# UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

TESIS

## PROCEDIMIENTOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS QUE IMPLICAN LA OPERACIÓN DE LA RESTA.EXPLORACIÓN DEL CONOCIMIENTO INTUITIVO EN NIÑOS DE 5 A 7 AÑOS DE EDAD

POR

RAMÍREZ MARCIAL GRACIELA
RIVERO MAURICIO CAYETANA

ASESORA: DRA. CLOTILDE JUÁREZ HERNÁNDEZ



NOVIEMBRE, 1996

AGRADECEMOS DE MANERA ESPECIAL:

- A los que nos dieron la oportunidad de compartir su naturaleza.
- A nuestros amigos que nos han abierto las puertas de su mundo permitiendonos sentir y crecer junto con ellos.
- A Polo y a Xavier por habernos llevado al mundo de la informática.
- En general a la Universidad Pedagógica Nacional por habernos abierto un espacio y continuar la búsqueda de nuestras inquietudes.

ÍNDICE

## R E S Ú M E N

En la presente investigación se analiza la diferencia de los procedimientos de resolución de problemas aritméticos que implican la operación de la resta empleados por los alumnos de preescolar, primero y segundo de primaria.

En base a las teorías Psicogenética y Procesamientos de Información se describen los aspectos de número, numeración y enumeración; nociones que ayudan a crear y recrear procedimientos para resolver problemas verbales. Se observa cómo el conocimiento intuitivo o informal aporta elementos para un mejor aprovechamiento del aprendizaje escolarizado.

El número es un orden impuesto activamente sobre el mundo, es una construcción mental del ser humano. El individuo construye su conocimiento de acuerdo a la manera en cómo interioriza sus experiencias informales, y la enseñanza escolarizada es quien legítima ese conocimiento.

Para recolpilar los datos en la investigación de campo, se siguió el método clínico de Piaget. Se presentaron a los niños diferentes problemas basados en su estructura semántica, se observaron estrategias de resolución diferentes en cada uno de los grados: los de preescolar se basan en estrategias concretas, los de primero en estrategias verbales y los de segundo en mentales.

Esta investigación va dirigida a los que estén involucrados en la educación instituicionalizada de las matemáticas.

# INTRODUCCIÓN

En México, la problemática del proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas continúa sin resolverse. Las causas pueden ser muchas: falta de continuidad y seguimiento en la reflexión y experimentación de los programas propuestos en la materia hasta ahora, el desfase entre estos programas y métodos de enseñanza con el análisis de las capacidades y procesos intelectuales del niño, por la insuficiente formación de los maestros o por la ausencia de una reforma educativa completa y más apegada a la realidad que viven educadores y educandos... o todo junto.

Algunos elementos importantes, tan sólo algunos, que deberían tomar en cuenta todos los involucrados en la educación de los niños para resolver el problema, serían analizar y comprender más ampliamente los procesos intelectuales del menor, los fines de la enseñanza de las matemáticas y procurar mejores medios para la formación de los profesores.

En el discurso oficial se han hecho algunos señalamientos al respecto, pero en la práctica sólo se han aplicado de manera mínima.

En la solución del problema de la enseñanza de las matemáticas todos los aspectos señalados tienen el mismo grado de importancia.

No obstante, en la presente investigación se hace énfasis en el análisis de los procesos intelectuales del niño con base en los procedimientos que utilizan para resolver problemas aditivos. Para este análisis, se ha considerado la Teoría Psicogenética de Jean Piaget y la Teoría de Procesamiento de Información, porque ambas proponen situaciones experimentales y problemáticas como elementos generadores de conocimiento matemático. Comparten la idea de que la mayoría de los niños pequeños poseen, antes de incorporarse a la escuela, un conocimiento "matemático informal" apreciable que suelen emplear como medio para interpretar la matemática formal que se imparte en la escuela. De acuerdo a esto, los niños pueden considerar a la operación de la suma como una acción de contar aún cuando el currículum la presente desde otro punto de vista y lo exponga, por ejemplo, como la unión de dos conjuntos.

Los niños construyen su conocimiento matemático, por lo que pueden aparecer dificultades en el aprendizaje si hay una separación entre la instrucción formal y el conocimiento informal. En consecuencia, comprender el trabajo de los niños en matemáticas requiere no sólo de tomar en cuenta las respuestas correctas e incorrectas, sino de conocer y entender su lógica matemática, que muchas veces adopta formas inesperadas.

De esta manera, el proceso de enseñanza-aprendizaje tiene una estructura en espiral, y dependiendo de lo que se quiera enseñar es necesario estudiar la forma de aprendizaje, porque ésta a su vez puede alumbrar nuevos objetivos de enseñanza.

El presente trabajo pretende evidenciar el desarrollo de la matemática informal o intuitiva en los niños de cinco a siete años de edad en su instrucción escolar; es decir, mostrar cómo los niños construyen una aritmética racional (desde su punto de vista) y cómo opera su pensamiento matemático antes de ingresar a la escuela y cuando está en ella.

Maestros y educadores deben saber cómo los niños aprenden matemáticas y en qué caso no las aprenden. En este sentido es importante que los educadores tomen en cuenta el conocimiento matemático informal o intuitivo de los niños para ayudarles a construir los fundamentos sólidos del conocimiento matemático formal.

A través de los cinco capítulos de este trabajo se muestra cómo el niño integra su conocimiento informal o intuitivo matemático a la educación escolar.

En el primer capítulo se justifica el objeto de estudio de esta investigación y se plantean los objetivos que se pretenden.

Para tratar la construcción del conocimiento y estudiar cómo va evolucionando la noción matemática del niño al resolver problemas aritméticos, en el segundo capítulo, se ha optado por presentar en primer lugar las nociones con las que cuenta, como el conteo, la cardinalidad y colección de conjuntos, cifras y la misma noción de número; ya que estas son nociones que ayudan a resolver problemas aritméticos con palabras. En el segundo se presentan algunos aspectos teóricos de la psicología genética y el procesamiento de información, con el propósito de precisar conceptos, tales como conocimiento informal, intuitivo y formal, numeración, enumeración, conteo, problemas aritméticos, problemas aditivos, procedimiento y estrategia, entre otros. Asimismo, a partir de este marco teórico, se presentan los resultados de las investigaciones relacionadas con los procedimientos de resolución de problemas aritméticos que implican la operación de la resta.

Esta revisión teórica nos ayuda a tener una idea acerca del pensamiento de los niños de cinco a siete años de edad, y una visión de los procedimientos que utilizan al resolver problemas aritméticos.

En el tercer capítulo, se presenta la metodología que se siguió en la investigación con la cual se abordó la problemática y se obtuvieron los datos.

En el cuarto, se presentan descriptivamente los resultados a partir de dos tipos de análisis, uno cuantitativo y otro cualitativo.

En el quinto, se presenta la interpretación de los resultados, en el que se discuten nuestros hallazgos con aquellos de otras investigaciones.

Finalmente, se exponen las conclusiones a las que se llegamos y se ofrecen algunas recomendaciones para mejorar la enseñanza de la matemática formal y aprovechar la informal.

# CAPÍTULO 1

## PRESENTACIÓN

En este capítulo se muestra una justificación más amplia de los motivos de esta investigación, así como los objetivos que se pretenden en la misma.

### 1.1 Justificación

Esta investigación es un esfuerzo más que se suma a la ardua tarea de contribuir al mejoramiento de nuestro sistema educativo. Está dirigida a explorar el conocimiento formal o intuitivo matemático que presentan los niños escolarizados de cinco a siete años de edad al resolver problemas aritméticos.

En los últimos años se han realizado diversas investigaciones acerca de la construcción del conocimiento matemático, en donde se muestra que el niño elabora su conocimiento mediante la percepción directa de sus acciones sobre los objetos (Gelman, 1990; Baroody, 1988; Vergnaud, 1991). A pesar de la modernización educativa y actualización de los libros de texto, históricamente las matemáticas formales se han expuesto como un conocimiento descubierto y acabado, con un lenguaje que no es familiar para los niños, por lo que no encuentran sentido a las concepciones algorítmicas y las aprenden mecánica y memorísticamente, lo que provoca angustia y ansiedad ante las tareas escolares.

Aun cuando en materia de matemáticas existen muchos aspectos que pueden ser objeto de estudio, la presente investigación se limitó a explorar, en el área de la aritmética, los procedimientos utilizados por los niños de cinco a siete años de edad -de preescolar a segundo año de primaria- en la resolución de problemas aditivos que implican la operación de una resta. Estadísticamente en nuestro país los niños de primero y segundo año de primaria son los que tienen más dificultades para realizar operaciones aritméticas, sobre todo en la sustracción. Así lo evidencia la investigación que realizó Guevara (1991) acerca del nivel académico en que se encuentran los niños de nivel básico en diferentes áreas; en matemáticas, la calificación promedio fue de 4.39 en la escala de diez y el porcentaje de aprobados alcanzó el 15.3%.

Se trabajó con los alumnos de preescolar, primero y segundo de primaria, a fin de observar la diferencia que existe entre los procesos de resolución de problemas aditivos en niños que aún no se relacionan con el algoritmo de la resta y en niños que ya empiezan a hacerlo.

La importancia de esta investigación es mostrar la diferencia del conocimiento intuitivo en niños escolares de cinco a siete años de edad, porque éste aporta elementos para la elaboración de los métodos de enseñanza, de los materiales y de la misma secuencia del currículum. Se ofrecen elementos para realizar una metodología del proceso enseñanza-aprendizaje, por ejemplo, definir cómo presentar un tema para que los niños lleguen a dominarlo, cómo examinar y evaluar sus avances, etc.

Por otra parte, al explorar el conocimiento informal o intuitivo del niño en el aprendizaje de la matemática formal, también se evita el riesgo de que la enseñanza inicial sea difícil y desalentadora.

Los resultados de esta investigación serán útiles para quienes se encargan de diseñar los programas de estudio en la materia de matemáticas a nivel preescolar y primaria, para los maestros que imparten la materia en preescolar, primero y segundo de primaria, y para todos aquellos que esten involucrados en el quehacer educativo, pues se podrán conocer mejor las formas de resolución que usan los alumnos de educación preescolar, primero y segundo de primaria al resolver problemas aritméticos que implican la operación de la resta y se tendrán explicaciones acerca de los errores que presentan.

El trabajo se realizó con una muestra de los grados escolares de preescolar, primero y segundo de primaria, por considerar que únicamente en los primeros años se podrá identificar el conocimiento intuitivo sin una marcada influencia del escolarizado. De esta manera, se obtuvieron datos a partir de los cuales pudimos hacer algunas sugerencias prácticas para ser consideradas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de problemas aritméticos que requieren de la resta para su resolución.

## 1.2 Planteamiento del problema

Esta investigación pretende responder dos preguntas:

1. ¿Cuáles son los procedimientos de resolución de problemas aritméticos que implican la operación de la resta empleados por los alumnos de cinco a siete años de edad, que cursan preescolar, primero y segundo de primaria?
2. ¿Existe alguna diferencia del conocimiento intuitivo que se da entre los niveles preescolar y primaria?

## 1.3 Objetivos

A partir de esas preguntas planteamos los objetivos siguientes:

1. Identificar los procedimientos que los alumnos de cinco a siete años de edad utilizan para resolver problemas aritméticos que implican la operación de la resta;

2. Comparar los procedimientos de resolución empleados en los tres diferentes grados escolares.

# C A P Í T U L O 2

## MARCO TEÓRICO

En este capítulo se desarrollan los fundamentos teóricos que sustentan la investigación. Se inicia con la construcción del conocimiento matemático desde dos perspectivas: 1) la teoría psicogenética y 2) la teoría de procesamiento de información; aquí se incluyen conceptos de conocimiento intuitivo e informal, conocimiento formal y se hace una diferenciación de ambas. Se continua con problemas aritméticos de tipo aditivo (o relaciones numéricas aditivas) entendidos como todo problema cuya resolución implica únicamente operaciones de adición o sustracción; de estos problemas también se presentan las clasificaciones que han realizado Greeno, Heller y Riley (1978), Carpenter y Moser (1982) y Vergnaud (1991).

Después está la parte medular de esta investigación, que son los procedimientos de resolución de problemas aditivos; este tema ha sido objeto de estudio de varias investigaciones, las que aquí se consideran son las siguientes: Carpenter y Moser (1982); De Corte y Verschaffel (1984); Bebout (1983); Kouba (1985); López (1988); Vargas, López, Alvares, García, Jarillo, Juárez, Muñoz y Martini (1988); Velázques (1988); Block, Dávila y Martínez (1990) y Avilés y Lira (1993). Finalmente, se cierra el capítulo con el tema operación de la resta; donde se define, se describen las partes que la integran y se presenta el procedimiento convencional de su resolución. La importancia del tema radica en que la operación de la resta es la representación convencional para resolver problemas aditivos como lo dice Baroody (1988), López (1988), Gelman y Meck (1983).

## 2.1 Construcción del conocimiento matemático.

El orden existente en el mundo real posee una estructura que podemos discernir y determinar gracias al conocimiento matemático. El conocimiento matemático es una construcción humana o mental que, en parte intenta definir o caracterizar el orden que percibimos en el mundo (Baroody, 1988).

El número parece ser un aspecto inherente al mundo físico que se puede detectar directamente. En el siglo VI a. de C. Pitágoras afirmaba que los números enteros empezando desde el 1 (1,2,3,4,...) eran naturales o de origen divino. Hasta hoy, esta secuencia se ha venido conociendo como "los números naturales". Muchos siglos después, el matemático Leopold Kronecker expresó un sentimiento similar: "Dios creó el universo entero; el resto es obra del hombre". En otras palabras, el número es un orden natural que se impone directamente a nuestras mentes, este orden sirve de base para inventar el orden artificial que configura el resto de la ciencia matemática.

En síntesis, el conocimiento matemático es una interpretación o invención mental de nuestro entorno socialmente aceptado. El número es una realidad subjetiva; un modelo idealizado, abstracto de las regularidades que percibimos; es una construcción mental, un orden impuesto activamente sobre el mundo. Tanto para el matemático como para el niño, la esencia del conocimiento matemático es la comprensión. Baroody (1988) menciona que el ser humano está dotado de un sentido numérico primitivo y que puede percibir fácilmente la diferencia entre un conjunto de dos elementos y una colección de muchos, y agrega que en la actualidad se puede contar con cierta herencia de esa aritmética primitiva.

En épocas primitivas, el número tenía un sentido rudimentario, no era más que una cualidad o una característica de un objeto determinado: un par de ojos, un dúo musical o una pareja de personas (Churchill, 1961, citado por Baroody, 1988). A medida que las sociedades cazadoras-recolectoras organizaban comunidades más complejas, en tanto practicaban la agricultura y el comercio como base de su existencia, fue aumentando la necesidad de inventar métodos más precisos de numeración y medición basados en contar.

Lo anterior llevó a descubrir que los diez dedos podían ser utilizados como un instrumento de conteo. Contar con los dedos fue el medio por el que nuestra civilización occidental desarrolló un concepto abstracto del número, cuyas funciones son nombrar y ordenar (Nesher, P. 1982; Baroody, 1988).

Posteriormente, las tareas con cantidades grandes motivó la idea de hacer agrupaciones en las cuales los dedos ofrecieron una base natural. * Hacia el año 3 500 A.C. aparece el primer sistema

---

* Barody (1988) refiere que los dedos proporcionaron modelos fácilmente asequibles de colecciones de uno a diez objetos. Por ejemplo, cuando una oveja pasaba junto al pastor, este la contaba. Cuando llegaba a diez, podía representar esta cantidad con un guijarro. Con las manos libres otra vez, podía proseguir el recuento. A medida que se iban acumulando los guijarros, podía haber simplificado aún más el proceso sustituyendo diez guijarros por una piedra.

numérico que incorpora un concepto de base diez. En él, la posición de un número en una cifra define el valor. Por ejemplo, en la cifra 452, el número 2 tiene un valor de dos porque se ubica en el lugar de las unidades; el número 5 vale 50 porque agrupa cinco conjuntos de diez; el 4 vale 400 porque se encuentra en el lugar de las centenas y abarca cuatro conjuntos de cien unidades.

Así, con el paso del tiempo, nos damos cuenta que el número "...es la síntesis de las estructuras de clasificación y de las estructuras de orden, pero rebasa a las dos por su flexibilidad y su grado de generalidades superiores..." (Piaget y Szeminska, 1987, p. 85). Numerar es nombrar un conjunto, es el valor cardinal, es la etiqueta, es la característica de un conjunto, es el número. Mientras que enumerar es "...contar la serie... y sólo llega hacerse automáticamente, de manera gradual, a través de la experiencia de contar..." (Baroody, 1988, p. 92). De esta manera, nombrar un conjunto no requiere necesariamente de contar, ya que el número es un concepto para el cual existen varios sistemas posibles de escritura para representarlo y nombrarlo. El orden numérico está relacionado con la acción de contar y se refiere a colocar colecciones en sucesión por orden de magnitud o de tamaño.

La historia de la matemática en general indica que el conteo y el agrupamiento son métodos de carácter informal o intuitivo, y que no sólo precedieron a la formalización de la matemática, sino que también actuaron como base para la misma. Después de la formalización, la matemática se ha encontrado en constante evolución a partir de las necesidades prácticas que han surgido.

A causa de su utilidad, con frecuencia se han inventado y adaptado nuevos métodos.

El sistema de numeración que hoy utilizamos es producto de una larga evolución histórica de otros sistemas construidos por el ser humano desde épocas remotas, para resolver problemas de conteo y operación, entre otros fines.

De acuerdo a Baroody (1988), los niños, como los seres primitivos, poseen un sentido de número que se desarrolla a partir de necesidades prácticas y experiencias concretas. Al igual que en el desarrollo histórico, el conocimiento matemático impreciso y concreto de los niños se va haciendo más preciso y abstracto durante la formalización de las matemáticas en el sistema escolarizado.

El proceso enseñanza-aprendizaje de la matemática inicia con los elementos que conducen al sujeto a la adquisición del concepto de número. Actualmente, la educación oficial en México prioriza, en el nivel preescolar, los criterios de clasificación, seriación y conservación de la cantidad; a los niños de primero y segundo de primaria ya se les enseña la representación del número (numeral, reafirmando su representación gráfica), para posteriormente realizar operaciones más complejas (Sierra y Gallardo, 1986).

Existen varias posturas teóricas respecto a la manera en que el individuo se ha acercado al concepto de número. La investigación epistemológica con respecto a la adquisición de los primeros conocimientos aritméticos y las diferentes construcciones intelectuales que tienen lugar para su comprensión, se han considerado desde las perspectivas de dos teorías distintas pero complementarías: una, la Psicología Genética, y otra, el Procesamiento de Información, las cuales analizaremos a continuación.

**- PSICOLOGíA GENÉTICA:**

Piaget y Szeminska (1987), representante de la Psicología Genética, afirma que el niño adquiere el concepto de número cuando es capaz de realizar procesos internos de carácter mental: seriación, clasificación y conservación. Considera que el número es la unión de estos conceptos y que no puede entenderse en términos de un sólo concepto lógico, sino que constituye una síntesis total de éstos.

Para este autor, el desarrollo de la comprensión del número y el contar significativamente son necesarios para realizar las actividades que requieren el "estadio operacional" del desarrollo mental; es decir, cuando ya se tienen los requisitos lógicos del número (concepto de seriación, clasificación y correspondencia biunívoca) el niño se encuentra preparado para pasar a otro estadio. De esta manera, quienes no han llegado al estadio operacional no están en posibilidad de comprender el número ni contar significativamente; quienes ya lo alcanzaron sí podrán hacerlo. Por tanto, para Piaget (1987), el número

> "... se va organizando etapa tras etapa; en estrecha solidaridad con la elaboración gradual de los sistemas de inclusiones (jerarquía de clases lógicas) y relaciones asimétricas (seriaciones cualitativas), de tal manera que la serie de los números se constituye como síntesis de la clasificación y la seriación..."(p. 10).

Afirma también que la conservación de la cantidad marca la llegada al estadio operacional; es decir, la adquisición del pensamiento lógico, la comprensión de las clases, la relación y la correspondencia biunívoca son procesos del pensamiento básico para adquirir el concepto de número y contar de manera significativa. Según Piaget, la conservación de la cantidad indica la comprensión de que una vez establecida la equivalencia de dos conjuntos las relaciones se conservan aunque exista cualquier transformación en la apariencia física de algún conjunto. El niño que cuenta con la noción de conservación sabe que el número de elementos de un conjunto no varia cuando su aspecto físico cambia.

Para Piaget (1978) la maduración del sistema nervioso y las influencias educativas del medio ambiente son importantes en el proceso de evolución en la adquisición de los conceptos numéricos.

Las investigaciones realizadas por Piaget para explicar la adquisición del número natural sobre las operaciones lógico-matemáticas de clasificación, seriación y conservación de la cantidad, presuponen síntesis de dos tipos de relaciones: conservación e inclusión de clase. Así, el número natural, además de incluir una noción de tipo cuantitativo supone un razonamiento lógico.

Karmiloff-Smith (1991) menciona que en los últimos años se han creado nuevos paradigmas para la investigación de la infancia, los cuales han cambiado radicalmente la visión de la arquitectura de la mente o de la construcción del conocimiento, pues psicólogos ingleses ponen en tela de juicio las tareas empleadas por Piaget para evaluar la fase evolutiva del niño y no comparten la creencia que en la estructura humana inicial hay más que simples reflejos de los procesos de asimilación, acomodación y equilibración:

> "... El punto de vista de Piaget sobre el estado inicial del neonato estaba mal. Algunos aspectos de la mente humana están especificadas de manera innata. El conocimiento es al inicio un dominio especifico y más adelante mecanismos del aprendizaje subsecuente en una interacción compleja con el ambiente. El aprendizaje subsecuente puede ser visto desde una perspectiva constructivista...Así, algún conocimiento innato es especificado con precisión de detalles, mientras que otro conocimiento puede ser especificado como el esqueleto de un índice a ser llenado por la experiencia...el niño espontáneamente construye teorías y explota el conocimiento innato y adquirido que ha almacenado vía el proceso de redescripción representacional...(Karmiloff - Smith, 1991, p. 193)

**- PROCESAMIENTO DE INFORMACIÓN:**

En la década de los ochentas se incrementó en Inglaterra y Estados Unidos la difusión del enfoque de Procesamiento de la Información. En 1987, en el Encuentro Anual de la Sociedad Americana para la Investigación Educativa en Washington se empezó hablar de la "Era Neopiagetiana" y de nuevos elementos teóricos acerca de la construcción del conocimiento (Bermejo, 1990).

Gelman y Meck (1983) menciona que según Piaget, la cognición del individuo involucra estructuras que asimilan y acomodan su entorno, aunque dice que no hay grandes saltos cualitativos de una etapa a otra y que no necesariamente deben contar con ciertas características para pasar al siguiente estadio, pues considera que para tal efecto debe haber más estructuras de las que menciona Piaget. Por tanto, Gelman propone estudiar la construcción del conocimiento de dominios específicos.

En relación a la construcción del conocimiento matemático Gelman (1972) menciona que contar es esencial para el desarrollo de la comprensión del número. La comprensión del número evoluciona lentamente como resultado directo de la experiencia de contar. Entonces, los conocimientos numéricos y contar significativamente se desarrollan de manera gradual, paso a paso, y son el resultado de aplicar técnicas para contar y adquirir conceptos de mayor complejidad.

Ginsburg (1982) señala que el niño preescolar aprende el número por medio de sistemas cognitivos que se desarrollan gradualmente. Menciona que hay dos tipos de sistemas: el primero se refiere al conocimiento informal y natural que el niño posee de los términos más (+) y menos (-); el segundo, al conocimiento que se adquiere por transmisión social, como el conteo. La comparación entre magnitudes numéricas requiere la integración de cuatro técnicas:

1) generar sistemáticamente los nombres de los números en el orden adecuado por medio de las palabras (etiquetas): uno, dos, tres, cuatro, cinco. etc.;

2) la secuencia numérica debe aplicarse una por una a cada objeto de un conjunto (enumeración). Por ejemplo en un conjunto de 5 dulces, el primer dulce es el número 1, el segundo dulce es el número 2, el tercer dulce es el número tres, el cuarto es el número 4 y el quinto es el 5:

$$\begin{array}{ccccc} \blacklozenge & \blacklozenge & \blacklozenge & \blacklozenge & \blacklozenge \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

3) para hacer una comparación de conjuntos se necesita una manera

conveniente de representar los elementos que contiene cada conjunto:

♦ ♦ ♦ ♦ ♦ > ♦ ♦ ♦ ♦
5 4

y 4) comprender que la posición en la secuencia define la magnitud: 1 < 2 < 3 < 4 < 5

Así, la capacidad de contar se desarrolla jerárquicamente con la práctica y las técnicas para contar son cada vez más automáticas y se realizan con menor atención.

Gelman, difiere de Piaget, no considera al número como un concepto tipo "todo o nada"; para ella, la comprensión de la correspondencia biunívoca no implica la comprensión de la clasificación ni de la seriación. Por tanto, la falta de conservación no significa, necesariamente, que un niño no pueda razonar lógicamente sobre las relaciones de equivalencia si cuenta y emplea números (Gelman y Gallistel, 1978).

Gelman y Baillergeon (1983) y Ginsburg (1983) coinciden en considerar que el desarrollo de la adquisición del significado de número es gradual, y que la experiencia de contar es la clave para hacer explícitas y ampliar las nociones intuitivas de los conceptos numéricos como equivalencia y orden de magnitud. La memoria es un factor importante al inicio de la práctica de contar oralmente; sin embargo, con la misma práctica y con el tiempo, la memoria no es determinante, sino que con asociaciones se puede lograr obtener la serie numérica total. En un principio, el niño de cuatro o cinco años no sólo imita, sino que también inventa sus propios nombres para los números, sobre todo en cantidades mayores de diez. Con más experiencia, el niño aprende a usar su representación mental de la serie numérica con más elaboración y flexibilidad, ya que se va familiarizando con la serie numérica correcta, para poder mencionar automáticamente el número siguiente a un número dado.

Brissiaud ( 1993) menciona que un niño que sabe utilizar un sistema simbólico como las configuraciones de dedos para comunicarse con su entorno ya posee una primera concepción, este argumento es distinto al de Piaget, para este último la cantidad es un concepto tardío, producto de la interiorización de acciones y de la coordinación de dichas acciones.

Actualmente se sabe que el conocimiento numérico evoluciona muy pronto en el desarrollo del niño, sobre todo la percepción numérica y la construcción de correspondencia. Gelman y Baillergeon (1983) sostiene la idea de que el niño nace con un conocimiento implícito, natural e innato que se va desarrollando con su experiencia, a través de los principios de la acción de contar. Los principios que propone Gelman y Gallistel (1978) son:

a) Principio de contar por medio de las representaciones de números sin orden. Se ha observado que a edad temprana, el niño cuenta por medio de la representación de números en desorden y sólo se limita a registrar los nombres de los números. "Los nombres de los números son palabras y como ocurre con otras palabras, los niños pueden aprender a decirlas mucho antes de formar imágenes mentales..." ( Von Glasersfeld, 1982; p. 196). Los niños suelen aprender los primeros términos de la seriación numérica. Tarde o temprano se dan cuenta de que contar requiere repetir los nombres de los números en el mismo orden;

b) Principio del orden estable. Para contar es indispensable establecer una secuencia coherente. Un niño puede utilizar la secuencia numérica convencional o una propia (no convencional), pero siempre de manera coherente para él (Gelman y Gallistel, 1978);

c) Principio de correspondencia uno a uno. Subyace a cualquier intento de enumerar conjuntos y guía la construcción de estrategias de control de los elementos contados y por contar, como separar los unos de los otros. Además, deben emplear una secuencia de etiquetas distintas o únicas para no etiquetar dos conjuntos de diferentes cantidades con un mismo cardinal;

d) Principio de valor cardinal. Representa las propiedades de un subconjunto como un todo. Un niño puede aprender fácilmente la técnica de contar denominada "Regla del valor cardinal". Esto no significa necesariamente que el niño se dé cuenta de que el último término designa la cantidad del conjunto y que un conjunto tendrá la misma cantidad si se vuelve a contar después de modificar la distribución espacial de sus elementos. Los niños pueden construir el principio del valor cardinal reflexionando sobre las actividades de contar; pueden descubrir que una colección conserva la misma designación (cardinal) a pesar de su aspecto;

e) Principio de abstracción. Se refiere a lo que puede agruparse para formar conjuntos. En el momento de contar, un conjunto puede estar formado por objetos similares o distintos, lo importante es abstraer o quitar algo común a todos los elementos. Sólo los niños de siete o más años tienen una concepción abstracta y completa de lo que puede ser contado;

f) Principio de orden irrelevante. Enumera los elementos de un conjunto y esto no afecta a su designación cardinal. La distribución de los elementos y el orden de su enumeración no debe tener importancia a la hora de determinar la designación cardinal del conjunto.

Gelman (1990) y Baroody (1988) mencionan que una vez que el niño llega a dominar los conceptos básicos, mencionados en los principios anteriores y que se refieren a un solo conjunto, la acción de contar puede aplicarse a contextos más complejos, tales como la comparación de dos conjuntos, y descubrir que la apariencia no es pertinente para determinar si dos conjuntos son iguales o no. Antes de la escolarización formal, el niño también aprende que el número puede especificar diferencias entre conjuntos (no equivalencia) y emplearse para especificar si el conjunto es mayor o menor (ordenar conjuntos según su magnitud). Contar con los dedos puede desempeñar un papel clave en este desarrollo de la noción de número. El niño puede reconocer que la magnitud va asociada a la posición dentro de la serie numérica. Los dedos no son objetos como los demás, son un centro de sensaciones cinestésicas, que permiten controlar la cantidad independientemente de la visión. Los dedos, por tanto, pueden ser fuente de información tanto visual como cinestésica y tácti. (Brissiaud, 1990)

Con el tiempo y la experiencia, las reglas numéricas para evaluar la equivalencia, la no equivalencia y la magnitud permiten a los niños poder conservar el conocimiento sobre las cantidades. Estos criterios numéricos precisos liberan al niño de indicios perceptivos, como la longitud, cuando hacen comparaciones cuantitativas.

Al parecer, la experiencia de contar proporciona la base para formular reglas numéricas explícitas y, posteriormente, reglas más abstractas para razonar en torno a las relaciones numéricas existentes entre cantidades mayores.

La mayoría de los niños preescolares dominan estos conceptos numéricos y están listos para enfrentar otras técnicas más elaboradas para contar, las cuales se desarrollarán durante las primeras etapas de la escolarización. Por lo anterior, Baroody (1988) dice que

> "... la experiencia de contar es importante para ampliar las nociones intuitivas de equivalencia, no equivalencia y orden. La enseñanza formal y lógica de la teoría de conjuntos es útil por derecho propio, pero la enseñanza del número basada en contar es inicialmente más significativa para los niños ..." (p.18)

### 2.1.1 Conocimiento intuitivo e informal

El ser humano es un ser fundamentalmente activo en todos aspectos, y gracias a esa actividad continúa en contacto con el mundo exterior; se pregunta y fórmula hipótesis en su necesidad de conocerse a sí mismo y al mundo que le rodea, lo cual lo lleva a ser un sujeto responsable de su pensamiento, de su conocimiento y hasta de su conducta. Por lo tanto, el conocimiento de cada ser humano se va construyendo para llegar a convencionalidades o formar parte del conocimiento social (Von Glasersfeld, 1982).

La construcción del conocimiento se inicia a través de las percepciones u observaciones que tiene del medio que le rodea y es a partir de éstas que empieza a realizar intuiciones. Piaget (1978) considera que la intuición es una interiorización de las percepciones y movimientos en forma de imágenes representativas y de experiencias mentales que prolongan así esquemas sensoriomotores sin coordinación propiamente racional (Nicolás, 1978). La imagen mental o representación gráfica y los esquemas de memoria no son simples copias ubicadas en alguna parte del cerebro del individuo, sino consideraciones representativas en las cuales participan los esquemas interiorizados. Así, el ser humano, cuando niño aprende poco a poco que las cosas tienen varios nombres, pero que esas etiquetas no les pertenecen a las cosas en sí mismas.

De acuerdo a Fischbein (1975), las representaciones son modelos mentales esquematizados a una experiencia perceptual dada y éstas conforman los antecedentes de los conceptos, los cuales son componentes de los procesos de razonamiento y forman parte de las experiencias idealizadas que caracterizan el pensamiento productivo. Mientras las intuiciones tienen funciones similares entre la acción y las operaciones intelectuales, también pueden ocurrir durante las operaciones o acciones facilitando su continuidad y su fluidez, pues las intuiciones están implícitas en el razonamiento.

En suma, el conocimiento intuitivo está constituido por representaciones que llevan a cabo una acción o un cambio conceptual. El conocimiento directo, inmediato de un cierto objeto concreto, es el resultado de la experiencia que se obtiene rápidamente a través de los sentidos sin que sean conscientes las etapas intermedias (Carey, 1991; Baroody, 1988, y Fischbein, 1975). Por ejemplo, cuando un niño da sus primeros pasos, lo hace sin saber por qué o para qué; o cuando el niño separa en bolsas distintas las canicas de los dulces, lo hace por la necesidad de distinguir unos de otros, pero no se detiene a reflexionar por qué o para qué.

La experiencia individual es un componente esencial de la intuición. Esa experiencia lo conecta con el mundo que lo rodea, con las ideas y conocimientos de otros individuos que al conformarse, relacionarse y mezclarse construyen el conocimiento informal. Baroody (1988) menciona que este conocimiento es el paso intermedio entre un conocimiento intuitivo -limitado e impreciso que se basa en las percepciones directas- y el conocimiento formal, adquirido en clase o en alguna institución y basado en símbolos abstractos.

Radford (1989) menciona que el conocimiento informal es un modelo explicativo del individuo para tratar de interpretar fenómenos observables. Byers y Erwanger (1984), por su parte, mencionan que el conocimiento informal se construye socialmente a través de conceptos que representa un individuo para transformarlo en una propiedad del mismo; es una coordinación entre lo intuitivo y lo formal. Se dice que es lo que se aprende sin ser enseñado; por ejemplo, sin enseñar a una persona lo que en matemáticas se entiende por probabilidad, ésta tiene una idea propia de ese concepto, es una representación de probabilidad; otro ejemplo son los procedimientos de resolución que utiliza un niño antes de ingresar al sistema escolarizado para resolver operaciones aritméticas; o la solución de problemas cotidianos, sin tomar en cuenta el conocimiento adquirido dentro del salón de clase.

Tanto el conocimiento intuitivo como el informal se construyen a través de sensaciones, percepciones, asociaciones y relaciones de las cosas y de situaciones vividas. Estos dos tipos de conocimiento (intuitivo e informal) son diferentes, pues mientras el primero es de origen psicogenético, el segundo es de tipo psicosocial. Sin embargo, los dos están interrelacionados: cuando se habla de intuición, lo informal está implícito en ese contacto con el medio social; cuando se habla de informal, la intuición está expresa en las percepciones y sensaciones que causa el medio ambiente. Fischbein (1975) dice que

> "...el aprendizaje social y la experiencia contribuyen a la organización de las intuiciones espacio-temporales, los cuales siempre se encuentran en las situaciones que se le presentan al ser humano, al igual que el conocimiento informal..." (p. 13).

Dada la explicación sobre el conocimiento intuitivo e informal, observamos que no se puede separar el uno del otro por lo tanto, en este trabajo los conceptos intuitivo e informal se toman como sinónimos, porque ambos parten de experiencias y sensaciones, además de que son la base del conocimiento formal.

Acerca del conocimiento informal matemático, Gelman y Baillergeon (1983) mencionan que el conocimiento matemático es natural, innato e intuitivo. Investigaciones posteriores (Bermejo, 1990; Wynn, 1992) dicen que el niño recién nacido es capaz de discriminar entre dos y tres objetos, pero no entre cuatro y seis; por tanto, el recién nacido posee ya las habilidades de abstraer la comparación numérica en conjuntos pequeños. Baroody (1988) menciona que a los dos años de edad el niño no se da cuenta que la enumeración sirve para enumerar, desarrolla una consciencia primitiva de contar, un procedimiento empleado para asignar números a colecciones, intentan recordar lo que han contado. A los dos años y medio de edad, un niño observa que un término cardinal es el nombre asignado al último elemento del conjunto, por lo que cada elemento está separado con una etiqueta numérica. A los tres años, el niño descubre que los términos para contar ordenadamente se asocian a magnitudes superiores, se da cuenta que "dos" no sólo sigue a "uno", sino que también representa una cantidad mayor. Cuando el niño tiene cuatro años descubre la regla general de que el término numérico que viene después en la secuencia significa "más" que el término de un número anterior. La mayoría de los niños de cuatro años y medio a seis pueden llegar a contar hasta 29 o 39, aunque todavía no han resuelto el problema de las decenas. Cuando el niño ingresa a Preescolar ya puede realizar con precisión comparaciones entre números adyacentes.

De esta manera, la experiencia de contar, numerar y enumerar son útiles para resolver problemas aritméticos verbales, pues al contar con estas nociones el niño puede crear y recrear nuevas formas de resolver problemas.

### 2.1.2 Conocimiento formal

El conocimiento formal implica aprender nombres y formas de símbolos, así como las reglas para su uso y manipulación. El uso de símbolos se adquiere dentro de alguna institución que sustenta el proceso escolar conformado por tradiciones históricas, variaciones regionales, decisiones políticas, administrativas y burocráticas (Baroody, 1988; Rockwel y Mercado, 1986).

El conocimiento formal se construye dentro de un contenido formativo de la experiencia escolar que subyace a la organización de actividades de enseñanza, pues está determinado por el uso del tiempo y el espacio; agrupa a maestros y alumnos de acuerdo a ciertos criterios.

Not (1983) menciona que la naturaleza del formalismo o conocimiento formal es el medio indispensable para la lógica de lo ya conocido, pues no toma en cuenta los objetos estudiados sino sus formas y propiedades formales; garantiza contra los errores de una intuición inmoderada, pero con la condición de que el formalismo está sometido a la vigilancia de una institución reducida. Así, el conocimiento formal implica la habilidad para utilizar formas de conceptos donde y cuando sean requeridos; por ejemplo, el aprendizaje de los procedimientos de las operaciones aritméticas o los algoritmos 5-3=2, en donde cinco menos tres es igual a dos, aprende que el signo - significa quitar, y que estos signos se pueden aplicar cuando se presentan situaciones de compra-venta o de calificaciones en la escuela.

El conocimiento intuitivo o informal es la base del edificio del conocimiento humano, pero es el conocimiento formal el que lo concluye y legítima. Es el que lo consolida. De esta manera, el conocimiento intuitivo no se excluye, sino que se complementa, mientras el primero es espontáneo y libre con riesgo a equivocarse, el segundo se enfrenta a reglas rígidas, seguras y convencionales.

En lo que respecta a la matemática informal, la intuición o conocimiento informal se incorpora a una experiencia adquirida que se desarrolla con el tiempo. En tanto que la matemática formal se hace en la escuela a través de reglas aplicadas al uso de signos y símbolos en donde interactúan maestros y alumnos (Byers y Erwanger, 1984).

Sobre el conocimiento formal matemático o el conocimiento de la forma, Baroody (1988) menciona que este implica:

> "...aprender los nombres y las formas de unos símbolos (por ejemplo: leer y escribir números), las reglas para el empleo de estos símbolos y las reglas para manipularlos en esta resolución de problemas son: la escritura de los signos que imparten las escuelas... los símbolos escritos ofrecen un medio para anotar cantidades grandes y trabajar con ellas. Los procedimientos escritos proporcionan medios eficaces para realizar cálculos aritméticos con números grandes..." (p. 153).

De acuerdo a este concepto, la matemática formal cobra gran importancia para la vida, pues cotidianamente se utilizan procesos matemáticos para resolver problemas elementales, los cuales se facilitan manejando cantidades numéricas (símbolos y signos) y operaciones, sin necesidad de tener objetos concretos o físicos frente a nosotros. Dienes (1971) menciona que en el conocimiento matemático informal o intuitivo

> "...el niño a través de sus acciones sobre los objetos, la coordinación y reflexión sobre ellos...va aprendiendo el número. Conocimiento que va ampliando y consolidando conforme avanza en su desarrollo intelectual estimulado por la experiencia externa...y por la educación escolar...(p.119)

Lovell (1977) establece que las primeras ideas matemáticas proceden de la experiencia de la vida diaria; Riley y Greeno (1988) determinan que el niño preescolar inventa estrategias para resolver problemas matemáticos independientemente de una instrucción.

La importancia de explorar y tomar en cuenta el conocimiento intuitivo matemático del niño radica en que a través de ello se puede obtener elementos que ayuden a mejorar los métodos de enseñanza; a discernir lo que es importante examinar y cómo evaluar los avances; a decidir cómo presentar un tema y hacer que los niños lleguen a dominarlo. De esta manera, se puede facilitar al niño el aprendizaje de la matemática formal y así evitar el riesgo de que la enseñanza inicial sea difícil y desalentadora, se aprenda y se use de manera mecánica sin razonar (Baroody, 1988).

## 2.2 Problemas aritméticos

Debido a que nos interesa analizar cómo los niños resuelven los problemas, es importante ver qué aprenden mientras los resuelven; es decir, qué conocimientos construyen o qué significados producen para los conceptos aplicados en los problemas verbales que resuelven; pero antes definiremos el concepto de problema aritmético aditivo y de acuerdo a los criterios que se utilizan revisaremos las formas en que se clasifican.

En su definición no hay mucha diferencia de un autor a otro, ya que la mayoría (Vergnaud, 1991; Dienes, 1971; Vargas, et. al., 1988; y la Guía para el Maestro de primer grado, de la Secretaría de Educación Pública, citado por Avilés y Lira, 1993) mencionan que los problemas aditivos verbales son los que se plantean a través de enunciados verbales (por medio de palabras), cuya solución requiere de una suma o resta; de esta manera, un problema aditivo tiene propiedades cualitativas, cuantitativas y mantiene relaciones (binarias, terciarias, etc.) con otros objetos. Al mismo tiempo sufren transformaciones debido a los procesos naturales u operaciones del sujeto.

El interés por el estudio del proceso de resolución de problemas aritméticos inicia en los años setenta con la investigación sobre la educación matemática, considerada como un campo de estudio específico, y por el predominio en la educación de las posiciones basadas en el conductismo y en el cognoscitivismo.

Este interés es reforzado por el fracaso de las matemáticas modernas, producto de las reformas de los años setenta, durante las cuales la resolución de problemas consistió en una introducción basada en el currículum, a modo de aplicación de ejercicio y práctica de los conocimientos adquiridos previamente. Se observó que para enseñar a resolver los problemas aritméticos se debería mostrar una atención especial a la producción de conocimientos significativos para el que aprende debido a la necesidad del uso de los símbolos y otros signos que se presentan en la vida cotidiana.

Puig y Cerdan (1989) menciona que el núcleo del currículum matemático no está determinado por los conocimientos que deben trasmitirse, sino por los procesos de producción de conocimiento; es decir, la atención debe ser para el proceso, no para los conocimientos. El conocimiento que debe valorarse no es el conocimiento transmitido, sino el producido por quien está en situación de aprender.

López (1988) dice que la resolución de problemas ha de ser el lugar de la producción del conocimiento o el lugar donde mostrar y poner de manifiesto la transferencia del mismo. Por esto, la resolución de problemas aritméticos es una tarea privilegiada para el aprendizaje, ya que estimula en el niño capacidades como la comprensión, la imaginación, la creatividad y la organización, que le ayudarán a reafirmar su conocimiento matemático. Así, estos problemas tienen funciones educativas que van más allá del simple requerimiento de una operación aritmética y de un resultado. De ahí que sea menester comprender cómo se produce naturalmente el aprendizaje y analizar con detalle la conducta de los sujetos mientras resuelven problemas para que se pueda facilitar en la instrucción escolar.

De acuerdo a Puig y Cerdan (1989) la información que se proporciona en el enunciado tiene carácter cuantitativo, ya que los datos suelen ser cantidades; la condición expresa relaciones de tipo cuantitativo y la pregunta se refiere a la determinación de una o varias cantidades (relaciones entre cantidades). La resolución del problema o lo que es preciso hacer para contestar la pregunta que plantea el problema, consiste fundamentalmente en la realización de una o varias operaciones aritméticas. Los problemas aritméticos, en general, son de aplicación; ello hace que aparezcan en enunciados de contextos variados.

Varios investigadores han elaborado clasificaciones de los problemas aditivos de acuerdo a su estructura semántica o a la relación que tienen los enunciados y los números dentro del problema para su comprensión y su relación, así como los problemas que resultan más fáciles o más difíciles, de acuerdo a su estructura semántica. Maza (1989) refiere que hay investigaciones que examinan la relación entre distintas variables presentes en el problema, de las cuales se han registrado cuatro enfoques diferentes:

El primer enfoque es la sintaxis del problema en donde se estudian las características gramaticales de los enunciados, así como el número de palabras;

el segundo enfoque es la lingüística del problema el cual registra la influencia de determinados verbos para referirse a una operación determinada;

un tercer enfoque es la posición que ocupa incógnita en el problema;

Por último, es el de la estructura semántica que resalta las características estructurales que le dan significado al problema, caracterizan las acciones y las relaciones implícitas en el mismo.

De esos cuatro enfoques de investigación, al que le daremos mayor relevancia es el análisis de la estructura semántica de los problemas.

Greeno, Heller y Riley (1978) encontraron que dentro del problema hay ciertas variables tales como la complejidad gramatical y el orden de los enunciados que facilitan su resolución; se ha probado que el efecto de palabras tales como "en conjunto", "todos juntos", "menos", sugieren la operación que corresponde a la resolución del problema.

Greeno, Heller y Riley (1978) distinguen cuatro grandes categorías de los problemas aditivos verbales según su estructura semántica: cambio o transformación, combinación, comparación e igualación, mismas que se subdividen en problemas de diferentes tipos, dependiendo de la posición de la cantidad desconocida. (Veáse Tabla 1).

Tabla 1. Clasificación de los problemas aditivos verbales según su estructura semántica, realizada por Greeno, Heller y Riley (1978)

| CLASIFICACIÓN Estructura Semántica | DEFINICIÓN | EJEMPLO |
|---|---|---|
| CAMBIO O TRANSFORMACIÓN | Hay una relación de cambio o transformación de un conjunto. Interrelación estática entre dos cantidades. Dos conjuntos que se alteran al resolver el problema. Se reúnen o cambian | Pepe tenía 5 canicas, luego Tomás le quitó 3 canicas ¿Cuántas canicas tiene ahora? |
| COMBINACIÓN | Ninguna cantidad se modifica. Ya sea que la cantidad que se desconoce se haya creado a partir de 2 cantidades dadas; o una de las cantidades dadas se haya transformado a través de la otra cantidad dada de la desconocida. | Pepe y Tomás tienen los dos juntos 8 canicas. Si Pepe tiene 5 ¿Cuántas canicas tiene Tomás? |
| COMPARACIÓN | Una cantidad de los conjuntos esta separada de las otras dos. Es la diferencia de las dos cantidades dadas. | Pepe tiene 8 canicas. Tomás tiene 5 canicas ¿Cuántas canicas tiene Pepe más que Tomás? |
| IGUALACIÓN | Implica incrementar o decrementar el conjunto inicial para igualar los dos conjuntos. | Pepe tiene 5 canicas, Tomás tiene 8 ¿Cuántas necesita Pepe para tener las mismas que Tomás? |

De acuerdo con Greeno, Heller y Riley, la posición de la cantidad desconocida influye en la dificultad para resolver un problema, porque, la resolución comienza con la construcción de una representación interna de las relaciones entre las cantidades conocidas y desconocidas en términos de uno de los cuatro diferentes esquemas semánticos denominados de cambio, combinación, comparación e igualación. El sujeto se basa en la representación para elegir una operación aritmética apropiada (adición o sustracción) para encontrar la cantidad desconocida con los números dados.

Para Carpenter y Moser (1982) es necesario caracterizar los problemas verbales aditivos de acuerdo a su estructura semántica inherente porque las estrategias de conteo están influidas por la estructura semántica del problema. Antes de que un niño reciba instrucción formal sobre la adición y sustracción, es capaz de resolver problemas verbales que involucran el uso de la suma y la resta a través del conteo.

Carpenter y Moser (1982) identifican tres criterios fundamentales para el análisis de los distintos tipos de problemas o tareas aditivas y sustractivas, de acuerdo a su estructura semántica:

El 1o. se refiere a la existencia de problemas basados en una relación estática o activa entre los conjuntos o subconjuntos implicados en la tarea, de modo que en algunos casos resulta importante la presencia de una acción (cambia o transforma la cantidad de un conjunto), mientras que en otras la relación entre las cantidades es más bien estática.

El 2o. menciona que en ciertos problemas dos de las cantidades son subconjuntos de la tercera; es decir, una de las dos cantidades es hecha de otra cantidad dada y la incógnita. En otras situaciones, una de las cantidades implicadas en el problema es dividida de las otras dos; en este caso implica una comparación de las dos cantidades separadas.

El 3er. criterio, se refiere a las tareas que implican acción, ya que en el problema la acción descrita puede ser causa de un aumento o un decremento en la cantidad inicial; los problemas con relaciones estáticas no implican cambio entre las cantidades por lo que no es aplicable a estos problemas.

Con base a estos tres criterios, los autores proponen seis diferentes clases de problemas que se mencionan en la tabla 2:

Tabla 2. Clasificación de los problemas aditivos, según su estructura semántica de Carpenter y Moser (1982)

| CLASIFICACIÓN | DEFINICIÓN | EJEMPLO |
|---|---|---|
| 1) REUNIÓN | Dos cantidades son un subconjunto de la tercera. Incluye una cantidad inicial y una acción que implica el incremento o decremento de una cantidad. | Pati tiene 5 lápices ¿Cuántos lápices más necesita para juntar 7 lápices en total? |
| 2) SEPARACIÓN | Contiene características similares a las de Reunión pero la acción solamente involucra un decremento. Dos cantidades son un subconjunto de la tercera. | Tomás tiene 11 dulces, regala 7 a Martha ¿Cuántos dulces tiene Tomás ahora? |
| 3) PARTE-PARTE-TODO | Describe una relación estática entre una entidad y sus dos partes. Dos de las cantidades son un subconjunto de la tercera. | Hay 6 alumnos en un grupo, 4 son niños y el resto son niñas ¿Cuántas niñas hay? |
| 4) COMPARACIÓN | Describe dos cantidades separadas Busca la diferencia entre las dos cantidades | Joel tiene 3 balones, su hermano tiene 5 ¿Cuántos balones más tiene su hermano? |
| 5) IGUALACIÓN AUMENTANDO | Cambiar una de las entidades para que sean las dos iguales. Se incrementa la cantidad más pequeña. | Juan tiene 6 dulces, Pedro tiene 2 dulces ¿Cuántos dulces deberá comprar Pedro para que tenga los mismos que Juan? |
| 6)IGUALACIÓN QUITANDO | Cambia una de las entidades para que sean iguales en algún atributo. Decrementa la cantidad más grande. | Juan tiene 6 dulces, Pedro tiene 2 dulces ¿Cuántos dulces deberá comerse Juan para tener los mismos que Pedro? |

Carpenter y Moser (1982) afirman que a pesar de que la acción y la interacción involucradas son las mismas en cada clase de problema, los tipos de problema son muy diferentes e involucran distintos métodos de solución, dependiendo de las cantidades y de la incógnita dadas; es por ello que para cada una de las seis clases de problemas puede haber tres distintos tipos de problemas.

En un trabajo posterior, Carpenter y Moser (1983) reorganizan su primera clasificación, presentando los tipos de problemas de cambio, de combinación, de comparación e igualación.

Por su parte, Vergnaud, a lo largo de su investigación iniciada en 1975, distingue seis categorías por medio de la relación que tienen los números dentro del problema y a su estructura semántica. Mencionan que las relaciones numéricas aditivas pueden ser estáticas o dinámicas dependiendo de la ausencia o presencia de aspectos temporales; así, bajo la óptica del cálculo relacional se distinguen dos tipos de números: los que representan estados-medidas y los que representan transformaciones positivas o negativas. Toda transformación puede ser positiva o negativa y las medidas de los conjuntos tienen signos positivos o negativos. De esta manera "...los números naturales representan las medidas de conjuntos de objetos aislables. Los números relativos representan las transformaciones que experimentan a esas medidas..."(Vergnaud, 1991, p. 163).

Por lo anterior Vergnaud (1991) determina la relación de los números dentro del problema de acuerdo a su posición:

a) Estado Inicial (E. I.): es el número que representa dos medidas;

b) Transformación (T): es un número relativo, positivo o negativo, que cambia al Estado Inicial; y,

c) Estado Final (E.F.): es el número obtenido de la aplicación de la Transformación en el Estado Inicial.

Por otra parte cuando en un problema intervienen cantidades separables en unidades (discretas) se expresan mediante números enteros, ya se trate de medidas o transformaciones. Cuando trabajamos con cantidades continuas (áreas, longitudes, etc.) se utilizan números decimales.

Tomando en cuenta los elementos anteriores Vergnaud distingue seis categorías aditivas de acuerdo a la función del tipo de relación que hay en los elementos del problema "...cada una de ellas es representada por esquemas llamados sagitales constituidos por un sistema de símbolos..." (Vergnaud, 1991, p.13) para representar las relaciones aditivas que pueden encadenarse de diversas maneras. El propone diferentes estructuras aditivas, en las que emplea los siguientes símbolos:

} - composición de elementos de la misma naturaleza;

→ - composición de elementos de diferente naturaleza;

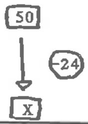
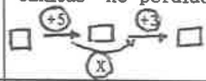
↓ - relación de elementos de diferente naturaleza;

□ - representa números naturales; y

○ - representa números relativos;

Las categorías de los problemas aditivos de acuerdo a Vergnaud (1991) se representan en la tabla 3.

Tabla 3. Clasificación de los problemas aditivos según su estructura numérica(Vergnaud, 1991).

| CATEGORÍA | RELACIONES NUMÉRICAS | EJEMPLO |
|---|---|---|
| **1) Dos medidas se componen para dar una tercer medida** | Da lugar a dos clases de problemas:<br>-Conociendo las dos medidas elementales, encontrar su composición;<br>-Conociendo la composición y una medida elemental, hallar la otra.<br>Cada una de estas clases de problemas se subdivide en varias subclases de diferente grado de dificultad. | Tengo 5 canicas de cristal y 3 de acero ¿Cuántas canicas tengo en total?<br> |
| **2) Una transformación opera sobre una medida para dar otra medida** | Da lugar a tres clases de problemas que a su vez se subdividen en dos, según sea la transformación positiva o negativa:<br>- Conociendo el EI y la T, encontrar el EF.<br>- Conociendo el EI y el EF encontrar la T,<br>-Conociendo el EF y la T hallar el EI | Tenía 7 canicas, he jugado una partida y he perdido 3 ¿Cuántas canicas tengo ahora?<br> |
| **3)Una relación reúne dos medidas para dar una tercera** | Da lugar a dos clases de problemas:<br>-Conociendo las dos T compuesta y una de las Ts. elementales, encontrar la otra.<br>En este tipo de problemas la dimensión relativa de los números interviene de forma más decisiva que en los casos precedentes, ya que aquí puede ser negativo o positivo. | Andrés tiene 50 canicas, Luis tiene 24 menos que Andrés ¿Cuántas canicas tiene Luis?<br> |
| **4)Dos transformaciones se componen para dar una transformación** | Relación entre elementos de diferente naturaleza.<br>No hay modificación de ninguna de las medidas.<br>No hay transformación.<br>Es una relación estática. | Juego una partida y pierdo 5 canicas, juego otra vez y gano 3 ¿Cuántas canicas he perdido?<br> |
| **5) Una transformación opera sobre un estado relativo (una relación) para dar otro estado relativo** | Es ya evidente que la solución de estas diferentes clases de problemas no implica las mismas operaciones. | Debo 7 canicas a Pablo, le devuelvo 4 ¿Cuántas le debo ahora?<br> |
| **6)Dos estados relativos que se componen en un tercero** | La composición de dos estados, la aplicación de dos Ts., la aplicación de una T inversa a un E., la búsqueda de la diferencia entre dos, etc. no se puede situar en un mismo plano, pues implica diferentes cálculos relacionales | Debo 7 canicas a Pablo, él me debe 4, entonces ¿Cuántas le debo?<br> |

Según Vergnaud, la complejidad de los problemas de tipo aditivo estriba no sólo de las diferentes categorías de relación numérica, sino también en función de las diferentes clases de problemas que se pueden plantear para cada categoría, lo cual depende del lugar que ocupa la incógnita, por lo que cada categoría propuesta por Vergaund se subdivide en distintas clases.(ver anexo 1)

### 2.3 Procedimientos de resolución de problemas aditivos

En está investigación se estudian los procedimientos que los niños emplean para encontrar la cantidad desconocida en la resolución de problemas aditivos que requieren la operación de la resta. Estos procedimientos pueden llevar a una respuesta correcta o incorrecta depende del tipo de procedimientos se utilice. Pero antes, es necesario definir qué entendemos por estrategias y procedimientos de resolución de problemas aditivos en los que se emplea la operación de la resta.

Entendemos como estrategias a la forma de dirigir las acciones ligadas a las características semánticas de un problema para analizarlo, evaluarlo sistemáticamente y entonces resolverlo por medio de un procedimiento. Por ejemplo, un dibujo puede ayudar a un niño a definir un problema y de esa forma decidir el tipo de procedimiento que empleará para hallar la solución del mismo (Maza, 1989). Por medio de los procedimientos se identifican las características y la naturaleza de las acciones y operaciones que un sujeto realiza para encontrar la cantidad desconocida en un problema aritmético planteado (Juárez, 1996).

De esta manera las estrategias y procedimientos son complementarios para la resolución de problemas; las primeras ayudan a analizar y evaluar sistemáticamente un problema,los segundos son las operaciones que se eligen para la solución del mismo (Baroody, 1988; Maza, 1989).

En 1978, Carpenter y Moser sostuvieron la hipótesis de que los niños de cinco años no reconocen la posibilidad de intercambiar estrategias, por lo que no pueden hacerlo. Los resultados de su estudio longitudinal sobre el desarrollo de las estrategias usadas por los niños para resolver diferentes tipos de problemas con enunciados de adición y sustracción durante los primeros años de escolaridad formal, indican que los niños pequeños utilizan una estrategia básica que involucra directamente el uso de objetos materiales, mientras que los niños de primer grado desarrollan estrategias de conteo.

El esquema de clasificación de las estrategias de solución de acuerdo a Carpenter y Moser (1982) consiste en tres dimensiones dependiendo de su nivel de interiorización, ya que las estrategias de solución para problemas de sustracción están influenciadas sistemáticamente por la estructura semántica subyacente al problema.

1.- Estrategias basadas en materiales concretos, ya sea los dedos o los objetos físicos, en donde hay un manejo directo de los objetos para resolver el problema que se presenta. Dentro de este tipo de estrategias se utilizan los siguientes procedimientos:

-Emparejamiento: los dos conjuntos se ponen en correspondencia uno a uno determinando el exceso del conjunto más grande sobre el número más pequeño, se obtiene la solución al problema de sustracción ya sea quitando o poniendo. Por ejemplo: "Juan tiene 9 dulces le da cinco a Pedro ¿Cuántos dulces le quedan?

♦ ♦ ♦ ♦ ♦ <u>♦ ♦ ♦ ♦</u>

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ TOTAL = 4

♦ ♦ ♦ ♦ ♦

- Añadir a: uno de los conjuntos permanece fijo en la posición original, mientras que el otro se mueve a una posición inmediatamente adyacente a la primera. Por ejemplo, Con el problema anterior se forma el conjunto de la cantidad menor, ⌂⌂⌂⌂⌂,
12345
después se cuentan los objetos necesarios para llegar a la cantidad mayor, ⌂ ⌂ ⌂ ⌂ la respuesta se obtiene al contar los objetos 6 7 8 9 añadidos
<u>1 2 3 4</u> La respuesta es cuatro.

-Separar de: primero se representa la cantidad mayor de los objetos hasta que quedan exactamente en el número representado por el conjunto menor. Por ejemplo, con el mismo problema:

⌂ ⌂ ⌂ ⌂ ~~⌂ ⌂ ⌂ ⌂ ⌂~~ → El conjunto no tachado es la respuesta.

-Separar hasta: los objetos se van quitando de uno en uno hasta obtener un conjunto del término especificado, luego se cuenta el número de objetos que se separaron. Por ejemplo, en el mismo problema:  La respuesta es la cantidad de las figuras tachadas.

2.- Estrategias aditivas y sustractivas apoyada en símbolos para realizar un conteo verbal. Se encontraron los siguientes procedimientos:

-Contar a partir de lo dado: cuenta a partir del número más pequeño dado hasta alcanzar el número mayor; al contar la cantidad de números que ha emitido obtiene la respuesta deseada. Por ejemplo, en el problema "Hay 9 dulces, 5 son de Pedro y el resto son de Juan ¿Cuántos son de Juan?" Se empieza a contar a partir de 5 hasta alcanzar el número 9: 6, 7, 8, 9. Los números contados son la respuesta.

-Contar hacia atrás a partir de: cuenta hacia atrás a partir del número mayor, dando como respuesta el último dígito. Por ejemplo, tomando en cuenta el problema anterior: Menciona el número 9, cuenta hacia atrás hasta llegar al 5; 8, 7, 6, 5, 4, siendo la respuesta el último dígito.

-Contar hacia atrás: cuenta hacia atrás hasta el número menor contando los números emitidos durante el conteo hacia atrás. Por ejemplo, en el mismo problema: Toma el número 9 y va contando hacia atrás hasta llegar al cinco 8, 7, 6, 5. La respuesta es la cantidad de números mencionados.

3.- Estrategias basadas en el recuerdo de hechos numéricos conocidos. El sujeto resuelve el problema por medio de resultados ya conocidos. Por ejemplo en el problema anterior por medio de la memoria a largo plazo se sabe que 9 menos 5 es igual a 4.

Carpenter y Moser (1983) observaron también que las estrategias y procedimientos que utilizan los niños para resolver los problemas, están estrechamente relacionadas con la estructura del problema. En los problemas de cambio o transformación los niños de primer año emplean los procedimientos "separar de" y "contar a partir de lo dado"; en los de comparación y combinación los procedimientos fueron menos claros, y el procedimiento más frecuente fue el de emparejamiento. Las respuestas de los niños de segundo grado se basan, casi en la tercera parte, en hechos numéricos. Los procedimientos observados en los problemas que implican cambio fueron "separar de" y "contar hacia atrás a partir de", en los problemas de comparación se observaron el de "emparejamiento", "separar de" y "contar a partir de lo dado". Los niños de tercer grado se basan sobre todo en hechos numéricos para emitir sus respuestas independientemente de la estructura del problema; los procedimientos más observados en este grado fueron "contar a partir de los dado" y "separar de".

Carpenter y Moser (1983) encontraron que los procedimientos más frecuentes están dentro de las estrategias concretas: separar de, separar a, añadir a y emparejamiento. De la misma manera, mencionan que el niño es capaz de interiorizar las acciones que antes había realizado manifiestamente mediante modelos adquiriendo mayor flexibilidad y eficacia en sus operaciones.

A partir de la clasificación de las estrategias y procedimientos que hicieron Carpenter y Moser (1983), De Corte y Verschaffel (1984) precisan y renombran esa clasificación al proponer las estrategias como categorías: a) categoría concreta basada en el uso de dedos o materiales físicos; b) categoría verbal, se basa en la secuencia de números o en secuencia de conteo; y, c) categoría mental, se recuperan los datos o estrategias fundadas en el recuerdo de hechos numéricos conocidos.

De Corte y Verschaffel (1984) concluyen que los niños no confían en la adición o sustracción formales para resolver problemas verbales, sino que ellos usan su experiencia diaria en acciones tales como incrementar, disminuir, combinar o comparar los hechos de los objetos comprendidos en el texto del problema y en la construcción de representaciones apropiadas a la situación del problema; además aplican varios procedimientos informales de conteo para encontrar la cantidad desconocida de un problema (De Corte y Verschaffel, 1984).

De Corte y Vershaffel también mencionan, que en edades tempranas el niño puede resolver problemas por medio del uso de sus dedos u objetos físicos para representar las cantidades y las relaciones existentes entre ellas. En este caso, los procedimientos más frecuentes son "separar de", "separando hasta", "añadir a", y "emparejamiento". Posteriormente, el niño es capaz de interiorizar las acciones que antes había realizado manifiestamente por medio de modelos, adquiriendo una mayor flexibilidad y eficacia en sus operaciones. Esto conlleva a emplear estrategias de conteo verbal en las que la presencia de los dedos u objetos físicos no es indispensable, su función en todo caso a cambiado con respecto al período anterior. Ahora aparecen principalmente las estrategias verbales, con los siguientes procedimientos:

a) Conteo regresivo desde: secuencia de conteo regresivo comenzando por el número más grande, el último número es la respuesta. Por ejemplo, en el problema "Hay 9 dulces 5 son de Pedro y el resto son de Juan ¿Cuántos son de Juan?" se cuentan cinco números antes a partir del 8, 7, 6, 5, 4, el último número es la respuestas.

b) Conteo regresivo hasta: se empieza a contar con el número más grande hasta llegar al número más pequeño, la respuesta es el número de palabras contadas. Por ejemplo, en el problema anterior, 8, 7, 6, 5; el número de palabras contadas es la respuesta.

c) Conteo ascendente a partir de lo dado: la respuesta es el número de palabras contadas. Por ejemplo, en el mismo problema, se empieza a contar a partir del número 6, 7, 8, 9. La respuesta es el número de palabras contadas.

Finalmente, cuando el niño ha alcanzado un nivel de interiorización más abstracto emplea estrategias basadas en el recuerdo de hechos numéricos. Esta estrategia se basa en acciones y relaciones sobre los propios números y ya no sobre objetos. Por consiguiente, sólo se podrá acceder a esta fase cuando la expresión simbólica haya sido plenamente adquirida. Dentro de esta estrategia se identifican los siguientes procedimientos:

a) Hecho conocido directo sobre la sustracción, el niño se basa en su memoria a largo plazo para recordar o evocar directamente una operación que resuelve el problema. Por ejemplo, en el problema "Juan tiene 9 dulces. Pedro tiene 5 menos que Juan ¿Cuántos dulces tiene Pedro?" primero se determina la operación aritmética con que se resuelve el problema, al saber que es la resta, sólo se recuerda el resultado, pues se sabe que 9 menos 5 son 4.

b) Hecho conocido indirecto sobre la sustracción, para encontrar el resultado se basa en la memoria a largo plazo de una operación que contenga los números cercanos a los que tiene la operación que se pida. Por ejemplo, en el problema anterior, se desconoce el resultado de 9 menos 5, pero se sabe que 10 menos 5 son 5; entonces sólo se quita una unidad para llegar al 4.

c) Hecho conocido indirecto sobre la adición: para obtener el resultado se basa en la memoria a largo plazo de una adición para encontrar el resultado de una resta. En el mismo problema, se sabe que 5 más 3 son 8, entonces se aumenta uno para llegar al nueve y la respuesta la encuentra sumando 3 más 1.

d) Hecho derivado directo sobre la sustracción: se apoya en el recuerdo de hechos numéricos aproximados substrayendo el número más pequeño del más grande. Por ejemplo, en el problema "Hay 9 dulces, 5 son de Pedro y el resto son de Juan ¿Cuántos dulces son de Juan?" Al comprender el problema se sabe que al restar 9-5 se obtiene el resultado, pero sólo se sabe que 8 menos 5 son 3, entonces el resultado se obtiene aumentando al resultado el mismo número que se aumento al minuendo, en este caso, se suma uno a ocho para obtener el minuendo y por tanto uno a tres, para obtener el resultado.

e) Hecho derivado indirecto sobre la sustracción: evoca hechos numéricos y encuentra la respuesta del problema determinando la cantidad que debe ser sustraida del número más grande. por ejemplo, en el mismo problema, ya se sabe que al restar 9-5 se obtiene el resultado, pero sólo se conoce que 9-3=6, por lo que se aumenta al sustraendo el mismo número que se le quita al resultado, por tanto, por tanto, 3 + 2 = 5 que es el sustraendo de la resta original y 6 - 2 = 4, y el resultado de ésta última suma es la respuesta.

f) Hecho derivado indirecto sobre la adición: determina qué cantidad del número más pequeño debe ser añadido para obtener el número más grande. Por ejemplo, en el mismo problema se sabe que 9 - 5 = 4, porque se suma 5 + 4.

Así como De Corte y Verschaffel (1984) estudian los procedimientos que utilizan los niños escolares para resolver problemas aditivos que llevan a respuestas correctas; Bebout (1983) estudia los errores que estos cometen a principios de la educación formal en la resolución de estos problemas. Hace una clasificación de esos errores:

a) los errores de representación se refieren a los modelos de los procedimientos que incluyen las categorías siguientes : operación falsa, por ejemplo, en el problema Juan tiene 9 dulces, le dio 5 a Pedro ¿Cuántos dulces tiene ahora? se da una operación falsa, 5+9=14; repetir algún número dado,en el mismo problema da como respuesta 9 o 5; adivinar, da cualquier número, 7; y no intentar, dice "no sé".

b) los errores de solución ocurren después de usar la estrategia apropiada, incluyen las categorías siguientes: computación o cálculo, por ejemplo en el mismo problema 9-5=3, repetir algún número, hace la resta y repite algún número, ya sea el 5 o 9; da como respuesta un número incorrecto de un modelo dado, por ejemplo 5-5=8.

c) los errores que no pueden ser clasificadas en las categorías de representación o solución. Por ejemplo, inventa una historia, por ejemplo, en el mismo problema: "Juan le dio muchos dulces y se quedo con poquitos, entonces se fue a la tienda a comprar más para tener más que Pedro".

Kouba (1985) identifica que el error más frecuente en el que incurren los niños de primero a tercer grado es el uso de los números dados en el texto del problema y el uso de operaciones erróneas. Sin embargo, los niños de primero y segundo grado tienen más fracasos en las operaciones de sustracción que en las de adición.

En México se han realizado varias investigaciones en relación a los problemas aditivos sobre procedimientos de resolución, representación gráfica y sobre el algoritmo de la resta.

Por ejemplo, López (1988), concluye que los niños saben resolver algoritmos aritméticos pero no lo saben aplicar en problemas aditivos, lo que indica una incomprensión del mismo. La mecanización algorítmica debe estar sostenida en la comprensión; la posición vertical del algoritmo favorece la mecanización mientras que la horizontal favorece la reflexión; los niños que cursan los primeros grados de educación formal utilizan menos las reglas algorítmicas, lo cual se incrementa en cuarto grado y disminuye en quinto y sexto nuevamente; la dificultad de los problemas no está en la resolución de las operaciones aritméticas sino en la comprensión del problema.

Vargas y colaboradores (1988) al igual que Vergnaud (1991), investigaron las variables que influyen en los procedimientos de las operaciones aritméticas elementales en la primaria. Concluyen que existe una relación directa entre la dificultad de los problemas y el tipo de procedimientos utilizados; las cantidades implicadas juegan un papel importante en la elección del procedimiento a utilizar, ya que las cantidades pequeñas favorecen el empleo de los procedimientos espontáneos, mientras que otras, las cantidades mayores, podrían propiciar la utilización de procedimientos convencionales; así, la ubicación de la incógnita determina la elección del procedimiento. También encontraron que los principales obstáculos a los que se enfrentan los niños cuando resuelven problemas aditivos, no residen principal y exclusivamente en el simple cálculo numérico ni en un dominio mecánico de las operaciones aritméticas elementales, sino en la comprensión de las relaciones planteadas en el problema; es decir, para solucionar un problema no es suficiente que los niños conozcan las reglas algorítmicas, ya que aun cuando posean este conocimiento si no son comprendidas las relaciones planteadas en el problema no llega a resolverlo exitosamente. Encontraron también que los factores adicionales pueden ser:

a) cálculo numérico, necesario en donde se presentan números pequeños, grandes, enteros, fracciones o decimales;

b) contenido del problema, en donde se presentan cantidades continuas (nominales), discretas (concretas);

c) orden y formación de presentación de datos.

Bebout (1983), Kuoba (1985), Vargas y cols. (1988) y Vergnaud (1991) identifican a la toma de los datos dados en el texto como uno de los procedimientos de fracaso en los primeros grados de primaria. En los otros niveles se presenta la "relación incordinada de datos", el cual implica mayor comprensión que el procedimiento anterior.

Vargas y cols. (1988) basados en la clasificación de problemas aditivos de Vergnaud (1991) observaron los siguientes procedimientos:

a) Composición: se da en los problemas de la categoría uno, al componer aditivamente las dos medidas elementales, determinando el valor de la incógnita, y se expresa por medio de una suma o por conteo de las medidas;

b) Transformación Hipotética: se observa en los problemas de la segunda categoría. Se evita la resta y se hipotetiza el valor de la transformación, se aplica el estado al valor del estado inicial y se encuentra un estado final, compara el estado final y corrige el valor hipotético en función del resultado obtenido. Se adivina la transformación, luego resta y cambia el valor que adivinó.

c) Estado Inicial Hipotético: Las características son similares a transformación hipotética, sólo que el estado inicial es la incógnita;

d) Inversión de la Transformación: Se invierte la transformación directa que se aplica al estado final para encontrar el estado inicial. Si la transformación es negativa se hace suma, si es suma se hace resta;

e) Diferencia: Se registra en problemas como los de la categoría uno y dos. Se resuelve por medio de una resta, pero no implica los mismos cálculos relacionales. Se razona de entrada sobre la transformación, la acción implica una resta pero se resuelve por medio de una suma;

f) Complemento: el resultado se determina por conteo o por reglas algorítmicas entre dos cantidades desconocidas:

- Complementos ascendente: se cuenta a partir de la cantidad menor para llega a la mayor;
- Complemento descendente: se empieza a contar de la cantidad mayor hasta llegar a la menor.

g) Relación incordinada de datos: son los primeros procesos para establecer una relación cuantitiva. Se sabe que se tiene que hacer algo pero no se sabe qué, después se relacionan incordinadamente los datos a través de suma, resta, multiplicación o división, persistiendo en la primera;

h) Retoma de Datos: se otorga el valor de uno de los datos a la incógnita, se considera un procedimiento erróneo.

i) No Identificado: se dispone sólo del resultado, sin operaciones, justificaciones o explicaciones.

j) Sin Respuesta: se limita a responder "no sé", "no entiendo", "nada".

En cuanto a los datos que encontraron en la investigación, Vargas y cols. (1988) mencionan que

> "...los niños utilizan procedimientos alternativos que permiten solucionar el problema en el mismo problema de enunciación... en los primeros grados se presentan con mayor incidencia el retomar uno de los datos dados del texto, mientras que en los otros grados se presentan la relación incordinada de datos, el cual implica más comprensión que el anterior, ya que de alguna forma el niño intenta establecer una relación con los datos del problema ... " (p. 36).

De acuerdo a la investigación de Vargas y colaboradores, la frecuencia del procedimiento de Diferencia se incrementa conforme aumenta el grado escolar, porque confluyen dos factores: la comprensión de los niños acerca de las relaciones planteadas por la estructura misma del problema y la enseñanza escolarizada de la sustracción. Estos factores coinciden paulatinamente.

En relación a los errores, ellos observaron que existe mayor frecuencia y diversidad en la segunda categoría. La relación incordinada de datos es el procedimiento de fracaso más empleado en la segunda categoría, mismo que gradualmente desaparece a lo largo de los seis grados escolares, mostrándose, entonces, como un error persistente, por lo menos en la educación primaria.

> "...creemos que la presencia y persistencia de este tipo de error se debe a la dificultad que ofrece la acción de sus partes, lo cual requiere de composiciones aditivas. Ante tal dificultad, los sujetos llevan a cabo una Relación Incordinada de Datos mediante una adición (operación privilegiada escolarmente); con los cual se expresa una tendencia natural del sujeto a enfrentar lo nuevo y/o difícil por medio de esquemas conocidos...Comparando el procedimiento de Relación Incordinada de Datos con la Retoma de Datos encontramos que este último es menos evolucionado, fundamentándose en la hipótesis de los niños en que la solución está en el enunciado del problema. Esto no les demanda poner los datos en relación cuantitativa. Por otro lado, cuando los niños desconocen el algoritmo de la operación requerida pero comprenden las relaciones planteadas pueden resolver el problema recurriendo a procesos espontáneos..." (Vargas y cols. p .38).

Velázquez (1988), llega a la conclusión de que la edad cronológica no es condición suficiente para que un niño pueda resolver determinado tipo de problema; la mayoría de los niños piensan que hacer cuentas o algoritmos sirve sólo para realizar actividades escolares o relacionadas con ellas, y que la organización tanto en el primero como en el segundo grado hay un mayor grado de dominio en adición que en sustracción.

En 1993, Avilés y Lira iniciaron una investigación en diferentes estados de la República Mexicana: Veracruz, Nayarit, Oaxaca y Estado de México; sobre la resolución de problemas aditivos. En esta investigación se realizó una clasificación de las estrategias de adición y sustracción "...conforme a su propia caracterización, basándose en las descritas por los autores Carpenter y Moser (1982) y De Corte y Verschaffel (1987) pero dándoles una clave diferente conforme al nivel en que se encuentre la habilidad de los niños para emplearlas..." (p. 64).

Dentro de la categoría de las estrategias concretas, se encuentran los siguientes procedimientos:

- Construir un conjunto, quitar elementos y cuenta los que quedan;
- Construir un conjunto, quitar elementos y contar los que se quitaron;
- Construir un conjunto con el número más pequeño y agregar elementos hasta llegar al más grande;
- Aparear los dos conjuntos y cuenta los elementos que sobran;
- Aparea los dos conjuntos y añade elementos hasta emparejarlos.

En las estrategias verbales se encuentran los siguientes procedimientos:

- Contar hacia atrás;
- Conteo regresivo;
- Conteo hacia delante;

Dentro de las estrategias mentales mencionan:

- Hecho conocido directo sobre la sustracción;
- Hecho conocido indirecto sobre la sustracción;
- Hecho conocido directo sobre la adición;
- Hecho derivado directo sobre la sustracción;

- Hecho derivado indirecto sobre la sustracción;
- Hecho derivado indirecto sobre la adición;

Avilés y Lira encontraron que en el segundo grado las estrategias verbales fueron las más empleadas mientras que las estrategias mentales ocuparon el segundo sitio, observándose una notable disminución en el uso de las estrategias concretas. También utilizaron aprendizajes informales de conteo basándose en algunos hechos numéricos conocidos.Dentro de los procedimientos más frecuentes están el "apareamiento", "añadir a" y "separar de".

Con respecto a los niños de preescolar encontraron que aún cuando no habían recibido instrucción formal sobre los algoritmos de suma y resta, éstos fueron capaces de resolver los problemas con sus propios recursos valiéndose de estrategias informales de conteo.

La revisión de los trabajos anteriores, a sido importante porque de ellos se han tomado elementos que sirven de base para esta investigación. De acuerdo al análisis de procedimientos de resolución de problemas aditivos que muestran las investigaciones revisadas, y lo que se encontró en esta investigación; se hace una abstracción de estrategias y procedimientos con las cuales se hizo la clasificación que se emplea en este trabajo. La clasificación se muestra en las tablas 4 y 5.

Tabla 4. Clasificación de procedimientos de resolución de problemas aditivos que llevan a respuestas correctas.

| ESTRATEGIAS | PROCEDIMIENTOS | DESCRIPCIÓN |
|---|---|---|
| CONCRETAS | SEPARAR DE | Se representa la cantidad mayor y se van separando los elementos hasta que queda el número representado por el conjunto menor. La respuesta es el conjunto que queda. |
| | SEPARAR HASTA | Los objetos se van quitando de uno en uno hasta tener el número menor que pide el problema, luego se cuenta el número de objetos que se separaron. |
| | EMPAREJAMIENTO | Los dos conjuntos se ponen en correspondencia uno a uno determinando el exceso del conjunto más grande sobre el número más pequeño, se obtiene la solución al problema de sustracción ya sea quitando o poniendo. |
| | CONSTRUIR UN CONJUNTO CON EL NUMERO MAS PEQUEÑO Y AGREGAR ELEMENTOS HASTA LLEGAR AL MAS GRANDE | Se toma la cantidad pequeña y se van agregando elementos hasta llegar a la cantidad mayor. |
| VERBALES | CONTEO HACIA ADELANTE | Cuenta a partir del número más pequeño dado hasta alcanzar el número mayor; al contrario, la cantidad de números que ha emitido obtendrá la respuesta deseada. |
| | CONTEO HACIA ATRÁS | Cuenta hacia atrás hasta el número menor contando los números emitidos durante el conteo hacia atrás. |
| | CONTEO HACIA ATRÁS A PARTIR DE | Cuenta hacia atrás a partir del número mayor dado, teniendo como respuesta el último digito |
| MENTALES | HECHO CONOCIDO | Se basa en un hecho numérico conocido, lo que permite encontrar la respuesta. |
| | HECHO DERIVADO | deriva de un hecho numérico conocido, lo que permite encontrar la respuesta añadiendo siempre uno más. |

Tabla 5. Clasificación de procedimientos de resolución de problemas aditivos que llevan a respuestas incorrectas.

| | PROCEDIMIENTOS | DESCRIPCION |
|---|---|---|
| *EN ESTE TIPO DE PROCEDI-MIENTOS NO EXISTE DIVISIÓN DE ESTRATEGIAS | RELACIÓN INCOORDINADA DE DATOS | Son los primeros procesos para establecer una relación cuantitativa. Se sabe que se tiene que hacer algo pero no se sabe qué, después relaciona incoordinadamente los datos a través de suma, resta, multiplicación o división; persistiendo en la primera. |
| | RETOMA DE DATOS | Se otorga el valor de uno de los datos a la incógnita; se considera un procedimiento erróneo. |
| | NO IDENTIFICADO | Se dispone sólo del resultado, sin operaciones, justificaciones o explicaciones. |
| | SIN RESPUESTA | Se limita a responder "no se", "no entiendo", "nada". |
| | HISTORIA O FANTASíA | Construye una historia para evadir la respuesta, como "tiene que comer más" o "que vaya a la tienda a comprar más", entre otras. |
| | SON POQUITOS | Tiene la noción de más y menos, pero no sabe cómo obtener la respuesta. |

## 2.4 La operación de la resta

La representación gráfica de las cantidades o números empieza cuando el niño logra sus primeras representaciones numéricas mentales de la realidad; después las reproduce por medio de dibujos sin ninguna relación, pasando a la copia de la realidad centrandose sólo en la escritura de cantidades,

> "...produciendo formas esquemáticas que representan a cada uno de los objetos, sin reflejar ya los aspectos cualitativos, seguidos de la utilización de cifras para utilizar cada uno de los elementos; esto es, sin completar el aspecto inclusivo del número hasta llegar al uso correcto de las cifras..." (López, 1988; p. 11)

Sastre, citado por López (1988), menciona que al inicio de la representación de las operaciones o algoritmos existe un desfase entre la acción enunciada verbalmente y la representación gráfica. Describe que el niño en un primer momento resuelve sólo a nivel práctico el problema planteado; en un segundo momento explica verbalmente la secuencia de acciones realizadas sin conseguir plasmar en el papel el proceso, finalmente completa sus acciones y palabras con dibujos o números que indican claramente el aspecto aritmético de las acciones realizadas.

Ferreiro y Gómez (citados por López, 1988) mencionan que los niños elaboran sus propias hipótesis alrededor de la lengua escrita, en su intento de comprender el mundo que les rodea; se pregunta sobre las escrituras que encuentran en su alrededor; sobre las acciones de leer y escribir que observan, inventando y reinventando sistemas de escritura; acercándose poco a poco al conocimiento convencional de la lengua escrita. Sin embargo, pasar a la comprensión de la representación convencional no es automática, es necesario una experiencia escolar que permita crear y recrear diferentes producciones e interpretaciones que lo vayan acercando a formas convencionales.

De esta manera la representación aritmética es un reflejo de la realidad que no se reduce al símbolo y signo (significantes), ni a un sistema simbólico que lleve directamente al mundo material, pues los significantes se refieren sólo a conceptos de orden cognoscitivo que representan significados. Así, Vergnaud (1991) menciona que

> "...el símbolo no es más que la parte visible del iceberg conceptual; la sintaxis de un sistema simbólico no es más que la parte directamente comunicable del campo de conocimiento que él representa. Esta sintaxis no sería nada sin la semántica que la produjo; es decir, sin la actividad práctica y conceptual del sujeto en el mundo real." (p. 13).

De esta forma, la representación escrita del número no se debe confundir con el concepto de número; no obstante, sin confundir la escritura del número con el mismo número, el sistema de numeración decimal es un apoyo para la conceptualización del mismo; la representación escrita puede simplificar la solución de ciertos problemas complejos.

> "...En el curso de los dos primeros años de la escuela primaria la enseñanza de la escritura del número está casi inmediatamente asociada al número mismo, de manera que con frecuencia se confunden una con otra..."(Vergnaud, 1991; 135).

Por ello, en el ámbito escolar el sistema numérico decimal se toma como un recurso básico para escribir cantidades y la solución de algoritmos; pero de acuerdo con Vargas y cols. (1988), en el ámbito escolar se transmite como un conocimiento terminado, por lo que la escuela pide al niño el uso mecánico del sistema decimal como la aplicación de las reglas de cada uno de los algoritmos. La comprensión y la aplicación correcta de las reglas algorítmicas tienen gran relación con el dominio que los sujetos tengan acerca del sistema numérico decimal.

Tradicionalmente, el aprendizaje de los procedimientos de algoritmos son la base para resolver problemas aditivos en la enseñanza formal; es decir, los problemas se han utilizado como evaluación de conocimientos previamente enseñados o como ejercitación y aplicación de ellos (López, 1988). Por otro lado, se ha observado que el uso del algoritmo surge de la necesidad de solucionar situaciones de actividades cotidianas, formulando relaciones y representaciones que permitan realizar cálculos cada vez con mayor eficacia. Por esto y porque son una estrategia más para resolver problemas contextuados se contemplará el algoritmo de la sustracción.

Existen varios autores que hacen definiciones sobre el algoritmo: Landa (1978) menciona que es una prescripción precisa y de gran generalidad para llevar a cabo una secuencia definida de operaciones elementales de algún sistema de tales operaciones para resolver cualquier problema; definición que no difiere mucho de la que hace Trajtenbrot, citado por Vargas, y cols. (1988), pues para él, el algoritmo es una prescripción exacta de orden determinado en que ha de ejecutarse un sistema de operaciones para resolver todos los problemas de un cierto tipo. Sin embargo, consideramos que la definición que dan Vargas y colaboradores (1988) es más clara, pues menciona que el algoritmo es un modelo para resolver problemas particulares de un mismo tipo, de acuerdo a una secuencia ordenada de pasos, reglas o instrucciones a ejecutar.

El algoritmo requiere de un método de cálculo para que se pueda comunicar a otra persona en forma de número finito de instrucciones sobre las operaciones que han de aplicarse en los diferentes estadios del cálculo. Además, los cálculos que se realicen de acuerdo con estas instrucciones no dependen de la persona que haga las veces de calculista, pues se trata de un proceso determinado, susceptible de ser repetido y realizado con el mismo éxito, sin importar ni la persona ni la ocasión en que se realice.

La sustracción o la resta como algoritmo, es un modelo para solucionar problemas que implican el quitar, el comparar o el diferenciar. Es un proceso para determinar la diferencia entre dos cantidades, en donde el sustraendo es el que determina esta diferencia con el minuendo. La cantidad a sustraer se denomina sustraendo; la cantidad de la cual se sustrae se denomina minuendo. La sustracción cuenta con los siguientes elementos:

33-12=21; o bien:

$$\begin{array}{rcl} 33 & \longrightarrow & \text{minuendo} \\ -\ 12 & \longrightarrow & \text{sustraendo} \\ \hline 21 & \longrightarrow & \text{diferencia o resta} \end{array}$$

El signo menos (-), que significa la operación de la resta, funciona como transformador de dos conjuntos. Así, se espera que el niño interprete la sustracción como la acción de quitar.

> "... Aunque la sustracción puede significar quitar, también tiene otros significados que los niños deben aprender. La sustracción puede tener un significado comparativo; es decir, la diferencia de dos conjuntos. Por otra parte, esta operación puede relacionarse con la adición mediante un enfoque que destaque los sumandos ausentes o la sustracción aditiva. Así, el símbolo de la sustracción sólo debe denominarse menos (-) ..." (Baroody, 1988;p.153)

Esta forma de simbolización es la que no le permite al niño atender los procedimientos operatorios para resolver problemas, lo cual ejecuta de forma mecánica sin comprender las relaciones que existen en la operación (López, 1988; Vargas, y cols., 1988 y Velázquez, 1988).

Sin embargo, Baroody (1988) menciona que el niño inventa sus propios procedimientos para solucionar el algoritmo de la resta. En los procedimientos concretos se utilizan modelos físicos o concretos que representan directamente su concepto informal de la sustracción como "quitar algo", dentro del cual se encuentra el procedimiento extractivo (representa el minuendo, quita el número de elementos igual al sustraendo y cuenta los elementos restantes para determinar la respuesta). Cuando el niño está preparado abandona los procedimientos concretos en favor de procesos mentales, dentro de los cuales se encuentran los procedimientos: a) de cuenta progresiva, en donde parte del sustraendo y cuenta hacia adelante hasta llegar al minuendo, al tiempo que lleva la cuenta del número al pasar los dedos; b) de cuenta regresiva, expresa el minuendo, cuenta hacia atrás tantas unidades como indique el sustraendo y se dé el número contado como la respuesta.

Cuando el niño ingresa al sistema escolarizado ya puede realizar con precisión comparaciones entre números adyacentes; y al resolver el algoritmo de la resta continua usando sus procedimientos informales, pero con el paso del tiempo y de la experiencia escolar, se ve en la necesidad de utilizar el procedimiento convencional de la resta, ya que se le van presentando cifras mayores; aunque no deja de usar los procedimientos informales. La secuencia ordenada de instrucciones a realizar es una constante en las reglas operatorias que han existido. Las instrucciones formales que corresponden al método de solución de la sustracción son las siguientes:

1. Deben operarse entre sí las cifras de un mismo valor posicional; unidad con unidad, decena con decena, etc.
2. Deben sustraerse los valores del sustraendo con respecto a los valores del minuendo.
3. Se toma el dígito del primer orden del minuendo y de él se resta lo que indica el dígito de las unidades del sustraendo; si este último es menor o igual que el primero, la diferencia se registra en la columna de las unidades; sí esto no es así procede a la instrucción 4.
4. Si el dígito del sustraendo es mayor que el del minuendo, este último pide una unidad del orden inmediato superior (en este caso

decenas), para tener una cantidad mayor de unidades que el dígito del sustraendo.

5. Se obtiene la diferencia entre ambos valores y ésta se registra en la columna de las unidades.

6. Se continua con la columna siguiente (decenas), descontando en principio, del dígito del minuendo el valor que antes prestó y aplicando posteriormente las instrucciones 3 o bien 4 y 5 según proceda.

7. Se aplica la instrucción seis hasta terminar el proceso.

De esta manera el niño llega a un conocimiento formal de la resta y de una manera más sencilla y económica para solucionar problemas que se le presenten en su vida cotidiana.

# CAPÍTULO 3

## METODOLOGÍA

En este capítulo se presentará la metodología que se llevó a cabo para la exploración del razonamiento matemático intuitivo del niño escolarizado entre cinco y siete años de edad ante problemas aditivos cuya resolución implica la operación de la resta, en la cual se utilizó el método clínico de Jean Piaget. En este método el entrevistador

> "... plantea problemas, formula hipótesis, hace variar las condiciones del juego y por último controla cada una de sus hipótesis en contacto con las acciones provocadas por la conversación directa, pues el clínico se deja dirigir mientras dirige y toma en cuenta todo el contexto mental..." (Piaget, 1978, p.17).

Este método también es llamado método crítico por la

> "...sistemática controversia de las afirmaciones del sujeto, no para medir la solidez de sus convicciones, sino para captar su actitud lógica profunda, y, más que sus performances funcionales y sus creencias espontáneas, la estructura característica de cierto estadio de desarrollo..." (Vinh-Bang, 1966; p.73).

Para juzgar la lógica del niño, basta hablar con ellos con frecuencia, para juzgar sus creencias es necesario un método especial (Piaget, 1978). En esta investigación se utilizó el método crítico, porque es un método en donde no se pretende que haya una respuesta, sino hacer hablar libremente y descubrir las tendencias espontáneas; por lo que el desarrollo de los interrogatorios varia un poco según se trate de las respuestas que da el sujeto. De la misma manera, el experimentador continuamente hace hipótesis sobre los diversos significados cognoscitivos de las conductas observadas y las comprueba en la realidad a través de la conversación con el sujeto.

Para obtener los datos de la investigación primero se le presenta al sujeto una serie de pruebas organizadas, en este caso, problemas idénticos para todos los sujetos, propuestos en las mismas condiciones; así las respuestas son referidas a una escala, que permite compararlas cuantitativa y cualitativamente. Después se toma en cuenta la "observación pura" que consiste en "...partir de preguntas espontáneas formuladas por niños de la misma edad o más jóvenes, y aplicar la misma forma de estas preguntas a las que nos proponemos plantear a los niños que sirvan de sujetos..." (Piaget, 1978, p. 14). La observación pura muestra cuáles son las soluciones implícitas que los niños se dan, así como sus conductas motoras ante esas respuestas o explicaciones, por lo que dentro de la observación se conversa con el sujeto siguiéndolo en sus mismas respuestas de manera que no pierda nada de lo que pueda surgir en relación con sus ideas.

Para tener una mayor confiabilidad del método es necesario saber buscar algo preciso, tener un hipótesis de trabajo y alguna teoría que comprender; saber observar, dejar hablar al niño, no desviar nada, no hacer preguntas sugeridas; y, saber diferenciar las reacciones observables que se pueden presentar en los niños:

- *No importanquismo:* cuando la pregunta planteada disgusta al niño o de manera general no provoca ningún trabajo de adaptación y sólo contesta "no sé" o "no me acuerdo".

- *Fabulación:* sin reflexionar responde a preguntas inventando una historia en la que no cree, o no lo cree por puro impulso verbal.
- *Creencia sugerida:* el niño se esfuerza por encontrar la respuesta, pero está es sugestiva, ó responde sin recurrir a su propia reflexión.
- *Creencia disparada:* contesta con reflexión extrayendo la respuesta de su propio fondo, siendo la pregunta nueva para él.
- *Creencia espontánea:* no hay necesidad de razonar para contestar porque la pregunta no es nueva para él niño o la respuesta es fruto de una reflexión anterior y original.

### 3.1 Sujetos

La presente investigación se realizó en un jardín de niños y en una escuela primaria oficiales de la Secretaría de Educación Pública, ubicados en la Delegación Alvaro Obregón, debido a la facilidad para tener acceso a ellas. Los alumnos que asisten a estas instituciones son hijos de padres con bajo nivel socioeconómico.

Esta población se eligió porque en las escuelas oficiales, a comparación de las particulares, se presenta mayor índice de reprobación dentro del área de las matemáticas (Guevara, 1991). No obstante, los alumnos de bajos recursos económicos, por las condiciones en que viven, son los que más están en contacto con los problemas que involucran las operaciones aritméticas y los resuelven sin ayuda de nadie, guiados por su intuición, más que por la enseñanza formal.

Se entrevistó en total a 90 niños, 30 alumnos por cada grado escolar: preescolar, primero y segundo de primaria; mitad niños y mitad niñas.

El proceso de selección de la muestra fue aleatorio. Se respetó la edad establecida por la SEP en cada nivel escolar: cinco años en preescolar, seis en primero y siete en segundo de primaria. En ningún caso los sujetos fueron repetidores. Así, la muestra quedó integrada de la siguiente manera:

Tabla 1. Distribución de la muestra por grado escolar y género

| GÉNERO / ESCOLARIDAD | HOMBRES | MUJERES | TOTAL |
|---|---|---|---|
| PREESCOLAR | 15 | 15 | 30 |
| PRIMERO DE PRIMARIA | 15 | 15 | 30 |
| SEGUNDO DE PRIMARIA | 15 | 15 | 30 |
| TOTAL | 45 | 45 | 90 |

## 3.2 Instrumento

Para la obtención de datos se utilizó como instrumento un interrogatorio que consiste en presentarle al niño cuatro tarjetas que llevan impreso un problema diferente cada una; de acuerdo a la estructura semántica de Carpenter y Moser (1982) y Vergnaud (1991):

Tabla 2. Problemas de la situación experimental según el texto su clasificación y su representación

| PROBLEMAS | CLASIFICACIÓN Carpenter y Moser (1982) | CLASIFICACIÓN DE ACUERDO A VERGAUND (1991) | | |
|---|---|---|---|---|
| | | CATEGORIA | CLASE | REPRESENTACIÓN SAGITAL |
| 1)Juan tenía 9 dulces, le dio 5 a Pedro ¿Cuántos dulces le quedan ahora? | TRANSFORMACIÓN | 2a. | 2a. | $\boxed{9} \xrightarrow{-5} \boxed{X}$ |
| 2) Hay 9 dulces. 5 son de Pedro y el resto son de Juan ¿Cuántos son de Juan? | COMBINACIÓN | 1a. | 2a. | $\left.\begin{array}{l}\boxed{5}\\ \boxed{X}\end{array}\right\}\boxed{9}$ |
| 3)Juan tiene 9 dulces. Pedro tiene 5 menos que Juan ¿Cuántos dulces tiene Pedro? | COMPARACIÓN | 3a. | 2a. | $\boxed{9} \xrightarrow{-5} \boxed{X}$ |
| 4)Juan tiene 9 dulces. Pedro tiene 5 ¿Cuántos dulces debe comerse Juan para que tenga los mismos que Pedro? | IGUALACIÓN | 3a. | 1a. | $\boxed{9} \xrightarrow{X} \boxed{5}$ |

Se presentaron los mismos problemas a todos los sujetos de los tres grados escolares en iguales circunstancias; es decir, mismo espacio y misma representación de los problemas en los dos niveles. El entrevistador leyó el texto a cada alumno. Una vez que el niño comprendió el problema de cómo resolverlo se le hicieron preguntas de acuerdo al protocolo. El entrevistador aceptó las respuestas, no intervino en ellas, ni en las explicaciones sobre lo que es correcto o no.

Para facilitar la observación del proceso de resolución que el niño utilizó en el problema se proporcionó lápiz y papel.

### 3.3 Procedimiento

Antes de iniciar el interrogatorio y de presentar las tarjetas, se estableció una relación de confianza con el niño, a fin de evitar temores acerca de la aplicación; hicimos referencia de que la información proporcionada en la entrevista no tendría que ver con nada de las tareas escolares. Las preguntas se realizaron en base a las respuestas que el niño daba y con el vocabulario del mismo, así, el procedimiento fue estructurado de la siguiente forma:

1. INSTRUCCIONES: "Voy a presentarte unas tarjetas. Cada tarjeta tiene un problema, lo voy a leer; escucha con atención para que contestes mis preguntas. Sí tienes alguna duda, pregunta".
2. PRESENTACIÓN: La tarjeta se colocó sobre la mesa y el entrevistador la leyó.
3. PLANTEAMIENTO DE HIPÓTESIS: Se pidió al sujeto que mencionara lo qué había comprendido del problema: "¿puedes decirme de qué se trata el problema?" Había casos en el que no respondían, por lo que se leyó por segunda vez el problema.
4. ANTICIPACIÓN: Una vez que el niño explicó de lo que se trataba el problema se le preguntó "¿Qué haces para saber cuántos dulces le quedan ahora? (Se hace la pregunta de acuerdo al problema).
5. RESOLUCIÓN: El niño resolvió el problema con sus propios medios y en el protocolo se registraron todas las respuestas que el niño dio. (ver anexo 2).

6. JUSTIFICACIÓN: Una vez que el niño resolvió el problema se le pidió que explicara cómo lo había hecho: ¿Cómo supiste la respuesta?

7. REPRESENTACIÓN GRÁFICA: Para corroborar las respuestas se pidió al niño que expresara con lápiz y en papel la forma como resolvió el problema: "Eso que hiciste para resolver el problema, hazlo en este papel".

8. CONTRASUGERENCIA: Independientemente de que la respuesta fuera correcta o incorrecta, se le preguntó al niño: "Otro niño como tú me dijo que la respuesta es otra, ¿tú que le dirías a ese niño? ... ¿Cómo se lo explicarías?"

9. OBSERVACIONES: Se escriben las conductas motoras del niño.

Se repitió el mismo procedimiento para los problemas restantes.

A continuación se presentará un ejemplo del procedimiento que se siguió en la entrevista aplicada a cada niño de los tres grados escolares.

NOMBRE DE ALUMNO: Rosa
ESCUELA: Primaria Ricardo Gómez. FECHA: 140496
EDAD: 6 años 8 meses GRADO ESCOLAR: 1o.

| ENTREVISTADOR | NIÑO |
|---|---|
| 1.- INSTRUCCIONES<br>2.- Se lee el texto del problema:<br>4.- Juan tiene 9 dulces, Pedro tiene 5 ¿Cuántos debe comerse Juan para que tenga los mismo que Pedro? | |

3.- ¿Puedes decirme de qué se trata?

De que Juan y Pedro deben tener los mismos dulces.

4.- ¿Qué haces para saber cuántos dulces le quedaron? (Se hace la pregunta de acuerdo al problema)

Cuento con mis dedos

5.- Respuesta:

4

6.- ¿Cómo supiste la respuesta?

Puse así mis dedos, le quite estos 4 y ya tengo 5 como Pedro y entonces Juan se comió 4. *(cuenta con sus dedos para su explicación)*

7.- Eso que hiciste para saber la respuesta lo puedes hacer en esta hoja

*Primero dibuja 9 palitos, abajo de esos dibuja 5 en correspondencia uno a uno, y encierra con un círculo los 4 restantes, dice: "estos se debe comer Juan para que tenga los mismos que Pedro"*

/ / / / / / / / / → Estos se come Juan<br>
↓ ↓ ↓ ↓ ↓<br>
/ / / / /

8.- Otro niño como tú me me dijo que la respuesta es otra, ¿tú que le dirías? ¿cómo le explicarías tu respuesta?

que está mal, porque Juan se comió 4 y ya tienen iguales.

*Repite el procedimiento que hizo en la hoja*

9.- Observaciones:

La niña se muestra atenta a cada indicación y antes de dar alguna respuesta se queda pensando en la pregunta y ve sus manos, entonces utiliza sus dedos para contar y explica su procedimiento.

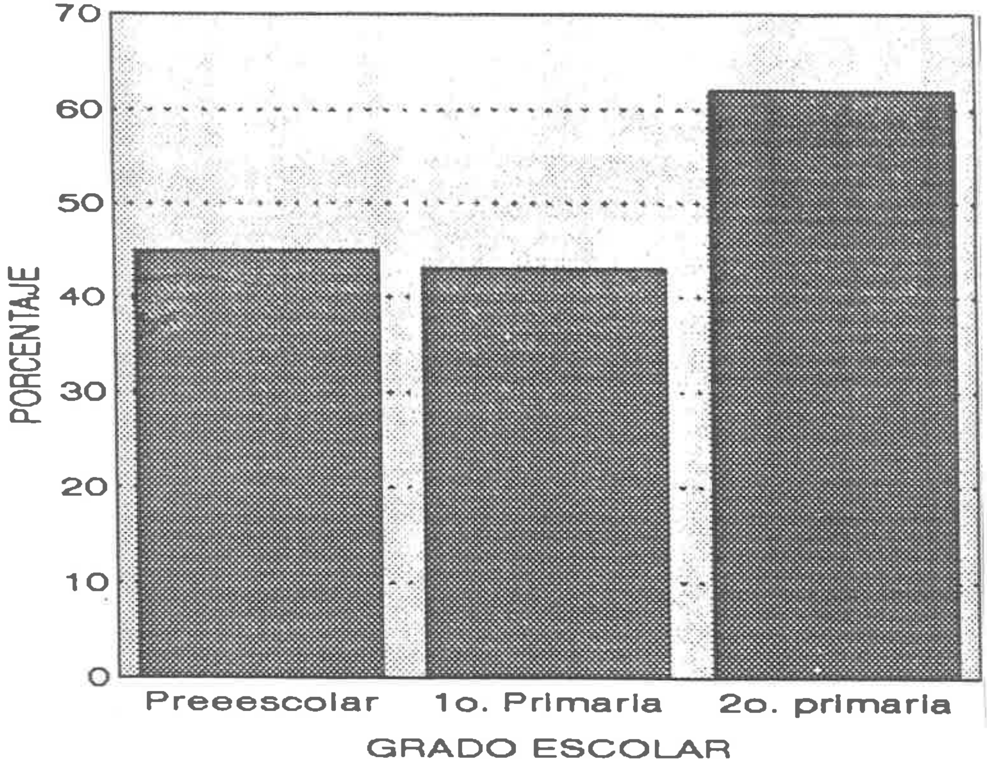
# C A P Í T U L O 4

## ANÁLISIS DE RESULTADOS

En el presente capítulo se muestra un análisis cuantitativo y cualitativo sobre los resultados obtenidos en esta investigación. En el primero se describen los procedimientos de respuestas correctas que se muestran en las gráficas 1, 2 y 3 de manera cuantitativa. Y en el segundo se hace un análisis cualitativo basado en la clasificación de los procedimientos más frecuentes en respuestas correctas e incorrectas que emplearon los niños para resolver los problemas aditivos mostrados en las tablas 4, 5, 6, 7 y 8.

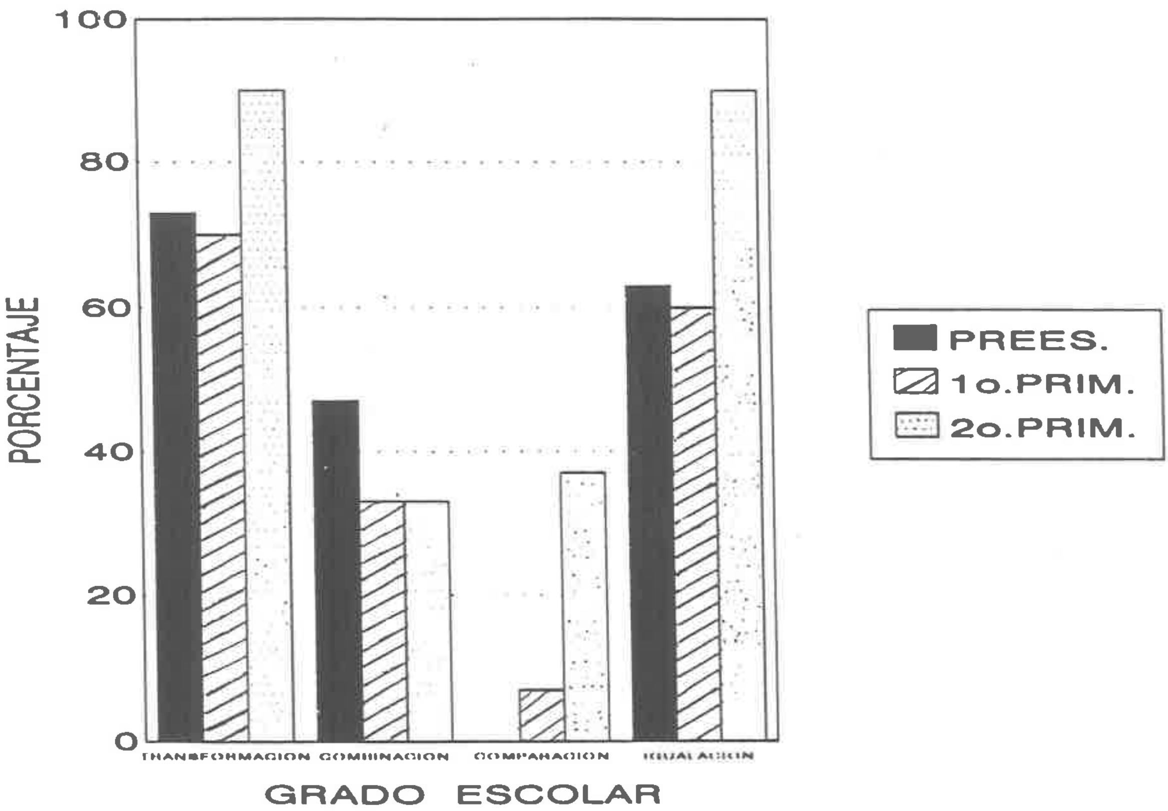
## 4.1 Análisis cuantitativo

Gráfica 1. Porcentaje de respuestas correctas en los tres grados escolares.




En la distribución de respuestas correctas de la gráfica 1 se observa el 43% de respuestas correctas en primer año de primaria, el 45% en preescolar y el 62% en segundo de primaria. El grado que obtuvo menos respuestas correctas fue el primero de primaria, y el que obtuvo mayores aciertos fue segundo de primaria. Entre preescolar y primero de primaria sólo hay una diferencia del 2% en respuestas correctas, pero entre primero y segundo hay una diferencia del 17%.

Gráfica 2. Distribución del porcentaje de respuestas correctas observadas en cada problema, por grado escolar




En la gráfica 2 se representa la distribución de porcentajes de respuestas correctas en cada problema por grado escolar y los datos más relevantes que se observaron fueron los siguientes:

En el primer problema (Transformación o Cambio) se pudo observar que no existe marcada diferencia en la cantidad de respuestas correctas entre los niños que cursan preescolar y primero de primaria, ya que los de preescolar obtuvieron el 73% de respuestas correctas, mientras que los de primero el 70%. En lo que respecta al segundo grado, sí hay diferencia con los grados anteriores porque presentan una mayor cantidad de respuestas correctas (90%). De está manera se puede decir que los niños con más tendencia a equivocarse son los de primer grado de primaria y los niños que menos se equivocan son los de segundo grado.

En el segundo problema (Combinación), los niños de preescolar obtuvieron mayor número de respuestas correctas (47%); le siguen los de primero (33%) al igual que los niños de segundo. Como se puede observar, la diferencia entre preescolar y segundo fue del 14%.

En lo que respecta al tercer problema (Comparación), los niños de segundo año fueron los que obtuvieron mayor porcentaje de respuestas correctas (37%); los niños de primero (7%); y los niños de preescolar no mostraron éxito alguno en este tipo de problema. Es evidente que en este problema existe diferencia en los porcentajes de respuestas positivas entre los tres grados escolares.

En el cuarto problema (Igualación), los niños con mayor porcentaje de respuestas correctas fueron los de segundo año, ya que obtuvieron un 90%; le siguen los de preescolar con 63% y, finalmente, los de primero, con un 60%. Por lo anterior, inferimos que entre preescolar y primero sólo hay una diferencia del 3%; en tanto que en primero y segundo hay una diferencia del 30%.

Tabla 3. Distribución de los porcentajes de acierto y error por género en los tres grados escolares:

| GENERO / PROBLEMAS | NIÑOS | | NIÑAS | | TOTAL |
|---|---|---|---|---|---|
| | ACIERTO % | ERROR % | ACIERTO % | ERROR % | % |
| 1 | 50 | 7 | 29 | 14 | 100 |
| 2 | 20 | 30 | 20 | 30 | 100 |
| 3 | 19 | 31 | 9 | 41 | 100 |
| 4 | 32 | 18 | 29 | 21 | 100 |

Refiriéndose al porcentaje de aciertos y errores, en cuanto a resultados, entre hombres y mujeres, en los tres grados escolares (Tabla 3) se observa que los niños se equivocan menos que las niñas.

En el problema que los niños y las niñas tienen menos errores es en el problema 1, que implica Cambio o Transformación. En el problema 3, de Comparación, los niños de ambos sexos presentan el mayor número de errores.

En general, se observa que los problemas 1, 2 y 4, de Cambio o Transformación, Combinación e Igualación, se facilitaron más para ambos sexos; pues para los niños hay porcentajes de 50, 20 y 32 y para las niñas 29, 20, 29 respectivamente. El problema que se sale del promedio es el tercero, que implica Comparación, ya que en éste los niños obtuvieron el 19% y las niñas el 9% de respuestas correctas.

El problema 1 que implica Cambio o Transformación, se presenta una diferencia de 21% de aciertos entre niños y niñas; mientras que en el segundo, los porcentajes de aciertos y errores son iguales para los niños y las niñas. En el tercer problema se encontró nuevamente que los niños tienen menos errores que las niñas, pero sólo hay una diferencia del 10%. En lo que se refiere al cuarto problema no se observa gran diferencia entre niños y niñas, ya que sólo hay una diferencia de 3%; no obstante, los niños son quienes obtienen mayor éxito.

En general, los niños son los que tienden menos a equivocarse.

**4.2 Análisis cualitativo**

En las siguientes tablas se representa la distribución de procedimientos que emplearon los niños en cada problema por grado escolar para resolver los problemas aditivos. La clasificación de los procedimientos de solución se basa en las investigaciones de Carpenter y Moser (1982), De Corte y Vershaffell (1984), Vergnaud (1991) y Avilés y Lira (1993) mencionadas en el marco teórico.

La clasificación de los procedimientos se llevó a cabo por medio de una compilación de investigaciones arriba mencionadas, ya que se complementan unas y otras; por ejemplo: el procedimiento Diferencia (Vergnaud, 1991) puede ser más específico al dividirlo en "separar de" y "separar hasta", los dos son una diferencia, pero el procedimiento no es el mismo. Algunos autores repiten procedimientos de otros, tal es el caso de Avilés y Lira (1993), quienes se basan en la clasificación de De Corte y Vershaffel (1984) y éstos, a su vez, en la de Carpenter y Moser (1982). Por otra parte, nosotros encontramos dos procedimientos que no caben dentro del "no identificado" y "sin respuesta" pero no dan más explicaciones, sólo dicen "son poquitos" o inventan una historia. La clasificación de los procedimientos que se utilizó se observa en las tablas número 4 y 5:

Tabla 4. Clasificación de procedimientos de resolución de problemas aditivos que llevan a respuestas correctas.

| ESTRATEGIAS | PROCEDIMIENTOS | DESCRIPCIÓN |
|---|---|---|
| CONCRETAS | SEPARAR DE | Se representa la cantidad mayor y se van separando los elementos hasta que queda el número representado por el conjunto menor. La respuesta es el conjunto que queda. |
| | SEPARAR HASTA | Los objetos se van quitando de uno en uno hasta tener el número menor que pide el problema, luego se cuenta el número de objetos que se separaron. |
| | EMPAREJAMIENTO | Los dos conjuntos se ponen en correspondencia uno a uno determinando el exceso del conjunto más grande sobre el número más pequeño, se obtiene la solución al problema de sustracción ya sea quitando o poniendo. |
| | CONSTRUIR UN CONJUNTO CON EL NUMERO MAS PEQUEÑO Y AGREGAR ELEMENTOS HASTA LLEGAR AL MAS GRANDE | Se toma la cantidad pequeña y se van agregando elementos hasta llegar a la cantidad mayor. |
| VERBALES | CONTEO HACIA ADELANTE | Cuenta a partir del número más pequeño dado hasta alcanzar el número mayor; al contrario, la cantidad de números que ha emitido obtendrá la respuesta deseada. |
| | CONTEO HACIA ATRÁS | Cuenta hacia atrás hasta el número menor contando los números emitidos durante el conteo hacia atrás. |
| | CONTEO HACIA ATRÁS A PARTIR DE | Cuenta hacia atrás a partir del número mayor dado, teniendo como respuesta el último dígito |
| MENTALES | HECHO CONOCIDO | Se basa en un hecho numérico conocido, lo que permite encontrar la respuesta. |
| | HECHO DERIVADO | deriva de un hecho numérico conocido, lo que permite encontrar la respuesta añadiendo siempre uno más. |

Tabla 5. Clasificación de procedimientos de resolución de problemas aditivos que llevan a respuestas incorrectas.

| | PROCEDIMIENTOS | DESCRIPCIÓN |
|---|---|---|
| *EN ESTE TIPO DE PROCEDIMIENTOS NO EXISTE DIVISIÓN DE ESTRATEGIAS | RELACIÓN INCOORDINADA DE DATOS | Son los primeros procesos para establecer una relación cuantitativa. Se sabe que se tiene que hacer algo pero no se sabe qué, después relaciona incoordinadamente los datos a través de suma, resta, multiplicación o división; persistiendo en la primera. |
| | RETOMA DE DATOS | Se otorga el valor de uno de los datos a la incógnita; se considera un procedimiento erróneo. |
| | NO IDENTIFICADO | Se dispone sólo del resultado, sin operaciones, justificaciones o explicaciones. |
| | SIN RESPUESTA | Se limita a responder "no se", "no entiendo", "nada". |
| | HISTORIA O FANTASÍA | Construye una historia para evadir la respuesta, como "tiene que comer más" o "que vaya a la tienda a comprar más", entre otras. |
| | SON POQUITOS | tiene la noción de más y menos, pero no sabe cómo obtener la respuesta. |

Tabla 6. Distribución de los porcentajes de respuestas correctas en los procedimientos observados en los tres grados escolares.

| ESCOLARIDAD | PREESCOLAR | | | | PRIMERO | | | | SEGUNDO | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| PROBLEMA / PROCEDIMIENTO | 1 % | 2 % | 3 % | 4 % | 1 % | 2 % | 3 % | 4 % | 1 % | 2 % | 3 % | 4 % |
| SEPARAR DE | 66 | 44 | | 53 | 27 | 10 | 4 | 23 | 20 | 7 | 7 | 7 |
| SEPARAR HASTA | | | | | 20 | 7 | | 14 | 40 | 7 | 13 | 20 |
| EMPAREJAMIENTO | | | | 36 * | | | | | | | | |
| CONSTRUIR UN CONJUNTO CON EL NúMERO MAS PEQUEÑO Y AGREGAR ELEMENTOS HASTA LLEGAR AL MAS GRANDE | | 3 | | 10 | 7 | 3 | | 7 | | | 3 | 7 |
| CONTEO HACIA ADELANTE | | | | | 3 | 3 | | 3 | 3 | 3 | 7 | 10 |
| CONTEO HACIA ATRÁS | | | | | | | | | | | | 13 |
| CONTEO HACIA ATRÁS A PARTIR DE | | | | | | | | | | 6 | | |
| HECHO DERIVADO | | | | | | | | | | | 7 | 20 |
| HECHO CONOCIDO | 7 | | | | 13 | 10 | 3 | 10 | 24 | 10 | | 13 |
| RELACIóN INCORDINADA DE DATOS | | | | | | | | 3 | | | | |
| HISTORIA O FANTASíA | | | | | | | | | 3 | | | |
| TOTAL | 73 | 47 | 0 | 63 | 70 | 33 | 7 | 60 | 90 | 33 | 37 | 90 |

* De los datos de preescolar, el 53% resolvió el problema 4 con el procedimiento "separar de" en la categoría concreta, pero en la representación gráfica, el 36% reafirmó su respuesta con el procedimiento de "emparejamiento". Ese 36% no se incluye en el porcentaje total pero se tomará en cuenta en el análisis cualitativo de la investigación (único caso).

En la tabla 6 se observa que en el problema uno, los niños de primero y segundo utilizaron una mayor diversidad de procedimientos para resolver los problemas. Los niños de primero emplearon:

- Separar de 27%;
- Separar hasta 20%;
- Construir un conjunto con el número más pequeño y agregar elementos hasta llegar al más grande 7%;
- Conteo hacia adelante 3%;
- Hecho conocido 13%.

Los niños de segundo emplearon:

- Separa de 20%;
- Separar hasta 40%;
- Conteo hacia adelante 3%;
- Hecho conocido 24%;
- Fantasía o Historia 3%.

En los niños de preescolar hubo menos cantidad de procedimientos empleados, pues sólo se observaron dos:

- Separar de 66%;
- Hecho conocido 7%.

En el segundo problema, se observa que los niños de primero y segundo emplearon la misma variedad de procedimientos que lleva a respuestas correctas, los cuales fueron, en primer año:

- Separa de 10%;
- Separar hasta 7%;

- Construir un conjunto con el número
más pequeño y agregar elementos hasta
llegar al más grande 3%;
- Conteo hacia adelante 3%;
- Hecho conocido 10%;

en segundo año:

- Separar de 7%;
- Separar hasta 7%;
- Conteo hacia adelante 3%;
- Hecho conocido 10%;
- Conteo hacia atrás a partir de 6%.

Con lo que respecta a preescolar, se observa que en este problema fueron los que obtuvieron un mayor número de respuestas correctas pero también presentaron menos procedimientos que llevan a respuestas correctas:

- Separar de 44%;
- Construir un conjunto con el número
más pequeño y agregar elementos hasta
llegar al más grande 3%.

Por lo que se refiere al problema 3, se observó que los niños de segundo grado emplearon mayor variedad de procedimientos al resolver los problemas:

- Separar de 7%;
- Separar hasta 13%;

- Construir un conjunto con el número más pequeño y agregar elementos hasta llegar al más grande 3%;
- Conteo hacia adelante 7%;
- Hecho derivado 7%.

Después le siguieron los de primer año con los procedimientos:

- Separar de 4%;
- Hecho conocido 3%.

Los niños de preescolar no obtuvieron respuestas correctas en el tercer problema.

En el cuarto problema los niños de segundo grado presentaron mayor variedad de procedimientos cuando las respuestas fueron correctas:

- Separar de 7%;
- Separar hasta 20%;
- Construir un conjunto con el número más pequeño y agregar elementos hasta llegar al más grande 7%;
- Conteo hacia adelante 10%;
- Contar hacia atrás 13%;
- Hecho derivado 20%;
- Hecho conocido 13%.

Le siguieron los niños de primero:

- Separar de 23%;
- Separar hasta 14%;

- Construir un conjunto con el número más pequeño y agregar elementos hasta llegar al más grande 7%;
- Conteo hacia adelante 3%;
- Hecho conocido 10%;
- Relación incordinada de datos 3%;

Por último, los niños de preescolar emplearon sólo dos procedimientos en su respuesta verbal:

- Separar de 53%;
- Construir un conjunto con el número más pequeño y agregar elementos hasta llegar al más grande 10%;

Pero en su respuesta gráfica el 36% de los niños utilizaron otro procedimiento, "emparejamiento".

Tabla 7. Distribución de porcentajes de respuestas incorrectas en los procedimientos observados en los tres grados escolares.

| ESCOLARIDAD | PREESCOLAR | | | | PRIMERO | | | | SEGUNDO | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| PROBLEMA / PROCEDIMIENTO | 1 % | 2 % | 3 % | 4 % | 1 % | 2 % | 3 % | 4 % | 1 % | 2 % | 3 % | 4 % |
| SEPARAR DE | | | | 3 | 7 | | | | | | 10 | |
| SEPARAR HASTA | 3 | 3 | | | | 4 | 7 | 4 | 3 | 10 | | |
| EMPAREJAMIENTO | | | | | | | | 7 | | | | |
| CONSTRUIR UN CONJUNTO CON EL NúMERO MAS PEQUEÑO Y AGREGAR ELEMENTOS HASTA LLEGAR AL MAS GRANDE | | | | | | | 3 | | | | | |
| CONTEO HACIA ADELANTE | | | | | | 3 | 3 | 4 | | | | |
| CONTEO HACIA ATRÁS A PARTIR DE | | | | | | | | | | | 3 | |
| HECHO DERIVADO | | 3 | 3 | | | | | | | 3 | | |
| RELACIÓN INCORDINADA DE DATOS | | 3 | 3 | 10 | | | 3 | 3 | 7 | 7 | | |
| RETOMA DE DATOS | 10 | 34 | 73 | 14 | 16 | 53 | 67 | 16 | | 37 | 44 | 10 |
| NO IDENTIFICADO | 3 | 4 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 3 | | 7 | 6 | |
| SIN RESPUESTA | 3 | | 3 | | | | | | | | | |
| HISTORIA O FANTASíA | 4 | 3 | 7 | 3 | | | | 3 | | 3 | | |
| POQUITOS | 4 | 3 | 4 | | | | 3 | | | | | |
| TOTAL | 27 | 53 | 100 | 37 | 30 | 67 | 93 | 40 | 10 | 67 | 63 | 10 |

La Tabla 7 muestra que en el primer problema los niños de preescolar utilizaron más variedad de procedimientos que llevan a respuestas erróneas:

- Separar hasta 3%;
- Retoma de datos 10%;
- No identificado 3%;
- Sin respuestas 3%;
- Historia o fantasía 4%;
- Son poquitos 4%.

Aunque los de primero tuvieron mayor número de respuestas incorrectas con respecto a preescolar, mostraron menor número de procedimientos que llevan a respuestas incorrectas:

- Separar de 7%;
- Retoma de datos 16%;
- No identificado 7%.

Los niños de segundo tienden a equivocarse menos y sólo emplearon un procedimiento que lleva a respuestas erróneas (Relación incordinada de datos) y uno (separar de) que aunque lleva respuestas correctas no acertaron:

- Separar hasta 3%;
- Relación Incordinada de Datos 7%.

Con lo que respecta al segundo problema, se observa que los niños de preescolar, cuantitativamente tienden menos a equivocarse que los niños de primero, pero cualitativamente muestran mayor variedad de procedimientos que llevan a respuestas incorrectas:

| | |
|---|---|
| - Separar hasta | 3%; |
| - Hecho derivado | 3%; |
| - Relación Incordinada de Datos | 3%; |
| - Retoma de datos | 34%; |
| - No identificado | 4%; |
| - Historia o fantasía | 3%; |
| - Son poquitos | 3%. |

En segundo y primero, cuantitativamente mostraron igual porcentaje de respuestas correctas, pero se observó diferencia en los procedimientos que utilizaron entre un grado y otro; es decir, los de segundo utilizaron:

| | |
|---|---|
| - Separar hasta | 10%; |
| - Hecho derivado | 3%; |
| - Relación Incordinada de datos | 7%; |
| - Retoma de Datos | 37%; |
| - No identificado | 7%; |
| - Historia o fantasía | 3%. |

Mientras que los de primero:

| | |
|---|---|
| - Separar hasta | 4%; |
| - Conteo hacia adelante | 3%; |

- Retoma de datos 53%;
- No identificado 7%.

En el tercer problema, los niños de preescolar no obtuvieron respuestas correctas; hubo un mayor número de procedimientos que llevan a respuestas incorrectas:

- Hecho derivado 3%;
- Relación Incordinada de Datos 3%;
- Retoma de Datos 73%;
- No identificado 7%;
- Sin respuesta 3%;
- Historia o fantasía 7%;
- Son poquitos 4%.

Después le siguen los niños de primero que obtuvieron menos errores que preescolar, pero más que segundo grado, aunque fueron los que utilizaron más procedimientos que llevan a respuesta correctas:

- Separar hasta 7%;
- Construir un conjunto con el número más pequeño y agregar elementos hasta llegar al más grande 3%;
- Conteo hacia adelante 3%;
- Relación Incordinada de datos 3%;

- Retoma de datos 67%;
- No identificado 7%;
- Son poquitos 3%.

En los niños de segundo hay menos variedad de procedimientos en respuestas incorrectas y fue en donde se observó mayor éxito:

- Separar de 10%;
- Contar hacia atrás a partir de 3%;
- Retoma de datos 44%;
- No identificado 6%

En el cuarto problema, los niños de primer grado fueron los que presentaron mayor variedad de procedimientos que llevan a respuestas correctas, pero fue en donde se observó mayor fracaso con respecto a preescolar:

- Separar hasta 4%;
- Emparejamiento 7%;
- Conteo hacia adelante 4%;
- Relación incordinada de datos 3%;
- Retoma de datos 16%;
- No identificado 3%;
- Historia o fantasía 3%.

La mayoría de los procedimientos que utilizaron los niños de preescolar llevaban a respuestas equivocadas, aunque obtuvieron mayor acierto que los niños de primero:

- Separar de 3%;
- Relación Incordinada de datos 10%;

- Retoma de datos 14%;
- No Identificado 7%.

Por último, los niños de segundo años fueron quienes obtuvieron menos respuestas incorrectas, y presentaron solamente un procedimiento que lleva a respuestas incorrectas:

- Retoma de datos 10%.

Tabla 8. Distribución de porcentajes de procedimientos utilizados en los cuatro problemas por los tres grados escolares.

| PROBLEMA / PROCEDIMIENTO | 1 % | 2 % | 3 % | 4 % |
|---|---|---|---|---|
| SEPARAR DE | 40 | 20 | 7 | 29 |
| SEPARAR HASTA | 22 | 10 | 6 | 12 |
| EMPAREJAMIENTO | | | | 2 |
| CONSTRUIR UN CONJUNTO CON EL NUMERO MAS PEQUEÑO Y AGREGAR ELEMENTOS HASTA LLEGAR AL MAS GRANDE | 3 | 2 | 2 | 8 |
| CONTEO HACIA ADELANTE | 2 | 3 | 3 | 6 |
| CONTAR HACIA ATRÁS | | | | 4 |
| CONTAR HACIA ATRÁS A PARTIR DE | | 3 | 1 | |
| HECHO DERIVADO | | 2 | 4 | 7 |
| HECHO CONOCIDO | 15 | 7 | 1 | 8 |
| RELACIÓN INCORDINADA DE DATOS | 2 | 3 | 3 | 6 |
| RETOMA DE DATOS | 9 | 41 | 61 | 13 |
| NO IDENTIFICADO | 4 | 6 | 7 | 3 |
| SIN RESPUESTA | 1 | | 1 | |
| HISTORIA O FANTASÍA | 1 | 2 | 2 | 2 |
| POQUITOS | 1 | 1 | 2 | |
| TOTAL | 100 | 100 | 100 | 100 |

En la tabla 8 se observa que los procedimientos más utilizados por todos los niños son "separar de" y "separar hasta" , después le siguieron "construir un conjunto con el número más pequeño y agregar elementos hasta llegar al más grande", "conteo hacia delante" y "hecho derivado", en respuestas correctas, por lo que se puede decir que los tres grados responden desde un nivel de pensamiento concreto, pues para resolver los problemas la mayoría de los niños utilizaron sus dedos, lo que indica estrategias concretas, después utilizaron las estrategias mentales con el procedimiento "hecho conocido" y por último las verbales.

En el problema donde hubo mayor número de respuestas correctas, Cambio o Transformación, se utilizó con más frecuencia el procedimientos "separar de" y "separar hasta". En los problemas donde hubo mayor número de errores se utilizaron los mismos procedimientos, pero además presentaron más procedimientos pertenecientes a la categoría de estrategias mentales y verbales, como son: "conteo hacia adelante", "contar hacia atrás a partir de", "hecho derivado" y "hecho conocido".

El procedimiento que más se utilizó cuando las respuestas fueron incorrectas fue el de "retoma de datos", con un porcentaje de 9% en el primer problema, 41% en el segundo, 61% en el tercero y 13 % en el cuarto problema.

El problema donde se presentó una mayor diversidad de procedimientos con respuestas correctas fue el que implica Igualación y Combinación, mientras que el problema de Transformación o Cambio, en el cual se obtuvo mayor éxito en los tres grados escolares, fue en el que hubo menos variedad de procedimientos.

Por los datos anteriores observamos que cuantitativamente los niños de preescolar y segundo de primaria obtuvieron más aciertos, con respecto a los de primero, es decir, el resultado de la mayoría de los niños de ambos grados fue correcto. Esto se puede explicar porque el niño de preescolar, a pesar de que empieza su formación escolarizada y todavía no cuenta con el conocimiento del algoritmo, busca la manera de resolver el problema empleando su conocimiento informal, lo que le lleva a presentar menos confusión en el uso de los procedimientos. Mientras que los niños de segundo llevan más tiempo en su vida académica, ya saben el algoritmo y por tanto utilizan más procedimientos formales que informales.

Sin embargo, cualitativamente, no sucedió lo mismo con los niños de primer año porque al dar más resultados erróneos presentaron mayor número de procedimientos. Esto se puede explicar porque los niños de primero se encuentran en una etapa de transición en donde inicia la enseñanza del algoritmo y al resolver los problemas se observa una combinación de los procedimientos tanto formales como informales, lo que provoca confusión.

Así también podemos mencionar que de acuerdo al grado escolar es el nivel de evolución del niño al igual que el uso de las estrategias y procedimientos, ya que los niños de preescolar para resolver los problemas verbales utilizan más las estrategias concretas, los de primero se basó más en las estrategias verbales, aunque también en las concretas y mentales; y, los de segundo las estrategias mentales, en donde evocan hechos conocidos.

Con los que respecta a los problemas y su estructura semántica, diremos que cada uno tiene su grado de complejidad, pues las estructuras semánticas también se van desarrollando progresivamente en el niño, es decir, que se adquiere primero la noción de cambio o transformación, luego la de igualación, posteriormente la de combinación, y por último la de comparación. Es por ello que el problema de Igualación fue más fácil de resolver para todos, a diferencia del de Combinación y Comparación.

# CAPÍTULO 5

## DISCUSIÓN DE RESULTADOS

A continuación se explican los datos descritos anteriormente con base en las investigaciones realizadas por Carpenter y Moser (1982), De Corte y Vershaffel (1984), Vargas y cols. (1988) y Avilés y Lira (1993), con el fin de comparar los resultados obtenidos en este trabajo, posteriormente, se hablará del alcance de los objetivos y las evidencias que se aportan al conocimiento intuitivo o informal con respecto a la operación de la resta.

De acuerdo a la descripción de las tablas 6 y 7, sobre los procedimientos que emplearon los niños de los diferentes grados para resolver cada uno de los problemas que se les presentó, observamos que existe una relación entre la dificultad de los problemas, las cantidades implicadas y la ubicación de la incógnita.

El problema que se facilitó más y por tanto obtuvo mayor cantidad de respuestas correctas en los tres grados escolares fue el de Cambio o Transformación (se aplica una transformación directa a un estado inicial); le siguió el problema que implica Igualación (incrementar o decrementar el conjunto inicial para igualar los dos conjuntos). Creemos que la estructura gramatical y el orden de los enunciados ejercen efectos favorables para facilitar su resolución, pues el efecto de la palabra "dio" en el problema de Transformación y de las palabras "comer" y "mismos" en el de Igualación sugieren la operación. La resolución comienza con la construcción de una representación interna de las relaciones entre las cantidades conocidas y la desconocida, así, se reúnen dos conjuntos y se busca la diferencia (Greeno, Heller y Riley, 1978; Carpenter y Moser, 1982; De Corte y Vershaffell, 1984; Baroody, 1988; Bebout, 1983; Vargas, et. al, 1988; y Avilés y Lira, 1993).

Los procedimientos que se emplearon con mayor frecuencia en los tres grados escolares cuando las respuestas fueron correctas son: "separar de" y "separar hasta", que pertenecen a la categoría concreta (Tabla 8); le siguió el procedimiento "hecho conocido", que se ubica en la categoría mental; finalmente, en la categoría verbal, se emplearon con mayor frecuencia el procedimiento "construir un conjunto con el número más pequeño y agregar elementos hasta llegar al más grande".

Los problemas que tuvieron mayor dificultad para los niños de los tres grados fue el de Combinación (ninguna cantidad se modifica, la incógnita se crea de dos cantidades dadas) y el de Comparación (una cantidad de los conjuntos esta separada de las otras dos, es la diferencia de las dos cantidades). Carpenter y Moser (1982) señalan que los problemas de Combinación y Comparación son difíciles de resolver por su estructura semántica. En el problema de Comparación una relación reúne dos medidas, se conoce el Estado Inicial y la Transformación, para buscar el Estado Final. Mientras que en el problema de Combinación se conoce la composición y una de las partes para encontrar la otra.

Para estos problemas, el procedimiento que se empleó con mayor frecuencia en los tres grados escolares fue la "retoma de datos". En esto coincidimos con Vargas y cols. (1988), pues ellos observaron que en los primeros grados se presenta con mayor incidencia el retomar la respuesta de los datos dados en el texto del problema cuando éste no ha sido comprendido. La respuesta no implica razonamiento sobre la operación de las cantidades, ni la comprensión de la estructura matemática del problema.

De manera específica en los problemas que se presentaron en los tres grados escolares existe clara diferencia en la forma de resolverlos, lo cual analizaremos a continuación:

Los niños de preescolar sólo tuvieron respuestas correctas en tres problemas: Cambio o Transformación, Igualación y Combinación; para resolverlos, en la mayoría de los casos, se auxiliaron de sus dedos para contar.

En el primer problema (Cambio o Transformación), los niños de preescolar obtuvieron mayor éxito y emplearon sólo dos procedimientos: "separar de", con mayor frecuencia a diferencia de los otros grados; y el procedimiento "hecho conocido", con menor frecuencia en comparación con los otros grados. Sin embargo, al representar gráficamente sus respuestas los niños fueron creativos e imaginativos, pues realizaron dibujos e historias.

Algunos ejemplos de las respuestas correctas en el nivel preescolar, correspondientes al primer problema, son los siguientes:

- 00000/0000
Estos le dio a Pedro /Estos le sobraron

En esta misma forma también dibujaron palitos, dulces y números; aunque la serie numérica fue incorrecta.

- / / / / / / / / /    ____________ son de Juan

  / / / / /    ____________ le da a Pedro

  / / / /    ____________ estos le sobran

- $\underbrace{1\ 2\ 3\ 4\ 5}_{\text{"le dio 5 a Pedro"}}$ $\underbrace{E\ G\ 8\ P}_{\text{"estos le sobran"}}$

- θ θ θ θ θ O O O O
  Le da a Pedro

- Dibujan una mano completa y sólo cuatro dedos de la otra, separan con una línea los primeros cinco dedos y con otra línea los que restan.

- A E i e L    Para el niño estas letras significan el procedimiento que utilizaron.

- o o o o o o o o o    Para el niño representa la cantidad de dulces que tienen Juan y Pedro.
  Juan

  o o o o o
  Pedro

Mientras que cuando las respuestas fueron incorrectas:

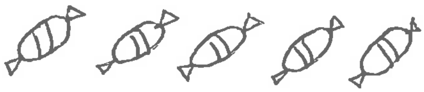
- 

"Bien poquitos"

- O e i A P

-Juan tiene 9 dulces

-/ / / / / / / / / 

-

En el problema de Igualación los niños preescolares también tuvieron éxito, aunque en menor cantidad que en el anterior. En este problema los niños de preescolar emplearon dos procedimientos para resolverlo: "separar de" y "construir un conjunto con el número más pequeño y agregar elementos hasta llegar al más grande", ambos de la categoría concreta, en la cual el primero y el segundo se presentan con mayor frecuencia que en los otros dos grados.

En la representación gráfica, la mayoría de los niños preescolares utilizaron el procedimiento de "emparejamiento" (implica igualar la cantidad menor al número mayor de la resta) ubicado en la categoría concreta. Ellos fueron los únicos que emplearon este procedimiento en el problema de Igualación en la representación gráfica. En la respuesta verbal utilizaron el procedimiento "separar de" y "construir un conjunto con el número más pequeño y agregar hasta llegar al más grande" y en la respuesta gráfica reafirmaron su resultado con el procedimiento de "emparejamiento".

Consideramos que esto ocurre porque el pensamiento del niño preescolar es concreto. Por ello, es más fácil representar gráficamente el procedimiento de "emparejamiento" que está dentro de la categoría concreta al utilizar objetos (Maza, 1989). Porque en éste procedimiento se utilizan objetos con los cuales las cantidades se van igualando hasta llegar al número deseado, o cada objeto de un conjunto corresponde a otro de forma biunívoca y los que se quedan solos es la respuesta.

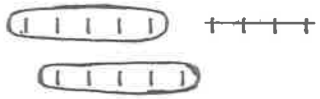
Los ejemplos más frecuentes en preescolar para el problema de Igualación son:

- I I I I I (I I I I) "Estos se comió Juan, ya tiene iguales"
  I I I I I "Estos tiene Pedro"

- O O O O O [O O O O] "Estos se come Juan"
  O O O O O
  Pedro

- O O O O O ~~O O O O O~~ "Se tiene que comer estos Juan"
  O O O O O
  Pedro

-  "Estos se come Juan"
  Pedro

-  "Se debecomerJuanparaquetenganiguales"

Pedro

-  "Se tiene que comer Juan"

Pedro

- O O O O O ~~O O O O~~ "Se come Juan"

O O O O O

Pedro

- 4 A 2 i g    Para el niño estos símbolos representan su respuesta.

Algunas de las representaciones gráficas cuando las respuestas fueron incorrectas en los niños de preescolar del problema de igualación son:

- o o o o o o o o o o o o o o o o

o o o o o o o o o o o o o o o o o o

- Dibujaron dos manos completas y cuatro dedos de otra mano.

- 

En el problema de Combinación también obtuvieron éxito, aunque en menor cantidad que los dos problemas anteriores, pero mayor que los otros dos grados. En este tipo de problema también se observó dos tipos de procedimientos: "separar de" y "construir un conjunto con el número más pequeño y agregar elementos hasta llegar al más grande" (ambas de la categoría concreta). Sólo fue en el problema de Combinación donde preescolar superó a segundo grado. En este problema los niños reafirmaron gráficamente sus respuestas de la siguiente manera:

- 0 0 0 0 0 0 0 0 0 "Estos son de Juan"

  Pedro

- / / / / / / / / / /

  Pedro Juan

- I I I I I I I I I Juan

  Pedro

- 

  Pedro Juan

- Dibujaron una mano, (dijeron) "estos son de Pedro"

  luego sólo 4 dedos (dijeron) "estos son de Juan"

Cuando las respuestas fueron incorrectas, ellos representaron gráficamente lo siguiente:

- Escriben "el resto"

| | |
|---|---|
| - 0 0 0 0 0 0 0 0 0<br>"Son de Juan"<br>0 0 0 0 0<br>"Son de Pedro" | Para el niño representan la cantidad<br>dulces de Juan y de Pedro. |

En el problema de Comparación, los niños de preescolar no obtuvieron éxito alguno. El hecho de que este problema se haya dificultado más para los tres grados, y principalmente para los niños de preescolar, se debe a que su estructura semántica y el orden gramatical en que está escrito el enunciado es más abstracto que lo otros, por lo que se presta a confusión.

Vergnaud (1991), en concordancia con Carpenter y Moser (1982) y de De Corte y Verchaffel (1984), menciona que la complejidad de los problemas está no sólo en la diferentes categorías de relación numérica, sino también en función de las diferentes clases de problemas que se pueden plantear para cada categoría.

En este problema los niños preescolares presentaron mayor diversidad de procedimientos incorrectos en comparación con los otros grados; los más relevantes, aparte del de "retoma de datos", fueron: "no identificado", "historia o fantasía" y "relación incoordinada de datos".

La representación gráfica de respuestas incorrectas del problema de Comparación, es la siguiente:

RETOMA DE DATOS:

- O O O O O    Pedro tiene 5    "porque aquí dice" (señalan el número 5 que está en el texto)

- 1 1 1 1 1    "Pedro tiene 5"

-  "Pedro tiene 5"

- 1 2 3 4 5    "Pedro tiene 5"

- dibujan una mano. 
- 5

Como se puede observar, los menores poseen un sentido del número que han desarrollado a partir de necesidades prácticas y experiencias concretas. Como menciona Baroody (1988), el conocimiento se va haciendo más preciso y abstracto durante la formalización de las matemáticas en la escuela. Por lo tanto, los niños de preescolar emplean con mayor frecuencia su conocimiento intuitivo, limitado e impreciso, lo cual es importante que identifiquen porque les servirá para adquirir el conocimiento formal basado en símbolos abstractos.

En 1983, Carpenter y Moser observaron que los niños pequeños emplearon la estrategia básica que involucra directamente el uso de objetos materiales, ya sean dedos u objetos físicos. Ellos encontraron los siguientes procedimientos: "emparejamiento", "añadir a", "separar de", "separar hasta", "contar a partir de lo dado", "contar hacia atrás" y "hecho conocido", de los cuales los más frecuentes en relación con la resta fueron: "separar de" y "emparejamiento".

El estudio de De Corte y Vershaffel (1984) corrobora, en gran medida, las aportaciones de Carpenter y Moser (1983), quienes también encontraron que los niños en edades tempranas pueden resolver problemas contando con los dedos u objetos físicos y que las estrategias más frecuentes son: "separar de", "separar hasta" y "emparejamiento". Los resultados de la presente investigación son similares a los encontrados por Carpenter y Moser (1982) y De Corte y Vershaffel (1984).

Observamos que los niños preescolares son capaces de representar gráficamente diversas formas de resolución de los problemas aditivos que implican la resta, como los que se mostraron anteriormente. Además, como ellos no están influidos por los símbolos abstractos del algoritmo de la resta, ni sienten la presión de que el maestro regularmente no les permite contar con los dedos, con mayor seguridad resuelven abiertamente los problemas auxiliándose con los dedos. Esto hace que tengan menos errores en problemas sencillos, a diferencia de los niños de primero y segundo, en los que el empleo del algoritmo no comprendido les hace equivocarse con frecuencia (Tablas 6 y 7).

López (1988) llega a la conclusión de que los niños que cursan el primer grado de educación formal utilizan menos las reglas algorítmicas, y que la dificultad de los problemas no está en la resolución de las operaciones aritméticas, sino en la comprensión de los mismos. Se tuvo, entonces, que la mayoría de los niños de preescolar fueron capaces de comprender los problemas de Cambio o Transformación, Igualación y Combinación, aunque no conozcan el algoritmo de la resta ni su procedimiento; sólo les bastó su conocimiento informal de conteo y sus dedos para resolver los problemas.

Los niños de primero transitan de un nivel de pensamiento a otro, ya que emplearon estrategias concretas y mentales de manera equitativa, a diferencia de los de preescolar, quienes se apoyaron más por las estrategias concretas y los de segundo grado que optaron por las estrategias mentales. No obstante que a los niños de primero se les facilitó el problema de Cambio o Transformación, obtuvieron menos cantidad de respuestas correctas en comparación con preescolar y segundo.

En el problema de Cambio o Transformación, el primer grado tuvo mayor éxito en comparación con los otros problemas. En relación a los otros grados, los niños de primero tuvieron menos respuestas correctas. Esto se puede explicar porque apenas están conociendo el algoritmo de la resta y les resulta más conflictivo elegir la estrategia para resolver los problemas, pues tratan de emplear las estrategias intuitivas o formales, pero como aún no las dominan entonces hay una mezcla de ambas y ésto hace que se confundan.

Al igual que preescolar y segundo grado, los niños de primero emplearon con mayor frecuencia en el problema de Cambio el procedimiento de "separar de". Utilizaron la misma cantidad de procedimientos que los de segundo y superaron a los de preescolar. Para los niños de primero sólo hubieron tres procedimientos que los llevaron a respuestas incorrectas en este problema y el procedimiento que más utilizaron en comparación con los otros dos grados fue el de "retoma de datos".

En la representación gráfica, los niños de primer grado ya emplean una estructura algorítmica de la resta, de preferencia vertical, a diferencia de los niños de preescolar, aunque todavía confundan los signos de más y menos (- +) y el orden del algoritmo; además, siguen empleando dibujos concretos como los niños de preescolar, aunque en menor cantidad.

La transición de preescolar a segundo grado también se percive en la representación gráfica de primero, pues ellos emplean dibujos concretos (dulces y palitos), números más definidos y el algoritmo de la resta de manera equitativa. A diferencia de primero, los de preescolar emplearon más dibujos de objetos concretos, no escribieron los números propiamente dichos (en la enumeración mezclaban letras, números y algunos símbolos no identificados), ni alguna representación del algoritmo de la resta. En contraste, la mayoría de los niños de segundo utilizaron el algoritmo de la resta en sus dos posiciones (vertical y horizontal), números bien definidos y representaron dibujos de dulces en escasa cantidad.

Algunos ejemplos para el problema de Cambio o Transformación en los niños de primero, son los siguientes:

- 9 = 4

- 4
- Escriben: " Contando" y luego ponen: 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- ~~/ / / / /~~ / / / /
- 

$$\begin{array}{r} 9 \\ +\ 5 \\ \hline 4 \end{array}$$

- 

$$\begin{array}{r} 9 \\ -5 \\ \hline 4 \end{array}$$

- Escribieron con letra el procedimiento

En el problema de Igualación los niños de primero también obtuvieron menor número de respuestas correctas en comparación con los niños de preescolar y segundo, pero emplearon más procedimientos que llevan a respuestas correctas que los de preescolar, aunque menos que los niños de segundo. Los más frecuentes fueron "separar de" y "separar hasta". Dentro de las repuestas incorrectas se observaron más procedimientos que llevan a respuestas correctas.

La representación gráfica es similar al del problema de cambio, pues combinan dibujos, números, algoritmos y letras. Algunos ejemplos son:

- ~~/ / / / /~~ / / / /
- ~~/ / / / /~~ / / / /
- 

$$\begin{array}{r} 9 \\ 4 \\ \hline 5 \end{array}$$

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
  1 2 3 4 5

- / / / / / ~~/ / / /~~

- Escriben con letra su respuesta: "cuatro"

Cuando las respuestas fueron incorrectas, su representación gráfica fue la siguiente:

- 9+5=14

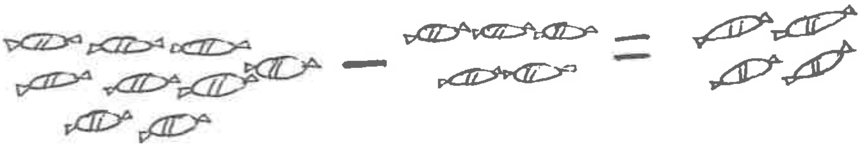
- Escriben el problemas completo.
- 4 + 1 = 5
- 3 - 3 = 0
- 5 + 5 = 10

En el problema de Combinación, los niños de primero tuvieron igual cantidad de respuestas correctas, aunque menos que los de preescolar. En cuanto a procedimientos que llevan a respuestas correctas también fue similar la cantidad en primero y segundo, pero mayor que preescolar. En respuestas incorrectas, los niños de primero emplearon menos número de procedimientos que los de preescolar y de segundo.

La representación gráfica de los niños de primero en el problema de Combinación fue con menos variedad de formas, a diferencia de preescolar y segundo. Los ejemplos más importantes para este problema, cuando las respuestas fueron correctas, son:

- 4

- $\begin{array}{r} 9 \\ 5 \\ \hline 4 \end{array}$

- 

- Trataban de escribir con letra el procedimiento.

Y cuando las respuestas son incorrectas:

- 5
- 9
- Escribe el problema
- Dibuja a dos niños cada uno con una bolsa, una de 5 y otra de 4 dulces.

En el problema de Comparación, los niños de primero obtuvieron algunas respuestas correctas, mientras que con los de preescolar no fue así; no obstante, fueron menos en comparación con segundo grado, que obtuvo mayor cantidad de respuestas correctas en este problema.

Los niños de primero sólo emplearon dos procedimientos en respuestas correctas, el más frecuente fue "separar de". En respuestas incorrectas, los de primero emplearon menos procedimientos que preescolar, pero más que segundo.

En la representación gráfica, primer grado utilizó menor número de formas para resolver los problemas, que los de segundo. Los ejemplos más relevantes son los siguientes:

Cuando las respuestas son correctas:

- $\begin{array}{r} 9 \\ 4 \\ \hline 5 \end{array}$

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9<br>1 2 3 4

- Escribían con letra el procedimiento

Cuando las respuestas son incorrectas:

- 9
- Copia todo el problema
- 3- 3 = 0
- 9 - 5 = 6

Los niños de segundo grado obtuvieron mayor cantidad de respuestas correctas en tres problemas: Cambio, Igualación y Comparación, a diferencia de preescolar y primero.

Los niños de segundo ya están más influenciados por la instrucción formal, por lo tanto limitan más su conocimiento informal (creatividad e imaginación). Ellos tienden a equivocarse menos, sus respuestas son más mentales que concretas y verbales, debido a su mayor grado de madurez cognitiva.

En la representación gráfica, los niños de segundo aumentan el uso del algoritmo como procedimiento para reafirmar sus respuestas y emplean dos posiciones del algoritmo, la vertical y la horizontal. Además, cuando no saben aplicar el algoritmo, difícilmente usan procedimientos concretos, como dibujar palitos, bolitas, dedos o dulces y separarlos, como lo hicieron los niños de preescolar; sólo se limitan a decir "no sé cómo hacerlo en la hoja".

En el problema de Cambio o Transformación, segundo grado superó a preescolar y a primero en cantidad de respuestas correctas; el procedimiento que emplearon con mayor frecuencia fue "separar hasta", a diferencia de preescolar y primero, que usaron "separar de" con mayor frecuencia. En respuestas incorrectas, los niños de segundo grado obtuvieron menor cantidad y utilizaron el procedimiento de "retoma de datos" con más frecuencia al igual que los otros grados.

Los niños de segundo grado ya son capaces de interiorizar las acciones que antes habían realizado manifiestamente por medio de modelos, pues ya han adquirido mayor eficacia en sus operaciones para resolver problemas. Esto lo demuestran en sus respuestas verbales y gráficas; en las primeras, el conteo es rápido porque emplean hechos conocidos; en las segundas también es rápido porque emplean más el algoritmo de la resta, aunque en ocasiones no la aplican correctamente.

Algunos ejemplos de la representación gráfica para el problema de cambio, cuando la respuestas son correctas, son los siguientes:

- $\begin{array}{r} 9 \\ -5 \\ \hline 4 \end{array}$
- 9 - 5 = 4
- 
- Escriben: "contando"
- Dibujaron sus manos: Cuentan 9 dedos, separar 4 con una línea.
- Escriben con letra el procedimiento.

Cuando las respuestas son incorrectas:

- 9 X 5 = 45
- 5 + 9 = 14
- Escribe el problema completo

En el problema de Igualación, los niños de segundo también obtuvieron mayor cantidad de respuestas correctas en comparación con preescolar y primero. Emplearon más procedimientos para resolverlo que los otros grados. En respuestas incorrectas, segundo grado obtuvo menor cantidad y sólo empleo un procedimiento que fue el de "retoma de datos".

Cuando las respuestas fueron correctas, la representación gráfica que los niños de segundo utilizaron para el problema de Igualación es la siguiente:

- $\begin{array}{r} 9 \\ -4 \\ \hline 5 \end{array}$
- $\begin{array}{r} 9 \\ -5 \\ \hline 4 \end{array}$
- 9 - 5 = 4
- Dibujan sus manos: cuentan 9 dedos, separan 5 y cuentan el resto.
- 
- Dibujan a una persona con 9 dulces en la mano, luego va borrando dulces hasta que le quedan 5.
- Escriben con letra su respuesta.

Cuando son incorrectas las respuestas:

- 9 x 5 = 45
- 9 + 4 = 13

- 9 + 5 = 4

En el problema de Combinación, la cantidad de respuestas correctas de los niños de segundo fue similar a la de los niños de primero, pero menor que los niños de preescolar. También emplearon la misma cantidad de procedimientos; el más frecuente fue el de "hecho conocido". En las respuestas, el procedimiento que más emplearon fue el de "retoma de datos".

La representación gráfica de los niños de segundo grado para el problema de Combinación es la siguiente:

- 9-5=4
- 9+5=14
-

$$\begin{array}{r} 9 \\ +5 \\ \hline 14 \end{array}$$

- 
- Dibujan sus dedos.
- Escriben con letra el procedimiento.

Los niños de segundo año fueron los que obtuvieron mayor cantidad de respuestas correctas en el problema de Comparación, a diferencia de los otros grados. El procedimiento que emplearon con más frecuencia en respuestas correctas fue el de "separar hasta"; en incorrectas utilizaron el de "retoma de datos".

La representación gráfica de los niños de segundo para el problema de Comparación es:

- $\begin{array}{r} 9 \\ -4 \\ \hline 5 \end{array}$

- $\begin{array}{r} 9 \\ +5 \\ \hline 14 \end{array}$

- 9-5=4

- O O O O O

- / / / / /

- Dibujan sus manos.

- Escriben con letra su respuesta.

El problema de Comparación fue más fácil de resolver para los niños de segundo, porque tienen mayor grado de interiorización; se les facilita hacer abstracciones como lo requiere dicho problema; además, el hecho de que ellos posean mayor conocimiento formal acerca del algoritmo de la resta les proporciona otra alternativa para resolverlos, pues no sólo se basa en su intuición.

Sin embargo, no siempre sucede así, pues algunos niños que aún no dominan el procedimiento del algoritmo, se equivocan y aunque saben que está mal su respuesta no buscan otra forma de resolverlo. Cabe aclarar que algunos niños sí lo hacen con éxito. Esto puede indicar que si no resuelven correctamente los problemas aplicando el algoritmo es porque aún no han entendido bien el procedimiento, pero no porque no tengan la capacidad para hacerlo, ya que algunos niños de preescolar que aún no conocen el algoritmo de la resta son capaces de llegar a respuestas correctas.

Avilés y Lira (1983), hicieron una clasificación de los procedimientos basándose en las descritas por Carpenter y Moser y Verschaffel, pero representadas por claves de acuerdo al nivel de la habilidad de los niños para emplearlas. Encontraron que los niños preescolares, aún cuando no habían recibido instrucción formal sobre los algoritmos de suma y resta, fueron capaces de resolver los problemas con sus propios recursos, valiéndose de estrategias informales de conteo, y que algunos niños, aunque ya se les hayan enseñado el algoritmo de la resta, si no la han comprendido, tienden a equivocarse.

Se puede observar con claridad la forma en que evoluciona el uso de los procedimientos y estrategias en los niños de preescolar, primero y segundo de primaria. El niño preescolar puede resolver problemas por medio de los dedos u objetos físicos con los que representa las cantidades y las relaciones entre ellas. La práctica e interiorización de ésto les permite adquirir flexibilidad y eficacia en sus operaciones. Posteriormente, el niño emplea estrategias de conteo en donde los dedos son menos utilizados, aumentan sus recursos empleando también estrategias verbales y mentales, como es el caso de los niños de primer grado de primaria. Los niños de segundo se encuentran en una etapa de mayor madurez, utilizan menos las estrategias concretas y aumenta el uso de estrategias verbales y mentales.

Asimismo, se observa que de acuerdo al nivel evolutivo en que se encuentre el niño, depende el tipo de estrategia que utiliza y el tipo de procedimiento que elige. Los niños que responden correctamente ya tienen clara la noción de resta, aunque no su representación simbólica, ya que de una o de otra manera utilizan la resta para resolver el problema.

El niño, antes de llegar a la escuela aprende que el número puede especificar diferencias entre conjuntos (no equivalencia) y emplearse para especificar más o menos (ordenar conjuntos según magnitud). Contar con los dedos desempeña un papel clave en este desarrollo del número, los niños pueden reconocer que la magnitud va asociada a la posición dentro de la serie numérica (Bryan, 1994).

López (1988) menciona que los niños de los primeros grados de educación formal utilizan menos las reglas algorítmicas, lo cual se incrementa en cuarto grado y disminuyen en quinto y sexto. En esta investigación se encontró que en el nivel de preescolar no se utiliza el algoritmo de la resta para resolver los problemas, en primer año ya se empieza a utilizar aunque frecuentemente se presenta confusión de los signos y dificultad para ordenar la estructura algorítmica. En segundo grado se utiliza con mayor frecuencia el algoritmo de la resta aunque sigue habiendo confusión en lo mismo.

Es claro que el niño puede resolver problemas sin el uso del algoritmo y resolver operaciones algorítmicas desligados de un problema contextual. Lo importante de ésto, es saber cómo contrastar el uno y lo otro; cómo resolver problemas aditivos empleando el algoritmo de la resta. Dada la situación, creemos que la dificultad de la resolución de los problemas aditivos está en la comprensión de los mismos y en el uso del algoritmo de la resta como herramienta para la resolución de éstos.

En cuanto los errores, en los tres grados escolares dependieron del tipo de problema que se presentaba, y los más recurrentes fueron el de "retoma de datos" y "relación incoordinada de datos". Algunos niños daban respuestas correctas verbalmente, pero en el momento de gráficar no sabían qué hacer y representaban la operación que les estaban enseñando en la escuela, en ésto nuestros resultados coinciden con los de Kouba (1985), quien encuentra que el error más frecuente en los niños de primero a tercer grado es el uso de números dados y el uso de operaciones erróneas.

Bebout (1983), en su estudio acerca de los errores que presentan los niños en los problemas aditivos verbales, los categoriza como: a) errores de representación, los cuales se refieren a modelos de procedimientos que incluyen las siguientes categorías: operación falsa, repetir algún número dado, adivinar y no intentar; b) errores de resolución, los que ocurrieron después de usar la estrategia apropiada; incluyen las siguientes categorías: computación, repetir algún número, modelo incorrecto de un modelo dado.

En está investigación los resultados son similares a los de Bebout (1983); en preescolar los errores más frecuentes fueron de representación, en segundo año de resolución, y en primero se presentaron ambos tipos de errores.

Hasta aquí, se ha dado una explicación de los resultados de la investigación, pero falta concretizar si se cumplieron los objetivos de la investigación y las evidencias que se aportan sobre el conocimiento informal o intuitivo con respecto a la operación de la resta.

En cuanto a los objetivos planteados al inicio de la investigación creemos que se han cumplido satisfactoriamente. Primero, se identificaron los procedimientos que los alumnos de preescolar, primero y segundo de primaria utilizan para resolver problemas aritméticos que implican la operación de la resta. Con el método empleado se logró que los niños respondieran a lo que se les pidió. Después, con los datos ya obtenidos, se hizo una comparación de los tres grados escolares observándose diferencia entre ellos. A partir de ésto hemos derivado una serie de observaciones sobre el conocimiento intuitivo de los niños con respecto a la operación de la resta.

En un principio pudimos constatar que el niño es capaz de resolver problemas empleando recursos espontáneos, evitando los algoritmos, más aún, la mayoría de los niños de preescolar resolvieron ciertos problemas sin conocer el algoritmo de la resta. Comprobamos además, que otros niños (la mayoría de segundo grado) pueden aplicar los algoritmos cuando han logrado coordinar la convencionalidad de este conocimientos con la comprensión de la estructura del problema.

Esto, por supuesto no implica que neguemos la importancia de los algoritmos y del sistema de la numeración escrita en tanto apoyo a las conceptualizaciones del número, de las operaciones aritméticas y de la solución de problemas. Más bien, consideramos que los niños ante una tarea de resolución de problemas aditivos, privilegia su comprensión para acceder a los mismos aplicando procedimientos espontáneos, empleando los convencionales hasta que cuentan no sólo con el dominio del algoritmo sino también con la cordinación de este cálculo numérico con el cálculo relacional implícito en el problema.

Así mismo, encontramos que algunos niños de segundo pueden resolver algoritmos de la resta pero no pueden emplearlos para la resolución de problemas, lo que implica que para algunos niños, carecen de contexto y en consecuencia, de significado. Es evidente que el niño encuentra los algoritmos y los problemas como dos conocimientos disociados.

Encontramos, que detrás de los resultados de los algoritmos y problemas, existe todo un proceso de razonamiento y construcción por parte del niño, lo cual se pudo observar debido a que se les dio la oportunidad de verbalizar para explicar su razonamiento y justificar su procedimiento. La importancia de esto es que se tiene la posibilidad de conocer las hipótesis y obstáculos de los niños, así como de identificar la manera en que conceptualizan el problema presentado.

Pudimos percatarnos de que las respuestas erróneas de los niños, en ocasiones no constituyen actos fortuitos, sino que responden a la lógica del niño y a la necesidad de recurrir a esquemas conocidos ante la incomprensión de las relaciones implicada en el problema. Este tipo de respuestas son erróneas en relación a las espectativas del maestro, pero correctas en relación con el esquema activado por el niño. Nuestra experiencia nos muestra que calificar un contenido matemático como fácil o difícil desde la lógica del adulto es muy diferente que hacerlo desde la lógica del niño.

En consecuencia, una evaluación del aprendizaje matemático tiene que corresponder a las características cognitivas del niño; es decir, servir de un instrumento para identificar sus hipótesis correspondientes a algún conocimiento determinado, más que clasificar sus respuestas en correctas e incorrectas.

Ahora bien, si consideramos que todo conocimiento implica un proceso de construcción, estamos en la posibilidad de reconocer y respetar el proceso de los niños, así como de proporcionarles actividades pedagógicas que faciliten y promuevan su aprendizaje.

# C O N C L U S I O N E S

Respecto de la comprensión de la estructura semántica de los problemas se observaron diferentes grados de complejidad:

- Los problemas más difíciles fueron el de "combinación" y "comparación" debido a la estructura semántica, por lo que la mayoría de los niños sacaba las respuestas del texto;
- Los problemas fáciles fueron el 1 (cambio o transformación) y el 4 (igualación ). La estructura semántica de estos problemas fue fácil de comprender;
- En varias ocasiones, el empleo del lápiz y papel facilitó la comprensión del problema. En muchas otras, sobre todo en el segundo grado, no se sabía qué hacer con ese material;
- No siempre hubo consistencia entre las respuestas correctas y la comprensión de los problemas. Se dieron respuestas incorrectas en donde había clara comprensión del problema y respuestas correctas en donde no hubo comprensión:
- Cuando hubo comprensión del problema, los errores más frecuentes en las respuestas se debieron a equivocaciones en el conteo. Las respuestas correctas, a pesar de no haber comprensión del problema, se debieron a:

1) Como los personajes y los números que aparecen en el texto de todos los problemas son iguales los niños pensaron que la respuesta era la misma para todos los problemas; 2) Se limitaban a escuchar los números del problema y procedían a restarlos. Esto se apreció cuando el mismo niño intentaba resolver otro problema sumando las cantidades en lugar de restarlas y, además, no sabía explicar de

qué se trataba el problema; 3) Otras veces sólo adivinaba las respuestas porque a la hora de interrogar la comprensión del problema no sabía explicar lo que se le pedía;

- A los niños de preescolar, aún cuando daban la respuesta correcta y comprendían los problemas, se les dificultó explicar cómo lo habían resuelto. A la mayoría de los niños de segundo se les facilitó explicar su respuesta aunque no fuera correcta;

- Dependiendo del nivel en que se encuentre el niño es el tipo de estrategia que utiliza y el tipo de procedimiento que elige; un mismo niño puede cambiar de estrategia frente a un mismo problema, incluso cuando cambia de grado escolar.

- Cuando el niño comprende el problema puede solucionarlo con éxito, independientemente del grado escolar y de la estrategia que utilice.

Respecto a las estrategias empleadas:

- Ante un mismo tipo de problema, los niños emplean diversas estrategias de resolución;

- Para resolver los problemas, los niños emplearon estrategias similares a las reportadas por Carpenter y Moser (1982) y De Corte y Verchaffel (1987). Se distinguieron las tres categorías de estrategias: concretas, verbales y mentales;

- En el nivel preescolar, la mayoría de estrategias empleadas fueron concretas (utilizaron sus dedos);

- En el primer grado también predominaron las concretas, pero también hubo algunas verbales y mentales;

-Los niños de segundo grado, a diferencia de los otros grupos, eligieron con menor frecuencia las estrategias concretas y emplearon más las verbales y las mentales. Los problemas que implican "combinación" y "comparación" fueron los más complejos, en los cuales los niños utilizaron estrategias concretas y verbales. En los problemas más simples (cambio o transformación e igualación) emplearon con más frecuencia la estrategia mental;

- En los problemas 1 (cambio) y 2 (combinación) predominó el procedimiento "separar de" (primero el conjunto total y después el subconjunto) y dentro de la estrategia verbal fue el de "conteo hacia adelante";
- Para el problema 3 (comparación), el procedimiento "retoma de datos" fue el más frecuente, debido a la confusión de la estructura semántica;
- Para el problema 4 (igualación), los niños de preescolar utilizaron el procedimiento de "emparejamiento" en su respuesta gráfica, pero en la concreta utilizaron "separar de", lo cual no se encontró en la resolución de los otros problemas, ni en los otros grados;
- El que los niños conozcan el uso y procedimientos del algoritmo no implica que logren una respuesta con éxito, ya que para ello es necesario, primero, comprender el problema.

## RECOMENDACIONES GENERALES

Al termino de esta investigación damos a continuación una serie de recomendaciones dirigidas a todos aquellos que están involucrados en la tarea educativa, principalmente aquellos que se dedican a la elaboración de planes y programas; y, a proporcionar una enseñanza formal e institucional de nivel preescolar y primeros grados de primaria, en general a todos aquellos que se dedican a evaluar el conocimiento del niño.

De esta manera los que elaboran planes y programas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas deberán tomar en cuenta que:

- De preescolar a segundo grado hay un gran paso cualitativo en la manera de resolver problemas; esta diferencia se observa en los niños de primer grado, porque presentan mayor diversidad de procedimientos y estrategias. Así, el primer año de primaria es fundamental para el aprendizaje de la matemática formal, porque el pensamiento del niño se encuentra en una etapa de transición, por lo que se recomienda mayor atención a los procedimientos de resolución que presentan los niños de primer grado;

- A pesar de que en segundo de primaria se tiene mayor comprensión de los problemas, con respecto a preescolar y primero de primaria, se presenta mayor confusión para elegir procedimiento, por lo que es necesario que en primer año se dé mayor relevancia a los procedimientos informales que utilizan los niños y se contrasten con los formales para que poco a poco se vayan familiarizando con éstos y puedan aplicarlos sin confusión;

- Antes de enseñar el algoritmo de la resta como tal y con sus reglas formales, es necesario incursionar al algoritmo por medio de problemas cotidianos. No separar lo cotidiano de lo académico ni lo intuitivo de lo formal.

Mientras que los maestros o docentes dedicados ala enseñanza institucionalizada deben tomar en cuenta que:

- Se debe darle más importancia al uso de objetos concretos, ya que para tener un pensamiento abstracto primero tiene que ser concreto. No se debe reprimir al niño si utiliza sus dedos.

- En la evaluación del conocimiento matemático, más que tener en cuenta si la respuesta es correcta e incorrecta, se requiere un análisis de los procedimientos de solución que utilizan los niños;
- Se debe respetar el conocimiento informal del niño para obtener un mayor aprovechamiento en su aprendizaje.

# REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS


Avilés, A. A. y Lira, C. M. (1993). Una alternativa para la enseñanza de la adición y la sustracción:propuesta apoyada en la resolución de problemas verbales aditivos simples por los niños de 5 a 7 años. (Tesis). México: Benemérita Escuela Nacional de Maestros, Secretaría de Educación Pública, Dirección General de Educación Normal y Actualización del Magisterio. 190 p.

Baroody, A. (1988). El pensamiento matemático de los niños: un marco evolutivo para maestros de preescolar, ciclo inicial y de educación especial. (1a. ed. en español, 1985). España, Madrid: Visor.

Bebout, H. C. (1983). Children's error patterns on addittion and substraction verbal problems. en: Proceeding of the seventh International Conference for the Psichology of Mathematics Education- NA. Suzannek,d. y Marily, S. (eds). Ohio, U.S.A. pp. 8-12

Bermejo,V. (1990). El niño y la aritmética: instrucción y construcción de las primeras nociones aritméticas. España: Visor.

Brissiaud,R. (1993). El aprendizaje del cálculo:Másallåde Piaget y la teoría de los conjuntos. España: Visor, 233 p.

Byers, V., Erwanger, S. (1984) El contenido y la forma matemática. En: Universidad Pedagógica Nacional (1991). (ed.) Pedagogía: matemática en el aula. México: U.P.N. 7, 21.

Carey, S. (1991). Knowledge acquisition: Enrichmente or conceptual change? En: Susan Carey y Rochel Gelman. The epigenesis of mind. Essaysson biologyon cognition. New Jersey: Lawrence Erbaum. pp.257-291.

Carpenter, T. P. y Moser, J. M. (1982) The development of additionand subtraction problem-solving skills en: Carpente, Moser y Romberg (eds). Addition and substraction: a cognitive perspective. New Jersey: Hillsede pp. 9-24

Carpenter, T. P. y Moser, J. M. (1983). The adquisition of addition and subtraction concepts. en: R. Lesh, y M. Landau (comps.). Acquisition of mathematics: Concepts and processes. Nueva York: Academic Press. pp. 7-44

De Corte, E. y Vershaffel, L. (1984). "Arithmetics problem solving in elementary school children's: some finndings of a belgian". En: Suzannek. D. y Marily, S. (eds). Ohio, USA.Proceding of the seventh International Conference for the Psychology of mathematics Education - NA.

De Corte, E. y Vershaffel, L. (1987). Writing number sentence to representation adition and substraction.

Dienes, Z. P. (1971). Operaciones aditivas. España: Taide.

Fischbein, E. (1975). Intuition and intelligence. En The intuitive source of probabilistic thinking in children. Boston: Kerdel. pp. 5-19.

Gelman, R. (1990). Structural constrains on cognitive development: introduction to a special issue of cognitive science. En Cognitive Science. 14, 3-9.

Gelman, R. y Baillergeon (1983). A review of some piagetian concepts. En: P. H. Mussen (comps.). Handbook of child psychology 3 pp. 167-230

Gelman, R. y Gallistel, C. P. (1978). The child's undestanding of number. Cambridge, M. A.: Harvard University Press.

Gelman, R. y Meck, E. (1983). Prescholers' counting: principles before skill. En: Cognition. 13 pp. 343-359

Ginsburg, H. (1982). The development of addition in the constexts of culture, social class and race. en: Carpenter, Moser y Romberg (comps). Addition and substraction: a cognitive perspective. New Jersey: Hillselde

Guevara, N. (1991). México: un país de reprobados. En: Nexos. 162. JUN.

Greeno, J. H.; Heller, J. I. y Riley, M. S. (1978). Development of childrens problem-solving ability in arithmetic. en: H. P. Ginsburg (ed). The development of mathematical thinking. Nueva York: Academic Press.

Juárez, H. C. (1994). Procedimientos y representación gráfica de alumnos de preescolar y primaria en la resolución de problemas de adición y sustracción. Reporte de investigación U.P.N. Ajusco.

Karmiloff-Smith, A. (1991). Beyond modularity: innate constrain and developmental change. En: Carey, S., Gelman, R. The epigenesis of mind: assays and cognition. New Jersey: Lawerence Erlbaum. pp. 171-197.

Kauoba, V. L. (1985). Young-children's error patterns on addition substraction, multiplication and division word problems. En Proceedings of the seventh Annual Meeting. (PME-NA). Suzanne, K. Damarin y Meruly, S. (eds). Columbus, Ohio. USA pp.174-179.

Landa, L. N. (1978). Enseñanza de las técnicas de razonamiento a estudiantes: Métodos algorítmicos para la enseñanza y el aprendizaje. México: Trillas. pp. 32-51.

López, M. A. (1987). ¿Qué piensan los niños sobre la escritura de las operaciones aritméticas elementales? en: Memorias de la primera reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación en matemática educativa. DIE-CINVESTAV-IPN. pp. 135-140.

López, M. A. (1988). ¿Qué saben los niños sobre la escritura de las operaciones aritméticas elementales? y Los niños inventan problemas. México: DGEE-SEP-OEA.

Maza, G. C. (1989). Sumar y restar: El proceso de enseñanza/aprendizaje de la suma y de la resta. España: Visor 122p.

Nesher, P. (1982). Levels of description in the analysis of addition and subtraction word problems. en: Carpenter, Moser y Romberg (comps). Addition and substraction: a cognitive perspective. New Jersey: Hillselde. pp. 25-38.

Nicolás, A. (1978). Jean Piaget (1a. ed. en español, 1976). México: Fondo de Cultura Económica. pp.97-98.

Not, L. (1983)."El conocimiento matemático". en: Las pedagogías del conocimiento. México: Fondo de Cultura Económica

Piaget, J. (1978). Introducción. en: La representación del mundo en el niño. (4a. ed.) Madrid, España: Morata. pp. 11-36.

Piaget, J. y Szeminska. (1987). Génesis del número en el niño. (1a. ed. en español, 1964). Argentina, Buenos Aires: Guadalupe. 288 p.

Puig, C. y Cerdan, F. (1989). Problemas aritméticos: Edición síntesis. España: Visor. 217 p.

Radford (1989). Hacia una pedagogía de la matemática. en: Pedagógia: matemática en el aula. (1991) México: U.P.N. 7, 21

Riley, M. S. y Greeno, J. H. (1988). Developmental analysis of understanding language about quantities and of solving problems. en: Cognition and instruction 5. 49-101.

Rockwel, E. y Mercado, R. (1986). La escuela, lugar del trabajo docente. Descripción y debates. México: DIE-CINVESTAV-IPN.

Sierra y Gallardo. (1986). Análisis de los programas de primero y segundo grado de la escuela primaria en el área matemática.(Tesis) México: U.P.N.

Vargas, J., cols. (1988). La adquisición de las operaciones aritméticas elementales en niños de primaria. México: DGEE-SEP-OEA.

Velázquez, I. (1988). Estrategias pedagógicas en los niños de primaria con dificultades en el aprendizaje de la matemáticas: Fascículo 2: Problemas y operaciones de suma y resta. México: DGEE-SEP-OEA.

Vergnaud, G. (1991). El niño, las matemáticas y la realidad: problemas aditivos. (1a. ed. en español, 1984). México: Trillas.

Ving-Bang (1966). El método clínico y la investigación en psicología del niño. En Psicología y epistemología genética, temas piagetianos. París: Dunod. pp. 67-81

Von Glasersfeld, E. (1982). Subitizing: The role of figural patterns in the development of numerical concepts. en: Archives the psychologi, 50. 191-218.

Wynn, K.(1992). Addition and subtraction by human infants. en: Nature, 358 pp.749-750