianos que guardan estrecha relación con los problemas escolares, este trabajo se encamina a presentar una aportación al estudio de las matemáticas en alumnos de sexto grado; al realizar una investigación que tiene que ver con la manera en que deben enseñarse las matemáticas desde una perspectiva teórica constructivista y tomando como base algunas de las sugerencias de los planes y programas de estudio vigentes.

Más directamente, se encamina a conocer los problemas que enfrenta el alumno de sexto grado para encontrar el mínimo común denominador en el uso de las fracciones partiendo de un criterio en el que se toman en cuenta situaciones didácticas que tienen que ver con el acercamiento que ha tenido el alumno en grados anteriores, y de la manera en que se genera la interacción grupal en la que se desenvuelve.

Para este caso, se hace mención del antecedente que se tiene de la problemática que enfrenta la enseñanza de la matemática en la escuela, y del interés que existe al realizar este trabajo presentado con base en los objetivos planteados.

Se hace una referencia histórica de las matemáticas, por la relación que existe de su origen, a la manera como inicia su enseñanza en la escuela primaria, en la cual se parte del concepto de número y de situaciones concretas para tener una visión más clara de las nociones matemáticas a las que se pretende llegar.

Se toma en cuenta la relación que existe entre la aritmética y la geometría para llegar a lo que se conoce como fracción o números fraccionarios, y partir de ahí y los estudios realizados en psicogenética y la teoría del constructivismo, tratando de lograr en la aplicación de las actividades en el salón de clases una pedagogía operatoria para abordar la enseñanza de las fracciones en la escuela primaria.

Después de la revisión que se señaló, en la metodología se parte del estudio de casos para conocer las habilidades que tienen y desarrollan los alumnos del grupo que se trata en relación a el uso de la factorización en números primos para encontrar el mínimo común denominador en las fracciones.

Esto se logra por medio de tres evaluaciones y dos entrevistas que se realizaron en cada uno de los casos; con los resultados obtenidos se llega a conclusiones que vislumbren una relación del desarrollo del niño y los contenidos que se proponen en los programas actuales de enseñanza, de los cuales el maestro debe tener conocimiento para permitir el desarrollo del pensamiento lógico-matemático del niño.

I.- PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1.- Antecedentes

La enseñanza de las matemáticas es considerada por la mayoría de los profesores como una asignatura de difícil comprensión, los resultados obtenidos en los anteriores planes de estudio (antes de 1992) no son los esperados y posiblemente las autoridades educativas así lo consideraron al haberse revisado éstos en todas las asignaturas; con base en ello, en 1993 entraron en vigor nuevos planes y programas de estudio para la educación básica.

Esto con base a estudios realizados en años anteriores a 1993, en los que se hicieron encuesta y entrevistas a diversos sectores de la sociedad, y de acuerdo a la opinión de investigadores en el ámbito educativo, temas de difícil entendimiento en primaria y especificamente en matemáticas *"la multiplicación y división con fracciones pasó a la secundaria"* (Plan y programa,1993;54).

En la actualidad los programas de matemáticas se apoyan en el constructivismo, recomendando una pedagogía operatoria en el salón de clases, de esta manera se considera que la adquisición de los conocimientos y habilidades donde el alumnos debe construir su propio conocimiento y el maestro solo propicia situaciones que le permitan razonar y desarrollar su pensamiento lógico-matemático.

Los propósitos que se persiguen en los diferentes grados escolares son de acuerdo a la edad cronológica y nivel cognoscitivo del niño para la adquisición de conocimientos. Las causas para no obtenerse los propósitos señalados pueden ser diversas y una de ellas puede ser que el inicio escolarizado de las matemáticas en primer grado no sea el adecuado y esto repercute en todos los grados posteriores; puede ser que dentro de la educación primaria nos encontremos con profesores que desconozcan el pensamiento lógico-matemático del niño y que solo en forma mecanizada avanzan en los contenidos programáticos que se le señalan; también en algunos maestros influyen los modelos educativos tradicionales donde sólo es cuestión de mecanizar las operaciones matemáticas.

Se dan casos en que los maestros no toman en cuenta los conocimientos con que llegan los alumnos a determinado grado escolar, y al querer inducir un nuevo contenido programático, este es rechazado por el alumno; ya sea por falta de motivación o porque es incomprensible para él; mostrando con ello poco interés a la enseñanza escolarizada de las matemáticas.

En la actualidad se diseñan estrategias didácticas para la enseñanza de las matemáticas, como son los ficheros que el maestro debe utilizar en el que cada ficha sugiere el propósito que se persigue y así el maestro no se pierde en el tratamiento de algún contenido.

Aun así el rendimiento escolar es muy bajo con relación a los contenidos programáticos que se relacionan con las fracciones de distintos denominadores -objeto de nuestro estudio- del curriculum de matemáticas.

1.2.- Delimitación

Tomando en cuenta los diferentes aspectos que pueden ser la causa que origine un bajo aprovechamiento escolar, es preciso mencionar que este trabajo se encamina a buscar esas causas que pueden resultar significativas y de esta manera encontrar mejores manera de lograr los propósitos que se señalan en matemáticas al término de la educación primaria, y en especial en relación al aprendizaje de las fracciones con diferentes denominadores.

Por lo cual en este trabajo se investiga si el uso de la factorización en números primos para buscar el mínimo común denominador en operaciones con fracciones de distinto denominador es recomendable en alumnos de sexto grado de educación primaria; el cual lleva por título "el uso de la factorización en números primos para la búsqueda del mínimo común denominador en las fracciones.

Cabe aclarar que el uso de la factorización en números primos es un contenido que no se trata en educación primaria .

El estudio se llevo a cabo en la escuela primaria "Gral. Angel Flores" de Eldorado, Sin., tomando como base en el estudio de casos un grupo de veintiocho alumnos que cursan el sexto grado, de donde se escogieron seis casos como representativos involucrando a alumnos de baja, media y alta comprensión con respecto al aprendizaje de las matemáticas.

1.3.- Justificación

Considerando que la enseñanza de las matemáticas presenta deficiencias que no permiten obtener resultados que se puedan tomar como favorables, y que estos resultados se muestran en la apatía que presentan los alumnos a la asignatura de matemáticas al ingresar a niveles superiores (secundaria o bachillerato) al hacer comentarios que dejan mucho que desear de la manera en que se imparten los contenidos con fracciones numéricas.

Por lo cual es conveniente investigar sobre estrategias que permitan al niño darle una utilidad práctica en sus estudios posteriores; este justificante permite realizar la investigación, el diseño y las actividades que aquí se realizan permiten desarrollar el pensamiento lógico-matemático del alumno.

Se quiere también cumplir con los propósitos que se pretenden para la enseñanza de las matemáticas *"poner mayor énfasis en la formación de habilidades para la resolución de problemas y el desarrollo del razonamiento matemático a partir de situaciones prácticas"* (Plan y Programa,1993;15). Hacer que la adquisición de conocimientos matemáticos tenga un beneficio de tiempo y esfuerzo para el alumno en la resolución de problemas cotidianos, justifica el interés de realizar este trabajo.

1.4.- Objetivos

Los objetivos que se persiguen con este trabajo llevan una secuencia que permita llegar a un objetivo general, el cual se dará con los objetivos que se mencionan e investigar en ese sentido implica:

*Saber la noción de fracción que posee el alumno al inicio del ciclo escolar.
*Conocer que estrategias desarrolla el alumno al resolver fracciones con diferentes denominadores.

*Saber como llegan los alumnos de sexto grado a encontrar el mínimo común denominador en las fracciones.

*Conocer las estrategias que desarrollan los alumnos de sexto grado al utilizar la factorización en números primos.

*Conocer los cambios que promueve en alumnos de sexto grado el uso de la factorización en números primos.

*Realizar una evaluación de los resultados obtenidos.

*Elaborar conclusiones de los resultados obtenidos.

1.5 Hipótesis

La manera en que se da el acercamiento a las fracciones en la escuela, es factor determinante para que los que se acerquen a estas logren llegar a los diferentes usos y significados que tienen estas en la escuela y en lo cotidiano. En contraparte consideramos que el uso de la factrorización utilizando el método de descomposición en números primos puede ayudar al alumno a lograr mejores resultados en el aprendizaje de las fracciones numéricas.

Para ello se toma como base lo siguiente:

- Que los alumnos de sexto grado puedan utilizar el procedimiento de factorización en números primos para la búsqueda del mínimo común denominador en las fracciones numéricas.

- Que el contexto social en que se desenvuelven los alumnos es factor que puede influir en el desarrollo del pensamiento lógico-matemático.

- Que el diseño de estrategias adecuadas al desarrollo cognoscitivo de los alumnos permite desarrollar su pensamiento lógico- matemático.

II. MARCO TEORICO

2.1.- La Enseñanza de las Matemáticas

"La génesis del pensamiento matemático en el niño es la historia del pensamiento matemático del adulto que, paso a paso, se va desarrollando en cada individuo" (Moreno,1993;71).

Partiendo del señalamiento anterior, se hace mención de la relación que existe entre el desarrollo del pensamiento lógico-matemático del niño y la formación de las matemáticas en la historia de la humanidad, y el valor que tienen es muy grande por la lógica con que se estructuran.

En la actualidad la enseñanza de las matemáticas, tiene un antecedente histórico muy palpable, porque al remontarnos a su inicio con los griegos comprendía: geometría y aritmética (Cfr. Kuntzmann; 1993: 85.), Analógicamente en los años 70´s. las nociones establecidas desde entonces poco han cambiado, porque en la actualidad sigue estando presente el razonamiento lógico.

El origen de las matemáticas es anterior a los descubrimientos de los griegos, ya que babilonios y egipcios con anterioridad habían realizado observaciones y experimentaciones siguiendo procedimientos de razonamientos inductivos. Los griegos son creadores de las demostraciones deductivas matemáticas.

Situaciones concretas, como contar un rebaño de animales, habitantes de un pueblo, edad de las personas, fueron el inicio de las matemáticas; ya que se puede comprobar al remontarnos a comunidades de bajo nivel social en el que las personas adultas dicen respuestas al parecer infantiles, sobre ciertas cantidades de objetos, y que en cantidades pequeñas dan nombres de partes de su cuerpo.

El realizar acciones de correspondencia con objetos para contar sus pertenencias o algún fenómeno, fue lo que dio origen a lo que hoy son los números; y aunado a la necesidad de comunicar la existencia de ese conteo, hay una necesidad de expresarlo con símbolos, y para un número determinado existe diferente simbología según la cultura que se mencione (mayas, romanos, árabes). Todo esto fue conformando los principios aritméticos a través de muchas generaciones, logrando con ello que las propiedades numéricas queden dentro de un nombre o de un signo (tres:3) según sea la necesidad y dando con ello la abstracción numérica de la aritmética.

Por lo tanto se puede decir que *"Los conceptos aparecen tras una serie de sucesivas abstracciones y generalizaciones, cada una de las cuales reposa en la combinación de experiencias con conceptos abstractos previos"* (Aleksandrov,1994;35).

El uso de los conceptos matemáticos ya establecidos, como la multiplicación, la división o la suma permiten en la vida cotidiana obtener conclusiones más rápidas, y llegar con la ayuda de la lógica matemática a situaciones abstractas permitidas por medio de los tratados matemáticos establecidos desde la antigüedad.

La matemática como ciencia a evolucionado a través del tiempo y en cualquier momento histórico sus avances son demostrables, y parte de nociones fundamentales para concluir con un razonamiento lógico.

El inicio de las matemáticas en forma escolarizada da mucha importancia a que el niño desarrolle el concepto de número, ya que *"una buena comprensión y conocimiento del número natural puede sentar bases importantes para satisfacer los requerimientos del aprendizaje de los conceptos básicos de la aritmética"* (SEP, Guía Para el Maestro 1°, 1992;16).

Desde que el hombre empezó a contar y utilizar los símbolos numéricos como abstracción de cantidades de objetos, permitió desarrollar conceptos aritméticos y desarrollar su pensamiento lógico.

El concepto de número es adquirido por el niño en el momento en que por medio de la clasificación define la cardinalidad del número, y que el uso de la seriación le permite abstraer su ordinalidad.

Para llegar a este concepto el niño parte de los conteos orales, en el que ya menciona: uno, dos, tres; y sabe que sirven para señalar o etiquetar cantidades de cosas. esto sucede cuando el niño tiene 2 o 3 años de edad aproximadamente.

En primer grado de primaria se inicia al niño con el conteo oral de los números del 1 al 9 y después hasta el 15. Ya que el niño sabe contar en orden y sin omitir números ni intercambiarlos se le inicia con el apareamiento de objetos en cantidades pequeñas (5 o 6) para que posteriormente haga conteos señalando los objetos, haciendo con ello una correspondencia entre objeto y número. *"La aritmética teórica surge a partir del concepto de número".* (Aleksandrov,1994;34).

Para la adquisición del concepto de número el niño atraviesa por diferentes etapas llamados principios:

1.-Principio de orden estable; Al momento de contar oralmente los números establece que estos se repiten siempre en el mismo orden.

2.-Principio de correspondencia: Al momento de contar objetos les asigna un solo número a cada objeto.

3.-Principio de unicidad: Es cuando establece que cada número tiene un valor cardinal distinto.

4.-Principio de abstracción: Puede contar diferentes objetos y darles un número a cada uno aunque no sean de una misma clase pero si cierto número como conjunto de objetos.

5.-Principio de valor cardinal : En el conteo de los objetos el niño descubre que el último número que menciona de un conjunto , es el valor del conjunto.

6.-Principio de irrelevancia de orden. Al momento de contar "X" conjunto de elementos de cualquier forma que los acomode (en círculo, en línea recta, separados, unidos) se da cuenta que siempre son los mismos elementos del conjunto.(Véase SEP, Guía para el Maestro 1°, 1992;24).

2.2.- Las fracciones comunes como parte de las matemáticas

Se dice que la unión de las dos ramas (aritmética y geometría) de la matemática son la base que dio origen a las fracciones, (Aleksandrov,1994;41) que la aplicación de una a la otra ya sea al tomar medidas y darle un valor a la medida y calcular cuantas veces se puede dar esa medida en determinada distancia.

Ejemplos para fusionar a la aritmética y la geometría se puede mencionar en los volúmenes, al decir 1/2 litro o $500cm^3$; en las medidas lineales, ½ metro o 50 cm. Con ello se aprecia que las fracciones vienen a unir a la matemática como una sola y que a la vez estas parten de medidas geométricas. En lo anterior se puede apreciar la relación que existe entre un entero y la parte que se señala de este, al indicar por medio de dos números (numerador y denominador); en las que el denominador indica las partes en que se fracciona el entero y el numerador señala cuantas partes se están tomando.

El uso de las fracciones en lo cotidiano son constantes ya que es fácil decir media hectárea, un cuarto de queso, tres kilos y medio de carne, un cuarto de arroz; pero pocas veces se le da un uso gráfico o numérico a esas fracciones, por lo cual se puede decir que el uso de estas no es igual al uso o conteo de los números enteros y a la vez los algoritmos que se realizan con ellas no son iguales a los que se usan con números enteros dando a la vez diferentes resultados.

En el plano escolarizado el uso de éstas es muy deficiente, ya que en su mayoría los maestros solo enseñan a sumar y restar fracciones por medio de situaciones en que los pasos que se siguen solo son mecanizados por los alumnos y no hay una reflexión en ellos que permita relacionarlas con el medio en que viven.

> *La experiencia lógico-matemática es el resultado de la abstracción de propiedades de las acciones del sujeto. De ahí que si el niño no actúa, reflexionando sobre las acciones que realiza y los resultados que producen, no pueden comprender".* (moreno,1993;70).

Lo anterior es base para considerar que la enseñanza de las fracciones se debe iniciar en los niños con el uso de objetos concretos que permitan que le permitan darse cuenta que las fracciones son producto del reparto, y que el nombre que se les asigna viene a ser una abstracción.

La diversidad de aspectos que el uso de las fracciones beneficia a las matemáticas en el contexto escolar es muy grande, ya que permite al niño darse cuenta de que aparte de los números enteros existen los números fraccionarios y que también permiten numerar distancias o proporciones de objetos o un mismo número entero.

2.3.- Desarrollo y aprendizaje

En este trabajo se precisa aclarar las concepciones que se manejarán con referencia a el desarrollo y el aprendizaje del niño, para ello los estudios realizados por J. Piaget sobre la psicogenética servirán de apoyo para la fundamentación en la cual nos apoyaremos.

"La mejor manera de considerar el desarrollo es como una serie de múltiples procesos que se traslapan temporalmente y están

enlazados unos a otros, a veces flojamente, a veces más apretado" (Tanner,1988:23). Viéndose de esta manera, nos damos cuenta que el desarrollo es un proceso continuo y unido, en el que los cambios que ocurren dentro de ese proceso, en momentos no se pueden observar fácilmente por la relación tan estrecha de un cambio a otro en el proceso de desarrollo por el que pasa el niño.

Por otro lado, el desarrollo es considerado como un proceso que parte de situaciones concretas y sin relación alguna entre ellas, pero que permiten llegar al conocimiento de conceptos abstractos; *"El desarrollo de la cognición del niño puede ser interpretado como el proceso del paso del reflejo de cosas y fenómenos aislados y concretos a la cognición de nociones abstractas"* (Liublinskaia,1988;35).

Partiendo de lo que anteriormente se afirma, se puede decir que el desarrollo del niño es un proceso continuo que no se detiene ni se da por saltos, ya que este desarrollo lleva una secuencia en la cual las reflexiones que hace el niño sobre situaciones concretas a las que se enfrenta constantemente le permiten en su momento hacer abstracciones.

Piaget afirma que el desarrollo cognoscitivo se da por dos aspectos distintos, el psicosocial y el psicológico; el primero viene a ser el que se recibe por medio de la familia y por la escuela, y el otro es lo que el niño aprende sin que se lo enseñen, y es al cual se le debe dar más importancia en la construcción de conocimientos. Estos son la base para adquirir o la capacidad que tiene el niño para tener acceso a conocimientos más complejos, y esto es de acuerdo al desarrollo de la estructura mental de su pensamiento lógico *"el desarrollo psicosocial se subordina al desarrollo espontaneo y psicológico"* (Piaget, 1988;

93).

Es pertinente aclarar la diferencia entre los cambios fisiológicos y los cambios cognoscitivos que se dan en relación a la edad de cada individuo. *"Los primeros aparecen de modo más o menos específico e inmediato dependiendo de la edad, los segundos están caracterizados por variaciones notables y múltiples"* (Luria,1988;173). Como un ejemplo podemos tomar la infancia y la adolescencia que tienen sus características a determinadas edades, ya sea la aparición de los dientes o el desarrollo de sus aparatos reproductores; en el desarrollo cognoscitivo se manejan etapas discontinuas en relación a distintas situaciones problemáticas a que se enfrenta el niño y a factores que se presentan en los medios sociales en que se desenvuelven.

El aumento progresivo del desarrollo cognitivo parte de la adaptación del sujeto al medio ambiente donde se desenvuelve y este va a la par con el desarrollo cronológico. A cada nivel funcional del niño, o aparición de alguna capacidad, Piaget lo nombra estadio de desarrollo; para ello menciona cuatro etapas en las que enmarca los distintos estadios.

> *Primero una etapa que precede al lenguaje y que llamaremos inteligencia sensorio-motriz, antes de los 18 meses aproximadamente. Segundo, una etapa que comienza con el lenguaje y que llega a los 7 u 8 años a la que llamaremos período de la representación preoperatoria... luego, entre 7 y 12 años más o menos, distinguiremos un tercer período que llamaremos el de operaciones concretas, y finalmente, después de los 12 años el de las operaciones proposicionales o formales* (Piaget,1988;96).

Las etapas en mención, llevan un orden de sucesión que posiblemente no aparezca en las edades que se señalan, ya que dentro del desarrollo cognoscitivo interviene como un factor el aspecto psicosocial, aunque este no hace que cambie el orden de sucesión por la razón de que cada estadio de desarrollo sirve de base para otro más complejo en la estructura mental que se desarrolla para la adquisición de conocimientos; lo que si puede pasar respecto a los factores que intervienen es que puede apresurar o retrasar los períodos que señalan.

Para tener más precisa la relación de la psicogenética con este trabajo es necesario hacer mención de los estadios del desarrollo por los que atraviesa el sujeto para pasar del período de las operaciones concretas a las operaciones formales. Lo cual será un apoyo de referencia para tomar en cuenta las respuestas que den los alumnos de sexto grado que se investigan, ya que se encuentran entre los 10 y los 13 años de edad.

El paso de las operaciones concretas a las operaciones proposicionales o formales, se inicia con el cambio del pensamiento concreto al pensamiento abstracto se muestra cuando el niño logra dar respuestas apoyado en un razonamiento hipotético-deductivo. Pasar de las operaciones concretas a las formales es dejar de manipular objetos para decir respuestas lógicas, lo cual es conocido como lógica de proposiciones.

Posiblemente el niño que no ha llegado a los 11-12 años diga, que 20 es mayor que 15 sin necesidad de contar los objetos, pero Piaget señala que problemas más abstractos no son resueltos por ellos y pone como ejemplo el caso de los animales; que al preguntarle a un niño si todos los pájaros son animales o si todos los animales son pájaros; solo logran dar respuestas lógicas y es capaz de razonar y deducir sin la necesidad de manipular objetos

(Véase Piaget; 1988; 102) ya que no tendría necesidad de contar los pájaros para acertar en las respuestas; pero esto sucedería cuando el niño ya estuviera en las operaciones formales. Ya que *"Los niños que tienen once o doce años... son capaces de pensar los conceptos matemáticos sin ver o tocar los objetos reales"* (CONAFE,1987;15).

En relación a lo que es el aprendizaje, y no solamente el aprendizaje escolar, en este trabajo se perfila una línea constructivista, tomando en cuenta que el constructivismo es un proceso cognoscitivo de carácter activo por medio del cual le permite al niño construir *"su peculiar modo de pensar, de conocer, de un modo activo, como resultado de la interacción entre sus capacidades innatas y la exploración que realiza mediante el tratamiento de la información que recibe del entorno"* (Santillana,1994;315).

Para ello se parte de que el aprendizaje cognitivo depende del desarrollo de las estructuras mentales del niño y que, dichas estructuras van siendo reforzadas por la manera en que se hacen los acercamientos a los nuevos conocimientos o aprendizajes.

Como podemos ver, el constructivismo es una teoría de aprendizaje que ha sido ampliamente aceptada en las comunidades de educación en general y tiene sus primeros antecedentes, como se muestra en el análisis anterior, en los trabajos de Jean Piaget, en el fundamento de que todo conocimiento es construido por el sujeto que aprende, que no lo que recibe pasivamente del entorno y que sigue conociendo y haciendo suyo nuevos conocimientos a partir de los conocimientos previos que tiene, ya que el proceso de conocer es un proceso de adaptación del sujeto que aprende al mundo por sus propias experiencias, por lo tanto no es posible descubrir un mundo independiente y pre-existente afuera de la mente del que conoce.

El constructivismo hace explícita la construcción del conocimiento a través de la interacción social de los individuos, la visión constructivista y de resolución de problemas ha influenciado la educación matemática llamando la atención sobre la necesidad de construir nuevos contextos de enseñanza y de adecuar el aprendizaje de nuevos conocimientos al nivel de desarrollo del niño dentro del contexto escolar, por lo cual se deben incorporar actividades que permitan un aprendizaje interactivo y constructivo que genere discusiones creativas donde el que aprende pueda poner algo de su parte.

El maestro debe propiciar la reconstrucción y verbalización de ideas y soluciones a problemas matemáticos ocurridos en la clase, en el que tanto maestros como alumnos se encuentren en una dinámica grupal que permita comprender e interpretar las soluciones alternativas que surjan y se logre que las ideas matemáticas que se manejen sean reconocidas.

En la realidad muchos profesores pueden estar de acuerdo con las cuestiones anteriores y las predican. Sin embargo, la puesta en práctica en el salón de clase de las mismas, exige una preparación muy cuidadosa de las situaciones de clase, una buena formación y experiencia para saber manejarlas.

Por otra parte, se ha encontrado que la tensión que se genera entre la teoría y la práctica pone de manifiesto con respecto al constructivismo que pensar que la mayoría de estudiantes pueden aprender y apropiarse de las matemáticas por sí mismos sin la colaboración del profesor es utópico, ya que papel del profesor y su interacción con el estudiante inciden en el éxito del aprendizaje.

Deben tomarse en cuenta propuestas de situaciones problemáticas alternativas donde el alumno se sienta motivado y empeñado en resolverlas, de manera que sirvan para generar su propio conocimiento (Andrade, 1995;3).

Los señalamientos anteriores dan pauta a afirmar que el proceso de aprendizaje siempre está en constante construcción por el sujeto, los aprendizajes se dan secuenciados y su desarrollo tiene que ver con toda la estructura interna y externa del sujeto, las que en estrecha interrelación son elementos para que se logren aprendizajes significativos.

2.4.- Desarrollo y aprendizaje de las fracciones comunes en el niño

Tomando en cuenta los nuevos planes y programas de educación primaria, el inicio escolarizado de las fracciones se empieza a tratar hasta en tercer grado, debido a que el concepto o noción de fracción se debe desarrollar en un enlace con los diferentes usos y significados de esta.

Sus significados empiezan por relacionarse con el reparto y la medición, y su tratamiento comienza en tercer y cuarto grado y posteriormente en quinto y sexto se le da tratamiento en relación con la razón y proporción.

La selección de contenidos de esta propuesta descansa en el conocimiento que actualmente se tiene sobre el *desarrollo cognoscitivo del niño y sobre los procesos que sigue en la adquisición y la construcción de conceptos matemáticos específicos"* (Plan y Programa,1993; 52).

El uso de las fracciones esta contemplado en el eje temático "Los números sus relaciones y sus operaciones" pero se inicia en el eje "Medición" en el aspecto *la noción de unidad de medida;* en el que se inicia al niño en la medición de longitudes utilizando medidas arbitrarias, y en segundo grado ya se plantean problemas de reparto.

Hasta el tercer grado esta señalado como sub-eje temático los números fraccionarios, en el que se introduce la noción por medio de reparto y medición de longitudes utilizando solo medios, cuartos y octavos y se deben hacer comparaciones con materiales concretos para las equivalencias.

En cuarto grado se manejan tercios, quintos y sextos en el fraccionamiento de longitudes y ya se plantean problemas en que se use la suma y resta de fracciones con un mismos denominador, y se deben utilizar también fracciones con denominadores 10, 100 y 1000 y se deben ubicar las fracciones en la recta numérica.

En el quinto grado de primaria, por medio del fraccionamiento de longitudes se introducen séptimos y novenos, se muestra la equivalencia de algunas fracciones por medio de la comparación de dibujos, se plantean problema de fracciones con denominadores 10,100 y 1000 y se deben realizar actividades para introducir fracciones mixtas. Se utiliza el algoritmo de la suma y resta de fracciones haciendo equivalencias y ya se emplea a la fracción como razón y como división en situaciones sencillas.

El sexto grado engloba los usos anteriores y los contextos en que se deben manejar las fracciones y además, se plantean problemas donde se usen las fracciones mixtas y su conversión a impropias y viceversa, se plantean problemas en que se usen fracciones con denominadores distintos y que se tenga que buscar un denominador común. Aquí es en donde, a nuestro juicio juega un papel importante el manejo de la factorización en números primos.

2.5.- La enseñanza de las fracciones en la escuela primaria

Al presentar a las fracciones con diferente denominador como contenido programático en el sexto grado de primaria, es conveniente hacer mención que estas están incluidas en el eje temático los números, sus relaciones y sus operaciones y se introducen desde el tercer grado con los diferentes significados y usos. Estos van desde el reparto o medición de longitudes, y en los grados de quinto y sexto se manejan como razón y como división en situaciones sencillas.(Plan y Programa,1993:65).

Se debe iniciar con dejar claro en el niño, qué es una fracción, de donde se toman los números que la componen para que así la noción y el concepto de esta lo pueda utilizar en la escuela y en lo cotidiano. (Dávila,1994;103) afirma que *"para introducir el concepto de fracción... se debe iniciar con problemas de reparto y medición"*. Los repartos es el primer uso que se le da a la fracción y se pretende propiciar en el niño la noción de fracción al momento que este realiza reparto de algún objeto entre los demás compañeros y se da cuenta que estos se pueden volver a unir para formar lo que se llamara un entero (Véase Libro para el Maestro, 1996;27). Ya que debe quedar claro en el niño qué fracción es cada una de las partes en que se divida una determinada cantidad que se tome como unidad.

Conjuntamente se realiza la medición de longitudes utilizando materiales concretos, esto con la intención de comparar fracciones por medio de los patrones de medida que utiliza. El reparto y la medición se deben empezar con cosas concreta, de manera que el niño se de cuenta que se esta repartiendo un solo objeto, y a la vez el maestro les debe mencionar a los niños que esta repartiendo una unidad.

Los usos de la fracción como razón y como división se inicia en forma escolarizada en quinto grado, y se utiliza para expresar la comparación multiplicativa entre dos cantidades y su aplicación más frecuente es la escala y el tanto por ciento.

El proceso más complejo por su abstracción, es cuando se comprende que cualquier fracción es el resultado de una división, para ello el sujeto alumno debe tener claro y manejar formalmente los usos que se le dan a la fracción, ya que debe partir del reparto de cosa concretas para que se comprenda que la fracción es parte de la unidad y resultado de dividir.(Programa;1993:32).

2.6.- Factorización en números primos

El uso de la factorización en números primos parte de las propiedades de los números primos y de la manera en que estos son identificables, ya que solo se pueden dividir entre dos números (entre 1 y entre ellos mismos). *"Un número mayor que 1, cuyos únicos factores son el 1 y el mismo número se llama número primo"* (Méndez,1996;139). Para ello existe un procedimiento común llamado "CRIBA DE ERATOSTENES" en la que para escogerse los números primos

2 y 3 se toma en cuenta la cita anterior, posteriormente se tachan los números que sean múltiplos de los números señalados, quedando sin tacharse los demás números primos (ver figura 1). Quedando establecido con ello que el múltiplo de un número primo no es número primo.

Figura 1

CRIBA DE ERATOSTENES

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	~~29~~	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	~~37~~	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~

En este trabajo se trata que la factorización sirva para descomponer los denominadores de las fracciones en sus factores primos y por medio de la multiplicación de los factores encontrar un mínimo común denominador.

(Robledo,1979; 49) lo señala así *"el proceso que consiste en encontrar varios números cuyo producto sea igual a un número dado, se conoce con el nombre de factorización o descomposición en factores".*

El manejo de la factorización en números primos consiste en un procedimiento por el cual se llega a los resultados en la resolución de fracciones de manera más sencilla, ya que permite simplificar al mismo tiempo la operación realizada. Es un proceso que evita tediosas abstracciones y prolongadas multiplicaciones cuando los números involucrados son demasiado grandes. Se toma como antecedente que las fracciones de manera práctica ya fueron manejadas en grados anteriores, iniciando en tercer grado de primaria su enseñanza a través de figuras que muestran partes de distintos tamaños, para que el alumno pueda identificar, posteriormente consideramos que el proceso de factorización auxilia al alumno en el proceso de abstracción en la resolución de fracciones.

La búsqueda del mínimo común denominador se inicia de igual forma que como se busca el mínimo común múltiplo de dos o más números; se puede decir que 12 es múltiplo de 2 de 3 de 4 de 6 y a la vez del mismo 12. Y para calcular el mínimo común múltiplo de varios números, éstos se descomponen en sus factores primos y se toman todos los factores comunes y no comunes con sus mayores exponentes y se multiplican y el resultado o producto que se obtenga es el mínimo común múltiplo de esos números.

III. ANALISIS DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS EN EL TRABAJO DE AULA Y LOS ESTUDIOS DE CASO REVISADOS .

Este capítulo presenta un análisis vertical del trabajo realizado por los alumnos en el período que se tomó como base para llevar a cabo la investigación, en el se involucran tres fases de la evaluación realizada al grupo, y específicamente incluye el análisis de seis estudios de caso como un intento de recuperar algunas manifestaciones particulares de algunos alumnos entre los cuales existían diferencias de apreciación en cuanto al aprendizaje de las fracciones. Por último presentamos algunos aspectos de las entrevistas que se les aplicaron a los seis casos tomados como base.

3.1.- Metodología

Para llevar a buen término esta investigación, se tomó un grupo de sexto grado de la escuela primaria urbana "GRAL. ANGEL FLORES" ubicada en El dorado, Sinaloa, el grupo cuenta con 28 alumnos; siendo 15 hombres y 13 mujeres cuya edad fluctúa entre 10 y 13 años.

La metodología que se utilizó como principal fuente generadora de información fue la técnica denominada estudio de caso, donde se toma el testimonio de seis alumnos de diferentes grados de apropiación del conocimiento, de esta manera se pretendió involucrar las características generales del grupo. Como un segundo aspecto se realizó una entrevista a cada uno de los sujetos involucrados en los estudios de caso. De esta manera se recogió la impresión de cada uno de ellos y además se pudo indagar acerca de las habilidades que de alguna manera habían desarrollado al poner a consideración las formas de enseñanza de las fracciones a través de la factorización en números primos.

De los 6 casos específicos que se retoman son: 3 hombres y 3 mujeres, cuya edad está comprendida entre los 10 años con 8 meses a 13 años con 8 meses, quedando con ello involucradas las edades características del grupo.

Para lo anterior se seleccionó al alumno de menor edad del grupo y al de mayor edad, los otro cuatro casos se comprenden entre los 11 y 12 años siendo 2 hombres, 2 mujeres uno de cada edad tomando en cuenta la baja, media y alta comprensión con respecto al aprendizaje de las fracciones. Quedando ubicados 2 alumnos en el nivel bajo; 2 en el nivel medio y 2 en nivel alto (hombre y mujer en cada uno de ellos).

En el transcurso del trabajo de campo se organizó de la siguiente manera: los alumnos realizan la resolución de fracciones, luego se expusieron los trabajos realizados por ellos, posteriormente se resumió los resultados obtenidos, al final se estructuró una entrevista para saber sus impresiones y comentarios con respecto al trabajo realizado

En la primera entrevista que se realizó con cada uno de los casos, los cuestionamientos fueron encaminados a saber que noción tenían de las fracciones, de que manera las resolvían, que aprendían de ellas y para que servían y que si les gustaría conocer otra forma de resolverlas y saber hacerlo.

Para conocer las estrategias que utilizan para resolver las operaciones con fracciones, se escribió en el pizarrón las siguientes sumas 3/5 + 1/5 =; 2/6 + 1/3 = ; 2/6 + 3/9 =; y se les pidió que las resolvieran. Los criterios que se tomaron para presentar las operaciones fueron:

En la primera operación, sumas con un mismo denominador para saber si el alumno establece la noción de fracción al juntar fracciones iguales.

En la segunda, que el alumno tome como común denominador al más grande; como una de las estrategias que puede seguir para resolver fracciones con diferente denominador.

En la tercera, se pretende que el alumno utilice la estrategia de multiplicar los denominadores para encontrar el común denominador.

En las dos evaluaciones que se realizaron posteriormente se tomaron los mismos criterios señalados.

Sin revisar los resultados obtenidos y el nivel de conocimientos sobre la suma de fracciones, se les dio una explicación referente a la estrategia que se sigue para encontrar el mínimo común denominador en las fracciones con diferente denominador por medio de la factorización en números primos, se les mostró unos ejemplos comparativos que les permitieran darse cuenta de el porque la conveniencia de saber usar este procedimiento ya que si lo hacen por medio de la multiplicación de los denominadores los productos pueden ser muy elevados y al multiplicar los numeradores por los denominadores contrarios, las fracciones alcanzan niveles de expresión muy grandes.

Ejemplo de una fracción resuelta sin usar el proceso de factorización en números primos: 2/6 + 3/9 = 6x9=54 2x9 = 18 y 3x6 = 18 quedando la fracción de la siguiente manera 18/54 + 18/54 = 36/54. Por medio de la factorización el resultado sería 12/18. Dada la explicación se les pidió a los alumnos que para resolver las siguientes operaciones lo hicieran por medio de la factorización: 3/8 + 2/3 + 1/4 =; 2/4 + 1/3 + 3/6 =; 2/3 + 2/9 + 1/6 =. Después de resolverlas y tomando en cuenta los resultados obtenidos en la resolución de estas, se manejó una clasificación con base a los procedimientos que utilizaron y los apoyos que tomaron para obtener los resultados la cual consta de cinco niveles que van desde el que no sabe sumar fracciones hasta el que puede buscar el mínimo común denominador por medio de la factorización en números primos. A continuación se hace mención de los niveles y de su característica principal:

Tabla No. 1 Niveles y Características

Clasificación de niveles	Nivel	Características
Bajo	A	No sabe sumar en su expresión más simple.
Medio	B	Solo realiza sumas de fracciones con un mismo denominador
	C	Realiza la suma de dos fracciones con diferente denominador, tomando al más grande de estos como común denominador.
	D	Sabe buscar el común denominador por medio de la multiplicación de éstos.
Alto	E	Busca el mínimo común denominador por medio de la factorización y realiza la suma.

En el proceso del trabajo de aula se realizaron tres momentos o fases en la evaluación, la primera fase se llevo a cabo dentro de la primera semana de clases en el ciclo 1997-1998; la que denominamos exploratoria, para saber el grado de habilidad que el alumno poseía con relación al manejo de la resolución de fracciones y las dos fases posteriores se hicieron en intervalos de 15 días después de pasar el primer mes de clases, quedando las fechas en que se realizaron de la siguiente manera: 1ª evaluación (primera fase) el 30 de agosto; 2ª evaluación (segunda fase) el 10 de octubre y la 3ª evaluación (tercera fase) el 24 de octubre de 1997. La intención fue detectar de qué manera las situaciones de aprendizaje variaban después de aplicar la intervención del maestro a través de la explicación de los temas. Con base en los niveles descritos en la tabla anterior se presentan los resultados obtenidos en las tres evaluaciones realizadas:

Tabla No.2 Resultados de la primera evaluación (Primera fase)

Clasif. de niveles	Nivel	Alumnos	Características
Bajo	A	9	No saben sumar en su expresión más simple.
Medio	B	9	Solo realizan sumas de fracciones con un mismo denominador
	C	3	Realizan la suma de dos fracciones con diferente denominador, tomando al más grande de estos como común denominador.
	D	1	Saben buscar el común denominador por medio de la multiplicación de éstos.
Alto	E	6	Buscan el mínimo común denominador por medio de la factorización y realiza la suma.
		28	

Tabla No. 3 Resultados de la segunda evaluación (segunda fase)

Clasif. De niveles	Nivel	Alumnos	Características
Bajo	A	7	No saben sumar en su expresión más simple.
Medio	B	9	Solo realizan sumas de fracciones con un mismo denominador
	C	3	Realizan la suma de dos fracciones con diferente denominador, tomando al más grande de estos como común denominador.
	D	2	Saben buscar el común denominador por medio de la multiplicación de éstos.
Alto	E	7	Buscan el mínimo común denominador por medio de la factorización y realiza la suma.
		28	

Tabla No. 4 Resultados de la tercera evaluación. (Tercera fase).

Clasif. De niveles	Nivel	Alumnos	Características
Bajo	A	1	No saben sumar en su expresión más simple.
Medio	B	8	Solo realizan sumas de fracciones con un mismo denominador
	C	8	Realizan la suma de dos fracciones con diferente denominador, tomando al más grande de estos como común denominador.
	D	1	Saben buscar el común denominador por medio de la multiplicación de éstos.
Alto	E	10	Buscan el mínimo común denominador por medio de la factorización en números primos y realiza la suma correctamente.
		28	

Como podemos apreciar en cada una de las fases de la evaluación los resultados se manifestaron de distinta manera, En la primera fase a la que denominaremos exploratoria, encontramos a nueve alumnos en el nivel más bajo en relación a la resolución de fracciones; trece en el nivel medio, y seis que se encuentran en el nivel más alto, al lograr resolver fracciones con el uso de la factorización en números primos desde un primer intento.

En la segunda fase de la evaluación los resultados que se obtienen muestran un ligero cambio con relación a la fase anterior, al observar que solo quedan 7 alumnos en el nivel más bajo; 14 en el nivel medio y 7 en el nivel más alto.

En la tercera fase de la evaluación, que se realizó el 24 de octubre del año en curso, refleja resultados más alentadores para el trabajo que se realiza al quedar los resultados de la siguiente manera; un alumno queda en el nivel más bajo "A" (no sabe sumar fracciones en su expresión más simple); 17 alumnos quedan en el nivel medio al realizar la resolución de las fracciones de distintas maneras pero sin usar el proceso de la factorización; y 10 alumnos logran alcanzar el nivel más alto al resolver las fracciones por medio de la factorización en números primos.

A nuestro juicio, en la última fase de la evaluación se evidencian algunas habilidades logradas por los estudiantes y la intervención del maestro con respecto a la enseñanza de las fracciones a través de la factorización en números primos. Pero además aún cuando los alumnos no lograron concretar en su mayoría la factorización a través de los factores primos, 27 alumnos manejan la resolución de fracciones de distinta manera que resulta correcta o equivalente. La importancia de este hecho estriba en que alumnos que manifestaban un grado muy bajo de aprovechamiento en lo que se refiere a la suma de fracciones de cualquier modo, aprendieron a manejar la factorización en números primos la cual resultó ser un buen proceso para superar esta deficiencia.

En relación a los casos que se analizaron, los seis alumnos evolucionaron favorablemente tomando en cuenta las evaluaciones realizadas.

Como siguiente momento de la investigación se procedió al análisis de los estudios de casos que dan cuenta de los avances de algunos de los alumnos que se tomaron como base.

Para concluir con este apartado podemos afirmar que las partes involucradas dan consistencia empírica y nos acerca al conocimiento sistematizado al interpretar cuidadosamente los resultados obtenidos y la opinión de los estudiantes que participaron.

3.2.- Análisis de los estudios de caso

3.2.1.- El caso de Gregorio

Gregorio tiene 12 años con 9 meses, en el primer mes de clases asistió un 60% la cual es muy irregular. Los conocimientos que tiene acerca de las fracciones, al principio del año escolar, son los más bajos de los casos que se están tratando, ya que pertenece al nivel de clasificación "A". En relación a la primera entrevista, se le olvida como se llaman las fracciones y dice que "no sabe para que sirven" ni el uso que se les puede dar.

Gregorio se unió a este grupo en quinto grado y los años anteriores tuvo diferentes maestros a los de la mayoría del grupo, el contexto sociocultural y económico en el que se desenvuelve es considerado bajo, su padre es empleado en una carpintería, solo terminó la educación primaria, no se preocupa por su asistencia regular ya que, inclusive, cuando el maestro exige le justifiquen la falta envían recados disculpándolo por no asistir argumentando que se encuentra enfermo, y sus compañeros de grupo afirman que no es cierto. De igual modo los trabajos extraclase no los realiza y no expresa las causas.

En la primera evaluación que se manejó con Gregorio los resultados que se obtuvieron fueron los siguientes:

Primera fase

A	3/5 + 1/5 = 4/10	Incorrecto
B	2/6 + 1/3 = 3/9	Incorrecto
C	3/6 + 2/9 = 5/15	Incorrecto

En esta evaluación exploratoria Gregorio se encuentra en el nivel más bajo de aprendizaje de acuerdo a nuestra clasificación. No sabe sumar fracciones con un mismo denominador, realiza la suma de los denominadores al igual que los numeradores; 1/4+2/4 = 3/8.

En la segunda evaluación para Gregorio se registraron los siguientes resultados:

Segunda fase

A	$1/2 + 2/4 = \frac{2+2}{4} = \frac{4}{4}$	El resultado es correcto.
B	$2/8 + 1/2 + 1/4 = \frac{3+1+1}{8} = \frac{5}{8}$	Resultado incorrecto.
C	$1/5 + 1/5 = \frac{4}{10}$	El resultado es incorrecto.

Como podemos ver, en este período Gregorio no avanzó de manera significativa en la apropiación de los conocimientos en la resolución de fracciones. Su confusión se sigue manifestando al sumar los denominadores como si fueran independientes y sin tener idea de lo que significan las fracciones realmente. Se le encuentran deficiencias en la multiplicación y la división de números chicos.

En la tercera fase, que corresponde a la tercera evaluación realizada, los resultados obtenidos con Gregorio son los siguientes:

Tercera fase

A	3/7 + 3/7 = 6/7	Realiza la suma correctamente.
B	3/6 + 2/4 = $\frac{12+12}{24} = \frac{24}{24}$	Contesta correctamente.
C	3/6 + 3/8 = $\frac{21+18}{48} = \frac{39}{48}$	Incorrecta.
D	3/8 + 1/4 = $\frac{8+12}{32} = \frac{20}{32}$	El resultado es correcto
E	3/4 + 3/6 + 3/8 = $\frac{12+17+9}{24} = \frac{48}{24}$	Incorrecto.
F	2/5 + 1/2 + 2/4 =	No contestó.
G	2/3 + 1/6 + 3/9 =	No contestó.

En esta tercera evaluación nos damos cuenta de que los errores de Gregorio dependen de la poca relación que tiene con la multiplicación y con la división de números chicos o de operaciones que debería hacer mentalmente.

El resumen del trabajo de Gregorio se encuentra en la siguiente página.

Resumen del trabajo de Gregorio

A	3/5 + 1/5 = 4/10	Incorrecto
B	2/6 + 1/3 = 3/9	Incorrecto
C	3/6 + 2/9 = 5/15	Incorrecto
D	$1/2 + 2/4 = \frac{2+2}{4} = \frac{4}{4}$	Es correcto el resultado.
E	$2/8 + 1/2 + 1/4 = \frac{3+1+1}{8} = \frac{5}{8}$	El resultado es incorrecto.
F	1/5 + 1/5 = 4/10	El resultado es incorrecto.
G	3/7 + 3/7 = 6/7	El resultado es correcto.
H	$3/6 + 2/4 = \frac{12+12}{24} = \frac{24}{24}$	El resultado es correcto.
I	$3/6 + 3/8 = \frac{21+18}{48} = \frac{39}{48}$	Incorrecto.
J	$3/8 + 1/4 = \frac{8+12}{32} = \frac{20}{32}$	El resultado es correcto
K	$3/4 + 3/6 + 3/8 = \frac{12+17+9}{24} = \frac{48}{24}$	Incorrecto.
L	2/5 + 1/2 + 2/4 =	No contestó.

Análisis del trabajo de Gregorio

En la primera y segunda evaluación Gregorio tiene dificultades para reconocer la fracción como tal, además suma los denominadores como números enteros, no sabe sumar en su expresión más simple (fracciones iguales y con un mismo denominador).

En el tercer trabajo de Gregorio se evidencia un ligero avance en cuanto a la factorización como método de resolución de fracciones de diferente denominador. Esto significa que Gregorio pudo dar significado a algunas de las expresiones matemáticas a través de un proceso de asimilación que aunque no fue completo representa un avance en el manejo de la fracciones. Podemos afirmar que su acercamiento a las matemáticas escolarizadas es muy bajo, sin embargo la exigencia del maestro para que se usara la factorización en números primos en la resolución de fracciones, parece ser que motivó a Gregorio a buscar estrategias más prácticas según su capacidad y que tiene que ver con su desarrollo en el pensamiento lógico matemático; que a su vez brinda apoyo para la sistematización de los procesos de asimilación. Se evidencia el hecho de que Gregorio no ha desarrollado esta potencialidad por algunas causas, posiblemente externas, ya que para su edad cronológica razona correctamente, por lo que su edad mental si corresponde con la edad cronológica.

Resultados de la entrevista final con Gregorio

Los datos recabados en la entrevista final con Gregorio tuvieron que ver con tres aspectos a saber:

- La noción de Fracción que debe tener el alumno y la que Gregorio había desarrollado.

- El uso de la factorización en números primos en la resolución de fracciones.

- Las estrategias utilizadas por Gregorio en la resolución de fracciones.

En el primer punto Gregorio no logra asimilar el concepto de fracción afirmando que es: multiplicar, restar y sumar. Aunque el concepto no es adecuado al realizar la resolución de las fracciones de manera práctica, lo hace correctamente.

En el segundo punto su conocimiento del uso de la factorización en números primos es deficiente, ya que señala que tiene que multiplicar y dividir y solo obtiene resultados parciales.

Sin embargo, en el tercer punto, al manejar los proceso de factorización algunas nociones son correctas. Puede identificar los proceso para resolver operaciones con fracciones, sobre todo ya no tiene dudas al resolver fracciones de un mismo denominador y avanzó en la búsqueda de un común denominador, aunque no lo hace a través de la factorización en números primos, los resultados que obtiene son correctos. Afirma que su Mamá le ayudó a entender el proceso y en la escuela "se enseñó más bien".

3.2.2.- El caso de Karina

Esta alumna es la de mayor edad en el grupo al contar con 13 años con 8 meses de edad, a las fracciones las conoce con el nombre de quebrados o de fracciones cuando están en su representación numérica.

De la primera entrevista, se observa que no reconoce la parte de un entero como fracción y no le sabe asignar un número fraccionario a la parte que se le presenta, dice que sirven para sacar cuentas y que se las enseñaron en quinto grado. El nivel socio-económico del que depende es bajo, su mamá no trabaja, es pensionada por el IMSS debido a que el papá de Karina ya falleció.

Tiene un nivel de clasificación "D" en la realización de las operaciones que se le plantearon, ya que de seis operaciones en cuatro los resultados son correctos pero son copias que hizo de alguno de sus compañeros porque de tres solo en una tiene los procedimientos correctos, y al cuestionarle los procedimientos que siguió para resolverlas no los supo explicar.

En la evaluación exploratoria el trabajo de Karina quedó como sigue:

Primera fase

A	$3/5 + 1/5 = \frac{3+1}{5} = \frac{4}{5}$	Contesta correctamente.
B	$2/6 + 1/3 = \frac{2+2}{6} = \frac{4}{6}$	Contesta correctamente.
C	$2/6 + 3/9 = \frac{18+18}{54} = \frac{36}{54}$	Contesta correctamente.
D	$3/8 + 2/3 + 1/4 = \frac{9+16+6}{24} = \frac{31}{24}$	Contesta correctamente.
E	$2/4 + 1/3 + 3/6 = \frac{3+1+9}{6} = \frac{13}{6}$	Incorrecta.
F	$2/3 + 2/9 + 1/6 = \frac{11+3+1}{9} = \frac{15}{9}$	Incorrecta.

En las tres primeras operaciones sus resultados son correctos y realizados de acuerdo al criterio que se señaló para obtener los resultados. En la cuarta operación se observa que esta se realiza correctamente, solo que la alumna no explicó el procedimiento que siguió para lograrlo, por lo cual se cree que es copia de otro compañero.

Segunda fase

A	$1/2 + 2/4 = \frac{2+2}{4} = \frac{4}{4}$	Contesta correctamente.
B	$3/8 + 1/2 + 1/4 = \frac{3+4+2}{8} = \frac{9}{8}$	Contesta correctamente.
C	$1/5 + 3/5 = \frac{5+3}{5} = \frac{8}{5}$	Incorrecto.
D	$1/3 + 2/6 = \frac{2+2}{6} = \frac{4}{6}$	Contesta correctamente.
E	$3/9 + 2/6 = \frac{3+12}{9} = \frac{15}{9}$	Incorrecta.
F	$3/8 + 2/3 + 1/4 = \frac{3+4+1}{8} = \frac{8}{8}$	Incorrecta.
G	$2/4 + 1/3 + 3/6 = \frac{9+16+4}{24} = \frac{28}{24}$	Incorrecto.
F	$2/8 + 2/6 + 2/4 = \frac{2+4+18}{24} = \frac{28}{24}$	Incorrecto.

En las tres operaciones que son correctas Karina usa el procedimiento de factorización en números primos para buscar el mínimo común denominador, pero en la que se encuentra en el inciso C que es una operación con igual denominador, la alumna escoge correctamente el denominador y no comete el error de sumarlo como en la primera evaluación; pero en los numeradores realiza la multiplicación de un numerador por un denominador y al sumar el resultado es incorrecto. En las operaciones que su resultado es incorrecto los errores que tiene son al dividir el mínimo común denominador entre el denominador de cada fracción y realizar la multiplicación por el numerador para obtener una fracción equivalente, con ello evidencia que la relación que tiene con las fracciones es muy poca.

Tercera fase

A	$3/7 + 3/7 = \frac{6}{7}$	Correcto.
B	$6/3 + 3/4 = \frac{12+12}{24} = \frac{24}{24}$	Contesta correctamente.
C	$3/6 + 3/8 = \frac{24+18}{48} = \frac{37}{48}$	Contesta correctamente.
D	$3/8 + 1/4 = \frac{12+8}{32} = \frac{20}{32}$	Es correcto el resultado.
E	$3/4 + 3/6 + 3/8 = \frac{24+18+12}{24} = \frac{49}{24}$	Incorrecto.
F	$2/5 + 1/2 + 2/4 = \frac{8+2+10}{10} = \frac{20}{10}$	Proceso incorrecto.
G	$2/6 + 1/6 + 3/9 = \frac{18+6+9}{6} = \frac{33}{6}$	Incorrecto.

En esta tercera evaluación la alumna logra sistematizar el procedimiento de multiplicar los denominadores para obtener un común denominador, cuando las operaciones son sumas de tres fracciones no le es posible realizar este procedimiento obteniendo con ello resultados incorrectos.

Tabla que representa un resumen del trabajo de Karina.

A	$3/5 + 1/5 = \frac{3+1}{5} = \frac{4}{5}$	Contesta correctamente.
B	$2/6 + 1/3 = \frac{2+2}{6} = \frac{4}{6}$	Contesta correctamente.
C	$2/6 + 3/9 = \frac{18+18}{54} = \frac{36}{54}$	Contesta correctamente.
D	$3/8 + 2/3 + 1/4 = \frac{9+16+6}{24} = \frac{31}{24}$	Contesta correctamente.
E	$2/4 + 1/3 + 3/6 = \frac{3+1+9}{6} = \frac{13}{6}$	Incorrecta.
F	$2/3 + 2/9 + 1/6 = \frac{11+3+1}{9} = \frac{15}{9}$	Incorrecta.
G	$1/2 + 2/4 = \frac{2+2}{4} = \frac{4}{4}$	Contesta correctamente
H	$3/8 + 1/2 + 1/4 = \frac{3+4+2}{8} = \frac{9}{8}$	Contesta correctamente.
I	$1/5 + 3/5 = \frac{5+3}{5} = \frac{8}{5}$	Incorrecto.
J	$1/3 + 2/6 = \frac{2+2}{6} = \frac{4}{6}$	Contesta correctamente
K	$3/9 + 2/6 = \frac{3+12}{9} = \frac{15}{9}$	Incorrecto
L	$3/8 + 2/3 + 1/4 = \frac{3+4+1}{8} = \frac{8}{8}$	Incorrecta. El mismo caso anterior.
M	$2/4 + 1/3 + 3/6 = \frac{9+16+4}{24} = \frac{28}{24}$	Incorrecto.
N	$2/8 + 2/6 + 2/4 = \frac{2+4+18}{24} = \frac{28}{24}$	Incorrecto.
Ñ	$3/7 + 3/7 = \frac{6}{7}$	Realiza la suma correctamente.
O	$6/3 + 3/4 = \frac{12+12}{24} = \frac{24}{24}$	Realiza la operación correctamente.
P	$3/6 + 3/8 = \frac{24+18}{48} = \frac{37}{48}$	De la misma forma que la anterior.
Q	$3//8 + 1/4 = \frac{12+8}{32} = \frac{20}{32}$	Es correcto el resultado.
R	$3/4 + 3/6 + 3/8 = \frac{24+18+12}{24} = \frac{49}{24}$	Incorrecto.
S	$2/5 + 1/2 + 2/4 = \frac{8+2+10}{10} = \frac{20}{10}$	Proceso incorrecto.
T	$2/6 + 1/6 + 3/9 = \frac{18+6+9}{6} = \frac{33}{6}$	Incorrecto.

Entrevista con Karina

De igual manera que en el caso anterior se cuestionó a Karina en los tres puntos señalados:

En el primer punto Karina presenta una gran diferencia con relación al caso de Gregorio al decir que fracción es una suma y que al momento de pedirle que la represente, escribe dos fracciones con diferentes denominadores.

En el segundo punto hace uso de la factorización en números primos con denominadores 2 y 4 correctamente. No pudo realizar la factorización en números primos al manejar sistemas de fracciones con tres denominadores.

Sin embargo, aun no manejando correctamente la factorización avanzó en el manejo de la resolución de fracciones aunque las realiza multiplicando los denominadores para encontrar un común denominador y lo hace correctamente. Cuando el sistema es de dos fracciones, Karina no tiene ninguna dificultad para realizar las operaciones.

Esta alumna, a pesar de ser la de mayor edad en el grupo y de acuerdo al proceso de desarrollo cognitivo, según Piaget, se debe encontrar en la etapa de las operaciones formales. Sin embargo no logró salir de las operaciones concretas, ya que no pudo hacer las abstracciones necesarias para poder asimilar el procedimiento de la factorización en números primos.

3.2.3.- El caso de Edwin

Edwin tiene 10 años con 8 meses, es el menor del grupo y no ha reprobado grado alguno, Sus padres son profesionistas (profesor y secretaria), se puede decir que su nivel socio-económico es medio bajo. Tomando en cuenta la clasificación que se hizo de niveles, pertenece al nivel "B" (sólo realiza sumas de fracciones con un mismo denominador) y en las fracciones que tienen distinto denominador desconoce como escoger un denominador común.

En el primera entrevista para Edwin las fracciones son "suma de fracciones" dice que "sirven para contestar los libros y hacer cuentas". Se le mostró el procedimiento que se sigue con la factorización para encontrar el mínimo común denominador, el trabajo que realizó fue el siguiente:

Primera fase

A	3/5 +1/5 = 4/5	Contesta correctamente
B	2/6 + 1/3 = 3/6	Contesta incorrectamente.
C	2/6 + 3/9 = 5/6	Incorrecta.
D	3/8 + 2/3 + 1/4 = $\frac{9+16+6}{24} = \frac{31}{24}$	El resultado es correcto.
E	2/4 + 1/3 + 3/6 = $\frac{6+4+6}{12} = \frac{10}{12}$	Incorrecta.
F	2/3 +2/9 +1/6 = $\frac{\quad}{36}$	No terminó de responder.

En este primer momento se nota claramente que Edwin solo sabe resolver fracciones con un mismo denominador, desconociendo el proceso que se sigue para resolver fracciones de distinto denominador.

En una de las operaciones es auxiliado por el maestro de grupo para utilizar la factorización y resolver correctamente, y en la operación siguiente realiza correctamente el proceso de factorización más no así el resultado de la operación.

Segunda fase

A	$1/2 + 2/4 = \frac{2+2}{4} = \frac{4}{4}$	El resultado es correcto
B	3/8 + 1/2 + 1/4 = 9/8	El resultado es correcto.
C	1/5 + 3/5 = 4/5	Es correcto.
D	$1/3 + 2/6 = \frac{2+6}{6} = \frac{8}{6}$	La realiza de manera incorrecta.
E	$3/9 + 3/6 = \frac{6+4}{18} = \frac{10}{18}$	El resultado es incorrecto.
F	3/8 + 2/3 + 1/4 = 56/48	Incorrecto.
G	2/4 + 1/3 + 3/6 = 6/6	Incorrecto.
H	2/8 + 2/6 + 2/4 = 18/8	Incorrecto.

En esta segunda evaluación Edwin avanzó en la apropiación de conocimientos en relación a las operaciones que se presentaron ya que pudo resolver correctamente dos operaciones usando los primeros dos criterios para resolver fracciones. En el caso (B) el resultado es correcto, sin embargo al preguntarle sobre los procesos que realizó no supo explicarlos. En los casos (D) (E) (F) escoge bien el mínimo común denominador, pero al final se equivoca en las operaciones y el resultado es incorrecto. En los últimos casos (G) y (H) los resultados son incorrecto, pero además no realiza ninguna operacíón.

En este aspecto podemos darnos cuenta que el "nivel de ayuda" requerida por Edwin es mayor al que hasta este momento se le ha brindado, ya que se evidencia el hecho de que en buena medida afloran las dificultades percibidas desde el la primera fase del trabajo realizado con él.

Tercera fase

A	3/7 + 3/7 = 6/7	Correcto
B	3/6 + 2/4 = $\frac{12+12}{24}=\frac{24}{24}$	Correcto
C	3/6 + 3/8 = $\frac{24+18}{32}=\frac{20}{32}$	Incorrecto.
D	3/8 +1/4 =	No contestó
E	3/4 + 3/6 + 3/8 $=\frac{12+12+9}{24}=\frac{33}{24}$	Incorrecto.
F	2/5 + 1/2 + 2/4 $=\frac{8+10+10}{20}=\frac{28}{20}$	Correcto.
G	2/3 + 1/6 +3/9 = $\frac{18+9+9}{27}=\frac{31}{27}$	Correcto.

Se nota una ligera mejoría en los procedimientos realizados por Edwin en esta tercera fase de análisis. Se aprecian los criterios que utilizó para resolver las fracciones; Aunque vuelve a cometer algunos errores similares a las fases anteriores (C) (E) son en una escala menor.

En la siguiente página se presenta un resumen del trabajo de Edwin:

Tabla que representa un resumen del trabajo de Edwin:

A	3/5 +1/5 = 4/5	Realizó el trabajo correctamente
B	2/6 + 1/3 = 3/6	Incorrecto.
C	2/6 + 3/9 = 5/6	Incorrecto.
D	3/8 + 2/3 + ¼ = $\frac{9+16+6}{24} = \frac{31}{24}$	El resultado es correcto, pero fue auxiliado por el maestro.
E	2/4 + 1/3 + 3/6 = $\frac{6+4+6}{12} = \frac{10}{12}$	Incorrecto.
F	2/3 +2/9 +1/6 = $\frac{}{36}$	No terminó de responder.
G	1/2 + 2/4 = $\frac{2+2}{4} = \frac{4}{4}$	El resultado es correcto
H	3/8 + 1/2 + 1/4 = 9/8	El resultado es correcto, pero no explica como lo hizo.
I	1/5 + 3/5 = 4/5	Es correcto.
J	1/3 + 2/6 = $\frac{2+6}{6} = \frac{8}{6}$	Incorrecto.
K	3/9 + 3/6 = $\frac{6+4}{18} = \frac{10}{18}$	El resultado es incorrecto.
L	3/8 + 2/3 + 1/4 = 56/48	Incorrecto.
M	2/4 + 1/3 + 3/6 = 6/6	Incorrecto.
N	2/8 + 2/6 + 2/4 = 18/8	Incorrecto.
Ñ	3/7 + 3/7 = 6/7	Correcto
O	3/6 + 2/4 = $\frac{12+12}{24} = \frac{24}{24}$	Correcto
P	3/6 + 3/8 = $\frac{24+18}{32} = \frac{20}{32}$	Escoge bien el denominador, pero el resultado es incorrecto.
Q	3/8 +1/4 =	No contestó
R	3/4 + 3/6 + 3/8 = $\frac{12+12+9}{24} = \frac{33}{24}$	El resultado es incorrecto.
S	2/5 + 1/2 + 2/4 = $\frac{8+10+10}{20} = \frac{28}{20}$	El resultado es correcto
T	2/3 + 1/6 +3/9 = $\frac{18+9+9}{27} = \frac{31}{27}$	Correcto.

Análisis del trabajo de Edwin

Edwin está considerado, dentro de nuestra clasificación, como un alumno de comprensión media con respecto al manejo de las fracciones. No logra sistematizar los procedimientos que debe realizar en las operaciones y su solución, en la multiplicación y la división, aún con números muy pequeños, se nota gran deficiencia y por la misma razón comete muchos errores al registrar los resultados.

En la entrevista final que se le realiza para saber la manera en que resolvió los cuestionamientos, se detectó que desconoce los procedimientos escolarizados que se usan para buscar un denominador común y que tiene muy poca práctica en el uso de la multiplicación y la división con números pequeños (por ejemplo: 24 entre 8), se queda sin dar una respuesta y no utiliza el algoritmo convencional.

Tomando en cuenta los tres puntos manejados en la entrevista final, con relación al concepto de fracción Edwin entiende "que sirven para sacar cuentas, como si me compraran un medio de queso y un cuarto de chorizo" y la representa de manera correcta, en el punto dos, al sumar utiliza el procedimiento de la factorización en números primos cuando menos en un nivel elemental, y en el punto tres, las estrategia que utiliza son el uso de la factorización en números primos y que se apropió de ellas a través de las explicaciones del maestro y observando el trabajo desarrollado por sus compañeros.

3.2.4.- El caso de Marilú

Marilú tiene 11 años con 6 meses, su mamá es empleada doméstica y su papá es músico, se puede considerar que el nivel socio-económico al que pertenece, de acuerdo a la clasificación tradicional, es medio bajo, a cursado los años anteriores con la mayoría del grupo, menos con tres de los casos tratados y se encuentra en el nivel de clasificación "B" (solo suma con un mismo denominador).

En la primera entrevista no dice una respuesta definida del nombre de fracción; al ver escrito 1/2 dice que es un doceavo; a 1/4 si lo nombra bien e igualmente a 1/3, pero no los relaciona con partes de un entero, ya que si se le dibuja un entero y se le reparte en cuatro pedazos a un pedazo lo nombra 1/2 y a la gráfica de un medio le dice un doceavo.

Tiene muy poca relación con el uso de las fracciones y dice que estas se las enseñaron el año pasado y que la enseñaron a sumar con diferentes denominadores pero solo resuelve sumas con un mismo denominador.

El trabajo de Marilú quedó como sigue:

Primera fase

A	3/5 + 1/5 = $\frac{3+1}{5}=\frac{4}{5}$	Correcto.
B	2/6 + 1/3 = $\frac{2+1}{6}=\frac{4}{6}$	Correcto.
C	2/6 + 3/9 = $\frac{18+18}{54}=\frac{36}{54}$	Correcto
D	3/8 + 2/3 + 1/4 = $\frac{9+16+6}{24}=\frac{31}{24}$	Correcto.
E	2/4 + 1/3 + 3/6 =	No resolvió.
F	2/3 + 2/9 + 1/6 =	No resolvió.

Marilú muestra más experiencia en la resolución de fracciones. En los procedimientos que utiliza se observa que resuelve correctamente las operaciones con un mismo denominador, y en las de los incisos (B) y (C) son correctos pero no explica como le hizo para resolverlas. Dice que en la operación del inciso (D) la auxilio una compañera del grupo, las últimas no las resolvió.

Segunda fase

A	$1/2 + 2/4 = \frac{2+2}{4} = \frac{4}{4}$	Correcto
B	$3/8 + 1/2 + 1/4 = \frac{3+4+2}{8} = \frac{9}{8}$	Correcto.
C	$1/5 + 3/5 = 4/5$	Correcto.
D	$1/3 + 2/6 = \frac{2+2}{6} = \frac{4}{6}$	Correcto.
E	$3/9 + 2/6 = \frac{6+6}{18} = \frac{12}{18}$	Correcto.
F	$2/4 + 1/3 + 3/6 = \frac{9+16+4}{4} = \frac{28}{24}$	El resultado es incorrecto.
G	$3/8 + 2/3 + 1/4 = \frac{3+4+8}{8} = \frac{12}{8}$	Incorrecto

En cuanto al proceso de factorización, se nota que escoge bien el Mínimo Común Divisor, pero en el resultado se equivoca al realizar las operaciones. Aunque se nota un ligero avance en las actividades que realiza.

Tercera fase

A	$3/7 + 3/7 = 6/7$	Correcto
B	$3/6 + 2/4 = \frac{6+6}{12} = \frac{12}{12}$	El resultado es correcto
C	$3/6 + 3/8 = \frac{12+9}{24} = \frac{21}{24}$	Correcto.
D	$3/8 + 1/2 = \frac{5}{8}$	El resultado es incorrecto.
E	$3/4 + 3/6 + 3/8 = \frac{24+18+12}{24} = \frac{49}{24}$	Igual que el caso anterior.
F	$2/5 + 1/6 + 2/4 = \frac{8+2+10}{10} = \frac{20}{10}$	Incorrecto.
D	$2/3 + 1/6 + 3/9 = \frac{12+3+6}{18} = \frac{21}{18}$	Es correcto el resultado.

Esta tercera evaluación nos permite afirmar que Marilú conoce el proceso de factorización y lo puede utilizar en la resolución de fracciones y los resultados que fueron incorrectos son parte del proceso de la construcción de nuevos conocimientos.

En la operación del inciso (D) no pudo realizar la factorización correctamente y optó por multiplicar los primeros dos denominadores y obtuvo un común denominador que le sirvió para resolver correctamente la operación, dando muestra con ello de los criterios que puede utilizar para resolver fracciones, pero que además, evidencia el hecho de que pueden existir múltiples formas de construcciones para llegar a un resultado el cual puede ser correcto aunque el alumno utilice sus propios métodos y lenguaje.

En la siguiente página se presenta el resumen del trabajo realizado por Marilú.

Tabla que representa un resumen del trabajo de Marilú:

A	$3/5 + 1/5 = \frac{3+1}{5} = \frac{4}{5}$	Correcto.
B	$2/6 + 1/3 = \frac{2+1}{6} = \frac{4}{6}$	Correcto.
C	$2/6 + 3/9 = \frac{18+18}{54} = \frac{36}{54}$	Correcto
D	$3/8 + 2/3 + 1/4 = \frac{9+16+6}{24} = \frac{31}{24}$	Correcto.
E	$2/4 + 1/3 + 3/6 =$	No resolvió.
F	$2/3 + 2/9 + 1/6 =$	No resolvió.
G	$1/2 + 2/4 = \frac{2+2}{4} = \frac{4}{4}$	Correcto
H	$3/8 + 1/2 + 1/4 = \frac{3+4+2}{8} = \frac{9}{8}$	Correcto.
I	$1/5 + 3/5 = 4/5$	Correcto.
J	$1/3 + 2/6 = \frac{2+2}{6} = \frac{4}{6}$	Correcto.
K	$3/9 + 2/6 = \frac{6+6}{18} = \frac{12}{18}$	Correcto.
L	$2/4 + 1/3 + 3/6 = \frac{9+16+4}{4} = \frac{28}{24}$	El resultado es incorrecto.
M	$3/8 + 2/3 + 1/4 = \frac{3+4+8}{8} = \frac{12}{8}$	Incorrecto
N	$3/7 + 3/7 = 6/7$	Correcto
Ñ	$3/6 + 2/4 = \frac{6+6}{} = \frac{12}{12}$	El resultado es correcto
O	$3/6 + 3/8 = \frac{12+9}{24} = \frac{21}{24}$	El resultado es correcto.
P	$3/8 + 1/2 = \frac{5}{8}$	El resultado es incorrecto.
Q	$3/4 + 3/6 + 3/8 = \frac{24+18+12}{24} = \frac{49}{24}$	Igual que el caso anterior.
R	$2/5 + 1/6 + 2/4 = \frac{8+2+10}{10} = \frac{20}{10}$	Incorrecto.
S	$2/3 + 1/6 + 3/9 = \frac{12+3+6}{18} = \frac{21}{18}$	Es correcto el resultado.

Análisis del trabajo de Marilú

En cuanto al antecedente que Marilú presentó en la primera evaluación sabe sumar correctamente fracciones con el mismo denominador, siempre y cuando la búsqueda de la equivalencia sea más fácil (sextos y tercios, por ejemplo) en estos casos toma al denominador más grande como común denominador. En la segunda evaluación hace uso de la factorización en números primos sólo cuando son dos denominadores y cuando se manejan tres denominadores no los puede realizar, los resultados que logra, al factorizar, son incorrectos. En la tercera evaluación no logra sistematizar el procedimiento de factorización en números primos ya que en algunas veces al multiplicar los denominadores solo toma en cuenta dos de ellos para obtener un común denominador, y sus resultados son incorrectos. Con el manejo de dos fracciones Marilú logra un buen resultado y desarrolla a este nivel un buen uso de la factorización, ya que la utiliza de manera adecuada.

Entrevista con Marilú

En la segunda entrevista, con relación al concepto de fracción afirma que "son cuentas poco difíciles" al representarlas ya las señala correctamente. En el segundo punto logra utilizar la factorización en números primos con dos denominadores correctamente, no así cuando son tres los denominadores. En el tercer punto logra desarrollar habilidades cuando menos a nivel elemental, logra más relación en el manejo de fracciones y dar un resultado correcto.

3.2.5.- El caso de Henry

Henry tiene 11 años con 8 meses, a cursado los grados anteriores con la mayoría de los alumnos del grupo con los que se realiza este trabajo, su nivel de clasificación es el más alto en relación a los demás compañeros, dice que solo en quinto grado le enseñaron las fracciones. Sus padres son médicos, aunque el vive con sus abuelos maternos y su nivel socio-económico es medio.

En la primera entrevista que se realiza con el identifica a las fracciones como una suma de fracciones ya que al momento de pedirle que las represente en forma numérica, realiza una suma de fracciones. Considera que estas sirven para resolver problemas, pero no específica que tipo de problemas. sabe realizar sumas de fracciones con distintos denominadores de la manera en que se multiplican los denominadores para buscar un común denominador.

La capacidad de retención con la que cuenta esta muy desarrollada, ya que con la primera explicación que se le hizo sobre la factorización en números primos le permite llegar al mínimo común denominador por medio de este proceso. Los resultados que se obtienen son los siguientes:

Primera fase:

A	$3/5 + 1/5 = \frac{3+1}{5} = \frac{4}{5}$	Correcto.
B	$2/6 + 1/3 = \frac{2+2}{6} = \frac{4}{6}$	Correcto.
C	$2/6 + 3/9 = \frac{18+18}{54} = \frac{36}{54}$	Correcto
D	$3/8 + 2/3 + \frac{1}{4} = \frac{24+16+6}{24} = \frac{46}{24}$	Correcto.
E	$2/4 + 1/3 + 3/6 = \frac{6+4+6}{12} = \frac{16}{12}$	Correcto.
F	$2/3 + 2/9 + 1/6 = \frac{12+4+3}{18} = \frac{9}{18}$	Incorrecta.

Como se señaló anteriormente, Henry tiene una capacidad muy desarrollada para la apropiación de conocimientos matemáticos y desde el inicio de el uso de la factorización en números primos se apropio del proceso que se sigue y le dio uso en las operaciones de esta primera evaluación.

En las primeras tres operaciones utilizó los criterios señalados para resolver fracciones en este trabajo, y posteriormente uso el procedimiento de factorización con números primos, solo que en la última operación se equivoco al realizar la suma de los numeradores.

Segunda fase:

A	$1/2 + 2/4 = \frac{2+2}{4} = \frac{4}{4}$	Correcto
B	$3/8 + 1/2 + 1/4 = \frac{3+4+2}{8} = \frac{9}{8}$	Correcto.
C	$1/5 + 3/5 = 4/5$	Correcto.
D	$1/3 + 2/6 = \frac{2+2}{6} = \frac{4}{6}$	Correcto.
E	$3/9 + 2/6 = \frac{18+18}{54} = \frac{36}{54}$	Correcto.
F	$2/4 + 1/3 + 3/6 = \frac{6+4+6}{12} = \frac{16}{12}$	Correcto.
G	$3/8 + 2/3 + 1/4 = \frac{9+16+6}{24} = \frac{31}{24}$	Correcto.

En esta evaluación Henry da muestras de tener conocimiento del proceso de factorización en números primos, y a la vez se muestra que no tiene mucho conocimiento de los números primos y de la manera en que se pueden reconocer. En la operación del inciso (E) comete el error de considerar al 9 como número primo y el denominador que obtiene no es el mínimo y los resultados son elevados pero correctos.

Tercera fase:

A	3/7 + 3/7 = 6/7	Correcto
B	3/6 + 2/4 = $\frac{6+6}{12}=\frac{12}{12}$	El resultado es correcto
C	3/6 + 3/8 =	No la anotó.
D	3/8 + 1/4 = $\frac{3+2}{8}=\frac{5}{8}$	El resultado es correcto.
E	3/4 + 3/6 + 3/8 $=\frac{18+12+9}{24}=\frac{39}{24}$	Correcto.
F	2/5 + 1/2 + 2/4 = $\frac{8+10+10}{2}=\frac{28}{20}$	Correcto.
G	2/3 + 1/6 + 3/9 = $\frac{12+3+6}{18}=\frac{21}{18}$	Es correcto.

Su capacidad de asimilación sigue en desarrollo, los resultados obtenidos y solo en la última operación no hace uso de la factorización para encontrar el mínimo común denominador y se apoya en el conocimiento que tiene de multiplicarlos denominadores para obtener un común denominador.

Resumen del trabajo de Henry (se presenta en la siguiente página)

Tabla que representa un resumen del trabajo de Henry:

A	$3/5 + 1/5 = \frac{3+1}{5} = \frac{4}{5}$	Correcto.
B	$2/6 + 1/3 = \frac{2+2}{6} = \frac{4}{6}$	Correcto.
C	$2/6 + 3/9 = \frac{18+18}{54} = \frac{36}{54}$	Correcto
D	$3/8 + 2/3 + 1/4 = \frac{24+16+6}{24} = \frac{46}{24}$	Correcto.
E	$2/4 + 1/3 + 3/6 = \frac{6+4+6}{12} = \frac{16}{12}$	Correcto.
F	$2/3 + 2/9 + 1/6 = \frac{12+4+3}{18} = \frac{9}{18}$	Incorrecto.
G	$1/2 + 2/4 = \frac{2+2}{4} = \frac{4}{4}$	Correcto
H	$3/8 + 1/2 + 1/4 = \frac{3+4+2}{8} = \frac{9}{8}$	Correcto.
I	$1/5 + 3/5 = 4/5$	Correcto.
J	$1/3 + 2/6 = \frac{2+2}{6} = \frac{4}{6}$	Correcto.
K	$3/9 + 2/6 = \frac{18+18}{54} = \frac{36}{54}$	Correcto.
L	$2/4 + 1/3 + 3/6 = \frac{6+4+6}{12} = \frac{16}{12}$	Correcto.
M	$3/8 + 2/3 + 1/4 = \frac{9+16+6}{24} = \frac{31}{24}$	Correcto.
N	$3/7 + 3/7 = 6/7$	Correcto
Ñ	$3/6 + 2/4 = \frac{6+6}{12} = \frac{12}{12}$	El resultado es correcto
O	$3/6 + 3/8 =$	No la anotó.
P	$3/8 + 1/4 = \frac{3+2}{8} = \frac{5}{8}$	El resultado es correcto.
Q	$3/4 + 3/6 + 3/8 = \frac{18+12+9}{24} = \frac{39}{24}$	Correcto.
R	$2/5 + 1/2 + 2/4 = \frac{8+10+10}{2} = \frac{28}{20}$	Correcto.
S	$2/3 + 1/6 + 3/9 = \frac{12+3+6}{18} = \frac{21}{18}$	Es correcto el resultado.

Análisis del caso de Henry

En la primera evaluación Henry muestra conocimiento en cuanto al proceso de factorización, aunque desconoce los números primos. En la segunda evaluación sigue teniendo el mismo problema ya lo evidencia en los resultados obtenidos. En la tercera evaluación ya maneja correctamente la factorización en números primos y cuando conoce el denominador común muestra agilidad al resolverlas sin necesidad de factorizar los denominadores, dando muestra que el uso de la factorización lo hace avanzar en el desarrollo del pensamiento lógico-matemático

Resultados de la entrevista con Henry

En lo que se refiere al concepto de fracción afirma que "fracción nos indica las partes como un tercio o un cuarto", pero al momento de pedirle que represente una, realiza una suma de fracciones. En el punto dos maneja correctamente la factorización y tiene conocimiento de que la factorización inicia primero por la división. En cuanto al aprendizaje y las estrategias que desarrolló se mostraron con un avance muy aceptable al lograr que la mayoría de los resultados fueran correctos. Desarrolla habilidad mental para resolver fracciones como 1/2 + 1/4 sin necesidad de realizar el algoritmo de la suma de fracciones con diferente denominador.

3.2.6.- El caso de Xiomara

Xiomara tiene 11 años, sus padres son comerciantes se dedican a la compraventa de pollos y piezas, por las tardes les ayuda con la venta del producto, tiene una relación más estrecha con el uso de las fracciones, ya que dice que se utilizan para comprar algo , como un cuarto de azúcar o medio pollo.

En la primera entrevista nos dice que para resolver las fracciones utiliza los procedimientos que le enseñaron en 5° y que éstas sirven para sacar cuentas o para pasar los exámenes.

Se le mostró la manera en que se puede utilizar la factorización en números primos para buscar un mínimo común denominador y asimiló el proceso y pudo realizar la secuencia de la factorización y resolver sumas de fracciones utilizándola. Puede dividir y multiplicar números chicos mentalmente y sin necesidad de hacer operaciones gráficas, solo para el proceso de la factorización en números primos se apoya en la escritura de los números para llegar al mínimo común denominador.

Tomando en cuenta el nivel de clasificación que se especificó viene a quedar en el nivel "E", porque puede resolver sumas de fracciones con distintos denominadores por medio de la factorización en números primos, lo cual se muestra en la primera fase de la evaluación.

Primera fase:

A	$3/5 + 1/5 = \frac{3+1}{5} = \frac{4}{5}$	Correcto.
B	$2/6 + 1/3 = \frac{2+2}{6} = \frac{4}{6}$	Correcto.
C	$2/6 + 3/9 = \frac{18+18}{54} = \frac{36}{54}$	Correcto
D	$3/8 + 2/3 + 1/4 = \frac{9+16+6}{24} = \frac{31}{24}$	Correcto.
E	$2/4 + 1/3 + 3/6 = \frac{6+4+6}{12} = \frac{16}{12}$	Correcto.
F	$2/3 + 2/9 + 1/6 = \frac{12+4+3}{18} = \frac{19}{18}$	Los resultados son correctos.

En esta primera evaluación nos damos cuenta que Xiomara resolvió correctamente las primeras tres operaciones, en las cuales se observó que utilizó los procedimientos señalados en los criterios que se tomaron para presentar las operaciones, y se muestra que siguió los procedimientos que se presentaron para el uso de la factorización en números primos.

Segunda fase

A	$1/2 + 2/4 = \frac{2+2}{4} = \frac{4}{4}$	Correcto
B	$3/8 + 1/2 + 1/4 = \frac{3+4+2}{8} = \frac{9}{8}$	Correcto.
C	$1/5 + 3/5 = 4/5$	Correcto.
D	$1/3 + 2/6 = \frac{2+3}{6} = \frac{5}{6}$	Incorrecta.
E	$3/9 + 2/6 = \frac{6+6}{18} = \frac{12}{18}$	Correcto.
F	$2/4 + 1/3 + 3/6 = \frac{6+4+6}{12} = \frac{16}{12}$	Correcto.
G	$3/8 + 2/3 + 1/4 = \frac{9+16+6}{24} = \frac{31}{24}$	Correcto.

En esta segunda evaluación se aprecia que en las operaciones con dos y tres fracciones con diferentes denominadores, Xiomara hace uso del proceso de factorización en números primos para encontrar el mínimo común denominador correctamente, dando muestra con ello de su nivel de asimilación de contenidos matemáticos. En la operación que el resultado es incorrecto (D) se equivoca al colocar como segundo denominador al 3 en lugar del 2.

Los resultados que se obtienen de Xiomara en la tercera fase de la evaluación se muestran en la siguiente página.

Tercera fase:

A	3/7 + 3/7 = 6/7	Correcto
B	$3/6 + 2/4 = \frac{6+6}{12} = \frac{12}{12}$	El resultado es correcto
C	$3/6 + 3/8 = \frac{12+9}{24} = \frac{21}{24}$	Correcto.
D	$3/8 + 1/4 = \frac{3+2}{8} = \frac{5}{8}$	Correcto.
E	$3/4 + 3/6 + 3/8 = \frac{18+12+9}{24} = \frac{39}{24}$	Correcto.
F	$2/5 + 1/2 + 2/4 = \frac{8+10+10}{20} = \frac{28}{20}$	Correcto.
D	$2/3 + 1/6 + 3/9 = \frac{12+3+6}{18} = \frac{21}{18}$	Correcto.

En la tercera evaluación Xiomara realiza las operaciones sin ningún contratiempo y correctamente. Como se puede observar Xiomara es otro de los alumnos que logró apropiarse del proceso de factorización en números primos y lo utiliza con normalidad en las operaciones en donde se tenga que hacer uso de el.

Los tres últimos casos dan pie a sugerir que el uso de la factorización en números primos se pueda utilizar en el sexto grado de primaria.

En la siguiente página se presenta una tabla del resumen total del trabajo de Xiomara.

A	$3/5 + 1/5 = \frac{3+1}{5} = \frac{4}{5}$	Correcto.
B	$2/6 + 1/3 = \frac{2+2}{6} = \frac{4}{6}$	Correcto.
C	$2/6 + 3/9 = \frac{18+18}{54} = \frac{36}{54}$	Correcto
D	$3/8 + 2/3 + 1/4 = \frac{9+16+6}{24} = \frac{31}{24}$	Correcto.
E	$2/4 + 1/3 + 3/6 = \frac{6+4+6}{12} = \frac{16}{12}$	Correcto.
F	$2/3 + 2/9 + 1/6 = \frac{12+4+3}{18} = \frac{19}{18}$	Correcto.
G	$1/2 + 2/4 = \frac{2+2}{4} = \frac{4}{4}$	Correcto
H	$3/8 + 1/2 + 1/4 = \frac{3+4+2}{8} = \frac{9}{8}$	Correcto.
I	$1/5 + 3/5 = 4/5$	Correcto.
J	$1/3 + 2/6 = \frac{2+3}{6} = \frac{5}{6}$	Incorrecto.
K	$3/9 + 2/6 = \frac{6+6}{18} = \frac{12}{18}$	Correcto.
L	$2/4 + 1/3 + 3/6 = \frac{6+4+6}{12} = \frac{16}{12}$	Correcto.
M	$3/8 + 2/3 + 1/4 = \frac{9+16+6}{24} = \frac{31}{24}$	Correcto.
N	$3/7 + 3/7 = 6/7$	Correcto
Ñ	$3/6 + 2/4 = \frac{6+6}{12} = \frac{12}{12}$	El resultado es correcto
O	$3/6 + 3/8 = \frac{12+9}{24} = \frac{21}{24}$	Correcto.
P	$3/8 + 1/4 = \frac{3+2}{8} = \frac{5}{8}$	Correcto.
Q	$3/4 + 3/6 + 3/8 = \frac{18+12+9}{24} = \frac{39}{24}$	Correcto.
R	$2/5 + 1/2 + 2/4 = \frac{8+10+10}{20} = \frac{28}{20}$	Correcto.
S	$2/3 + 1/6 + 3/9 = \frac{12+3+6}{18} = \frac{21}{18}$	Correcto.

Análisis del trabajo de Xiomara

En relación al concepto de fracción que tiene Xiomara al término de la segunda entrevista, entiende que fracción es parte de algo y también hace representaciones de ellas al escribir 3/4 o 4/5. En el segundo punto que se refiere al conocimiento de la factorización en números primos, esta alumna logra llegar a familiarizarse con el proceso de factorización al grado de utilizarla cotidianamente. En relación al tercer punto, referente a las estrategias que desarrolla le permiten resolver correctamente cualquiera de las operaciones que se le plantearon. Como parte de su desarrollo mental descubre que los resultados que obtiene por medio de la multiplicación de denominadores por si mismos vienen a ser múltiplos del producto obtenido en la factorización en números primos.

Esta alumna se apropia del proceso de factorización a través de la observación del trabajo realizado por el maestro en el salón de clases. Su conocimiento le permite socializar las estrategias con aquellos compañeros que obtuvieron un resultado deficiente auxiliándolos en la resolución de las operaciones que se deben realizar en cada uno de los casos involucrados.

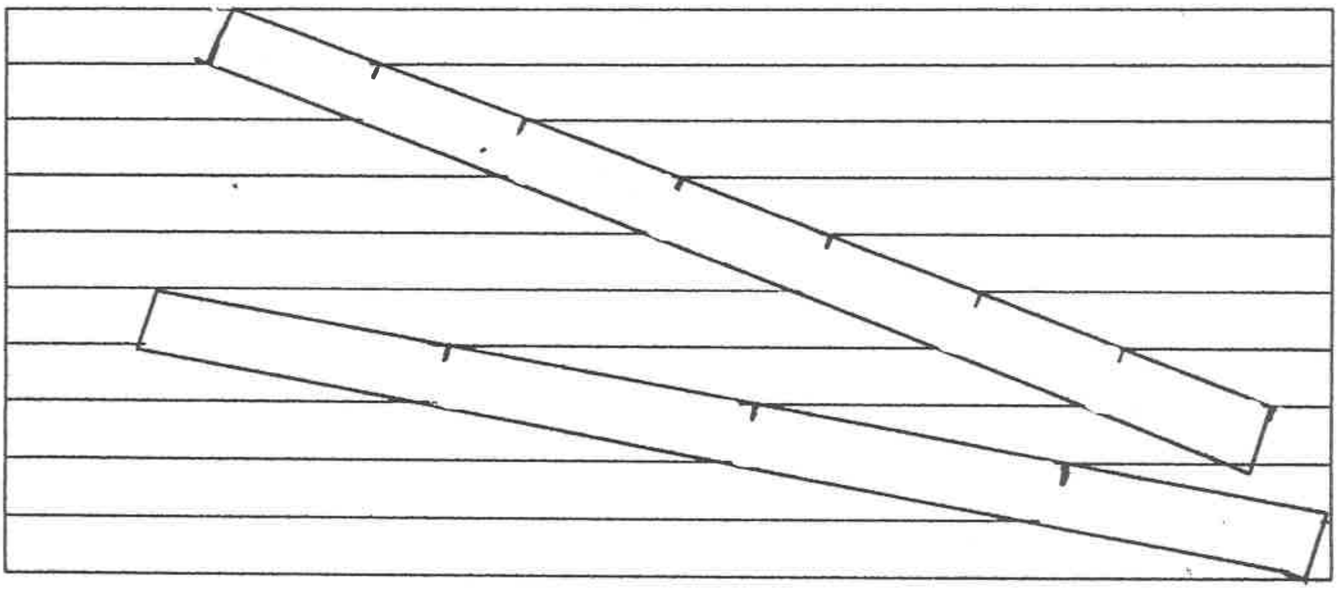
Observación general de los casos.

Tomando en cuenta los análisis que se hacen de los casos mencionados, se permite dar cuenta que los alumnos de este grupo no tienen un acercamiento adecuado con el uso de las fracciones, los cuales para su tratamiento no se llevaron a cabo en relación a los nuevos Planes y programas de estudio, ya que si entraron en vigor desde el año de 1993 a estos alumnos se les hubiera acercado a la noción de fracción desde el tercer grado y así llegar en forma sucesiva hasta el sexto grado.

Viendo que existe la necesidad de hacer un acercamiento más concreto con el uso de las fracciones con base a los resultados obtenidos en la segunda evaluación, se trabajo en forma constante por un período de cuatro semanas con la intención de reafirmar las nociones que tenían los alumnos al inicio del ciclo escolar.

Se les impartieron clases que se relacionan con el tratamiento de contenidos en el que se maneja la medición y el reparto, para lo cual se utilizaron tiras de papel con un largo de 15 cm. y 1 cm. de ancho en la cual la fueran repartiendo en partes iguales empezando con 2/2; 3/3; y así hasta llegar a 10/10. Esto por medio de un procedimiento que se utiliza en los libros de texto de 4° grado (ver figura 2). Con la intención de que compararan diferentes medidas por medio del material que previamente se había construido y que a la vez les serviría para darse cuenta a los alumnos del nivel más bajo que 1/4 + 1/4 son 2/4 y no 2/8, como algunos alumnos lo hicieron.

Figura 2:



El uso del material mencionado les permitió hacer comparaciones con materiales concretos con el cual observaron que las operaciones con números fraccionarios son diferentes a las que se realizan con números enteros.

En sesiones posteriores y con el mismo material, comprobaron que un mismo pedazo o que una fracción de la tira tiene diferente simbología y que aún así tiene el mismo valor y que por esa relación , llevan por nombre el de fracciones equivalentes.

En la actualidad los alumnos desconocen el procedimiento de multiplicar o dividir la fracción por un número entero fraccionado para encontrar fracciones equivalentes.

CONCLUSIONES

Hemos intentado ubicar los estudios de casos, que son formas personales de interiorizar una realidad, en el contexto en el cual se desarrollan, como parte de un proceso dinámico y complejo, esto implica una relación muy estrecha y constantes entre el individuo y la colectividad. Se trata más bien de historias personales que en cierta forma expresan la historia de la mayoría del grupo, entendiendo el testimonio de los involucrados como las valoraciones contenidas en el conglomerado al cual pertenecen; lo que refleja sus actitudes, sus dudas, sus habilidades, sus carencias y hasta sus creencias con relación a un conocimiento del cual se apropian. A través del testimonio nos es posible acceder a esas representaciones, recuperando, en parte, el sentido y la lógica de las actitudes, así como las autopercepciones las que al colectivizarse forman la trama de conocimiento socialmente aceptado.

Nuestro trabajo se ubica pues, en ese territorio fronterizo entre lo personal y lo social y trata de ver una historia global al interpretar los datos personales de cada uno de los sujetos participantes, se podría manejar una historia coral en múltiples versiones en la cual interesa no solo la reconstrucción fidedigna de los hechos, sino sobre todo las formas de apropiación de un conocimiento y las habilidades que se desarrollan al poner a consideración de los sujetos escolares, formas novedosas de trabajo en el aula.

La observación participante, como estrategia central para recabar información y las entrevistas complementarias, así como las fuentes escritas, sirvieron para darle a nuestro testimonio una mejor consistencia. Dichos testimonios no fueron recogidos al azar, sino luego de un proceso de trabajo donde los alumnos fueron los principales actores, las experiencias logradas en el proceso de trabajo nos dan elementos para afirmar lo siguiente:

- Al tomar en cuenta los aspectos más importantes que propician el desarrollo del pensamiento lógico-matemático del niño, en cuanto a la resolución de fracciones, en este caso, en sexto grado de la escuela primaria, se observó que las estrategias que los alumnos desarrollan, se puede ver modificadas en alguna medida, por la influencia de las técnicas utilizadas por el maestro. Las habilidades logradas por cada uno de los sujetos escolares, varían de acuerdo a sus formas particulares de percepción, pero al intervenir el docente se nota la evidencia de su participación.

- Retomando la idea central del constructivismo, en el sentido de que el conocimiento es un proceso en permanente construcción, asistimos a la idea de que los procesos escolares, pueden aligerar o entorpecer su avance, si los maestros se dan por enterados del material que tienen que utilizar en su trabajo ritualizado, dentro del aula, estos procesos se pueden modificar positivamente, de lo contrario, al no existir un diálogo donde alumno y maestro se entiendan, es inminente el fracaso escolar.

- Es necesario como se observó en el proceso que se manejó en este estudio que el maestro escudriñe las actitudes de los alumnos, que indague con relación a sus intereses, de lo que sabe del tema, para qué le puede servir lo aprendido, cual es la relación de los contenidos y la vida social en donde el alumnos se desenvuelve cotidianamente y sobre todo, que ayuda obtiene de sus familiares más cercanos.

- Nos es permitido suponer que la creencia de las limitaciones contextuales que presenta el alumno, en lo que se refiere al conocimiento previo que poseen, puede ser relativa, toda vez que con la intervención del maestro y los padres de familia, en la ayuda del estudiante, estas limitaciones se pueden superar en parte, ya que el sujeto puede acceder a nuevos conocimientos matemáticos, lo que se demostró a través del análisis de los casos que se investigaron, los que presentaron una evolución favorable en los alumnos involucrados en esta investigación.

- Que los alumnos que presentaron deficiencias en el uso de la factorización prima tienen un bajo referente al uso de las operaciones básicas sin hacer uso de los algoritmos necesarios.

- Que el uso de la factorización en números primos se puede incluir en los contenidos matemáticos de los actuales programas educativos, a partir de sexto grado de primaria; esto se sugiere con base en los resultados obtenidos en este grupo después de haber realizado una actividad normal en un periodo de 9 semanas de trabajo docente que tuvo que ver con el manejo de la factorización en números primos en la resolución de fracciones comunes.

BIBLIOGRAFIA

ANDRADE, Luis, (1995). *Proyectos de Investigación. "Una empresa docente",* Universidad de los Andes, Colombia, 22 p.

ALEKSANDROV, A.D. (1994). La matemática: su contenido métodos y Significado I, Alianza, España, 456 p.

CONAFE, 1987. Como aprendemos matemáticas, Ed. Regina de los Ángeles, México, 88 p.

DAVILA, Vega Martha, (1984). "Las fracciones en situaciones de Reparto y medición", En Antología: Construcción del conocimiento matemático en la escuela. UPN-SEP, México, 1994. 152 p.

KUNTZMANN, (1993). "¿Adónde va la matemática?" En Antología: La Matemática en la Escuela I, UPN-SEP, México, 374 p.

LIUBLINSKAIA, A.A. (1988). "Desarrollo psíquico del niño", En Antología : Desarrollo del Niño y aprendizaje escolar. UPN-SEP, México, 368 p.

LURIA, et. al. (1988). "Psicología y Pedagogía". En Antología: Desarrollo del niño y aprendizaje Escolar, UPN-SEP, México, 368 p.

MENDEZ, Gutiérrez Francisco, (1996). Guía Práctica 6°. Ed. Fernández, México. 396 p.

MORENO, Montserrat. (1993)."El pensamiento matemático en la pedagogía operatoria. Un enfoque constructivista". En Antología: La Matemática en la Escuela I. UPN-SEP, México, 374 p.

PIAGET, Jean. (1988). "Estudios de psicología genética", En Antología: Desarrollo del niño y Aprendizaje Escolar, UPN-SEP, México, 368 p.

ROBLEDO, Vázquez Felipe. (1979).Matemáticas Tres. Ed. Trillas. México. 224 p.

SANTILLANA, (1994).Diccionario de las Ciencias de la Educación. Gráfica Internacional. España. 1432 p.

SECRETARIA DE EDUCACION PUBLICA, (1992). Guía para el Maestro Primer Grado, Ed. La Prensa, México, 200 p.

----------(1992). Guía para el Maestro Sexto Grado, Ed. Xalco, México. Pp. 150.

----------(1993). Plan y programas de estudio de educación Básica Primaria. Ed. Fernández, México. Pp. 174.

----------(1996).Libro para el Maestro Matemáticas. Sexto grado. CONALTE. México. Pp.80.

-----------(1997).Matemáticas Cuarto grado.CONALTE, México, 208 p.

TANNER, J.M. (1988)."Educación y desarrollo físico",En Antología: Desarrollo del Niño y Aprendizaje Escolar, UPN-SEP, 368 p.

Apéndice

FORMATO DE INTERROGANTES DE LA PRIMERA ENTREVISTA

¿Qué entiendes, o para ti que son las fracciones?

¿Sabes para qué sirven?

¿Sabes cómo se pueden escribir o cómo se pueden representar?

¿Sabes resolver cuentas de fracciones?

¿Cómo las resuelves?

¿Qué aprendes o para que te sirve saber resolverlas?

¿Te gustaría conocer otra forma de resolverlas?

FORMATO DE INTERROGANTES DE LA SEGUNDA ENTREVISTA

¿Qué entiendes por fracción?

Escribe una.

¿Sabes resolver cuentas con diferente denominador?

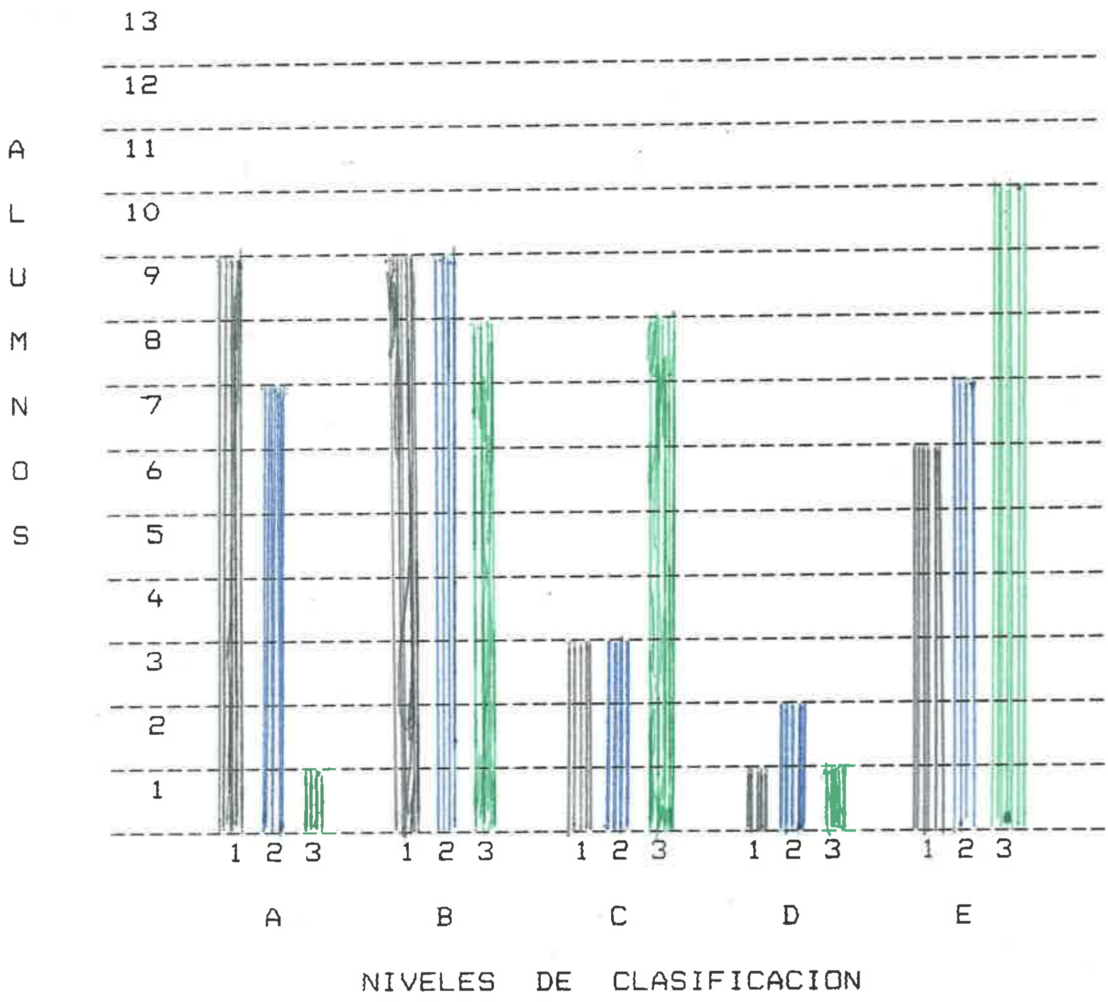
¿ Cómo le haces para resolverlas?

¿Conoces el uso de la factorización en números primos?

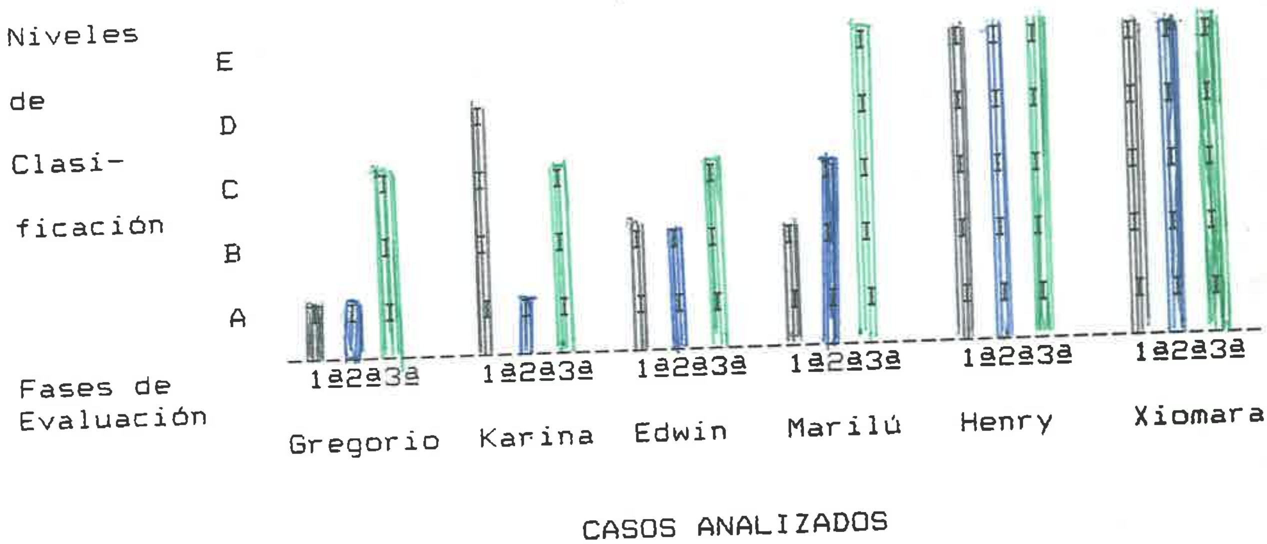
¿Sabes cómo se saca la factorización?

¿Cómo le hiciste para saber la factorización en números primos?

EVOLUCION DEL GRUPO EN RELACION A LOS NIVELES DE CLASIFICACION DURANTE LAS TRES EVALUACIONES QUE SE REALIZARON



EVOLUCION DE LOS CASOS ANALIZADOS EN RELACION A LOS NIVELES DE CLASIFICACION EN LAS TRES EVALUACIONES REALIZADAS



Gregorio ... edad 12 Años

30 Agosto - 97
Primero

$\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{10}$ $\frac{2}{6} + \frac{1}{3} = \frac{3}{9}$ $\frac{2}{6} + \frac{3}{9} = \frac{5}{15}$

$\frac{3}{8} + \frac{2}{5} + \frac{1}{4} = \cdot 8$

$\frac{2}{4} + \frac{1}{3} + \frac{3}{6} =$

$\frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{1}{6}$

A

10 de Octubre de 1997
Segundo

Gregorio Rafael Baro Vidales ... edad 12 Años

$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} = \frac{2+2}{4} = \frac{4}{4}$

$\frac{3}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3+1+1}{8} = \frac{5}{8}$

$\frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{1+3}{5+5} = \frac{4}{10}$

$\frac{2}{4} + \frac{1}{3} + \frac{3}{6} = \frac{2+1+3}{4+3+6} = \frac{6}{13}$

$\frac{1}{3} + \frac{3}{6} = \frac{1+3}{3+6} = \frac{4}{9}$

$\frac{2}{8} + \frac{2}{6} + \frac{2}{4} = \frac{2+2+2}{8+6+4} = \frac{6}{18}$

$\frac{3}{9} + \frac{2}{6} = \frac{3+2}{3+9} = \frac{5}{12}$

$\frac{3}{8} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{3+2+1}{8+3+4} = \frac{6}{15}$

A

Gregorio na faci oalo.v. /10/24/97

$\frac{3}{7} + \frac{3}{7} = \frac{6}{7}$

$\frac{3}{6} + \frac{2}{4} = \frac{12+12}{24} = \frac{24}{24}$

$\frac{3}{6} + \frac{3}{8} = \frac{21+18}{48} = \frac{39}{48}$

$\frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{8+12}{32} = \frac{20}{32}$

$\frac{3}{4} + \frac{3}{6} + \frac{3}{8} = \frac{12+12+9}{24} = \frac{48}{24}$

$\frac{2}{5} + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} = \_\_\_\_$

$\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{3}{9} = \_\_\_\_$

C

KARINA MORAN Cebreros   anos 13

30-Agosto-97
1era
evaluación

$$\frac{3}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3+1}{5}=\frac{4}{5}\ 1\frac{1}{5} \qquad \frac{2}{6}+\frac{1}{3}=\frac{2+2}{6}=\frac{4}{6}\ 1\frac{2}{6}$$

$$\frac{2}{6}+\frac{3}{9}=\frac{18+18}{54}=\frac{36}{54}$$

$$\frac{3}{8}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{9+16+6}{24}=\frac{31}{24}$$

$$\frac{2}{4}+\frac{1}{3}+\frac{3}{6}=\frac{3+1+9}{6}=\frac{13}{6}$$

$$\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{1}{6}=\frac{11+3+1}{9}=\frac{15}{9}$$

d

Karina Moran Cebreros

Fecha 10-10-1997

$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}=\frac{2+2}{4}=\frac{4}{4}$

$$\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{array}$$

$\frac{3}{8}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3+4+2}{8}=\frac{9}{8}$

$$\begin{array}{ccc|c} 8 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 8 \end{array}$$

$\frac{1}{5}+\frac{3}{5}=\frac{5+3}{5}=\frac{8}{5}$

$\frac{1}{3}+\frac{2}{6}=\frac{2+2}{5}=\frac{4}{5}$

$$\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 6 \end{array}$$

$\frac{3}{9}+\frac{2}{6}-\frac{3+12}{6}=\frac{15}{6}$

$\frac{3}{8}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\ \frac{3+4+1}{8}=\frac{8}{8}$

$\frac{2}{4}+\frac{1}{3}+\frac{3}{6}=\frac{9+16+4}{24}=\frac{28}{24}$

$\frac{2}{8}+\frac{2}{6}+\frac{2}{7}=\frac{6+4+18}{24}=\frac{28}{24}$

MATEMATICAS 24-10-1997

Karina moran Cebreros

$\frac{3}{7}+\frac{3}{7}=\frac{6}{7}$ $\frac{3}{6}+\frac{2}{4}=\frac{12+12}{24}=\frac{24}{24}$

$\frac{3}{6}+\frac{3}{8}=\frac{24+18}{48}=\frac{37}{48}$

$\frac{3}{8}+\frac{1}{4}=\frac{12+8}{}=\frac{20}{32}$

$\frac{3}{4}+\frac{3}{6}+\frac{3}{8}=\frac{24+18+12}{24}=\frac{49}{24}$

$\frac{2}{5}+\frac{1}{2}+\frac{2}{4}=\frac{8+2+10}{10}=\frac{20}{10}$

$\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{3}{9}=\frac{18+6+9}{6}=\frac{33}{6}$

C

30 de Agosto de 1997

Primera

Nom. Edwin Sanchez Gutierres 10 años 8 meses

$\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$ | $\frac{2}{6} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} = \frac{3}{6}$ | $\frac{2}{6} + \frac{3}{7} = \frac{5}{6} = \frac{5}{6}$

$\frac{3}{8} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{9+16+6}{24} = \frac{31}{24}$

$$\begin{array}{ccc|c} 8 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & & 3 \\ & 1 & & \end{array} \quad 24$$

$\frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{1}{6} = \frac{9+9+18}{18} = \frac{36}{18}$

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 9 & 6 & 2 \\ 3 & 9 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ & 1 & & \end{array} \quad 18$$

B

Segundo

Hoy 10 de octubre de 1997

Nom- Edwin 10 años (on 8)

$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}=\frac{2+2}{4}=\frac{4}{4}$

2 4	2
1 2	2
1	

$\frac{3}{8}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{9}{8}$

8 2 4	2
4 1 2	2
2 1	2
1	

$\frac{1}{3}+\frac{2}{6}=\frac{2+6}{6}=\frac{8}{6}$

$\frac{1}{5}+\frac{3}{5}=\frac{4}{5}$

$\frac{3}{9}+\frac{2}{6}=\frac{6+4}{18}=\frac{10}{18}$

$\frac{2}{4}+\frac{1}{3}+\frac{3}{6}=\frac{6}{6}$

$\frac{2}{8}+\frac{2}{6}+\frac{2}{4}=\frac{8}{8}$

9 6	6
3 1	3
1	

Edwin Sánchez Gutiérrez viernes 2 de octubre 1997

$\frac{3}{7} + \frac{3}{7} = \frac{6}{7}$ $\frac{3}{6} + \frac{2}{4} = \frac{12+12}{24} = \frac{24}{24}$

$\frac{3}{6} + \frac{3}{8} = \frac{24+18}{32} = \frac{20}{32}$ $\frac{3}{4} + \frac{3}{6} + \frac{3}{8} = \frac{12+12+9}{24} = \frac{33}{24}$

$\frac{2}{5} + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} = \frac{8+10+10}{} = \frac{28}{20}$

$\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{3}{9} = \frac{18+9+2}{27} = \frac{31}{27}$

C

...Nombre: Marilu lopez Medina Año 6-B

Edad 11 años

$\frac{3}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3+1}{}=\frac{4}{5}$ $\quad \frac{2}{6}+\frac{1}{3}=\frac{2+1}{3\,6}=\frac{4}{6}$ $\quad \frac{2}{6}+\frac{1}{9}$

$\frac{2}{6}+\frac{3}{9}=\frac{18+18}{9}=\frac{36}{54}$

$\frac{3}{8}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{9+16+6}{24}=\frac{31}{24}$

$$\begin{array}{ccc|c} 8 & 3 & 4 & 2 \\ \hline 4 & 3 & 2 & 2 \\ \hline 3 & 2 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 3 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 1 & \end{array} \longrightarrow 24$$

$\frac{2}{4}+\frac{1}{3}+\frac{3}{6}=\frac{12+9+4}{}=\frac{25}{6}$

$$\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 6 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 3 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \rightarrow 6$$

$\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{1}{6}$

$$\begin{array}{c|c} & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \end{array}$$

Primer

Nombre: Marilu lopez Medina

FEChA: viernes 10 de oct. de 1997

$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}=\frac{2+2}{4}=\frac{4}{4}$ $\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & \end{array}$ 4

$\frac{3}{8}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3+4+2}{8}=\frac{9}{8}$ $\begin{array}{ccc|c} 8 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}$ 8

$\frac{1}{5}+\frac{1}{3}=\frac{4}{5}$

$\frac{1}{3}+\frac{2}{6}=\frac{2+2}{6}=\frac{4}{6}$ $\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & \end{array}$ 6

$\frac{3}{9}+\frac{2}{6}=\frac{6+6}{18}=\frac{12}{18}$ $\begin{array}{cc|c} 9 & 6 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & \end{array}$ 18

$\frac{3}{8}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{3+4+8}{8}=\frac{12}{8}$

$\frac{2}{4}+\frac{1}{3}+\frac{3}{6}=\frac{9+16+14}{4}=\frac{28}{24}$

$\frac{2}{8}+\frac{2}{6}+\frac{2}{4}=\frac{6+4+18}{24}=\frac{28}{24}$

0

Fecha: 24 de Octubre de 1997
Marilu Lopez Medina

$\frac{3}{7}+\frac{3}{7}=\frac{6}{7}$

$\frac{3}{6}+\frac{2}{4}=\frac{6+6}{}=\frac{12}{12}$

6 4	2
3 2	2
1 1	3

12

$\frac{3}{6}+\frac{3}{8}=\frac{12+9}{24}=\frac{21}{24}$

6 8	2
3 4	2
3 2	2
3 1	3
1 1	

21

$\frac{3}{8}+\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$

49

$\frac{3}{4}+\frac{3}{6}+\frac{3}{8}=\frac{24+18+12}{24}=\frac{49}{24}$

8 4	2
4 2	2
2 1	2
1 1	

E

$\frac{2}{5}+\frac{1}{6}+\frac{2}{4}=\frac{8+2+10}{10}=\frac{20}{10}$

$\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{3}{9}=\frac{12+3+6}{18}=\frac{21}{18}$

3 6 9	2
3 3 3	2
1 1 1	

enry Arod Tierro Villanueva 11 años 30 de Aogosto de 1997

$\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ $\qquad$ $\frac{2}{6} + \frac{1}{3} = \frac{2+2}{6} = \frac{4}{6}$

$\frac{2}{6} + \frac{3}{9} = \frac{18+18}{54} = \frac{36}{54}$

$\frac{2}{4} + \frac{1}{3} + \frac{3}{6} = \frac{6+4+6}{12} = \frac{16}{12}$

$$\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ & 1 & 1 & \end{array}$$

$\frac{3}{8} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{24+16+6}{24} = \frac{46}{24}$

$$\begin{array}{ccc|c} 8 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & & 3 \\ & 1 & & \end{array}$$

$\frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{1}{6} = \frac{12+4+3}{18}$ $\quad \frac{9}{18}$

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 9 & 6 & 2 \\ 3 & 9 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & & & \end{array}$$

Henry Arod Pervo Villanoeva 11 años

10 de Octobre de 1997

$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}=\frac{2+2}{4}=\frac{4}{4}$

$\frac{3}{8}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3+4+2}{8}=\frac{9}{8}$

$\frac{1}{5}+\frac{3}{5}=\frac{4}{5}$

$\frac{1}{3}+\frac{2}{6}=\frac{2+2}{6}=\frac{4}{6}$

$\frac{3}{9}+\frac{2}{6}=\frac{18+18}{54}=\frac{36}{54}$

9	6	2
9	3	3
9	1	9
1		

$\frac{3}{8}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{9+16+6}{24}=\frac{31}{24}$

8	3	4	2
4	3	2	2
2	3	1	2
1	1		3

$\frac{2}{4}+\frac{1}{3}+\frac{3}{6}=\frac{6+4+6}{12}=\frac{16}{12}$

4	3	6	2
2	3	3	2
1	3	3	3
	1	1	

$\frac{2}{8}+\frac{2}{6}+\frac{2}{4}=\frac{12+12+24}{48}=\frac{48}{48}$

E

Henry Arud Pierre villamron - 9 - 24 de octubre de 1997

$\frac{3}{7}+\frac{3}{7}=\frac{6}{7}$

$\frac{3}{6}+\frac{2}{4}=\frac{6+6}{12}=\frac{12}{12}$

$\frac{3}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3+2}{8}=\frac{5}{8}$

$\frac{3}{4}+\frac{3}{6}+\frac{3}{8}=\frac{18+12+9}{24}=\frac{39}{24}$

$\frac{2}{5}+\frac{1}{2}+\frac{2}{4}=\frac{8+10+10}{20}=\frac{28}{20}$

$\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{3}{9}=\frac{12+3+6}{18}=\frac{21}{18}$

6	4	2
3	2	2
1	1	3

6	8	2
3	4	2
1	1	2

18	9	2
9	2	2
1	1	2

15	24	2
1	12	2
	1	5

3	6	2
1	3	3
	1	

E

XIOMARA ZAZUETA ROSALES 11 AÑOS 30/08/97

$\frac{3}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3+1}{5}=\frac{4}{5}$ $\frac{2}{6}+\frac{1}{3}=\frac{2+2}{6}=\frac{4}{6}$ [illegible]

$\frac{2}{6}+\frac{3}{9}=\frac{18+18}{54}=\frac{36}{54}$

$\frac{3}{8}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{9+16+6}{24}\ \frac{31}{24}$

8 3 4	2
4 3 2	2
2 3 1	2
1 3 1	3
1	

$\frac{2}{4}+\frac{1}{3}+\frac{3}{6}=\frac{6+4+6}{12}\ \frac{16}{12}$

4 3 6	2
2 3 3	2
1 3 3	3
1 1 1	

$\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{1}{6}=\frac{12+4+3}{18}=\frac{11}{18}$

3 9 6	2
3 9 3	3
1 3 1	3
1 1	

XIOMARA ZAZUETA ROSALES 10/10/97

Segundo

$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} = \frac{2+2}{4} = \frac{4}{4}$

$\begin{array}{r|l} 2\ 4 & 2 \\ 1\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$

$\frac{3}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\ \frac{3+4+2}{8} = \frac{9}{8}$

$\begin{array}{r|l} 8\ 2\ 4 & 2 \\ 4\ 1\ 2 & 2 \\ 2\ 1 & 2 \\ 1 & \end{array}$

$\frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$

$\frac{1}{3} + \frac{2}{6} = \frac{2+3}{6} = \frac{5}{6}$

$\begin{array}{r|l} 3\ 6 & 2 \\ 1\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$

$\frac{3}{9} + \frac{2}{6} = \frac{6+6}{18} = \frac{12}{18}$

$\begin{array}{r|l} 9\ 6 & 2 \\ 9\ 3 & 3 \\ 3\ 1 & 3 \\ 1 & \end{array}$

$\frac{3}{8} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1+16+6}{24} = \frac{31}{24}$

$\begin{array}{r|l} 8\ 3\ 4 & 2 \\ 4\ 3\ 2 & 2 \\ 2\ 3\ 1 & 2 \\ 1\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$

$\frac{2}{4} + \frac{1}{3} + \frac{3}{6} = \frac{6+4+6}{12} = \frac{16}{12}$

$\begin{array}{r|l} 4\ 3\ 6 & 2 \\ 2\ 3\ 3 & 2 \\ 1\ 3\ 1 & \end{array}$

$\frac{2}{8} + \frac{2}{6} + \frac{2}{4} = \frac{6+8+12}{24} = \frac{26}{24}$

$\begin{array}{r|l} 8\ 6\ 4 & 2 \\ 4\ 3\ 2 & 2 \\ 2\ 3\ 1 & 2 \\ 1\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$

KARINA XIONARA ZAZUETA ROSALES 24/10/97

Tercera

$\frac{3}{7} + \frac{3}{7} = \frac{6}{7}$

$\frac{3}{6} + \frac{2}{4} = \frac{6+6}{12} = \frac{12}{12}$

$\frac{3}{6} + \frac{3}{8} = \frac{12+9}{24} = \frac{21}{24}$

$\frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3+2}{8} = \frac{5}{8}$

$\frac{3}{4} + \frac{3}{6} + \frac{3}{8} = \frac{18+12+9}{24} = \frac{39}{24}$

$\frac{2}{5} + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} = \frac{8+10+10}{20} = \frac{28}{20}$

$\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{3}{9} = \frac{12+3+6}{18} = \frac{21}{18}$

6 4	2
3 2	2
1 1	3

12

6 8	2
3 4	2
3 2	2
1 1	3

24

8 4	2
4 2	2
2 1	2
1	

8

4 6 8	2
2 3 4	2
1 3 2	2
1 1	3

24

5 2 4	2
5 1 2	2
1 1	5

20

3 6 9	2
3 3 9	3
1 1 3	3
1	

18

E