SECRETARIA DE EDUCACION PUBLICA

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Unidad U.P.N. 098 D.F. Oriente

LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS EN LOS PRIMEROS GRADOS DE LA ESCUELA PRIMARIA, FUNDAMENTADA EN LA PSICOLOGIA GENETICA DE JEAN PIAGET.

TESINA PROFESIONAL

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

LICENCIADO
EN EDUCACION PRIMARIA

PRESENTA:

Emilia Micaela Ríos Pacheco

MEXICO, D.F. 1997

MCM 9/III/6 98

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

UNIDAD UPN 098
D.F. ORIENTE

México, D.F., 11 de septiembre de 1997.

ASUNTO: Autorización para imprimir trabajo para obtención de grado, DICTAMEN

C. PROFRA. **EMILIA MICAELA RIOS PACHECO**
P R E S E N T E

Comunico a usted (s), que después de haber analizado el trabajo que presentaron para obtener su titulación, bajo la modalidad de **TESINA** con el título: La Enseñanaza de las Matemáticas en los primeros grados de la escuela Primaria, fundamentada en la psicología de Jean Piaget.

Se considera terminado y aprobado, por lo tanto puede (n) proceder a su impresión.

"EDUCAR PARA TRANSFORMAR"

PROFRA. LETICIA GUTIERREZ BRAVO
D I R E C T O R A

S. E. P.
UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
UNIDAD UPN 098
D. F. ORIENTE

c.c.p. titulación / exp.

mlma*

A MI DIOS SOBERANO JEHOVA, A
QUIEN AMO CON TODO MI CORA--
ZON, PORQUE TODO LO QUE HE -
LOGRADO, ES GRACIAS A EL.

A MIS INOLVIDABLES PADRES,
QUIENES CON SU EJEMPLO, ME
LEGARON LA MEJOR DE LAS HE
RENCIAS, LA CONSTANTE LU--
CHA POR MI SUPERACION.

A MIS HERMANAS Y HERMANOS,
POR EL APOYO QUE ME BRINDA
RON PARA LOGRAR UNA ESPE--
CIALIDAD MAS EN MI VIDA.

A MIS MAESTRAS Y MAESTROS,
Y A TODAS LAS PERSONAS QUE
ME TENDIERON LA MANO, CUAN
DO MAS LA NECESITABA PARA-
SALIR ADELANTE EN ESTA ES,
PECIALIDAD, INCLUYENDO A -
MI ASESOR.

EL CAMINO FUE LARGO Y DIFICIL
EN EL ENCONTRE BARRERAS QUE NO
FUERON FACILES DE ESCALAR,
PERO CON MI TENACIDAD Y ESFUERZO
LLEGUE AL FINAL, PORQUE,
CUANDO IBAN MAL LAS COSAS,
COMO A VECES SUELEN IR,
DESCANSAR ACASO PUDE,
PERO NUNCA DESISTIR.

LA SUSTENTANTE.

INDICE

P R O L O G O

Tomando en consideración las dificultades evidentes - observadas en la comprensión de los aspectos numéricos y matemáticos en los alumnos de educación primaria a lo largo de mi práctica docente, situación que al mismo tiempo fue y sigue siendo - muy difícil para mi, lo que ha limitado profundamente mi desarrollo profesional, aspiro, a que las generaciones presentes y futuras de mi patria, no sufran tales limitaciones. En mi calidad de promotora del desarrollo y formación de seres humanos íntegros y completos, capaces de desarrollar todas sus potencialidades. aspiro a conocer profundamente los aspectos elementales de los números y sus operaciones, para con ello, ceder a mis alumnos mi - prueba de interés que les permita avanzar con éxito en la vida - hacia un destino más promisorio en aras de su felicidad.

Alguien ha dicho que nadie puede enseñar lo que no ha- comprendido para si mismo, y en más de una ocasión los maestros- aportamos a nuestros alumnos conocimientos memorísticos, mecánicos e irracionales; divorciados de los intereses propios de las- etapas de desarrollo cronológico del ser humano. Es por lo anterior, que me he dado a la tarea de replantear en este trabajo, - el pensamiento de algunos sicólogos que se han preocupado por conocer a fondo las características físicas, psicológicas, intelectuales y emocionales de la vida del ser humano, propiciando con- este conocimiento que todos los educadores que estamos ejerciendo como maestros, hagamos conciencia de que necesitamos prepararnos cada vez mejor, para que impartamos conocimientos verdaderos que vayan en concordancia con las nuevas tecnologías que reclaman en los individuos una preparación de más alto nivel. Es por- ello que los docentes debemos impartir a nuestros alumnos, conocimientos y experiencias congruentes con el grado de desarrollo- en el que se encuentran.

INTRODUCCION A LA TEORIA

Actualmente la sociedad ha comprometido al alumno que asiste a las instituciones de diferentes niveles con el propósito de comprender, descubrir y aprender lo que le interesa.

Con el objeto de fijar con más firmeza,los conocimientos que desea adquirir el alumno, mismos que en consecuencia deben serle de gran utilidad, ya que de cumplir satisfactoriamente con este cometido desarrollará sus habilidades, su sentido de responsabilidad, su intelecto y algo más, adquirirá seguridad en si mismo.

Pero muchas de las veces, los maestros no estamos preparados para comprender a nuestros alumnos, a veces ni siquiera sabemos como enseñarles las matemáticas en la escuela. Estando consciente que dicha enseñanza no se puede realizar sin el conocimiento de las etapas de desarrollo del individuo, he tenido a bien realizar este trabajo, con base en los conocimientos teóricos y racionales del reconocido psicólogo suizo Jean Piaget, cuyos estudios experimentales y bien fundamentados han trascendido el tiempo y el espacio.

Ahora bien: ¿Cómo puede la teoría de Piaget, ayudar al maestro de Educación Primaria en la enseñanza de las matemáticas?. Para contestar esta pregunta es preciso enfatizar los estudios psicológicos de Jean Piaget, que formuló toda una teoría de la evolución y desarrollo de la inteligencia humana a partir de una concepción genética que ya de por sí aspira a conocer y explicar tal desarrollo desde las etapas más simples hasta las más complicadas del ser humano.

Por lo que respecta a la aplicación de la concepción-genética al campo de las matemáticas, a continuación menciono - algunas tesis básicas de la teoría de Piaget:

A).- Toda génesis parte de una estructura "A" y desemboca en -- una estructura "B".

B).- Toda estructura tiene a su vez una génesis.

C).- Siempre existe o debe existir un equilibrio.

Ahora bien se ha dicho hasta aquí que toda génesis -- parte de una estructura y desemboca en otra estructura. Pero recíprocamente, toda estructura tiene una génesis. Las estructu-- ras lógico-matemáticas, no son innatas en el niño: se van cons- truyendo poco a poco. Estructuras tan fundamentales como la de- transitividad, por ejemplo, o la de inclusión (que implica que- una clase total contenga más elementos que la sub-clase encaja- da en ella), de la conmutabilidad de las sumas elementales, etc todas esas verdades que son para nosotros evidencias absoluta-- mente necesarias, se construyen poco a poco en el niño. Esto -- ocurre incluso con las correspondencias bi-unívocas y recípro-- cas, de la conservación de los conjuntos, cuando se modifica la disposición espacial de sus elementos. No hay estructuras inna- tas: toda estructura supone una construcción. Todas esas cons-- trucciones se remontan paso a paso a estructuras anteriores.

En una palabra, génesis y estructura son indisocia--- bles. Son indisociables temporalmente, es decir, que si estamos en presencia de una estructura en el punto de partida, y de ---

otra estructura mas compleja, en el punto de llegada, entre ambas se sitúa necesariamente un proceso de construcción, que es la génesis. No encontramos pues jamás la una sin la otra: pero tampoco se alcanzan ambas en el mismo momento, puesto que la génesis es el paso de un estado anterior a un estado ulterior. -- ¿ Cómo concebir entonces de una manera más íntima esa relación entre estructura y génesis? Aquí es donde podemos volver sobre la hipótesis del equilibrio formulada por Piaget.

Ante todo, ¿A qué llamamos equilibrio en el terreno psicológico?. Para definir el equilibrio se toman tres caracteres:

Primero, el equilibrio se caracteriza por su estabilidad. Pero observamos en seguida que estabilidad no significa inmovilidad. Como es sabido hay en física y en química equilibrios móviles-- caracterizados por transformaciones en sentido contrario, pero que se compensan de forma estable. La noción de movilidad no es pues contradictoria con la noción de estabilidad: el equilibrio puede ser móvil y estable. En el campo de la inteligencia tenemos una gran necesidad de esa noción de equilibrio móvil. Un -- sistema operatorio será, por ejemplo, un sistema de acciones, - una serie de operaciones esencialmente móviles, pero que pueden ser estables en el sentido de que la estructura que las determina no se modificará ya más una vez constituida.

Segundo carácter: todo sistema puede sufrir perturbaciones exteriores que tienden a modificarlo. Diremos que existe equilibrio cuando estas perturbaciones exteriores están compensadas por -- acciones del sujeto, orientadas en el sentido de la compensación. La idea de compensación es fundamental y es la más gene--

ral para definir el equilibrio psicológico.

Tercer carácter, en el cual, el equilibrio no es algo pasivo, - por el contrario, una cosa esencialmente activa. Es precisa una actividad tanto mayor cuanto mayor sea el equilibrio. Es muy difícil conservar un equilibrio desde el punto de vista mental.El equilibrio moral de una persona supone una fuerza de carácter - para resistir a las perturbaciones, para conservar los valores- a los que se está apegado. El equilibrio es sinónimo de actividad. En el caso de la inteligencia es el mismo. Una estructura- estará equilibrada en la medida en que un individuo sea lo suficientemente activo para oponer a todas las perturbaciones com-- pensaciones exteriores. Estas últimas acabarán, por otra parte- siendo anticipadas por el pensamiento. Gracias al juego de las- operaciones, pueden siempre anticiparse las perturbaciones posibles y compensarlas mediante las operaciones inversas o las operaciones recíprocas.

Así definida, la noción de equilibrio parece tener un valor particular suficiente como para permitir la síntesis en-- tre génesis y estructura, y ello justamente en cuanto a la no-- ción de equilibrio engloba a las de compensación y actividad. - Ahora bien,si consideramos una estructura de la inteligencia, - una estructura lógico-matemática cualquiera (una estructura de- lógica pura, de clase, de clasificación, de relación, etc.,o -- una operación proposicional), hallaremos en ella ante todo, claro está, la actividad, ya que se trata de operaciones, pero en- contramos en ellas sobre todo el carácter fundamental de las es tructuras lógico matemáticas que es el de ser reversibles. Una transformación lógica, en efecto, puede siempre ser invertida- por una transformación en sentido contrario, o bien reciproca- da por una transformación recíproca. Pero esta reversibilidad, se ve inmediatamente, está muy cerca de lo llamado hace un momento compensación en el terreno del equilibrio. Sin embargo,- se trata de dos realidades distintas. Cuando nos ocupamos de - un análisis psicológico, se trata siempre para nosotros de conciliar dos sistemas, el de la consciencia y el del comporta--- miento o de la psico-fisiología. En el plano de la consciencia estamos ante unas implicaciones, en el plano del comportamiento o psicofisiología, estamos ante unas series causales. Se diría que la reversibilidad de las operaciones, de las estructuras lógico-matemáticas, constituye lo propio de las estructu-- ras en el plano de la implicación, pero que, para comprender-- cómo la génesis desemboca en esas estructuras, tenemos que recurrir al lenguaje causal. Entonces es cuando aparece la no--- ción de equilibrio en el sentido en el que se ha definido: como un sistema de compensaciones progresivas; cuando estas compensaciones son alcanzadas, es decir, cuando el equilibrio es- obtenido la estructura está constituida en su misma reversibilidad.

La psicología genética de Piaget comprende seis estadios o periodos de desarrollo que marcan la aparición de las - estructuras. El primer estadio trata de los reflejos o monta-- jes hereditarios, nutrición y emociones. El segundo estadio --

aborda los primeros hábitos y percepciones y los primeros sentimientos. El tercer estadio es el de la inteligencia sensoriomotriz o práctica de las regulaciones afectivas, y de las primeras fijaciones. Estos primeros estadios, constituyen el periodo del lactante hasta la edad de un año y medio a dos años. El cuarto estadio, nos habla de la inteligencia intuitiva, lo que ocurre durante la segunda parte de la primera infancia. El quinto estadio comprende las operaciones intelectuales concretas y el sexto aborda las operaciones intelectuales abstractas y la formación de la personalidad.

Infancia de los dos a los siete años. En esta etapa, el niño adquiere gracias al lenguaje, la capacidad de reconstruir sus acciones pasadas en forma de relato y de anticipar sus acciones futuras mediante la representación verbal.

Infancia de los siete a los doce años. En esta etapa, el niño está preparado para la comprensión de las operaciones formales o las operaciones lógico-matemáticas. Para llegar a las operaciones formales, el niño primero tiene que comprender el concepto de número, ya que dichas operaciones se efectúan con números que tienen diferente valor según el lugar en el que estén colocados y que puede ser de unidades, decenas o centenas, etc. También es importante que el alumno conozca el Sistema Decimal de Numeración, el cual tiene como base el número diez, comprendido con los números : 1,2,3,4,5,6,7,8,9 e incluyendo el "0" .

De los números, el niño pasa a realizar las operaciones fundamentales: la suma y la resta. Para que el alumno com--

prenda mejor el proceso matemático resolviendo pequeños problemas, se le hace notar la correspondencia uno a uno, posteriormente formará conjuntos con fichas, palitos, piedritas,etc.,-- haciendo uso del material que esté a su alcance, cuando forme- conjuntos se le introducirá a los conceptos de decena y centena que se estudian en los primeros y segundos grados. Es recomendable enseñar las matemáticas mediante juegos (el cajero,-- guerra de cartas, la pulga y las trampas,etc.). Para que el -- alumno reafirme los conceptos de unidad, decena y centena se-- recomienda la representación en un tablero que consiste en un- rectángulo de cartón dividido en tres columnas, cada una de -- las cuales, se numera de arriba hacia abajo del uno al nueve,- correspondiendo cada columna a centenas, decenas y unidades.En dicho tablero se representan mediante tachuelas las cantidades que el maestro dicta y que después verifica.

Como desde el primer grado de primaria se inicia el- conocimiento de la geometría, se sugiere que el alumno se in-- troduzca en el conocimiento de las formas geométricas a partir de la relación de éstas, con las formas que existen en su en-- torno como el pizarrón, el lápiz, el borrador, los vidrios, -- los botes de basura, el escritorio, la mochila, etc. Posteriormente se pasa a la construcción de figuras geométricas utili-- zando y comprendiendo la terminología emanada de ellas (lados, vértices, caras, alturas, bases, etc.). El alumno puede clasificar los cuerpos y figuras geométricas mediante el color,la-- forma o el tamaño. Para la reproducción de las figuras geomé--

tricas es recomendable que los alumnos utilicen hojas cuadriculadas, auxiliándose de su juego de geometría.

El lector de este ensayo podrá profundizar aún más en la teoría de Piaget, nuestro esfuerzo consistió en tratar de analizar la teoría para llevarla a una relación práctica, para comprender y proponer situaciones en las que el alumno ponga su parte en comprender y construir su propio conocimiento.

No es un trabajo acabado, sino que invitamos al lector para que reflexione en torno a lo que hemos rescatado y analizado, pero que de acuerdo a su interés y necesidad, ponga su parte.

LA AUTORA

CAPITULO I

ETAPAS DE DESARROLLO

ETAPAS DEL DESARROLLO.

Desde el punto de vista funcional, es decir, considerando los móviles generales de la conducta y del pensamiento, existen mecanismos constantes, comunes a todas las edades: a todos los niveles, la acción supone siempre un interés que la desencadena, ya se trate de una necesidad fisiológica, afectiva o intelectual (la necesidad se presenta[1] en este último caso en forma de una pregunta o de un problema); a todos los niveles, la inteligencia trata de comprender o de explicar etc. Ahora si bien es cierto[2] que las funciones del interés, de la explicación, etc.,son como acabamos de ver, comunes a todos los estudios, es decir, "invariantes" a título de funciones, no es menos cierto que "los intereses"[3] (por oposición a "el interés") varían considerablemente de un nivel a otro, y que las explicaciones particulares (por[4] oposición a la función de explicar) revisten formas muy diferentes según el grado de desarrollo intelectual. A lado de las funciones constantes, hay que distinguir pues, las estructuras progresivas, o formas sucesivas de equilibrio, el que marca las diferencias u oposiciones de un nivel a otro de la conducta, desde los comportamientos elementales del recién nacido hasta la adolescencia.

Las estructuras variables serán pues, las formas de organización de la actividad mental, bajo su doble aspecto mo-

(1,2,3,4) Jean PIAGET, "Seis estudios de Psicologia", Nuria Petit, Abril 1996, Editorial Ariel, México D.F. P. 13.

tor o intelectual, por una parte, y afectivo por otra, así como según sus dos dimensiones individual y social (interindividual).[5] Para mayor claridad vamos a distinguir seis estadios o periodos de desarrollo, que marcan la aparición de estas estructuras: 1o. El estadio de los reflejos o montajes hereditarios, así como de las primeras tendencias instintivas (nutrición)[6] y de las primeras emociones. 2o. El estadio de los primeros hábitos motores y de las primeras percepciones organizadas así como de los primeros sentimientos diferenciados. 3o. El estadio de la inteligencia sensorio-motriz o práctica[7] (anterior al lenguaje), de las regulaciones afectivas elementales y de las primeras fijaciones exteriores de la afectividad. Estos primeros estadios constituyen el periodo del lactante (hasta [8] aproximadamente año y medio a dos años, es decir, antes de los desarrollos del lenguaje y del pensamiento propiamente dicho). 4o. El estadio de la inteligencia intuitiva, de los sentimientos interindividuales espontáneos y de las relaciones sociales de sumisión al adulto[9] (de los dos años a los siete, o sea durante la segunda parte de la primera infancia). 5o. El estadio de las operaciones intelectuales concretas[10] (aparición de la lógica), y de los sentimientos morales y sociales de cooperación (de los siete años a los once o doce). 6o. El estadio de las[11] -

(5,6,7,8,9,10,11) Jean Piaget. "Seis Estudios de Psicología",- Nuria Petit, Abril 1996, Editorial Ariel, México D.F. P. P 14 y 15.

operaciones intelectuales abstractas, de la formación de la personalidad y de la inserción afectiva e intelectual en la sociedad de los adultos (adolescencia).

I. EL RECIEN NACIDO Y EL LACTANTE.

El periodo que va del nacimiento a la adquisicion del lenguaje está marcado por un desarrollo mental extraordinario.- Se ignora a veces su importancia, ya que no va acompañado de palabras que permitan seguir paso a paso el progreso de la inteligencia y de los sentimientos, como ocurrirá más tarde. No por - ello es menos decisivo para toda la evolución psíquica ulterior consiste nada menos que en una conquista, a través de las percepciones y los movimientos, de todo el universo práctico que rodea al niño pequeño. Ahora bien, esta "asimilación sensorio-motriz" del mundo exterior inmediato sufre en dieciocho meses o dos años, toda una revolución en pequeña escala: mientras que - al comienzo de este desarrollo el recién nacido lo refiere todo a si mismo o, más concretamente, a su propio cuerpo al final, - es decir, cuando se inicia el lenguaje y, el pensamiento, se sitúa ya prácticamente como un elemento o un cuerpo entre los demás, en un universo que ha construido poco a poco y que ahora - siente ya como algo exterior a él.

II. LA INFANCIA DE LOS DOS A LOS SIETE AÑOS.

Con la aparición del lenguaje las conductas resultanprofundamente modificadas, tanto en su aspecto afectivo como- en su aspecto intelectual. Además de todas las acciones rea-- les o materiales que sigue siendo capaz de realizar como du-- rante el periodo anterior, el niño adquiere gracias al lengua je, la capacidad de reconstruir sus acciones pasadas en forma de relato y de anticipar sus acciones futuras mediante la re- presentación verbal. Ello tiene tres consecuencias esenciales para el desarrollo mental: un intercambio posible entre indi- viduos, es decir, el inicio de la socialización de la acción; una interiorización de la palabra, es decir, la aparición del pensamiento propiamente dicho, que tiene como soportes el len guaje interior y el sistema de los signos; y, por último y so bre todo, una interiorización de la acción como tal, la cual- de puramente perceptiva y motriz que era hasta este momento,- puede ahora reconstruirse en el plano intuitivo de las imáge- nes y de las "experiencias mentales".(12) Partamos de un ejemplo- concreto: Presentemos a los sujetos seis u ocho fichas azules alineadas con pequeños intervalos de separación, y pidámosles que encuentren otras tantas fichas rojas en un montón que pon dremos a su disposición. Entre cuatro y cinco años por térmi- no medio los pequeños construirán una hilera de fichas rojas- exactamente de la misma longitud que la de las fichas azules, pero sin ocuparse del número de elementos, ni hacer correspon

(12) Jean Piaget. "Seis Estudios de Psicologia", Nuria Petit, Abril 1996, Editorial Ariel, México D.F. P. 32

der una por una, las fichas rojas y las azules.

Tenemos aquí una forma primitiva de intuición que - consiste en valorar la cantidad sólo por el espacio ocupado,- es decir por las cualidades perspectivas globales de la colección tomada como modelo, sin preocuparse del análisis de las- relaciones.

Entre los cinco y seis años, en cambio, se observa- una reacción mucho más interesante: el niño pone una ficha roja delante de cada ficha azul y concluye de esa correspondencia término a término la igualdad de ambas colecciones.

Pero bastará separar un poco las fichas de los ex-- tremos de la hilera de las rojas, de tal manera que no estén- ya exactamente delante de las fichas azules sino ligeramente- a un lado, para que entonces el niño, que sin embargo, ha visto perfectamente que no hemos quitado ni añadido nada, estime que las dos colecciones ya no son iguales y afirme que la hilera más larga contiene "más fichas". (13) Si amontonamos sencillamente una de las dos hileras sin tocar la otra, la equivalencia de ambas colecciones se pierde aún más. En resumen, hay - equivalencia mientras hay correspondencia visual u óptica, pero la igualdad no se conserva por correspondencia lógica: no- hay pues aquí operación racional alguna, sino simple intui--- ción. Esta intuición es articulada y no ya global, pero sigue siendo intuición, es decir, que está sometida a la primacía - de la percepción.

(13) S.E.P. 1983 U.P.N., "Contenidos de Aprendizaje", Edito-- rial Imprecolor S. A. P. 35

III. LA INFANCIA DE SIETE A DOCE AÑOS.

Las operaciones racionales.

A la intuición,que es la forma superior de equili--brio que alcanza el pensamiento propio de la primera infancia corresponden en el pensamiento ulterior a los siete años, las operaciones. De ahí que el núcleo operatorio de la inteligen-cia merezca un examen detallado que habrá de darnos la clave de una parte esencial del desarrollo mental.

Conviene señalar ante todo que la noción de opera--ción se aplica a realidades muy diversas, aunque perfectamen-te definidas. Hay operaciones lógicas, como las que entran en la composición de un sistema de conceptos o clases [14] (reunión - de individuos) o de relaciones, operaciones aritméticas [15] (suma multiplicación, etc., y sus contrarias), operaciones geométri cas [16] (secciones, desplazamientos, etc.), temporales [17] (seriación de los acontecimientos, y por lo tanto, de su sucesión y enca jamiento de los intervalos),mecánicas, físicas,etc.

Una operación es, pues, en primer lugar, psicológi-camente, una acción cualquiera [18] (reunir individuos o unidades numéricas, desplazar, etc.), cuya fuente es siempre motriz,- perceptiva o intuitiva. Dichas acciones que se hallan en el- punto de partida de las operaciones tienen pues, a su vez co mo raices, esquemas sensorio-motores, experiencias efectivas [19]

(14,15,16,17,18) Jean Piaget, "Seis Estudios de Psicología), Nuria Petit, Abril de 1996, Editorial Ariel,México. P.76

o mentales (intuitivas)[19] y constituyen, antes de ser operatorias la propia materia de la inteligencia sensorio-motriz y, mas tarde de la intuición, ¿cómo explicar por tanto, el paso de las intuiciones a las operaciones?. Las primeras se transforman en las segundas, a partir del momento en que constituyen sistemas de conjunto a la vez componibles y reversibles.

En otras palabras, y de una manera general, las acciones se hacen operatorias desde el momento en que dos acciones del mismo tipo pueden componer una tercera acción que pertenezca todavía al mismo tipo y estas diversas acciones pueden invertirse o ser vueltas del revés: así es como la acción de reunir[20] (suma lógica o suma aritmética) es una operación, porque varias reuniones sucesivas equivalen a una sola reunión[21] (composición de sumas) y las reuniones pueden ser invertidas y transformadas así en disociaciones (sustracciones)[22].

Pero es curioso observar que, hacia los siete años se constituyen precisamente toda una serie de sistemas de conjuntos que transforman las intuiciones en operaciones de toda clase, y esto es lo que explica las transformaciones del pensamiento más arriba analizadas.

Y sobre todo, es curioso ver como estos sistemas se forman a través de una especie de organización total y a menudo muy rápida dado que no existe ninguna operación aislada, sino que siempre es constituida en función de la totalidad -

(19,20,21,22) Jean Piaget, "Seis Estudios de Psicología" Nuria Petit, Abril 1996, Editorial Ariel, México D.F. P. 77

de las operaciones del mismo tipo. Por ejemplo, un concepto o una clase lógica (reunión de individuos) (23) no se construye aisladamente, sino necesariamente dentro de una clasificación de conjunto de la que representa una parte. Una relación lógica de familia (24) (hermano, tío, etc.) no puede ser comprendida si no es en función de un conjunto de relaciones análogas cuya totalidad constituye un sistema de parentescos.

Los números no aparecen independientemente unos de otros (25) (3,10,2,5, etc.) sino que son comprendidos únicamente como elementos de una sucesión ordenada: 1,2,3,... etc., los valores no existen más que en función de un sistema total, o (26) "escala de valores", una relación asistemática, como por ejemplo: $B < C$ no es inteligible más que si la relacionamos con una seriación de conjunto posible: $0 < A < B < C < D$...etc.

Ahora bien, y esto es más curioso todavía, los sistemas de conjunto no se forman en el pensamiento del niño sino es en conexión con una reversibilidad precisa de estas operaciones, y de esta forma adquieren inmediatamente una estructura definida y acabada.

Podemos preguntarnos, por último, como se construyen el número en si mismo y las operaciones propiamente aritméticas. Sabemos que durante la primera infancia sólo los primeros números son accesibles al sujeto porque son números intuitivos que corresponden a figuras perceptibles. La serie in

(23,24,25,26) Jean Piaget: "Seis Estudios de Psicologia", Nuria Petit, Editorial Ariel, México D.F. P. 77

definida de los números y, sobre todo, las operaciones de suma y su inversa la resta, y de multiplicación con su inversa la división, no son en cambio, accesibles por término medio hasta después de los siete años. El motivo de ello es sencillo: el número es, en realidad, un compuesto de algunas de las operaciones antedichas y supone, por consiguiente, su construcción previa. Un número es, en efecto, una colección de unidades iguales entre si, y, por lo tanto, una clase cuyas subclases se hacen equivalentes mediante la supresión de las cualidades; pero es al mismo tiempo una sucesión ordenada y por ende, una seriación de las relaciones de orden. Su doble naturaleza de cardinal y de ordinal resulta de una fusión de los sistemas de encajamiento y de seriación lógicos y esto es lo que explica que aparezca al mismo tiempo que las operaciones cualitativas. Se comprende ahora por qué las correspondencias término a término que hemos analizado más arriba son intuitivas durante toda la primera infancia: no se convierten en operatorias, y, por consiguiente, en susceptibles de constituir operaciones numéricas, hasta el momento en que el niño es capaz de manejar simultáneamente las operaciones de seriación de las fichas y de encajamiento de las partes en los todos: sólo entonces la correspondencia supone la equivalencia duradera de las colecciones correspondientes y engendra, precisamente por ello, los números.

Una conclusión general se impone: el pensamiento del niño se convierte en lógico unicamente por la organización de sistemas de operaciones que obedecen a leyes de conjunto comunes:

1o. Composición: Dos operaciones de un conjunto pueden componerse entre si y su resultado ser una operación perteneciente a ese mismo conjunto. Ejemplo: $+1+1=+2$.

2o. Reversibilidad: Toda operación puede ser invertida. Ejemplo: $+1$ se invierte en -1 .

3o. La operación directa y su inversa tienen como resultado una operación nula o idéntica. Ejemplo: $+1-1=0$.

4o. Las operaciones pueden asociarse entre sí de todas las maneras. Esta estructura general, que los matemáticos llaman grupos, caracteriza a todos los sistemas de operaciones que antes hemos descrito, con la salvedad de que, en los terrenos lógicos o cualitativos, las condiciones **3a. y 4a.** presentan ciertas particularidades debidas a que una clase o relación añadida a si misma no se modifica; puede hablarse entonces de agrupamiento, noción más elemental y más general aun que la de grupo.

Hay que admitir, pues, que el paso de la intuición a la lógica o a las operaciones matématicas se efectúa durante la segunda infancia por la construcción de agrupamientos y grupos, es decir que las nociones y relaciones no pueden construirse aisladamente, sino que son organizaciones de conjunto en las cuales todos los elementos son solidarios y se equilibran entre si. Esta estructura propia de la asimilación mental de orden operatorio asegura al espíritu un equilibrio muy supe rior al de la asimilación intuitiva o egocéntrica, ya que la reversibilidad adquirida traduce un equilibrio permanente entre la asimilación de las cosas por el espíritu y la acomodación del espíritu a las cosas. De ahí que cuando se libera - de su punto de vista inmediato para agrupar las relaciones,- el espíritu alcanza un estado de coherencia y de no contra-- dicción paralela a lo que, en el plano social, representa la cooperación, que subordina el yo a las leyes de la reciprocidad.

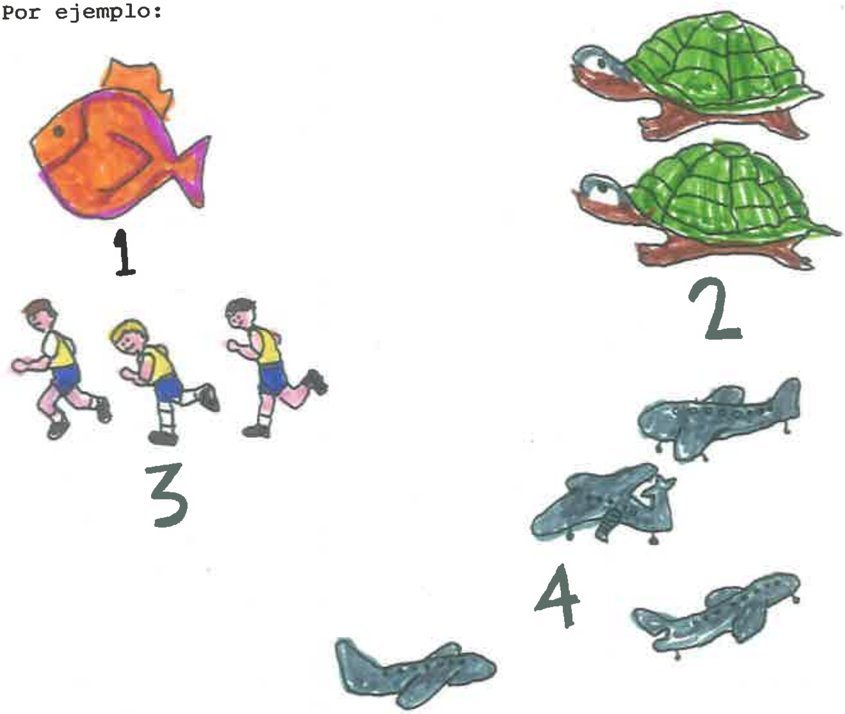
CAPITULO II

CONCEPTO DE NUMERO

CONCEPTO DE NUMERO.

El concepto de número a lo largo de la historia de la humanidad, ha tenido diversos significados, sin embargo, un enfoque reciente de tal concepto afirma que: un número es el resultado de la síntesis de la operación de clasificación y de la operación de seriación: un número es la clase formada por todos los conjuntos que tienen la misma propiedad numérica y que ocupa un rango en una serie, serie considerada a partir también de la propiedad numérica.

Por ejemplo:



Es importante comprender estos procesos ya que a través de ellos, los niños construyen el concepto de número y ello nos garantiza que las decisiones didácticas que adoptamos en el campo de las matemáticas, responde a las necesidades y características psicológicas del niño.

Ahora bien, tomando en consideración el concepto de número ya señalado, es preciso comprender los conceptos de clasificación y seriación en él incluidos.

CLASIFICACION.

Es una operación lógica fundamental en el desarrollo del pensamiento cuya importancia no se reduce a su relación con el concepto de número, por lo tanto la clasificación interviene en la construcción de todos los conceptos que constituyen nuestra estructura intelectual.

En términos generales se puede decir que clasificación es juntar por semejanzas y separar por diferencias.

EJEMPLO:

Cuando digo "estas flores megustan" (27) ¿estoy clasificando?, pues claro, estoy "juntando" (28) las flores, que por presentar ciertas cualidades tienen la propiedad común de "que me gustan" (29) y las "separo" (30) de todas las flores que "no me gustan".

Si pensamos en los paises del hemisferio norte ¿clasificamos? Si, estamos "juntando" (31) los paises cuya seme--

(27,28,29,30,31) U.P.N. "Contenidos de Aprendizaje", S.E.P., Agosto 1983, Editorial Imprecolor S.A. México D.F. P. 3.

mejanza es estar ubicados en el hemisferio norte de la tierra y los separamos de los paises que son diferntes, es decir que no tienen esa propiedad común, no están ubicados en el hemisferio norte.

En ambas situaciones estamos clasificando a partir de un universo que en el primer caso es "las flores"(32) y en el segudo "los paises"(33), pero a su vez la sola selección del universo implica un acto clasificatorio ya que al decir: las flores, estamos juntando éstas y separándolas de las "no flores"(34) y al decir: los paises, los juntamos entre si y los separamos de los "no paises"(35).

Hay que aclarar que cuando decimos "juntar"(36) o "separar"(37) nos referimos a acciones que generalmente no se realizan en forma efectiva o visible, no juntamos o separamos concretamente esos elementos, lo hacemos pensándolo, es decir, en forma interiorizada, no tomamos las flores del mundo y las juntamos, ni lo hacemos con otros elementos, son acciones interiorizadas, no efectivas sobre los objetos de la realidad.

Ahora bien, un mismo universo puede clasificarse de diferentes maneras, cada una dependerá del criterio de clasificación que elijamos. Veámoslo a través de un nuevo ejemplo- Graciela y Roberto han acomodado sus libros de la siguiente-- manera:

(32,33,34,35,36,37) U.P.N. "Contenidos de Aprendizaje", S.E.P. Agosto 1983, Editorial Imprecolor S.A. México D.F. P.P.3,4.

CRITERIOS CLASIFICATORIOS | **CONTENIDO** | **NACIONALIDAD DE LOS AUTORES** | **EPOCA HISTORICA DE LOS AUTORES**

GRACIELA

LIBROS
- LITERARIOS
  - NACIONALES
    - CONTEMPORANEOS
    - NO CONTEMPORANEOS
  - EXTRANJEROS
    - CONTEMPORANEOS
    - NO CONTEMPORANEOS
- CIENTIFICOS
  - NACIONALES
    - CONTEMPORANEOS
    - NO CONTEMPORANEOS
  - EXTRANJEROS
    - CONTEMPORANEOS
    - NO CONTEMPORANEOS
- ARTISTICOS
  - NACIONALES
    - CONTEMPORANEOS
    - NO CONTEMPORANEOS
  - EXTRANJEROS
    - CONTEMPORANEOS
    - NO CONTEMPORANEOS

CRITERIOS CLASIFICATORIOS | **PUBLICO AL QUE SE DIRIGE** | **PRESENTACION** | **TAMAÑO**

ROBERTO

LIBROS
- ADULTOS
  - RUSTICA
    - GRANDE
    - PEQUEÑO
  - DE LUJO
    - GRANDE
    - PEQUEÑO
- NIÑOS
  - RUSTICA
    - GRANDE
    - PEQUEÑO
  - DE LUJO
    - GRANDE
    - PEQUEÑO

En la clasificación se toman en cuenta además de las semejanzas y diferencias, otras dos clases de relaciones: la -pertenencia y la inclusión.

LA PERTENENCIA.

Es la relación que se establece entre cada elemento-la clase de la que forma parte. Está fundada en la semejanza y ya que decimos que un elemento pertenece a una clase, cuando -se parece a los otros elementos de esa misma clase, en función del criterio de clasificación, que estamos tomando en cuenta.

LA INCLUSION.

Es la relación que se establece entre cada subclase-y la clase de la que forma parte, de tal modo que nos permite-determinar que la clase es mayor, es decir, tiene mas elemen--tos que la subclase.

Regresemos al ejemplo de los libros. Graciela formó-tres clases de libros: literarios, científicos y artísticos.--Dentro de cada clase, formó dos subclases: Nacionales y extranjeros. ¿De cuáles libros tiene Graciela mayor cantidad, qué --hay más, libros científicos o libros científicos nacionales?Si sabemos que la subclase de, libros científicos nacionales, está incluida en la clase de, libros científicos, podemos dedu--cir que hay mas libros científicos que libros científicos na--cionales aunque no sepamos cuántos libros hay.

Hasta ahora hemos hablado de la clasificación en general, comencemos a establecer la relación entre ésta y el concepto de número.

Una de las características de los ejemplos de clasificación que hemos manejado es que en todos ellos la clasificación se fundamenta en las cualidades de los objetos, es decir, en sus propiedades cualitativas. En el caso de los niños ser retraidos o ser desenvueltos son cualidades de los mismos en cambio cuando nos referimos a los números la situación varía.

Cuando nosotros, adultos, pensamos en un número por ejemplo el siete ¿qué estamos haciendo? ¿pensamos en siete objetos? ¿o en siete elementos concretos? ¿en siete elementos iguales? Pueden ser siete peras, siete aviones, siete ideas, siete individuos, siete útiles recreativos, siete herramientas de carpintería, es decir siete "cualquier cosa", (38) incluso site cosas que pueden ser diferentes entre sí (39) (una rosa, una butaca, una pluma , un diccionario, un gato, un pájaro, un lápiz). Cuando pensamos en un número, tambien estamos clasificando, ya que estamos estableciendo semejanzas y diferencias. Estamos agrupando -en el caso de nuestro ejemplo- todos los conjuntos posibles de siete elementos y los estamos separando de todos los conjuntos que no tienen siete elementos. Es decir que en el caso del número, no buscamos ya semejanzas entre elementos, sino semejanzas entre conjuntos.

Agrupamos los conjuntos que se parecen (o que son (40) -

(38,39,40) U.P.N. "Contenidos de Aprendizaje", S.E.P., Agosto-1983, Editorial Imprecolor S.A. México D.F. P. 37

equivalentes) en su propiedad numérica, y es por eso que ya no importa que existan o no, parecidos cualitativos entre -- los elementos que constituyen los conjuntos. Lo que importa- es la equivalencia numérica que se establece entre los con-- juntos que constituyen la clase en la que estamos pensando,- en este caso, la clase formada por todos los conjuntos (41) (infinitos), conjuntos que tienen siete elementos.

Para seguir con nuestro ejemplo, si llamamos "siete" (42) a la clase de conjuntos que tienen siete elementos, pertenecerá a ella, cualquier conjunto que tenga la misma cantidad de elementos, es decir, que pueda ser puesto en correspondencia término a término con cualquier otro conjunto de - la misma clase -en tanto que no pertenecerán a ella los conjuntos que no tengan esa cantidad de elementos.

Apuntemos finalmente, que la relación de inclusión característica de la clasificación juega también un importante papel en el concepto de número. En efecto, las clases --- "tres" (43), "seis" (44), etc. que podemos formar estableciendo relaciones de semejanza cuantitativa entre conjuntos, no son clases aisladas, sino que constituyen una jerarquía, en la que cada clase incluye a las que son inferiores y está incluida en todas las superiores. De ese modo la clase "siete" (45), incluye a- "seis" (46), a "cinco" (47), a "cuatro" (48), a "tres" (49), etc. y está incluida a su vez en las clases "ocho" (50) y "nueve" (51).

(41,42,43,44,45,46,47,48,49,50,51) U.P.N. "Contenidos de A-- prendizaje", S.E.P., Agosto 1983, Editorial Imprecolor S.A., México D.F. P. P. 7 y 8.

SERIACION.

Al igual que la clasificación la seriación es una - operación que -además de intervenir en la formación del con-- cepto de número- constituye uno de los aspectos fundamentales del pensamiento lógico.

Seriar es establecer relaciones entre elementos que son diferentes en algún aspecto y ordenar esas diferencias.

¿Cuáles son los elementos que seriamos? Podemos se- riar por ejemplo:

- -Sonidos que son diferentes en cuanto a su timbre, ordenándo- los del más agudo al más grave.
- -Vehículos cuya fecha de producción es diferente, ordenándo-- los del más antigüo al más moderno.
- -Billetes de valor diferente, ordenándolos desde el que vale- menos hasta el que vale más.

Tanto en estos casos como en todos los que imagine- mos, la seriación se podrá efectuar en dos sentidos: crecien- te y decreciente.

Destaquemos finalmente que la seriación operatoria- tiene dos propiedades fundamentales: transitividad y recipro- cidad.

Transitividad.

Al establecer una relación entre un elemento de una serie y el siguiente y de éste con el posterior, podemos dedu cir cual es la relación que hay entre el primero y el último. Tomemos como ejemplo el siguiente: Sabemos que Benín es más -

grande que Burundi y también sabemos que Burundi, es más gran de que Gambia, ¿qué pais tiene una superficie mayor, Gambia o Benín?. Es evidente que se puede deducir la relación de tamaño existente entre Gambia y Benín aun sin conocer sus respectivas superficies, a partir de las relaciones previamente establecidas.

Reciprocidad.

Cada elemento de una serie tiene una relación tal - con el elemento inmediato que al invertir el orden de la comparación, dicha relación también se invierte.

Si comparamos el carro **B** con el carro **C**, la relación es B mas antiguo que C, y si comparamos C con B la relación se invierte, es decir C es menos antiguo que B.

B

C

En ambos casos estamos afirmando lo mismo. La forma en que lo hacemos depende de la dirección en que estemos recorriendo la serie, pero se trata de dos formas equivalentes de referirse a la misma relación.

CONSTRUCCION DEL CONCEPTO DE NUMERO EN EL NIÑO

Partiendo de que las operaciones de clasificación y de seriación están involucradas en el concepto de número y se fusionan a través de la operación de correspondencia, que a su vez permite la construcción de la conservación de la cantidad, veremos a continuación la manera en que el niño construye dichas operaciones. Para ello es importante tomar en cuenta lo siguiente:

a).-Los procesos de construcción de las tres operaciones son simultáneos, esto significa que el niño no las construye en forma sucesiva sino al mismo tiempo.

b).-El niño atraviesa por etapas o estadios en el proceso de construcción de cada una de estas operaciones.

c).-Cuando un niño se encuentra en determinado estadio de una de las operaciones no necesariamente está en el mismo estadio respecto a las otras dos operaciones. Por ejemplo, puede estar finalizando el primer estadio de la clasificación y al mismo tiempo estar en el segundo estadio de la seriación.

d).-La secuencia de los estadios o etapas es la misma en todos los niños, es decir que si bien las edades pueden variar, el órden de los estadios se conserva. En cada una de las tres operaciones los niños pasan por el primero y el segundo estadio antes de llegar al estadio operatorio o tercer estadio.

e).-Aun cuando podemos relacionar los estadios con determinadas edades cronológicas, éstas son sólo aproximadas ya -- que varían de una comunidad a otra e incluso de un niño a otro, dependiendo de las experiencias que cada uno tenga.

PSICOGENESIS DE LA CLASIFICACION.

El proceso de construccion de la clasificación atraviesa por tres estadios:

Primer estadio: Hasta los 5-6 años aproximadamente.

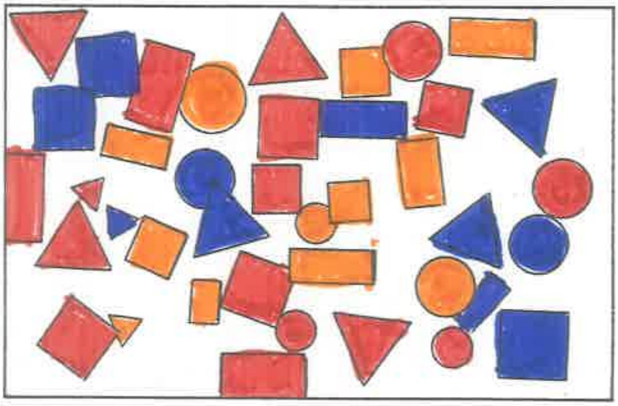
Segundo estadio: Desde los 5-6 años hasta los 7-8 años aproximadamente.

Tercer estadio: (operatorio)(53): A partir de los 7-8 años aproximadamente.

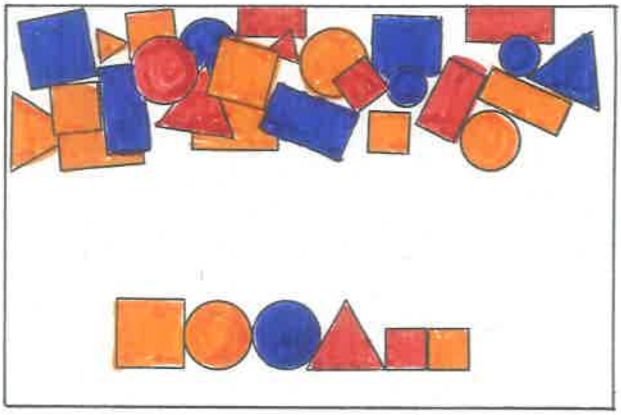
Cada uno de los estadios de esta operación lógica - lo analizaremos a través de ejemplos de clasificaciones hechas por los niños, tomando como universo a clasificar los -- bloques lógicos. Este material diseñado por Z. P. Dienes, consiste en cuarenta y ocho figuras geométricas que tienen las - siguientes variables: color (rojo, amarillo y azul)(54), forma -- (cuadrangular, circular, triangular y rectangular)(55), tamaño -- (grande y pequeño)(56) y grosor (grueso y delgado)(57)

(53,54,55,56,57) U. P. N. "Contenidos de Aprendizaje", S.E.P. Agosto 1983, Editorial Imprecolor S. A., México D. F.- P. P. 22 y 23.

MATERIAL PROPUESTO POR Z.P. DIENES



CARACTERISTICAS DEL PRIMER ESTADIO DE LA CLASIFICACION



Aquí el niño clasificó por color, forma y tamaño.

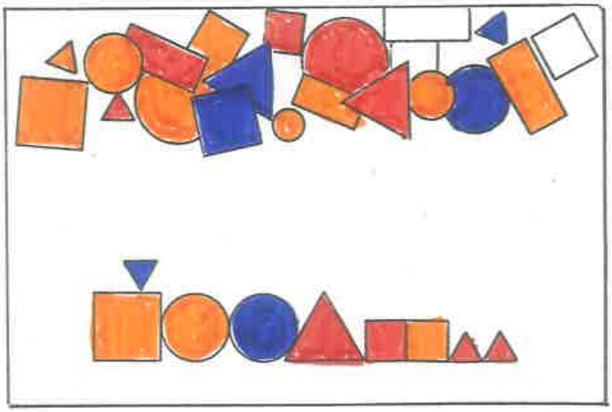
Al proponerle al niño de este estadio que clasifique (58) ("Pon junto lo que va junto"), durante esta etapa lo hace sobre la marcha: toma un elemento cualquiera, luego otro que se parezca en algo al anterior, después un tercero que tenga alguna semejanza con el segundo y así continua seleccionando cada elemento por alguna característica que tenga en común con el último que ha colocado. De manera tal que alterna el criterio clasificatorio de un elemento a otro, por ejemplo: el segundo elemento se parece en el color al primero, el tercero se parece en la forma al segundo, el cuarto elemento se parece en el tamaño al tercero, etc.

El niño obtiene como resultado de su actividad clasificatoria un objeto total al colocar cada elemento junto al anterior logrando una continuidad espacial en la ubicación de los elementos, porque al estar centrado en la búsqueda de semejanzas, no los separa. Por constituir los elementos clasificados por el niño una figura, un todo, a este estadio de la clasificación se le denomina "colección figural" (59). ¿Qué es necesario tomar en cuenta para separar los elementos? Hay que considerar las diferencias y es lo que aun no toma en cuenta el niño de este estadio cuando esta clasificando.

Hay ocasiones en las cuales el niño le da un signi

(58,59) U.P.N. "Contenidos de Aprendizaje", S,E.P., Agosto 1983, Editorial Imprecolor S.A., México, D.F. P. 23

ficado simbólico a lo que está haciendo y dice, por ejemplo,-
(60) (61)
"éste es un tren" y añade la chimenea a la "locomotora".



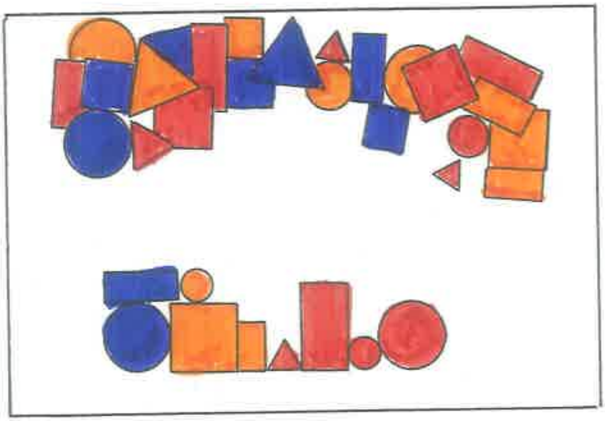
Esta situación no quiere decir que el niño desde un principio se haya propuesto construir un tren sino que al contemplar la clasificación que está haciendo le encuentra parecido con algún objeto de la realidad y, dejando de lado la -- actividad clasificatoria, completa la figura. Hay que diferenciar la clasificación de las situaciones en las que el niño - se propone representar algo, puesto que cuando el niño juega- a construir una casa, un tren, etc., porque así se lo ha propuesto, no está clasificando. No cualquier figura es una co-- lección figural, la colección figural resulta de una conducta clasificatoria, que consiste en establecer semejanzas. Si lo-

(60,61) U.P.N. "Contenidos de Aprendizaje", S.E.P., Agosto de 1983, Editorial IMPRECOLOR S.A., México D.F. P. 23.

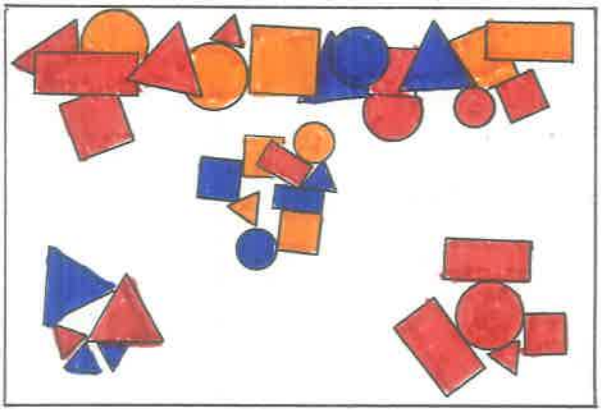
que el niño ha hecho es una representación, no es posible evaluar a partir de ella el nivel clasificatorio. De allí la necesidad de observar el proceso de la actividad y no sólo el resultado, ya que éste puede ser el mismo en ambos casos, por ejemplo un trenecito.

El niño en esta etapa deja muchos elementos del universo sin clasificar dando por terminada la actividad sin haber tomado en cuenta todos los elementos que se le ofrecieron porque ve un objeto total que se le ha formado y considera la pertenencia de cada elemento a la colección en función de la proximidad espacial: un elemento pertenece a la colección si está muy cerca de los otros elementos que la forman.

Al finalizar este estadio el niño logra reacomodar los elementos de su clasificación formando subgrupos, pero aún no los separa.



CARACTERISTICAS DEL SEGUNDO ESTADIO DE LA CLASIFICACION



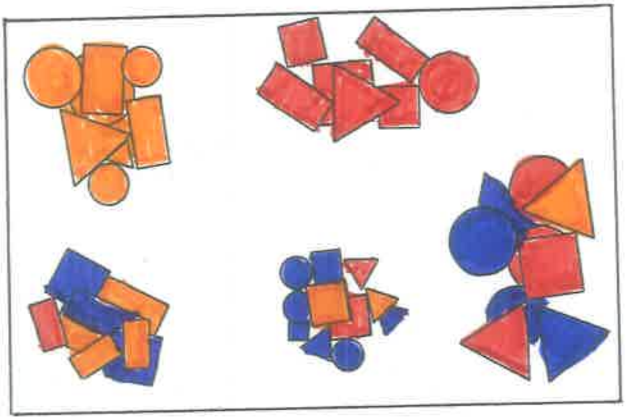
Dentro de este estadio se da una evolución importante que permite pasar de la colección figural a la clase lógica.

El logro inicial del niño en relación al estadio anterior es que comienza a tomar en cuenta las diferencias entre los elementos, por lo tanto forma varias colecciones separadas. El resultado no es todavía una clase lógica pero, a diferencia del anterior, no queda constituido un objeto total, una figura, sino pequeños grupitos, por lo que a este estadio se le denomina "colección no figural".(62)

(62) U.P.N. "Contenidos de Aprendizaje", S.E.P., Agosto 1983 Editorial Imprecolor, S.A., México D.F. P. 25.

¿Por qué son pequeños los grupitos que forman? Por que el niño busca que las semejanzas sean máximas, es decir que los elementos que agrupa se parezcan lo más posible.

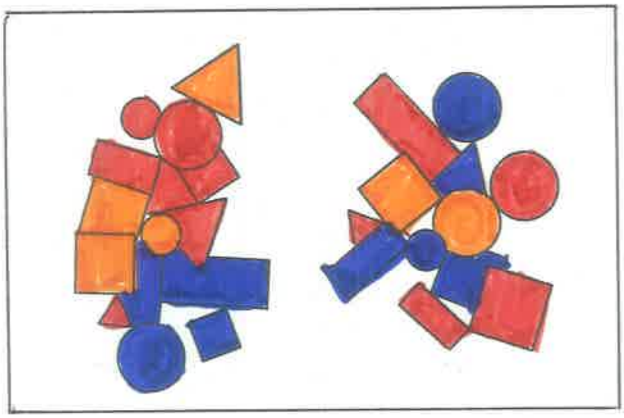
Los criterios clasificatorios los establece a medi da que clasifica, de tal modo que suele alternarlos pero ya no de elemento a elemento como hacia en el estadio anterior, sino de conjunto a conjunto. Por ejemplo, los elementos de un conjunto se parecen por ser rojos, los elementos de otro conjunto se parecen por ser triángulos, etc.; en este caso pasó del criterio color al criterio forma. Es decir que dentro de cada colección todos los elementos se parecen en lo mismo, pero al pasar de una colección a otra, el criterio cambia. En el primer momento de este estadio el niño deja aún elementos del universo sin clasificar y progresivamente incorpora más hasta clasificar todos los elementos que constituyen el universo



Esta clasificación nos indica que comienza a acep-- tar diferencias entre los elementos de un mismo conjunto, --- puesto que ya no busca semejanzas máximas, lo cual le permite formar colecciones más amplias, que abarcan mayor número de - elementos cada una.

La pertenencia de un elemento a un conjunto ya no - está dada por la proximidad espacial, sino por la semejanza-- que guarda con los demás elementos de dicho conjunto.

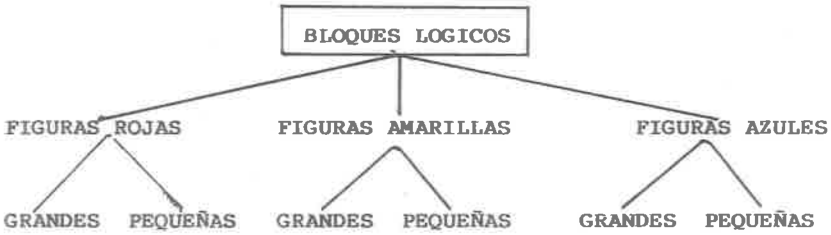
Progresivamente el niño logra anticipar y conservar el criterio clasificatorio. Anticipar quiere decir que antes- de realizar la clasificación en forma efectiva, decide con ba se en qué criterio la hará. Conservar significa que si inicia la clasificación con base en un criterio, lo mantendrá a lo - largo del acto clasificatorio. Por ejemplo: si decide clasifi car de acuerdo al grosor aplicará este criterio a todos los - elementos del universo.



También en este estadio llega a clasificar un mismo universo con base en diferentes criterios. Es decir que - si clasificó los bloques lógicos en función del criterio color, también podrá hacerlo de acuerdo a la forma, o al tamaño, etc., por lo tanto hay movilidad en sus criterios clasificatorios. Esto significa que el niño no se aferra a un solo criterio sino que utilizará todos los que el material le permita, pero en cada acto clasificatorio utilizará el mismo criterio (o la misma combinación de criterios) para todos -- los conjuntos que forme. La movilidad se hará notar en la posibilidad de pasar de un criterio a otro en actos clasificatorios sucesivos. Por ejemplo: si clasifica los bloques lógicos utilizando el criterio forma, en otro momento si clasifica vestimenta lo podrá hacer con base en el criterio mate--- rial, tamaño, etc., y no necesariamente con el criterio forma. (63)

En este momento el niño podrá disociar y reunir -- conjuntos, es decir que si ha clasificado el universo en figuras rojas, amarillas y azules podrá constituir los conjuntos correspondientes. De la misma manera, si parte de subconjuntos podrá constituir conjuntos más abarcativos.

(63) U.P.N. "Contenidos de Aprendizaje", S.E.P., Agosto 1983 Editorial Imprecolor S.A., México D.F. P. 26.

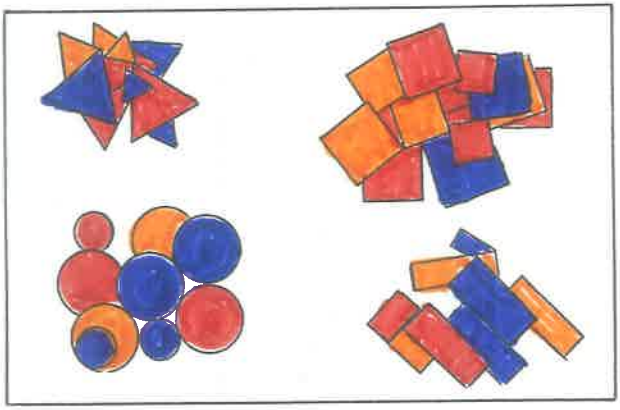


Las clasificaciones que el niño realiza al final de este estadio son similares a las que haría un sujeto del estadio operatorio, pero la diferencia con éste es que todavía no ha construido la cuantificación de la inclusión. ¿Qué significa esto? Que el niño aún no considera que la parte está incluida en el todo y que éste abarca a las partes que lo componen Por ejemplo, habiendo clasificado los bloques lógicos por tamaño (grandes y pequeños)[64], ante la pregunta "¿Qué hay[65] más, figuras grandes o figuras?", el niño responderá que hay igual, porque en realidad está comparando el conjunto de las figuras grandes con el conjunto de las figuras pequeñas, estableciendo una relación de parte a parte y no de parte a todo.

Como podemos ver el avance hacia la madurez en los aspectos de percepción y conceptualización del niño, es paulatino, y es compromiso del educador mantenerse al tanto sobre la etapa en la que se encuentra, para no incurrir en presiones innecesarias, que podrían repercutir en el rechazo a los aspectos numéricos por parte del alumno en etapas posteriores de su vida como estudiante y como individuo.

(64,65) U.P.N. "Contenidos de Aprendizaje", S.E.P., Agosto de 1983, Editorial Imprecolor S.A., México D.F. P. 27

CARACTERISTICAS DEL TERCER ESTADIO DE LA CLASIFICACION



Como podemos ver en el ejemplo, el resultado obtenido por el niño en este estadio es el mismo que el de un niño que está en la etapa de transición entre el segundo y el tercer estadio. Pero veremos a continuación cual es la diferencia fundamental entre ambos.

El niño del tercer estadio, como el que finaliza el segundo, anticipa el criterio clasificatorio que va a utilizar y lo conserva a lo largo de la actividad clasificatoria, también puede clasificar con base en diferentes criterios (66) (movilidad) y toma en cuenta todos los elementos del universo.

(66) U.P.N. "Contenidos de Aprendizaje", S.E.P., Agosto 1983, Editorial Imprecolor S.A., México D.F., P. 27

El logro fundamental del niño del estadio operatorio es que establece relaciones de inclusión, es decir, que ante la pregunta: "¿Qué hay más, triángulos o figuras?"[67] responde que hay más figuras porque está considerando que los triángulos están incluidos en la clase de las figuras. Ha llegado a establecer en términos cuantitativos la relación parte[68] (triángulos-todo (figuras), dado que considera a los triángulos como elementos pertenecientes a un conjunto que es parte de la clase que lo abarca, de donde puede deducir que hay más elementos en la clase que en la subclase. Esto se da gracias a la coordinación interiorizada de la reunión y la disociación que en el segundo estadio realizaba en forma efectiva ya que no podía representarse la operación inversa para reconstruir el todo cuando estaba frente a las partes.

Esa coordinación de la reunión y la disociación constituye la reversibilidad que caracteriza a la clasificación operatoria.

¿Por qué es fundamental la inclusión respecto al número?

Porque el niño ya podrá considerar que en el cinco, por ejemplo, están incluidos el cuatro, el tres, el dos y el uno.

(67,68) U.P.N. "Contenidos de Aprendizaje", S.E.P., Agosto 1983, Editorial Imprecolor S.A., México D.F. P. 27

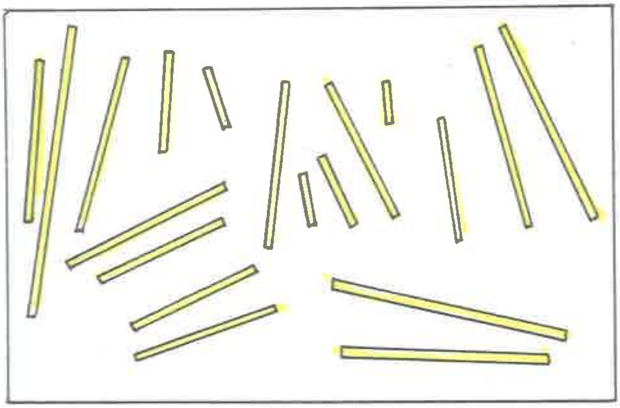
PSICOGENESIS DE LA SERIACION

El proceso de construcción de la seriación atraviesa por tres estadios:

Primer estadio: Hasta los 5-6 años aproximadamente.

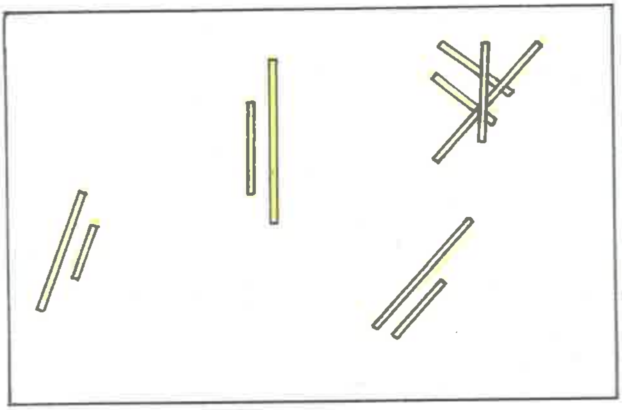
Segundo estadio: Desde los 5-6 años hasta los 7-8 años aproximadamente.

Tercer estadio: Desde los 7-8 años aproximadamente.



Para analizar los estadios de la seriación utilizaremos a modo de ejemplo, un material constituido por diecinueve varillas cuya longitud varía medio centímetro de una a otra, midiendo seis centímetros la más pequeña. Si bien en un principio se le ofrecen al niño sólo diez de las diecinueve varillas de manera que tengan un centímetro de diferencia entre cada una, de acuerdo a las seriaciones realizadas por el niño se le ofrecen las nueve que van intercaladas en la primera serie.

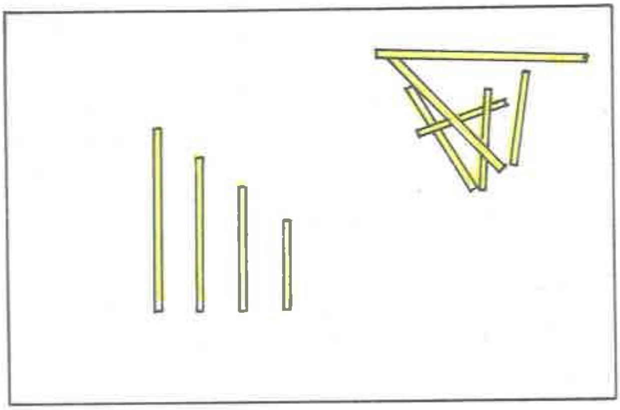
CARACTERISTICAS DEL PRIMER ESTADIO DE LA SERIACION



El niño que se encuentra en el inicio de este estadio al proponérsele que haga una seriación[69] ("Ordena estas varillas de la mas larga a la más corta o de la más corta a la mas larga"), forma en un principio parejas donde cada elemento es perceptivamente muy diferente a otro. ¿Por qué el niño forma parejas? Porque está considerando los elementos en términos absolutos[70] ("grande" y "chico") no establece aun verdaderas relaciones y en ese sentido se puede decir que es una-conducta seudo-clasificatoria: considera el universo de las-varillas como las largas y las cortas. Luego el niño hace --tríos en los que introduce una nueva categoría, la de las medianas, manejando entonces las categorías "grande"[71],"mediano" y "chico". En ambos casos-parejas o tríos- le quedan sin seriar todas aquellas varillas que no puede incluir en estas--

(69,70,71) U.P.N. "Contenidos de Aprendizaje", S.E.P., Agosto 1983, Editorial Imprecolor S.A. México D.F. P. 28

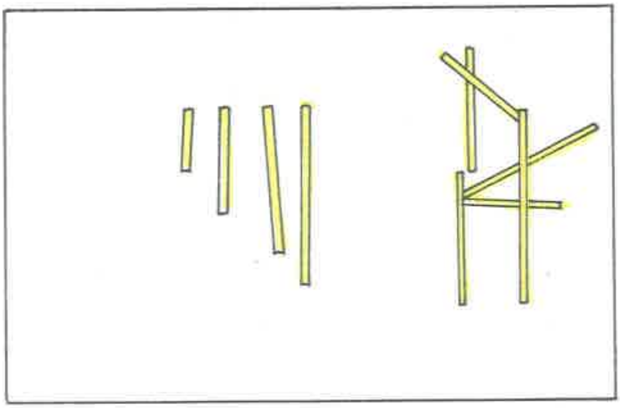
categorías.



Mas adelante seria cuatro o cinco elementos buscando formar"escaleritas"[72] en un solo sentido -creciente o decreciente-, o en ambos sentidos, tomando en cuenta sólo uno de los extremos, designando los elementos como "grande"[73], "mediano"[74], "más mediano"[75], "chico"[76], "chiquito"[77], etc., porque aunquese aproxima a ello, aún no establece relaciones.

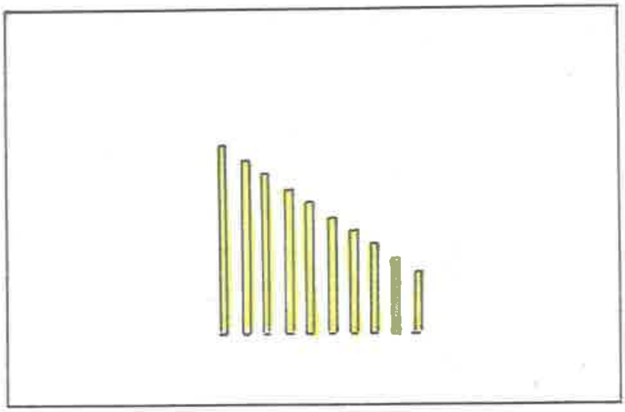
Relacionar los elementos significa considerar un elemento en función de otro, y en el caso de las longitudes podría expresarse como "más largo que"[78], "más corto que"[79].

(72,73,74,75,76,77,78,79) U.P.N. "Contenidos de Aprendizaje", S.E.P., Agosto 1983, Editorial Imprecolor S.A., México D. F.- P. 29.

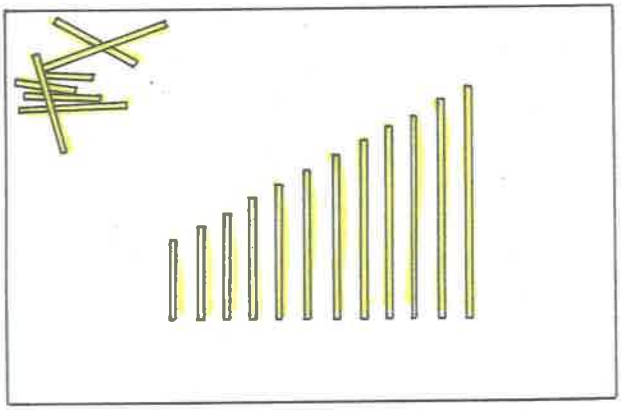


Al finalizar este estadio, en la transición hacia- el segundo, el niño llega a considerar la línea de base. Al- seriar longitudes uno de los extremos de cada elemento varía respecto a los restantes formando una escalera, y el otro ex tremo de todos los elementos coincide, formando la línea de- base. Esto se debe a que ya no se centra en uno de los extre mos sino que considera la longitud total de los elementos, - llegando así a seriar cuatro o cinco varillas.

CARACTERISTICAS DEL SEGUNDO ESTADIO DE LA SERIACION



El niño que está en este estadio puede construir la serie de diez varillas por tanteo, es decir que toma una primera varilla al azar, luego otra varilla cualquiera que compara con la primera, después una tercera varilla que compara con las dos anteriores para decidir dónde colocarla y así prosigue hasta seriar todas las varillas, respetando la línea de base.



¿Por qué realiza la serie por tanteo? Porque está comparando en forma efectiva el nuevo elemento con cada uno de los que ha colocado y necesita hacerlo dado que todavía no construyó la transitividad, no puede deducir que si un elemento es más grande o más pequeño que el último también lo es respecto a todos los anteriores y tiene que recurrir a la comprovación efectiva. Esto se evidencia también cuando le proponemos al niño una vez que ha construido su serie, agregar las nueve varillas que aún no le habíamos presentado.

"Ya efectuada[80] una seriación el niño encuentra algunas dificultades sistemáticas en intercalar elementos nuevos, como si la hilera construida constituyera un conjunto rígido y cerrado en si mismo". Logra intercalar dos o tres varillas pero ante la dificultad de terminar la actividad por requerir comparar cada elemento con los ya seriados, prefiere desbaratar su serie y construirla nuevamente por tanteo, ahora con las diecinueve varillas.

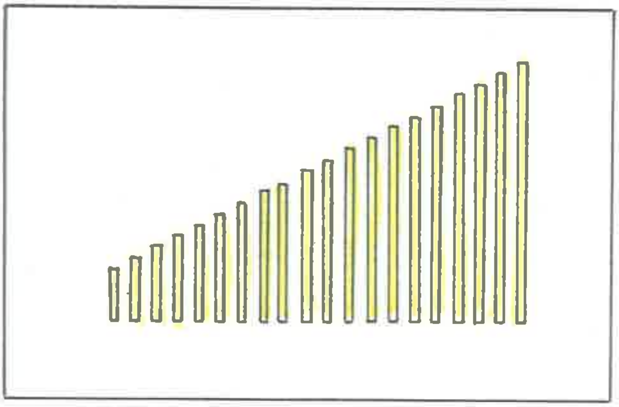
El niño del segundo estadio no puede intercalar las varillas porque la intercalación requiere tomar en cuenta simultáneamente dos relaciones recíprocas, que no es necesario considerar en el caso de la construcción de la serie.

El niño en este estadio aún no ha construido la reciprocidad que, se expresa en la seriación a través de dos formas. Veamos como actúa el niño respecto a ambas:

- El niño puede constatar que, si un elemento A es mayor que B, éste es menor que A, pero aun no puede deducir la inversión de la relación, por no haber coordinado las dos relaciones recíprocas.
- Relaciona cada elemento con el anterior y con el elemento posterior de la serie pero lo hace en forma sucesiva puesto que no puede considerar que un elemento es más grande que otro y que al mismo tiempo es más pequeño que otro elemento.

(80) U.P.N. "Contenidos de Aprendizaje", S.E.P., Agosto 1983- Editorial Imprecolor S.A., México D.F., P. 30.

CARACTERISTICAS DEL TERCER ESTADIO DE LA SERIACION



El método que utiliza el niño del tercer estadio para seriar es sistemático. Si hace una serie creciente toma, del conjunto de las diez varillas, la varilla más pequeña, luego la más pequeña de las que quedan y así sucesivamente; en el caso de hacer una serie decreciente el proceso es inverso: comienza por la varilla más grande.

¿Qué nos indica que el niño realice la serie de esta manera? Que puede anticipar la serie completa antes de hacerla porque ha construido la transitividad y la reciprocidad

El niño es capaz ahora ya no solamente de establecer relaciones -como lo hacía en el estadio anterior- sino también de componer esas relaciones. Esto significa que si él ha establecido que A B y B C, puede deducir que la diferencia existente entre A y C es mayor ya que es igual a la suma de las dos diferencias establecidas previamente.

El niño ha construido la reciprocidad de las relaciones, lo cual se pone de manifiesto en que:

-Al invertirse el orden de la comparación, el niño invierte en forma deductiva la relación entre los elementos. Por ejemplo, cuando se le pide que construya la serie inversa después de haber logrado la directa, el niño del segundo estadio empieza de nuevo, como si se tratara de otra seriación totalmente diferente: las relaciones "menor que"[81] y "mayor que"[82] no son aun entendidas como inversas, sino como dos tipos difernetes de relaciones. El niño operatorio en cambio, invertirá la serie en forma sistemática, sin deshacer la que ha construido originalmente, sino pasando el último al primer lugar, el penúltimo al segundo, etc. Para decirlo con palabras de los niños: "Es lo mismo pero al revés"[83], lo que expresa claramente que la reciprocidad -forma de reversibilidad característica de la seriación- resulta en una equivalencia: (A B)   (B A).

-Considera a cada elemento, al mismo tiempo, como más pequeño que algunos de los elementos de la serie y como más grandes que otros -los que lo suceden o los que lo anteceden, según la dirección en que estén seriados-. Por lo tanto, logra la intercalación de los nueve elementos suplementarios que se le proponen.

(81,82,83) **U.P.N. "Contenidos de Aprendizaje", S.E.P., Agosto 1983, Editorial Imprecolor S.A., México D.F. P. 31**

¿Por qué son fundamentales la reciprocidad y la -- transitividad respecto al número? Porque el niño podrá considerar que si el cinco es mayor que el cuatro, también es mayor que el tres, el dos y el uno, así como considerar que el cinco es mayor y menor al mismo tiempo[84] (mayor que el cuatro- y menor que el seis).

CORRESPONDENCIA

El análisis de los comienzos de la cuantificación- nos ha llevado a plantear el problema de la correspondencia. Comparar dos cantidades es, efectivamente, o bien poner en - proporción sus dimensiones, o bien poner sus elementos en correspondencia término a término o correspondencia biunívoca.

PSICOGENESIS DE LA CORRESPONDENCIA Y LA CONSERVACION DE LA - CANTIDAD

El proceso de construcción de la operación de co-- rrespondencia atraviesa por tres estadios:

Primer estadio: Hasta los 5-6 años aproximadamente.

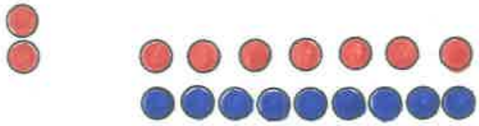
Segundo estadio: Desde los 5-6 años a los 7-8 años aproximadamente.

Tercer estadio:[85] (operatorio). A partir de los 7-8 años aproximadamente.

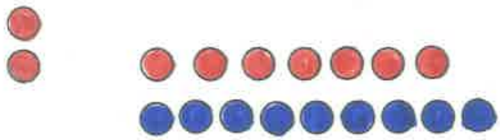
El material de los ejemplos que se utilizan está - constituido por nueve fichas rojas y nueve azules.

(84,85) U.P.N. "Contenidos de Aprendizaje", S.E.P., Agosto - 1983

CARACTERISTICAS DEL PRIMER ESTADIO DE LA CORRESPONDENCIA

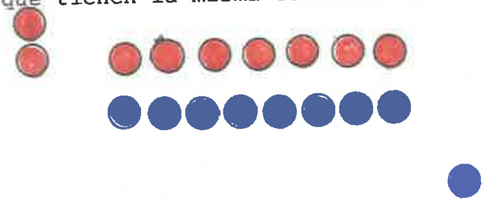


Cuando se le presenta al niño de este estadio una hilera de siete fichas rojas y se le propone a través de una consigna que ponga la misma cantidad de fichas azules, el niño de este estadio colocará tantas fichas azules como sea necesario para igualar la longitud de la hilera modelo de manera que la primera y la última ficha de ambas hileras coincidan, independientemente de la cantidad de fichas que necesite para hacerlo. ¿Por qué el niño lo hace así? Lo hace así porque considera las hileras como objetos totales centrándose en el espacio ocupado por los conjuntos y no en la cantidad de elementos, por lo tanto no establece la correspondencia biunívoca.



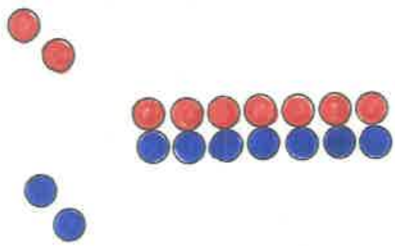
Si frente a este niño se juntan o separan las fichas de una de las hileras de manera que la longitud de ésta varíe, es decir al efectuar transformaciones espaciales en la ubicación de los elementos, él asegurará que ya no hay lo mismo y, al preguntarle qué habría que hacer para que hubiera igualito, propone quitar o agregar fichas para que las hile--

ras queden nuevamente de la misma longitud lo que para él es índice de que tienen la misma cantidad de elementos.

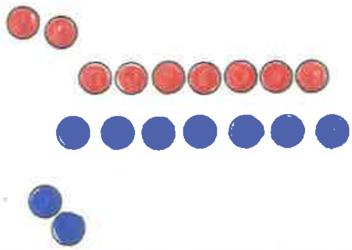


Como el niño está centrado en el resultado de la transformación que se ha efectuado y no en la acción de transformar -en este caso juntar- sugiere una nueva modificación: agregar o quitar elementos, que no está relacionada con la primera transformación pero que permite restablecer la igualdad de la longitud de las dos hileras.

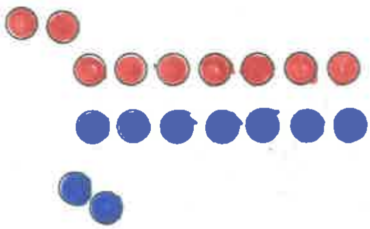
CARACTERISTICAS DEL SEGUNDO ESTADIO DE LA CORRESPONDENCIA



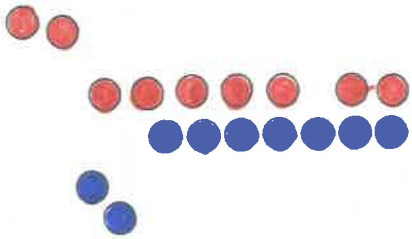
El niño en este estadio, a diferencia del estadio anterior, ya establece la correspondencia biunívoca ante la misma consigna. Al realizar su hilera de fichas busca que sea equivalente cuantitativamente a la del modelo. Para estar seguro que cada ficha de una hilera está en relación con cada ficha de la otra pone cada ficha azul exactamente debajo de cada ficha roja de manera que pueda observar fácilmente la correspondencia establecida; esto le permite afirmar que los dos conjuntos tienen la misma cantidad de elementos.



Después que afirmó lo anterior y a partir de los dos conjuntos que puso en correspondencia, si se altera la disposición espacial de las fichas de uno de los conjuntos, juntándolas o separándolas, el niño dirá que ya no hay lo mismo porque aunque ya establece la correspondencia biunívoca al dejar ésta de ser evidente perceptivamente se apoya en la longitud de las hileras.



Cuando se le plantea cómo hay que hacer para que haya otra vez la misma cantidad de fichas en los dos conjuntos, vuelve a establecer la correspondencia biunívoca aproximando cada elemento de un conjunto con cada elemento del otro de manera que la correspondencia se perciba fácilmente. Esta forma de resolver la situación marca un avance respecto al primer estadio, ya que la acción que realiza para que la equivalencia sea visible nuevamente es la acción inversa a la que se efectuó en la primera transformación (si fueron[86] separadas las vuelve a juntar, si fueron aproximadas las vuelve a separar) y no una acción ajena a ésta como en el estadio anterior en el que proponía quitar o agregar fichas. El niño de este estadio ante la imposibilidad de realizar en forma interiorizada la acción inversa necesita hacerla en forma efectiva. Es por esto que, a pesar de que el niño ha descubierto ya una forma eficaz de establecer la equivalencia cuantitativa entre dos conjuntos, esta forma sólo es válida para garantizar la conservación de la cantidad en situaciones privilegiadas: cuando la correspondencia término a término entre los elementos de ambos conjuntos continúa siendo visible.



Es frecuente que en esta etapa conozca el niño el nombre de los números. ¿El hecho de que el niño pueda recitar la serie de los nombres de los números implica necesariamente que maneja el concepto de número? Aun cuando nos resulte sorprendente encontramos que los niños que saben decir cuántos elementos hay en cada conjunto, pero aun no han construido la conservación de la cantidad, hacen afirmaciones tales como:

(86) U.P.N. "Contenidos de Aprendizaje", S.E.P., Agosto 1983- Editorial Imprecolor S.A. México D.F. P. 34.

"En[87] las dos hileras hay siete fichas pero en ésta (la hilera más larga) hay más porque esta ficha sobra".

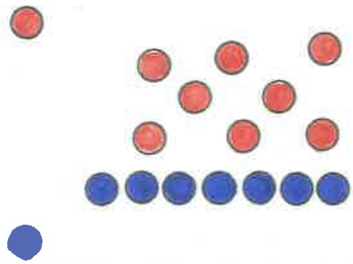
Los niños están estableciendo al contar, una correspondencia término a término entre la serie de los nombres de los números y un conjunto de elementos concretos. Por lo tanto, al elemento que nombran por ejemplo, en séptimo lugar, le corresponde el nombre "siete"[88] pero no está claro aún para ellos que siete incluye también a todos los elementos contados anteriormente. En este momento la numeración verbal no implica la noción de conservación dado que para el niño puede haber sietes que tienen más y sietes que tienen menos. Puede decir que un siete es más que otro siete porque para él la palabra siete es solamente la etiqueta que le corresponde al séptimo elemento y no considera que el siete incluye a los seis elementos que están antes.

En cambio cuando el niño está en la transición hacia el tercer estadio contar los elementos de conjuntos equivalentes que tienen distinta distribución espacial lo lleva a entrar en contradicción con lo que él puede afirmar a partir de la longitud, ya que se pregunta cómo habiendo siete y siete puede haber más elementos en un conjunto que en el otro.

La toma de conciencia de este conflicto contribuirá sustancialmente al avance hacia la conservación del número.

(87,88) U.P.N. "Contenidos de Aprendizaje", S.E.P., Agosto - 1983, Editorial Imprecolor S.A., México D.F. P. 34

CARACTERISTICAS DEL TERCER ESTADIO DE LA CORRESPONDENCIA

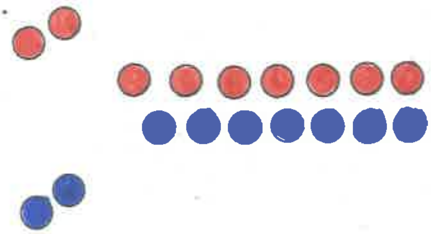


Al solicitarle al niño del estadio operatorio que - tome tantos elementos como los de la hilera modelo, puede hacerlo como un niño del segundo estadio estableciendo la correspondencia término a término en forma visible, pero también, en algunos casos, escogiendo tantas fichas azules como fichas rojas le presentamos sin necesidad de colocar cada --- azul pegadita a cada roja.

Ante cualquier transformación que se efectúe en la disposición de los elementos de uno de los conjuntos sostiene la equivalencia numérica de los mismos, incluso si se le plantean sugerencias como:[89] "A mí un niño me dijo ayer que si esta hilera era más larga tenía mas fichas", el niño se muestra asombrado ante semejante idea y sostiene la equivalencia.

(89) U.P.N. "Contenidos de Aprendizaje", S.E.P., Agosto 1983, Editorial IMPRECOLOR S.A., México D.F. P. 35.

Los niños del tercer estadio afirman la conserva-- ción pero a veces no la argumentan aunque después pueden llegar a fundamentar por qué la cantidad se conserva, dando uno o varios de los siguientes argumentos: "Hay lo mismo(90) porque- no pusiste ni quitaste nada" o "Sigue(91) habiendo igual, la hilera de las rojas es más larga porque las fichas están separadas y la de las azules es más cortita porque están junti-- tas" o "Hay lo(92) mismo porque podemos volver a ponerlas como - estaban antes".



¿Qué significan estos diferentes argumentos? En el primer caso el niño ya sabe que las dos únicas formas de alterar una cantidad discontinua son agregar o quitar elemen-- tos; en los estadios anteriores sabía que no se puso ni se - quitó elemento alguno pero como estaba centrado en los estados finales no tomaba en cuenta las acciones. En el segundo- caso el niño compensa la mayor o menor longitud de cada hilera con los espacios existentes entre las fichas de cada con- junto: "Es(93) más largo pero están más separadas".

(90,91,92,93) U.P.N. "Contenidos de Aprendizaje", S.E.P., -- Agosto 1983, Editorial Imprecolor S.A., México D.F. - P. 35.

En el tercer caso se evidencia que toma en cuenta- las acciones realizadas más que las configuraciones resultantes considerando esas acciones como inversas una de la otra- y eso es precisamente lo que le permite volver en forma interiorizada al punto de partida, sin necesidad de realizar --- efectivamente la acción inversa (si se alargó, acortar; si - se acortó, alargar), para anular la transformación que se hizo. (94) Llegado este momento podemos afirmar que el niño está en el estadio operatorio de la correspondencia y ha construido- la noción de conservación de cantidades discontinuas.

¿Por qué es fundamental llegar a la correspondencia y a la conservación de la cantidad, respecto al número?- Porque el niño podrá considerar que un conjunto de nueve elementos será equivalente a todos los conjuntos de nueve elementos, así como no equivalente a todos los conjuntos mayores o menores que nueve independientemente de la disposición espacial de sus elementos.

La operación de correspondencia representa una fusión de clasificación y seriación, ya que:

Mientras se está clasificando con base en cualidades, la clasificación es una operación centrada en las semejanzas: Los- elementos se reúnen con base en los parecidos que guardan entre sí y se consideran equivalentes en función del criterio- elegido, independientemente de sus diferencias.

(94) U.P.N. "Contenidos de Aprendizaje", S.E.P., Agosto 1983 Editorial Imprecolor S.A., México D.F. P. 35.

Mientras se está seriando con base en criterios cualitativos la seriación se centra en las diferencias, ya que consiste -- precisamente en ordenar esas diferencias.

Es decir que, en el terreno de lo cualitativo, clasificación y seriación se mantienen separadas. Pero, cuando- se trata de establecer equivalencia numérica entre dos con-- juntos -es decir, cuando se prescinde de las cualidades- los elementos son considerados al mismo tiempo como:

Equivalentes, porque a cualquier elemento de un conjunto le- puede corresponder cualquier elemento en el otro; son considerados como unidades intercambiables.

Diferentes en el sentido de que pueden ordenarse: si, al establecer la correspondencia, se colocó la ficha B en el se-- gundo lugar -es decir, entre la primera y la tercera- esa -- misma ficha no podrá ocupar ya otro lugar, a menos que se intercambie con otra.

Dado que se hace abstracción de las cualidades, lo único que puede diferenciar cada unidad de las demás es el - orden, es decir, la posición en que se coloca cada elemento. El único orden admitido es el que se establece en el acto -- mismo de establecer la correspondencia. Por lo tanto, es una orden que varía de una situación a otra, pero que es necesaria para que la correspondencia se lleve a cabo.

Es en este sentido que puede decirse que la noción de número resulta de una síntesis de clasificación y seria-- ción.

CAPITULO III

SISTEMA DE NUMERACION DECIMAL Y LAS OPERACIONES FUNDAMENTALES

LOS NUMEROS NATURALES Y EL SISTEMA DECIMAL DE NUMERACION

Los números naturales, es decir, aquellos que utilizamos para contar (1,2,3,...)[95] y el cero, permiten resolver una gran variedad de situaciones, por ejemplo, contar colecciones, compararlas e igualarlas, comunicar cantidades, expresar medidas, ordenar elementos.

A través de las actividades de este capítulo se analizan estas situaciones, así como los distintos aspectos de los números que se ponen en juego al resolverlas: la importancia del conteo oral, el aspecto cardinal, el ordinal y la representación simbólica de los números.

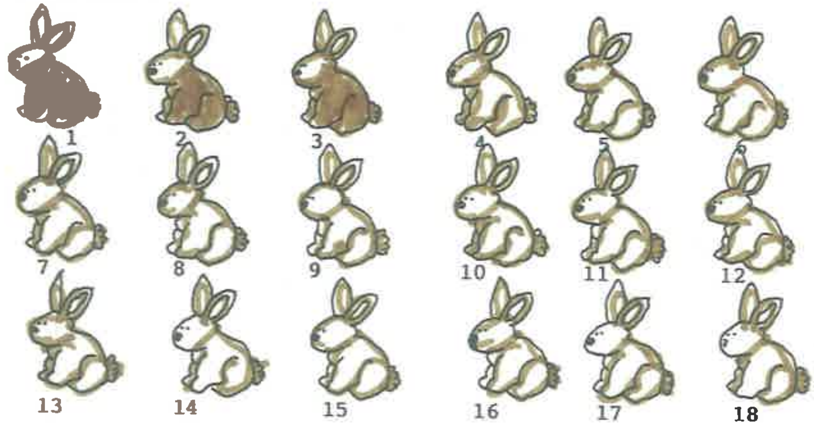
Al mismo tiempo, se analizan las dificultades que enfrentan los niños en el proceso de aprender a utilizar esa herramienta fundamental, así como las condiciones didácticas que pueden favorecer este proceso.

APRENDIENDO A CONTAR.

El conteo oral es un recurso valioso para el trabajo con cantidades, y es un antecedente necesario para iniciar el aprendizaje de la representación simbólica de los números; para contar se necesita, además de conocer la serie verbal de los números, establecer una correspondencia uno a uno entre la serie verbal y los objetos que se van contando.

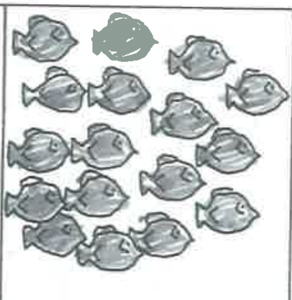
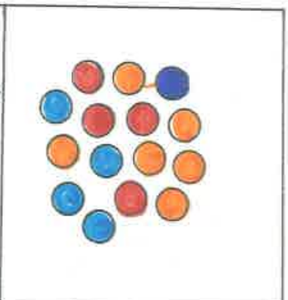
(95) **"La Enseñanza de las Matemáticas en la Escuela Primaria" S.E.P., Junio 1995, Editorial Grafik S.A.,México D.F. - P. 33**

Por ejemplo:

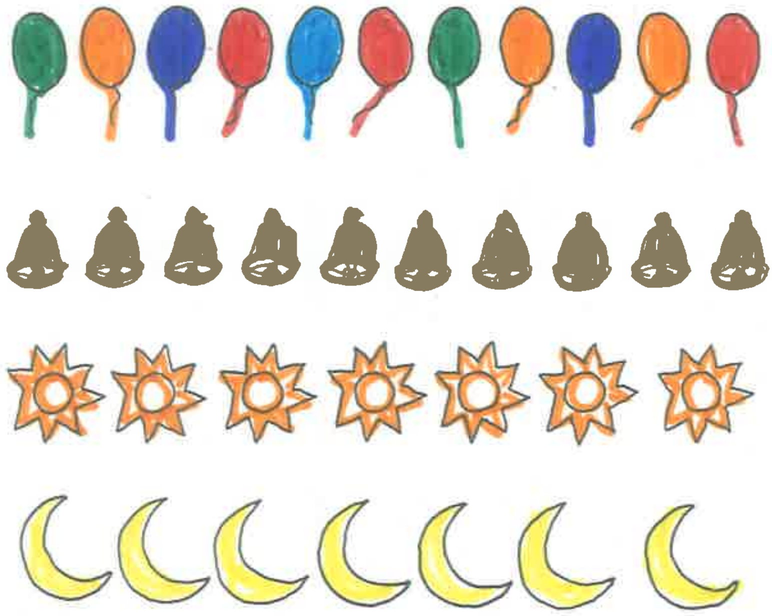


Para reafirmar este conocimiento, es necesario que los niños realicen diversas actividades de conteo en las que tengan la necesidad de comparar colecciones, construirlas, igualarlas, cuantificarlas. Estas actividades pueden realizarse con fichas, palitos, canicas, etc., porque no olvidemos que a los niños les gusta aprender haciendo y cuando descubren que aprenden algo nuevo se sienten realizados.

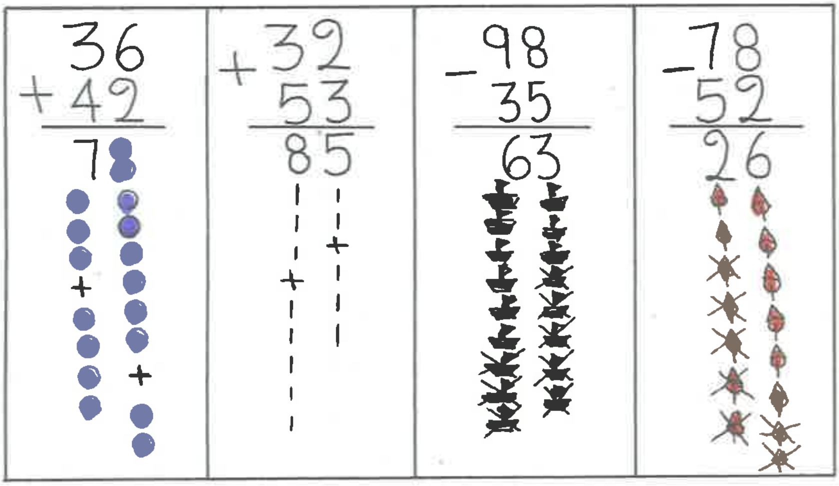
Ejemplo de conteo objetivo:

		
11 CHILES	17 PECES	15 CANICAS

La mayoría de los niños, antes de entrar a la escuela, recitan la serie oral de los primeros números: uno,-dos, tres,... y los utilizan para contar. Sin embargo es --frecuente que al contar objetos los niños cometan errores -como decir **uno** y separar dos objetos en vez de uno solo o -decir dos números seguidos y separar un solo objeto. Por --esto, aunque sepan recitar los números del 1 al 10, es necesario que realicen diversas actividades de conteo en las --que tengan necesidad de comparar colecciones, construirlas-igualarlas, cuantificarlas, y actividades en las que tengan que comunicar cuantos elementos tiene una colección para reproducirla.



El conteo oral es un recurso fundamental en el trabajo que los niños hacen con cantidades. Apoyándose sólo en el conteo pueden resolver diversas situaciones de cuantificación, ordenamiento, comparación e igualación de colecciones, así como situaciones que impliquen sumar o restar.



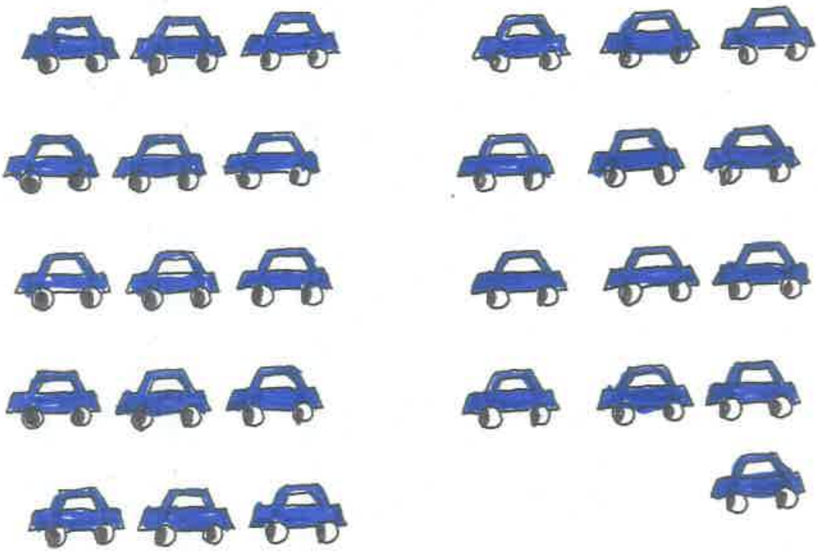
La serie oral presenta ciertas regularidades que pueden ser identificadas y utilizadas por todas las personas cuando aprenden a contar.

En nuestro sistema de numeración, al nombrar la serie de números con dos decenas, se repite la serie del uno al nueve con el prefijo **veinti.** Sigue treinta y se hace nuevamente lo mismo.

...VEINTISEIS, VEINTISIETE, VEINTIOCHO, VEINTINUEVE, TREINTA-TREINTA Y UNO, TREINTA Y DOS, TREINTA Y TRES, TREINTA Y CUATRO, TREINTA Y CINCO, TREINTA Y SEIS...

Estas regularidades permiten que los niños puedan en el transcurso del año, manejar rangos numéricos cada vez mas grandes para resolver situaciones como las que hemos -- trabajado. Los niños pueden realizar algunos ejercicios que consisten en recitar la serie para irla dominando, pero sobre todo deben enfrentarse a situaciones problemáticas en - las que la serie numérica sea una herramienta que les permita resolverlas. Por ejemplo, construir, comparar o igualar- colecciones, comunicar cantidades, decir el total de objetos que se obtienen al reunir dos colecciones.

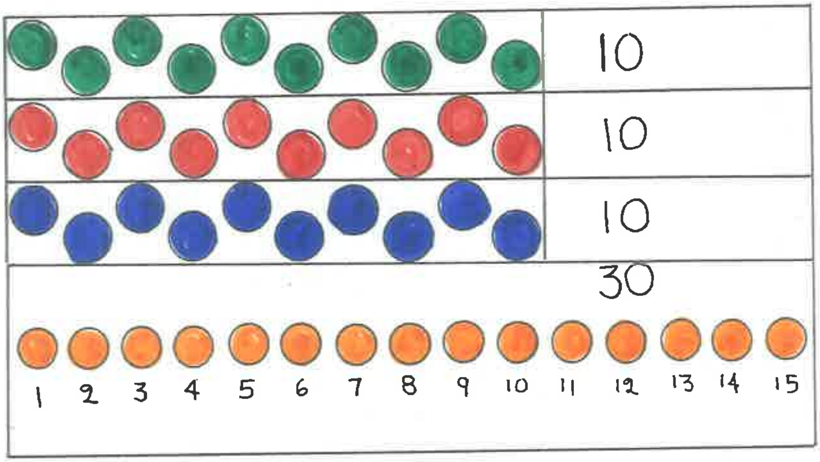
Veamos un ejemplo:



15 AUTOMOVILES + 13 AUTOMOVILES = 28 AUTOMIVILES

La representación simbólica convencional de la serie numérica, también presenta regularidades que los niños van identificando poco a poco: siempre se escriben las cifras del cero al nueve, primero solas, después precedidas de un uno, después de un dos, etc.

Después de un tiempo de trabajar con la serie numérica oral [96] (mas o menos hasta 20 o 30) y con la representación [97] gráfica convencional de los números (más o menos hasta el 15), es necesario que los niños comprendan los principios de base y posición que subyacen en nuestro sistema de numeración. Este conocimiento les permitirá mejorar poco a poco sus procedimientos para resolver las operaciones aritméticas así como comprender los algoritmos usuales. Esto es lo que veremos en la siguiente actividad.



(96,97) **"La Enseñanza de las Matemáticas en la Escuela Primaria" S.E.P. 1995., Editorial Grafik, México D.F. P. 43.**

LAS OPERACIONES FUNDAMENTALES

La Suma y la Resta.

Conocer las operaciones de suma y resta va más allá de saber resolver cuentas de suma o de resta. Significa conocer las situaciones en las que estas operaciones son útiles, saber escoger atinadamente el procedimiento más sencillo para resolver una suma o una resta, dependiendo de las cantidades involucradas, poder dar resultados aproximados y saber aplicar ciertas propiedades de la suma y de la resta para facilitar los cálculos.

Ejemplos:

$$\begin{array}{r} 86 \\ +\ 38 \\ \hline 124 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 98 \\ -\ 52 \\ \hline 46 \end{array}$$

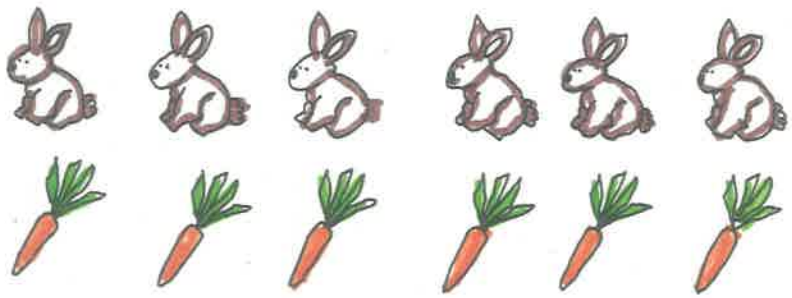
$$\begin{array}{r} 239 \\ +\ 897 \\ \hline 1136 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 81 \\ -\ 49 \\ \hline 32 \end{array}$$

El propósito de este capítulo es analizar estos aspectos, y al mismo tiempo favorecer la reflexión sobre las condiciones que pueden propiciar un aprendizaje significativo de estas operaciones.

Existen diversas maneras de resolver una suma o una resta. El procedimiento que se escoge depende de varios facto res: el tamaño y tipo de los números (redondos[98] como 20, 300; compuestos como: 25, 256; decimales como: 3.25, 43.5), la estructura del problema que se enfrenta, así como la necesidad o no de dar una respuesta exacta y, por supuesto, los conocimientos de la persona que resuelve los problemas.

Cuando los niños no saben contar más allá de los primeros números, una de las estrategias que utilizan para comparar colecciones relativamente chicas (más o menos[99] 15 o 20 elementos) es la correspondencia uno a uno.

Ejemplos:



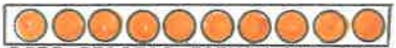
A cada conejo le corresponde una zanahoria es decir, hay correspondencia conejo-zanahoria.

Al aumentar las cantidades, este recurso deja de ser funcional y propicia la creación de otras estrategias, en particular, la de formar grupos con una misma cantidad de elementos.

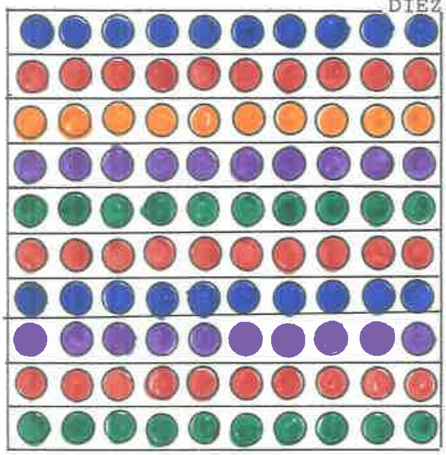
(98,99) "La Enseñanza de las Matemáticas en la Escuela Primaria", S.E.P., Junio 1995, Editorial Grafik S.A., México D.F. P.P. 45 y 66.

En los sistemas de base, como el nuestro, se hacen grupos y grupos de grupos, siempre con la misma cantidad de elementos: 10 unidades forman una decena; 10 decenas forman una centena; 10 centenas forman un millar, etc. . Es preciso que los alumnos se familiaricen con nuestro sistema de numeración, las reglas que implica y los conceptos de valor absoluto y valor relativo como productos necesarios a partir de la adquisición de la idea de posicionalidad. Para lograr tal objetivo se propone <u>el juego del cajero</u> en varias versiones, el cual comprende las siguientes reglas y propósitos;

Nuestro sistema de representación de los números se basa en el uso de diez cifras: **0,1,2,3,4,5,6,7,8,9** y dos reglas. La primera regla consiste en agrupar los elementos de una colección de diez en diez: diez unidades hacen una decena, diez decenas hacen una centena, diez centenas hacen un millar. Ejemplo:



DIEZ PELOTAS FORMAN UNA DECENA.



10
10
10
10
10 **DIEZ DECENAS FORMAN**
10 **UNA CENTENA.**
10
10
10
10

La segunda consiste en usar la posición de las cifras de un número para representar cada tipo de agrupamiento

Estas dos reglas facilitan mucho, además de la escritura de los números, los procedimientos para sumarlos, -- restarlos, multiplicarlos y dividirlos. Es muy común que los alumnos, y las personas en general, sepan escribir los números y operar con ellos pero que, al mismo tiempo, ignoren -- las dos reglas en las que se basan los procedimientos que -- usan.

En este juego, los alumnos trabajan sobre la primera regla, la de los agrupamientos de diez en diez, para profundizar su conocimiento sobre el sistema decimal de numeración y sobre los procedimientos para sumar y restar.

Primera versión del juego del cajero.

En esta versión del juego, las unidades, decenas - y centenas se representan con corcholatas de colores. Los jugadores van reuniendo unidades y las van cambiando por decenas. Gana el primero que obtenga una centena.

Material.

* Dos dados comunes con puntos del uno al seis, para cada -- equipo.
* Para cada equipo una caja o bolsa de plástico con cuarenta corcholatas azules, cuarenta corcholatas rojas y una cor-- cholata amarilla.

Dinámica del juego.

1.- El maestro organiza a los alumnos en equipos de tres a - cinco niños.

2.- Entrega a cada equipo dos dados y una caja de zapatos o- una bolsa de plástico con las corcholatas azules, las -- corcholatas rojas y una corcholata amarilla. Pueden ju-- gar sobre una mesa o en el piso.

3.- La primera vez que juegan, el maestro escribe en el piza rrón el valor de las corcholatas.

* La corcholata azul vale uno.
* La corcholata roja vale 10 corcholatas azules.
* La corcholata amarilla vale 10 corcholatas rojas.

4.- En cada equipo se ponen de acuerdo para que uno de los - integrantes sea el cajero. Al niño que le tocó ser el ca jero se le entregan los dados y la bolsa o caja con to-- das las corcholatas.

5.- En su turno, cada jugador lanza al mismo tiempo los da-- dos y entre todos obtienen la suma de los puntos.

6.- El cajero entrega al jugador que lanzó los dados tantas- corcholatas azules como puntos haya obtenido. Por ejem-- plo, si un dado cayó en el seis y el otro en el cinco, - el cajero entrega once corcholatas azules.

7.- Cuando los jugadores que lanzan los dados reúnen diez - corcholatas azules, le pueden pedir al cajero que se -- las cambie por una roja, y cuando reúnen diez rojas le- pueden pedir que se las cambie por una amarilla.

8.- Gana el juego el jugador que obtenga primero la corcho- lata amarilla.

9.- Devuelven todas las corcholatas y le toca a otro niño - ser el cajero.

Segunda versión del juego del cajero.

En esta versión del juego los jugadores comienzan con una cantidad inicial de corcholatas, a la que le van quitando unidades. Gana el primero que logre deshacerse de todas las corcholatas.

Material.

* Una bolsa o caja con 40 corcholatas azules, 40 rojas y cinco amarillas, para cada equipo.
* Dos dados como los de la primera versión.

Dinámica del juego.

1.- El maestro organiza al grupo en equipos de dos a cinco niños.

2.- Entrega a cada equipo dos dados y una bolsa o caja con las corcholatas.

3.- En cada equipo se ponen de acuerdo para que uno de los integrantes sea el cajero. Al niño que le tocó ser el cajero se le entregan los dados y la bolsa o caja con todas las corcholatas.

4.- En cada equipo, el cajero entrega a cada jugador cinco corcholatas azules, cinco rojas y una amarilla.

5.- En su turno, cada jugador lanza los dados y entre todos encuentran la suma de los puntos.

6.- El jugador que lanzó los dados, quita de sus corcholatas tantas corcholatas azules como puntos haya sacado.- Si no le alcanzan las corcholatas azules que tiene, puede pedir al cajero que le cambie una de sus corcholatas rojas por diez azules. Si tampoco tiene corcholatas rojas suficientes, puede pedir al cajero que le cambie -- una amarilla por diez rojas.

7.- Gana el primer jugador que logre quedarse sin corcholatas.

8.- Revuelven todas las corcholatas y le toca a otro niño - ser el cajero.

Tercera versión del juego del cajero.

En esta versión del juego y en la siguiente, los alumnos realizan sumas o restas apoyándose en un tablero de unidades, decenas y centenas. Ganan los que logran obtener el resultado correcto.

<u>Material.</u>

C	D	U
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5
6	6	6
7	7	7
8	8	8
9	9	9

* Un tablero como el que se muestra en el dibujo, para cada alumno. El tablero puede ser de cartón o de cualquier material en el que se puedan clavar tachuelas.
* Tres tachuelas para cada alumno.
* Para cada alumno, un "paquete con números" con lo siguiente:
  Cinco números menores que 100, cada uno escrito en un pedacito de papel.
  El resultado de la suma de esos cinco números, escrito en un papel como los anteriores, pero doblado de tal forma que el resultado no se vea.

Cada paquete con los cinco números y el resultado de la suma puede meterse en un sobre pequeño o agruparse con un clip o, simplemente, introducirse en una hoja doblada.

Dinamica del juego.

1.- El maestro organiza al grupo en equipos de tres a cinco - niños.

2.- Entrega a cada alumno un paquete con números, un tablero- y tres tachuelas.

3.- En cada equipo deciden quién será el cajero en la primera jugada. Los demás alumnos preparan su tablero.

4.- El cajero saca sus cinco papelitos con números y pone sobre la mesa su primer número. Cada uno de los demás jugado-- res representan ese número en su table ro, poniendo cada tachuela en el lugar que le corresponde. Los jugadores de-- ben cuidar que nadie vea el número que han representado en su tablero. Por -- ejemplo el número 38 se representa en- el tablero como el que se muestra a la derecha.

C	D	U
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5
6	6	6
7	7	7
8	8	8
9	9	9

5.- El cajero retira el primer número y pone el segundo. Los- jugadores deben representar con sus tachuelas el resulta- do de la suma de este número con el anterior. No pueden -

usar lápiz ni papel, sólo el tablero. Si el segundo número fue el 57 en el tablero queda como se indica, es decir 38   57   95.

C	D	U
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5
6	6	6
7	7	7
8	8	8
9	9	9

6.- El cajero sigue poniendo, uno por uno cada uno de los demás números y los jugadores van sumando cada número al resultado anterior, usando sólo su tablero.

7.- Cuando los alumnos ya tienen en sus tableros el resultado de la suma de los cinco números, muestran sus tableros, El cajero desdobla en ese momento el papel que contiene el resultado Juntos revisan quienes acertaron y quienes no.

8.- Los alumnos que acertaron tienen un punto. Antes de empesar la segunda ronda, guardan el paquete con números que acaban de usar para entregarlo despues al maestro.

9.- Para continuar, toca a otro alumno ser el cajero. El juego termina cuando todos han sido cajeros una vez.

10.-Gana el alumno que haya acumulado más puntos.

11.-Intercambian con otro equipo su paquete con números y juegan otra ronda.

12.-Para aumentar la dificultad del juego, el maestro puede-incluir números de tres cifras,o puede aumentar la cantidad de sumandos, cuidando que el resultado sea menor que 1000.

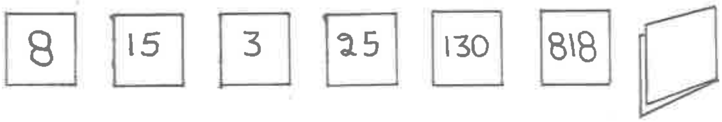
$$
\begin{array}{r}
234 \\
+\;567 \\
122 \\
\hline
923
\end{array}
$$

C	D	U
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5
6	6	6
7	7	7
8	8	8
9	9	9

Cuarta versión del juego del cajero.

Es el mismo juego que el de la tercera versión con modificaciones.

Igual que en la versión anterior, se dobla el papel con el resultado, pero esta vez el resultado se obtiene restando a 999 los cinco números, como en el ejemplo siguiente.



Dinámica del juego.

1.- Para empezar, los jugadores representan en sus tableros el número 999, como se muestra en el tablero de la izquierda.

2.- El primer número que el cajero pone sobre la mesa debera ser restado por los jugadores al 999. Por ejemplo, si sale el 15 el tablero queda como se muestra en el tablero de la derecha.

C	D	U
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5
6	6	6
7	7	7
8	8	8
9	9	9

C	D	U
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5
6	6	6
7	7	7
8	8	8
9	9	9

3.- El cajero sigue mostrando uno por uno los otros cuatro números, y los jugadores van restando cada número al resultado anterior.

En la tercera y cuarta versiones de este juego, los alumnos deben representar, sumar o restar números en un tablero de unidades, decenas y centenas. En cada columna del tablero están indicadas las cifras del uno al nueve No se pusieron los ceros por dos motivos. El primero es que los ceros no son necesarios para representar una cantidad en el tablero. El 90 por ejemplo, se representa poniendo una tachuela en el nueve de la columna de las decenas. Este hecho hará pensar seguramente a los alumnos por qué el cero si es necesario cuando no se usa un tablero.

El segundo motivo es que, al no estar anotados los ceros, los alumnos necesitarán pensar en los agrupamientos en los que se basa nuestro sistema de representación de los números. Por ejemplo, para representar el número 90, deberán pensar que este número está formado por 9 decenas.

Es recomendable que el maestro, antes de enseñar la tercera versión del juego a los alumnos, les proponga las siguientes actividades para que puedan representar números en el tablero.

El maestro entrega a cada alumno un tablero y tres tachuelas. Les dice que las cifras de la columna encabezada con la letra **U** representan unidades, las de la columna encabezada con la letra **D** representan decenas y las de la columna encabezada con la letra **C** representan centenas. Después, escribe un número en el pizarrón, por ejemplo 600, y les pide que lo representen en su tablero, clavando una, dos o tres tachuelas en las cifras que corresponden.

Si los alumnos no logran representar el número, el maestro les hace ver que 600 es igual a 6 centenas y que por lo tanto, basta con poner una tachuela en el 6 de la columna de las centenas.

Pone varios números más hasta asegurarse de que los alumnos ya pueden representar cualquier número en el tablero. Puede también hacer el ejercicio inverso, es decir, él representa números en el tablero y pide a los alumnos que los anoten en el pizarrón.

Una forma divertida de hacer estos ejercicios preliminares es la siguiente: un alumno escribe un número menor que 1000 en un papel y muestra el papel a un segundo alumno que representa ese número en el tablero. El segundo alumno, a su vez, muestra el tablero a un tercer alumno que escribe el número en otro papel. Finalmente, se comparan los números de los dos papeles, si son iguales, los tres alumnos ganaron Si son diferentes, entre todos buscan de quién fue el error.

EL ALGORITMO DE LA RESTA.

Los procedimientos usuales para sumar y restar pueden ser construidos poco a poco por los niños, a partir de sus conocimientos sobre los pricipios de base y posición del sistema decimal de numeración.

Por lo que se refiere al procedimiento formal para adquirir el concepto de resta en la escuela primaria, a continuación se explica mediante un ejemplo:

Resolver la siguiente resta.

$$\begin{array}{rrr} & 1\;8\;5 \\ - & 2\;7 \\ \hline & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rccc} & 1 & 8 & \overset{15}{\cancel{5}} \\ - & & 3\cancel{2} & 7 \\ \hline & 1 & 5 & 8 \end{array}$$

Como no se pueden quitar 7 unidades a 5 unidades, se agrega una decena al 5. De esta manera el minuendo 185 aumentó 10 unidades. Para que la diferencia buscada no se altere, esas mismas 10 unidades, convertidas en una decena, se aumenta al sustraendo:

$$185-27 \text{ es lo mismo que } \overset{(100)}{(185+10)} - \overset{(101)}{(27+10)}$$

El procedimiento del punto 2, en el que se hacen desagrupamientos de decenas a unidades, consiste en lo siguiente:

(100,101) "La Enseñanza de las Matemáticas en la Escuela Primaria", S.E.P., Junio 1995, Editorial Grafik S.A., México D.F. P. 74.

$$\begin{array}{rrrr} & 1 & \overset{7}{\cancel{8}} & \overset{15}{\cancel{5}} \\ - & & 2 & 7 \\ \hline & 1 & 5 & 8 \end{array}$$

Como no se pueden quitar siete unidades a 5, se toma una decena de las ocho que se tienen y se cambia por 10 -- unidades. Quedan en el minuendo una centena, 7 decenas y 15 - unidades. De esta manera ya se pueden quitar 7 unidades a las 15 que se obtuvieron con el cambio y 2 decenas a las 7 que -- quedaron. El resultado es una centena, 5 decenas y 8 unidades es decir, 158.

Aunque el procedimiento en el que se pide prestado- y se paga es mas rápido de ejecutar, descansa en un principio difícil de comprender para los niños de los primeros grados - de la escuela primaria. En cambio, el procedimiento de desa-- grupamientos es más fácil de comprender por ellos.

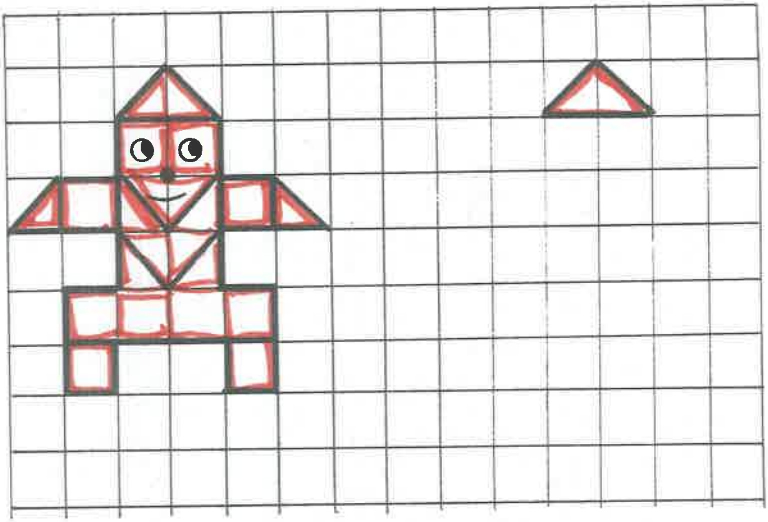
Ahora bien,no es lo mismo saber sumar y restar que- saber utilizar estas operaciones en la resolución de proble-- mas. Esto se debe, en gran medida, a la separación que se ha- establecido entre ambos propósitos: los niños primero apren-- den los algoritmos y después intentan aplicarlos en los pro-- blemas. Tal enfoque tradicional es preciso desterrarlo y co-- rresponde al maestro, el compromiso de proponer situaciones-- problemáticas motivantes para los alumnos, en donde éstos simultáneamente comprendan y apliquen los procedimientos matemáticos de suma y resta.

CAPITULO IV

GEOMETRIA

GEOMETRIA

El trabajo en geometría se inicia desde el primer ciclo con la observación de las formas que hay en el entorno, la reproducción de figuras, el trazo del contorno de las caras de los cuerpos, la clasificación de figuras tomando en cuenta su tamaño, su forma, el número de vértices y de lados; el armado de rompecabezas, la descripción oral o escrita de figuras (mensajes y[102] o adivinanzas geométricas), la reproducción de figuras en retículas (hojas[103] cuadriculadas, trianguladas, punteadas, etc.), y la identificación de figuras en composiciones geométricas.

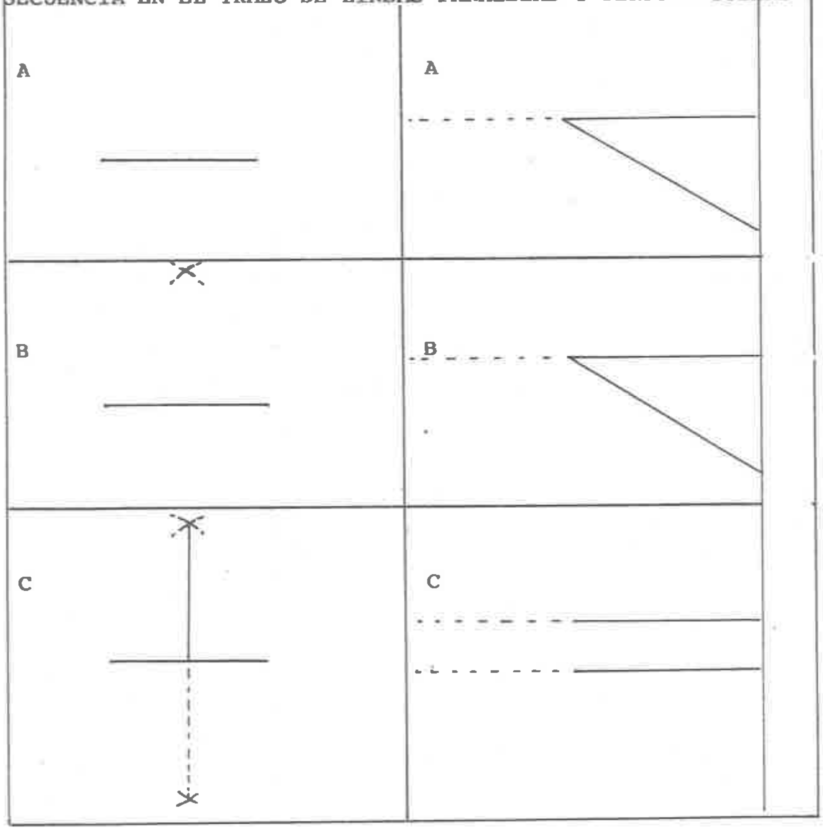


(102,103) "La Enseñanza de las Matemáticas en la Escuela Primaria", S.E.P., Junio 1995, Editorial Grafik S.A., México D.F. P. 179.

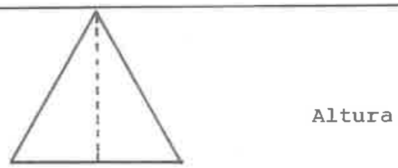
Estas mismas actividades se desarrollan a lo largo de la primaria aumentando el grado de dificultad y se empieza a trabajar sobre aspectos más específicos.

En tercero se aborda de manera sistemática el tema de simetría mediante diversas actividades que favorecen la identificación y trazo de los ejes de simetría en diversas figuras, así como el trazo de paralelas y perpendiculares.

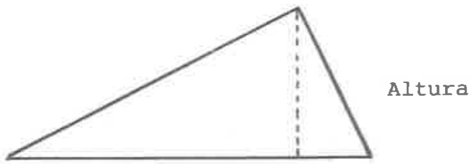
SECUENCIA EN EL TRAZO DE LINEAS PARALELAS Y PERPENDICULARES



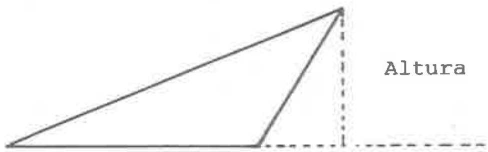
En cuarto se introduce la noción de ángulos a través de giros y su medición, y se plantea la identificación de diferentes tipos de triángulos y el trazo de sus alturas.



TRIANGULO EQUILATERO



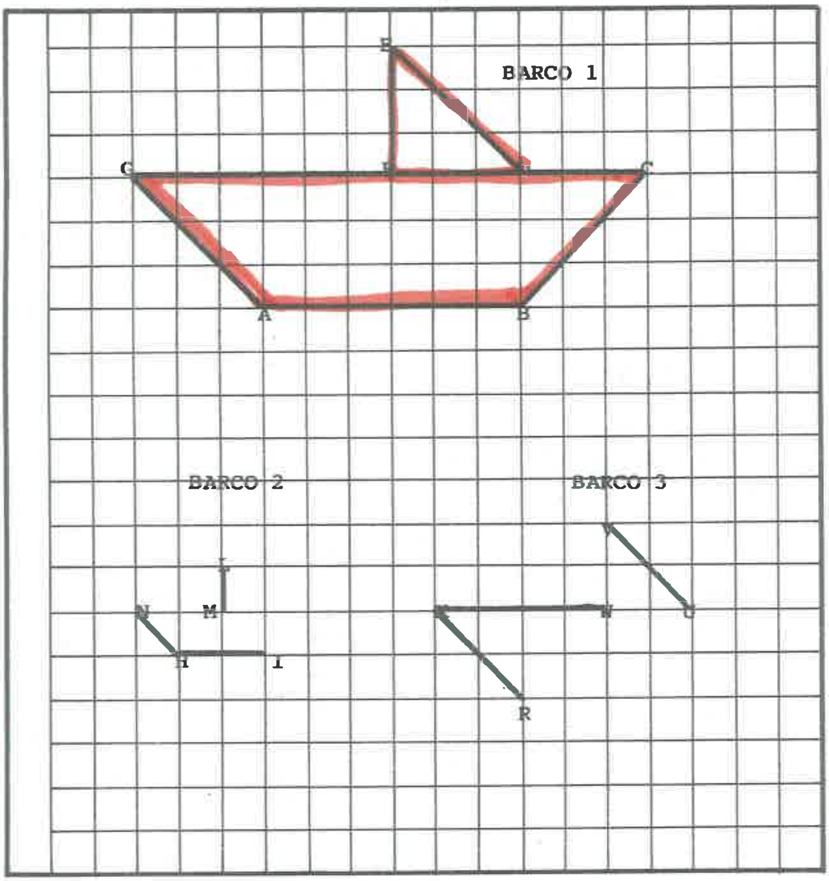
TRIANGULO RECTANGULO.



TRIANGULO OBLICUANGULO

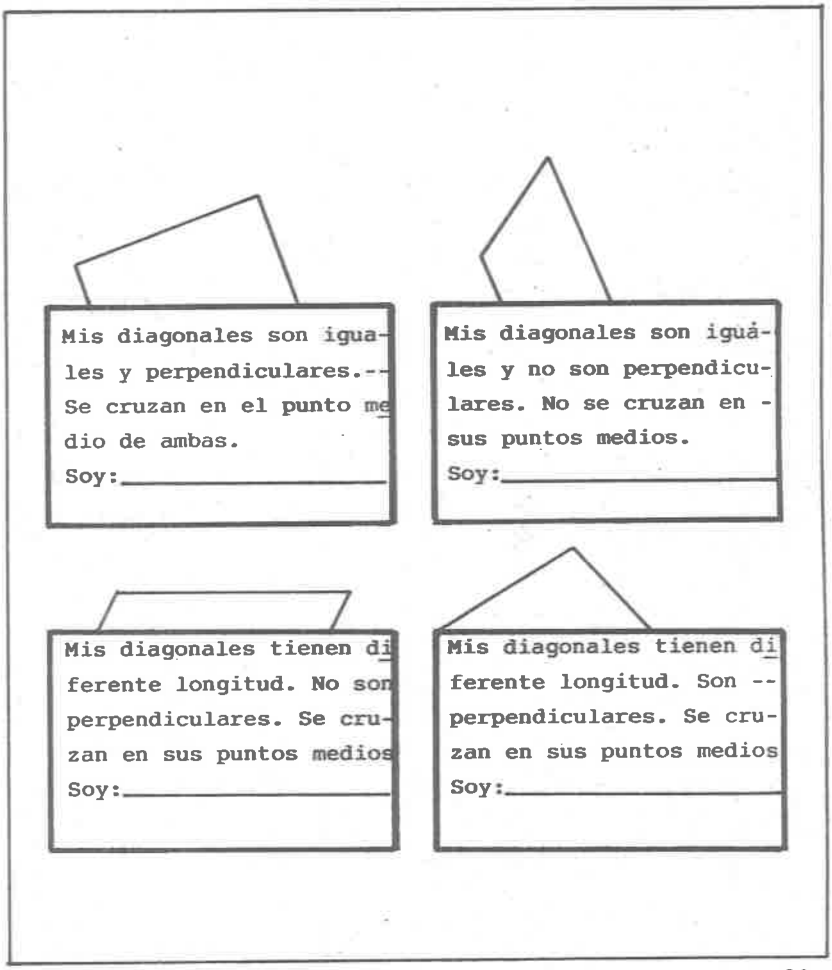
Altura de un triángulo es la perpendicular trazada desde un vértice de un triángulo al lado opuesto o su prolongación.

En quinto grado se profundiza en los contenidos - trabajados en los grados anteriores, mediante diversas actividades como son el trazo de figuras usando los instrumentos geométricos y su clasificación, y se inicia el trazo de figuras a escala. Ejemplo: En la cuadrícula completa los dos barcos. Toma como referencia el barco de arriba.



En sexto grado se continúan desarrollando los contenidos anteriores, y se realiza un análisis de figuras a partir de sus diagonales. Ejemplo:

Adivina que cuadrilátero soy:



CONCLUSIONES

* El desarrollo es un proceso continuo a través del cual el niño construye lentamente su pensamiento y estructura progresivamente el conocimiento de su realidad en estrecha interacción con ella.

* En el desarrollo del niño, se considera que las estructuras cognositivas, con características propias en cada estadio del desarrollo, tienen su origen en las de un nivel anterior y son a su vez punto de partida de las del nivel subsiguiente, de tal manera que estadios anteriores de menor conocimiento dan sustento al que sigue, el cual representa un progreso con respecto al anterior. Este mecanismo de reajuste o equilibración caracteriza toda la acción humana.

* Dentro del enfoque psicogenético de Piaget no cabe la idea de dirigir el aprendizaje del niño desde afuera; antes bien, el papel del educador debe concebirse como orientador o guía para que el niño reflexione, a partir de las consecuencias de sus acciones, y vaya enriqueciendo cada vez más el conocimiento del mundo que lo rodea.

* Simultáneamente en el contexto de relaciones adulto niño- el desarrollo afectivo social proporciona la base emocional que permite el desarrollo general.

* La noción de número resulta de una síntesis de las operaciones de clasificación, seriación y correspondencia. Dicha noción, en el niño, se construye poco a poco y de --- acuerdo a la etapa de desarrollo en la que se encuentre.- Es por ello que el maestro debe conocer, tanto el proceso evolutivo del ser humano, como los alcances y posibilidades del individuo en cada etapa; para que sus demandas de aprendizaje en los educandos tengan un carácter racional, que a su vez, le permita generar condiciones idoneas para que los alumnos adquieran conocimientos matemáticos sólidos que sean un cimiento firme y alentador para adquisiciones numéricas posteriores.

* Consideramos que una de las causas importantes de las dificultades que numerosos alumnos padecen en nuestras -- clases de matemáticas, está en nuestra concepción misma - de lo que son las mátemáticas y de cómo se aprenden. Nuestra visión de las matemáticas, como lenguaje formal y reglas sintácticas, ha expulsado de la escuela y de lo que- aceptamos como saber legítimo, a la matemática informal.- Junto con ella, han salido de la escuela los procesos que en ella cristalizan: la capacidad de pensar matemaáticamente, de buscar soluciones a los problemas, y de inventar procedimientos de solución. Tal expulsión se ha revertido contra nosotros. Ahora empezamos a comprender que -- esa matemática de las personas, de los alumnos, también -

es una base a partir de la cual puede accederse a la matemática mas formal, y constituye una parte importante del sentido que tendrán, para los alumnos, los algoritmos que les enseñamos.

* Que el maestro de Educación Primaria se prepare más para comprender mejor los intereses y necesidades de los alumnos, y pueda responder adecuadamente a las interrogantes que éstos le planteen, desempeñando así, con mayor integridad y satisfacción su labor docente.

BIBLIOGRAFIA

BLOCK, David y Mónica Schulmaister. La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. México, Ed. Grafik, 1995.

BONFIL, Guadalupe y Alberto Cuervo. Pedagogia: Bases Psicológicas. México U. P. N., 1987.

DIENES, Z. P. y E. W. Golding. Los primeros pasos en matemáticas. Barcelona, Teide, 1980.

FUENLABRADA, Irma y Hugo Balbuena. Juega y aprende matemáticas. México S. E. P., 1992.

LERNER, Delia. Clasificación seriación y concepto de número- Caracas, Consejo Venezolano del Niño, 1977.

MUNGUIA, Irma y Jose Manuel Salcedo. Redacción e investigación documental I. México U. P. N., 1981.

NEMIROVSKI, Miriam y Alicia Carbajal. Contenidos de aprendizaje. México, U. P. N., 1983.

PEREYRA, Marcela. Guía escolar de segundo grado. México, Ed. Santillana, 1995.

PETIT, Nuria. Seis estudios de psicología. México, Ed. Ariel 1995.

PIAGET, Jean. La formación del símbolo en el niño. México -- Ed. Fondo de Cultura Económica, 1980.

PIAGET, Jean y Alina Szeminska. Génesis del número en el niño. Buenos Aires, Ed. Guadalupe, 1975.