UPN

SECRETARIA DE EDUCACION PUBLICA

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

UNIDAD U.P.N. 25 - B

LA MULTIPLICACION: UN CASO DE CONSTRUCCION PROGRESIVA

LEONOR HILDA CAMACHO LOPEZ

RAQUEL RAMOS NIEBLA

TESIS PRESENTADA PARA OBTENER EL TITULO DE LICENCIADA EN EDUCACION PRIMARIA

Mazatlán, Sinaloa; abril de 1995.

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

UNIDAD 252 MAZATLAN, SIN. TELEFONO 83-93-00

SEP

DICTAMEN DEL TRABAJO PARA TITULACION

Mazatlán, Sinaloa, 07 de ABRIL de 1995

C. PROFR (A).: LEONOR HILDA CAMACHO LOPEZ

RAQUEL RAMOS NIEBLA

Presente.-

En mi calidad de Presidente de la Comisión de Exámenes Profesionales de esta Unidad, y como resultado del análisis realizado a su trabajo titulado: " LA MULTIPLICACION : UN CASO DE CONSTRUCCION PROGRESIVA"

opción TESIS asesorado por el C. Profr (a).: ANA LUISA TOSCANO ALATORRE

A propuesta del Asesor Pedagógico, C. Profr (a).: FRANCISCO JAVIER ARANGURE SARMIENTO. , manifiesto a usted que reune los requisitos académicos establecidos al respecto por la institución.

Por lo anterior, se dictamina favorablemente su trabajo y se le autoriza a presentarlo ante el H. Jurado que se le asignará al solicitar su exámen profesional.

ATENTAMENTE

S. E. P.
UNIVERSIDAD PEDAGOGICA
NACIONAL
UNIDAD

M.C. ELIO EDGARDO MILLAN VALDEZ
PRESIDENTE DE LA COMISION DE EXAMENES
PROFESIONALES DE LA UPN 25 "B"

C.c.p. Departamento de Titulación.

INDICE

PAG

INTRODUCCION

La asignatura de matemáticas es considerada como una de las más importantes en la vida de todo alumno, por ser la más aplicable en su vida diaria, pero sin embargo, se ha comprobado que es la asignatura que menos prefieren los educandos por las complicaciones misma que presenta su enseñanza.

Las técnicas tradicionalistas en la enseñanza de las matemáticas han provocado en los alumnos un profundo desinterés y una gran dificultad en la apropiación de los contenidos, pues el tener que aprender mediante la memorización los procedimientos mecanizados, que indiscutiblemente es la razón por la cual el niño hace uso del algoritmo de la multiplicación en forma mecánica sin distinguir las acciones que están implícitas, impidiéndoles aplicarlo en diversas situaciones problemáticas.

Es importante recalcar que, para que el niño adquiera conocimientos en general, es necesario que se encuentre en un medio que le resulte tanto familiar como favorable; ya que de esta manera podrá actuar sobre éste y, a la vez, recibir su influencia.

En el desarrollo del primer capítulo se aborda cómo el conocimiento pasa por un largo período evolutivo, tanto en el individuo como en la sociedad; por lo que Piaget considera necesario tratar el estudio de ambos niveles, brindándonos un esclarecimiento sobre el conocimiento individual y colectivo.

En el segundo capítulo se exponen temas como: Las etapas del pensamiento, los factores de desarrollo, el pensamiento matemático, las ideas lógicas y el pensamiento infantil; en donde se abordan aspectos psicológicos que el maestro debe conocer, puesto que son de vital importancia en el proceso de desarrollo del niño, ya que es el material con el que trabaja; siendo su tarea fundamental, la de contribuir a la formación de sus estructuras intelectuales.

Aunque el mecanismo del desarrollo psicológico es el mismo en todas las edades, el repertorio de esquemas va cambiando dando lugar a estructuras diferentes.

Los temas desarrollados en el capítulo tercero nos muestran como se da la evaluación gradual de los conceptos matemáticos en el niño y la importancia que ellos tienen para la construcción de nuevos conocimientos.

El capítulo cuatro contiene temas donde se analizan las relaciones que se establecen entre alumno y maestro, y los efectos que éste último produce; así como las características y los roles de los sujetos que participan en el proceso educativo.

FORMULACION DEL PROBLEMA

La presencia de problemas cada vez más complejos llevarán al hombre a crear no sólo estrategias para su resolución sino formas para su representación simbólica.

La influencia de las necesidades prácticas de la vida social, también se observa en el desarrollo de las matemáticas y, por tanto en el desarrollo del pensamiento abstracto, pero necesariamente estos dos tipos de desarrollo ejercieron a su vez, una forma particular de resolver estas necesidades.

Así pues, la reflexión abstracta ha llevado a los pueblos cada vez más lejos de lo que requerían las necesidades inmediatas de un problema práctico, propiciando con ello el desarrollo social y científico.

En esta visión general de las repercusiones del pensamiento lógico en el desarrollo de los pueblos podemos afirmar que: "Los conceptos abstractos constituyeron en si, una valiosa herramienta para la vida práctica y fueron constantemente mejorados debido a sus muchas aplicaciones." (1)

---

(1) ALEKSANDROV, A. D. Visión general de las matemáticas.en U.P.N. La matemática en la escuela I. p. 150

Es por ello, que resulta básico conocer de que manera los conocimientos, resultado del avance científico de cada época, pueden llegar no solo a constituirse como contenidos de aprendizaje de una cultura determinada, sino además, que repercusiones tienen en tanto factores del pensamiento abstracto del individuo concreto.

Jean Piaget conocido epistemólogo aborda esta problemática de la ambivalencia del conocimiento, y como resultado de sus investigaciones acerca del desarrollo y el funcionamiento mental del individuo, encontró una gran similitud en las características del conocimiento colectivo e individual señalando que:

> "Al inicio de la historia del pensamiento matemático, sucede lo mismo que en el desarrollo del pensamiento del niño. A medida que se amplía su capacidad de conocer, las relaciones lógicas que el sujeto establece son cada vez mayores que igual que las coordinaciones que entre ellas se producen, lo cual favorece necesariamente la construcción de nuevos conocimientos y mayores relaciones y coordinaciones lógicas." (2)

Lo que antecede puede generalizarse al ámbito educativo, espacio de socialización de los conocimientos considerados valiosos dentro de una cultura en particular.

----

(2) GINSBURG, Herbert. et al. Epistemología genética y las consecuencias de los estudios de Piaget para la enseñanza. p. 59

En este espacio habrá de asumirse entonces, una nueva forma de enfocar el aprendizaje, cuya principal característica está dada por la forma en que el docente propicie la incorporación del conocimiento culturalmente construido, teniendo muy en cuenta la forma en que este conocimiento debe ser insertado en la realidad que vive el sujeto cognoscente.

El análisis de esta ambivalencia del conocimiento es una de las más grandes aportaciones de Jean Piaget, y que constituirá el marco conceptual a través del cual plantearemos el análisis del objeto de estudio que nos ocupará en este trabajo:

"Si el maestro parte de situaciones de aprendizaje en las que los alumnos confronten su pensamiento lógico-matemático, el acceso a las estructuras multiplicativas y por consecuencia al algoritmo de la multiplicación se logrará a través de un proceso en el cual el alumno construya estrategias cada vez más eficientes y económicas."

En la elaboración de dichas situaciones de aprendizaje, tendrá gran importancia que el maestro rescate los elementos respecto a como se construye el conocimiento social y psicológicamente.

Considerando que el conocimiento no es una copia pasiva de los datos que se nos presentan directamente, sino que es el fruto de una construcción activa en la que el sujeto selecciona e interpreta la información del medio. Pero de hecho, el aprendizaje no se realiza, sino cuando el sujeto, hace suyo, reconstruye o reinventa las leyes que rigen un determinado objeto de conocimiento, o el procedimiento por el cual se llega a un cierto resultado.

En otras palabras, es el sujeto mismo, quien construye su propio conocimiento, mediante un proceso de aprendizaje que le lleva a comprender ese objeto.

Ahora bien, este proceso es propio del sujeto y se desarrollará de acuerdo a sus características personales, las cuales abarcan, conocimiento previo del objeto, así como posibilidades de establecer relaciones que favorezcan la adquisición del nuevo conocimiento.

Todo ello nos remite a un proceso y a un tiempo no específico, que no depende exclusivamente de situaciones externas de éste. Asimismo consideramos de gran importancia el papel que desempeñan el supervisor, el director y los maestros; pues ellos son sujetos que participan en la vida cotidiana de la escuela. Buscando con ello modificación de metodologías y estrategias de la enseñanza, con el propósito de que el niño evolucione y construya conceptos gradualmente, poniendo en juego sus propias estrategias, confronte sus hipótesis y así logre un aprendizaje significativo.

Conocer este objeto de conocimiento bajo el marco histórico y como se desarrolla en el pensamiento del niño apoyándose en los conocimientos previos, nos parece de gran importancia, ya que es una manera de conocer el desarrollo colectivo del pensa miento matemático, y por lo tanto; hacerlo operante, respetando el proceso que se dio en su evolución, sin introducir modificaciones en el orden y la naturaleza de los conocimientos que deben ser incorporados en el sistema de pensamiento del alumno, tomando en cuenta el paralelismo que se da entre ambos; desde el período inicial, generando en este proceso una descentración que los dirige a una conciencia cada vez más profunda para llegar a la generalización y comprensión de la realidad. En el cual han puesto de manifiesto la existencia de unos procesos constantes o estrategias intelectuales que sigue el individuo al generalizar las nociones ya conocidas a situaciones nuevas.

"El conocimiento que no es construido o reelaborado por el individuo no es generalizable, sino que permanece ligado sólidamente a la situación en que se aprendió, sin poder ser aplicado a contenidos diferentes." (3)

Generándose así un aprendizaje que supone una construcción que se realiza a través de un proceso mental que finaliza con la adquisición de un conocimiento nuevo.

Pero en este proceso no es solo el nuevo conocimiento lo que se ha adquirido, sino la posibilidad de construirlo.

Es necesario que el maestro:

- Conozca la sociogénesis y psicogénesis de este objeto de conocimiento.

----

(3) MORENO, Montserrat. La aplicación de la psicología genética en la escuela. p. 24

- Considere a la multiplicación como una operación diferente a la suma y que representa acciones diferentes.

- Que conozca las características esenciales del pensamiento del niño, así como también las capacidades y limitaciones que tienen para acceder al conocimiento de la multiplicación; así como también las capacidades y limitaciones que tienen para acceder al conocimiento de la multiplicación. El papel que juega el maestro dentro de este proceso es estimular y fomentar la construcción y reconstrucción del conocimiento del niño, pues ésto será primordial en el proceso enseñanza-aprendizaje.

Y conocerlo sería pues, elevar la calidad de la educación, pues formaremos personas que sean capaces de hacer cosas nuevas y no simplemente repetir lo que otros hacen.

CAPITULO I

LOS OBJETOS DE CONOCIMIENTO SOCIALMENTE CONSTRUIDOS

La idea de establecer un paralelismo entre la adquisición individual del conocimiento y el desarrollo histórico del mismo, surge de la concepción de aprendizaje que Jean Piaget postuló. En ella, el autor sostiene, en un intento de explicar la construcción del conocimiento de parte del sujeto que pasa por un largo período evolutivo, tanto en el individuo como en la humanidad.

Para el estudio de los problemas epistemológicos de estos niveles, Piaget usa el método psicogenético y el método histórico crítico. Este último consiste en un análisis del pensamiento colectivo a lo largo de un cierto período de tiempo, dentro de un determinado marco.

Con el método psicogenético alcanza una comprensión de como se desarrolla el conocimiento individual, este análisis ontogenético le permite observar que si el niño al principio de su desarrollo no es consciente de sus operaciones mentales, no obstante pueda realizar con éxito un cierto número de acciones sobre las cosas que le rodean, lentamente y con el incremento de sus capacidades intelectuales, éstas se van ampliando y le permiten comprender con mayor facilidad las situaciones concretas, para adelante ser capaz de operar mentalmente con acontecimientos abstractos.

Al comparar los resultados de los análisis efectuados con estos dos métodos, Piaget concluye que las características del desarrollo individual son análogas con las del desarrollo colectivo puesto que, en el inicio de la historia del pensamiento matemático sucede lo mismo que en el pensamiento infantil, para después irse generando un proceso de descentración que conduce a una conciencia cada vez más profunda de la realidad externa e interna.

"Tanto en el pensamiento individual como en el colectivo, el período inicial revela una falta de conciencia de rasgos más profundos y sutiles de la realidad y de las complejidades del pensamiento y de la actividad mental." (4)

Piaget cree pues, que el estudio del desarrollo científico en el niño debiera ser un complemento útil del estudio del pensamiento colectivo. "Combinando los dos métodos se puede alcanzar mayor comprensión de la naturaleza del conocimiento." (5)

Con esta premisa como guía, en este capítulo presentamos la reseña histórica del concepto de número y las generalizaciones ulteriores que de él se derivaron, puesto que le dan marco de referencia a cualquier explicación, a objetos culturalmente construidos que deban ser retomados como objeto de conocimiento de una currícula escolar.

----

(4) Ibidem p. 62

(5) Idem.

A. El número: Un objeto cultural.

Conforme la civilización se complejizaba, el ser humano se enfrentaba a nuevos retos que le obligaban a reestructurar su pensamiento y a buscar nuevas formas de solución, de representación y sobre todo de comunicación.

Así, cada pueblo construye sus propios métodos de solución de problemas, sus propios sistemas de representación y ello va dando una idea de los avances que permiten al hombre alcanzar nuevos horizontes en donde muchas de sus interrogantes y dudas van encontrando respuesta.

Estos destellos culturales, van consolidando procesos históricos; el empleo de los términos, mucho, poco, bastante; para diferenciar cuantitativamente el mundo que lo rodea; la necesidad de registrar cantidades y distinguir las relaciones de orden que entre ellas podían establecerse, aspecto que lo llevaría al número, no como una cantidad separada, sino por el contrario, como un sistema con sus relaciones y sus reglas que lentamente se constituiría en sistemas de numeración;son grandes logros culturales de la historia de la humanidad.

Conocer el desarrollo histórico de estos logros conceptuales, reviste especial importancia a partir de conocer que este proceso se refleja en el desarrollo ontogénico del niño.

Reconocer las dificultades que la humanidad tuvo que enfrentar en este proceso histórico nos permite vislumbrar lo que el niño vive en su reconstrucción.

Cuando los niños llegan a la escuela ya tienen recorrido un camino en la reconstrucción del conocimiento que a la humanidad le ha costado tantas generaciones elaborar.

El conocimiento lógico-matemático, comienza en los niños desde una edad muy temprana, pero los esquemas que tendrán repercusiones más directas con la reconstrucción del concepto de número, son los esquemas de agrupación y clasificación que les permiten ir estableciendo relaciones entre los objetos, y así a parece el establecimiento de semejanzas y diferencias de las relaciones de equivalencia que le posibilitarán nuevas relaciones; las de orden.

Los esquemas de seriación se van guiando por criterios y reglas cada vez más complejas, de tal manera que el primer aspecto que podemos distinguir como acercamiento al concepto de número tiene una gran analogía con la etapa intuitiva, en la cual el hombre descubre que los objetos pueden ser cuantificados, pero también diferenciados por sus aspectos cualitativos.

Conforme aumentan las capacidades intelectuales del niño, también crecen sus posibilidades de establecer nuevas relaciones con los objetos tan importantes para su desarrollo cognitivo como lo es la correspondencia.

Esta segunda fase, también es vivida por la historia de la humanidad. Para una mejor comparación, tanto de la evolución que tiene el concepto de número en el niño y en el desarrollo de la humanidad, se presenta el cuadro # 1 en donde se resumen los logros que, en las distintas etapas de desarrollo se construyen en estos dos niveles. (Ver anexo #1)

Como se puede observar, la evolución que históricamente ha tenido el concepto de número, está completamente ligada al proceso de desarrollo que sigue el niño para su construcción.

Y no solo eso, sino que existe además una analogía entre el pensamiento matemático y el desarrollo intelectual del niño. En la primera fase que se marca en el cuadro, el hombre solo puede establecer ciertas relaciones, casi circunscritas al plano de lo familiar, lo que implica la realización de ciertas operaciones o transformaciones en el medio ambiente.

Este hecho es casi inconciente de los procesos que determinan su actividad mental. De aquí, que para Piaget este período de la historia de las matemáticas puede ser comparado con la etapa del pensamiento preoperatorio del niño.

En las posteriores fases de correspondencia y construcción de la serie numérica, podemos distinguir tanto en la fase histórica como la del sujeto como individuo, los momentos en los que el desarrollo posibilita operaciones más directas, concretas. En este momento, hombre cultural y hombre individuo no solo pueden clasificar las cosas, ordenarlas o realizar una serie de operaciones mentales, sino que se hace consciente de las transformaciones que realiza sobre los objetos de tal forma que pueda construir o reconstruir una serie numérica, lo que lo posibilitará para establecer entre los conjuntos que lo rodean relaciones más complejas. Al principio, esta conciencia dista de ser completa, pero ya no se centra más sobre los atributos de la realidad, sino que propone transformaciones y operaciones concretas.

El tercer período lo distinguiremos en la fase de invención del principio de base y en la transposición, ya que en este período, tanto la civilización como el niño se hacen conscientes de su capacidad de operar sobre las cosas que son, unas veces concretas y otras abstractas, como lo sería el sistema posicional; en estos casos diría Piaget "...la realidad se hace secundaria respecto a la posibilidad" (6). El interés no solo está puesto en los resultados reales, sino las posibilidades y generalizaciones que de él pudieran desprenderse, tal y como sucede en la etapa del pensamiento hipotético-deductivo que está presente en la etapa de las operaciones formales.

A continuación nos ocuparemos de uno de los conocimientos que resultaron de las generalizaciones hechas de la construcción de número.

---

(6) Ibidem P. 60

B. El sistema de numeración decimal.

El sistema de numeración es una creación intelectual de la humanidad, de máxima utilidad para conceptualizar las cantidades y operar con ellas. La construcción de éste como de otros objetos de conocimiento, evolucionó a partir de necesidades específicas que se gestan con base a problemas muy particulares que los individuos de un grupo social enfrentan en sus relaciones internas y sus interrelaciones con otros grupos.

Dicha evolución va alcanzando distintos niveles de desarrollo, los cuales en un momento dado se integran a un grupo de conocimiento estructurado y son asimilados por el pensamiento social.

Todo ello fue fruto de un largo proceso, en el que se dan numerosos ensayos, ideas brillantes y fracasos.

Sin embargo la escuela pasa por alto que este largo proceso histórico refleja también las dificultades por las que el niño pasa para reconstruir los objetos culturales, y en su afán porque los adquiera lo antes posible, no respeta los procesos naturales por los que el niño debe pasar.

Una vez construida la serie numérica el hombre se dio a la tarea de buscar una forma de representación, que utilizará símbolos o signos; así las diferentes culturas hicieron sus aportaciones al mundo: Los sistemas de numeración.

Estos se fueron desarrollando a lo largo de la historia, pero siempre aunados a la forma hablada y según las posibilidades intelectuales y las circunstancias histórico-sociales que los creaban.

De los más usuales y conocidos podemos distinguir tres grupos:

Los sistemas aditivos: Tienen la ventaja de atribuir una cifra particular a cada unidad de cada orden, pero presenta el inconveniente de exigir el recuento de muchos signos.

El sistema híbrido: Surgió de la necesidad de evitar la repetición de signos, se caracteriza por hacer uso del punto, principio de la multiplicación.

El sistema posicional: Se caracteriza por conceder valor variable a las cifras según el lugar que ocupen. Este último apareció por primera vez en Babilonia aproximadamente a principios del segundo milenio a. C.; también lo utilizaron los astrónomos mayas , durante los siglos II al IX y los chinos, poco antes de iniciarse nuestra era.

En la India, donde aparece con mayor ingeniosidad y superioridad su aplicación se dio en el año 595 de nuestra era.

Aunado con el descubrimiento del principio de posición, el cero ha constituido, sin lugar a dudas, la etapa decisiva de una evolución en el progreso de las matemáticas.

Algunos sistemas de numeración ignoraron el cero por muchos siglos, mientras que en otras su función era sumamente diferente a la que se le da en nuestro sistema de numeración, se tomaba como un operador que multiplica el valor del número al que sigue por el valor de la base.

El cero primero lo construyeron en la India desde el siglo VIII de nuestra era. Debido a los contactos que se tenían con la India, los árabes adoptaron el valor posicional y el cero y lo transmitieron a Europa, donde aparece por primera vez a finales del siglo X; su uso se generalizó hasta el siglo XVI.

La invención del cero, simplificó en cierta medida las escrituras, por ejemplo, en nuestro sistema con cero, la multiplicación por cien se efectúo siguiendo unas reglas simples:

1002 x 100 = 100 200

Como se puede apreciar la aparición del cero fue tardía, aunque su construcción fue adoptada por el hombre como satisfactor de sus necesidades.

"El repaso de la historia a la numeración, permite constatar cómo, hombres muy alejados en el tiempo y en el espacio han elegido las mismas vías para llegar a resultados muy semejantes. Esta convergencia en la concepción de sistemas de numeración prueba la estabilidad y la unidad de la evaluación de las estrategias intelectua les del hombre en la construcción de una noción re querida para su adaptación ventajosa al medio." (7)

La noción de base, fue un principio que contribuyó enormemente en la construcción de los sistemas posicionales.

Primeramente se hizo en forma hablada y después se aplicó al registro material de los números, utilizando fichas, como elementos para representar los valores numéricos.

Estos avances se fueron desarrollando hasta arribar al principio de base diez, que es la más utilizada en toda la historia de la numeración.

"El sistema de numeración posicional de base diez, es una creación intelectual de la humanidad, de máxima utilidad para conceptualizar las cantidades y operar con ellas. "(8)

C. Las representaciones multiplicativas.

Como se describió anteriormente, a lo largo de la historia han existido diferentes sistemas de numeración, en los cuales algunos demuestran que las concepciones aditivas fueron dominantes durante largo tiempo. Sin embargo, uno de los mayores logros en la historia del progreso científico, estriba en la invención del sistema posicional, el cual solo fue posible gracias al descubrimiento del principio multiplicativo.

----

(7) S.E.P. Sistema de numeración decimal en la historia. p. 72
(8) Ibidem p. 61

Observemos los siguientes ejemplos correspondientes a los tres principales tipos de numeración decimal.

-Sistemas aditivos:

En primer lugar, se muestra un sistema aditivo utilizado por la mayoría de los pueblos de la antigüedad, caracterizado por atribuir signos especiales a la unidad y a cada potencia de la base elegida.

Cada uno de estos signos se repite tantas veces como sea necesario, sin que se combinen entre si, según un código.

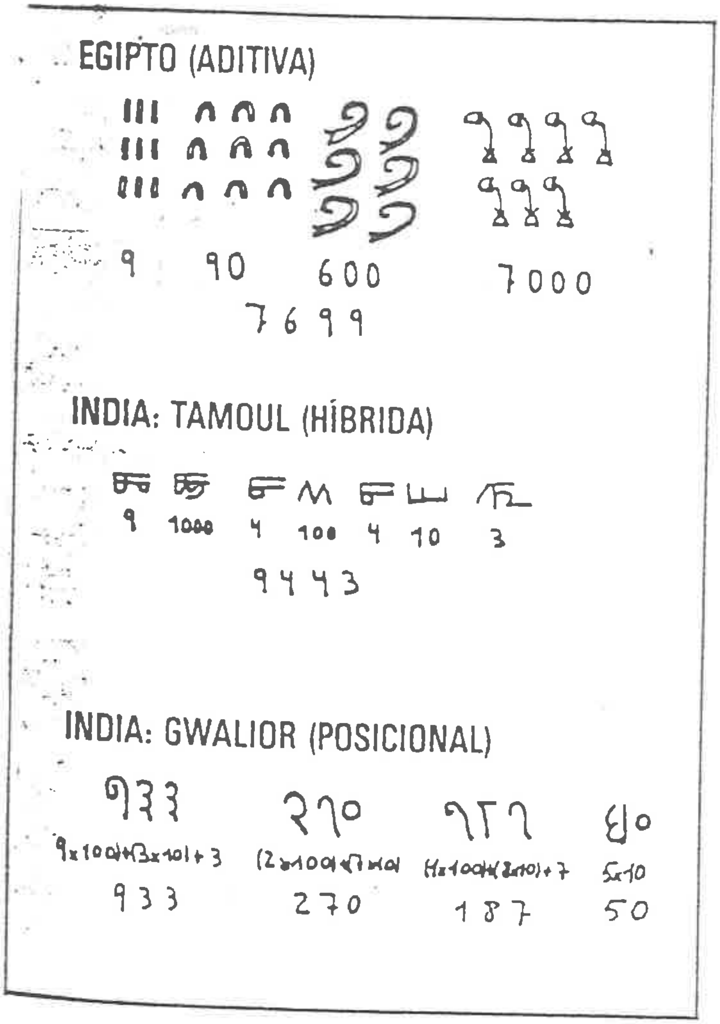
- Sistemas híbridos:

En segundo lugar aparecen sistemas híbridos, que combinan el sistema aditivo con uno multiplicativo, puesto que los coeficientes del sistema se multiplican por las potencias de la base. Así, por ejemplo, en la antigua numeración india se representaría el número 5.425, bajo la forma (5x1000) + (4 x 100) + (2x10) + 5.

- Sistemas posicionales:

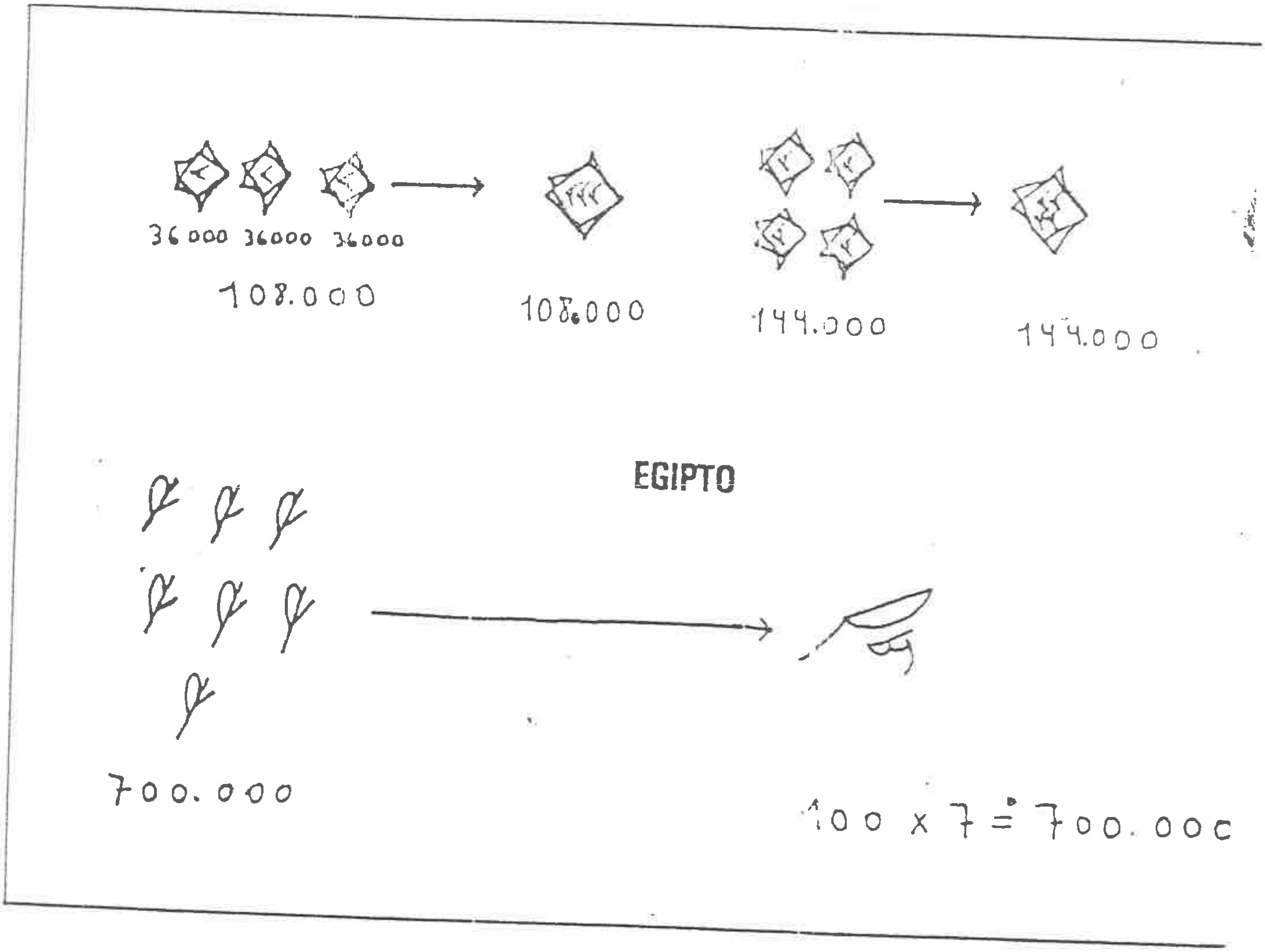
Finalmente puede verse un ejemplo de sistema posicional, que conjuga con el principio de las bases y a combinación de las operaciones aditivas y multiplicativas la atribución de un carácter dinámico y variable a cada uno de los dígitos de la base, los cuales al combinarse entre sí, adoptan un valor u otro, según la posición que ocupan.

En la siguiente figura, pueden observarse también algunos ejemplos de la evolución de las notaciones, dentro de un mismo sistema de numeración. Estas evolucionan, aunque muy lentamente, desde sistemas aditivos hacia sistemas multiplicativos, mucho más económicos.



Los sumerios, por ejemplo, representaban la cantidad 10,800 mediante tres símbolos (3,600 + 3,600)~~+~~hasta utilizar uno solo,
3600
que incluye multiplicando y multiplicador.

Los egipcios, por su parte, utilizaban en el Antiguo Imperio, un sistema claramente aditivo, ya que para aumentar 700,000; se repetía siete veces el signo 100,000, ésto evolucionó en el Imperio Medio, hacia un sistema multiplicativo, en el que solo aparecía el número de grupos y el número de elementos de cada grupo, por ejemplo 7 de 100,000.



Como se puede observar en la representación del desarrollo histórico del concepto de número, de sistema de numeración y de representaciones multiplicativas, es posible resaltar los siguientes aspectos:

1. Muchos problemas referentes a la construcción de un objeto cultural, implican la relación entre el que conoce y su medio ambiente o la innateidad de ciertas formas de conocimiento que se relacionan con la conducta humana, y por tanto son de índole psicológica.

2. Dadas las características evolutivas del conocimiento socialmente construido, tendría que ser analizado como un proceso de desarrollo social, en el que podría ser útil un estudio genético.

3. Las estructuras mentales, gracias al desarrollo, toman formas colectivamente distintas, pero que a pesar de ello retienen una cierta continuidad, puesto que se generan de estructuras previas, tal y como sucede en el plano individual..

Con los elementos anteriores no era extraño que Jean Piaget pensara en la necesidad de establecer un paralelismo entre la adquisición individual del conocimiento y el desarrollo histórico del mismo. Desde esta posición el autor sostiene que el conocimiento pasa por un largo período evolutivo, tanto individual como colectivamente.

Para el estudio de los problemas epistemológicos de estos niveles, Piaget usó el método genético y el método histórico - crítico.

Con el método psicogenético alcanzó una comprensión de como se desarrolla el crecimiento individual y, con el histórico-
cono

crítico realizó un análisis del pensamiento colectivo a lo largo de un cierto período de tiempo, dentro de un determinado marco, tal y como en este capítulo se ha presentado, tomando como ejemplo los tres objetos aquí revisados.

Al desarrollar estos dos métodos de análisis, Piaget pudo comprobar que en el problema de los orígenes del conocimiento, los datos psicológicos pueden contribuir a la comprensión, cada vez mayor de los problemas de la naturaleza epistemológica. Por tanto el análisis de la psicogénesis del objeto de conocimiento, debe ocupar un papel importante en cualquier análisis educativo. Este será el tema del siguiente capítulo.

CAPITULO II

LOS OBJETOS DE CONOCIMIENTO PSICOLOGICAMENTE CONSTRUIDOS

El capítulo anterior nos formula algunas reflexiones acerca de la importancia que tiene el conocimiento colectivo y describe el desarrollo histórico de algunos objetos culturales estableciendo una ambivalencia en la adquisición del conocimiento por parte del niño, ya que si bien, tanto uno como otro suponen una construcción encaminada hacia el progreso y la mejora de los instrumentos intelectuales, están guiados por diferentes motivaciones.

Mientras el proceso de invención individual lo está por la necesidad del niño de apropiarse de los acontecimientos que la cultura ofrece. Piaget se acercó a este problema con un marco tanto biológico como psicológico. Cuando se preocupaba de la adquisición individual del conocimiento, usando el método psicogenético que trata del desarrollo individual de ciertas nociones científicas como el espacio, la geometría, el número desde su aparición inicial, hasta la etapa en donde estas nociones consiguen sus formas más maduras, Y compara esta orientación con un cierto tipo de embriología mental del niño, analizando el proceso evolutivo a través de las etapas de pensamiento, que a partir de unas estructuras básicas, accesibles al nacer, el niño empieza a interactuar con el medio ambiente reorganizando estas estructuras y desarrollando unas nuevas.

Gracias al desarrollo de estas estructuras mentales se constituyen formas colectivamente distintas, pero al mismo tiempo retienen una cierta continuidad, puesto que cada una de ellas parte de estructuras previas, como se menciona a continuación.

A. Etapas del pensamiento.

Para Piaget, las ideas lógicas si cuentan, y éstas no pueden ser transmitidas en forma verbal, sino que deben ser creadas por el niño a través de su acción con los objetos, y por lo tanto es actuar sobre los demás.

"La lógica en el niño se presenta esencialmente bajo la forma de estructuras operatorias. Cada una de estas estructuras comporta leyes de totalidades que definen el sistema operatorio en una forma particular de reversibilidad." (9)

La constitución de estas estructuras operatorias y el perfeccionamiento de la reversibilidad, sabemos que constituye un proceso que va evolucionando gradualmente en el transcurso de su desarrollo.

Partiendo de este criterio, Piaget distingue cuatro estadios o etapas en el desarrollo de la lógica del niño.

----

(9) LABINOWICZ, Ed. Las etapas de Piaget. p. 88

Así mismo afirma que, para que una etapa funcione como tal, ésta debe presentar un orden sucesivo, invariable y constante. Por lo tanto en el desarrollo del niño, éstas deben presentarse en un orden ontogénico.

Pero al mismo tiempo acepta que la aparición de las etapas de acuerdo a la edad del niño, puede manifestar algunas variaciones; por lo que él advierte que no se debe identificar fielmente a la etapa con la edad, sino que es más propio, hacer una aproximación en edades promedio.

También es importante señalar que no todos los individuos alcanzan todas las etapas de desarrollo.

Es vital tomar en cuenta que las estructuras que definen a cierta etapa deben integrarse a la etapa posterior.

Las etapas deben contar con propiedades estructurales que le permitan presentar un período inicial de preparación, en el cual, dichas estructuras se encuentran en proceso de formación y organización, y será en la fase preoperatoria donde las estructuras formarán una totalidad estrechamente ligada, organizada y estable.

Por lo tanto, si se considera a la organización cognoscitiva, el proceso evolutivo, definitivamente es en todos sus puntos heterogéneo.

A continuación haremos mención de las características que se presentan en las estructuras cognoscitivas del individuo.

1. *Período sensoriomotor*: Es la primera etapa, la cual es anterior al lenguaje, e inicia con el nacimiento hasta aproximadamente los dos años de edad. El niño responde mediante la base de esquemas sensoriales innatos, es decir, mediante reflejos. Se da el establecimiento de nuevos esquemas de acción. Se da la inteligencia práctica o empírica, se presentan los principios de la asimilación reproductora de orden funcional, como el chupar, tirar, etc.

En esta etapa, las acciones se organizan ya, según ciertas estructuras que preparan la reversibilidad y la constitución de invariantes.

Ejemplo: El bebé de cinco o seis meses no presenta ninguna conducta de búsqueda del objeto cuando no es visible para él, mientras que de los doce a los dieciocho meses ya el objeto se ha convertido en permanente y ésto da lugar a conductas de búsqueda. "La constitución de esta primera invariante que es el objeto permanente en el espacio próximo, va ligada a una organización de movimientos propios y de los desplazamientos del objeto. "(10)

----

(10) PIAGET, Jean. et al. El nivel sensomotor. en U.P.N. La matemática en la escuela I. p. 240

2. *Período preoperatorio:* Esta etapa se presenta de los dos a los siete años, empieza el pensamiento acompañado del lenguaje, el juego simbólico, la imitación diferida y la imagen mental.

El niño adquiere gracias al lenguaje, la capacidad de reconstruir sus acciones pasadas en forma de relato y de anticipar sus acciones futuras mediante la representación verbal.

En la transición de este período el niño descubre que algunas cosas pueden tomar el lugar de otras. El pensamiento infantil ya no está sujeto a acciones externas y se interioriza y ésto proporciona más movilidad para una creciente inteligencia.

Durante este período, el niño ejecuta experimentos mentales en los cuales recorre los símbolos de hechos como si él participara realmente en éstos. Ellos conducen a un pensamiento unidireccional (egocéntrico). El pensamiento en esta edad es prelógico.

3. *Período de las operaciones concretas:* Este período se inicia hacia los siete años y termina alrededor de los once. Durante este período el niño se descentra y se vuelve totalmente reversible. El niño ya es capaz de mostrar su pensamiento lógico ante la acción física de los objetos.

Adquiere la reversibilidad del pensamiento. Esta capacidad está sujeta a una limitación importante; el niño necesita presenciar o ejecutar la operación en orden para invertirla mentalmente.

El niño reconoce que ciertas propiedades permanecen inalterables a pesar del cambio en su apariencia. Se vuelve más sociocéntrico, y cada vez toma mayor conciencia de la opinión de otras personas.

En este período aparecen formas de organización nuevas, que preceden de las construcciones esbozadas en el período anterior y al mismo tiempo se realiza una serie ininterrumpida de construcciones nuevas.

Estas capacidades mentales se demuestran por un rápido incremento de su habilidad para conservar ciertas propiedades de los objetos, como lo son el número y la cantidad, a través de los cambios de otras propiedades y para realizar una clarificación y ordenamiento de los objetos. La conservación depende de la maduración..

4. *Período de las operaciones formales:* Esta etapa aparece entre los once años y se prolonga hasta alrededor de los quince y se distingue por ser la etapa final del desarrollo lógico. El niño adquiere la capacidad para utilizar operaciones abstractas internalizadas, basadas en principios generales o ecuaciones, para predecir los efectos de las operaciones con objetos.

En esta fase también interviene el completamiento y la resolución de problemas, pueden presentarse dentro de un marco de referencias puramente abstracto, ajeno a toda finalidad de obtener alimento o satisfacer otras necesidades.

Por ser adolescente capaz de formular hipótesis acerca de cosas que no están al alcance de su manipulación, se torna posible un proceso de "ensayo" y "error" auténticamente interno, así como un proceso más cognitivo de asimilaciones recíprocas de esquemas; por lo que podemos decir que el razonamiento del niño es hipotético-deductivo, se hace pues posible, y con él, la construcción de una lógica "formal".

Este período se caracteriza por la habilidad para pensar más allá de la realidad concreta; el niño puede pensar acerca de la relación de relaciones y otras ideas abstractas como proporciones y conceptos.

Cada estadio constituye pues, por las estructuras que la definen, una forma particular de equilibrio y la evolución mental se efectúa en el sentido de una equilibración más avanzada.

B. Factores del desarrollo.

Es indudable que el niño posee curiosidades e intereses, y es, a partir de ello, precisamente que debe darse todo conocimiento, tal y como lo afirma en su teoría constructivista Jean Piaget.

En su teoría, Piaget nos muestra que existe una manera diferente de adquirir los conocimientos y además pretende con ella, que el sujeto cognoscente juegue un papel activo en todo acto de conocimiento; así como la búsqueda de sus implicaciones en la práctica docente. Por lo que abordamos de esta teoría lo más significativo para sustentar nuestro problema.

Según Piaget; "El desarrollo del pensamiento es una construcción continua en la que intervienen dos aspectos, el llamado funcional que es de carácter biológico y el estructural o psicológico que se refiere a las experiencias que el individuo adquiere en su interrelación con su medio." (11)

Sabemos que el conocimiento no se da sólo en función de las características propias del niño, sino también han de considerarse las características particulares del objeto a conocer y que en base a esa interacción se de el conocimiento, lo que dará paso a la creación de los diferentes esquemas de conocimiento.

Piaget se refiere a las estructuras individuales con el nombre de esquemas. "Un esquema es una especie de minisistema, es esta propiedad de la acción la que puede generalizarse a otros contenidos." (12)

Para Piaget, el desarrollo de las estructuras, así como el de los contenidos se dan a través de las invariantes funcionales, que son la asimilación y la acomodación, así como las estructuras psicológicas que se hayan entrelazadas entre sí, de tal forma que es imposible separarlas.

Como hemos visto, la asimilación y la acomodación, aunque complementarias, pueden darse sin embargo sin simultaneidad,

---

(11) DELVAL, Juan. Crecer y pensar. p. 78

(12) PIAGET, Jean. Teoría psicogenética. p. 27

se requiere de un equilibrio entre las dos para que podamos hablar de una adaptación o acomodación.

En el proceso de organizar sus actividades, el individuo asimila los conocimientos nuevos a las estructuras preexistentes, de tal manera que se consigue superar las exigencias de la nueva situación. Además las invariantes funcionales, es decir la asimilación y la acomodación se encuentran íntimamente vinculadas a las estructuras de la inteligencia.

Como un resultado de las tendencias hacia las invariantes, se van creando continuamente nuevas estructuras a partir de las anteriores y que podrían ser empleadas para ayudar al individuo en su interacción con el mundo.

Planteándolo de otra manera podríamos decir que las estructuras son necesarias para la asimilación y la acomodación. No podríamos ni adaptarnos al medio ambiente, ni organizar los procesos de una persona si no existieran desde el comienzo estructuras básicas. Por el contrario, la misma existencia de una estructura, la cual, según la definición de Piaget, "...es una totalidad organizada, supone la necesidad de una organización y de una adaptación." (13). Se dan, sin embargo, diferencias importantes entre las funciones invariables y las estructuras.

A medida de que el individuo desarrolla su trayectoria vital, las funciones pemanecerán siendo las mismas, pero las estructuras variarán, apareciendo según con frecuencias bastante regulares.

Dicho de otra forma, el desarrollo intelectual avanza a través de una serie de etapas, y cada etapa se caracteriza por un diferente tipo de estructuras psicológicas, tal y como se describe en el tema anterior.

Por otro lado, Piaget afirma que la experiencia que el niño tiene, interactúan con la secuencia maduracional de desarrollo del cerebro y dan origen a una plena realización de las aptitudes cognitivas; dichas actividades son:

- Ejercicio: Es un tipo de aprendizaje por contigüidad que no exige refuerzo. Se le puede considerar activizado por el propio niño, antes que por estímulos ambientales; como ejemplo, se puede mencionar la mayor eficacia que el niño adquiere con la práctica de actividades como patear, volver la cabeza, etc.

- Experiencia física: Se trata del proceso de aprender las propiedades de los objetos, por lo general mediante su manipulación. Es el proceso por el cual el niño aprende que los metales son por lo general más pesados que la madera o los plásticos, o que la arcilla se puede modelar.

Gracias a este proceso el niño obtiene la información que necesita para resolver problemas más abstractos. Le permite al niño el aprendizaje por medio de una vía más directa.

- Experiencia lógica-matemática: Es un tipo de aprendizaje superior, que depende más de las propiedades especiales, de la interacción sujeto-objeto, que de las propiedades de los objetos. Piaget denomina "estructura cognitiva" a esas reglas que, como tales, configuran reglas de estrategias para la resolución de problemas. Se trata por ejemplo de saber, que algunas operaciones pueden devolver la apariencia que tenían antes de la manipulación, ejemplo concreto, la manipulación de arcilla, las diversas formas que esta puede tomar.

Los principios de organización interna propuestos o esquemas propuestos por Piaget, cambian en función de la maduración y la experiencia, y se convierten en nuevas estructuras cognitivas o reglas para el procesamiento de la información.

Solo las funciones equilibrio, asimilación y acomodación siguen actuando durante todo el desarrollo infantil, consolidando poco a poco su pensamiento matemático.

C. La génesis del pensamiento matemático en el niño.

La matemática ha sufrido una intensa evolución a lo largo de la historia, ampliando sus horizontes continuamente a nuevos conocimientos que son demostrables a partir de procedimientos matemáticos. De aquí surge el carácter abstracto que ésta posee, por lo tanto le resulta difícil de asimilar al pensamiento concreto del niño, al inicio de la educación primaria.

Es necesario señalar que, la génesis del pensamiento matemático, tiene sus raíces históricas ancladas en lo concreto, como se describe en el capítulo I. Nos damos cuenta pues, que entre el proceso histórico y el proceso del niño existe una simultaneidad en ambos, en la forma en que se desarrolla el pensamiento matemático espontáneo del niño y de algunos pueblos; en cambio, en algunas escuelas, parten desde otra perspectiva; por no contemplar la manifestación del niño como los inicios de una organización creciente, ligada a lo concreto, de las propiedades de sus acciones sobre los objetos que le rodean.

"Para que exista abstracción, es necesario que exista algo de donde abstraer y, ese algo en las formas elementales del pensamiento, no puede ser más que la organización de las acciones sobre los objetos a los que el niño tiene acceso." (14)

A este respecto, Piaget nos hace hincapié en la importancia que tiene que el niño actúe y reflexione sobre sus acciones que produce para que pueda comprender y construir las operaciones elementales que le dan un carácter de necesidad.

"La experiencia lógico-matemática es el resultado de la abstracción de propiedades de las acciones del sujeto." (15)

Está claro que no existen matemáticas sin abstracción, pero ésta puede ser de niveles muy diferentes; es decir, que las acciones uq llevan para la construcción de un objeto, como por ejemplo el sistema numérico implica un grado de abstracción distinto al de la comprensión de un logaritmo. Cada uno de ellos supone un eslabón distinto en las cadenas de abstracciones y generalizaciones con sus respectivas construcciones.

Todo avance en el pensamiento matemático implica un avance en el razonamiento infantil en general, y tal situación, obliga al niño a reestructurar y reorganizar su pensamiento para llegar a la generalización.

La génesis del pensamiento matemático en el niño es la historia del pensamiento matemático del adulto que, paso a paso, se va desarrollando en cada individuo.

Conocerla es el elemento imprescindible sobre el que nos debemos apoyar para propiciar situaciones de aprendizaje y no precipitarnos en enseñar y utilizar signos aritméticos antes de haber construido al noción que significan, porque así estamos conduciendo a que el niño haga uso del signo como una aplicación mecánica de fórmulas sin sentido.

D. Las ideas lógicas y el pensamiento infantil.

Durante el transcurso de este capítulo se han descrito las cuatro etapas del desarrollo intelectual infantil, este estudio anticipaba ya las posibilidades que el avance cognitivo aporta en la resolución de tareas y en la interpretación que del mundo hace el niño.

Posteriormente se señaló como el medio ambiente, el tipo de experiencia que adquiere y la situación a la que se haya expuesto el sujeto, son importantes puesto que canalizan la ejecución mental del niño, a lo cual habrá que agregar para su mayor comprensión lo dicho por Piaget:

"La experiencia y la situación son importantes pero no determinantes en el desarrollo intelectual del niño, ya que para ellos e requiere de una estructura mental o de una experiencia en forma de esquema en la cual se apoyen las construcciones." (16)

De lo anterior podemos pensar que existen en el niño ideas lógicas que previamente habrá construido y que, ante la nueva situación se constituyen en influencia para la mejor aprehensión de la realidad, esto significa que para el niño, la realidad no es un fenómeno objetivo que posee su propia existencia independiente, sino más bien "...la realidad se haya determinada por el tipo de estructura con la cual es aprehendida la realidad." (17)

Si bien, Piaget no era pedagogo sino biólogo, es patente que su obra es muy importante para la educación. La investigaciones de Piaget sobre el desarrollo de ciertos conceptos lógico-matemáticos nos hacen ver cual es el proceso que cada uno de ellos supone en su construcción y cuales son las ideas lógicas que previamente debieron haberse desarrollado por el sujeto.

A continuación plantearemos algunas de ellas a fín de que puedan observarse "...las relaciones de filiación en contenidos cuyas estructuraciones pueden o no ser simultáneas...", como lo señalaron Inhelder y Bovet (1975).

----

(16) PIAGET, Jean. Psicología y pedagogía. p. 36

(17) Ibidem p. 51

Es decir que papel juegan las estructuras previas en el aprendizaje de nuevas estructuras sin que la conexión entre ellas sea precisamente del mismo momento de desarrollo, en otras palabras, que determinada idea o esquema lógico se constituirá necesariamente en la base de otro esquema aunque no sea del mismo período de desarrollo.

Lo anterior adquiere significado en este trabajo en donde deseamos establecer la importancia que tiene en la educación considerar estos elementos en la enseñanza de un contenido que aunque aparentemente es más evolucionado, para su adquisición se requieren de estructuras previas. Algunas de las ideas necesarias en la noción de multiplicación, la constituyen los siguientes conceptos o nociones:

1. *La noción de numerosidad:* Los niños, antes de ingresar a la escuela primaria se enfrentan a diversas situaciones en las que hacen uso del conocimiento numérico que han logrado a través de diversas experiencias concretas, realizando actividades de conteo.

Así como el concepto de número tiene un proceso dentro de la historia, también en nuestra educación, dentro del proceso enseñanza-aprendizaje, se topa con la necesidad de que se de todo un proceso de aprendizaje, que le permita al niño la obtención del conocimiento y puesto en práctica de dicho concepto.

Los niños viven todo un desarrollo, que se inicia en su hogar, en medio de las actividades cotidianas, pues de pronto surgen dudas y su curiosidad no se satisface; y es entonces, cuando aparece la idea de numerosidad.

Así llega al jardín de niños, donde paulatinamente se le va induciendo hacia el maravilloso mundo del número y por ende a las matemáticas.

Claro está que solo se verá hasta donde su nivel de desarrollo de pensamiento se lo permita. Es aquí cuando aparece el concepto de correspondencia, el cual el niño desarrolla y aplica.

El niño al crecer descubre día a día nuevas interrogantes, con lo cual de pronto, se percata de que todo lo que ha aprendido, no le proporcionan las respuestas deseadas, de esta manera, mientras él va descubriendo un mundo cada vez más complejo, el proceso reconstructor del concepto de número se modifica, lo que poco a poco va dando al niño ciertas satisfacciones, con lo cual el proceso enseñanza-aprendizaje se va fortaleciendo y reforzando.

Al igual que el concepto de número, las de operaciones lógicas, problemas lógicos, etc; se desarrollan lenta y paulatinamente, pero al final logran sus objetivos trazados, siempre y cuando se cumplan con la reglas, que en sí las matemáticas exigen.

De esa manera, para que el niño haya construido un concepto operatorio del número tendrá que apoyarse en dos estructuras operatorias que son, la agrupación aditiva de las clases, que construye el proceso de la clasificación y la segunda de esas estructuras es la seriación.

Con respecto a estas estructuras lógicas es que se apoya la construcción de número, Piaget señala; "...que la inclusión de clases subyace en la inclusión numérica." (18)

Cuando el niño descubre la inclusión de clases sabe que existe una relación entre una subclase y la clase de la que forma parte, por ejemplo, en una colección de flores en donde hay doce rojas y nueve amarillas, siempre va a ser mayor el conjunto de todas las flores que el de las flores rojas o el de las amarillas, éstas son solo una parte de los que forman la colección en su totalidad.

Esto facilitará que comprenda que la inclusión numérica. Debe llegar a comprender que el uno está incluido en el dos, el dos en el tres, el tres en el cuatro y así sucesivamente.

Vemos pues, cuando contamos una colección de objetos sucesivos, a cada conjunto se le designa una cardinalidad, que puede ser uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, etc; y ésto representa una relación que incluye.

----

(18) VELAZQUEZ, J. La adición y la sustracción. en U. P. N. La matemática en la escuela II. p. 90

En cuanto a la segunda estructura, al contar objetos incluimos cada objeto en una clase común a la que le llamamos número, considerando a cada uno como una unidad, y la única diferencia que se establece entre un objeto y otro, es el lugar que ocupa; primero, segundo, tercero, etc

Cuando el niño descubre la necesidad de establecer un orden al contar, asignándole un solo número a cada objeto, está por descubrir que los números son clases seriadas, donde cada número es mayor que su antecesor y menor que su sucesor.

El encauzar al niño a la construcción del concepto de número, es un contenido de suma importancia para el docente, de ahí la necesidad del análsisi de la concepción del juicio de número.

"El concepto de número es el resultado de la síntesis de la operación de clasificación y de la operación de seriación; un número es la clase formada por todos los conjuntos que tienen la misma propiedad numérica y que ocupa a partir también de la propiedad numérica." (19)

A través de dicho análisis se puede observar que allí la clasificación y la seriación se fusionan en el concepto de número. Por lo anterior y para lograr un mejor análisis de la idea de número haremos un análisis de la clasificación que es la que define la cardinalidad del número y de la seriación que determina su ordinalidad.

----

(19) LERNER, Delia. Construcción espontánea y consecuencias pedagógicas. en U.P.N. Contenidos de Aprendizaje. Apéndice Concepto de número. p. 3

2. *Clasificación:* "La clasificación es una operación lógica fundamental en el desarrollo del pensamiento, cuya importancia no se reduce a su relación con el concepto de número." (20)

La clasificación está presente en la construcción de todos los conceptos que constituyen toda nuestra estructura intelectual, en la vida cotidiana utilizamos la operación lógica de clasificación pues, "...clasificar es juntar" por semejanzas y "separar" por diferencias." (21)

Refiriéndose a juntar y separar como nociones de la clasificación, no significa un juntar y separar objetos directamente, sino por medio del pensamiento, a través de una acción interiorizada, la clasificación la manejamos de una manera inconciente, por ejemplo, al pensar en las cosas que nos gustan y separar las que no nos agradan.

Aunque también la clasificación la podemos llevar a la práctica de una manera efectiva al juntar y separar los objetos de una manera concreta.

"La pertenencia es la relación que se establece entre cada elemento y la clase de la que forma parte. Está fundada en la semejanza, ya que decimos que un elemento pertenece a una clase cuando se parece a los otros elementos de esa misma clase, en función del criterio de clasificación que estamos tomando en cuenta." (22)

---

(20) Idem

(21) Idem

(22) Ibidem p. 7

"La inclusión es la relación que se establece entre cada subclase y la clase de la que forma parte, de tal manera que nos permite determinar que la clase es mayor, ya que tiene mayor número de elementos que la subclase." (23)

Cuando el niño comienza a clasificar, su ordenación la fundamenta en las cualidades de los objetos, es decir, en sus propiedades cualitativas, esta situación cambia cuando en la clasificación se señala un número, es decir la cantidad, pues no se buscan ya cualidades semejantes entre los elementos, sino la agrupación de la cantidad ya señalada o en su caso las semejanzas entre conjuntos.

"Lo que importa es la equivalencia numérica que establecemos entre los conjuntos que constituyen la clase en la que estamos pensando, en este caso, la clase formada por todos los conjuntos que tienen cinco elementos." (24)

La clasificación la llevan a cabo los niños tomando en cuenta las propiedades cualitativas; haciendo de su incumbencia las cualidades de los elementos que están en juego; y la propiedad cuantitativa, ésta ya incluida en el número o cantidad.

En la psicogénesis de la clasificación, el proceso de construcción atravieza por tres estadios: "el primero hasta los cinco y seis

----

(23) Idem

(24) Idem

años aproximadamente, el segundo estadio desde los cinco o seis años hasta los siete u ocho aproximadamente y el tercer estadio (operatorio) a partir de los siete años aproximadamente." (25)

El material que se utiliza es tomado como universo a clasificar los bloque lógicos. Este material consiste en cuarenta y ocho figuras geométricas que tienen las siguientes características: color; rojo, amarillo y azul; forma, cuadrangular, circular, triangular y rectangular; tamaño, grande y pequeño y grosor, grueso o delgado.

En el primer estadio de la clasificación, al proponerle al niño de este estadio que clasifique, dándole la consigna; "pon junto lo que va junto", durante esta etapa lo hace sobre la marcha; primeramente toma un elemento cualquiera, luego toma otro que se parezca al tomado con antelación, después un tercero que tenga una característica en común con el último que ha colocado.

De esta manera alterna el criterio clasificatorio de un elemento a otro, por ejemplo, por ejemplo, el segundo elemento se parece en el color al primero, el tercero se parece en la forma al segundo, el cuarto elemento se parece en el tamaño al tercero, etc.

El niño obtiene, como resultado de su actividad clasificatoria un objeto total al colocar cada elemento junto al anterior, logrando

----

(25) LERNER, Delia. Clasificación y aspecto didáctico. en U.P.N. La matemática en la escuela III. p. 28

una continuidad espacial en la ubicación de los elementos, porque al estar centrado en la búsqueda de semejanzas, no los separa en un todo, a este estadio de la clasificación se le denomina colección figural.

Para separar los elementos hay que considerar las diferencias, ésto es lo que aún no toma en cuenta el niño de este estadio cuando está clasificando.

Es importante señalar que no cualquier figura es una colección figural, ésta resulta de una conducta clasificatoria, que consiste en establecer semejanzas entre los elementos de la colección.

Si lo que el niño ha hecho es una representación, no es posible evaluar, a partir de ella el nivel clasificatorio. De allí la necesidad de observar el proceso de la actividad y no sólo el resultado, ya que éste puede ser el mismo en ambos casos.

Al realizar su actividad, el niño deja muchos elementos del universo sin clasificar, dando por terminada su actividad, ya que considera la pertenencia de cada elemento, ya que éste, según él, pertenece a la colección sólo si éste está cerca a los otros elementos que la forman.

Dentro de las características del segundo estadio de la clasificación puede decirse que se da una avolución importante que permite pasar, de la colección figural a la clase lógica, el niño empieza a tomar en cuenta las diferencias entre los elementos, al realizar su actividad forma varias colecciones separadas; el resultado no es todavía una clase lógica, pero no queda constituido un objeto total, una figura, sino pequeños grupitos, por lo que a este estadio se le denomina "colección no figural", aquí el niño busca que las semejanzas sean máximas, asea que los elementos que agrupa se parezcan lo más posible.

Los criterios clasificatorios los establece a medida que clasifica, de tal modo que suele alternarlos, pero ya no de elemento como hacía en el estadio anterior, sino de conjunto a conjunto, es decir, que dentro de cada colección todos los elementos se parecen en lo mismo, pero al pasar de una colección a otra, el criterio cambia.

La pertenencia de un elemento a un conjunto es por la semejanza que guarda con los demás elementos de dicho conjunto. En este estadio llega a clasificar un mismo universo o con base en diferentes criterios; la movilidad se hará presente en la posibilidad de pasar un elemento criterio, a otro en actos clasificatorios sucesivos.

Dentro de las características del tercer estadio de la clasificación; el niño del tercer estadio, como el que finaliza el segundo, anticipa el criterio clasificatorio que va a utilizar y lo conserva a lo largo de la actividad clasificatoria; también puede clasificar en base a diferentes criterios, es decir hace uso de la movilidad y toma en cuenta a todos los elementos del universo.

3. *Seriación:* "La seriación es una operación que además de intervenir en la formación del concepto de número constituye uno de los aspectos fundamentales del pensamiento lógico." (26)

Es una actividad que ha de desarrollar el sujeto para que logre un desarrollo cognoscitivo íntegro, que le permitirá a la vez establecer estructuras de pensamiento que lo llevarán a la obtención de mayores logros.

"Seriar es establecer relaciones entre elementos que son diferentes en algún aspecto y ordenar esas diferencias." (27)

Se pueden seriar elementos diversos como el sonido, los sonidos que son diferentes en cuanto a su timbre, ordenándolos del más agudo al más grave o viceversa; también vehículos cuya fecha de producción es diferente, ordenándolos del más antiguo al más moderno, o con billetes de valores diferentes, ordenándolos desde el que más vale hasta el que vale menos.

Se puede realizar la seriación con todos los elementos imaginables, elementos concretos o abstractos; además la seriación se puede realizar en dos sentidos: creciente y decreciente.

La seriación operatoria tiene dos propiedades fundamentales,

----

(26) Ibidem p. 34
(27) Idem

la transitividad y la reciprocidad. La transitividad; esta propiedad consiste en que si seriamos un conjunto de elementos de mayor a menor, el primer elemento será mayor al segundo, y por lo tanto será mayor que los demás elementos.

La reciprocidad, esta propiedad consiste en que, "cada elemento de una serie tiene una relación tal y como el elemento inmediato que al intervenir el orden de la comparación, dicha relación también se invierte." (28)

"La reciprocidad hace posible, por otra parte considerar a cada elemento de la serie como término de dos relaciones inversas: en una serie ordenada en forma decreciente, de mayor a menor, cada elemento salvo el primero y el último es al mismo tiempo menor que el anterior y mayor que el siguiente." (29)

"La seriación, al igual que la clasificación la realizamos en forma interiorizada, posemos además en algunos casos, realizarla en forma colectiva." (30)

Por ejemplo, si queremos seriar los estados de la República Mexicana, tomando en cuenta las características de la extensión territorial de cada uno, es lógico que la seriación será una acción interiorizada, pero habrá casos en que la seriación se pueda realizar en forma efectiva, por ejemplo en la formación del grupo de mayor a menor.

----

(28) Ibidem p. 36

(29) Idem

(30) Ibidem p. 39

"Cuando seriamos los números ya no seriamos elementos, no seriamos conjuntos particulares, lo que seriamos son clases de conjuntos." (31)

"La serie numérica es el resultado de una seriación, pero ya no de elementos sino de clases de conjuntos y dado que resulta de una seriación, la serie numérica reune también las propiedades de toda serie que son; transitividad y reciprocidad." (32)

La transitividad es una propiedad que se percibe en la seriación debido a que, si dos es mayor que uno y tres es mayor que dos, podemos deducir que tres es mayor que uno, sin necesidad de comprobar en forma efectiva.

La reciprocidad se nota en la seriación pues el orden de toda serie se puede invertir, unas veces irán de mayor a menor, otras de menor a mayor; unas veces irán de grave a agudo, otras de agudo a grave; unas veces irán de claro a oscuro, otras de oscuro a claro.

El número "...se deriva tanto de la clasificación como de la seriación; ésto implica que está íntimamente relacionado con ambas operaciones lógicas, pero no puede reducirse a ninguna de ellas aisladamente, ya que es el resultado de la fusión de estas dos operaciones." (33)

----

(31) Idem

(32) Idem

(33) Ibidem p. 40

"El proceso de construcción de la seriación atravieza por tres estadios: primer estadio, hasta los cinco o seis años aproximadamente, el segundo desde los cinco o seis hasta los siete u ocho aproximadamente y el tercer estadio, llamado operatorio, desde los siete u ocho años aproximadamente." (34)

En el primer estadio de la seriación, el niño no establece verdaderas relaciones y es este sentido se puede decir que es una conducta seudo-clasificatoria. Relacionar dos elementos en función de otro, y en el caso de las longitudes podría expresarse como "más largo que", "más corto que".

Al finalizar este estadio, en la transición hacia el segundo, el niño llega a considerar la línea de base. Al seriar longitudes uno de los extremos de cada elemento varía respecto a los restantes formando una "escalera", y el otro extremo de todos los elementos coinciden, formando la línea de base.

Esto se debe a que ya no se centra en ninguno de los extremos, sino que considera la longitud total de los elementos, llegando así a seriar cuatro o cinco varillas.

En el segundo estadio de la seriación, el niño puede construir la serie de diez varillas por tanteo, es decir toma una primer varilla al azar, luego otra varilla cualquiera que compara con la primera, y así prosigue hasta seriar todas las varillas, respetando la línea de base. El niño en este estadio aún no ha construido la reciprocidad.

----

(34) Idem

Dentro del tercer estadio de la seriación el método que utiliza el niño para seriar es sistemático; si hace una serie creciente toma del conjunto, la varilla más pequeña de las que quedan y así sucesivamente, en el caso de hacer una serie decreciente el proceso es inverso, comienza por la varilla más grande. El niño ahora es capaz ya no solamente de establecer relaciones sino también de componer estas relaciones. El niño ha construido la reciprocidad de las relaciones.

4. *Correspondencia*: "La correspondencia término a término o correspondencia biunívoca es la operación a través de la cual se establece una relación de uno a otro entre los elementos de dos o más conjuntos a fin de compararlos cuantitativamente." (35)

En la correspondencia para establecer si el conjunto es equivalente o no, se realiza la correspondencia uno a uno de los elementos.

"En el caso del número, las operaciones de clasificación y seriación se fusionan a través de las operaciones de correspondencia." (36)

Dentro de la psicogénesis de la correspondencia y la conservación de la cantidad, el niño atravieza por tres estadios, el primer estadio que corresponde a la edad de cinco a seis años aproximadamente.

---

(35) Ibidem p. 44

(36) Idem

El material que se utiliza es con fichas de colores, nueve rojas y nueve azules. Cuando el niño se presenta en este estadio se le presentan una hilera de siete fichas rojas, dándole una consigna, que coloque la misma cantidad de fichas azules que sean necesarias para igualar la longitud de la primera hilera, coincidiendo la última ficha de las dos hileras, independientemente de la cantidad de fichas que necesite para realizarlo.

"El niño lo hace así porque considera las hileras como objetos totales centrándose en el espacio ocupado por los conjuntos y no, en la cantidad de elementos, por lo tanto no establece la correspondencia biunívoca." (37)

El segundo estadio corresponde aproximadamente de cinco a seis años y de seis a siete años. En éste, el niño ya establece la correspondencia ante la misma consigna, ya que coloca una ficha bajo la otra, pero si se altera la disposición espacial de fichas en uno de los conjuntos, el niño dirá que no hay lo mismo. "Porque, aunque ya establece la correspondencia biunívoca, al dejar de ser ésta evidente perceptivamente se apoya nuevamente en la longitud de las hileras." (38)

El tercer estadio, se refiere al operatorio, se da a partir de los siete u ocho años aproximadamente. En este se presentan las siguientes características, los niños afirman la conservación no

---

(37) Ibidem p. 47

(38) Idem.

argumentándola algunas veces, logrando después su fundamentación.

Es importante llegar a la correspondencia y a la conservación de la cantidad respecto al número:

> "...porque el niño podrá considerar que un conjunto de nueve elementos será equivalente a todos los con junto de nueve elementos, así como no equivalente a todos los conjuntos mayores o menores de nueve in dependientemente de la disposición espacial de sus elementos." (39)

5. *La conservación de la cantidad*: El proceso de desarrollo de esta noción es sumamente interesante, de la alta influencia que es el período preoperacional tiene la centralización de las posibilidades lógicas que en el siguiente período adquieren los niños como son: la compensación, la identidad y la reversibilidad; podemos observar como el niño justifica las respuestas que da al intentar explicarse el mundo, desde esas posibilidades lógicas que le permite su desarrollo intelectual.

La conservación de la cantidad se constituye en una herramienta intelectual que posibilita al niño la construcción del concepto de número, pero al mismo tiempo, el establecimiento de relaciones numéricas básicas para la adquisición posterior de otros conceptos.

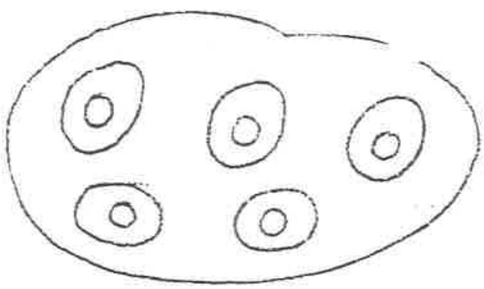
----

(39) Ibidem p. 49

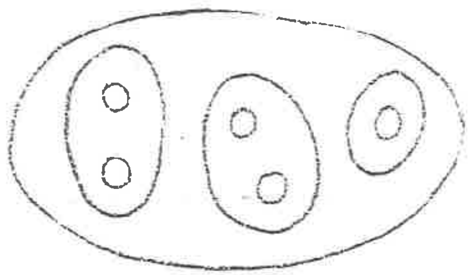
Los niños tienen que concebir el principio de conservación de cantidad para que puedan captar tanto el aspecto cardinal como el ordinal del número. Ello implica la capacidad de percibir que una cantidad no varía cualquiera que sean las modificaciones que se introduzcan en su configuración total, siempre y cuando no se le quite o se le agregue nada.

Cuando el niño llega a admitir sin ninguna duda que esas condiciones una totalidad se mantiene como tal, pese a las distintas configuraciones con que se le puede presentar a su percepción, es porque la reversibilidad de su pensamiento, le ha permitido establecer dos tipos de relaciones; las aditivas y las multiplicativas.

Las relaciones aditivas están en la base de la cardinalidad del número; mediante ellas el todo es concebido como una reunión de partes agregadas, sumadas una a una o sumados los subconjuntos que se pueden formar con ellas y que constituyen el conjunto total.



5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1

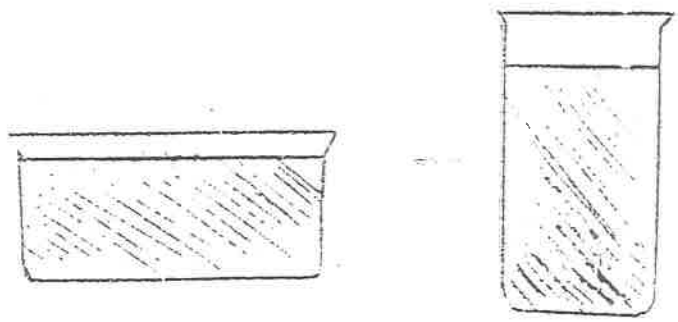


5 = 2 + 2 + 1

Las relaciones multiplicativas son las que debe establecer el pensamiento para compensar las diferencias percibidas entre las partes que aditivamente constituyen un todo, y éste en un conjunto cuando se introducen cambios en su configuración exterior.

Cuando el niño, al observar un total de siete fichas dispuestas de una manera determinada, piensa que ese total cambia porque las fichas se separan, es cuando se llega a la conclusión de que, el niño no es capaz de compensar mentalmente la mayor distancia en que se ubican las fichas entre si con la menor cantidad de éstas en cada parte del espacio ocupado.

Otro ejemplo sería cuando se le pide al niño que trasvase el líquido de un recipiente ancho a otro más delgado y alto, piensa que cambia la cantidad, porque aún todavía no puede establecer la relación multiplicativa implícita en la comprensión de la mayor altura que ocupa el líquido en el segundo vaso, y el menos diámetro de éste respecto al vaso del cual se lo trasvasan.



A x B = 1 / 2

Es decir, que para que el niño pueda mantener la constancia de un total y adquiera la invariancia de la cantidad tienen que establecerse en sus estructuras mentales tanto la relación aditiva como la multiplicativa. A este respecto no se trata aquí del establecimiento de relaciones aditivas o multiplicativas de tipo algebráico, matemático, sino de relaciones lógicas.

Piaget, frente a sus experiencias distingue tres etapas sucesivas. En la primera, el niño considera natural que la cantidad de líquido varíe según la forma, las dimensiones y el número de vasos en que se reparte el líquido.

En la segunda etapa que se inicia entre los cinco años y medio y los seis, comienza a aparecer en el niño la idea de conservación, pero no se generaliza, únicamente aparece, notándose contradicciones entre sus respuestas; a esta etapa Piaget le llama, de transición o de elaboración.

En la tercera etapa que Piaget ubica entre los seis y medio y los ocho años, el niño, al enfrentarse a una situación de este tipo, afirma que la cantidad de líquido no se altera, dando como respuesta que si no se le ha quitado ni agregado nada no tiene por qué haber variación; es decir, que la noción de conservación es plena en él.

Tanto las investigaciones de Piaget como las de sus colaboradores, muestran como las sesiones de aprendizaje pueden influir en la adquisición de nociones y operaciones; la posibilidad de influencia está determinada por el conocimiento que se tenga del proceso de desarrollo del niño y de la psicogénesis del objeto que se intenta sea aprendido.

Pero dichos aprendizajes requieren de coordinaciones de acciones no necesariamente aprendidas en sesiones de aprendizaje, sino que constituyen parte de las adquisiciones cognitivas del sujeto.

En estas investigaciones queda claro que los sujetos que progresan en una sesión de aprendizaje son aquellos que se encuentran en un nivel operatorio próximo al de la noción que van a aprender.

Este apartado intentó mostrar elementos que nos permitan identificar el momento más cercano al nivel cognitivo, y al mismo tiempo que entendemos como evolucionan gradualmente las ideas podemos propiciar su aprendizaje.

CAPITULO III

LA EVOLUCION GRADUAL DE LAS IDEAS MATEMATICAS

Retomando lo que Piaget menciona acerca del desarrollo intelectual es un proceso gradual y que, las estructuras construidas por el niño en un período determinado, llegan a ser integradas a las nuevas estructuras del período siguiente, nos conllevan a comprender que los conceptos matemáticos que el niño va construyendo, dependen del nivel de pensamiento reflejándose ésto en las acciones realizadas con el objeto y a través reorganizadas en el proceso de desarrollo con lo ya aprendido, para elaborarlos a otro nivel de funcionamiento.

A esto Piaget le llama "Períodos de creación y recreación" en diferentes niveles y que este paso a través de las etapas es muy gradual.

La evolución de las ideas matemáticas se inicia con una elaboración cualitativa con materiales, como la manipulación de objetos; para posteriormente llegar a la elaboración cuantitativa, que vienen a ser los símbolos numéricos.

Por lo que se puede afirmar que para que los niños lleguen a la elaboración cuantitativa, es necesario que efectúen problemas, demostrándolos con objetos físicos, es decir objetivamente; con siderando la operación natural como parte de un proceso y no apresurarlo para que lo haga a través de una representación abstracta o una simbolización de términos matemáticos.

Respetar el pensamiento del niño implica tratar actividades a su nivel y darle tiempo para explorar esas nuevas posibilidades al máximo y no llenarlo de símbolos vacíos, carentes de significado.

Sin lugar a dudas, se hace necesario alcanzar la abstracción durante el desarrollo mental, pero procediendo de una serie de acciones concretas culminadas.

"De lo concreto a lo abstracto, no es el objetivo de una lección; es más bien una meta a largo plazo." (40)

Una forma de respetar el proceso del niño es atender a las formas espontáneas de representación de las nociones que maneja, por ello incluimos en este capítulo las diferentes representaciones gráficas que usamos en las matemáticas e y la forma en cómo éstas son reconstruidas por el niño.

A. El desarrollo de la representación.

Para entender qué es la representación, posemos partir de la misma palabra: representar quiere decir que no está presente

----

(40) Ibidem p. 90

aquel a lo que nos referimos, y entonces lo expresamos a través de algo que lo sustituye.

"Es decir, que siempre una representación no es la cosa en sí, sino algo que está en lugar de ella." (41)

En algunas ocasiones la representación está en lugar de una "acción", por ejemplo, cuando decimos la palabra barrer, esta representa la acción de barrer.

A veces, en lugar de un concepto, por ejemplo, el signo 6, representa el concepto de número seis, este concepto está gráficamente representada por esa forma.

El dibujo, es también una representación, por ejemplo cuando nos encontramos carteles en la carretera, que nos muestran diferentes situaciones, que a próximos metros se encuentra un restaurant, que a determinada distancia hay una gasolinera, que a doscientos metros hay un taller mecánico, etc.

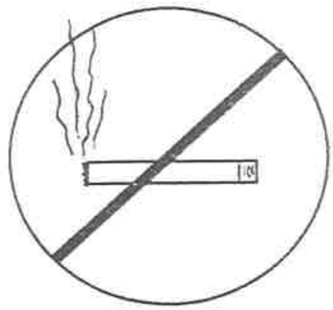
De los ejemplos anteriores se puede diferenciar la representación de la cosa representada; por un lado están las acciones, los objetos, etc; y por otro, la forma de representarlos.

Veamos algunas características de las representaciones; hay representaciones que no son arbitrarias, como aquellas que

----

(41) S.E.P. Propuesta de matemáticas de G.I. Educación especial. p.69

tienen cierta relación con lo que representan, por ejemplo, en un hospital nos encontramos con un dibujo así...



Éste tiene relación con el hecho de no fumar. Serían arbitrarios si en el dibujo no hubiera alguna semejanza con el hecho de no fumar.

Es decir, se llaman representaciones arbitrarias a las que no tienen ningún parecido con lo que representan; por ejemplo golpear el suelo con el pie para indicar impaciencia, pues no hay ninguna semejanza entre este movimiento y lo que éste expresa.

Otro aspecto a analizar de las representaciones es la convencionalidad. Existen representaciones convencionales y no convencionales.

Las primeras, son aquellas representaciones determinadas por un acuerdo de una comunidad y por intereses propios. Por ejemplo; el signo X, se utiliza por un acuerdo social que determina representar gráficamente de esa forma la operación de multiplicar.

Veamos pues, que las representaciones gráficas que usamos en las matemáticas son arbitrarias y convencionales, en cuanto a lo primero podemos afirmar que son arbitrarias porque los signos que utilizamos, -, +, x, ·/·, =, etc, no tienen relación alguna con lo que representan y, son convencionales porque son utilizados por una comunidad que así lo acordó para representar estos conceptos.

A lo largo de la historia el hombre ha establecido diferentes maneras de representar tanto las cantidades como las relaciones numéricas o transformaciones que se podían establecer con ellas. Así el uso de puntos, comas, letras o aún dibujos ha sido frecuente en distintas civilizaciones a través de muchos siglos.

El uso de estas representaciones se basa en una convención social, implementadas por una sociedad.

El niño, antes de incorporar a su conducta espontánea los signos aritméticos universales que representan cantidades y operaciones, utiliza también otras formas más simples de escritura, como una necesidad para expresar el sentimiento que en ellos despierta la acción aritmetizable que deben simbolizar.

"El paso de la acción a la conceptualización es un proceso lento y progresivo, que no se reduce a la transposición mecánica." (42)

----

(42) CARVAJAL, Nemirovsky, Miriam. La Representación gráfica. en U.P.N. La matemática en la escuela I. p. 81

El alumno debe disponer de tiempo y espacio mental para abstraer las leyes lógicas que rigen sus acciones e inferir de ellas los conceptos numéricos más elementales.

Con la representación de las operaciones ocurre algo semejante, muchos niños prescinden de procedimientos propios, un dibujo o escritura para la resolución de un problema.

Por otra parte, para que las representaciones sean tales, es decir, que éstas representen realmente los conceptos es necesario que el sujeto haya construido el concepto a que dicha representación se refiere.

Por ejemplo, si el sujeto no ha construido la noción de multiplicación, aún cuando conozca su representación gráfica (x), e incluso sepa dominarla, no será una representación propiamente dicha, puesto que no puede estar en lugar de un concepto que es inexistente para el sujeto.

"Para que una representación gráfica sea tal, se requiere que el sujeto establezca relación entre significante y su significado." (43)

De lo anterior podemos deducir que tendrá sentido hacer eso de representaciones en la medida que hemos construido la noción o concepto que éstas representan.

Ibidem p. 82

Pasar de la comprensión a la representación convencional no es auténtico; los niños tienen que irse apropiando de este sistema gráfico y como sabemos, esta apropiación requiere de un trabajo reflexivo.

1. Niveles de la representación gráfica de la multiplicación:

La escuela debe tener presente que no es suficiente dar información para que el niño aprenda. Es necesario promover la adquisición de su conocimiento, a través de situaciones que propicien la reflexión, donde la representación surja como una necesidad.

Para que ésto se lleve acabo se requiere que los niños tengan contacto cotidiano con las mismas y sus representaciones formen parte de su vida cotidiana. Será función del maestro el garantizar ese contacto, entre el niño y las representaciones gráficas, así como conocer los cuatro niveles por los que se establece la construcción de la representación gráfica de la multiplicación; estos niveles son:

Nivel I. Los niños realizan dibujos globales de la situación con ausencia total de referencia de la operación realizada. En este nivel predomina la descripción cualitativa de las características del contexto, sin hacer alusión a los aspectos cuantitativos.

Nivel II. El niño puede representar mediante números y dibujos, pero sin ninguna relación que pueda indicar cual ha sido la operación realizada, o dicho de otra manera lo que representa no lo alude a ningún tipo de acción.

Nivel III. En este nivel el niño recurre a la representación de la operación, a través de la suma abreviada, semejantes a las utilizadas por los pueblos de la antigüedad (remítase al capítulo). Cada uno de los conjuntos se repite tantas veces como sea necesario, sin que explicite la función del multiplicador.

Nivel IV: Aquí, el niño hace uso de los tres factores de la multiplicación, y el multiplicador cumple su verdadera función, al evitar que se repita el multiplicando, "n veces", como se explica en el nivel III.

Después de haber realizado este breve análisis podemos decir, que se justifica abordar sólo cuando el sujeto lo ha construido o lo está construyendo. Y, en este proceso es necesario permitirles que desarrollen y prueben sus propias ideas, evitando corregirles constantemente, pues de otra manera, le impedimos pensar y coartamos la posibilidad de que superen sus errores.

B. El sistema de numeración decimal y la multiplicación: Un caso de construcción progresiva de las estructuras operatorias.

Como hemos señalado en capítulos anteriores, para la psicología genética, "...el desarrollo consiste en la construcción de una serie ordenada de estructuras intelectuales que regulan los intercambios funcionales o comportamientos de las personas con su medio." (44).

---

(44) RODRIGUEZ, Gabriela. Psicología genética. p.115

Así mismo, el orden de construcción de estas estructuras tiene un carácter universal y se repite en todos los miembros de la especie humana, aunque presente diferencias temporales entre un individuo y otro, y responde al principio de equilibración mayorante.

"Cada estructura asegura un equilibrio más móvil, más estable y capaz de compensar más perturbaciones que la anterior." (45). Cada estructura permite pues, una mayor riqueza de intercambios y, por tanto, una mayor capacidad de aprendizaje que la anterior.

De lo anterior, es importante rescatar que, si el desarrollo consiste en la construcción de una serie de estructuras que no solo permiten al sujeto relacionarse con su medio, sino que además se suceden invariablemente, respetando la tendencia hacia un mejor equilibrio, por lo tanto deberemos tener presente la importancia de los mecanismos generales del desarrollo cuando queremos propiciar el aprendizaje.

Inhelder, Sinclair y Bovet, "...al analizar en detalle cuales son las relaciones entre esquemas que se estructuran en momentos diferentes, de un estudio a otro, o entre esquemas diferentes, pero contemporáneos, descubrieron el papel dinámico que juegan estas coordinaciones progresivas." (46)

---

(45) Ibid p. 118

(46) COLL, Cesar. Desarrollo psicológico y educación. en S.E.P.y C. Psicología educativa. p. 70

Debemos entender como coordinaciones progresivas el que el aprendizaje de determinado esquema favorezca el posterior aprendizaje de otro lado, que lo que el sujeto aprende en un subsistema le sirve para hacer progresos en otro subsistema, pero estos progresos no consisten en simples generalizaciones.

Se produce una verdadera reconstrucción de los conocimientos adquiridos en un dominio en el nuevo dominio, reconstrucción que requiere nuevas coordinaciones entre esquemas, a esto es a lo que Piaget se refiere como equilibración mayorante.

Es pues de suma importancia que el objetivo de la educación esté centrado en potencia en favorecer la construcción de dichas estructuras. En el caso de la educación primaria, este objetivo consistirá en "...potenciar y favorecer la construcción progresiva de las estructuras operatorias formales y las competencias cognitivas, afectivas y relaciones que caracterizan al cuarto estadio del desarrollo." (47); pero, ésto será posible a partir de la reconstrucción paulatina de los conocimientos que le posibilitan la reversibilidad, la reciprocidad en las relaciones, la coordinación de los puntos de vista, etc; características de este aspecto operatorio.

En general, cualesquiera que sea el momento en la enseñanza en que nos situemos, la meta deberá ser contribuir a que el alumno progrese a través de los sucesivos estadios o niveles que configuran el desarrollo.

----

(47) Idem

Para que el niño adquiera un instrumento que le permita poner en orden sus descubrimientos y hacerlos operatorios, requiere de un proceso, ya que obviamente, la posibilidad de que pueda realizar un determinado aprendizaje está determinada por su nivel de competencia cognitiva.

Así, en el caso que nos ocupa, sabemos que para que el niño adquiera a las estructuras multiplicativas debe haber desarrollado nociones matemáticas que están en la base de otros contenidos, como el sistema de numeración decimal.

La importancia de la adquisición de este instrumento, estriba en que no solo posibilita la escritura de cantidades, sino que permite comprender las leyes que lo rigen, mismas que son de cabal importancia para la realización del algoritmo de la multiplicación y otros.

Generalmente en la escuela primaria el sistema de numeración es enseñado de modo que solo se atiende a la lectura y un conocimiento terminado. El niño solo tiene que aprender mecánicamente, en el mejor de sus casos, algunas propiedades, sin llegar a comprenderlas." (48); es aquí donde radica la raíz de toda la problemática presentada.

Las características de nuestro sistema de numeración decimal que deben redescubrir y comprender nuestros alumnos, sin las siguientes:

----

(48) SELLARES, Rosa. et al. La construcción del sistema de numeración en la historia y en los niños. p. 49

- La base de nuestro sistema de numeración es el diez, porque se necesitan diez unidades simples para formar una unidad de segundo orden o decena, diez decenas para formar una centena, de cada diez unidades de cualquier orden se puede formar una unidad del orden inmediato superior. Esto se refiere a que los niños comprenden que los números se agrupan en unidades, decenas, centenas, unidades de millar, etc.

- La cantidad de signos necesarios para construir los numerales está determinada por la base que se está manejando. En el caso de nuestro sistema de numeración que es de base diez, son necesarios diez signos que son; 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 0.

- Cualquier cantidad se puede escribir como una suma de potencias de la base, por ejemplo:

$$2746 = 2000 + 700 + 40 + 6 = 2 \times 10^{3} + 7 \times 10^{2} + 4 \times 10^{1} + 6 \times 10^{0}$$

- La escritura de los signos en el numeral se realiza de forma horizontal de izquierda a derecha y en orden decreciente.

_ Se emplea el cero para indicar la ausencia de unidades de cualquier orden.

Los sistemas de base posicional resultan más eficaces que otros que les precedieron históricamente, ya que, mediante ellos es posible:

- Representar a los números de manera no ambigua.

- Representar a los números cómodamente, "...en el sentido de que la cantidad de signos utilizados no es muy grande, por lo que es fácil manejarlos y memorizarlos." (49)

- Comparar los números a través de su escritura.

- Efectuar técnicas operatorias con cierta facilidad.

Es necesario mencionar que la comprensión de estos aspectos surge de un camino recorrido, en cual se permiten los errores, en un determinado tiempo, el cual varía en cada sujeto y durante el cual se dan las hipótesis y contradicciones hasta llegar a la comprensión de un hecho o a la formación de un determiando concepto, y lo más importante es que el niño descubra como llegar a él; ya que ésto le va a permitir generalizar ese conocimiento a otras situaciones que tengan relación con él.

Por ejemplo, cuando el niño descubre la regla de agrupamiento que rige al sistema de numeración y su funcionamiento, se le facilitará comprender cómo y por qué se pasa de las unidades a las decenas y así sucesivamente.

A través de la reflexión, el niño llegará a construir conocimientos más complejos, como la codificación y decodificación de un determinado número, la determinación del antecesor y el sucesor, etc.

----

(49) S.E.P. La importancia del sistema de numeración decimal en el aprendizaje de las matemáticas. p. 79

De nueva cuenta podemos traer a colación lo planteado pos Piaget y sus colaboradores respecto a las conexiones entre estructuras.

"La formación o construcción de un nuevo conocimiento en el niño, no queda estático, sino que sirve como base para la construcción de otro nuevo conocimiento." (50)

De aquí que podemos afirmar que el logro de la construcción de la seriación al establecimiento del ascendente y descendente tomando en cuenta el aspecto ordinal, y comprender el antecesor y el sucesor de un número.

Otro de los aspectos importantes que el niño debe construir del sistema de numeración decimal, es el relacionado a la noción de que el valor de un signo dependerá del lugar que ocupa en el numeral, de aquí precisamente es que nuestro sistema es posicional.

Desafortunadamente, para cuando la mayoría de los niños están apenas adquiriendo las bases del sistema de numeración, las unidades programáticas exigen al maestro el abordaje de algoritmos tales como la adición, la sustracción y sobre todo la multiplicación y la división, que se caracterizan por prescindir de la representación de las potencias de la base y por conceder un valor a las cifras según el lugar que ocupan en la escritura de los números.

----

(50) S.E.P. El aprendizaje y el conocimiento. p. 11

Generalmente esta perspectiva curricular incluye el trato de situaciones y problemas de un nivel simbólico, abstracto con solo una breve expresión al nivel gráfico y sin ningún ejercicio con objetos conexos; dando a los niños poca oportunidad de elaborar sus relaciones de valor posicional antes de aplicarlos.

Aquellos que comienzan a desarrollar sus propios métodos, se encuentran con la imposibilidad de hacerlos valer por encima de los del maestro, terminando por ceder ante su autoridad, con la consiguiente memorización y obediencia a un conjunto de reglas que no logran comprender.

Piaget comenta acerca de la importancia de que los niños ganen experiencia a través de su propia actividad en situaciones relacionadas con el valor posicional antes de su aplicación simbólica.

> "En la mayoría de las lecciones de matemáticas, toda la diferencia estriba en el hecho de que se le pide al alumno que acepte una disciplina intelectual ya completamente organizada, la cual puede o no entender, mientras que en el contexto de actividad autónoma tiene que describir por si mismo, las relaciones y los conceptos, y recrearlos hasta el momento en que es feliz de ser guiado y enseñado." (51)

El valor posicional es pues, un conocimiento que necesariamente debe conceptualizarse en una experiencia lógico-matemá-

---

(51) LABINOWICKS, Ed. Pensamiento, Aprendizaje, Enseñanza. Introducción a Piaget. p. 185

tica antes de manejarse simbólicamente. Esto no solamente posibilitará la comprensión del sistema de numeración, sino todos aquellos contenidos que lo impliquen y, sin lugar a dudas tal es el caso de la multiplicación, puesto que en ella el niño se enfrenta a la necesidad de coordinar las cantidades de cifras que representan un número con la posición que dichas representaciones ocupan dentro del sistema algorítmico de ella.

A este respecto podemos poner como ejemplo un caso ilustrativo en el cual se pone en conflicto al niño; entre la posición y el valor numérico.

Se le pide que realice esta operación:

```
  245
  x24
  980
 490 <---------------------- ¿por qué deja este espacio?
 5880
```

¿Los niños la resuelven? "Si", pero sería conveniente cuestionar por qué deja el espacio al escribir el resultado de multiplicar el segundo dígito.

La indagación de las justificaciones del niño nos permitirá detectar por qué el 490 es en realidad 4900 unidades.

¿Por qué multiplica primero las unidades y luego las decenas?

Saber si en realidad le da el valor numérico al 2, que al multiplicarlo sería como si multiplicara por 20.

Las respuestas que los niños dan sería un punto de partida para propiciar situaciones de aprendizaje tendientes a superar la dificultad.

En nuestra trayectoria como docentes, nos hemos dado cuenta de que la mayoría de los niños del tercer y de otros grados no comprenden los principios matemáticos en que se apoya el sistema de numeración decimal y que nosotros creemos que están trabajando a la hora de resolver una multiplicación.

Vemos pues, que el valor posicional es complejo y para llegar a ello se requiere de un proceso por parte del niño, considerando las características de la etapa en que está, que implica ciertas posibilidades de manejo de este conocimiento y también algunas limitaciones.

Los niños de primer y segundo grado de primaria escriben y recitan números hasta llegar a cantidades grandes mediante la recitación de un orden cíclico, ya que aprenden el orden de las cifras del cero al nueve, pueden escribir (1) en el lugar de las decenas y repetir el mismo orden, y así sucesivamente.

Pero ésto es parte de una técnica para escribir números. "Las técnicas constan normalmente de ejercicios motrices que pueden perfeccionarse mediante la práctica." (52)

Esto no nos indica que el niño realiza la construcción mental de que (1), ubicado en las decenas es la colección de diez unidades, es por eso que pasa al lugar de las decenas.

En base a la teoría de Piaget nos dice "... que para la comprensión de este objeto de conocimiento del niño en esta edad requiere la construcción de una estructura mental de los niveles." (53); y los niños de seis y siete años todavía están en pleno proceso de construcción del sistema numérico, lográndola mediante la abstracción reflexionante con la operación + 1; lo cual sería imposible construir el segundo nivel que implica unidades de un orden superior de diez, si no se construye el primero.

Y además porque el valor posicional implica también la división (36 ·/· 10 = 3, con 6 de resto, y la multiplicación, el 3 en 36 significa 3 x 10. Y estas operaciones son difíciles para los niños de esta edad.

----

(52) KAMIL, Constance. Lectura y escritura de cifras. en U.P.N. La matemática en la escuela III. p. 70

(53) Ibidem. p. 69

C. El paso de las estructuras aditivas a las multiplicativas.

El aprendizaje de esta noción, gira alrededor de un aspecto fundamental: Saber pasar de las estructuras aditivas a las multiplicativas. En efecto, sabemos que en la operación de multiplicación, su dificultad no radica en si misma, sino que ésta se basa en el sistema de numeración posicional en base diez, que a su vez, implica una estructura multiplicativa, como lo explicamos en el subtema anterior, ya que no consideramos necesario conocer el proceso de construcción de esta estructura para poder abordar en esta sección las dificultades que encuentran los niños en el camino que los lleva al correcto manejo de dichas operaciones.

La multiplicación ha sido definida de muchas maneras por las matemáticas; dichas definiciones muestran implícitamente diferentes concepciones epistemológicas, de las que se derivan distintos presupuestos didácticos.

Tradicionalmente, antes de la aparición de las matemáticas modernas, la multiplicación se venía definiendo como una suma abreviada o dicho de otra manera, como una adición repetida.

Delia Lerner parte desde esta interrogante: ¿Qué es la multiplicación?, y la respuesta es casi siempre; "La multiplicación es una suma abreviada." (54)

----

(54) LERNER, de Zunino, Delia. ¿Qué es la multiplicación? en U.P.N. La matemática en la escuela III. p. 129

Lo que significa que la multiplicación es un caso particular de la suma y entonces surgen varias interrogantes:

¿por qué?

X + 0 = X

X x 0 = 0

Pero, en cambio; ¿por qué?

X + 1 = Y

X x 1 = X

Estas interrogantes nos llevan a afirmar que:

En la suma el cero es el elemento neutro, puesto que al combinarse con cualquier otro da como resultado él mismo; mientras que en la multiplicación el cero es el elemento absorbente, es decir, el elemento que, al combinarse con cualquier otro, lo convierte en si mismo.

Por lo anterior podemos darnos cuenta que la función del cero en la multiplicación, es opuesta al que cumple en la suma.

Algo parècido sucede con el uno:

- Al sumar uno con cualquier otro número natural, da como resultado el sucesor de éste.

- Y al multiplicar por uno cualquier número natural, da como resultado, él mismo.

Así pues, tenemos que el uno es el elemento neutro de la multiplicación, cumpliendo así la misma función que cumple el cero en el caso de la suma.

Si la multiplicación es un caso particular de la suma, ¿por qué el número que cumple la función de elemento neutro no es el mismo en ambos casos?; y ¿por qué un mismo número el cero o el uno, cumplen funciones tan diferentes en un caso y en el otro?

Como ejemplo podemos mencionar:

Marcos tenía 6 tazos y jugó con Misael y le ganó 3. ¿Cuántos tazos tiene ahora?

Estado inicial	Operador	Estado final
0 0 0 0 0 0	0 0 0	¿ ?

Agrega:

Marcos tiene 8 tazos en un bolsillo y cuatro en el otro. ¿Cuántos tiene en total?

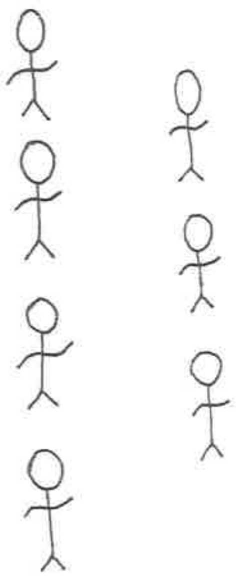
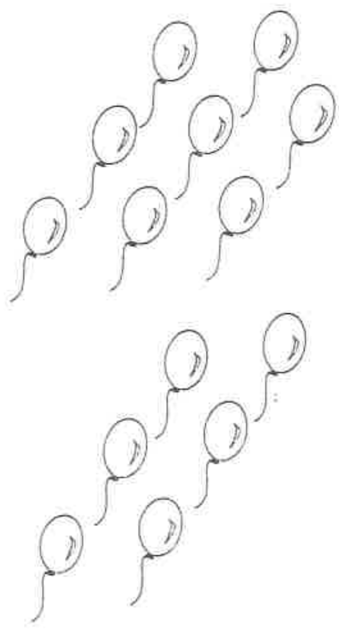
Estados iniciales	Operador	Estado final
0 0 0 0 0 0 0 0		¿ ?
0 0 0	Reune	

Como podemos observar en el primer caso hay un solo estado inicial, los tazos que tenía Marcos al principio; y en el segundo caso hay dos estados iniciales, ya que Marcos tenía desde el principio un conjunto de tazos en un bolsillo y otro grupo en el otro.

Por lo anteriormente observado podemos concluir que, las acciones concretas a las que corresponde cualquier situación que implique una suma son; agregar y reunir.

Ahora veámoslo de la siguiente manera:

Luis invita a su piñata a 7 niños y quiere regalarles 2 globos a cada uno. ¿Cuántos globos necesita?

Estado inicial	Operador	Estado final
		
7	x 2	14

Lo que significa que:

Estado inicial son los niños y estado final son los globos.

¿Qué sucedió?, ¿Cómo explicamos ésto?

Tendremos que recordar que la operación lógica que expresada a través de la suma es la reunión de conjuntos y que, para reunir conjuntos, es necesario que sus elementos pertenezcan a una misma clase o a una subclase de una misma clase.

Ejemplos:

- tomates	- agrega tomates	-más tomates
- naranjas	- agrega manzanas	- frutas

El estado inicial y el operador son subclases de una clase más grande que se representa en el estado final; por el contrario, en la multiplicación, el estado inicial y el estado final, casi siempre pertenecen a clases diferentes, como podemos observar en el ejemplo de los niños y los globos.

Veamos otro ejemplo:

- La biblioteca de mi cuarto tiene tres estantes; en cada estante hay ocho libros. ¿Cuántos libros hay en la biblioteca?.

Numéricamente:

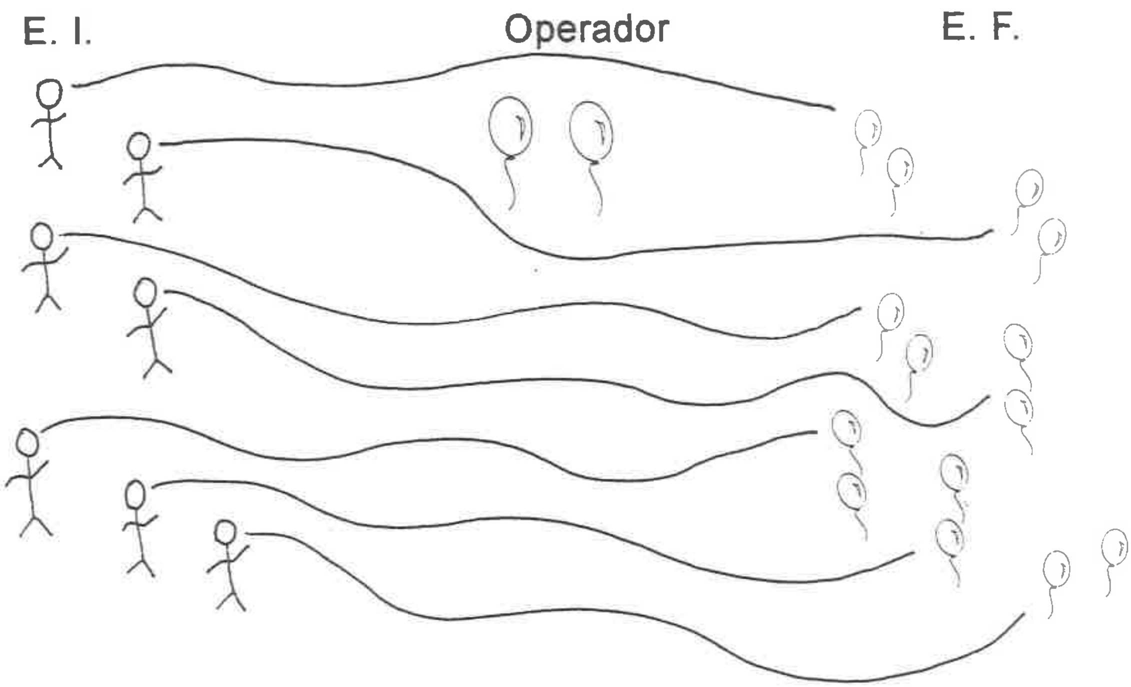
E. I.	OP.	E. F.
3	x 8	24

Es decir; nuevamente el E.I., y el E.F., pertenecen a clases diferentes y nos preguntamos. ¿Qué hizo el operador?

Una correspondencia.

Por lo tanto, a cada elemento del conjunto inicial le corresponde un conjunto de elementos en el conjunto final.

Volviendo a nuestro ejemplo de los globos:



Por lo que, la operación consiste en *reemplazar* a través de una correspondencia cada elemento del estado inicial, por un conjunto de elementos del estado final.

Lo dicho con anterioridad, el hecho de que:

- E. I. y E. F. no pertenecen, en el caso de la multiplicación, a la misma clase.

- Que el signo de la multiplicación se llama *por*, porque esta operación no representa una unión de conjuntos, sino un reemplazo de un tipo de elementos por otro tipo de elementos.

En conclusión; ¿es posible seguir pensando que la multiplicación es una suma abreviada?; no, la multiplicación no es un caso particular de la suma, es una operación diferente, que representa acciones diferentes.

Lo que si podemos decir, es que la multiplicación es equivalente a una suma de sumandos iguales. Equivalentes en el sentido de que da el mismo resultado, pero no igual, porque el proceso que se sigue para llegar al resultado no es el mismo.

1. El operador multiplicativo.

Como ya hemos dicho con anterioridad, las estructuras multiplicativas abarcan una gran cantidad de nociones y sería un error pensar que el aprendizaje se reduce al de las operaciones de multiplicación y división.

A través del tiempo la noción de multiplicación ha venido sufriendo cambios, pues antes de que las matemáticas modernas hicieran su aparición, la multiplicación era definida, como ya lo mencionamos anteriormente; como una adición repetida, escrita en forma abreviada:

Ejemplo: $(8 + 8 + 8 = 24) = (3 \times 8 = 24)$

De tal forma que, a partir de la adición se definía una nueva operación binaria llamada multiplicación, en a que un término denominado multiplicando, denotaba el valor de cada sumando, mientras que el otro término, que denotaba el número de sumandos, era llamado multiplicador; y al resultado se le llamó producto.

Ésta dio paso al surgimiento de la teoría de conjuntos donde la multiplicación sería el resultado de la asociación de dos números naturales, a y b, a un tercero, c, o sea que el producto sería igual al total de pares ordenados establecidos.

Sin embargo, los cambios no se producen en forma súbita, ya que, en toda operación matemática es importante distinguir el plano del significado y del significante; en donde el significado nos permitirá que la adquisición de toda operación siga un proceso evolutivo en la cual el niño irá construyendo y comprendiendo en diferentes niveles de complejidad.

Paso a paso irá descubriendo que la relación multiplicativa es algo más amplio y complejo que la simple repetición memorística de las tablas de multiplicar; que si bien, toda multiplicación y división, puede resolverse mediante una suma, ello no implica a nivel conceptual la reducción de aquella o ésta última.

La relación multiplicativa comporta un rango de dificultad superior a la aditiva, en cuanto supone la toma de dos variables de diferente categoría, es decir el número de grupos y el número de elementos en cada grupo; y el descubrimiento de una relación de proporcionalidad, en un principio muy elemental, que irá adquiriendo niveles de complejidad hasta llegar al descubrimiento de la proporcionalidad inversa con la operatividad formal.

Esto constituye un momento en la génesis de construcción de la noción de multiplicación, para ello es conveniente no introducir la operación de multiplicación, tan solo como una operación abreviada de una suma de sumandos iguales; por el contrario, deberán proponerse situaciones que impliquen una relación funcional, en las que el alumno pueda reflexionar sobre el papel del multiplicador y las relaciones establecidas entre los factores del producto para ir construyendo la idea de proporcionalidad.

Uno de los principales problemas que presenta el aprendizaje de la multiplicación, es el descubrimiento del operador multiplicativo, "...es decir, el número de veces que se repite un determinado conjunto." (55)

----

(55) S.E.P. La multiplicación y la división. p. 6

Observemos un ejemplo:

3 + 3 + 3 + 3 y 3 x 4 ó 4 x 3

La diferencia entre estas operaciones es que mientras en la primera adicionamos un conjunto sobre otro, sin tomar en cuenta para nada el número de conjuntos adicionados, este dato es importante en la segunda operación.

Puesto que aquí radica el descubrimiento del operador multiplicativo y como podemos observar ello requiere de la construcción de una operación de rango superior a la aditiva, con la cual el niño tendrá que pasar por varios niveles para poder acceder a la construcción de dicho operador.

A continuación presentamos dichos niveles:

NIVEL I	NIVEL II	NIVEL III	NIVEL IV
Los niños establecen siempre una correspondencia término a término y no una correspondencia múltiple.	Los niños pueden llegar a una solución correcta pero mediante procedimientos aditivos de contaje. No anticipan el número de grupos.	Anticipan el número de conjuntos.	El niño anticipa el número de conjun y expresa verbalmente todas las secuencias de la operación.

Al identificar el operador multiplicativo, se observa que el multiplicando, es decir el número de elementos de un conjunto, y el multiplicador es un operador sin dimensión, éste representa al número de veces que se repite el conjunto.

Esto es lo que diferencia a la multiplicación de la suma, ya que en la suma, ambos factores son medios, son los números de elementos de dos conjuntos de una misma clase que se ponen en relación para obtener el conjunto producto de la unión de ambos.

"Esta disimetría entre multiplicando y multiplicador, hace que los números que pueden ponerse en el multiplicando y en el multiplicador no sean de la misma magnitud." (56)

D. Las estructuras multiplicativas: La experiencia nueva y su autorregulación en la situación problemática.

Piaget sostiene que se promueven los intereses del aprendizaje, si la experiencia que se presenta al niño tiene cierta relación con lo que el niño ya sabe, pero al mismo tiempo será importante si le permite su aplicación en hechos que sean de su cotidianidad, como puede serlo la aplicación del conocimiento en la resolución de problemas.

----

(56) VERGNAUD, Gerard. Los problemas de tipo multiplicativo. p. 198

Piaget señala que el niño se halla más calificado para modificar sus estructuras cognoscitivas de una manera constructivista cuando controla su propio aprendizaje que cuando solo se rescata memorísticamente un determinado conocimiento.

En general, la escuela pone en práctica una metodología encaminada, principalmente al dominio de las técnicas, saber hacer operaciones, repetir palabras, memorizar fórmulas y tablas de multiplicar, etc; y, una vez dominadas éstas se supone podrán ser aplicadas en la resolución de problemas. De esta forma el alumno termina convirtiéndose en un sujeto pasivo, que solo repite respuestas "correctas", que no lo conducen a utilizar plenamente su pensamiento lógico-matemático.

En la actualidad, la resolución de problemas representa para el docente una seria preocupación, pues no es posible que exista una formación de conceptos si no se sabe como duplicarlos en la solución de cualquier problema.

Los filósofos y los educadores han tratado de explicar a través del tiempo cómo el hombre ha llegado a aprender lo que sabe, es decir, de conceptualizar el proceso de aprendizaje.

Una explicación moderna, según Ferh Howard, es manifestada por Jhon Dewey en su libro, ¿Cómo pensamos?, que es en relación a un acto de pensamiento, es decir la resolución de un problema. En su interpretación nos dice que consiste de cinco fases importantes que son:

1. *Las situaciones de un problema*: Una situación de presentación de un problema, o insatisfacción, ocurre cuando el individuo está en una situación de confusión, o en la que el aprendizaje anterior no da la suficiente satisfacción: no está adaptado.

En su explicación a esta fase Howard, reconoce que el aprendizaje comienza en una situación problemática concreta en la que la respuesta es deseada, pero desconocida por el individuo. También es importante mencionar, que el estudiante, al tener una insatisfacción, causa que haga un diagnóstico de la situación, pero sólo si la motivación es lo suficientemente fuerte.

2. *El análisis*: Dewey ha demostrado que el análisis se usa, no solo en la solución de problemas, sino que se utiliza con anterioridad, en el estudio de la dificultad, en la clasificación del objetivo deseado.

El análisis es un examen, dentro de la mente del estudiante, de la situación en la que hay satisfacción. Descubre por qué está insatisfecho y clasifica el objetivo que le daría insatisfacción, reconoce y establece su problema.

3. *La hipótesis*: Se relaciona de manera directa con la prueba y el error, el dar respuesta y el analizar situaciones. Experimentar una hipótesis hasta que se vaya alcanzando una ruta satisfactoria al objetivo, es el corazón del proceso de aprendizaje. Es la parte más difícil y si un estudiante no tiene éxito después de varios intentos, quizá juzgue que el problema es muy complicado para resolverlo.

4. *Deducción*: Es la organización de la solución del problema, dentro de un marco de referencia lógica. Para Dewey, ésta era la más importante fase del proceso de aprendizaje.

5. *Verificación*: Es la precisión y la observación. Es el quinto paso del pensamiento reflexivo. Si hemos aprendido como aprender a través de los pasos uno al cuarto, se creerá que este quinto paso es, en gran medida, aplicar estos cuatro pasos en un nuevo problema, con especial atención al uso del material aprendido.

Es esencial observar que la organización o estructura lógica del conocimiento es el paso final de desarrollar una base para el aprendizaje futuro. Es asimismo necesario analizar que los pasos del acto completo del razonamiento de Dewey, no necesariamente son tampoco el aprendizaje completo.

La explicación del razonamiento de Dewey es una aclaración final estructurada de lo que transcurre en el aprendizaje. "En el comienzo del aprendizaje o de la readaptación del comportamiento debe presentarse una situación en la que el estudiante sienta una necesidad. Ésta es una sensación que tiene el organismo por algo que está ausente, cuyo logro le proporcionará una satisfacción." (57)

Enseñamos matemáticas, en primer lugar para que los niños puedan resolver problemas que se le presenten en su vida cotidiana; cuentas, mediciones, comparaciones, etc.

---

(57) FERH, Howard. Teoría del aprendizaje relacionado con el campo de las matemáticas. p. 110

La suma, la resta, las fracciones, todos los contenidos que enseñamos deben ser una herramienta que permita resolver problemas.

"Las matemáticas en el proceso educativo del alumno constituye una de las áreas más importantes, pues de su aprendizaje depende su desarrollo cognoscitivo y su preparación para el entendimiento de cualquier situación problemática que se le presente en su mundo exterior." (58)

Sin embargo, las estrategias para la resolución de problemas están fundamentadas en ciertos procedimientos ya establecidos, es decir, el maestro plantea el problema y escribe aspectos necesarios que tiene que seguir para su resolución, que son: Datos, operaciones y resultado.

Ésto ha llegado a convertir a los alumnos en sujetos dependientes, que solo responden automáticamente a los planteamientos del maestro; sentimos que no razonan. Quizá este sea uno de los motivos por los cuales casi nunca se proponen problemas en clase, excepto en los exámenes.

¿Qué significa ésto? Se dedica mucho tiempo a que los alumnos aprendan a hacer bien las operaciones básicas, pero se plantean pocos problemas. Ésto es tan raro, como dedicar a un niño mucho tiempo en la práctica del movimiento de sus piernas

----

(58) S.E.P. Guia para el maestro. p. 5

acostado, para que aprenda a caminar. Sin embargo, saber mover las piernas no es suficiente para poder caminar, de igual forma, saber hacer operaciones no significa poder resolver problemas.

Uno de los principales motivos del fracaso en la resolución de problemas es que, en la escuela, se dedican muchas horas y esfuerzo a que los alumnos dominen, primero las técnicas para ejecutar operaciones y después, en muchas menos horas, se les proponen algunos problemas para que las apliquen.

Para que los alumnos logren comprender las operaciones y utilizarlas adecuadamente en la resolución de problemas, es necesario invertir el orden; los niños deben resolver problemas desde el principio y, poco a poco, mejorar la manera de hacer las operaciones para resolver los problemas con mayor facilidad.

Los nuevos planes y programas han surgido por la necesidad de una reestructuración de contenidos y metodologías, proponen que el maestro trate los contenidos a partir de situaciones problemáticas, ya que éstas permiten a los alumnos enlazar nociones y nuevos conocimientos en el contexto de situaciones reales.

Los alumnos siempre tienen recursos para resolver un problema aún antes de conocer el procedimiento usual de la operación que lo puede resolver. Pueden, por ejemplo, resolver un problema de multiplicación, dibujando o sumando.

Estos procedimientos no usuales, a veces largos y poco siste máticos, son la base a partir de la cual los alumnos pueden comprender las operaciones y desarrollar mejores maneras de hacerlos.

La resolución de problemas representa en los alumnos, la motivación para que se obtenga un aprendizaje significativo; los cuales deberán ser propuestos en base a sus necesidades e intereses.

Los problemas interesantes para los niños, pueden ser problemas de la vida cotidiana, problemas de fantasía, juegos o problemas puramente numéricos. Lo importante para que un problema sea interesante es que presente un reto para los alumnos, una dificultad adecuada a su edad.

Cuando los alumnos ya encuentran una forma sistemática de resolver un problema, o sea, cuando descubren la operación que lo resuelve, ese problema deja de ser problemático y, por lo tanto, ya no es interesante.

Conviene variar la forma con la que se presentan los datos de los problemas, a veces en su forma tradicional de un texto, a veces en un dibujo o una gráfica. También es recomendable plantearles problemas que no tienen preguntas para que sean los niños quienes las formules.

Acercar las matemáticas a la realidad no quiere decir buscar situaciones más o menos reales, sino que quiere decir, que el niño construya sobre datos reales y ésto exigirá por nuestra parte conocer detalladamente cuales son los procedimientos espontáneos que el niño desarrolla cuando debe solucionar por si mismo las situaciones problemáticas que la adquisición de dichos contenidos plantea.

Desde un punto de vista estrictamente matemático la multiplicación de los nuevos enteros no reviste complejidad que la operación de adición con los mismos números, ya que entre las operaciones 3 + 3 + 3 + 3 y la 3 x 4 ó 4 x 3 no existen diferencias importantes, puesto que una constituye una expresión abreviada de la otra.

La enseñanza de esta operación de multiplicación se aborda, en efecto normalmente explicándole al niño que 3 x 4 es una forma más corta de poner 3 + 3 + 3 + 3 y que es lo mismo poner 3 x 4 que 4 x 3, porque las dos formas dan el mismo resultado.

Lo anterior es perfectamente claro para un adulto, pero no así para un niño, porque, desde el punto de vista epistemológico y psicológico la construcción de la operación de la multiplicación comporta un proceso que Piaget describe en términos de abstracción reflexionante, de un mayor nivel de complejidad que el de la adición; ya que, mientras en la suma podemos adicionar sucesivamente 2 + 2 + 2 + 2 y llegar a un resultado final, sin tener en cuenta el número de veces que hemos realizado la acción de añadir, en la multiplicación será necesario que tengamos en cuenta el número de conjuntos equivalentes, representa, a la vez, el número de acciones, de operaciones realizadas, hay por tanto, un operador que nos indica, el número de operaciones con conjuntos y no sólo con elementos.

Por estructuras multiplicativas entendemos el *espacio de problemas*, cuya solución exige la utilización de operaciones aritméticas de multiplicación y división.

Este tipo de problemas los engendran dos relaciones fundamentales: la relación de isomorfismo de medidas y la relación del producto de medidas. Ambas categorías ponen en juego varias categorías de conceptos en forma indisociable.

Los distintos campos conceptuales que hemos definido, tales como estructuras aditivas, lógica de clases, etc; "...están relacionadas entre si, especialmente debido al hecho de que las mismas estructuras lógico-matemáticas van a incidir transversalmente sobre los distintos contenidos, pueden plantear problemas que son en parte comparables." (59)

- Diferentes categorías en que se puede ubicar un problema multiplicativo:

1. Isomorfismo de medidas: Con el que se cubren todas las situaciones en los que dos espacios de medidas son directamente proporcionales. En estas situaciones se ponen en relación cuatro cantidades.

----

(59) VERGNAUD, G. et al. Didáctica y adquisición de conceptoa matemáticos, problemas y métodos. p. 201

Representación

a	b
c	d

Ejemplo: Si tenemos en una caja cuatro yogurts, en seis cajas tenderemos veinticuatro yogurts. La representación sería la siguiente:

cajas	yogurts
1	4
6	24

Al observar esta representación se puede ver implicada una relación de proporcionalidad entre las cantidades en juego que puede ser analizada de dos maneras; horizontal o verticalmente.

En el caso, los número uno y seis representan las cantidades de cajas, estos números son medidas; cuatro y veinticuatro son números que representan las cantidades de yogurts; estos números son medidas, pero de otra naturaleza.

2. Producto de medidas: La relación multiplicativa que se da en esta segunda categoría de problemas multiplicativos es una relación ternaria, ésto es, entran en relación tres cantidades, tales que, una es producto de las otras dos, tanto en el plano numérico como en el dimensional. En este caso, las cantidades representan tres medidas de diferente clase, pero con relación entre si.

A esta categoría pertenecen los problemas de áreas y volúmenes.

Ejemplo: Tres muchachas y cuatro muchachos quieren bailar. Cada muchacho va a bailar con una muchacha y, cada muchacha va a bailar con cada muchacho; en total, las parejas posibles que se pueden formar son doce.

En el plano numérico la relación multiplicativa estaría dada por 12 = 3 x 4, en el plano de las dimensiones dicha relación estaría dada por parejas igual muchachas que muchachos.

Aquí podemos distinguir dos planos, uno cualitativo y otro cuantitativo, en el cualitativo estarían las diferentes combinaciones de parejas que se pueden formar y en el cuantitativo tendríamos la cantidad total de posibles combinaciones.

CAPITULO IV

ELEMENTOS PEDAGOGICOS

A. La enseñanza-aprendizaje.

El aprendizaje dentro de la concepción de la psicología genética es algo más que un simple cambio de conducta y lo explica solamente con base, en el desarrollo psicológico.

En realidad el desarrollo es el proceso esencial en el que cada elemento del proceso del aprendizaje se da como una función del desarrollo total, más que como un elemento que explica el desarrollo.

"El aprendizaje es un aspecto universal y necesario del proceso de desarrollo culturalmente organizado y, específicamente de las funciones psicológicas." (60)

La enseñanza-aprendizaje representa la tarea educativa del docente y de las estrategias pedagógicas utilizadas dependerá el éxito de dicho proceso.

----

(60) S.E.P. Recursos para el aprendizaje. p. 21

> "Entenderemos el proceso enseñanza-aprendizaje como una situación donde se generan vínculos es pecíficos entre quienes participan en él, como son los docentes y los alumnos, ambos como sujetos de aprendizaje; a partir de situaciones de problematiza ción, concientización y socialización, orientadas a conocer, comprender, explicar y valorar, así como transformar la realidad de la práctica educativa." (61)

Según Michelle Artigue, el sistema didáctico está constituido por tres subsistemas; éstos son, profesores, alumnos y saber enseñado, los cuales, y su interacción es determinada en la enseñanza.

Para la teoría piagetana, en la interpretación de Artigue, todo conocimiento se constituye por una interacción constante entre el objeto y el subsistema *saber enseñado*, es decir le permite al sujeto utilizar sus propios razonamientos de partida y abrirse camino al conocimiento con los procedimientos que le son propios, lo cual lo llevará a cometer errores necesarios en la búsqueda de los razonamientos correctos.

Por otro lado, los contenidos no deben ser considerados como el hecho sobre el que se desarrollará la investigación de una organización, de tal manera, que la jerarquización de estructuras

----

(61) S.E.P. Hacia una construcción del conocimiento. p. 3

neutrales generales y la noción del campo conceptual deben aparecer para rehabilitar de algún modo los contenidos del conocimiento; por lo que es la realidad misma la que se encarga de invalidar los razonamientos inadecuados.

Sin embargo, la realidad de las didácticas empleadas por el docente toma otro sentido con respecto a la relación de los subsistemas *saber enseñado* y *el alumno*, pues:

> "... para el didacta el mejor problema consiste en el estudio de las condiciones en las que se conforma el saber, pero con vistas a su optimización, a su control y a su reproducción, básicamente en la situación escolar. Por esta razón, reconoce una importante participación al objeto de la interacción entre los dos subsistemas, la situación problema, la gestión mediante la enseñanza de esta interacción." (62)

La modelización y reproductibilidad en la enseñanza de las matemáticas son indiscutiblemente las formas didácticas que el docente utiliza en sus estrategias, quienes mediante éstas, reproducen a través de los años una misma comprensión de la noción enseñada, es decir, reproducen una historia, un desarrollo semejante al de los años precedentes, mediante intervenciones que, aunque discretas, desnaturalizan las condiciones didácticas

----

(62) ARTIGUE, Michell. Modernización y reproducción en la enseñanza de las matemáticas. p. 151

girantes de una significación correcta de las reacciones de los alumnos; "...los comportamientos obtenidos son aparentemente los mismos, pero las condiciones en las que se obtuvieron, modifican el sentido más próximo al comportamiento cultural." (63)

Con respecto a la enseñanza de un concepto matemático, es necesario considerar los siguientes aspectos:

- La noción matemática tal y como se le define en el contexto del saber en una época dada.

- El conjunto de significantes asociadas al concepto; representaciones simbólicas e icónicas.

- Los instrumentos; teoremas, técnicas algorítmicas, peculiares al tratamiento del concepto.

Lo anterior es señalado por Michelle Artigue, así como también distingue en las concepciones de los sujetos diversos componentes, en particular:

- La clase de las situaciones problemas que le dan sentido al concepto para el niño.

- Los instrumentos, teoremas, algoritmos de que dispone para manipular el concepto.

----

(63) Ibidem p. 168

Como hemos mencionado con anterioridad para el desarrollo de una conciencia crítica, es necesario un cambio en el sistema educativo, lo que implica un cambio de actitud tanto de los profesores como de los alumnos.

Al respecto P. Morán, afirma que: "La instrucción didáctica, entendida como la organización de los factores que intervienen en el proceso de enseñanza-aprendizaje, con la finalidad de posibilitar en un tiempo determinado el desarrollo de las estructuras cognoscitivas, la adquisición de habilidades y los cambios de actitud en el alumno, es un quehacer de constante replanteamiento, susceptible de continuas modificaciones, producto de evaluaciones permanentes." 64)

B. El papel del maestro en el proceso enseñanza-aprendizaje.

En el desarrollo de este trabajo se ha venido explicando el papel que juega el maestro dentro de este proceso, pero consideramos abordar algunos principios generales que el profesor debe conocer para que pueda funcionar como una ayuda cuyo objetivo consiste en estimular y fomentar la construcción y reconstrucción por el niño del conocimiento, que sea un magnífico asesor, que sepa como descubrir los intereses y la comprensión del niño, que tiene que ser un experto en relaciones humanas, que comprenda

----

(64) S.E.P. Hacia una construcción del conocimiento. p. 4

la dinámica de grupo y pueda motivar a los niños hacia la autonomía y socialización tanto en el ámbito moral como en el intelectual.

El maestro tiene que ser todo esto y además de ser alguien que cumpla las otras numerosas exigencias que su propia práctica demanda, porque en su trabajo diario, las acciones cotidianas, las aportaciones didácticas oportunas, son las que juegan un papel importante en el proceso de enseñanza-aprendizaje y no los programas.

Los maestros tiene por supuesto un importante papel; "...el educador sigue siendo como animador para crear las situaciones y construir los dispositivos iniciales." (65) Se pretende que el maestro deje de ser un conferencista que se contente con trasmitir soluciones acabadas convirtiendo así alumnos pasivos.

Para ellos es necesario que el maestro se plantee tres preguntas básicas:

a. ¿Cómo son mis alumnos?

b. ¿Qué les ayudará a ser mejores?

c. ¿Cómo puedo con las capacidades y limitaciones que tengo, ayudarlos a desarrollarse?

----

(65) Los principios de los maestros CAS. p. 13

La teoría psicogenética puede contribuir a contestar estas preguntas en cuanto nos puede ayudar a averiguar como piensan los niños, a hacer amplios planes para las actividades de aprendizaje y a implementar esos planes de modo flexible con el fin de lograr el máximo fruto de la participación de los niños.

Esta teoría nos brinda las características esenciales por etapas de acuerdo con lo que los niños hacen y piensan. Una vez que los maestro tengamos idea sobre las capacidades de pensar de los niños, podemos descubrir como aplicar esos conocimientos y enfrentarlo a la resolución de situaciones problemáticas sencillas que estén relacionadas con la multiplicación, pero identificar cuales son las estrategias que el niño utiliza y en que medida las relaciona con procedimientos canónicos. También nos permite saber si le da sentido a la operación, ya que es importante que el niño sepa cuando y como usar el algoritmo de la multiplicación que cómo funciona.

La explicación de este conocimiento es necesario porque es el punto de partida para que el maestro propicie situaciones didácticas tomando en cuenta el conocimiento previo al respecto, permitiéndoles la confrontación de sus hipótesis y comprender que el niño para aprender necesita información y no sólo del maestro, sino también de los niños que comparten sus hipótesis y de los que no. Para ello requiere la comunicación e intercambio con sus compañeros: hablar comentar, analizar sus trabajos y compararlos con los demás, etc. Esta es una forma de trabajo que tiene un gran valor en el proceso de aprendizaje, mediante ella los niños cono cen como piensan sus compañeros, exponen, confrontan, defienden y ponen a prueba sus propias hipótesis; buscan soluciones en común a una situación planteada. Pues esto puede darnos una idea del sentido que le da a la operación y estarán en posibilidades de utilizar algunos de los procedimientos de sus compañeros en la medida en que los comprenden.

Es importante destacar que la confrontación de opiniones no debe confundirse ni manejarse como una forma de competencia.

El niño debe sentir que las opiniones de todos valen por igual y que no solo las de los mejores son tomadas en cuenta. Es ante todo tarea del maestro lograr que el niño se familiarice con esta forma de trabajo, entendida como la actitud de ayuda recíproca que debe imperar en un grupo. Y permitir el uso de procedimientos no convencionales siendo esto favorable para que los niño comprendan el significado de la multiplicación.

A medida que van avanzando, este conocimiento se va a ir generalizando hasta llegar a la consolidación del algoritmo convencional.

"Para llegar a un nuevo descubrimiento es preciso siempre recorrer ese camino de aciertos y errores, producto del pensamiento y la confrontación de hipótesis con la realidad objetiva." (66)

----

(66) S.E.P. Estrategias pedagógicas para niños de primaria con dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. p. 24

Esto propiciará la flexibilidad del pensamiento y descubrir que existen diversas formas para llegar a un mismo resultado y descubra que aprende de sus errores. Ello puede indicar que el niño se ha centrado en un conflicto cognitivo, tratando de encontrar una respuesta. En este caso la actitud del maestro será de alerta para aprovechar la ocasión de hacerle alguna situación que pueda dar lugar a una reflexión por parte del alumno.

Algunas veces la razón podrá ser obvia, pero en muchas ocasiones, para descubrirla será necesario preguntarle al niño. A ver explícame por qué..., ¿por qué crees que...?, ¿cómo te diste cuenta de...?. etc; así el maestro estará en posibilidad de distinguir si se trata de un verdadero error, o si el niño solamente se encuentra distraido o confundido, o bien, si se trata de un error constructivo, y por lo tanto útil al proceso de aprendizaje; es decir, un error que está expresando una hipótesis particular del niño o alguna otra situación que el pueda llegar a descubrir por si mismo.

En este sentido, es importante que los maestros reflexionemos sobre qué es lo fundamental; que un trabajo queda sin errores pero sin ninguna comprensión por parte del autor, o que éste tenga la oportunidad de descubrir su error, analizar a que obedece, y una vez comprendida la situación, estar en posibilidades, tanto de corregirlo como de no volver a cometerlo.

C. Los sujetos y sus roles en la enseñanza-aprendizaje.

Maestros, director y supervisor son sujetos que participan en la vida cotidiana de la escuela, los cuales desempeñan diversas funciones, pero que, entre si se relacionan, es decir, la organización de una escuela depende del director y se manifiesta en el maestro de acuerdo a la situación ambiental y material de la escuela, las formas de su trabajo.

No es solamente del maestro de quien depende el éxito o fracaso educativo, ésto involucra, por una parte, la buena organización del director, la persistencia de una buena supervisión y, sobretodo las relaciones comunidad-escuela que puedan establecerse.

La labor del maestro es fundamentada por ciertas normas y estatutos a los que tiene que sujetarse, pero es él, el que tiene que adaptar su trabajo a las necesidades y relaciones históricas y materiales de la escuela y de la comunidad, esta interacción irá modificando constantemente su labor, ya que como nos dice Citlali Aguilar en su texto; "...el trabajo de los maestro no se define de una vez para siempre." (67), sino que, a través del tiempo, los cambios sociales, materiales y políticos interactúan en el contenido de su trabajo.

---

(67) AGUILAR, Citlalli. La definición cotidiana del trabajo de los maestros. p. 3

El maestro es el encargado de generar los estímulos necesarios para que el alumno cubra el proceso aprendizaje, sin olvidar cada día que se requiere de su mayor participación en su calidad de orientador y guía.

El niño es la parte más importante en el proceso educativo y un instrumento de trabajo que han de moldearse para el presente y el futuro, por ello la importancia de que el docente conozca en todos sus aspectos el material humano con el que va a trabajar.

Las relaciones que se den entre maestro y alumno son fundamentales para que se logre eficazmente el proceso de la enseñanza-aprendizaje. Mc. Dermott entiende esta relación còmo acuerdos o consensos, acerca de quienes son ellos y lo que se está haciendo entre ellos, arreglos que ellos formulan, actúan y usan juntos para entenderse unos a otros.

Para que se logre esta interacción, es necesario una relación de confianza, la cual mediante nuestro trabajo en clases se logrará. Al hablar de confianza no se habla de una cualidad de la persona, sino como dice Dermott: "Un producto del trabajo que hacen las personas para lograr más relaciones de confianza en los particulares contextos institucionales." (68)

Indiscutiblemente el lenguaje utilizado por el maestro constituye el medio para propiciar el aprendizaje, pero no podemos

----

(68) DERMOTT, Mc. Las relaciones sociales como contextos para el aprendizaje en la escuela. p. 187

considerar que las estrategias verbales sean las más importantes, sino que más bien la comprensión que puedan tener nuestros alumnos con respecto al lenguaje utilizado.

La interacción alumno-alumno, la consideramos también de suma importancia en el proceso educativo, pues la convivencia y la comunicación que se den, producirá alumnos más críticos y en plena confianza de poder participar en grupo.

D. El método clínico: un apoyo en la interacción maestro-alumno.

Las derivaciones que se han realizado en el campo educativo de los aportes de Piaget, han repercutido muy significativamente en la práctica escolar, ya que, uno de los aspectos en los que se observa claramente esta situación es en la interacción maestro - alumno.

Tomando en consideración el enfoque de los nuevos planes y programas de estudio en educación primaria en donde se persigue que los niños adquieran una formación cultural más sólida y desarrollen su capacidad para aprender permanentemente y con indipendencia.

Es necesario que la estructura escolar manifieste un cambio, donde se da la ruptura del aprendizaje tradicional y surja un proceso en el cual el niño participe activa y dinámicamente en la apropiación del objeto de conocimiento.

Este cambio de postura hace necesario que el docente adopte una perspectiva clínica en donde no se limite tan solo al conocimiento de los períodos de desarrollo, sino que considere las posibilidades que el niño tiene para adoptar una estrategia determinada en la búsqueda de la solución de un problema, trabajando entonces con una metodología clínica, la cual se vincula en toda la obra de Piaget

La originalidad de este autor consiste en haber adaptado este método a una investigación de carácter experimental.

Ya en 1926 en la introducción de su libro, <La representación du monde chez> señalaba expresamente que el método clínico permite, "...superar el método de pura observación, y sin caer en los inconvenientes del test, alcanzar las principales ventajas de la experimentación." (69)

No es inútil, sin duda recordar que el vocablo clínico fue elegido para destacar la oposición con el método de los testa, por entonces considerado como el método objetivo por excelencia, para el estudio de la inteligencia.

El método clínico, por tanto, lo era en la medida en que se negaba a sujetarse a la presentación de problemas estandarizados, de asuntos de vocabulario, fijados de una vez por todas y prefería

(69) BANG, Vinh. El método clínico y la investigación en la psicología del niño. p. 80

por lo tanto, a partir de ideas rectoras, adaptar las expresiones y, en caso necesario las situaciones mismas a las respuestas, a las actitudes y hasta al vocabulario del sujeto.

Pero, es de suma importancia que el maestro distinga los distintos tipos de respuestas que da el niño, ya que en ocasiones sus respuestas, pueden deberse a la falta de interés ante un tema o a la fantasía etc; y éstas, no están necesariamente relacionadas con sus creencias.

Para dar el debido peso a las respuestas que da el niño, es necesario que sepamos diferenciarlas. Piaget distingue cinco tipos de respuestas del niño que son:

1. Creencias espontáneas.
2. Creencias desencadenadas.
3. Creencias sugeridas.
4. Fabulación.
5. No importanquismo.

Las creencias espontáneas:

Constituyen la forma natural de exponer las explicaciones que él encuentra ante los hechos. Se pueden descubrir mediante el examen clínico, se caracterizan por la constancia de las respuestas y la espontaneidad de las mismas; sin embargo revelan el pensamiento del niño.

Las creencias desencadenadas:

Este tipo de respuestas parece como si la solución fuese inventada por el niño durante la experiencia, más supone esquemas anteriores, una orientación de hábitos intelectuales, etc. De esta manera las creencias inventadas, pero más bien son descubiertas por el niño en el mismo proceso de cuestionamiento por la misma confrontación que éste favorece; por lo tanto son resultado de una reflexión en torno a ésto revelando así, una actitud mental del niño.

Las creencias sugeridas:

Estas respuestas deben evitarse en la medida de lo posible, ya que constituye el pensamiento del investigador y no del niño. Hay dos posibles variantes, en las cuales el investigador puede sugerir la respuesta al niño, éstas son; sugerencia por palabra y la sugerencia por perseveración.

La primera resulta del uso imprudente de alguna palabra; el único medio de evitarla estriba en aprender a conocer el lenguaje infantil y formular las preguntas en este mismo lenguaje, y la segunda puede resultar del hecho de proseguir la conversación, después de la misma pregunta varias veces, hasta obtener la respuesta esperada por el investigador, que no es precisamente la del niño.

La fabulación:

Cuando se interroga a los niños, principalmente antes de los siete u ocho años, ocurre que, aún guardando un aire de candor y de seriedad, se divierte con el problema planteado, inventan una solución simplemente porque les agrada.

En este caso no se habla de creencia, pues el niño se limita a jugar. Es importante distinguir este tipo de respuestas ya que tampoco revelan creencias e hipótesis ante un problema determinado.

El no importanquismo:

El niño prefiere inventar una respuesta que estar callado y contesta sin importarle que contesta. Lo que se obtiene de estas respuestas no puede utilizarse para inferir las hipótesis del niño, ya que no es producto ni de una creencia espontánea, ni de una reflexión.

De este modo, el examen clínico participa de la experiencia, en el sentido de que el clínico se plantea problemas, hace hipótesis, hace variar las condiciones que entran en juego y, finalmente, controla cada una de las hipótesis en contacto con las reacciones provocadas por la conversación.

Pero el examen clínico, participa también de la observación directa, es decir, porque el experimentador, a través de la ejecu ción del niño ante determinado objetivo observa, analiza y formula hipótesis en base a lo que hace o dice en sus justificaciones y determina a que nivel o etapa cognitiva corresponde sus representaciones con el propósito de llegar a una interpretación sobre la manera en que el sujeto interacciona con el objeto de significado.

Un buen investigador deberá saber interpretar la respuesta del niño, éste resulta de particular relevancia, ya que, el niño no responde siempre exponiendo sus ideas e hipótesis.

E. La evaluación educativa.

La educación tradicional ha venido arrastrando desde tiempo atrás el uso de la evaluación al separarla del proceso enseñanza-aprendizaje y convirtiéndola en una meta en sí, adquiriendo un significado artificial y deformado; reduciéndola generalmente a uno o varios exámenes, sirviendo ésto, como una acumulación de puntos en donde los ejercicios y actividades de aprendizaje, no tienen valor sino en función del puntaje que aportan para la calificación.

Resumiendo lo anterior podemos decir que existen dos errores en evaluación; el primero consiste en evaluar el aprendizaje, solo cuando la administración escolar lo exige; y el segundo, consiste, en la función exclusiva, que es la de servir como fuente de calificación.

No hay que perder de vista que estas pruebas, sirven para medir aprendizajes y que, por lo tanto no fomentan el desarrollo de las capacidades críticas y creativas.

En primer lugar el estudio estadístico de tales pruebas es un estudio centrado en el instrumento, es decir, la prueba; con lo cual el docente pierde de vista la totalidad del proceso de aprendizaje.

Esta importancia que se da al análisis del instrumento, se aplica indistintamente, en supuestas condiciones iguales, ajenas a las condiciones particulares de un proceso grupal y del proceso del aprendizaje que se haya generado, presentan las mismas preguntas a los grupos de un mismo grado.

Ésto explicaría por qué tienen que recurrir únicamente a preguntas que solo requieren de la memorización de una información, y permitiría pensar que más que una ayuda para el proceso del aprendizaje cumplen una función de control.

Ésto se inserta en una concepción que reduce las funciones docentes a acciones netamente mecánicas, porque el maestro ya no tendría que averiguar los logros del alumno, así como que situaciones se facilitaron y cuales se dificultaron, etc.

De esta manera, este planteamiento minimiza el papel y la función del maestro al restringirlo únicamente a un instrumento que supervisa, guía, conduce lo que los planificadores han establecido.

Para tener un concepto más claro de la evaluación, el docente debe hacerse estas preguntas sobre sus alumnos: ¿qué sabe?, ¿qué no sabe?, ¿cómo lo sabe? y ¿gracias a qué lo sabe?.

Lo que lo llevará a entender que el proceso de aprendizaje de los niños es evolutivo; es decir, que no todos los niños construyen los conocimientos que se están trabajando al mismo tiempo.

Dicgo de otro modo, el maestro ha de utilizar el desarrollo general como un marco de refencia en el que podrá situar a cada uno de sus alumnos, apoyándose precisamente en el método clínico.

Por lo tanto, la evaluación habrá de llevarse de manera permanente y continua en donde el maestro observará, interogará y cuestionará la participación de los alumnos y se aplicará tanto al grupo en general como a cada uno de los alumnos.

La evaluación pues, viene a representar una parte medular del proceso enseñanza-aprendizaje, ya que nos irá indicando el grado de avance de los alumnos y las posibilidades de continuar o la necesidad de retomar o retroalimentar algún tema específico.

CONCLUSIONES

La educación tiene su carácter de ciencia como exploradora de la esencia y el devenir del hombre; pero para la educación el hombre no puede existir como individuo, como ente aislado, para ella, el hombre ajeno a las relaciones sociales es únicamente una abstracción.

Un individuo sólo puede alcanzar su carácter de hombre como miembro de una colectividad en la que se conjugan una diversidad de intereses; ya que todos y cada uno de ellos se encuentran vinculados entre sí, pues no se puede suponer siquiera que puedan sustraerse a la sociedad, ni tampoco encontrarse yuxtapuestos, ya que todos comparten las mismas necesidades y uno de sus principales objetivos es precisamente, el de procurar su satisfacción.

Si queremos que la educación de las matemáticas se proyecten de modo productivo en las realizaciones vitales futuras de los educandos, es necesario cultivar al doble proceso de abstracción y concreción, no solo en el planteamiento y resolución de problemas más o menos prácticos, o en la comprensión de las diversas funciones que presenta a la multiplicación, sino como línea directriz de toda enseñanza.

A lo largo de este trabajo hemos analizado el hecho de que, solucionar problemas implica la búsqueda de un conocimiento desconocido, por ello, es importante que el niño utilice sus propios procedimientos para encontrarlos, pues, si seguimos dándoles abstracciones ya hechas, sin dejarlos que ellos mismos las elaboren, es continuar formando alumnos pasivos y memoristas.

Consideramos que la mejor forma de que el alumno aprenda, es inducirlo a que descubra y elabore sus propias concepciones matemáticas, mediante su intervención directa en una situación problemática.

La modelización y la reproductibilidad, aspectos característicos que se dan en la enseñanza de las matemáticas, ha provocado que la educación de los alumnos sea monótona, sin dar a éstos la oportunidad de que puedan pensar y razonar por si mismos, y además de no saber que hacer en una situación problemática fuera del ámbito escolar.

Cabe mencionar que en el estudio de las categorías de relaciones de Veghaud, se puede comprobar que no todos los problemas tienen el mismo grado de dificultad, y lo más importante es que nos dan elementos que podemos tomar en consideración en la elaboración y propuesta de problemas que vayan acordes a la realidad de los educandos.

Es importante dejar que sean los mismos niños quienes propongan problemas y los solucionen, ésto ayuda a comprender mejor las funciones que presenta la multiplicación en un problema determinado.

En el desarrollo de este trabajo se hicieron varias observaciones y en función de éstas, nos permitimos hacer algunas recomendaciones, entre ellas las siguientes:

- El hecho de desfase e entre el nivel evolutivo de la sociedad y los niveles evolutivos de los niños en los distintos momentos de su desarrollo, que hace de la enseñanza un proceso social en el que resulta difícil coordinar adecuadamente, necesidades sociales e individuales de distinto orden.

El maestro debe encontrar soluciones que le permitan resolver problemas puntuales, y pese a que cada caso particular tiene una delimitación clara y precisa que lo distingue de los demás, todos ellos nacen de la confluencia de evoluciones distintas: la social y la individual.

- Los enfoques educativos hacen especial hincapié en que la escuela debe conseguir que el niño no se convierta en un simple repetidor de la ciencia y la cultura establecidas, sino que sea capaz, en su vida futura, de generar el desarrollo de ambas y contribuir así, al avance cultural y científico de su sociedad.

- Las funciones de transmisión de conocimientos y desarrollo de las capacidades creadoras del individuo deben darse indisociablemente unidas la una con la otra, de lo contrario, no se da en realidad ninguna de las dos.

- El niño piensa, no solo escucha y recuerda, sino que elabora, según las posibilidades y características de su proceso evolutivo, las explicaciones que recibe.

- Es necesario fomentar en el niño constantemente su ánimo de participación y cooperación, procurando que descubra por si mismo lo gratificante y fácil que resulta realizar las distintas actividades.

- Es importante que el maestro tome en cuenta las capacidades de sus alumnos y no imponerle tareas que le sean aburridas, así como tampoco exigirle cosas que sobrepasen a sus posibilidades.

- Es importante procurar que el momento de transición por el que ha de pasar todo sujeto, le resulte una experiencia agradable, evitando al máximo romperle bruscamente sus patrones de conducta.

- Des suma importancia es también motivar la participación constante de todos y cada uno, mostrando interés en conocer sus aficiones y sus gustos.

- Es importante que la evaluación se realice de manera constante y permanente, para que el maestro pueda corregir a tiempo los posibles errores, a la vez que el niño tenga la oportunidad de retroalimentarse.

A manera de culminación de nuestras anotaciones, podemos decir que; el niño en los distintos momentos de su evolución y en los momentos de dinamismo social, puede y es capaz de interaccionar con los modelos culturales de su entorno a partir de los instrumentos mentales que él mismo ha ido construyendo en el largo proceso de su aprendizaje que le llevará a su desarrollo integral.

BIBLIOGRAFIA

1. AGUILAR, Citlali. La definición cotidiana del trabajo de los maestros. México. Ed. SEP/El Caballito. 1985. 180 pp.

2. ANTIGUE, Michele. Modelización y reproducción en la ensenanza de las matemáticas. Cuaderno de didáctica de las mate máticas No. 8. París. Ed. I.R.E.M. Universite. 1980. 260 pp.

3. BRUN, Jean. Pedagogía de la matemáticas y psicología. Análisis de algunas relaciones. En Infancia y Aprendiza je. No. 9. Madrid. 1980. 325 pp.

4. CARRIZALES, Retomoza, César. Por una política de la discon tinuidad en experiencia docente. Documento de apoyo. México. Normal Nacional de Profesores. 1987. 70 pp.

5. COLL, César. Desarrollo Psicológico y Educación. México. Ed. Siglo Nuevo. 375 pp.

6. DELVAL, Juan. Crecer y Pensar. La construcción del conocimien to en la escuela. Barcelona. Ed. Laía. 3ª ed. 1982. 375 pp

7. DIRECCION GENERAL DE EDUCACION ESPECIAL. Fascículo I. El Sistema Decimal de Numeración. México. Ed.SEP. 1987. 185 pp.

8. --------------. Fascículo III. Problemas y operaciones de multipli cación y división. México. Ed. SEP. 1988. 273 pp.

9. DERMONTT, Mc. Las relaciones sociales como contextos para el aprendizaje en la escuela. Harvard Educational no. 47. Massachusets. 1977. 380 pp.

10. ERMEL, Del Iram. Los problemas en la escuela primaria. Francia. Ed. Poitiers. 1981. 250 pp.

11. FERH, Howard. Teorías del aprendizaje relacionadas con el campo de las matemáticas. En corrienetes pedagógi cas I México. Ed. SEP/El Caballito. 1985. 248 pp.

12. GARCIA, González, Enrique. Piaget. México. Ed. Trillas. 1991. 122 pp.

13. GINSBURG, Herbert y Opper Silvia. Epistemología genética y las consecuencias de los estudios de Piaget para la enseñanza. Documento de apoyo. México. Ed. SEP. 1991. 42 pp

14. LABINOWICZ, Ed. Introducción a Piaget. Ed. Fondo educativo interamericano. México. 1982. 309 pp.

15. MORENO, Monserrat. La Pedagogía Operatoria. Barcelona. Ed. Laía. 1983. 325 pp.

16. MORENO, Soto Graciela. Psicología del Aprendizaje. México. Ed. Siglo nuevo. 1980. 312 pp.

17. PIAGET, Jean. Como un niño forma conceptos matemáticos. Documento de apoyo. México. Ed. SEP. 1993. 25 pp.

18. ---------------. Seis estudios de psicología. Barcelona. Ed. Seix Barral. 1971. 227 pp.

19. ---------------. Teoría psocogenética. Barcelona. Ed. Seix Barral. 1988. 176 pp.

20. ROCKWELL, Elsie. y Mercado Ruth. La escuela, lugar del trabajo docente. Descirpciones y debates. México. Ed. Diecinvestav . IPN. 1986. 178 pp.

21. RODRIGUEZ, Gabriela. Psicología Genética. México. Ed. Siglo Nuevo. 1993. 132 pp.

22. SECRETARIA DE EDUCACION PUBLICA. El Método Clínico. Un apoyo en la interacción naestro-alumno. México. Ed. SEP. 1988. 81 pp.

23. ---------------. Guía didáctica para orientar el dearrollo del lenguaje oral y escrito en preescolar. México. Ed. SEP. 1992. 102 pp

24. ---------------. Guía para el maestro. Introducción a la propuesta de matermáticas. México. Ed. La prensa. 1992. 126 pp.

25. ---------------. Hacia una construcción del conocimiento. México. Ed. SEP. 1992. 20 pp.

26. ---------------. Propuesta de matemáticas de G.I. México. Ed. SEP. 1988. 315 pp.

27. --------------. Proyecto. C A S. Documento de apoyo. México. Ed. SEP: 1994. 25 pp.

28. --------------. Recursos para el aprendizaje. Documento de apoyo al docente. México. Ed. SEP. 1992. 25 pp.

29. UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL. Contenidos de aprendizaje. México. Ed. Xalco. 2ª ed. 1990. 274 pp.

30. --------------. Evaluación de la práctica docente. México. Ed. Xalco. 1986. 274 pp.

31. ---------------. Grupo escolar. México. Ed. Xalco. 1986. 284 pp.

32. ---------------. La metemática en la escuela I. México. Ed. Xalco. 1988. 371 pp.

33. ---------------. La metemática en la escuela II. México. Ed. Xalco. 1988. 330 pp.

34. ---------------. La metemática en la escuela III. México. Ed. Xalco. 1988. 271 pp.

35. --------------. La práctica docente. México. Ed. Fernández. 1986. 248 pp.

36. VERGNAUD, Gerard. El niño, la matemática y la realiad. México. Ed. Trillas. 1991. 275 pp.

37. VERGNAUD, Gerard. y Ricco G. Didáctica y adquisición de conceptos matemáticos, problemas y métodos. París. Centre d' etude de processos cognitifs et du lenggure centre national de la recherche scientifique ecole des hantes en sciencias sociales. 1990. 180 pp.

ANEXOS

ETAPAS	PROCESO HISTORICO	PROCESO DEL APRENDIZAJE
NU ME RO SI DAD	En esta etapa intuitiva descubre cualitativamente. Puesto que observaban las colecciones que le rodeaban unicamente en cantidad, a través de la percepción distinguían las cualidades o propiedades de los objetos (forma, color y tamaño)	Percibe a la numerodad de forma inmediata y global como una cualidad más de los grupos de objetos.
CO RRES PON DEN CIA	En esta etapa se dió con la necesidad de un registro de cantidades, el número aparce como una propiedad de una colección de objetos, aunque no distinguen la colección en cuanto número abstracto, por ejemplo: 5 se entiende no en setnido abstracto sino simplemente en el sentido de tantos como los dedos de una mano.	El niño no tiene ninguna noción del sistema de numeración requiriendo ésta una correlación biunívoca para nombrar cosas de uno a uno.
CONSTRUCCION DE SERIE NUMERICA	En esta etapa se da una ordenación o seríe numérica ya que podía relacionar entre los conjuntos una determinada cantidad.	El niño tiene conocimiento a designar una cantidad que está determinada por los elementos de un conjunto.
PRINCIPIO DE BASE	Una vez construída la serie numérica, el hombre pudo contar y recurrir al principio de la base, aplicándose a ésta la renumeración hablada y al registro material de los números.	El conocimiento en el niño se da a través de la agrupación, originándose con esto el principio de base.

Cuadro # 1

Anexo # 1

ETAPAS	PROCESO HISTORICO	PROCESO DEL APRENDIZAJE
SISTEMA POSICIONAL	Se caracteriza por prescindir de la representación de las potencias de la base y por conceder un valor variable a las cifras según el lugar que ocupan en la escritura de los números.	En esta etapa el niño ya tiene un conocimiento y puede asignar un valor de cada uno de los números de acuerdo a su posición.
TRANS PO SI CION	En esta, la transposición del sistema de numeración posicional responde ala posibilidad de generalizar las leyes del sistema de numeración.	El niñoalcanza un grado de comprensión que le permite reconstruir el modelo cutural conlos elementos y las leyes que lo constituyen; es cuando todas estas relaciones las puede aplicar a las operaciones o cosas que se le presentan en su realidad.

Anexo # 1

IDEAS PREVIAS DE LOS ALUMNOS

Apoyarse en las ideas previas que el niño posee acerca de un determinado contenido y respetar esas capacidades es de gran importancia para el maestro, ya que ésto le permitirá propiciar situaciones de aprendizaje a través de la interacción grupal, acercándolo a hacer uso de estrategias cada vez más eficientes y económicas, logrando así, un aprendizaje significativo y permanente.

Es sumamente importante que el maestro tome en cuenta los factores socioeconómicos y culturales en donde se desenvuelven los niños con los que trabaja, pues ésto le permitirá tener una visión más clara de las características de sus alumnos e implementar estrategias tendientes a elevar la calidad de educación de éstos.

Tomar en cuenta sus intereses y necesidades, es también muy importante, pues si la educación gira en torno a estos elementos es seguro que ésta será lo mayormente productiva posible.

Con el propósito de determinar el nivel de conceptualización, a la vez que conocer el grado de conocimiento que tenían los niños en relación con la multiplicación, decidimos realizar la aplicación de una evaluación diagnóstica que nos ayudara a formarnos una idea clara en este sentido.

Los siguientes anexos son registros de la aplicación de dicha prueba, así como de la observación que se realizó.(Anexo # 2)

A cada niño se le presentó de manera individual el siguiente problema escrito, después de que lo leyeron, éstas fueron sus respuestas:(Anexo # 3)

DAVID

Experimentador	Niño
¿Qué podríamos hacer?	Así (escribe)
Primero usó una resta $\begin{array}{r} 7 \\ \underline{-5} \\ 0 \end{array}$	
¿Qué fué lo que hiciste?	(Una resta). Pero ya me fijé bien, y no debe ser una resta, pero me salió cero.
¿Qué harías?	Una suma $\begin{array}{r} 7 \\ +7 \\ 7 \\ 7 \\ \underline{7} \\ 35 \end{array}$
¿Cómo le hiciste para saber que era una suma?	Estaba poniendo lo que costó cada piña.
¿Cuánto costó cada piña?	7 pesos
¿Cuánto pagó Rosita por las piñas que compró?	35 pesos
¿De qué otra forma sabrías tú lo que pagó Rosita?	Así: 7+7+7+7+7=35

Anexo # 2

GILBERTO

Experimentador	Niño
¿Qué fué lo que hiciste?	Una suma $\begin{array}{r} 5+ \\ \underline{7} \\ 12 \end{array}$
Éste, (señalando con el dedo el número 5) ¿De qué es?	De las piñas y ésto (marcando el 7), es lo que costó, (pensó un rato). Maestra; espéreme, no es una suma.
¿Por qué dices que no es una suma?	Por qué no, porque salen doce piñas.
¿Y qué vas a hacer?	Lo voy a hacer así: $\begin{array}{r} 5 \\ \underline{x7} \\ 35 \end{array}$
¿Por qué?	Porque 5 piñas no cuestan 12.
El 35 ¿De qué es?	Son las piñas.
¿Qué es lo que queremos saber del problema? (Se le pidió que lo leyera)	Lo que se va a pagar.
¿Son piñas, el 35?	No, es lo que pagó.
¿El 5 y el 7, qué son?	Los números que están aquí.
¿Sabes tú cuantas piñas compró?	(Pensó un rato) - 35, no, ¿verdad? - Entonces fueron 5, si, porque aquí dice. (Señaló el problema)

Anexo # 2

MARISELA

Experimentador	Niño
¿Qué podríamos hacer para resolver-lo?	Una cuenta.
Utilizó una suma	$\begin{array}{r} 5 \\ +7 \\ \hline 12 \end{array}$
La borró rápido	Porque la cuenta no es así, porque yo tenía que escribir.
	$\begin{array}{r} 7 \\ +7 \\ 7 \\ 7 \\ \underline{7} \\ 35 \end{array}$
	Que son lo que costaron las piñas
¿El 7 es lo que costaron todas las piñas?	No, es lo que costó una, y compró 5 piñas, por eso puse siete, siete, siete, siete, siete.
¿Sabes tú, cuánto pagó Rosita?	35 pesitos
¿De qué otra forma sabías tú lo que pagó Rosita?	IIIIIII + IIIIIII IIIIIII IIIIIII IIIIIII = 35
	Me salió lo mismo, pero se deben usar números.

Anexo # 2