



**INSTITUTO ESTATAL DE EDUCACION PUBLICA DE OAXACA**

**UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL**

**UNIDAD 20-A**

02 DIC. 1996

02 DIC. 1996



✓  
**UBICACION ESPACIAL DE SERES  
Y OBJETOS ENTRE SI**

**FLORENCIA TERESA / GARCIA MENDOZA**



**OAXACA DE JUAREZ, OAX., DICIEMBRE DE 1996.**

INSTITUTO ESTATAL DE EDUCACION PUBLICA DE OAXACA  
UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL  
UNIDAD 20-A

**MONOGRAFIA**  
**UBICACION ESPACIAL DE SERES**  
**Y OBJETOS ENTRE SI**

FLORENCIA TERESA GARCIA MENDOZA

TESINA PRESENTADA PARA  
OBTENER EL TITULO DE  
LICENCIADA EN EDUCACION  
PRIMARIA

OAXACA DE JUAREZ OAX., DICIEMBRE DE 1996

A LA MEMORIA DE MI MADRE  
Y A MI QUERIDO PADRE  
CON TODO AMOR Y RESPETO  
COMO TESTIMONIO DE MI GRATITUD

A TODAS LAS PERSONAS QUE DIA A  
DIA CONTRIBUYEN A MI FORMACION  
PROFESIONAL Y A MI SUPERACION  
PERSONAL.

**INSTITUTO ESTATAL DE EDUCACION PUBLICA DE OAXACA  
UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL**



**UNIVERSIDAD  
PEDAGOGICA  
NACIONAL  
UNIDAD 20 A - OAXACA**

**No. Oficio  
ASUNTO:**

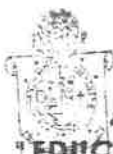
1117/96  
Dictamen de Trabajo  
para Titulación.

Oaxaca de Juárez, Oax., Octubre 25 de 1996.

**C. PROFRA.  
FLORENCIA TERESA GARCIA MENDOZA  
P R E S E N T E .**

En mi calidad de Presidente de la Comisión de Titulación de esta Unidad 20-A y como resultado del análisis realizado a su trabajo intitulado: "**UBICACION DE SERES Y OBJETOS ENTRE SI**", Opción Tesina, a propuesta del C. Asesor, **MTRO. ISAIAS ALDAZ HERNANDEZ**, manifiesto a usted que reúne los requisitos académicos establecidos al respecto por la Institución.

Por lo anterior se dictamina favorablemente su trabajo por lo tanto se autoriza para que presente su Examen Profesional.



**ATENTAMENTE  
"EDUCAR PARA TRANSFORMAR"**

I. E. E. P. O.  
UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL  
UNIDAD 20A

**PROFR. SERGIO MANUEL CALLEJA ZORRILLA  
PRESIDENTE DE LA COMISION DE TITULACION**

## INDICE

INTRODUCCION	05
CAPITULO I	
LA UBICACION EN EL ESPACIO	
UN PROBLEMA DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE	11
CAPITULO II	
EL CURRICULUM	21
2.1 El programa anterior (1972-1992)	22
2.2 El programa actual (1993)	26
CAPITULO III	
LA GEOMETRIA Y EL ESPACIO	38
3.1 La ubicación espacial, un contenido científico	39
CAPITULO IV	
LA CONSTRUCCION OPERATORIA DEL ESPACIO	50
4.1 Teorías que explican la construcción y/o la percepción del espacio	50
4.2 Psicogénesis de las estructuras espaciales.	54
CAPITULO V	
UBICACION ESPACIAL DE SERES Y OBJETOS ENTRE SI	71
5.1 El esquema corporal y sus relaciones con el objeto	71
5.2 La referencia en el objeto	75
5.3 Los referentes	78
5.4 El campo ambiente	79
5.5 De la lateralización a la percepción de la quirilidad	81

## INTRODUCCION

Los conocimientos matemáticos constituyen herramientas útiles, prácticas e indispensables en las actividades cotidianas, técnicas y científicas del ser humano; por ello la Educación Primaria da especial importancia a su enseñanza, pues además de sus aplicaciones es propiciadora del desarrollo de una serie de habilidades intelectuales como son: la clasificación, la estimación, la imaginación espacial y otras que sirven al educando para organizar sus ideas, informarse sobre su ambiente y en la medida de sus posibilidades transformarlo.

La escuela tiene la función de acelerar procesos evolutivos brindando la posibilidad de llevar a cabo un proceso de aprendizaje organizado, pero la responsabilidad de diseñar situaciones didácticas apropiadas es del maestro, el cual al seguir utilizando estrategias tradicionales, crea una disociación entre lo que la escuela enseña y lo que el alumno aplica para resolver los problemas que se le presentan fuera de clase.

Lo anterior se agudiza cuando se trata de un contenido nuevo y que el maestro no domina, tal es el caso de "La ubicación Espacial de seres y objetos entre sí" el cual es un contenido introducido en el programa actual de matemáticas de 2o grado y se desconoce su naturaleza, así como también el proceso que sigue el niño en el

aprendizaje del mismo. Es por ello que después de realizar una serie de actividades (alumnos y maestro en clase ), el docente no comprende porque a los niños se les dificulta tanto representar relaciones tales como: a la derecha de, a la izquierda de, e inclusive el adelante y el atrás de los objetos y seres.

Con este trabajo se busca encontrar elementos teóricos que permitan comprender la naturaleza de los objetos de conocimiento referidos al espacio y los complejos procesos y fenómenos que se presentan en los seres humanos cuando intentamos ubicarnos y ubicar otros seres y objetos en el mismo.

El programa actual contempla una serie de temas relacionados con lo ya citado y es por lo mismo que se hace necesario su análisis.

El siguiente cuadro pretende ilustrarnos sobre los programas de matemáticas, los cuales contienen el currículum oficial y nos sirven de marco referencia en este trabajo.

**CUADRO NUM 01**  
**CUADRO COMPARATIVO DE LOS DOS ULTIMOS**  
**PROGRAMAS DE MATEMATICAS**

CONCEPCIONES	PROGRAMAS	
	ANTERIOR 1972-1992	ACTUAL 1993
<b>LAS MATEMATICAS</b>	Proporciona al educando una metodología y un lenguaje simbólico que le permitan organizar sus ideas de manera más coherente para interpretar la realidad física y social con base en el razonamiento lógico.	Serán las herramientas funcionales y flexibles que le permitan resolver las situaciones problemáticas que se le presenten.
<b>OBJETO</b>	Se da un gran peso a la Aritmética y se minimiza a la Geometría, faltan contenidos curriculares sobre medición. Además este programa incluyo demasiados contenidos	Fortalecimiento de la Geometría. Introducción al curriculum oficial de la medición a través de un eje temático específico. Este programa reduce algunos contenidos y amplia otros.
<b>SUJETO</b>	Teóricamente activo pero en la realidad es pasivo y receptor.	Se pretende que sea activo, constructor de su conocimiento.
<b>APRENDIZAJE</b>	Proceso lineal-sumativo	proceso cíclico.
<b>ENSEÑANZA- APRENDIZAJE</b>	Se conciben los diferentes conceptos como si fueran ajenos unos a otros . Cada proceso se entiende como si estuviera formado por partes que pudieran enseñarse por separado ,bajo el supuesto que el alumno una vez enseñadas pudiera integrarlas en un solo concepto	Replanteamiento metodológico que tome más en cuenta como aprenden los niños. Planteamiento y resolución de problemas como forma de construcción de los conocimientos matemáticos.



<b>ORGANIZACION</b>	Se distinguen 2 tipos de programas : integrados para 1ª y 2ª grados y por áreas de 3ª a 6ª grados. Los contenidos se presentaban en 8 unidades de trabajo cada una con : * Objetivos generales * Objetivos particulares * Objetivos específicos * Actividades	Se distingue un solo tipo de programa . los contenidos se presentan en 5 bloques de trabajo.
<b>TEMATICA</b>	Los aspectos que se trabajaron son los siguientes: 1. Sistema decimal de numeración. 2. Los números enteros, propiedades y operaciones. 3. Las fracciones y sus operaciones. 4. Variación funcional. 5. Lógica. 6. Geometría. 7. Estadística y probabilidad.	Se trabajan 6 ejes temáticos : • Los números, sus relaciones y sus operaciones • Geometría • Medición • Tratamiento de información • Procesos de cambio • Predicción y azar

Para resolver el problema planteado, debemos considerar nuestro conocimiento respecto del contenido programático que deseamos que el sujeto adquiriera. En este estudio se trata la **ubicación espacial** como contenido científico y se indaga la construcción operatoria del mismo.

El objeto del presente estudio no es agotar todas las teorías matemáticas existentes que expliquen el espacio y su construcción por parte de el ser humano, ya que este

escrito resultaría insuficiente, pues no hay unanimidad de criterios, debido a que existen muchas maneras de abordarlo.

El espacio es multidimensional y en cada situación del entorno se puede analizar geoméricamente, por ello la geometría se ha dividido en ramas que se enfocan a la percepción del espacio a través de ciertas características específicas. Las cuales abordaremos en el capítulo III.

Respecto a la construcción Operatoria del Espacio, encontramos que existen tantas teorías y diferencias entre las diversas interpretaciones de la percepción espacial, como entre las que tratan acerca de la deducción geométrica abordada como actividad del intelecto.

Según Jean Piaget, en la evolución intelectual del ser humano, pueden distinguirse una serie de etapas o periodos que se caracterizan por conductas que reflejan las estructuras mentales subyacentes. El capítulo IV trata acerca de dichos periodos en la construcción del espacio.

Podemos decir que el espacio organiza no sólo el pensamiento del niño, sino del adulto, pero las nociones que el niño va construyendo sobre los conceptos espaciales, es un proceso lento, es una construcción mental paulatina derivada de la acción del individuo con el medio ambiente.

La representación elaborada por el niño del espacio que lo circunda, se constituye apoyándose en objetos fijos que él toma como referencias.

En el V y último capítulo podemos apreciar como el conocimiento del propio cuerpo procede del conocimiento del espacio y al mismo tiempo lo hace posible.

Estas consideraciones dejan ver que los conceptos que le subyacen al nuevo plan y programas son profundos y la información que proporcionan resulta insuficiente para que el maestro pueda lograr cambios significativos en el aprendizaje escolar. El docente debe entonces, ante un contenido nuevo del programa o que no domina lo suficiente, indagar e investigar sobre él, para que los conocimientos que obtenga le ayuden a lograr un análisis crítico de su práctica docente y buscar o crear replanteamientos metodológicos que realmente ayuden a los niños en sus procesos cognitivos.

**CAPITULO I**  
**LA UBICACION EN EL ESPACIO**  
**UN PROBLEMA DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE**

La matemática debido a sus múltiples aplicaciones prácticas es indispensable para la vida humana; resulta difícil realizar cualquier actividad tecnológica, económica, cultural, científica o cotidiana sin valerse de ella; así tan útil es para el hombre común sea este albañil, chofer o limpiabotas, como lo es para el hombre de ciencia o el profesionista.

De la misma manera la matemática es aplicada por el niño cuando cuenta sus juguetes, o establece semejanzas entre ellos, o los coloca en un plano que representa una carretera etc.

Por lo anterior la educación primaria ha dado especial importancia a la enseñanza de las matemáticas. Se pretende que el niño de primaria llegue a descubrir que la matemática es útil y necesaria no sólo por las aplicaciones que el haga de la misma sino como propiciadora de su desarrollo intelectual, para lo cual es necesario que construya en la matemática un lenguaje que le permita plantear y resolver un sin número de problemas cotidianos y a la vez desarrolle una serie de habilidades intelectuales como son: clasificar, estimar, tener flexibilidad y movilidad de pensamiento e imaginación espacial entre otras; dichas habilidades deben servirle

para organizar sus ideas, informarse sobre su ambiente y transformarlo en la medida de sus posibilidades.

La escuela tiene la función de acelerar procesos evolutivos que de otra forma o no se desarrollan o tardan muchos años en conformarse, pues le brinda la posibilidad al educando de llevar a cabo un proceso de aprendizaje organizado.

*Se considera que la escuela debe brindar situaciones en las que los niños utilicen los conocimientos que poseen y que, a partir de sus soluciones iniciales comparen sus resultados y sus formas de solución para hacerles evolucionar hacia los procedimientos y conceptualizaciones propias de las matemáticas, de tal manera que dichas conceptualizaciones y conocimientos les sean herramientas funcionales.<sup>1</sup>*

Sin embargo, la responsabilidad de diseñar las situaciones didácticas apropiadas sigue siendo del maestro, quien para lograrlo debe considerar tanto al alumno como al contenido que va a abordar.

---

<sup>1</sup> SEP. Plan y programas de estudio, Educación primaria México 1993.

El programa actual brinda para el desarrollo de las matemáticas el 30% de tiempo curricular, lo que se traduce en 240 horas clase al año en el primero y segundo grados (SEP.1993), buscando con ello que los resultados sean satisfactorios. En educación primaria siempre se ha destinado mayor atención a esta área y aún así observamos que la gran mayoría de la población escolar, prefieren utilizar sus propias estrategias para hacer sus cálculos y resolver sus problemas, por ejemplo: en lugar de utilizar los algoritmos convencionales u operar con las reglas del sistema de numeración decimal, siguen contando con los dedos sin valerse de las representaciones y concepciones convencionales de las matemáticas.

No es raro ver que mucha gente adulta (incluido el maestro), no usamos como referencia para ubicarnos espacialmente los puntos cardinales y se prefieren utilizar puntos de referencia no convencionales para la ubicación en el espacio, principalmente de lugares, como podemos apreciar en la siguiente entrevista:

Nombre: Malú.

Edad: 38 años.

Maestra de Primer Grado de Educación Primaria.

T- Hola Malú! ¿Cómo estás?

M- Muy bien Tere, hace tiempo que no me visitas, ¿porqué?

T- Es que no se tu nuevo domicilio, dónde vives?

M- Mira desde que me cambié del Retiro, estoy viviendo en el Fraccionamiento "Los Alamos", es del INFONAVIT y

allí en la manzana "D", calle Mitla, lote 9, tienes tu casa.

T- Ese fraccionamiento es nuevo, ¿verdad?

M- Sí, es reciente.

T- ¿Y dónde se localiza?

M- Mira, en la Central tomas un carro que se vaya por las riberas del Atoyac, luego este carro pasa por atrás del Tecnológico y se va por la nueva carretera a Monte Albán, al llegar a un restaurante que se llama "Estancia Bustamante", da vuelta y se va derechito, luego pasa por el fraccionamiento "Alamos" I.V.O. y llega a una tiendita que se llama "Mary", ahí te bajas y luego te vas en sentido contrario de la ruta del camión, subes tres cuadras y das vuelta a la derecha, en la esquina hay una casa de tabique rojo, adelantito vivo yo.

T- Bueno Malú, me dio gusto verte, a ver que día de estos llego a visitarte, nos vemos.

M- Hasta luego Tere, que te vaya bien.

De este modo es común escuchar expresiones tales como: "adelante de la farmacia", "atrás de la iglesia", y no en pocas ocasiones considerando únicamente la posición del que esta dando las referencias.

Muchos son los egresados de la Primaria que no saben interpretar un plano, ni son capaces de localizar en un mapa un determinado país o región cuando se les ha proporcionado sus coordenadas.\*

---

\* Producto de observaciones de la Práctica docente.

Pero los problemas y/o resultados que la educación primaria enfrenta no son sólo del alumno, sino y en gran medida del docente.

La mayoría de maestros utilizamos como única forma para ayudar al alumno a acceder al conocimiento matemático la verbalización y la ejercitación, no utilizamos materiales concretos y variados, ni aprovechamos la interacción que tienen los niños entre ellos y con el objeto de conocimiento, por el contrario, los sometemos a criterios de autoridad y disciplina mal entendida, no los dejamos que se ejerciten en la invención y les prohibimos que sean ellos quienes comprueben sus hipótesis (después de todo quien sabe que está bien y que está mal es el maestro, él es el poseedor del conocimiento),\*\* imponiéndoles de esta manera conocimientos que ellos no comprenden lo cual los obliga a memorizarlos y repetirlos mecánicamente.

**la experiencia práctica demuestra que la enseñanza directa de los conceptos es imposible y estéril. Un maestro que intente hacer esto generalmente no logra más que un verbalismo hueco, una repetición de palabras por parte del niño que simula un conocimiento de los conceptos correspondientes pero en realidad solo encuentra un vacío.<sup>2</sup>**

Lo anterior sucede con la mayoría de contenidos del programa, pero el problema se agudiza cuando se trata de

---

\*\* Concepción del maestro según la teoría de la Didáctica Tradicional.

<sup>2</sup> Vygotsky, Pensamiento y Lenguaje. Ed. Pleyade, Buenos Aires 1973.



un tema que nunca antes se había abordado en programas anteriores y no se tiene la información que se requiere.

Tal es el caso del tema: "Ubicación Espacial de Seres y Objetos entre sí", incluido por primera vez en el programa de matemáticas 2o grado de 1993.

Dicho objeto de estudio se ubica dentro del programa de la siguiente manera:

AREA:	MATEMATICAS
EJE TEMATICO:	GEOMETRIA
CONTENIDO:	UBICACION ESPACIAL
TEMA:	UBICACION
SUBTEMAS:	a) Del alumno con relación a su entorno. b) del alumno en relación con otros seres y objetos c) <u>de objetos y seres entre si.</u>

Para abordar estos subtemas se recurrió a actividades como las siguientes: levantar los brazos, bajarlos, lanzarlos a la derecha y a la izquierda, desplazamientos a la derecha y a la izquierda, movimientos adelante y atrás; se realizaron en el patio de la escuela y el salón movimientos libres para luego detenernos y preguntar respecto de las posiciones ocupadas en las que imprevistamente nos detuvimos los integrantes del juego realizando preguntas como las siguientes: ¿qué compañero quedó cerca de tí?, ¿ quién quedó más lejos?, ¿ quién

quedo detrás de sultanito?, quién quedo a la derecha de fulanito?, etc.

Se colocaron objetos lejos, cerca, a la derecha, a la izquierda, etc.

A pesar de estas y otras actividades nos damos cuenta que a los niños les cuesta trabajo ubicar espacialmente los objetos y seres entre sí y son mayores sus dificultades al tratar de representar dichas acciones.

Si se les pide que pasen al pizarrón y que dibujen algo del lado derecho del mismo, ellos realizan sus dibujos en el lado contrario, es decir tomando como punto de referencia su posición.

Por ejemplo:

Después de platicarles a los niños un cuento llamado "La niña de los cerillos"; se les pidió dibujar a la niña del cuento en una hoja blanca, cuando terminaron, se solicitó que a la izquierda de la niña dibujaran a su mamá y a la derecha dibujaran a su papá. (En cada instrucción se dió tiempo para que los niños terminaran su dibujo antes de dar la siguiente instrucción).

Al revisar sus producciones el 72% de los alumnos presentaban inversión de la izquierda y la derecha en sus producciones o dibujos. FIG.1.

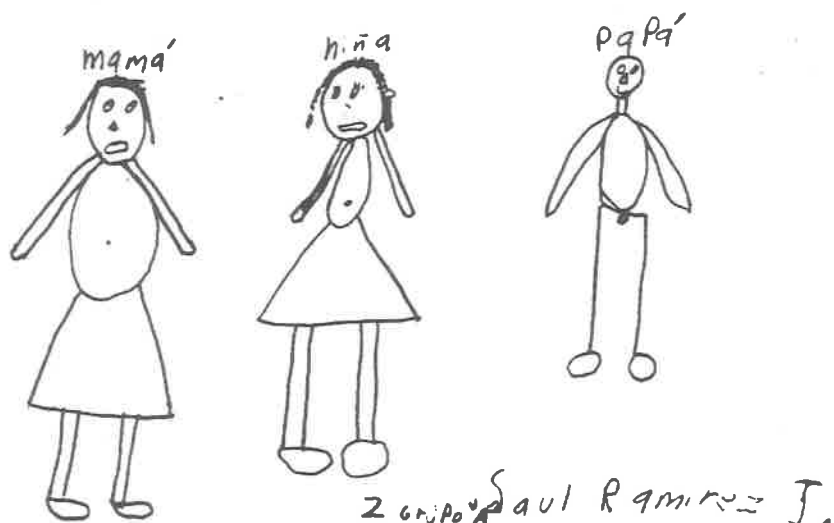


FIG. 1

## DIBUJO DE LOS NIÑOS

Al cuestionar a los niños con objetos concretos o sobre otros seres, por ejemplo : al preguntarles acerca de la derecha de un perrito colocado frente a sí mismos, reaccionaban de la misma manera, (invirtiendo sus lados derecho e izquierdo).

Las dificultades al realizar y representar esta operación, no se reducen a la inversión de la izquierda con la derecha, pues hemos notado que en algunos niños las dificultades son también para "detrás" y "delante"; otro ejemplo es el que sigue: En cierta ocasión un niño salió con su mamá de la casa de sus abuelos, al ir rumbo a su coche, el niño le preguntó a su madre: ¿Dónde está el coche mami?, su madre le señala el lugar indicado: ¡míralo! , está adelante del carro de tus abuelos; el niño sonrío y le dice seguro, "ya lo vi, está detrás del carro de mis abuelitos".fig.2.

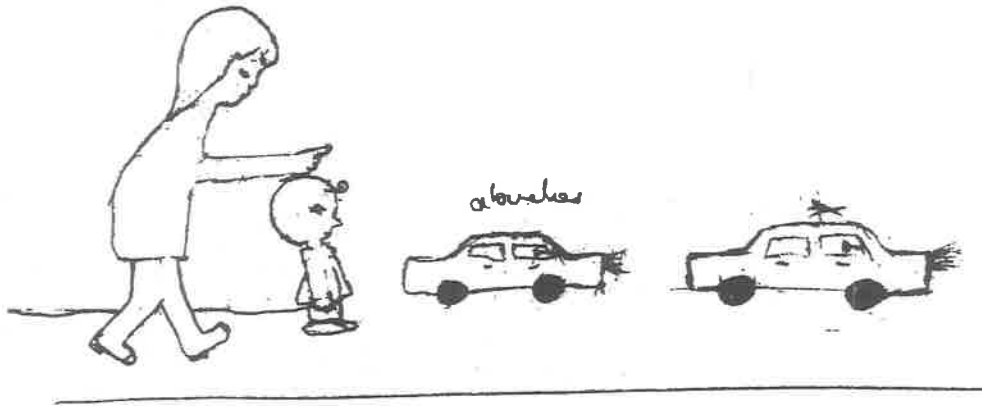


FIG.2

Con lo anterior se deduce que el niño desconoce los puntos de referencia comunes a los adultos; así, la madre considerando la parte trasera y delantera del carro, las toma como puntos de referencia para localizar su carro, sin importarle mucho la dirección en la que iban caminando, en cambio el niño considerando que el auto de sus abuelitos le estorbaba para ver el suyo indica, "está detrás del de los abuelitos".

El niño hace una ubicación del objeto tomando como referencia su posición con respecto al auto de su madre, es decir su propio punto de vista.

Lo anterior se puede atribuir al egocentrismo propio del niño, pues los escolares que cursan el segundo grado de educación primaria, generalmente se encuentran entre los 7 y 9 años de edad. Es posible que dicho egocentrismo no les permita a los niños aceptar con facilidad otros puntos de vista, pero la ubicación espacial, siendo un

contenido geométrico debe además tener un explicación que tenga que ver con las características propias de la geometría y posiblemente con la construcción que el niño efectúa para hacer suyos sus contenidos.

## CAPITULO II

### EL CURRICULUM

**Existen 2 tipos de curriculum:**

- **El curriculum oficial** que esta integrado por los contenidos de cada una de las materias de un plan de estudios.
- **El curriculum real** que es el que el docente elabora, de acuerdo a la interpretación que le da al curriculum oficial. Dicha interpretación esta dada en función de la información y formación del maestro; así puede darse el caso de que este sirva para enriquecer el curriculum oficial o bien empobrecerlo.

Una de las acciones principales en la política del gobierno Federal para mejorar la calidad de la educación primaria, consiste en la elaboración de planes y programas de estudio como medio para organizar la enseñanza y establecer un marco común de trabajo en las escuelas del país.

Por lo anterior se hace necesario que todos los docentes conozcan y analicen los contenidos incluidos en los programas, los enfoques que se pretender aplicar, así como las concepciones teóricas que les subyacen.

## 2.1 El programa anterior ( 1972/1992).

La estructura curricular de la educación primaria estuvo conformada por dos tipos de programas de estudios; integrado para los grados iniciales (1o y 2o grados), y por áreas, para los grados posteriores (3º a 6º).

Los programas integrados basados en el sincretismo infantil pretendían responder a las características cognoscitivas de los niños.

Los programas por áreas presentaban por separado los contenidos de cada una de ellas: Español, Matemáticas, Ciencias Naturales, Ciencias Sociales, Educación Artística Educación Tecnológica y Educación Física; cada una de las cuales presentaba un conjunto de objetivos, contenidos y actividades relacionados con un aspecto particular propio, pero sugiriendo buscar la interrelación entre ellas.

Los programas integrados estaban estructurados por Unidades y Módulos que se regían por núcleos integradores; estos últimos expresaban nociones elementales y científicas, situaciones o hechos reales vinculados con el mundo de los niños, o bien con procesos de investigación entorno de los cuales se aglutinaban los contenidos mediante objetivos de aprendizaje para ser tratados didácticamente.

Los programas de todos los grados se estructuraron a partir de objetivos y actividades.

Los objetivos son de distintos órdenes:

- de área ( de 1º a 6º grados)
- generales de grado (para 1o y 2o grados, cada uno en forma integrada)
- generales de grado y por área
- Particulares de unidad
- Específicos.

Enfoque del programa de matemáticas (1972).

El programa considera que la función de las matemáticas es proporcionar al educando una metodología y un lenguaje simbólico que le permita organizar y expresar sus ideas de manera precisa y coherente; que le capaciten además, para interpretar la realidad física y social con base en el razonamiento lógico.

Mediante el aprendizaje de los contenidos matemáticos se pretendía propiciar el desarrollo del pensamiento y capacidades del alumno, a través del análisis cuantitativo y relacional de los fenómenos naturales y sociales que lo rodean. Para tal efecto habrían de utilizarse: la observación, comparación, abstracción y generalización sobre relaciones en el espacio, forma, posición, movimiento y medida, cantidad y regularidad y probabilidad, a fin de que pudieran obtener conclusiones que pudieran ser aplicables en la solución de problemas de



la vida cotidiana que le permitieran conocer y participar en la transformación de la realidad.

## CONTENIDOS GENERALES DEL AREA DE MATEMATICAS EN LO REFERENTE A LA **GEOMETRIA**

### PRIMER GRADO

- Identificación del círculo, el cuadrilátero y el triángulo
- Trazo de rectas
- Medición de longitudes con unidades arbitrarias

### TERCER GRADO

Trazar figuras en las que apliquen nociones de: Simetría, paralelismo o perpendicularidad.

Calcular perímetros y áreas de rectángulos y triángulos.

Hacer mediciones utilizando el metro; el decímetro y el centímetro.

### QUINTO GRADO

Resolver problemas que impliquen el trazo de algunas figuras (triángulos romboide, polígonos, trapecio) dibujos a escala, cálculo de longitudes áreas y volúmenes, así como medición de ángulos.

### SEGUNDO GRADO

- Medición de contornos cuadriláteros y triángulos
- Trazo de figuras simétricas
- Utilización del metro , el decímetro y el centímetro como unidades de medida.

### CUARTO GRADO

Resolver problemas que impliquen el trazo de algunas figuras, simetría, rotación ,la medición de segmentos de recta, ángulos, superficies y volúmenes, uso de algunas medidas de peso y capacidad así como el trazo y análisis de figuras a escala

### SEXTO GRADO

Resolver problemas que impliquen el cálculo del perímetro y el área del círculo , el área y el volumen de prismas y cilindros.

Resolver problemas que impliquen el cálculo del área de figuras irregulares y el volumen de prismas y cuerpos irregulares.

La organización del curriculum de 1972 a través de unidades temáticas, dio a la enseñanza de la aritmética un peso demasiado fuerte y consecuentemente la enseñanza de

la geometría se vio minimizada; en la reforma educativa de los años setentas la medición quedó fuera (oficialmente) durante 20 años como contenido curricular.

En la organización curricular a través de unidades temáticas subyace una concepción "lineal-sumativa" del aprendizaje, es decir se conciben a los diferentes conceptos como si fueran ajenos unos a otros. Más aún, cada concepto se entiende como si estuviera formado por partes que pudieran enseñarse por separado, bajo el supuesto que el alumno una vez "enseñadas" todas éstas pudiera integrarlas en un solo concepto. Por ejemplo, las fracciones, las escalas, los números decimales, los porcentajes la proporcionalidad, estaban planteados desde el curriculum como objetos de conocimiento diferentes.

La concepción de aprendizaje dominante hasta hace unos veinte años, propició por otro lado que los programas incluyeran demasiados contenidos (lógica, conjuntos, probabilidad, estadística, aritmética de los naturales, decimales y las fracciones, números negativos, etc.).

Además la unidad de geometría quedó ubicada como la última del programa de cada año escolar. La falta de tiempo para desarrollar todos los contenidos y la ubicación de la geometría no posibilitaron en muchas ocasiones, ni siquiera un espacio para trabajarla.

En conclusión, el curriculum anterior era más aritmético que geométrico, la medición prácticamente

estaba ausente y la organización curricular no propiciaba una adecuada evolución del conocimiento.

## **2.2 EL PROGRAMA ACTUAL ( 1993 ).**

La política educativa actual con la firma del Acuerdo Nacional para la Modernización de la Educación Básica en mayo de 1992, ha implementado una serie de cambios en materia jurídica y laboral, (Decretó la ley general de educación , modificaciones al artículo tercero constitucional, Leyes estatales de educación, federalización de la enseñanza, Carrera Magisterial, etc.).

Con el fin de elevar la calidad de la educación bajo el supuesto que mejorándola se abatirán los niveles de deserción y reprobación que se dan en el sistema educativo, el Plan Nacional de Modernización Educativa ha producido hasta el momento una redefinición de la educación básica, entendiéndose ésta, como un ciclo de 10 años de educación. Consecuentemente se elaboraron nuevos planes y programas a fin de posibilitar la articulación y continuidad curricular, del paso del preescolar a la primaria así como de ésta a la secundaria.

En el caso particular de la matemática, se cuenta además con nuevos libros de texto gratuitos para la primaria, libros para el maestro que expresan las sugerencias didácticas correspondientes, así como avances programáticos y un fichero de actividades en cada grado (1º a 6º).

*En las últimas tres décadas y a raíz de la aparición de la Teoría Psicogenética desarrollada por J. Piaget, empieza a cambiar la concepción sobre como se aprende , esta nueva concepción se expresa de diferentes maneras en las diversas reformas educativas.<sup>1</sup>*

*El enfoque metodológico que actualmente se propone se sustenta en los resultados de la investigación en didáctica de la matemática , derivados de las investigaciones tanto en México como en el extranjero; en los proyectos de desarrollo curricular diseñados desde una perspectiva constructivista del conocimiento y en los resultados de la investigación en cuanto a las posibilidades de aprendizaje de algunos conceptos matemáticos , (ubicados en el curriculum anterior) en relación al rango de edades de los niños de la escuela primaria.<sup>2</sup>*

El enfoque actual considera que las matemáticas son un producto del quehacer humano y su proceso de construcción esta sustentado en abstracciones sucesivas.

Muchos desarrollos importantes en esta disciplina han partido de la necesidad de resolver problemas concretos, propios de los grupos sociales.

En la construcción de los conocimientos matemáticos, los niños también parten de experiencias concretas. Paulatinamente y a medida que van haciendo abstracciones pueden prescindir de los objetos físicos.

Es indispensable que los alumnos se interesen y encuentren significado y funcionalidad en el conocimiento matemático, que lo valoren y hagan de él un instrumento

---

<sup>1</sup>Block,D.1993 MATHEMA-93.Cambios curriculares en matemáticas en el nivel básico.ENFOQUE E INFLUENCIAS.

<sup>2</sup>Fuenlabrada, Irma, MATHEMA-93 Plan y programas actuales un nuevo enfoque metodológico y cambios curriculares. DIE-CINVESTAV-IPN.

que les ayude a reconocer, plantear y resolver problemas presentados en diversos contextos de su interés.

El plan y los programas actuales(1993), plantean en primer lugar una reducción de contenidos, a fin de asegurar los tiempos didácticos necesarios para el desarrollo de los mismos. De los cambios curriculares en este sentido caben destacar los siguientes:

- La enseñanza de los números negativos se reubica nuevamente en la secundaria.
- La multiplicación y la división con fracciones dejan de ser una temática de la primaria y se proponen para la secundaria.
- No se enfatiza la formalización de las propiedades, asociativa, conmutativa y distributiva de las operaciones, utilizándose éstas sólo como estrategias para facilitar los cálculos.
- Las nociones sobre las diferentes magnitudes de peso, capacidad, superficie, volumen y tiempo, así el concepto de medición, se desarrollan durante los seis años.
- El concepto de volumen sólo se trabaja con los prismas, el volumen de las pirámides y del cilindro se posterga a la secundaria.
- Se prolonga el tratamiento del área, respecto al desarrollo de una estrategia para el cálculo del área, se propone llegar a las fórmulas para el cuadrado, rectángulo y triángulo, en el entendido que el cálculo del área de cualquier otro polígono es posible

resolverlos a través de la descomposición de ellos en triángulos, cuadrados y rectángulos.

- La estadística se plantea más como un recurso instrumental que permite organizar y analizar información para resolver problemas que en su aspecto nocional.

Respecto de la probabilidad se prioriza el trabajo sobre situaciones que implican el azar y se propicia un desarrollo sobre las nociones de lo que es probable y de lo que no es probable que ocurra.

La selección de contenidos del plan y programas vigentes, se apoya en el conocimiento que actualmente se tiene sobre el desarrollo cognoscitivo del niño y sobre los procesos que sigue en la adquisición y la construcción de conceptos matemáticos específicos.

En atención al supuesto teórico de que el aprendizaje es un proceso cíclico y no lineal sumativo, los contenidos se han articulado con base en seis líneas conceptuales o ejes temáticos:

- \* LOS NUMEROS SUS RELACIONES Y SUS OPERACIONES ( 1o a 6o).
- \* MEDICION (1º a 6º).
- \* GEOMETRIA (1º a 6º).
- \* TRATAMIENTO DE LA INFORMACION (1º a 6º).

\* PREDICCIÓN Y AZAR (3º a 6º).

\* PROCESOS DE CAMBIO (4º a 6º).

Cada línea conceptual no sólo se desarrolla a lo largo de los años escolares que se señalan, sino que, en cada grado se trabaja sobre ellas durante todo el año y en simultaneidad con las otras líneas conceptuales propuestas para el grado; en el entendido de que cada vez que se retoma una línea conceptual se posibilita un avance y/o profundización sobre el conjunto de temáticas que le corresponden.

#### **EJE TEMÁTICO GEOMETRÍA**

La geometría, ha sido considerada en esta fase de transición hacia una reestructuración global del currículum de la escuela primaria, como una materia que requiere ser fortalecida. Se debe tomar en cuenta que el estudio de esta disciplina se divide en dos áreas principales: la primera se relaciona con el análisis de la forma y la segunda se relaciona con el estudio de la medición.

*Los primeros hombres llegaron a las formas geométricas a través de la observación de la naturaleza (la luna, la superficie lisa de un lago, etc.), y debido a que dicha observación era activa, es decir manufacturaba*

*objetos cada vez más regulares en su forma para satisfacer sus necesidades, logró gradualmente concebir estas figuras.*<sup>3</sup>

El hombre primeramente dio forma a sus materiales, tensaba cuerdas en sus arcos, modelaba cacharros de arcilla, etc., y más tarde, reconoció la forma como algo que se le imprime a la materia y puede, por consiguiente ser considerada en si misma haciendo abstracción de aquella. Fue así como las actividades prácticas sirvieron de base a los conceptos abstractos de la geometría.

Si en el ambiente escolar se brinda al niño la oportunidad de identificar las características similares que tienen objetos como el pizarrón, la puerta, el borrador o sus libros, el proceso de abstracción de la cualidad común entre todos ellos, a saber, la forma rectangular, será más accesible.

Con el fin de apreciar la continuidad que existe entre los contenidos de un grado y otro, así como la complejidad gradual que van teniendo a lo largo de la Educación primaria, a continuación se presentan los contenidos geométricos referidos a la ubicación espacial.

---

<sup>3</sup> PEAM ( Programa Emergente de Actualización del Magisterio) Guía para el maestro, 1er. ciclo de Educación Primaria ed. SEP, 1992. pp-1-126.



## FE DE ERRATAS

<u>PAGINA</u>	<u>PARRAFO</u>	<u>REGLON</u>	<u>DICE</u>	<u>DE</u>
INDICE		24	quirilidad	quir
6	4o.	3	referencia	refer
35	2o.	3	en el	el
64	7o.	3	yuxtaposición	yux

<u>PAGINA</u>	<u>COLUMNA</u>	<u>REGLON</u>	<u>DICE</u>	<u>DE</u>
7	2a.	1	proporciona	prop
7	3a.	4	situaciones las	las :
53	3a.	12	"gestal"	"ge:
53	3a.	13	camp	car
53	3a.	15	la	la c
53	3a.	16	rea	real
53	3a.	32	objeto funda	obje

## PRIMER GRADO

**Ubicación espacial**

- Ubicación
- Del alumno con relación a su entorno,
- Del alumno en relación con otros seres y objetos,
- De objetos y seres entre sí,
- Uso de las expresiones: "arriba, abajo, adelante, atrás derecha, izquierda".
- Introducción a la representación de desplazamientos en el plano.

CUERPOS GEOMETRICOS. . . \*

FIGURAS GEOMETRICAS. . . \*

## EN SEGUNDO GRADO

**Ubicación espacial**

- Ubicación:

- Del alumno en relación a su entorno,
- Del alumno con relación a otros seres y objetos,
- De objetos y seres entre sí,
- Los puntos cardinales
- Representación de desplazamientos sobre el plano
- Trayectos, caminos y laberintos,

---

\* Para ver los contenidos respectivos remitirse a el plan y programas de 1993, SEP

- Recorridos tomando en cuenta puntos de referencia.

Cuerpos geométricos. . . \*

Figuras geométricas. . . \*

### TERCER GRADO

#### **Ubicación espacial**

- Representación en el plano de la ubicación de seres y objetos del entorno inmediato.
- Representación de desplazamientos sobre el plano: trayectos tomando en cuenta puntos de referencia.
- Diseño, lectura e interpretación de croquis.
- Observación y representación de objetos desde diversas perspectivas.

Cuerpos geométricos. . . \*

Figuras geométricas. . . \*

### EN CUARTO GRADO

#### **Ubicación espacial**

- Representación de puntos y desplazamientos en el plano.
- Diseño, lectura e interpretación de croquis y planos
- Lectura e interpretación de mapas.

---

\* Para ver los contenidos respectivos remitirse a el plan y programas de 1993, SEP.

Cuerpos geométricos. . . \*

Figuras geométricas. . . \*

#### EN QUINTO GRADO

##### **Ubicación espacial**

- Introducción de los ejes de coordenadas cartesianas para ubicar seres y objetos en mapas o croquis.
- Las coordenadas de un punto.

Cuerpos geométricos. . . \*

figuras geométricas. . . \*

#### EN SEXTO GRADO

##### **Ubicación espacial**

- Construcción a escala de croquis del entorno.
- Uso de los ejes de coordenadas cartesianas.
- Lectura de mapas.

Cuerpos geométricos. . . \*

Figuras geométricas. . . \*

El Plan Nacional de modernización educativa propone en lo que hace al plan y a los programas de matemáticas,

---

\* Para ver los contenidos respectivos remitirse a el plan y programas de 1993, SEP

más que un cambio de contenidos curriculares, un cambio sobre la metodología de enseñanza, ya que las estrategias vigentes en las aulas se sustentan en un su mayoría en una concepción conductista del aprendizaje. En términos generales, las estrategias de enseñanza tradicionales se caracterizan por una diversidad de recursos que los maestros han ido generando para "informar de la mejor manera posible" a los alumnos sobre los saberes constituidos y validados por la matemática; consecuentemente la enseñanza de esta área de conocimiento se ha centrado en informar a los alumnos sobre el lenguaje matemático trabajándose éste más sobre su aspecto sintáctico que semántico. Por ello los cambios en los contenidos curriculares están de hecho subordinados a la lógica de un replanteamiento metodológico que tome en cuenta, la forma como aprenden los niños.

Ahora bien, la organización por ejes permite que la enseñanza incorpore de manera más estructurada, no sólo contenidos matemáticos, sino en el desarrollo de ciertas habilidades y destrezas, fundamentales para una buena formación básica en matemáticas.

En los actuales diseños curriculares se presta cada vez mayor atención a la explicación y precisión de las habilidades que tiene que adquirir el sujeto educando. Respecto a geometría, estas están intrínsecamente condicionadas por las habilidades de generar, retener y manipular imágenes espaciales abstractas.

Estas imágenes mentales vienen determinadas a su vez por tres tipos de representaciones espaciales interrelacionadas: Los productos espaciales, el pensamiento espacial y la memoria espacial.



### **PRODUCTOS**

Modelos de reproducción  
Representación gráfica  
Descripciones verbales

### **PENSAMIENTO**

Conciencia espacial  
Manipulación mental  
Resolución de problemas espaciales.  
Imaginación espacial

### **MEMORIA**

Informaciones espaciales almacenadas  
Teoremas

### **COMPONENTES**

#### **INTUITIVOS**

#### **ABSTRACTOS**

Cognición del entorno  
Relaciones proyectivas, afines, sistemas de referencia.

Cualquier aprendizaje debe pasar necesariamente por una etapa previa de observaciones. En el caso de la Geometría, las experiencias sensibles, visuales y táctiles han de constituir la base sobre la cual fundamentar las actividades y las abstracciones posteriores.

Para que este nuevo plan pueda realizarse, tiene que pasar por una redefinición de la práctica dominante, lo

cuaf implica una reconceptualización en primer lugar de los procesos de enseñanza desde una perspectiva de aprendizaje constructivista y en segundo lugar, pasar por una reconceptualización de lo que hace al conocimiento matemático en sí mismo.

Se trata de una tarea ardua, prolongada y constante por parte del docente antes de que se vean los nuevos lineamientos manifestados en el salón de clase.

### CAPITULO III

#### LA GEOMETRIA Y EL ESPACIO.

Poder plantear situaciones que superen la problemática descrita en el capítulo I de este trabajo, requiere de una profunda reconsideración de nuestros saberes respecto de la matemática; específicamente de la geometría, ya que cuando desconocemos o no consideramos los elementos implicados directamente en la práctica docente, la tarea se dificulta grandemente.

Como ya vimos en el capítulo anterior, la geometría posee características especiales en cuanto a habilidades a desarrollar, metodologías y adecuación de niveles.

Al estudiar las bases del aprendizaje de la Geometría, cabe distinguir 2 aspectos: ¿Cómo se construyen las relaciones espaciales en la mente de los individuos? y ¿Cuáles son los distintos niveles de conocimiento, que sobre las cuestiones geométricas se pueden tener?.

El presente capítulo responde a ésta última pregunta, dejando la primera para el capítulo subsecuente.



### 3.1 LA UBICACION ESPACIAL, UN CONTENIDO CIENTIFICO

El objeto del presente estudio no es agotar todas las teorías matemáticas existentes respecto de la geometría y del espacio, ya que este escrito resultaría insuficiente, sin embargo, es muy importante responder con cierta claridad las siguientes cuestiones: ¿Qué es el espacio?, ¿Cuáles son los distintos niveles de conocimiento que sobre el espacio se pueden tener?, ¿Cuál es la relación existente entre el espacio y la geometría?.

No existe unanimidad para describir lo que es el espacio, debido a que existen muchas maneras de abordarlo. Entre las más significativas se encuentran las perspectivas: Filosófica, Física y Psicológica.

La perspectiva Filosófica del espacio nos sirve para fijar su naturaleza y delimitarlo de las otras perspectivas. Según ésta existen dos grandes concepciones de espacio, la primera se refiere al espacio absoluto, en donde los objetos y sus relaciones son independientes de la existencia propia del espacio; y la segunda nos habla de un espacio relativo el cual queda determinado por medio de las relaciones de posición de los objetos.

La perspectiva psicológica, trata cualquier espacio representado en la mente y no existe si la mente no existe.

Desde la perspectiva física, el espacio es el entorno físico que nos rodea.

Entorno: La palabra entorno aglutina realidades substancialmente diversas; hay un entorno natural ajeno a la creatividad humana y un entorno artificial creado por el hombre con su ciencia, su tecnología y sus artes.

Multitud de fenómenos naturales han propiciado el crecimiento desarrollo y aplicación de los conocimientos geométricos para su descripción, control y estudio.

Básicamente podemos enumerar tres tipos de acciones geométricas referentes a la actividad espacial en el entorno: El análisis cuantitativo, el análisis figurativo, y el análisis estructural.

Análisis cuantitativo: hace uso de operaciones en las que se realizan operaciones numéricas.

Análisis figurativo: hace referencia al tipo de forma independiente del tamaño y material.

Análisis estructural: Se ocupa de la estructura formal de los objetos analizando sus esquemas de constitución, sus propiedades cualitativas como son las relaciones topológicas, proyectivas, afines y euclideas.

El comportamiento es distinto según el tamaño del espacio que se considere.

Tamaños del espacio (donde el comportamiento , es decir las acciones geométricas se realizan de distinta manera).

MICRO-ESPACIO: Geometría con el uso del microscopio.

MESO-ESPACIO: El espacio de los objetos que se pueden desplazar sobre la mesa.

MACRO-ESPACIO: Se trabaja con objetos entre 0.5 y 50 veces el tamaño del sujeto.

COSMO-ESPACIO: Pone en juego los problemas de referencia y orientación.

El espacio es multidimensional y en cada situación del entorno o del universo se puede analizar geoméricamente.

*la Geometría como cuerpo de conocimientos es la ciencia que tiene por objeto analizar, organizar y sistematizar los conocimientos espaciales a través del establecimiento de relaciones espaciales en las que la observación, la intuición y la acción tienen un papel sumamente importante.<sup>1</sup>*

*La geometría opera con "cuerpos geométricos" y figuras; estudia sus relaciones mutuas desde el punto de vista de la magnitud y la posición. Pero un cuerpo geométrico no es sino un cuerpo real considerado únicamente desde el punto de vista de sus dimensiones y forma espacial y haciendo abstracción de todas sus otras propiedades tales como la densidad, calor o peso. Una figura geométrica es un concepto todavía más general, puesto que en este caso es posible abstraer también la extensión espacial, así una superficie*

---

<sup>1</sup> Z.P.DIENES/E.W.Golding. "La geometría a través de las transformaciones". topología, proyectiva y afín. ed. TEIDE, Barcelona España. 1970.pp11.

*sólo tiene dos dimensiones, una línea sólo una dimensión, y un punto ninguna. El punto es el concepto abstracto de final de una línea, de una posición definida con un máximo de precisión, de suerte que no se componga ya de parte alguna. Así es como fueron definidos por Euclides todos estos conceptos.*<sup>2</sup>

La geometría siendo solamente una, al mismo tiempo es variada, pues el espacio es multiforme y para poder estudiarlo la geometría se ha dividido en ramas que se enfocan a la percepción del espacio a través de ciertas características específicas.

La geometría en griego antiguo significa: "medida de tierra" "geo" es tierra, y "metrón" medida. Según Eudemo de Rodas, la geometría referida a ángulos y distancias (métrica), fue descubierta por los egipcios como resultado de las medidas de sus tierras, y estas medidas eran necesarias debido a las inundaciones del río Nilo, que constantemente borraba las fronteras.

En el siglo VII a.C., la geometría paso de Egipto a Grecia, donde continuo desarrollándose bajo la tutela de grandes filósofos: Tales, Demócrito y otros. En el siglo III. a.C., surgen los "Elementos de Euclides" como un libro de matemática pura y como modelo de una ciencia teórica independiente.

La geometría proyectiva que trata con problemas de perspectiva aparece en el siglo XVII.

---

<sup>2</sup>UPN-ANTOLOGÍA, La matemática en la escuela I.SEP/1988Mex .p 153.

El estudio de las relaciones espaciales y de las figuras sin medida\* se vino desarrollando con Leibnitz desde 1679 y con las aportaciones de Henry Poincare entre otras, la topología pasó a ser en el siglo XIX una rama independiente con características propias hasta nuestros días.

En este trabajo nos interesa estudiar el orden lógico de ésta ciencia, más que su orden histórico, pues según Jean Piaget, la construcción de la geometría en los niños sigue el orden del espacio.

Podemos definir una geometría en cuanto tengamos un conjunto de objetos, de puntos, de líneas, de rectas, etc., sobre el cual efectuaremos algunas transformaciones dejando intactas ciertas propiedades. A estas propiedades se les da el nombre de INVARIANTES.

**LA TOPOLOGIA** Es el estudio de las propiedades de las figuras o cuerpos invariantes al aplicarles transformaciones por estiramiento y compresión, sin desgarros, ni plegados, ni pegaduras de la figura considerada; queda entendido que se puede regresar a la figura inicial.

Para efectuar estas transformaciones se requiere de mucha imaginación e intuición geométrica.

---

\*Únicamente considerando sus cualidades "Análisis Situs".

Por ejemplo: si tenemos un cubo hecho de un material tal que si lo comprimimos sin agujerarlo, lo habremos deformado; ahora veamos cuáles son las invariantes después de esta transformación: Se observa el interior y exterior pues es imposible pasar del exterior del cubo al interior sin atravesar su superficie; dicha superficie es la frontera que separa lo interior del cubo del espacio exterior, por lo que la frontera es una propiedad que se conserva.

Sí en el cubo se hubieran determinado algunos puntos, estos hubieran conservado su proximidad y su orden, por lo que la proximidad y el orden son invariantes topológicos, el cubo es un cuerpo cerrado y después de esta transformación sigue estando cerrado, por lo que lo cerrado-abierto son también invariantes topológicos.

En esta misma transformación podemos observar que existen propiedades que no han sido conservadas, entre de las cuales podemos citar a la recta, pues todas las rectas que constituían al cubo, al comprimirlo y deformarlo, no lo son más, por lo que se deduce que la recta no es un invariante topológico.

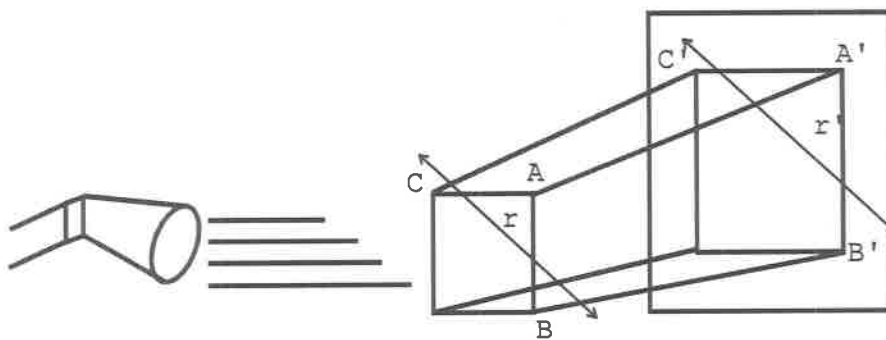
## **LA GEOMETRIA PROYECTIVA**

*"La geometría proyectiva es el estudio de las propiedades de las figuras que trazadas en un plano y proyectadas a partir de un foco puntual, permanecen invariantes".<sup>3</sup>*

---

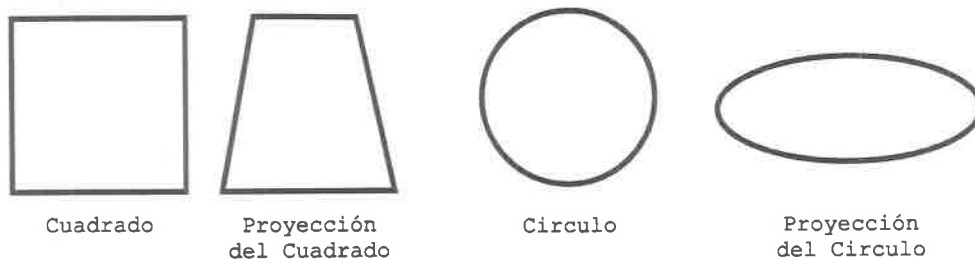
<sup>3</sup>DIENES Z. P. Ob. Cit. PP.14.

Por ejemplo si iluminamos un marco rectangular construido de madera, la sombra de un segmento de recta es un segmento de recta, sí una línea  $C,A$  se une con otra línea  $A,B$  en un punto  $A$ , las sombras de las líneas  $C,A$  y  $A,B$  se unen en un punto que es el punto  $A'$  y que es la sombra del punto  $A$ . de igual manera sí una recta  $r$  intersecta a las líneas  $CA$  y  $AB$ , la sombra de la recta  $r$  intersecta a las líneas  $C'A'$  y  $A'B'$  FIG 3; así en la geometría proyectiva las rectas y las intersecciones son las invariantes principales; además todos los invariantes topológicos son también invariantes proyectivos.



**FIG. 3 GEOMETRÍA PROYECTIVA**

Si consideramos al ojo como una fuente luminosa constituida por un punto, al observar el mundo que nos rodea con un sólo ojo, podemos apreciar algunas deformaciones interesantes de las figuras, a las cuales se les llama "anamorfosis", así, podemos percibir los cuadros como trapecios, los círculos como elipses, etc.FIG.4.



## GEOMETRIA AFIN

El estudio de las propiedades invariantes por proyección al partir del infinito, se le llama geometría Afín. La cual no es una geometría aparte, sino que constituye uno de los tipos de transformaciones que se realizan en la geometría proyectiva.

Por ejemplo: Sí tomamos un cuadrado hecho de cartulina y lo proyectamos en el piso, utilizando como fuente luminosa los rayos del sol, podemos observar que después de dicha transformación además de la recta y las intersecciones se conservan invariantes el paralelismo y la proporción.

Otro ejemplo que pretende ilustrarnos mejor es el siguiente: Sí en un cuarto oscuro, encendemos una vela y entre la luz de ésta y la pared interponemos nuestra mano, podemos observar que la sombra que se proyecta es más grande que la mano real, además dependiendo de la posición en la que colocamos la mano, ésta podrá tener en forma desproporcionada los dedos, ya sea más cortos o más largos pero de cualquier modo no corresponden al tamaño de la palma.



A este tipo de perspectiva se le llama central y es muestra de la geometría proyectiva, se trata de una representación de los objetos vistos de cerca.

Ahora bien, si la mano la colocamos a la sombra del sol a medio día, como sus rayos llegan en forma vertical y paralela a la tierra, podemos notar que la sombra de la mano no sufre desproporciones, esta proyección en perspectiva es muestra de la perspectiva caballera (representación de los objetos vistos desde muy lejos), la cual mantiene la proporción de los elementos que conforman la mano, lo que no quiere decir que se conserven las distancias y, si en lugar de la mano proyectamos una figura plana, por ejemplo un cuadrado, podríamos advertir que los ángulos de la sombra proyectada de la figura, no miden lo mismo que los de la figura que se proyecta y que tampoco las distancias se conservan.

La perspectiva caballera es propia de la geometría Afín.

### **GEOMETRIA METRICA O EUCLIDIANA**

Es el estudio de las propiedades de las figuras que permanecen invariantes ante un desplazamiento en el plano, conservando las distancias y los ángulos de las figuras.

Las transformaciones que entran en juego aquí son las rotaciones y las traslaciones.

Hablamos de ROTACION cuando giramos el objeto alrededor de un punto fijo, también cuando giramos el objeto alrededor de un eje fijo.

Una TRASLACION será simplemente el movimiento de una figura tal que un punto cualquiera de esta se desplace siempre en la misma dirección, así la figura se verá "empujada" en una dirección sin darse la vuelta.

La geometría euclidiana tiene que ver con la construcción del concepto de medida.

La medida es una síntesis de la división en partes y de la sustitución justo como el número es una síntesis de la inclusión de categorías y del orden serial. Pero La medida se desarrolla más tarde que el concepto de número ya que es más difícil dividir un todo continuo en unidades intercambiables, que enumerar elementos que ya están separados.

En resumen existe una serie de graduaciones continuas desde correspondencias proyectivas a desplazamientos euclidianos.

Las primeras se pueden considerar como correspondencias topológicas con el agregado de la conservación de rectas, luego tenemos como etapa siguiente las correspondencias proyectivas con la conservación de paralelismos (a lo que se conoce técnicamente como afinidades), más la conservación de ángulos, es decir

similaridad geométrica y, finalmente movimientos o desplazamientos que conservan las distancias.

PROPIEDADES

GRAFICA NUM. 01

INVARIANTES

DISTANCIAS				*
ANGULOS				*
PROPORCIONALIDAD			*	*
PARALELISMO			*	*
INTERSECCION		*	*	*
RECTA		*	*	*
ORDEN	*	*	*	*
PROXIMIDAD	*	*	*	*
CERRADO-ABIERTO	*	*	*	*
INTERIOR-EXTERIOR	*	*	*	*
FRONTERA	*	*	*	*
	TOPOLOGIA	PROYECTIVA	AFIN	METRICA

## CAPITULO IV

### LA CONSTRUCCION OPERATORIA DEL ESPACIO

La construcción operatoria del espacio es solidaria, no sólo de todo el desarrollo mental del individuo en cada una de sus etapas, sino, de toda la evolución biológica incluyendo, los procesos elementales de la morfogénesis vital.

En el extremo superior de este desarrollo, el espacio se genera por las operaciones deductivas de la geometría. Estas operaciones formalizadas están precedidas por operaciones concretas que hunden sus raíces en intuiciones diversamente articuladas. Estas intuiciones proceden de un espacio postural y reflejo, "actuado" antes de ser concebido; sin embargo, todo instinto animal supone ya una geometría y toda la morfogénesis es una creación continua de formas elaboradas en conexión con el medio.

#### **4.1 Teorías que explican la construcción y/o percepción del espacio.**

Existen tantas diferencias entre las diversas interpretaciones de la percepción espacial, como entre las múltiples teorías de la deducción geométrica abordada como actividad del intelecto.

La interpretación de la geometría moderna ha evolucionado desde una concepción que pone todo el acento en la propiedad perceptual o "sensible" del espacio, hasta una concepción que reduce a la geometría a una especie de lógica; en cada una de estas posturas extremas se encuentran oscilaciones entre las formas innatas y las formas empiristas y el mismo esfuerzo por escapar a estas dos exageraciones contrarias y encontrar relaciones de interdependencia entre el sujeto y el objeto.

En el periodo contemporáneo, las interpretaciones del espacio tienden a desprenderlo de la intuición deductiva que ya no se aplica simplemente a posteriori a formas dadas previamente por la sensibilidad, sino que realmente las genera, lo cual fue el resultado de la gradual elaboración de las geometrías no euclidianas, que pusieron de manifiesto la existencia de una pluralidad de modelos, entre los cuales sólo uno corresponde directamente a nuestra manera de percibir el espacio próximo y práctico.

La realización acabada de dichas controversias estuvo marcada por dos acontecimientos decisivos que liberaron la interpretación del espacio de la intuición sensible: La teoría de la relatividad y el método axiomático.\*

El siguiente cuadro sinóptico pretende ilustrarnos sobre las principales teorías referentes a la construcción del espacio, en ellas se aprecian las oscilaciones entre

---

\* Consultar Piaget, Jean. Introducción a la Epistemología Genética. Tomo I Ed. PAIDOS EDUCADOR. México 1987.

las formas innatas y las formas empiristas, así como el esfuerzo por escapar a estas dos exageraciones contrarias.

Llamamos teorías **no genéticas** a las que conciben el espacio perceptual o conceptual, como una realidad dada ya enteramente, sin porvenir ni construcción futura y teorías **genéticas** a las que lo interpretan como un sistema de relaciones que se elaboran progresivamente.

CUADRO SINOPTICO DE LAS TEORIAS EPISTEMOLOGICAS QUE EXPLICAN EL ESPACIO PERCEPTUAL\* .

N O G E N E T I C A S	Interpretaciones basadas en <u>EL OBJETO</u> .	Realismo epistemológico (Innatismo)	Hace de la percepción una facultad innata que aprende desde afuera un espacio ya enteramente construido en el mundo exterior.
	Interpretaciones basadas en <u>EL SUJETO</u>	Apriorismo Kantiano	Reduce la percepción del espacio a una conciencia de nuestra propia organización que asimila los datos externos a su estructura interna
	<u>SUJETO Y OBJETO</u> Fundidos en un solo todo desde el comienzo	Epistemología fenomenológica de "la forma"	Admite una organización espacial que abarca en una sola totalidad los factores internos y externos .  Las estructuras totales o "gestal" caracterizan la totalidad de cada campo perceptual (figura Fondo)  utiliza la ley de la "pregnancia" la expresa que toda estructuración se realiza según las "mejores formas"
G E N E T I C A S	Interpretaciones basadas en <u>EL OBJETO</u>	Empirismo	Fundamenta el espacio en las sensaciones asociadas entre sí, basta disociar caracteres espaciales de las otras cualidades de la realidad sensible para obtener por abstracción un espacio a la vez experimental e intuitivo.  (En tanto la imagen prologa la acción)
	Interpretaciones basadas en <u>EL SUJETO</u>	Convencionalismo	Análisis que se remonta a la coordinación sensoriomotriz mediante la cual interpreta "los grupos de desplazamientos"
	<u>SUJETO Y OBJETO</u> Relacionados por un sistema de interacciones indisociables	Relativismo de la acción	Reconocimiento de la existencia de una interacción relativista entre el sujeto y el objeto funda el espacio en la acción.

\* PIAGET, Jean ob. Cit.

## 4.2 PSICOGENESIS DE LAS ESTRUCTURAS ESPACIALES

Según la teoría psicogenética, es el niño quien construye su conocimiento en interacción constante con su medio. Cuando el niño nace cuenta con conductas simples basadas en su mayoría en reflejos innatos y a la par el individuo presenta una clara disposición para el desarrollo de sus potencialidades.

Según Jean Piaget , en la evolución intelectual del ser humano, pueden distinguirse una serie de etapas o periodos que se caracterizan por conductas que reflejan las estructuras mentales subyacentes.

Al periodo sensorio-motor que se extiende en nuestra cultura hasta los dos años aproximadamente y que se caracteriza por el desarrollo de la inteligencia sensorio motriz, le sucede el periodo intuitivo o preoperacional, a cuyo término hacia los 7 u 8 años, empiezan a aparecer las operaciones lógicas concretas que permitirán al completarse en la adolescencia el acceso al periodo de las operaciones formales que caracterizan el pensamiento adulto.

Como adultos parece natural suponer que vemos el espacio tal cual es y que siempre lo hemos visto de este modo, pero este ver sin esfuerzo, es en realidad producto final de una larga y ardua construcción evolutiva, la cual depende más de las acciones que de las percepciones.



La construcción genética del espacio es, exactamente paralela a la del número, en los diferentes planos: perceptual, sensorio-motriz, intuitivo y operatorio, con la única diferencia de que el esquematismo espacial trata de operaciones infralógicas que se refieren a la elaboración del objeto o de los objetos de diversos órdenes (es decir con elementos continuos), y el esquematismo lógico-aritmético procede de la acción con elementos discontinuos de lo real. Ambos esquematismos se reúnen luego de modo cada vez más estrecho.

Las representaciones espaciales son construidas por medio de la organización de acciones ejecutadas con los objetos situados en el espacio, al principio sobre acciones motoras y más tarde sobre acciones internalizadas que se convierten en sistemas operacionales.

Mucho antes de saber caminar el bebé sabe sostener su torso en posición erguida, pero por más que un niño pueda mantenerse parado a partir de la segunda mitad de su primer año y acostado desde su nacimiento, habrá que esperar hasta los 7 u 8 años y más aún, para que pueda representar intuitivamente las verticales y las horizontales y, sobre todo para que las coordine entre sí en un sistema operatorio de referencias.

Desde las primeras etapas de su vida el individuo va tomando conciencia del espacio cuando adquiere dominio de los elementos que constituyen el mundo que lo rodea, como resultado de sus desplazamientos y de la coordinación de

sus movimientos cada vez más diferenciados y precisos de su cuerpo.

La representación se inicia en un plano inminentemente perceptual en el periodo **sensoriomotor** (0 a los 2 años aproximadamente). Después de esta edad el sujeto evoca los objetos ausentes y sus desplazamientos a través de un proceso paulatino.

En el principio de este periodo existen para el bebé diversos espacios que todavía no tienen relación entre sí: un espacio de aprehensión, un espacio bucal, otro visual, etc., la coordinación entre ellos conduce a la formación de un espacio único, considerado como próximo, que se encuentra separado durante mucho tiempo del espacio lejano, propio de los objetos y movimientos que se encuentran fuera del área de intervención del niño.

El espacio lejano se inicia con la locomoción (gatear, caminar, etc.). El espacio próximo se ve modificado al tener el niño acceso a otro del cual ya no es el centro como en el caso de la primera construcción espacial.

La construcción perceptual del espacio propia del periodo sensoriomotor, debe lograr poco a poco descentrar el cuerpo del niño, de los objetos, para asegurar su identidad y diferenciar los movimientos exteriores del propio cuerpo.

En la etapa final de este periodo, llegará a concebir el objeto como una sustancia permanente, independiente de la acción del "yo". Una vez que el sujeto ya no ocupa el centro del mundo y se sitúa a sí mismo como un objeto entre otros, se convierte en parte integrante del universo.

*En la etapa sensoriomotriz el niño descubre su cuerpo y al final lo sitúa en el espacio con los objetos, estableciendo un conjunto de relaciones recíprocas entre los propios movimientos y los del exterior, que continuará a lo largo del siguiente periodo preoperatorio consolidando las nociones espaciales al eliminar el egocentrismo inconsciente inicial y elaborar un universo reflexivo-representativo en el seno del cual el sujeto se sitúa; construcción que alcanza plenamente después de los siete años de edad. Esto aunado a la capacidad de evocar mentalmente las propiedades físicas de los objetos, va a dar como resultado la invarianza del objeto u objeto permanente, génesis del concepto del espacio.<sup>4</sup>*

En el periodo **preoperatorio** o de la **"intuición geométrica"**, las acciones presentadas mentalmente pueden completarse simbólicamente, por lo que dan lugar a coordinaciones que superan el espacio próximo. Pero la intuición no es suficiente para poder construir un espacio de conjunto. Es hasta las operaciones concretas cuando se estructuran o se coordinan las imágenes mentales del espacio.

En dicho periodo domina la representación mental del espacio topológico. El niño recibe perceptivamente la imagen de círculos, cuadrados, triángulos; pero

---

<sup>4</sup> SANDOVAL.P.María Antonieta . " clases de conocimientos, formación de las estructuras lógicas". ed.Fondo Educativo Interamericano.1985.

mentalmente no ve estas figuras como objetos con relaciones espaciales determinadas, tales como son: las rectas, los ángulos, las curvas, etc., antes de éstas, el niño percibe criterios más generales de carácter topológico como son la proximidad, la separación, etc.

Las relaciones de orden aparecen al inicio del pensamiento intuitivo, pero en forma no operatoria y sin reversibilidad. La construcción del espacio proyectivo y euclidiano se encuentra obstaculizado por el pensamiento egocéntrico; los objetos y las agrupaciones de objetos son vistos en su forma y orden en relación con el observador, por lo que resulta difícil para el niño de esta etapa imaginarse que un objeto puede presentar para otro espectador un aspecto distinto del que tiene para él.

Aprender posiciones sucesivamente diversas y reconstruir la forma y la situación requiere la intervención del pensamiento operatorio.

Las primeras estructuras propiamente operatorias se constituyen, hacia los siete u ocho años, en una forma relativamente equilibrada y sirven de trampolín a todas las construcciones ulteriores.

Cada periodo constituye la superación de un tipo de egocentrismo; en la etapa preoperatoria el niño se ve muy influenciado por la apariencia y por los aspectos perceptuales de las situaciones y casi no presta atención a las transformaciones que ligan una situación con otra.

En la etapa de las **Operaciones concretas**, por el contrario se centra en esas transformaciones, lo que le permite entender el cambio de la realidad y organizar sus acciones en sistemas que conectan unas con otras. Lo cual exige que el niño construya una lógica de clases y una lógica de relaciones.

El niño tiene que construir su propia inteligencia y una representación del universo, pero en esta construcción ambos polos no aparecen disociados en forma clara.

El niño atribuye a su realidad exterior características de su propia conducta y en cambio ve ésta con rasgos objetivos y no subjetivos. Simultáneamente el niño tiene grandes dificultades para ponerse en el punto de vista de otros. Esto es lo que Piaget denominó egocentrismo. Según el autor todo el desarrollo Psicológico puede caracterizarse como el paso de un estado de egocentrismo a otro de descentración. En cada uno de los estadios hay una manifestación del egocentrismo.

Así, al final del periodo sensoriomotriz, el niño se sitúa frente a los objetos y frente a las demás personas desde el punto de vista de la actividad práctica.

En el periodo preoperatorio, se produce una nueva forma de egocentrismo caracterizada por la indiferenciación entre lo subjetivo y lo objetivo, entre los supuestos y los hechos, entre el punto de vista propio y el punto de vista de los demás.

Durante el periodo de las operaciones concretas este tipo de egocentrismo va desapareciendo lentamente, pero, con la ampliación de un universo que produce el uso de las operaciones formales, se produce un tercer tipo de egocentrismo.

El egocentrismo de la etapa formal es sobre todo de tipo social. El egocentrismo se asocia con y se continua en un sociocentrismo que es una centración, no sobre el individuo, sino sobre el grupo social. El adolescente y el adulto toman los valores y las conductas dominantes de su grupo como la norma y ven en las costumbres y la vida de otros grupos sociales y de otras naciones desde su propia perspectiva.

El siguiente cuadro busca ilustrarnos las etapas del desarrollo de la inteligencia y los contenidos geométricos

ETAPAS	CONTENIDOS GEOMETRICOS
SENSORIOMOTRIZ de 0 a 2 años aproximadamente.	Inicio de la simbolización Espacio próximo Espacio de aprehensión, Espacio visual, Espacio bucal.
PREOPERACIONAL De 2 a 6-7 años aproximadamente	Comienza la formación de operaciones topológicas.
OPERACIONES CONCRETAS de 6 a 11 años aprox.	La mayor parte de las relaciones topológicas se integran en sistemas operacionales estables, con excepción de la continuidad. Al mismo tiempo se inicia la construcción de las propiedades proyectivas y euclideas.
OPERACIONES FORMALES de 11 a 16- 18 años aproximadamente	Son construídas por el adolescente las propiedades proyectivas y euclideanas. Además logra establecer la propiedad topológica de la continuidad.

CUADRO No 2

El niño realiza la construcción de la geometría proyectiva y Euclidiana a partir de los logros que haya tenido en la topología, y en cada una atraviesa por diferentes estadios.

Trataremos pues el proceso de construcción de la representación geométrica del espacio en el niño.

Comenzaremos por distinguir las relaciones que estan en juego en el espacio Topológico.

a) Proximidad o cercanía. - Que dista poco.

Cuando el niño considera los rasgos que están cerca en la representación que realice de un objeto, persona o animal. Es decir que toma en cuenta la relación espacial de las partes o puntos que se encuentran cercanos o próximos.

b) Separación. - Separar las partes de un todo, Disyunción -frontera-, esta característica es considerada por el niño cuando en su representación se logra distinguir los diversos elementos que integran el objeto representado.

c) Orden. - Disposición metódica- (sucesión espacial.) Es la síntesis de la proximidad y la separación, manejada por el niño cuando en la representación de un objeto logra colocar en orden las partes que lo integran.

d) Contorno o cierre. - (Alrededores) línea cuya forma determina el relieve, (frontera en relación con el interior - exterior.)

Esta relación es considerada por el sujeto cuando en su representación plasma lo que percibe, las partes que el objeto tiene dentro las mantiene en el interior y las partes que están fuera las representa en el exterior.

e) Continuidad. - Unión natural que tienen las partes de un todo.



Reproducción prolongada que por suponer la noción abstracta de infinito es dominada hasta el periodo de las operaciones formales.

Para poder saber como se han formado las primeras representaciones elementales del espacio, Piaget, realizó diversos experimentos, algunos se refieren al reconocimiento de formas por el sentido del tacto en ausencia del estímulo visual (procedimiento conocido con el nombre de "percepción háptica de la forma"), otros referidos al estudio de nudos falsos y nudos verdaderos.

El experimento que utilizaremos para explicar los estadios en la construcción del espacio topológico, se refieren al tratamiento de las relaciones espaciales elementales al dibujar, o "espacio pictórico" y que trata de interpretaciones de los dibujos que ejecutan los niños tanto espontáneamente con ayuda de la memoria visual, como también copiando modelos presentes.

*Luquet, en su conocida obra sobre dibujo infantil, describió tres estadios del dibujo que siguen al mero garabato como de : 1) "incapacidad sintética"; 2) "realismo intelectual" y 3) "realismo visual"; dichos estadios describen en que orden se comprenden las relaciones espaciales como resultado de la percepción visual".<sup>5</sup>*

Estos tres estadios se caracterizan brevemente en el cuadro siguiente.

---

<sup>5</sup> HOLLOWAY, G.E.T. Concepción de el espacio en el niño. ed. Siglo XXI. México.1987.pp.19.

## CUADRO NUM. 03

CONSTRUCCION DEL ESPACIO TOPOLOGICO POR PARTE DE EL NIÑO  
CONSIDERANDO EL ESPACIO PICTORICO.\*

## E S T A D I O S

RELACIONES	I INCAPACIDAD SINTETICA	II REALISMO INTELECTUAL	III REALISMO VISUAL
PROXIMIDAD O CERCANIA	La toma en cuenta pero aún no la domina. Los rasgos están cerca.	las proximidades son correctas.	Se ha alcanzado
SEPARACION	Comienza a considerarla pues los diversos elementos del dibujo que hace, se distinguen entre sí.	Se efectúan las separaciones con mayor claridad y se manifiesta algún avance en el análisis de elementos separados.	Se ha alcanzado
ORDEN	Se comienza a manifestar, pero sólo se aplica a pares de términos INCAPACIDAD SINTETICA.	Las partes del dibujo están en orden pero no de acuerdo a un sistema de coordenadas.	Se ha alcanzado
CONTORNO O CIERRE	frecuentemente los niños cometen errores.	Existen ciertas transparencias.	Se ha alcanzado
CONTINUIDAD	Se da el fenómeno de yuxtaposición y no vinculación.	Esta bien definida en contraste con la yuxtaposición anterior.	Aún no la ha terminado de construir.

Respecto de la construcción del espacio proyectivo, las investigaciones de Piaget, se refieren a los puntos de

\* Holloway G.E.T. Ob. Cit.

perspectiva considerados por los niños y a la noción de línea recta.

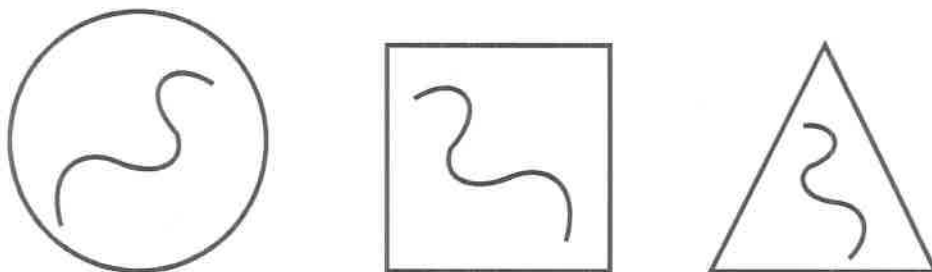
Los resultados podemos resumirlos como sigue:

### **ESTADIO I**

El niño puede reconocer fácilmente una recta, pues distingue círculos de cuadrados a simple vista, sin embargo, no tiene idea clara de lo que constituye una línea recta, su actuación se limita a la construcción de una línea topológica con componentes cercanos.

Con relación a la perspectiva, existe una falta total o parcial de distinción entre los diferentes puntos de vista desde los cuales podrían verse los objetos.

Ejemplo:

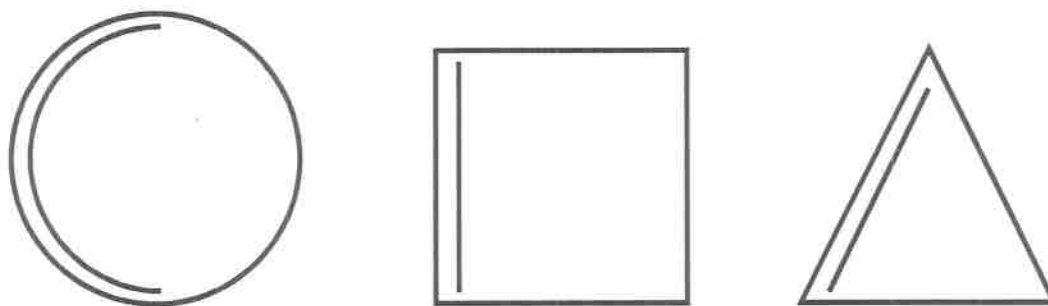


### **ESTADIO II**

El niño puede concebir una línea recta paralela a algún rasgo del medio que le rodea, pero no puede evocar

la imagen de una línea recta cuando ésta debe ser independiente de las líneas presentes en el medio ambiente; el problema debe ser la construcción de la imagen intuitiva y no la percepción en sí misma.

Ejemplo:



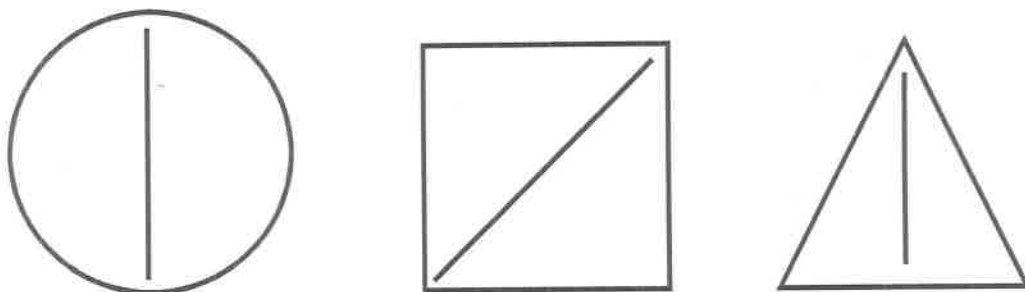
### **Subestadio IIa**

Se desarrolla junto con la discriminación progresiva de puntos de vista, la construcción de la imagen intuitiva de la línea recta, por una gradual eliminación de las formas circundantes.

Lo que ocurre es que cuando el niño pasa más allá de la línea recta perpendicular, se inicia en la construcción de los conceptos proyectivos (apuntar a lo largo de una línea en especial, con apreciación de la conservación de la forma independiente del punto de vista) y los conceptos euclidianos.

El camino de movimiento más corto o mantenimiento de una dirección constante de trayecto aparecen simultáneamente y se refuerzan de manera mutua.

Ejemplo:



### **ESTADIO III**

El niño es capaz de discriminar entre puntos de vista, lo cual le permite efectuar operaciones espontáneas de apuntar

El concepto de geometría se refiere a la conservación y medición de la longitud, a las coordenadas rectangulares, ángulos y curvas y superficies y sólidos. Los cuales se vinculan con aspectos de relaciones espaciales que a los adultos les parece no ser problemáticos, pero para los niños constituyen obstáculos fundamentales para la comprensión de la geometría. Tal es el caso del cambio de posición.

## **CAMBIO DE POSICION**

Para alcanzar la comprensión de las relaciones espaciales un niño debe verse como un sólo objeto móvil entre otros situados dentro de una estructura de referencias.

Al respecto, las respuestas de los niños se agruparon también por estadios:

### **ESTADIO I (4 años)**

Tienen cierto sentido de orientación, sin embargo es probable que al girar 180 grados, queden completamente confundidos y no puedan relacionar sus nuevas posiciones con puntos de referencia bien conocidos, puesto que estos no son necesariamente estacionarios para ellos.

### **ESTADIO II (4 a 7 años)**

Los niños siguen pensando todavía principalmente en términos de sus propias acciones. Las posiciones y distancias están sistemáticamente distorsionadas por su propio interés o punto de vista subjetivo.

### **ESTADIO III (8 años en adelante)**

Este estadio se encuentra dividido en dos subestadios que a continuación se sintetizan.

**SUBESTADIO IIIa**

Los niños logran una verdadera representación que pueden separar de la acción, al menos temporalmente.

Muestra la aparición de puntos de referencia coordinados aunque no de un sistema de coordinación total, lo cual queda demostrado al observar que el agrupamiento de partes del plano es correcto, pero falta la relación entre las partes, ( sus planos muestran una confusión de puntos de vista, cada uno de estos es correcto por separado, pero los diversos puntos no se relacionan con exactitud).

**SUBESTADIO IIIb**

Los niños son capaces de disponer todos los puntos de referencia locales en correcta relación mutua y pueden solucionar por completo el problema de la rotación.

El desarrollo de ideas de medida influye tanto en la capacidad de apreciar la conservación de la longitud como la de agrupar cambios de posición y referirlos a una estructura espacial coordinada. De lo contrario no se puede alcanzar, el significado de aplicar una sucesión de unidades a lo largo de una línea vertical, ni se puede apreciar que debe haber conservación de la longitud cuando se mueve esa unidad.

La adquisición de la capacidad de medición es una síntesis de la posibilidad de comprensión de los principios de subdivisión y cambio de posición que se logra mediante desplazamientos de una unidad iterable que actúa como unidad de medida.

Otro de los conceptos fundamentales que deben lograr es el de distancia, pues cuando los niños dominan dicho concepto pueden distinguir el espacio como un continente común que incluye objetos y relaciones espaciales entre ellos. La comprensión gradual de tales relaciones les permitirá alcanzar una etapa de evolución en la que se obtienen sistemas coordinados y se hace posible la construcción de un sistema de medida.

Podemos decir que el espacio organiza no sólo el pensamiento del niño, sino del adulto, pero las nociones que el niño va teniendo de las nociones espaciales es un proceso lento, es una construcción mental paulatina, derivada de la acción del individuo con el medio ambiente.



## CAPITULO V

### UBICACION ESPACIAL DE SERES Y OBJETOS ENTRE SI

Las propiedades geométricas son cada vez más accesibles y presentes en la vida cotidiana, cultural y técnica de nuestros días. Desde las más temprana edad se experimenta directamente con las formas de objetos, ya sean juguetes o utensilios cotidianos y familiares, paulatinamente vamos tomando posesión del espacio orientándonos, analizando formas y buscando relaciones espaciales de situación, de función o simplemente de contemplación.

Este conocimiento del espacio ambiental del que nos apropiamos directamente, primero sin razonamiento lógico, es lo que constituye la " intuición geométrica " .

#### 5.1 EL ESQUEMA CORPORAL Y SUS RELACIONES CON EL OBJETO

La representación elaborada por el niño del espacio que lo circunda se constituye apoyándose en objetos fijos que él toma como referencias.

La aparición del lenguaje con la formación de conceptos, presupone, en cierto sentido la posibilidad de disociar el esquema corporal del cuerpo para proyectarlo sobre los objetos como principio de individuación: Todo objeto desde el momento en que es conceptualizado estructura el espacio que lo rodea; aparece como el centro

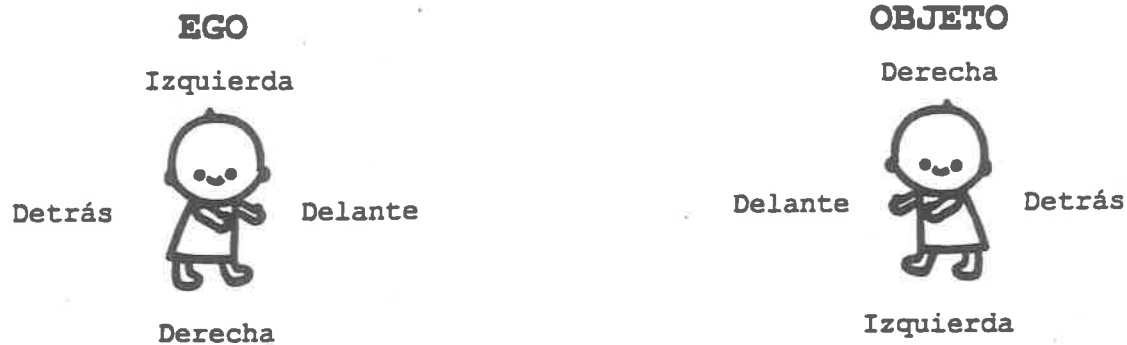
de un mapa local cuyas grandes polaridades son las mismas que las del esquema corporal: arriba-abajo, derecha-izquierda, delante-detrás. Para especificar estas interrelaciones espaciales entre los objetos, es necesario introducir esas polaridades locales; pero estos mapas se traslapan e interpenetran como el mapa ligado al propio cuerpo por las actividades sensorio-motrices y kinestésicas.

Según Liliane Lurçat, en su obra " El niño y el espacio", cuando un objeto se encuentra situado frente a uno hay tres maneras de proyectar sobre él, el propio esquema corporal:

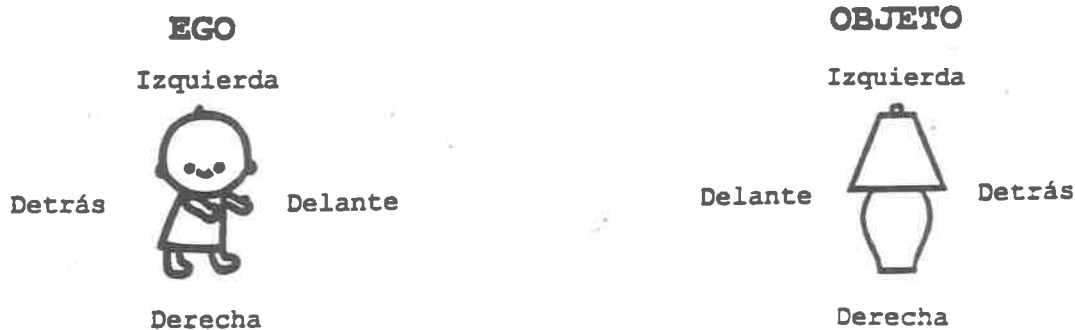
- a) Por Rotación, entorno a un eje vertical,
- b) Por Simetría, "reflexión" en relación a un espejo plano ficticio
- c) Por Traslación.

FIG.04. EJEMPLOS DE LOS MODOS DE PROYECCION DEL ESQUEMA CORPORAL A LOS OBJETOS\*

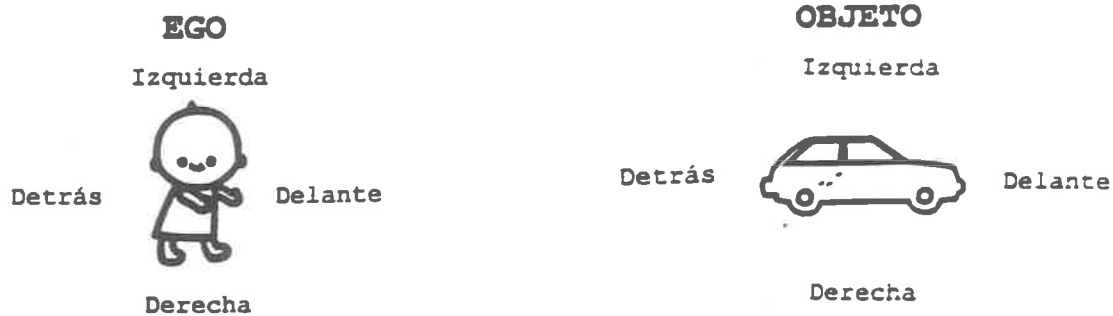
### ROTACION



### SIMETRIA



### TRASLACION



\* LURÇAT, Liliane. "El niño y el espacio (la función del cuerpo)". ed. Fondo de Cultura Económica. México. 1979. p

La elección del modo de proyección depende esencialmente, de las polaridades propias del objeto, definidas por su aspecto antropomorfo.

La identificación por traslación se impone cuando se trata de un instrumento que prolonga funcionalmente, el mapa asociado al cuerpo.

Si por el contrario, los objetos no tienen polaridad propia y si esta polaridad no está determinada por una coloración afectiva atribuida a los objetos, dichos objetos representan un obstáculo o una amenaza y por ello están provistos preferentemente de la identificación por Reflexión o simetría ya que, en cierto sentido, hacen frente a uno.

La identificación por simetría (reflexión) y la identificación por Rotación ( $180^\circ$ ), entorno a un eje vertical, sólo difieren para objetos provistos de quiralidad.

El esquema corporal en tanto que esquema abstracto de individuación, no tiene quiralidad, es simétrico como el cuerpo humano visto desde el exterior.

La inmensa mayoría de los objetos usuales fabricados por el hombre tienen un plano de simetría.

## 5.2 LA REFERENCIA EN EL OBJETO

La referencia es un factor fundamental de la aprehensión del espacio. En el ser humano toma formas particulares ya que es vivida y formulada a la vez, y requiere en cada nueva situación, de un análisis por parte de aquel que se orienta.

La referencia como todo conocimiento no es reductible a sus bases prácticas o a sus condiciones verbales; es consecuencia de su conexión, y sólo es eficaz cuando ambas se fusionan.

La referencia es un aspecto del conocimiento del espacio elaborado por el niño.

	PRACTICA	Conocimiento directo
	Actividad del niño	del espacio.
FUENTES DE		
CONOCIMIENTO	VERBAL	
	Transmisión del medio familiar a través del lenguaje.	Conocimiento indirecto del espacio.

Ambas fuentes de conocimiento convergen precozmente. Sin embargo para que haya un conocimiento del espacio se requiere del criterio de una actividad adaptada: por ejemplo, ir a un lugar, localizar en él los objetos, situarse en el espacio de los lugares y de los objetos.

Ahora bien aunque el conocimiento manipulatorio del objeto crea las condiciones de referencia en el objeto, no lo contiene, por esta razón, la referencia en el objeto puede aparecer en el principio como una forma de conocimiento superfluo que dobla a la acción.

De la misma manera el conocimiento verbal de un itinerario, no es siempre una guía para la acción.

La evolución psicológica no se realiza en sectores . Los factores del psiquismo, sean de origen biológico o social, se integran precozmente. Las relaciones que se establecen entre los diferentes factores del psiquismo condicionan su transformación.

Para poder abordar el estudio del psiquismo debemos buscar sus bases y sus condiciones.

LA BASE Es material, porque existe objetivamente, lo que significa que actúa sobre el psiquismo sin pasar necesariamente por la conciencia. Por una parte lo biológico como: el sexo, la constitución física; tampoco pasan por la conciencia hechos sociales como la nacionalidad, la época con sus luchas y sus acontecimientos, etc.

LAS CONDICIONES Constituyen aquello que actúa sobre el psiquismo pasando necesariamente por la conciencia incluso aunque ésta no sea muy explícita y racional. Se trata esencialmente de la ideología, los valores morales del

medio, las influencias psicológicas padecidas en las diferentes etapas; la escuela, la familia, los grupos sociales a que se pertenece, los cambios en el modo de vida: geográficos, económicos, familiares, escolares, etc.

Los conceptos de base y de condiciones de la proyección, aplicados al estudio del esquema corporal y más precisamente a su proyección en el objeto, permiten una aproximación a los factores que podríamos clasificar de la siguiente manera:

La base biológica está ligada a la existencia de la sensibilidad táctilo-kinestésica y al espacio postural.

La base social, está ligada a la existencia de un medio técnicamente evolucionado que presupone un universo natural. Incluye también hábitos culturales de la clase social de origen, con sus polarizaciones hacia la acción directa sobre las cosas. Esas modalidades de la acción imponen un uso diferente del lenguaje en las primeras relaciones con el ambiente: más elíptico o más descriptivo según los casos.

Las condiciones de esta proyección comprenden la influencia de la escuela y el lugar acordado por la pedagogía preelemental a los ejercicios que incluyen el conocimiento del cuerpo y el espacio. Algunas condiciones están ligadas a la historia de los alumnos: por ejemplo los niños inmigrantes resienten, a diferentes niveles de conciencia, la repercusión en sus relaciones con los

objetos, de los cambios introducidos en su modo de vida. Al respecto no se encontraron estudios de manera que hay que investigar entorno a ello.

**5.3 LOS REFERENTES** PODEMOS CLASIFICARLOS DE LA SIGUIENTE MANERA:

SUBJETIVOS: Relativos a la posición del sujeto.

OBJETIVOS: Independientes de la posición del sujeto que los designa.

FIJOS: Ejem. casa, ventana, árbol, etc.

MOVILES: Vehículo, ser viviente que se desplaza.

ABSOLUTOS: Relacionados con el peso: arriba-abajo. Entendiendo este como la fuerza gravitatoria que se ejerce sobre los cuerpos.

RELATIVOS: Adelante-atrás, derecha-izquierda; que no resultan de las particularidades del objeto, sobre el cual se efectúan las designaciones, sino que, parecen depender de la función que desempeñan estos dos pares de referentes en la adaptación del sujeto al espacio.



#### **5.4 EL CAMPO AMBIENTE**

El campo ambiente está compuesto fisiológicamente por 4 campos acoplados de dos en dos.

Los campos laterales son percibidos simultáneamente, es decir, que el tránsito de uno a otro supone una orientación con el propio cuerpo.

Los campos delante-detrás, no son percibidos simultáneamente, el paso de uno a otro supone una conversión del propio cuerpo en relación con las direcciones del espacio; en este caso, la orientación en relación con el ambiente domina a la orientación subjetiva.

La confluencia de los factores semánticos y de aquellos relativos a la postura de la referencia se opera en el nivel del campo ambiente cuando el niño logra reconocer y designar los cuatro campos acoplados de dos en dos y asociarlos con las direcciones correspondientes.

No puede aislarse la organización del campo espacial ambiente de la estructura del cuerpo (Leroi-Gourhan).

J.Paillard afirma que es la primacia del campo orocefálico el que marca filogenéticamente el establecimiento de las relaciones espaciales entre el organismo y su medio.

Es en el curso de los primeros años de vida, cuando se desarrollan las relaciones entre el espacio postural y el espacio circundante. En el desarrollo del espacio postural, Paillard atribuye un papel determinante a la adquisición de la posición en pie que él denomina invariante estatural o postural. Esta invariante llega a ser una referencia para todos los movimientos del cuerpo y sus segmentos.

Los trabajos de Leroi-Gourhan y de Paillard, permiten situar mejor la concepción de un esquema corporal resultado de las relaciones entre el espacio postural y el espacio circundante, en relación con la evolución de las especies y el desarrollo ontogenético., tal y como ha sido desarrollado por Wallon.

El conocimiento del cuerpo propio procede del conocimiento del espacio y al mismo tiempo lo hace posible, lo cual se evidencia en las etapas que van de la lateralización a la percepción progresiva de la quiralidad.

**QUIRALIDAD** es una palabra griega que significa: "la mano derecha, la mano izquierda". Es la propiedad de un objeto o de una molécula de no poder ser superpuesta a su imagen en un espejo, su simétrico en relación a un plano.

Ejemplo: nuestras manos no pueden ser superpuestas , pues son " enantiomorfos", la misma propiedad observada en otros objetos.

## 5.5 DE LA LATERALIZACION A LA PERCEPCION DE LA QUIRALIDAD

Las etapas que marcan los pasajes que van de la lateralización hasta la percepción de la quiralidad parecen proceder fundamentalmente de la actividad del sujeto.

El primer fenómeno observable en el niño es la lateralización "es la mano preferida en las tareas manuales nuevas", según H. Hécaen y J. Ajuriaguerra, dicha preferencia esta ligada a la asimetría funcional. (LURÇAT, ob.cit)

La lateralización implica una elección entre las dos manos, la mano activa y la mano equilibrante. Según Wallon, la mano activa tiene la iniciativa del acto, la mano equilibrante asegura la realización de ese acto. (LURÇAT, ob.cit)

La lateralización es un fenómeno que esta en relación con la dominancia hemisférica cerebral.

La lateralización desemboca progresivamente en el conocimiento de la lateralidad, primero de sí mismo y después sobre los otros. Conocer su **lateralidad** es saber que se tiene una mano izquierda y una mano derecha y, es también en consecuencia reconocerlas.

**LATERALIZACION:** Antes del 1er. año: No hay lateralización.  
1er. año de vida: Inicia la lateralización.  
hasta los 5 y aveces hasta los 7: puede haber aún oscilaciones de la lateralización.

**LATERALIDAD:** Su conocimiento es tardío.  
según N.Gallifret-Granjon, la lateralidad es reconocida en sí mismo hacia los 6 años en el 86% de los casos y en los otros hacia los 8 años .

El conocimiento de la lateralidad procede primero de la acción (lateralización) y también de la orientación; pues para orientarse en el espacio necesitan orientarse en su cuerpo.

El conocimiento de la lateralidad desemboca en la orientación subjetiva en el espacio. Esta orientación presenta etapas genéticas difícilmente dissociables de la referencia en la topografía corporal.

Al principio : El niño no distingue los dos lados de su cuerpo.

Sólo a los 4-5 años: Comprende que tiene una derecha y una izquierda de cada lado de su cuerpo, pero ignora cuales son sus miembros derechos y cuales son sus izquierdos.

Entre los 6-7 años: Sabe distinguir sus dos manos y sus dos pies y, más tarde sus dos ojos.

Entre los 8-9 años: Reconoce con precisión cuál es la parte izquierda y cual es la parte derecha de su cuerpo.

Si bien la orientación subjetiva en el espacio ambiente está vinculada a la referencia en la topografía corporal, no es reductible a ésta.

La dificultad de utilizar la referencia subjetiva muestra que se trata de dos operaciones intelectuales diferentes: una que consiste en orientarse en su propia topografía corporal y otra consistente en utilizar su cuerpo como medio para orientarse en el espacio.

Lo que está implicado entonces son los pasajes del espacio postural circundante. Según Wallon, estos pasajes realizan la construcción propiamente dicha del esquema corporal.

Cuando uno pregunta súbitamente a los niños o a los adultos ¿en que reconoces tu mano derecha? la referencia es en el mayor de los casos funcional; no procede de la forma. Parecería que la percepción de la quiralidad se ejerce primero en el mundo de las formas y de los objetos exteriores al cuerpo y solamente después es referida al cuerpo propio.

Parece ser que el reconocimiento de la lateralidad no es dependiente de la percepción de la quiralidad sino que sigue una evolución propia, y que en un momento dado ambas fuentes de conocimiento convergen.

La orientación en el espacio es lo que va a apresurar el pase de la lateralización al conocimiento de la lateralidad. Una diferencia entre la manipulación de los objetos y la localización en el espacio esta ligada al reconocimiento de su lateralidad.

Aún cuando para efectuar un acto cualquiera no es necesario saber que uno utiliza la mano derecha o la izquierda, este conocimiento es necesario para la localización: ir a la derecha, ir a la izquierda. El reconocimiento de la lateralidad parece ligado en el niño al aprendizaje progresivo de la orientación en el espacio.

Desde el momento en que la lateralidad es usada voluntariamente, se sitúa uno en el plano de la representación: representación de los referentes en el espacio, de los referentes para sí, sobre sí, para otros, sobre otros.

La percepción de la quiralidad sigue una evolución específica. Depende de la orientación en el mundo de las formas y de los objetos; en los actos más cotidianos se ejerce este conocimiento a nivel sensible: los errores en el vestir (por ejemplo: la confusión en los zapatos izquierdo y derecho), conducen a la percepción de una

diferencia a través del titubeo. Esta percepción se ve apresurada en el momento del aprendizaje de las letras (las letras b y d, p y q son simétricas en relación con un eje horizontal).

La percepción de la quiralidad permanece en el plano de un conocimiento sensible intuitivo en las prácticas y en las manipulaciones comunes. Para que desemboque en un conocimiento es necesario que sea sistematizado gracias a una información teórica y científica.

## CONCLUSIONES

Los programas actuales en la matemática han traído dos cambios importantes: la introducción de nuevos contenidos y una nueva presentación de la asignatura en su conjunto.

La falta de preparación de los docentes en este nuevo enfoque de la matemática, así como la escasez de bibliografía a su alcance contribuyen notoriamente a cometer errores en la conceptualización del tema y aplicación del programa.

El nuevo enfoque del programa tiene la intención de que el niño participe en la construcción de su conocimiento; por lo que resulta indispensable conocer la naturaleza de los conceptos matemáticos, así como el proceso que el niño atraviesa en su construcción.

El espacio es multidimensional y susceptible de ser analizado geoméricamente, por ello la geometría se ha dividido en ramas que se enfocan a estudiarlo a través de ciertas características específicas.

En la educación primaria coexisten cuatro tipos de geometría: topológica, proyectiva, afín y métrica o euclidiana. Podemos definir el tipo de geometría, cuando al aplicar una transformación en un conjunto de objetos,



puntos, líneas, etc., quedan intactas ciertas propiedades a las que denomina invariantes.

En la psicogénesis de los conceptos geométricos se invierte el orden de la sociogénesis de los mismos, el niño inicia descubriendo y asimilando nociones topológicas como son las proximidades, las separaciones, la frontera, etc., posteriormente construye nociones proyectivas como la recta y casi simultáneamente establece puntos de referencia y se inicia en la conservación de ángulos y distancias, las cuales son nociones de geometría euclidiana.

El niño construye una representación del espacio lentamente y cada periodo por el que el niño atraviesa constituye la superación de un tipo de egocentrismo.

La construcción genética del espacio es paralela a la del número, con la única diferencia de que el esquematismo lógico aritmético procede de la acción con elementos discontinuos y el esquematismo espacial trata de operaciones infralógicas que se refieren a la elaboración del o los objetos de diversos órdenes, es decir con elementos continuos.

La ubicación espacial de seres y objetos entre sí, es un contenido geométrico que se desarrolla entre la construcción del espacio proyectivo y del espacio euclidiano.

Hay tres maneras de proyectar el propio esquema corporal a los objetos: por Rotación en torno a un eje vertical, por Simetría o Reflexión y por Traslación.

Ubicarse en el espacio, estableciendo relaciones entre el cuerpo del sujeto con los objetos y posteriormente entre estos últimos, es una necesidad del desarrollo del ser humano que se logra a través de la interacción constante con el espacio que lo circunda.

**BIBLIOGRAFIA**

- 1.- ALEKSANDROV, A, D., Formogorov, A. N., et. al "Visión general de la matemática, en la matemática en la escuela I." Antología, LEPEP85. Ed. UPN-SEP, México 1988 . Pp- 135-172.
- 2.- ALSINA, Catala Claudi. et. al "Invitación a la didáctica de la geometría." ed. Síntesis, España 1987. 14 Pp.
- 3.- BLOCK, David. "Cambios curriculares de la matemática en el nivel básico, enfoque e influencias". MATHEMA ed. DIE, CISVESTAV, IPN. México 1993.
- 4.- DIENES, Z. P. E. W. Golding. "La geometría a través de las transformaciones. Topología, proyectiva y afín". Ed. TEIDE , Barcelona España. 1970. 167 pp.
- 5.- FUENLABRADA, Ima. "Plan y programas actuales, un nuevo enfoque metodológico y cambios curriculares". MATHEMA, Ed. DIE, CINVESTAV, IPN. México 1993.
- 6.- GUINET, Raymond. "La geometría". Revista científica "el gran número", febrero 1977, Num.11 México.
- 7.- HOLLOWAY G. E. T. "Concepción del espacio en el niño según Piaget", ed. Siglo XXI. México. 1987.

- 8.- HOLLOWAY G. E. T. "Concepción de la geometría en el niño según Piaget". ed. Paidós Educador. España 1986.
- 9.- H.FLAVELL, John. "La Psicología evolutiva de Jean Piaget" ed. Paidós, México 1989. 484 pp.
- 10.- LURCAT, Liliane. "El niño y el espacio (la función del cuerpo)" ed. Fondo de Cultura Económica, México 1979. 222pp.
- 11.- MORENO, Montserrat. "El pensamiento matemático en la matemática en la educación primaria, documento del docente" Ed. SEP-CAD. México 1992.pp- 70-72.
- 12.- PEAM (programa emergente de actualización del magisterio) "Guía para el maestro 1er ciclo de educación primaria". ed. SEP, 1972. pp-1-126
- 13.- PIAGET, Jean. "Como un niño forma conceptos matemáticos en la matemática en la educación primaria, documento del docente", ed. SEP.
- 14.- PIAGET , Jean. "introducción a la epistemología genética". Tomo 1. El pensamiento matemático. Ed. Paidós, Psicología evolutiva. México 1987.
- 15.- PIAGET, Jean. "Tratado de lógica y conocimiento científico" "Epistemología de la matemática", ed. Paidós. México 1988. 138-241 pp.

- 16.- SANDOVAL, P. María Antonieta." Clases de conocimientos, formación de estructuras lógicas". ed. FONDO Educativo Interamericano. México 1985. pp. 96-123.
- 17.- SEP. "Planes y programas de estudio de educación primaria". México 1993.
- 18.- VYGOTSKY, "Pensamiento y lenguaje". ed. Pleyade, Buenos Aires 1973.